

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



## DIPLOMOVÁ PRÁCA

ANALÝZA A MODELOVANIE VPLYVU EKONOMICKÝCH A SOCIÁLNYCH  
PROCESOV NA VÝVOJ VYBRANÝCH DEMOGRAFICKÝCH UKAZOVATEĽOV  
V KRAJINÁCH V4

BRATISLAVA 2011

Bc. JANA MATEJKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

**ANALÝZA A MODELOVANIE VPLYVU EKONOMICKÝCH A SOCIÁLNYCH  
PROCESOV NA VÝVOJ VYBRANÝCH DEMOGRAFICKÝCH UKAZOVATEĽOV  
V KRAJINÁCH V4**

Bc. JANA MATEJKOVÁ

Vedúci diplomovej práce: RNDr. František Hajnovič

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika  
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Evidenčné číslo: 549595a5-1b28-4511-9cdd-926b0e7b2c3d

BRATISLAVA 2011



## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Jana Matejková  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov :** Analýza a modelovanie vplyvu ekonomických a sociálnych procesov na vývoj vybraných demografických ukazovateľov v krajinách V4

**Cieľ :** Sprehľadniť základné poznatky a analyzovať dostupnými štatistickými a ekonometrickými metódami vplyv ekonomických a sociálnych faktorov na vývoj vybraných demografických ukazovateľov v krajinách V4. Dôraz položiť na identifikáciu vplyvu ekonomických a spoločenských zmien na analyzovaný vzťah medzi ekonomickou úrovňou a demografickými procesmi.

**Vedúci :** RNDr. František Hajnovič

**Dátum zadania:** 10.02.2010

**Dátum schválenia:** 15.04.2011

.....  
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

.....  
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s využitím teoretických vedomostí, s použitím uvedenej literatúry a pomocou konzultácií s vedúcim diplomovej práce.

Bratislava 2011

.....  
Jana Matejková

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce, RNDr. Františkovi Hajnovičovi, za odborné vedenie, ochotu a cenné rady, ktoré pomohli pri tvorbe mojej diplomovej práce.

## Abstrakt

MATEJKOVÁ, Jana: Analýza a modelovanie vplyvu ekonomických a sociálnych procesov na vývoj vybraných demografických ukazovateľov v krajinách V4 [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci diplomovej práce: RNDr. František Hajnovič, Bratislava, 2011, 73 s.

V diplomovej práci sa zameriavam na analýzu vplyvu ekonomických a sociálnych faktorov na demografický vývoj. Konkrétne analyzujem vplyv úrovne HDP na obyvateľa v parite kúpnej sily na očakávanú dĺžku života a úhrnnú plodnosť. Overujem Prestonovu krivku a demograficko-ekonomický paradox, ktoré väčšinou pozorujeme na paneli veľkého počtu krajín z celého sveta s veľkými rozdielmi v ekonomickej úrovni, ja sa sústredím na špecifický panel menej rozvinutých európskych krajín V4, ktoré sú súčasne charakterizované spoločenskými a politickými zmenami na začiatku 90-tych rokov. Tieto zmeny mali zásadný vplyv na vývoj ekonomických aj demografických ukazovateľov a dlhodobé vzťahy medzi nimi prechádzali určitými zmenami. Taktiež porovnávam situáciu s vyspelejšími krajinami EÚ, ktoré sú už v neskoršej fáze demografickej transformácie, a teda ich správanie sa mierne odlišuje od krajín V4. V práci sa potvrdila očakávaná pozitívna závislosť očakávanej dĺžky života od úrovne HDP na obyvateľa a tiež aj negatívnu závislosť úhrnnej plodnosti od HDP na obyvateľa. Úhrnná plodnosť však vo vyspelejších a bohatších krajinách môže s nárastom HDP na obyvateľa aj rásť, vzhľadom na lepšie vytvorené podmienky na založenie si rodiny v krajine a taktiež aj iné faktory, teda demograficko-ekonomický paradox neplatí vo všeobecnosti vo všetkých krajinách. Na modelovanie závislosti využívam panelovú regresiu, ktorá umožňuje prácu s prierezovými a časovými údajmi súčasne.

Kľúčové slová: demografická transformácia, Prestonova krivka, očakávaná dĺžka života, demograficko-ekonomický paradox, úhrnná plodnosť, panelová regresia

## **Abstract**

MATEJKOVÁ, Jana: Analysis and modelling of impact of economic and social processes on development of particular demographic indexes in countries of V4 [Diploma work], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics

Advisor: RNDr. František Hajnovič, Bratislava, 2011, 73 pages

In my diploma work, I focus on analysis of impact of economic and social factors on the demographic development. Specifically I analyze impact of GDP per capita in PPP on life expectancy and total fertility rate. I confirm the relevance of Preston curve and demographic-economic paradox, which are mostly to be seen in panels with many countries from all over the world with great diversity in level of economic development, but I focus on a specific panel of less developed european countries of V4, which are also characterized by social and political changes in the beginning of 90-ties. These changes had principal effect on development of economic and demographic indicators and long-run relationships between them underwent some particular changes. Also compare the situation with more developed countries in EU, which are now in later phase of demographic transition, so their behavior is slightly different from countries of V4. In my work, I confirmed the expected positive dependency of life expectancy on GDP per capita and also the negative dependency of total fertility rate on GDP per capita. Although in developed and richer countries of EU, total fertility rate can even rise with rise in GDP per capita, regarding better conditions for families in the country and also some other factors, so demographic-economic paradox isn't proved generally in all countries. For modelling, I used panel regression, which allows for cross-sectional and time series data at the same time.

Key words: demographic transition, Preston curve, life expectancy, demographic-economic paradox, total fertility rate, panel regression

# Obsah

Úvod	8
1. Základné demografické pojmy	10
2. Ekonomická demografia	11
2.1. Demografická transformácia	11
2.2. Medzigeneračná výmena	18
2.3. Populácia a rozvoj	19
2.4. Demografická dividenda	19
2.5. Demografické okno	20
2.6. Demografická pasca	23
2.7. Demograficko-ekonomický paradox	24
2.8. Prestonova krivka	25
3. Panelové dáta	29
3.1. Panelové modely	29
3.1.1. Spojený regresný model	30
3.1.2. Model s fixnými efektmi	30
3.1.3. Model s náhodnými efektmi	32
3.1.4. Hausmanov test	33
3.1.5. Nebalancované modely	33
3.2. Nestacionárne panelové dáta	35
3.2.1. Panelové testy jednotkového koreňa	36
3.2.2. Kointegrácia	38
3.3. Práca s panelovými dátami	40
4. Modelovanie demografických procesov	43
4.1. Prestonova krivka	43
4.2. Demograficko-ekonomický paradox	57
Záver	69
Literatúra	71



## Úvod

Existujú rôzne štúdie, ktoré sa zaoberajú pôsobením demografických ukazovateľov na ekonomický rozvoj. Či už je to veková štruktúra populácie, ktorá ovplyvňuje úroveň HDP v krajine, cez pracovnú silu a taktiež aj veľkosť príspevkov štátu pre závislé skupiny obyvateľstva, ako sú deti či dôchodcovia. Očakávaná dĺžka dožitia taktiež ovplyvňuje ekonomiku. Štát musí prispôsobiť dôchodkový vek očakávanej dĺžke života tak, aby mal odkiaľ čerpať finančné zdroje na výplatu dôchodkov. Hrubá miera pôrodnosti ekonomiku na jednej strane ovplyvňuje okamžite, a to zmenšenou pracovnou silou u žien, ktoré ostávajú so svojimi deťmi doma a neskôr aj príspevkami pre deti, či už na starostlivosť, ale aj na ich vzdelanie. Tieto príspevky sa štátu o niekoľko rokov vrátia, keď sa deti dostanú do produktívneho veku.

Existuje však aj opačný pohľad na kauzalitu. Ekonomická situácia taktiež môže ovplyvňovať demografické ukazovatele. Väčšie bohatstvo krajiny môže pozitívne vplývať na očakávanú dĺžku života. Tiež chudobnejšie krajiny dosahujú väčšinou vyššie hodnoty úhrnnej plodnosti ako bohatšie krajiny, hoci intuitívne by sme mohli očakávať práve opačnú závislosť. Bohatstvo krajiny budeme merať pomocou úrovne HDP na obyvateľa v parite kúpnej sily.

Taktiež je dobré povedať, že tieto vzťahy nie sú v čase konštantné, teda ich charakter sa počas vývoja krajín menil. Na zmenu vplývala najmä demografická transformácia a rozvoj v oblasti technológie a medicíny. Každá fáza demografickej transformácie je charakterizovaná určitými hodnotami demografických a ekonomických ukazovateľov, a teda aj vzťahmi medzi nimi.

Cieľom diplomovej práce je overiť platnosť teoretických demograficko-ekonomických hypotéz. Konkrétne budem pracovať s panelom krajín V4, teda s Českou republikou, Maďarskom, Poľskom a so Slovenskou republikou. Tieto krajiny patria medzi menej rozvinuté štáty EÚ a v posledných desaťročiach prechádzali demografickou transformáciou. Zaujímavé bude taktiež ich porovnanie s rozvinutými krajinami EÚ, ktoré prešli transformáciou o niekoľko rokov skôr.

Prvou hypotézou, ktorú budem bližšie skúmať, je závislosť očakávanej dĺžky života od bohatstva krajiny. Očakávame kladný vzájomný vzťah, pričom pre bohatšie krajiny so stúpajúcim bohatstvom slabne reaktivácia očakávanej dĺžky života.

Ďalšou demograficko-ekonomickou hypotézou je vzťah medzi úhrnnou plodnosťou a bohatstvom krajiny. Očakávaný je záporný vzťah, kedy so stúpajúcim bohatstvom krajiny klesá úhrnná plodnosť.

Tieto vzťahy nie sú úplne jednoznačné a závisia od toho, v akej fáze demografickej transformácie sa krajina nachádza. Pre menej rozvinuté krajiny, ktoré sa nachádzajú v skorších fázach demografickej transformácie, sú tieto závislosti veľmi výrazné a aj malá zmena vo vysvetľujúcej premennej spôsobí veľkú zmenu v závislej premennej. Avšak pre krajiny v neskoršej fáze demografickej transformácie už tieto vzťahy nie sú také výrazné. Očakávaný záporný vzťah úhrnnej plodnosti a bohatstva platí len do určitej hranice. Keď krajina prekročí istú hodnotu bohatstva, úhrnná plodnosť už ďalej neklesá. Často sa stáva, že v takýchto krajinách začne úhrnná plodnosť opäť narastať aj napriek ďalšiemu nárastu bohatstva.

V prvej kapitole objasňujem niektoré základné demografické pojmy používané v práci. Druhá kapitola je venovaná ekonomickej demografii, kde bližšie popisujem pojmy demografickej transformácie, Prestonovej krivky, demograficko-ekonomického paradoxu a ďalších súvisiacich javov, pričom ich prezentujem aj na konkrétnych krajinách V4, či krajinách celej Európy a sveta.

V tretej kapitole popisujem ekonometrickú a štatistickú teóriu panelových dát, ich analýzu a využitie v praxi.

Záverečná štvrtá kapitola je venovaná empirickému pozorovaniu vývoja demografických a ekonomických veličín v krajinách V4, tvorbe modelov na potvrdenie demograficko-ekonomických hypotéz so zreteľom na technologické a spoločenské zmeny v krajinách na začiatku 90-tych rokov. V prvej časti kapitoly overujem platnosť Prestonovej krivky, pričom modelujem závislosť aj s využitím viacerých vysvetľujúcich premenných. V druhej časti sa venujem demograficko-ekonomickému paradoxu, pričom hľadám model, ktorý najlepšie vysvetľuje zmeny vo vývoji úhrnnej plodnosti, a porovnávam situáciu v krajinách V4 so situáciou vo vyspelejších európskych krajinách.

# 1. Základné demografické pojmy

Predtým, ako prejdeme do problematiky demograficko-ekonomických procesov, je potrebné upresniť niektoré demografické pojmy, ktoré budeme používať.

**Hrubá miera úmrtnosti** (*Crude death rate - CDR*) – počet zomrelých na 1000 obyvateľov stredného stavu, obyčajne za rok.

**Hrubá miera pôrodnosti** (*Crude birth rate - CBR*) – počet živonarodených na 1000 obyvateľov stredného stavu, obyčajne za rok.

**Miera dojčenskej úmrtnosti** (*Infant mortality rate - IMR*) – počet zomretých do jedného roka na 1000 živonarodených, obyčajne za rok.

**Úhrnná plodnosť** (*Total fertility rate*) – priemerný počet živonarodených detí pripadajúcich na jednu ženu počas jej celého reprodukčného obdobia (15 - 49 rokov), pri zachovaní úrovne plodnosti sledovaného roka a za predpokladu nulovej úmrtnosti.

**Stredná (očakávaná) dĺžka života pri narodení** (*Life expectancy at birth*) - priemerný počet rokov, ktoré pravdepodobne prežije práve narodená osoba, za predpokladu, že sa úmrtnostné pomery nezmenia.

**Hrubá miera sobášnosti** (*Crude marriage rate*) - počet sobášov na 1000 obyvateľov stredného stavu, obyčajne za rok.

**Úroveň úplnej náhrady** - stav, kedy žena porodí toľko detí, aby tým nahradila seba a svojho partnera.

**Náklady za výchovu dieťaťa** - celkové náklady, ktoré musia rodičia vynaložiť na starostlivosť o svoje dieťa až do jeho dospelosti.

**Index ekonomickej závislosti mladých ľudí** (*Young age dependency ratio*) – počet osôb v predproduktívnom veku na 100 osôb v produktívnom veku.

**Index ekonomickej závislosti starých ľudí** (*Old age dependency ratio*)- počet osôb v poproduktívnom veku na 100 osôb v produktívnom veku. [12]

## 2. Ekonomická demografia

Ekonomická demografia je aplikáciou ekonómie v demografii, teda v štúdiu ľudskej populácie, vrátane jej veľkosti, rastu a iných štatistík ohľadom počtu narodených alebo počtu zomrelých. V analýzach sa rozoberá vplyv ekonomických ukazovateľov a tiež aj vplyv sobášnosti, rozvodovosti, indexu ekonomickej závislosti, očakávanej dĺžky života, či demografickej transformácie.

Ekonomiku môžeme rozdeliť na mikroekonomiku a makroekonomiku. Mikroekonomika sa sústreďuje najmä na správanie sa firiem, domácností a individualít, pričom skúma aj výmenu zdrojov. Každá osoba má zdroje v podobe materiálového alebo finančného bohatstva a času. Tie môže ďalej vymieňať za rôzne tovary alebo služby podľa svojej funkcie užitočnosti.

Makroekonomika sa sústreďuje na dlhodobý celkový rast a na krátkodobé fluktuácie, napríklad v inflácií alebo v miere nezamestnanosti. Tie môžu ovplyvniť aj niektoré demografické ukazovatele, ako je miera sobášnosti, rozvodovosti, úmrtnosti, či pôrodnosti. Na druhej strane demografické ukazovatele veľmi neovplyvňujú krátkodobé fluktuácie v ekonomike, vzhľadom na to, že demografické ukazovatele sa menia viac postupne ako ekonomické ukazovatele.

Jedným zo základných makroekonomických modelov je model Samuelsona (1958), ktorý pojednáva o medzigeneračnej výmene. Jeho model zahŕňa vekovú štruktúru a populáciu zloženú z prekrývajúcich sa generácií. Nie je neobvyklé, ak sa celková populácia skladá iba z troch vekových skupín, pričom sa uvažuje, že miera úmrtnosti je vo všetkých skupinách rovnaká, čo je dosť obmedzujúci predpoklad.

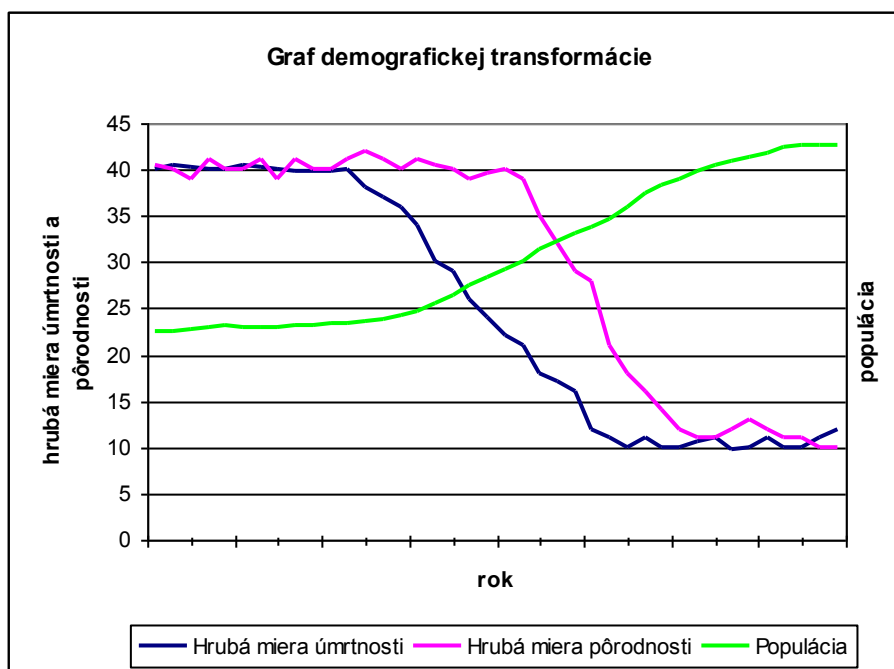
Zdôrazňované sú najmä dve oblasti výskumu, a to medzigeneračná výmena, populácia a rozvoj. Ešte však pred ich bližším popisáním objasníme pojem demografickej transformácie, ktorá hrá významnú úlohu v ekonomickej demografii. [21]

### 2.1 Demografická transformácia

Demografická transformácia je model, ktorý popisuje populáciu a jej zmenu v čase. Je založený na interpretácií demografickej histórie z roku 1929, ktorú opísal americký demograf Warren Thompson. Ten pozoroval zmeny v miere pôrodnosti, resp. úmrtnosti v industrializovaných spoločnostiach za posledných približne 200 rokov.

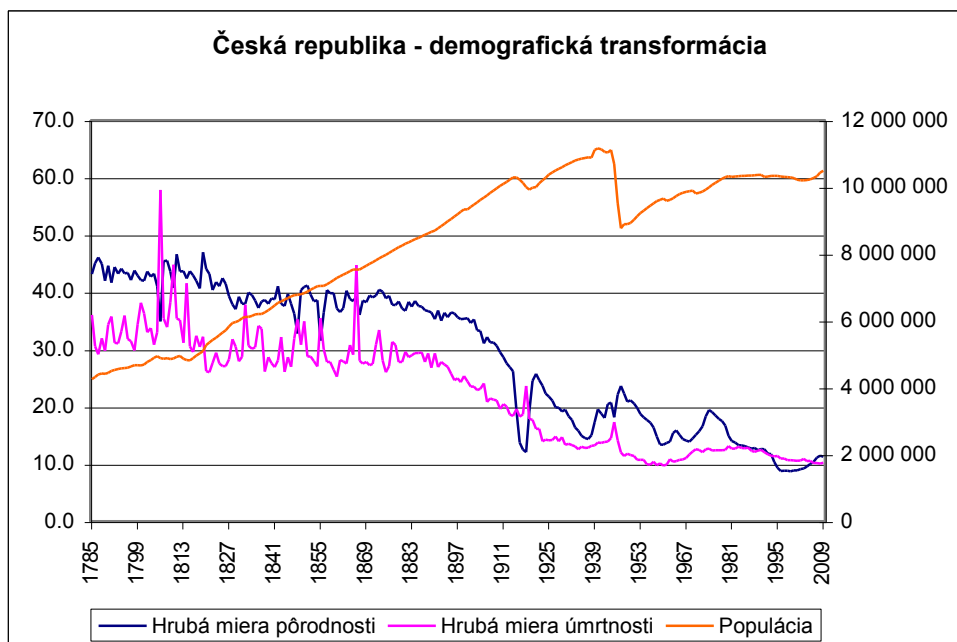
Vo všeobecnosti by mal mať graf demografickej transformácie nasledovnú podobu.

Graf 2.1: Priebeh modelu demografickej transformácie



Na grafe 2.2 môžeme na skutočných dátach pozorovať priebeh demografickej transformácie v Českej republike od roku 1785. Na začiatku sú obe miery pôrodnosti a úmrtnosti na pomerne vysokej úrovni, pričom populácia mierne rastie, nakoľko hrubá miera pôrodnosti je stále o čosi vyššia ako hrubá miera úmrtnosti. Koncom 19. storočia dochádza k poklesu oboch hrubých mier, pričom rozdiel medzi nimi sa prehĺbi. Celková populácia začína rásť rýchlejším tempom. Približne od 80-tych rokov 20. storočia sa populácia stabilizuje, pričom hrubá miera pôrodnosti aj úmrtnosti sú na nízkej úrovni. Na konci 20. storočia dochádza ku krátkodobému poklesu populácie.

Graf 2.2: Priebeh modelu demografickej transformácie v Českej republike od roku 1785



Model demografickej transformácie sa skladá zo štyroch základných fáz.

**Fáza 1:**

Počiatočná fáza modelu je charakterizovaná tým, že sledujeme rovnováhu medzi hrubou mierou pôrodnosti a úmrtnosti, ktoré sú obe na relatívne vysokej úrovni. Takáto situácia je typická pre vyspelé krajiny približne do konca 18.storočia, kedy táto rovnováha bola narušená v západnej Európe.

Hrubá miera pôrodnosti a úmrtnosti sa v tejto fáze pohybuje na úrovni 30 až 50 na 1000 obyvateľov. Miera rastu populácie je veľmi malá, okolo 0,05%, pričom rozsiahle epidémie rôznych infekčných chorôb ako chrípka, čierny kašeľ, či mor spôsobili veľké poklesy v počte obyvateľov a vzhľadom na malú mieru rastu trvalo dlhšie obdobie, kým sa počet obyvateľov dostal na pôvodnú úroveň.

Vysoká miera úmrtnosti mala niekoľko príčin. Nedostatok znalostí ako predchádzať a liečiť choroby, občasné hladomory, nedostatok nezávadnej pitnej vody, hygiena potravín, vojny. Tiež existovala vysoká úmrtnosť detí, ktoré sú omnoho náchylnejšie na závadné prostredie.

S týmto faktom súvisí aj vysoká miera pôrodnosti. Aby sa zachovalo obyvateľstvo pri vysokej úmrtnosti detí, ženy ich museli porodiť omnoho viac, aby sa aspoň dve z nich dožili reprodukčného veku. Deti taktiež už od útleho veku prispievali na chod domácnosti drobnými pomocnými prácami, ako nosenie vody či dreva na oheň, zametanie, umývaním riadov. Na druhej strane výdavky ich rodičov na nich boli minimálne, pretože ich nemuseli

dávať do školy, ani im prispievať na zábavu. Teda príspevok detí do rodiny bol väčší ako náklady spojené s ich výchovou. Potomstvo tiež tvorilo istotu pre rodičov, že v starobe o nich bude dobre postarané. [28][36]

### **Fáza 2:**

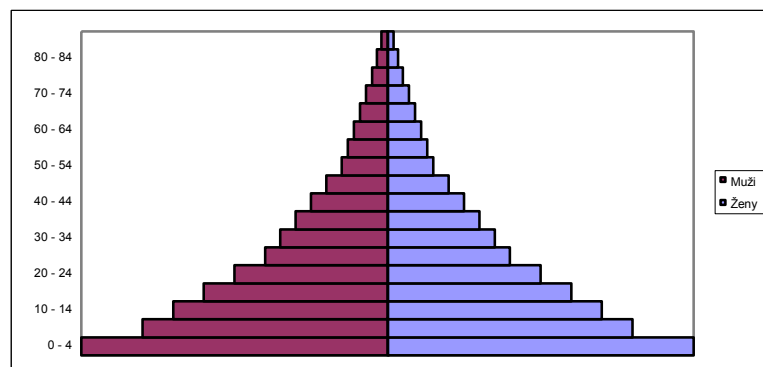
V druhej fáze modelu pozorujeme zvýšenú mieru rastu populácie v dôsledku poklesu miery úmrtnosti, kým miera pôrodnosti ostáva na rovnakej vysokej úrovni, či už zo zotrvačnosti alebo v dôsledku uchovávaní určitej tradície.

Pokles miery úmrtnosti nastáva z viacerých dôvodov. S rozvojom vedy a techniky počas poľnohospodárskej revolúcie sa dosahujú vyššie zisky potravín a spoločne s rozvojom dopravy klesá pravdepodobnosť hladomoru, resp. nedostatku vody. S rastúcim bohatstvom sa mohli mladí ľudia brať skôr, a teda miera pôrodnosti dokonca mierne vzrastá. Ďalšou príčinou poklesu miery úmrtnosti je rozvoj v oblasti zdravotníctva. Najväčšie pokroky nastávajú pri poklese úmrtnosti u detí, čo je však do väčšej miery ovplyvnené zlepšenou hygienou potravín a čistotou vody. Na konci 19. storočia malo veľký vplyv tiež šírenie vzdelanosti v oblasti zdravotníctva a gramotnosť žien, ktoré sa potom vedeli lepšie postarať o svoje potomstvo.

Dôsledkom poklesu hrubej miery úmrtnosti obyvateľstva pri stabilnej hrubej miere plodnosti je prudký nárast počtu obyvateľov, ktorý je typický pre západnú Európu za posledných približne 200 rokov, pričom kulminuje v polovici 20. storočia.

Ďalším znakom druhej fázy je zmena vo vekovej štruktúre obyvateľstva. Zatiaľ čo v prvej fáze je úmrtnosť koncentrovaná v prvých piatich až desiatich rokoch života, v druhej fáze sa táto úmrtnosť podstatne znižuje. Preto veková štruktúra obyvateľstva mladne, čo sa ešte znásobuje vtedy, keď sa zvyšujúci počet preživších detí dostáva do reprodukčného veku, čím opäť podporuje mladnutie obyvateľstva. [36]

*Graf 2.3: Veková pyramída krajiny v druhej fáze demografickej transformácie*



### ***Fáza 3:***

V tretej fáze sa nárast obyvateľstva stabilizuje tým, že nastáva pokles miery pôrodnosti. Vo vyspelých severoeurópskych krajinách tento pokles sledujeme na konci 19. storočia. Existuje viacero príčin tohto správania sa.

Zvýšená urbanizácia mala za následok zmeny v tradičných hodnotách vysokej plodnosti žien vo vidieckej spoločnosti. Zvyšujú sa aj náklady za výchovu dieťaťa (vzdelanie, zákaz detskej práce mimo domácnosti), teda rodičia uvažujú racionálnejšie o tom, koľko detí budú mať.

Zvýšená vzdelanosť žien a tiež ich postupné zapájanie sa do pracovného procesu potláčajú pohľad na ženu iba ako na zdroj a výchovu potomstva. Stávajú sa rovnocennými partnermi svojim manželom a majú v rodine lepšie postavenie ako v minulosti.

Veľký vplyv na pokles miery pôrodnosti má tiež rozvoj antikoncepcie v polovici 20. storočia. Na konci tretej fázy nastáva stav, kedy žena porodí iba toľko detí, aby tým nahradila seba a svojho partnera. Napriek tomu nárast obyvateľstva pokračuje najmä vďaka zotrvačnosti, kedy sa v reprodukčnom veku nachádza veľká časť obyvateľstva.

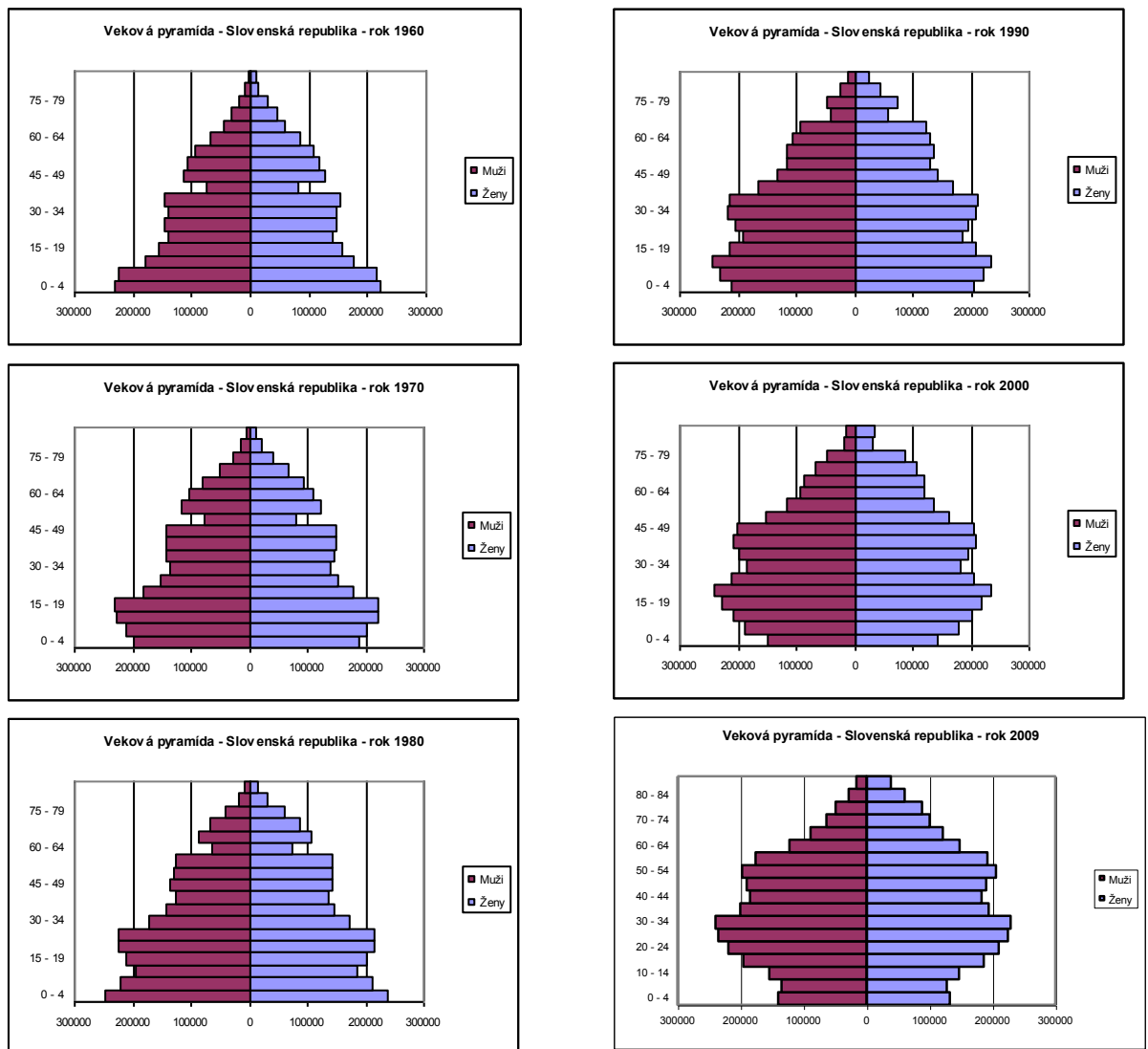
Výsledok tretej fázy je, že obyvateľstvo postupne starne. Veková pyramída prestáva mať trojuholníkový tvar, nadobúda skôr tvar predĺženého balónu. Počas obdobia medzi poklesom počtu nezaopatrených detí a nárastom počtu závislých starých ľudí nastáva demografické okno, kedy je možnosť ekonomického rastu vďaka nárastu pomeru pracujúcej sily voči závislej populácii, tzv. demografická dividenda.

Napriek všetkým objektívnym faktorom sa môže stať, že k poklesu miery pôrodnosti nedôjde (ako dôsledok tradícií, resp. náboženských hodnôt), vtedy je krajina uväznená v takzvanej demografickej pasci. [36]

Na nasledujúcich grafoch vidíme zmenu vekovej pyramídy na Slovensku od roku 1960 až po rok 2009. V roku 1960 je ešte takmer trojuholníkové rozloženie vekovej štruktúry, kedy je v krajine veľký počet detí a malý počet starých ľudí. Rok 2009 je už typickým grafom tretej fázy, kedy sa zväčšuje počet starých ľudí a klesá počet detí.



Graf 2.4: Priebeh zmeny vekovej pyramídy v Slovenskej republike od roku 1960 po rok 2009

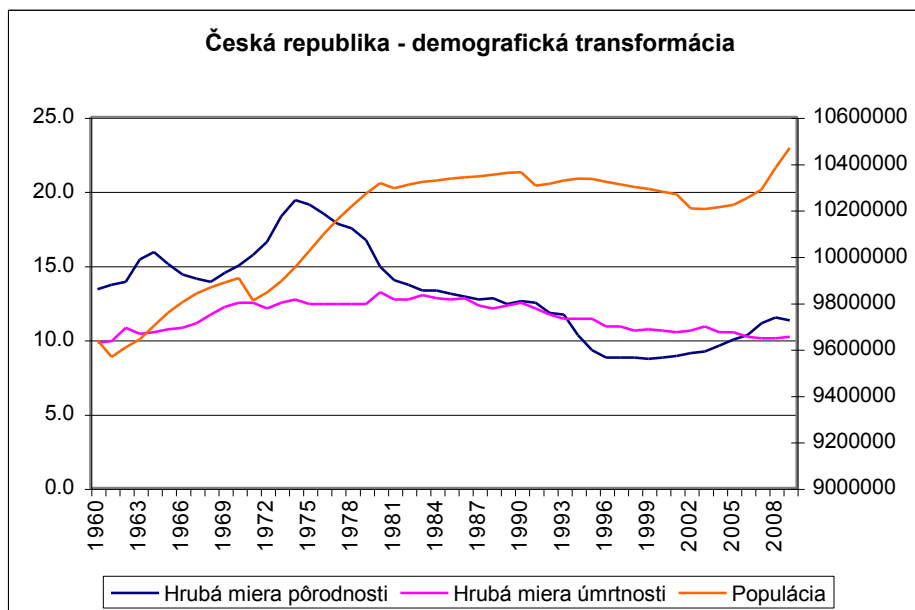


#### Fáza 4:

Vo štvrtej fáze dochádza k celkovej stabilite systému, pričom obyvateľstvo postupne starne. V niektorých prípadoch môže dokonca nastať situácia, kedy pôrodnosť nie je dostatočná na udržanie populácie a tá začína klesať. Vtedy sa model dostáva do svojej piatej fázy, ktorá pôvodne nebola jeho súčasťou. [36]

Na grafe 2.5 približne od 80-tych rokov pozorujeme stabilizáciu systému, kedy populácia nerastie. Okolo roku 1993 prechádza model do svojej 5. fázy, kedy je hrubá miera pôrodnosti menšia ako hrubá miera úmrtnosti a populácia klesá. Po roku 2005 populácia začína opäť stúpať, ako dôsledok nárastu hrubej miery pôrodnosti.

Graf 2.5: Priebeh demografickej transformácie v Českej republike od roku 1960 po rok 2010



Existuje však aj iný pohľad na demografickú transformáciu na základe analýzy Philippe Arièsa, ktorý ju vidí v dvoch častiach. Prvá, alebo tiež klasická transformácia, je charakterizovaná poklesom úmrtnosti a úhrnnej plodnosti približne od konca 18. storočia v niektorých európskych krajinách. Výsledkom tejto transformácie mala byť stabilná populácia s priemerom dvoch detí na rodinu a s očakávaným vekom dožitia viac ako 70 rokov. Nie je teda žiadna demografická potreba imigrácie. Rodiny budú mať usporiadanú formu manželského páru a ich detí.

Druhá demografická transformácia naopak na konci nevidí žiadnu rovnováhu. Rozvoj spôsobí nedostačujúcu úroveň pôrodnosti a rodiny nebudú tvoriť usporiadaný celok, pretože vymizne spojenie manželstva a detí. Celková populácia bude klesať, musí sa teda doplniť pomocou migrácie. Taktiež obyvateľstvo bude starnúť, či už vďaka nízkej miere pôrodnosti alebo dlhšiemu veku dožitia. Výsledkom druhej demografickej transformácie je nárast multikultúrnych spoločností, menšia stabilita domácností, starnutie populácie. [19]

## 2.2 Medzigeneračná výmena

V posledných desaťročiach sa danej tematike venuje zvýšená pozornosť vzhľadom na to, že doba ekonomickej závislosti mladých ľudí sa výrazne predlžuje oproti minulosti, a taktiež tým, že sa zvyšuje priemerný vek dožitia, predlžuje sa aj ekonomická závislosť starších. Preto presun prostriedkov z produktívnej časti obyvateľstva do tej závislej časti je v súčasnosti veľmi dôležitý.

Presun prostriedkov od produktívnej časti populácie ku deťom sa takmer výlučne deje v rámci domácností, hoci štát podporuje tiež aj vzdelanie alebo zdravotnú starostlivosť mládeže. Situácia u ľudí v poproduktívnom veku je medzi krajinami výrazne odlišná. Napríklad v niektorých ázijských krajinách väčšina starších ľudí žije so svojimi dospelými deťmi. V západných krajinách je skôr zvykom, že starší ľudia žijú samostatne, resp. so svojimi partnermi.

Medzigeneračná výmena môže mať dva základné motívy.

Prvým je snaha zabezpečiť prerozdelenie. Altruistické modely sú založené na tom, že individualitám záleží na ostatných členoch rodiny.

Druhým motívom je mimotrhový presun medzi jednotlivými členmi rodiny. Napríklad dospelé deti sa snažia postarať o svojich rodičov s vidinou toho, že v budúcnosti im ich rodičia zanechajú nejaké hmotné dedičstvo. Rodičia taktiež môžu svoje deti poslať na drahé univerzity s tým, že v budúcnosti sa o nich ich potomstvo postará.

Barro (1974) vytvoril model, v ktorom je funkcia užitočnosti jedinca daná jeho vlastnou spotrebou a užitočnosťou všetkých ďalších jeho generácií potomkov. Dôsledkom tohto modelu je, že medzigeneračný transfer v rámci rodiny eliminuje fiškálnu politiku vlády. Keď sa totiž vláda rozhodne uplatniť expanznú fiškálnu politiku, snaží sa zvýšiť aktuálnu spotrebu tým, že sa zadlží. Z pohľadu medzigeneračnej výmeny to však znamená, že vláda iba presúva prostriedky z budúcich generácií do tej súčasnej. Preto sa domácnosti snažia zdržiavať finančné prostriedky ako rezervu pre ďalšie generácie, a tým neutralizujú pôvodný zámer tejto politiky. [21]

## 2.3 Populácia a rozvoj

Existuje viacero možných oblastí rozvoja, ako napríklad ekonomická štruktúra, urbanizmus, sociálny rozvoj. V poslednom čase sa však kladie dôraz najmä na rast príjmu na obyvateľa. Príjem na hlavu vieme vyjadriť súčinom dvoch veličín, príjmu na pracovníka a počtu pracovníkov na obyvateľa:  $Y/N = Y/L \times L/N$ . Vo vyjadrení rastu máme

$$\dot{y} = y' + l - n \quad (2.1)$$

kde  $y$  je miera rastu príjmu na obyvateľa,  $y'$  je miera rastu príjmu na pracovníka,  $l$  je miera rastu pracovnej sily a  $n$  je miera rastu populácie. Najväčší dôraz výskumov ekonomického rastu sa kládol najmä na rast príjmu na pracovníka.

Je tiež potrebné rozlíšiť dlhodobý a krátkodobý rast, pretože krátkodobý nárast je daný ekonomickým cyklom, zatiaľ čo dlhodobý rast vyjadruje už podstatnú a dlhodobú zmenu v ekonomike.

Vo všeobecnosti sa uvažuje, že ak rast HDP prekračuje rast populácie, dochádza k zlepšeniu životného štandardu obyvateľstva. Aj pomerne malý medziročný nárast HDP môže počas niekoľkých dekád až zdvojnásobiť úroveň HDP, pričom dochádza k prehĺbovaniu rozdielov medzi jednotlivými krajinami s rozdielnym rastom HDP. Keďže hodnota peňazí sa v čase mení, je dôležité, aby sme pri porovnávaní HDP v rozličných krajinách uvažovali hodnotu na rovnakej báze, väčšinou na báze parity kúpnej sily, teda koľko reálne si môžu ľudia za daný obnos peňazí kúpiť.

V súčasnosti zohráva významnú úlohu aj jav, ktorý vzniká pri rozdielnom raste pracovnej sily a celkovej populácie  $l-n$  a nazýva sa demografická dividenda. [21]

## 2.4 Demografická dividenda

Demografická dividenda je jav zvýšenia ekonomického rastu ako dôsledok vyššieho podielu pracujúcich na celkovej populácii. To sa väčšinou udeje v neskoršej fáze demografickej transformácie, kedy klesá miera pôrodnosti, a teda aj index ekonomickej závislosti mladých ľudí. Počas tohto demografického okna sa naskytá príležitosť rastu HDP na obyvateľa.

Avšak demografické okno nemusí nevyhnutne znamenať zvýšenie produktivity krajiny. Musia byť totiž vytvorené vhodné podmienky na to, aby štát bol schopný zamestnať toto nadmerné množstvo pracovnej sily, v opačnom prípade by potenciál pracovnej sily nielen že nebol dostatočne využitý, ale zvýšil by sa počet nezamestnaných, čo by znamenalo iba

d'alšie zaťaženie ekonomiky. Nestačí teda iba veľká skupina ľudí v produktívnom veku na zvýšenie celkovej produktivity štátu. Mnoho mladých nevzdelaných ľudí by mohlo skončiť v podradných prácach za minimálnu mzdu a v zlých podmienkach. Veľkú úlohu má teda ich vzdelanie a vo všeobecnosti dôležitú úlohu hrá inštitút vyššieho vzdelávania. Jeho úlohou je vzdeliť človeka nielen z hľadiska jeho schopností, ale taktiež aj postojov, aby sa vedel lepšie začleniť do multikultúrnej spoločnosti.

Po období demografického okna nastáva obdobie starnutia obyvateľstva, pretože veľká skupina pracujúcich sa dostáva do poproduktívneho veku a keďže ich na ich mieste nemá kto nahradiť, nakoľko miera pôrodnosti bola na nízkej úrovni, nastáva opätovné zhoršenie pomeru pracujúcej a závislej časti obyvateľstva, teda rastie index ekonomickej závislosti starých ľudí. Tento zhoršený stav sa dá vylepšiť viacerými spôsobmi. Krajina môže predĺžiť dôchodkový vek, a tým oddialiť koniec demografickej dividendy. Môže tiež staršiu generáciu zapojiť do pracovného procesu menej náročnými prácami a tiež zvýšiť ich výkonnosť celoživotným vzdelávaním. Dôležité je taktiež odovzdávanie vedomostí mladšej generácii, aby tá mohla rýchlejšie napredovať. [21] [26]

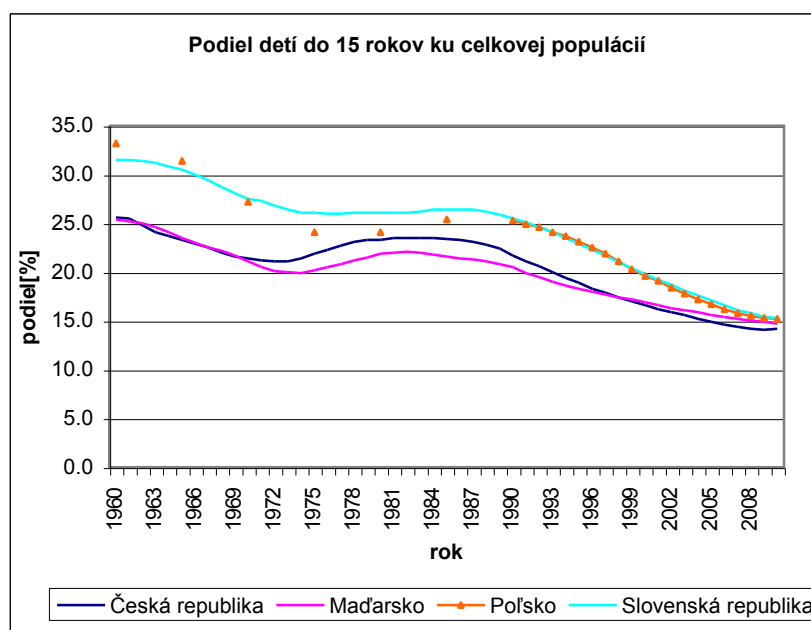
## **2.5 Demografické okno**

Demografické okno je obdobie vo vývoji krajiny, počas ktorého, čo do veľkosti, prevláda skupina obyvateľstva v produktívnom veku oproti skupine ľudí v neproduktívnom veku. Väčšinou toto obdobie trvá od 30 do 40 rokov. Začiatok demografického okna je úzko spätý s poklesom hrubej miery pôrodnosti, kedy klesá aj index ekonomickej závislosti mladých ľudí. Po niekoľkých rokoch však nízka miera pôrodnosti spôsobí starnutie populácie, pričom miera ekonomickej závislosti opäť narastá vďaka väčšej skupine ľudí v poproduktívnom veku. Podľa UN Population Department sa za hranicu, kedy môže dôjsť k demografickému oknu považuje stav, kedy podiel detí (do 15 rokov) klesne pod 30% a podiel starých ľudí (nad 65 rokov) je pod hranicou 15%. [16]

Demografické okno môžeme ilustrovať na nami pozorovaných krajinách.

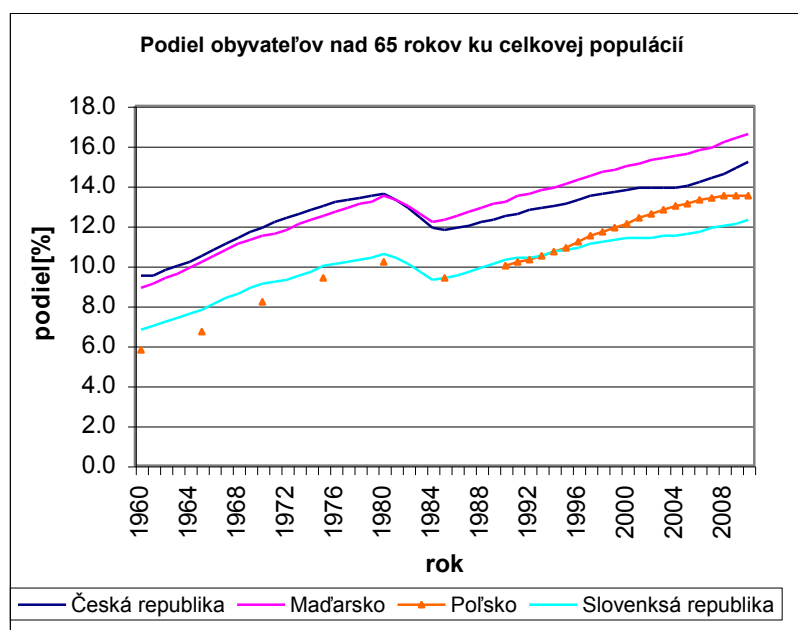
Na grafe 2.6 vidíme, že podiel detí do 15 rokov sústavne klesá, pričom pod hranicu 30% klesol na Slovensku a v Poľsko ku koncu 60-tych rokov a vo zvyšných krajinách tento pomer bol pod danou hranicou už pred začiatkom pozorovaného obdobia.

Graf 2.6: Priebeh podielu detí do 15 rokov ku celkovej populácii



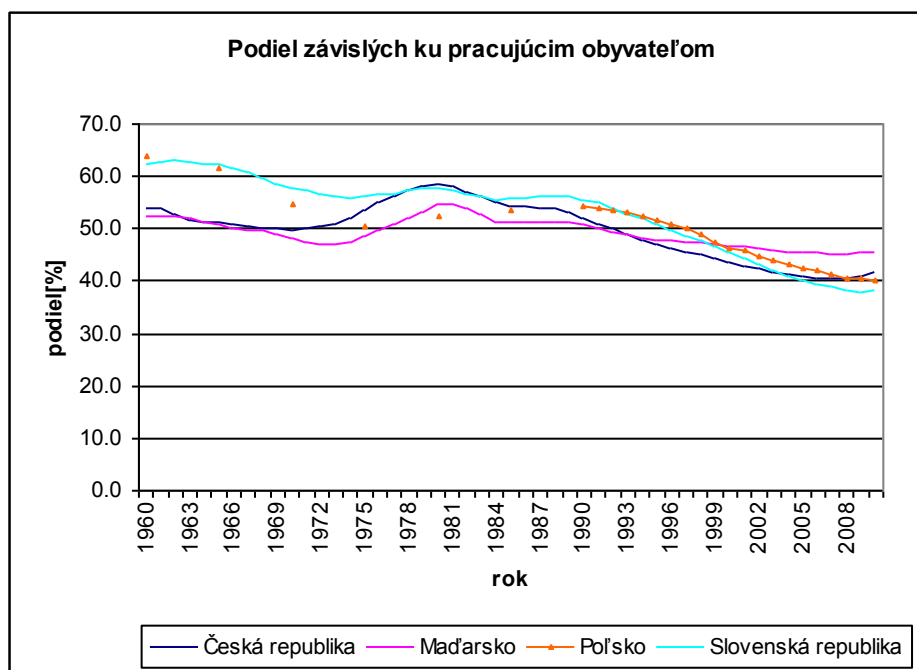
Pomer obyvateľov nad 65 rokov pod úrovňou 15% je prekročený iba v Maďarsku, a to okolo roku 2000, no vo všetkých krajinách tento pomer postupne narastá a v najbližších rokoch prekročia hranicu 15% pravdepodobne aj zvyšné krajiny.

Graf 2.7: Priebeh podielu obyvateľov nad 65 rokov ku celkovej populácii

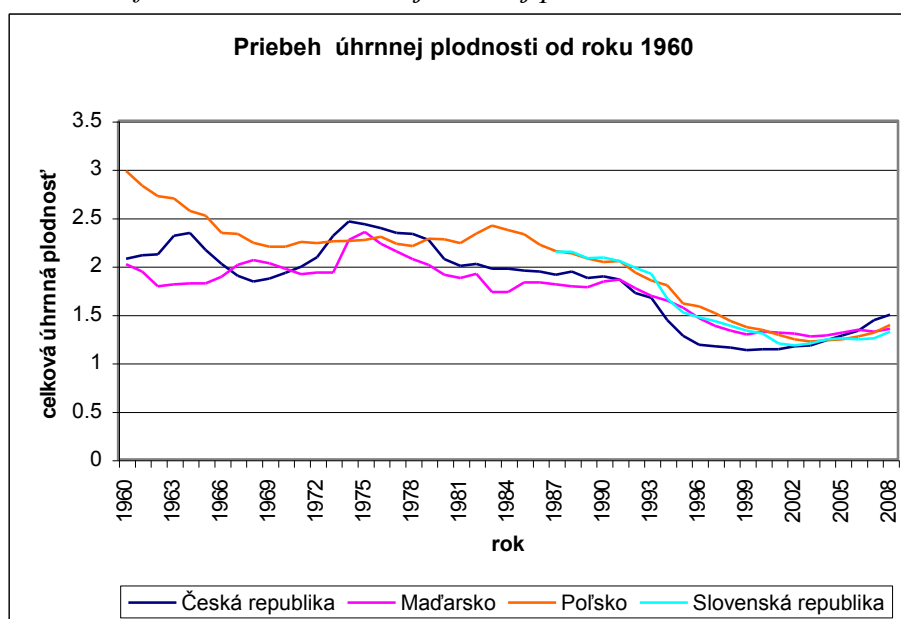


Na grafe 2.8 môžeme vidieť zmenu pomeru závislých obyvateľov (ľudia vo veku 0-14 a od 65 vyššie) ku pracujúcim (ľudia vo veku 15-64) od roku 1960 až po rok 2010. Približne od 90-tych rokov začína tento pomer klesať ako dôsledok prudkého poklesu úhrnnej plodnosti v 90-tych rokoch (graf 2.9).

Graf 2.8: Priebeh podielu závislých ku pracujúcim obyvateľom



Graf 2.9: Priebeh celkovej úhrnnej plodnosti od roku 1960



V našich krajinách došlo ku určitému demografickému oknu približne od 90-tych rokov, kedy pomer závislých obyvateľov ku pracujúcim klesal. Pre rozloženie vekovej štruktúry

je predpoklad, že tento pomer začne postupne stúpať, pretože silná povojnová generácia sa v najbližších rokoch dostane do poproduktívneho veku.

## 2.6 Demografická pasca

Je to pojem, ktorý sa používa na pomenovanie situácie, kedy sa naraz vyskytuje vysoká hrubá miera pôrodnosti spoločne s klesajúcou hrubou mierou úmrtnosti, čoho dôsledkom je vysoký rast populácie.

Pozorujeme ju väčšinou v krajinách, ktoré sa menia z rozvojových na rozvinuté. Pokles miery úmrtnosti je spôsobený najmä zlepšenou medicínskou starostlivosťou. Kým miera pôrodnosti nestihne na danú zmenu zareagovať svojim poklesom, krajina sa nachádza v demografickej pasci. Krajina môže ostať zachytená v demografickej pasci, ak klesajúci životný štandard podporuje vyššiu mieru pôrodnosti, ktorá opäť podporuje pokles životného štandardu. Ľudia sa teda vzhľadom na chudobu snažia mať viac detí, aby si tým zabezpečili lepšiu starobu. Krajina sa pri rýchlom raste svojej populácie môže dostať do veľkých problémov, pretože nie je schopná zabezpečiť dostatočné vzdelanie pre mladých ľudí a ani dostatok pracovných miest pre narastajúcu pracovnú silu. Tiež absentuje zvýšená úroveň služieb, infraštruktúry, zásob potravín a vody, či tiež aj kanalizácie.

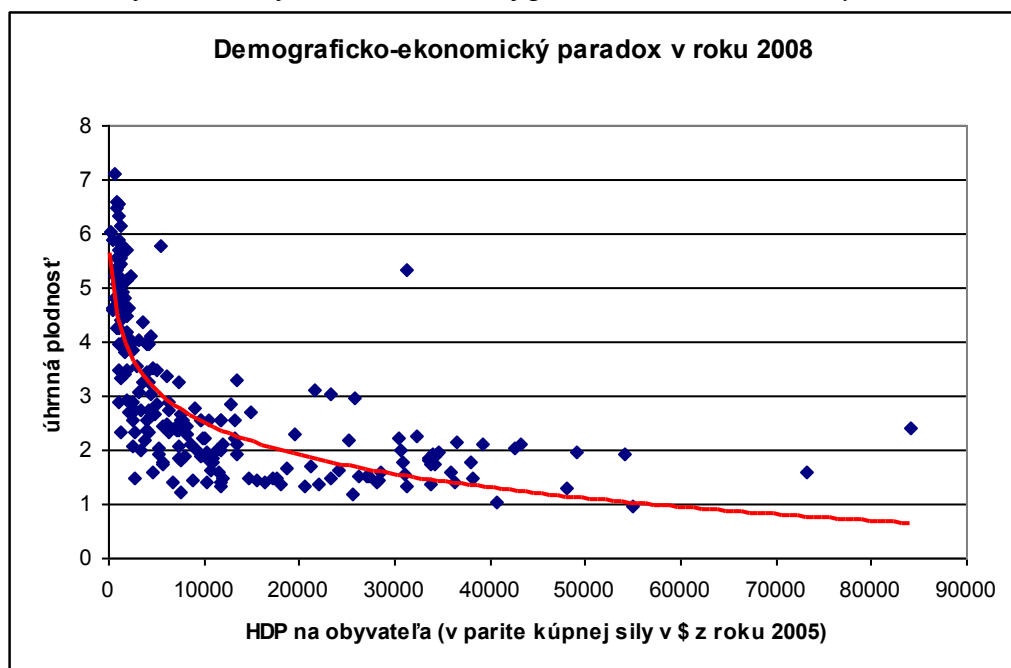
Existujú dve skupiny pohľadov na demografickú pascu. Jedna skupina ju vidí iba ako krátkodobý jav, ktorý vieme eliminovať zlepšením vzdelania a rodičovského plánovania. Iní tento problém vidia dlhodobo, keď nie je zabezpečené dostatočné vzdelanie a prevencia chudoby, tak rodičia vidia vo väčšom potomstve možnosť sociálneho zabezpečenia v starobe. Krajina môže dôjsť až do stavu demografického vyčerpania, kedy už nie je finančne schopná vysporiadať sa s veľkým nárastom svojej populácie a nemôže čeliť hrozbám prírodných katastrof, ako sú hurikány, záplavy, zosuvy pôdy, sucho, či choroby. Vtedy sa krajina môže dokonca opäť dostať do prvej fázy demografickej transformácie, kedy dochádza k opätovnému nárastu hrubej miery úmrtnosti, spoločne s vysokou hrubou mierou pôrodnosti. [35]



## 2.7 Demograficko-ekonomický paradox

Je to jav, kedy sledujeme opačnú závislosť medzi bohatstvom a úhrnnou plodnosťou v krajine. Čím je vyššia úroveň vzdelania a HDP na obyvateľa, tým menej sa rodí detí. Tento jav nazývame paradoxom práve preto, lebo pri väčšom bohatstve by sme mohli očakávať, že rodičia si budú môcť dovoliť užiť väčší počet detí, no v skutočnosti v krajinách s vyššou úrovňou HDP na obyvateľa sledujeme menšiu úhrnnú plodnosť, ako v krajinách s nižším HDP na hlavu. Tento jav je tiež dôsledkom zvýšenia očakávanej dĺžky života a aj menšej novorodeneckej úmrtnosti, lepšej vzdelanosti a samostatnosti žien vo vyspelejších krajinách, čo je konzistentné s modelom demografickej transformácie. V poslednej dobe sa však ukazuje, že tento paradox platí iba po určitú hranicu. Keď už krajina dosiahne určitú úroveň rozvoja a ekonomickej prosperity, úhrnná plodnosť sa ustáľuje a po určitom čase dokonca začína narastať. Daný paradox môžeme ilustrovať na nasledujúcom grafe pre viac ako 200 krajín sveta v roku 2008. Úhrnnú plodnosť sme aproximovali zápornou logaritmickou závislosťou od HDP na obyvateľa, teda pri rozvinutejších krajinách nedochádza pri zmene HDP na hlavu ku zásadným zmenám v úhrnnej plodnosti.

Graf 2.10: Graf závislosti úhrnnej plodnosti od HDP na obyvateľa



Demograficko-ekonomický paradox je silne ovplyvnený tiež demografickou transformáciou. Do 19. storočia sa iba veľmi málo detí dožilo svojej dospelosti. No s príchodom agrárnej revolúcie a tiež aj so zlepšením hygieny, prišlo k prudkému poklesu

úmrtnosti, zo začiatku ešte bez vplyvu na mieru pôrodnosti. V 20. storočí došlo vo vyspelých krajinách už aj k poklesu miery pôrodnosti, pretože ľudia už nepotrebovali mať taký veľký počet detí, aby sa aspoň dve z nich dostali do reprodukčného veku. Demografickú transformáciu v podstate rozbieha bohatstvo, teda krajiny, ktoré zaostávajú s úrovňou svojho HDP na obyvateľa taktiež zaostávajú aj v procese transformácie.

Ďalším významným vplyvom na tento paradox je aj náboženstvo. V krajinách s hlbšou náboženskou tradíciou je typické, že dosahujú vyššiu mieru pôrodnosti, ako viac ateistické krajiny s rovnakou úrovňou HDP na obyvateľa.

Vyššia miera pôrodnosti však znamená väčšie finančné zaťaženie rodín, a teda menší možný prístup ku vzdelaniu, čo má nakoniec za následok spomalenie ekonomického rastu. Konkrétne náš panel štyroch krajín sa nachádza v oblasti HDP na úrovni medzi 10000\$ a 20000\$ na obyvateľa, teda ešte v časti krivky, ktorá má pomerne významné zakrivenie. Vyspelé európske krajiny majú HDP na obyvateľa niekde na úrovni 30000-40000\$, teda už v oblasti menšieho zakrivenia krivky závislosti. To znamená, že pre tieto krajiny by už HDP na obyvateľa nemalo mať taký vplyv na úhrnnú plodnosť, ako v nami pozorovanom paneli, úhrnnú plodnosť budú už ovplyvňovať iné činitele. Problematikou demograficko-ekonomického paradoxu sa budeme bližšie zaoberať v empirickej časti práce. [37]

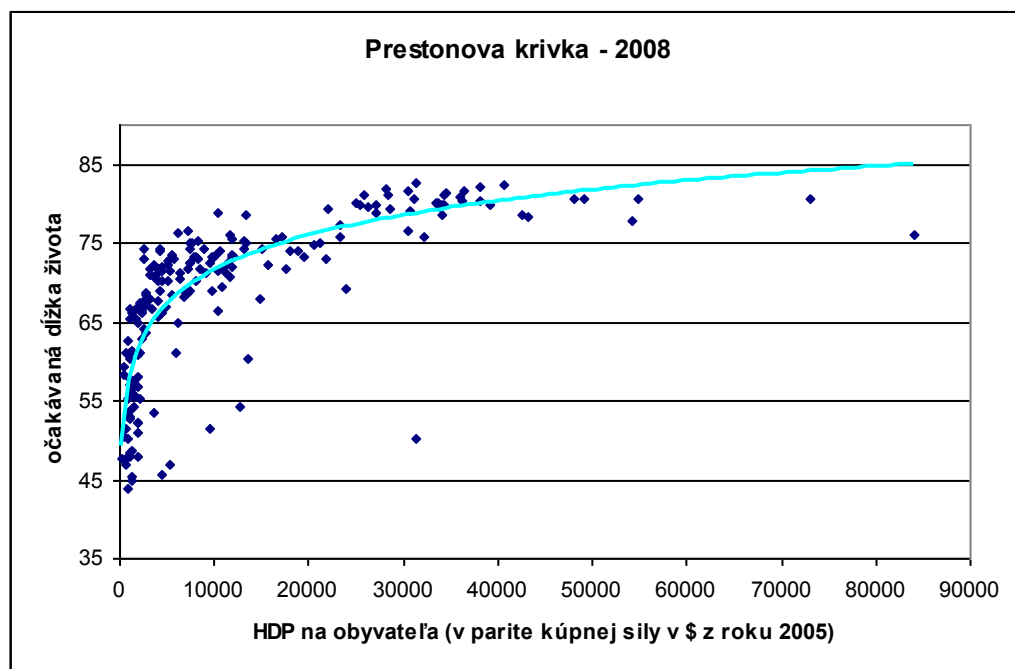
## 2.8 Prestonova krivka

Je empirický vzťah medzi očakávanou dĺžkou života a reálnym HDP na obyvateľa. Podľa tejto krivky sa dá očakávať, že jedinec, ktorý sa narodí v bohatšej krajine, má vyššiu očakávanú dĺžku života ako ten, ktorý sa narodí v chudobnejšej. Táto závislosť však nie je lineárna, ale skôr logaritmická. To znamená, že pri nízkej úrovni HDP na hlavu spôsobí jeho zvýšenie podstatné zvýšenie očakávanej dĺžky života. Naopak, pri bohatších krajinách, už pri ďalšom náraste HDP na obyvateľa nepozorujeme veľkú zmenu v očakávanej dĺžke života. Taktiež Prestonova štúdia ukázala, že krivka zaznamenala v 20. storočí posun nahor bez ohľadu na zvýšenie príjmov krajiny. Dá sa to vysvetliť zlepšením vzdelanostnej úrovne, technológie, zdravotnej starostlivosti, či prístupu k potravinám.

Existencia Prestonovej krivky nabáda chudobnejšie krajiny k tomu, aby sa snažili zvýšiť svoje príjmy. Hoci je pravda, že väčšinu zvýšenia dĺžky života má na svedomí zlepšenie zdravotnej starostlivosti a nie samotný nárast príjmov, príjmy sú v chudobnejších krajinách potrebné k tomu, aby sa mohla zabezpečiť dostupnosť nových medicínskych technológií.

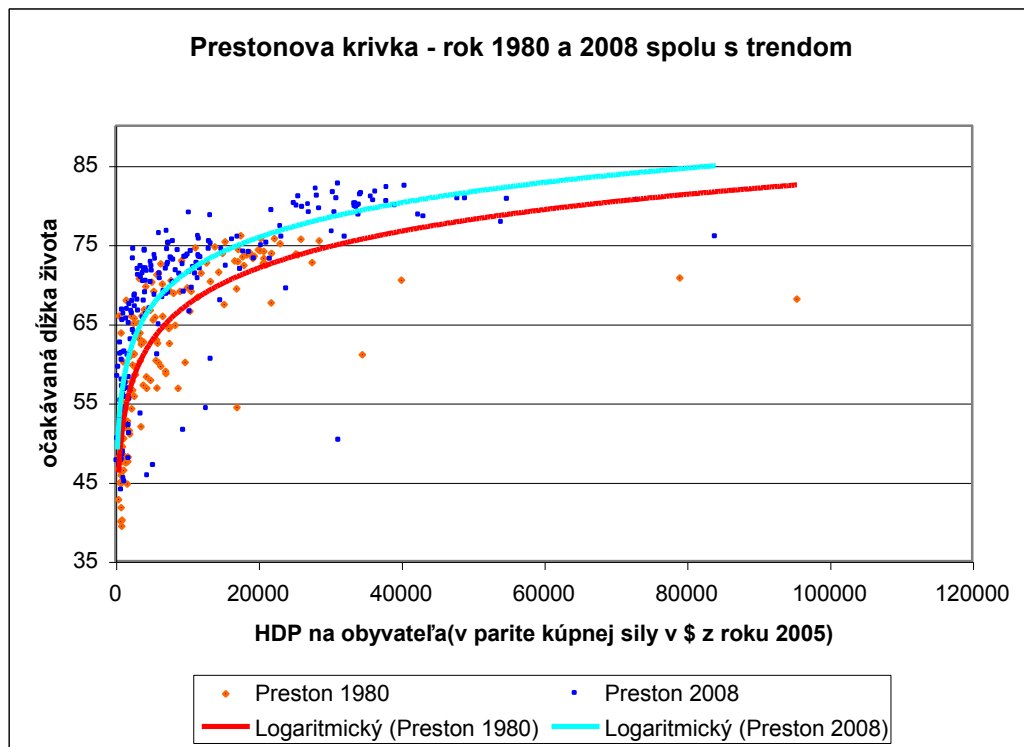
Kritika Prestonovej krivky spočíva v tom, že sa dá aplikovať iba v priereze krajín v určitom časovom okamihu. Keby sme sa zamerali na časový prierez dát, tak rozdiely v príjmoch krajín sa zväčšujú, zatiaľ čo rozdiely v očakávanej dĺžke života sa znižujú. Ďalším bodom kritiky je príčinná súvislosť medzi príjmami a zdravím. Nie je totiž jasné, či viac ovplyvňujú príjmy celkové zdravie, alebo naopak zdravie ovplyvňuje príjmy. Lepší zdravotný stav má totiž vplyv na výkonnosť jednotlivca, je schopný pracovať viac a efektívnejšie. Taktiež u zdravých detí je lepšia šanca vzdelania, pretože môžu tráviť viac času v škole a lepšie sa sústrediť, a teda sa vytvára potenciál pre rast ľudského kapitálu. Uvedieme Prestonovu krivku pre vyše 200 krajín sveta, kedy sa nám lepšie ukazuje daná závislosť, nakoľko máme väčšiu pestrosť krajín z hľadiska HDP na obyvateľa. Závislosť aproximujeme pomocou logaritmického funkcie. [9]

Graf 2.11: Prestonova krivka pre vyše 200 krajín sveta v roku 2008



Skúsime overiť hypotézu, že Prestonova krivka sa posúva v čase pod vplyvom technologického a medicínskeho rozvoja bez ohľadu na úroveň HDP na obyvateľa.

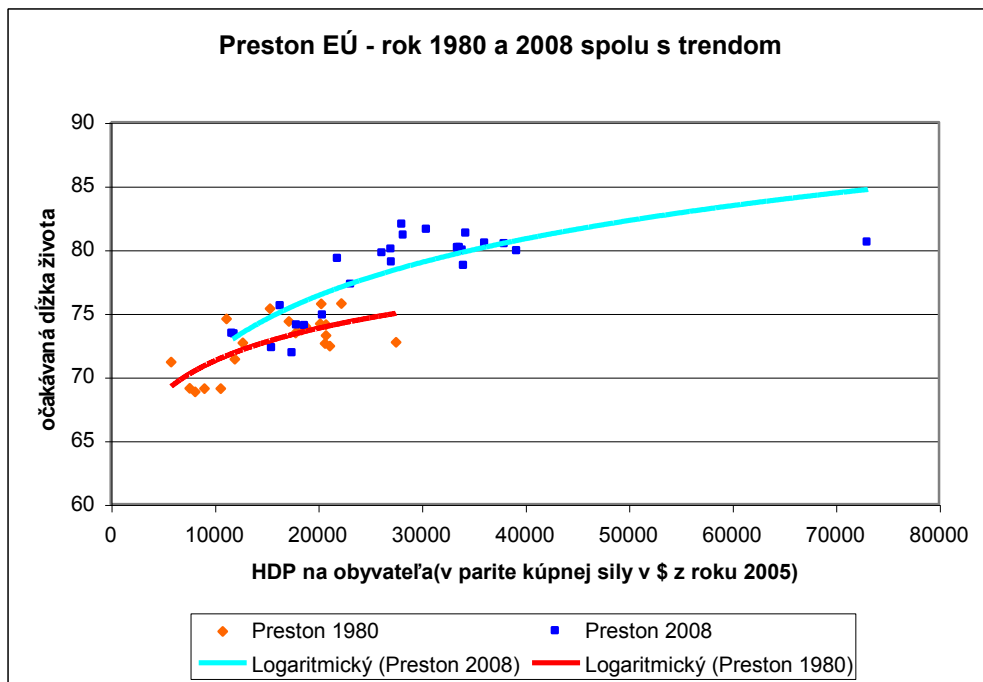
Graf 2.12: Porovnanie Prestonovej krivky pre vyše 200 krajín sveta v rokoch 1980 a 2008



Je zreteľné, že od roku 1980 po rok 2008 nastal vertikálny posun Prestonovej krivky nahor, teda neplatí iba jednoduchý kauzálny vzťah od HDP ku dĺžke života. Dĺžka života časom rástla najmä preto, že sa vyvinuli nové technológie a lieky na jeho skvalitnenie a predĺženie.

Vertikálny posun Prestonovej krivky môžeme ukázať aj na krajinách EÚ v roku 1980 a 2008.

Graf 2.13: Porovnanie Prestonovej krivky pre krajiny EÚ v rokoch 1980 a 2008



Naše pozorované krajiny nedosahujú takú vysokú úroveň HDP na obyvateľa, ako je to v rozvinutých európskych krajinách, teda ich závislosť očakávanej dĺžky života od HDP má ešte pozorovateľné zakrivenie. U rozvinutých štátov je toto zakrivenie minimálne a závislosť má skôr lineárny priebeh.

### 3. Panelové dáta

Panelové dáta sú v súčasnosti veľmi populárnou formou často využívanou v analýze údajov, či už z ekonomickej oblasti, ale aj z oblasti sociálneho a demografického správania sa. Oproti klasickým časovým radom, či prierezovým dátam, sa líšia svojou dimenziou. V panelových dátach sa nachádzajú pozorovania v rôznych časových okamihoch a pre rozličné skúmané subjekty. Panely môžu byť balancované alebo nebalancované. Ak máme pre všetky pozorované subjekty údaje pre rovnaké časové okamihy, vtedy nazývame panel balancovaným. Naopak, ak pre niektorý subjekt určité dáta chýbajú, panel bude nebalancovaný. Panelové dáta môžeme používať v mikroekonomických modeloch, kedy pozorovanými subjektami sú napríklad firmy, alebo aj v makroekonomickom prostredí, kedy zvyčajne pozorujeme rozličné krajiny. [8]

#### *Výhody panelových modelov*

Vďaka zaradeniu viacerých krajín do modelu získame väčšiu variabilitu údajov a s tým spojenú slabšiu kolinearitu medzi premennými, viac stupňov voľnosti a vyššiu efektivitu.

Pomocou panelových dát vieme taktiež lepšie narábať s nepozorovateľnými efektmi (omitted variable bias), ktoré môžu byť konštantné pre jednotky alebo pre časové obdobie.

Panelové dáta sú vhodné na štúdium dynamiky prispôsobenia sa veličín určitým zmenám. Môžeme tiež vytvárať a testovať komplikovanejšie modely správania sa, vzhľadom na vyššiu technickú efektivitu panelov.

#### *Nevýhody panelových modelov*

Nie je vždy jasná porovnateľnosť výsledkov, nakoľko v niektorých prípadoch uvažujeme rovnaké správanie sa krajín v určitých situáciách, teda rovnaké koeficienty pri vysvetľujúcich premenných (poolability) a v niektorých prípadoch jednotlivé koeficienty pre krajiny rozlišujeme.

Dáta medzi prierezovými krajinami môžu byť korelované, čo neskôr vedie ku skresleným výsledkom. [2] [8]

#### 3.1 Panelové modely

Jednotlivé druhy modelov sa môžu líšiť v koeficientoch charakterizujúcich prierezovú a časovú zložku údajov, pričom môžu byť spoločné pre všetky krajiny, resp. časové

okamihy (predpoklad homogenity) alebo sa môžu rozlišovať (heterogenita). Za základný model je považovaný model Greena (2003)

$$y_{it} = \alpha + \beta_1 x_{it1} + \beta_2 x_{it2} + \dots + \beta_k x_{itk} + \alpha_1 z_{i1} + \alpha_2 z_{i2} + \dots + \alpha_q z_{iq} + u_{it} \quad (3.1)$$

kde  $i=1, \dots, n$  označuje prierezovú jednotku a  $t=1, \dots, T$  časovú jednotku. Premenné  $X_1$  až  $X_k$  sú vysvetľujúce premenné bez jednotkového vektora a  $Z_1$  až  $Z_k$  sú individuálne efekty, ktoré charakterizujú jednotlivé krajiny a sú v čase nemenné, pričom je tu tiež zahrnutý aj jednotkový vektor.  $u_{it}$  sú nezávislé rovnako rozdelené chyby s nulovou strednou hodnotou a disperziou  $\sigma^2$  (predpoklad homoskedasticity). Keby sme uvažovali situáciu, že všetky krajiny sa správajú odlišne, teda ich reakcie na zmenu vo vysvetľujúcich premenných sú rôzne, koeficienty  $\beta_1$  až  $\beta_k$  by sa rozlišovali pre všetky krajiny, čiže by sme pracovali s koeficientmi  $\beta_{1i}$  až  $\beta_{ki}$  a model by vyzeral nasledovne

$$y_{it} = \alpha + \beta_{1i} x_{it1} + \beta_{2i} x_{it2} + \dots + \beta_{ki} x_{itk} + \alpha_1 z_{i1} + \alpha_2 z_{i2} + \dots + \alpha_q z_{iq} + u_{it} \\ i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.2)$$

Základný model ďalej rozdeľujeme podľa toho, v akom tvare sú vyjadrené individuálne efekty. My budeme bližšie špecifikovať homogénny model, pre nehomogénny platia obdobné úvahy. [20]

### 3.1.1 Spojený regresný model

$$y_{it} = \alpha + \beta_1 x_{it1} + \beta_2 x_{it2} + \dots + \beta_k x_{itk} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.3)$$

Model sa nazýva spojený regresný model (Pooled Regression). Predpokladom je, že krajiny sa správajú homogénne, teda majú spoločné koeficienty pri vysvetľujúcich premenných a individuálne efekty sú vyjadrené iba pomocou jednotkového vektora, teda majú tvar konštanty. [20]

### 3.1.2 Model s fixnými efektmi

$$y_{it} = \alpha_i + \beta_1 x_{it1} + \beta_2 x_{it2} + \dots + \beta_k x_{itk} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.4)$$

Model s fixnými efektmi (Fixed Effects Model – FEM) predpokladá, že individuálne efekty  $Z_1$  až  $Z_k$  sú nepozorovateľné a zároveň korelované s vysvetľujúcimi premennými. Tieto fixné efekty sú rôzne pre jednotlivé krajiny, resp. skupiny krajín a v čase sú

konštantné. Predpokladáme, že stredná hodnota chýb je nulová a tiež, že chyby nie sú korelované.

$$E(u_{it}) = 0$$

$$E(u_{it}u_{js}) = \begin{cases} \sigma^2 & i = j, t = s \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Člen  $\alpha_i + u_{it}$  môžeme chápať ako spoločný chybový člen, podľa čoho sa tento model zvykne nazývať aj „error component model“. S fixnými efektmi vieme pracovať dvomi spôsobmi. Prvým je vyjadrenie efektov pomocou „dummy“ premenných, kedy každý fixný efekt vyjadruje premenná špecifická pre každú krajinu.

Nakoľko zahrnutie dummy premenných do modelu býva často neefektívne, používa sa druhý spôsob pomocou „within-transformation“ alebo aj ponižovania (demeaning) dát. Pritom využívame nasledovnú transformáciu.

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &= \beta_1 \bar{x}_{i1} + \beta_2 \bar{x}_{i2} + \dots + \beta_k \bar{x}_{ik} + \alpha_i + \bar{u}_i & \text{kde} \\ \bar{y}_i &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{it} & \bar{x}_{ik} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{itk} & \bar{u}_i &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_{it} \\ y_{it} - \bar{y}_i &= \beta_1 (x_{it1} - \bar{x}_{i1}) + \beta_2 (x_{it2} - \bar{x}_{i2}) + \beta_k (x_{itk} - \bar{x}_{ik}) + (\alpha_i - \alpha_i) + (u_{it} - \bar{u}_i) \\ \tilde{y}_{it} &= \beta_1 \tilde{x}_{it1} + \beta_2 \tilde{x}_{it2} + \dots + \beta_k \tilde{x}_{itk} + \tilde{u}_{it} \end{aligned}$$

Ďalej odhady koeficientov  $\beta_j$  získame pomocou OLS metódy.

Model s fixnými efektmi väčšinou využívame pri makropaneloch, kedy pracujeme s menším počtom subjektov, no za dlhšie časové obdobie. Vtedy totiž vieme spoľahlivo odhadnúť jednotlivé koeficienty, nakoľko rozdiely v správaní sa krajín nie sú až také výrazné a nemusíme do modelu vnášať náhodnosť, ako je to u modelov s náhodnými efektmi. Problémom je, že nevieme odhadnúť vplyv premenných konštantných v čase, nakoľko po „within-transformation“ všetky konštanty z rovnice vypadnú.

V modeli s fixnými efektmi vieme testovať, či sú špecifické premenné pre jednotlivé krajiny signifikantné alebo by stačila jedna spoločná premenná na vyjadrenie fixných efektov. Najvhodnejším spôsobom, ako túto hypotézu otestovať, je pomocou F-štatistiky. F-test porovnáva hodnoty súčtu štvorcov rezíduí v modeli so špecifikáciou fixných efektov pre krajiny (FEM) a v takzvanom „pool“ modeli, kde sú fixné efekty pre krajiny rovnaké.



$$F = \frac{(RSS_{pool} - RSS_{FEM})/(n-1)}{RSS_{FEM}/(nT - k - n)} \approx F(n-1, nT - k - n) \quad (3.5)$$

kde  $n$  je počet krajín v paneli,  $k$  je počet vysvetľujúcich premenných bez konštanty a  $T$  je časová dimenzia, v ktorej krajiny pozorujeme.

Ak je hodnota F-štatistiky väčšia, ako tabuľková hodnota k daným stupňom voľnosti, čo znamená, že rozdiely súčtu štvorcov rezíduí v jednoduchom a v zložitejšom modeli sú príliš veľké, nemôžeme fixné efekty spojiť pre všetky krajiny do jednej premennej, a teda musíme ich rozlišovať.

Do modelu môžeme taktiež zahrnúť aj časové efekty, ktoré sú spoločné pre všetky krajiny, no sú v čase meniace sa. Model s fixnými a časovými efektmi má vyjadrenie

$$y_{it} = \beta_1 x_{it1} + \beta_2 x_{it2} + \dots + \beta_k x_{itk} + \alpha_i + \theta_t + u_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.6)$$

kde premenná  $\theta_t$  zahŕňa časové efekty, ktoré sú rovnaké pre všetky krajiny. Člen  $\alpha_i + \theta_t + u_{it}$  chápeme ako spoločný chybový člen a model sa tiež nazýva aj „two-way error component model“. [8] [17] [20]

### 3.1.3 Model s náhodnými efektmi

$$y_{it} = \alpha_i + \beta_1 x_{it1} + \beta_2 x_{it2} + \dots + \beta_k x_{itk} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.7)$$

Model s náhodnými efektmi taktiež predpokladá rozličné hodnoty konštánt medzi krajinami, pričom tieto odlišné efekty nie sú korelované s vysvetľujúcimi premennými, teda je tam určitý faktor náhodnosti. Predpokladáme, že

$$E(\alpha_i) = 0 \quad E(\alpha_i u_{it}) = 0$$

$$E(\alpha_i \alpha_j) = \begin{cases} \sigma_\alpha^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$E(\alpha_i x_{it}^T) = E(u_{it} x_{it}^T) = 0$$

Vo väčšine prípadov sa tieto modely používajú v mikropaneloch, kedy máme veľký počet pozorovaných subjektov, no za kratšie časové obdobie, a ak uvažujeme, že k výberu subjektov sme došli náhodne, je vhodnejšie pri modelovaní použiť aj náhodné efekty.

Pomocou tohto modelu vieme odhadnúť aj premenné konštantné v čase, no ak by boli korelované s vysvetľujúcimi premennými, odhad by bol skreslený. [8] [17] [20]

### 3.1.4 Hausmanov test

Nie je vždy úplne jednoznačné, ktorý z modelov fixných a náhodných efektov je lepšie použiť. Na lepšiu identifikáciu nám slúži Hausmanov test. Je založený na vlastnostiach FE (fixné efekty) a RE (náhodné (random) efekty) modelov. FE odhad je vždy konzistentný a nevychýlený, zatiaľ čo RE odhad je konzistentný iba za predpokladu, že náhodné efekty  $\alpha_i$  nie sú korelované s vysvetľujúcimi premennými. Ak sa FE a RE odhad signifikantne odlišujú, znamená to, že RE odhad nie je konzistentný a vhodnejšie je použiť model s fixnými efektmi. Nulová hypotéza je, že rozdiel v odhadoch FE a RE nie je systematický, a teda je lepšie použiť model RE. Testovacia štatistika má rozdelenie  $\chi^2(k)$ , kde  $k$  je počet vysvetľujúcich premenných  $x$  a dá sa vyjadriť v tvare

$$T = (\hat{\beta}_{FE} - \hat{\beta}_{RE})^T (\hat{V}_{FE} - \hat{V}_{RE})^{-1} (\hat{\beta}_{FE} - \hat{\beta}_{RE}) \quad (3.8)$$

kde  $\hat{\beta}_{FE}$  a  $\hat{\beta}_{RE}$  sú odhady koeficientov vysvetľujúcich premenných pre FE, resp. RE model a  $\hat{V}_{FE}$  a  $\hat{V}_{RE}$  sú odhady asymptotických variančno-kovariančných matíc v týchto modeloch. Ak štatistika  $T$  má väčšiu hodnotu, ako korešpondujúca tabuľková hodnota  $\chi^2(k)$  rozdelenia, vtedy môžeme zamietnuť nulovú hypotézu, že rozdiel v odhadoch FE a RE nie je systematický a vhodnejším modelom na výpočty bude model s fixnými efektmi. Pýtame sa vlastne tiež, či sa oplatí vyhnúť vychýlenosti a nekonzistentnosti OLS odhadu premenných na úkor jeho efektívnosti. [8] [10] [20]

Doteraz sme pri odvodeniach uvažovali s balancovanými dátami. V praxi sa však často stretávame aj s nebalancovanými, kedy nám chýbajú určité pozorovania v čase pre jednotlivé krajiny.

### 3.1.5 Nebalancované modely

Zjednodušene predpokladajme iba dve krajiny v paneli, každú s iným počtom pozorovaní. Počet pozorovaní v prvej krajine je  $n_1$  a v druhej krajine ( $n_1+n_2$ ). Riešime potom rovnicu tvaru

$$\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

kde vektory  $y_1$  a  $y_2$  majú rozmer  $n_1$  resp.  $(n_1+n_2)$ , matice  $X_1$  a  $X_2$  rozmery  $n_1 \times K$  resp.  $n_2 \times K$ . Zavedieme premennú  $T_j = \sum_{i=1}^j n_i$  pre  $j=1,2$ . Potom  $j$ -ty blok variančno-kovariančnej matice  $\Omega$  bude  $\Omega_j = (T_j \sigma_\mu^2 + \sigma_v^2) \bar{J}_{T_j} + \sigma_v^2 E_{T_j}$ , kde  $\bar{J}_{T_j} = J_{T_j} / T_j$  a  $E_{T_j} = I_{T_j} - \bar{J}_{T_j}$ . Baltagi (1985) tento vzťah zovšeobecnil do tvaru  $\Omega_j^r = (T_j \sigma_\mu^2 + \sigma_v^2)^r \bar{J}_{T_j} + (\sigma_v^2)^r E_{T_j}$ , kde  $r$  je ľubovoľný skalár. Zavedieme váhu na rozlíšenie rozdielneho počtu pozorovaní pre krajiny  $w_j^2 = T_j \sigma_\mu^2 + \sigma_v^2$ . Fuller a Battese (1974) zaviedli transformáciu v tvare  $\sigma_v \Omega_j^{-1/2} = (\sigma_v / w_j) \bar{J}_{T_j} + E_{T_j} = I_{T_j} - \theta_j \bar{J}_{T_j}$  kde  $\theta_j = 1 - \sigma_v / w_j$ , pričom  $\theta_j$  sa mení pre krajiny. GLS odhad potom dostaneme ako vážený odhad najmenších štvorcov (WLS). Takáto analýza sa dá rozšíriť aj pre viacero krajín s rozdielnym počtom pozorovaní.

Vo všeobecnom tvare pre  $N$  krajín riešime pomocou regresie model

$$\begin{aligned} y_{it} &= \alpha + X_{it}^T \beta + u_{it} & i=1, \dots, N \text{ a } t=1, \dots, T_i \\ u_{it} &= \mu_i + v_{it} \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde  $\mu_i \sim IIN(0, \sigma_\mu^2)$  je nezávislé od  $v_{it} \sim IIN(0, \sigma_v^2)$ . Vo vektorom zápise riešime rovnicu tvaru

$$\begin{aligned} y &= \alpha t_n + X\beta + u = Z\delta + u \\ u &= Z_\mu \mu + v \end{aligned} \quad (3.11)$$

kde  $y$  a  $Z$  majú dimenzie  $n \times 1$ , resp.  $n \times K$ ,  $Z = (t_n, X)$ ,  $\delta^T = (\alpha^T, \beta^T)$ , pričom  $n = \sum T_i$ ,  $Z_\mu = \text{diag}(t_{T_i})$ , kde  $t_{T_i}$  je vektor jednotiek dimenzie  $T_i$ ,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)^T$  a  $v = (v_{11}, \dots, v_{1T_1}, \dots, v_{N1}, \dots, v_{NT_N})^T$ . Odhad pomocou OLS metódy má tvar

$$\hat{\delta}_{OLS} = (Z^T Z)^{-1} Z^T y \quad (3.12)$$

OLS odhad nebalancovaného modelu je stále najlepší lineárne nevychýlený odhad (BLUE), pokiaľ komponent variancie  $\sigma_\mu^2$  je rovný nule. Ak je kladný, odhad je stále konzistentný a nevychýlený, no štandardné chyby sú vychýlené.

Tzv. „Within-transformation“ vieme uskutočniť pomocou transformácie závislej premennej  $y$  a exogénnych regresorov  $X$  (bez konštanty). Využívame pritom maticu  $Q = \text{diag}(E_{T_j})$  a následne OLS metódu na transformované dáta.

$$\tilde{\beta} = (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \tilde{y} \quad (3.13)$$

kde  $\tilde{X} = QX$ ,  $\tilde{y} = Qy$ . Odhad konštanty vieme potom získať z rovnice  $\tilde{\alpha} = (\bar{y}_{..} - \bar{X}_{..} \tilde{\beta})$ , kde  $\bar{y}_{..} = \sum \sum y_{it} / n$ . [2]

Ekonometrický software Eviews podporuje prácu aj s nebalacovanými panelmi.

### 3.2 Nestacionárne panelové dáta

Pred oboznámením sa s nestacionárnymi panelovými dátami je potrebné najprv definovať pojem stacionarity časových radov.

#### Stacionárny proces

Silne stacionárnym procesom nazývame stochastický proces, ktorého rozdelenie pravdepodobnosti sa v čase nemení.  $\{X_t\}$  je stochastický proces a  $F_x(x_{t_1+\tau}, \dots, x_{t_k+\tau})$  označuje jeho kumulatívnu distribučnú funkciu v časoch  $t_1+\tau, \dots, t_k+\tau$ . Potom  $\{X_t\}$  je silne stacionárny, ak pre všetky  $k, \tau$  a  $t_1, \dots, t_k$  platí  $F_x(x_{t_1+\tau}, \dots, x_{t_k+\tau}) = F_x(x_{t_1}, \dots, x_{t_k})$ .

Pod pojmom slabo stacionárneho procesu rozumieme proces  $\{X_t\}$ , v ktorom vyžadujeme, aby boli prvé dva momenty v čase nemenné, teda musí platiť, že

$$E(x(t)) = E(x(t + \tau))$$

$$E(x(t_1) \cdot x(t_2)) = E(x(t_1 + \tau) \cdot x(t_2 + \tau)) \text{ pre všetky } \tau \in R$$

V praxi sa väčšinou stretávame s nestacionaritou panelových dát, čo znamená, že časové rady majú určitý trend vo svojom vývoji. Táto situácia sa dá riešiť pomocou diferencovania premenných alebo s využitím error correction modelu. Problémom v nestacionárnych dátach môže byť falošná regresia, kedy sa nazdávame, že existuje nejaký preukázateľný kauzálny vzťah medzi dvoma premennými, no v skutočnosti žiaden neexistuje, čoho príčinou môže byť práve nestacionarita časových radov. Existujú viaceré druhy nestacionarity, my budeme pracovať s integrovanými procesmi.  $\{X_t\}$  nazývame integrovaným procesom rádu  $k$ , ak jeho diferencovaním rádu  $k$  dostaneme stacionárny

proces. Väčšinou pozorujeme integráciu prvého rádu, teda procesy budú  $I(1)$ . Existujú testy na jednotkový koreň, ktoré môžu existenciu takéhoto procesu potvrdiť. [8] [33] [34]

### 3.2.1 Panelové testy jednotkového koreňa

Panelové testy na jednotkový koreň sú odvodené z testov pre časové rady, no do úvahy musia brať bližšie špecifikácie danej situácie v paneli.

#### Levin, Lin, Chu (2002) - LLC test

Test sa zakladá na riešení rovnice

$$\Delta y_{it} = \rho_i y_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{p_i} \theta_{ij} \Delta y_{i,t-j} + \alpha_{mi} d_{mt} + \varepsilon_{it} \quad m=1,2,3 \quad (3.14)$$

kde  $\rho_i = \beta_{1i} - 1$  a  $d_{mt}$  je vektor deterministických premenných,  $\alpha_{mi}$  je vektor koeficientov pre tri typy modelov, v ktorých uvažujeme, že  $d_{1t} = \{1\}$ ,  $d_{2t} = \{1, t\}$ ,  $d_{3t} = \{1, t, t^2\}$ . Oproti testu pre časové rady sa rovnica líši v člene  $\alpha_{mi} d_{mt}$ , pomocou ktorého vieme do modelu zahrnúť aj trend a časové efekty. Pre každý časový rad uvažujeme, že môže mať autokoreláciu rádu  $p_i$ . Odporúča sa, aby počet krajín bol v rozmedzí od 10 do 250 a počet pozorovaní od 25 do 250. Pri väčšom počte pozorovaní pre krajiny by totiž už boli postačujúce aj individuálne testy jednotkového koreňa. Monte Carlo simulácie potvrdili, že normálne rozdelenie dobre aproximuje empirické rozdelenie testovacej štatistiky, dokonca aj pri menších vzorkách. Nulová hypotéza predpokladá, že koeficient  $\rho_i = 0$ , teda že časový rad je integrovaný prvého rádu  $I(1)$ . Nedostatok tohto testu je, že predpokladá homogenitu subjektov, teda že  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k$ . Taktiež tento test je limitovaný tým, že predpokladáme nezávislosť medzi prierezovými dátami a nemôžeme ho teda aplikovať, ak sa vyskytuje korelácia v priereze krajín. [2] [8]

#### Im, Pesaran, Shin (2003) - IPS test

Tento test vychádza z rovnakej rovnice ako LLC test, ale predpokladá heterogenitu krajín, teda nemusí platiť, že  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k$ . Musíme odhadovať viacero koeficientov, preto je tento test nevhodný, ak máme malý počet dát pre jednu krajinu. Nulová hypotéza je, že  $\rho_i = 0$  pre všetky  $i$ , alternatívna má tvar

$$H_1 : \begin{cases} \rho_i < 0 \text{ pre } i = 1, 2, \dots, N_1 \\ \rho_i = 0 \text{ pre } i = N_1 + 1, \dots, N \end{cases}$$

Aby bol tento panelový test konzistentný, je potrebné, aby časť časových radov, ktorá je stacionárna, bola nenulová, teda  $\lim_{N \rightarrow \infty} (N_1/N) = \delta$ , kde  $0 < \delta \leq 1$ . Princíp IPS testu spočíva v tom, že na základe hodnôt  $\rho_i$  odhadneme rozdelenie tohto koeficientu, ktoré je asymptoticky normálne  $N(0,1)$  a následne usúdime, či sa jeho hodnota významne líši od nuly. Pracujeme pritom s hodnotami individuálnych t-štatistík z ADF testu, pomocou ktorých počítame ich priemernú hodnotu. Testovacia štatistika pre IPS má tvar

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_{\rho_i} \quad (3.15)$$

Nulovú hypotézu, že všetky časové rady sú nestacionárne, zamietame vtedy, ak aspoň jeden rad je stacionárny. [2] [8]

### **Breitungov test**

LLC aj IPS testy predpokladajú, že  $N \rightarrow \infty$  tak, aby  $N/T \rightarrow 0$ , teda  $N$  by malo byť relatívne malé v porovnaní s  $T$ . Breitung (2000) študoval silu oboch testov LLC aj IPS a zistil, že podstatne strácajú na sile, ak sú zahrnuté aj individuálne špecifické trendy. Je to spôsobené korekciou vychýlenosti. Breitung navrhol štatistiku, ktorá neobsahuje korekcie vychýlenosti, a má väčšiu silu ako testy LLC a IPS uskutočnené pomocou Monte Carlo experimentov.

### **Kombinovaný p-value test (Fisher)**

Označme  $G_{iT_t}$  ako testovaciu štatistiku  $i$ -tej krajiny v teste jednotkového koreňa. Ďalej predpokladáme, že ak  $T_i \rightarrow \infty$ , tak  $G_{iT_t} \rightarrow G_i$ , kde  $G_i$  je nedegenerovaná náhodná premenná.  $p_i$  označíme ako asymptotickú p-hodnotu testu jednotkového koreňa pre krajinu  $i$ . Maddala a Wu (1999) a Choi (2001) navrhli test Fisherovho typu s testovacou štatistikou v tvare

$$P = -2 \sum_{i=1}^N \ln p_i \quad (3.16)$$

Určitým spôsobom teda kombinujeme individuálne p-hodnoty z testov jednotkového koreňa pre jednotlivé krajiny.  $P$  má rozdelenie  $\chi^2$  s  $2N$  stupňami voľnosti, keď  $T_i \rightarrow \infty$  pre konečné  $N$  (počet krajín v paneli). Individuálne štatistiky sú počítané buď na základe ADF alebo Phillips-Perronovho testu jednotkového koreňa pre časové rady. Oproti LLC testu má tento test výhodu, že nemá obmedzujúci predpoklad o rovnakej hodnote  $\rho_i$  pre všetky krajiny, no kombinuje informácie z individuálnych testov jednotkového koreňa. Oproti IPS testu je výhodou, že kombinovaný p-value test podporuje aj nebalancovaný panel. [2]

## Hadriho test

Hadriho test je založený na podobnom princípe ako KPSS test jednotkového koreňa pre časové rady. Hadri odvodil LM test s nulovou hypotézou, že medzi časovými radmi sa nenachádza rad s jednotkovým koreňom. Uvažujú sa pritom dva modely.

$$y_{it} = r_{it} + \varepsilon_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T$$

$$y_{it} = r_{it} + \beta_i t + \varepsilon_{it}$$

kde  $r_{it} = r_{i,t-1} + u_{it}$  je náhodná prechádzka,  $\varepsilon_{it} \sim IIN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , a  $u_{it} \sim IIN(0, \sigma_\mu^2)$ , sú navzájom nezávislé. Pomocou substitúcie dostávame

$$y_{it} = r_{i0} + \beta_i t + \sum_{s=1}^t u_{is} + \varepsilon_{it} = r_{i0} + \beta_i t + v_{it} \quad (3.17)$$

Hypotéza stacionarity predpokladá, že  $\sigma_u^2 = 0$ , vtedy  $v_{it} = \varepsilon_{it}$ . LM štatistika má tvar

$$LM = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T S_{it}^2 \right) / \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \quad (3.18)$$

kde  $S_{it} = \sum_{s=1}^t \hat{\varepsilon}_{is}$  a  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  je konzistentný odhad  $\sigma_\varepsilon^2$  pri nulovej hypotéze. Alternatívna hypotéza s uvážením heteroskedasticity medzi krajinami, teda s uvážením  $\sigma_{\varepsilon i}^2$ .

$$LM = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T S_{it}^2 / \hat{\sigma}_{\varepsilon i}^2 \right) \right) \quad (3.19)$$

Testovacia štatistika má tvar  $Z = \sqrt{N}(LM - \xi) / \zeta$  a má asymptotické normálne rozdelenie  $N(0,1)$ , kde  $\xi = 1/6$  a  $\zeta = 1/45$ , ak model obsahuje iba konštantu a  $\xi = 1/15$  a  $\zeta = 11/6300$  inak. [2]

### 3.2.2 Kointegrácia

Kointegrácia je štatistická vlastnosť časových radov. Hovoríme, že dva a viac časových radov je kointegrovaných, ak majú spoločný stochastický drift, teda do určitej miery sa správajú podobne. V krátkodobom hľadisku môžu mať rôzne fluktuácie, no z dlhodobého hľadiska sú fluktuácie podobné. Uvažujme existenciu dvoch časových radov  $X_t$  a  $Y_t$ , ktoré sú oba  $I(1)$ . Ak existuje ich lineárna kombinácia  $Z_t = m + aX_t + bY_t$  taká, že  $Z_t$  je  $I(0)$ , potom sú  $X_t$  a  $Y_t$  kointegrované. Základným predpokladom na výskyt kointegrácie v dátach je ich nestacionarita. Engle a Granger (1987) navrhli test na zistenie kointegrácie pre časové

rady, pričom pracujú s dvojstupňovou metódou, kedy v prvom kroku je vytvorené regresia vysvetľovanej premennej  $Y_t$  na vysvetľujúcu premennú  $X_t$ . V druhom kroku sú rezíduá z tohto modelu testované na stacionaritu. Ak sa potvrdí stacionarita, existuje medzi premennými dlhodobý vzťah. Vylepšenie pre uvažovanie viacerých kointegračných vzťahov poskytuje Johansenov test. Testy na kointegráciu časových radov sú základom pre testy na zisťovanie kointegrácie v panelových dátach. [8] [11]

## Panelové testy kointegrácie

### Reziduálny DF a ADF test (Kaov test)

Uvažujeme nasledovný model panelovej regresie

$$y_{it} = x_{it}^T \beta + z_{it}^T \gamma + \varepsilon_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.20)$$

kde  $y_{it}$  a  $x_{it}$  sú navzájom nekointegrované a integrované prvého rádu  $I(1)$ . Pre  $z_{it} = \{\mu_i\}$  Kao (1999) navrhol DF a ADF testy jednotkového koreňa pre  $e_{it}$  ako test nulovej hypotézy na absenciu kointegrácie. Testy DF typu sú odvodené z rezíduí fixných efektov

$$\hat{\varepsilon}_{it} = \rho \hat{\varepsilon}_{i,t-1} + v_{it}$$

kde  $\hat{\varepsilon}_{it} = \tilde{y}_{it} - \tilde{x}_{it} \hat{\beta}$  a  $\tilde{y}_{it} = y_{it} - \bar{y}_i$ . Nulová hypotéza vylúčenia kointegrácie je potom v tvare  $H_0: \rho = 1$ . Pomocou OLS metódy pridáme k odhadu  $\rho$  a aj príslušnej t-štatistiky. Kao ďalej poskytuje štyri typy DF testu,  $DF_\rho$ ,  $DF_t$ ,  $DF_\rho^*$ ,  $DF_t^*$ . Prvé dva typy sú založené na silnej exogenite regresorov a chýb. Druhé dva typy sú vhodné na kointegráciu s endogénnym vzťahom medzi regresormi a chybami.

Pri ADF teste využívame nasledovnú regresiu

$$\hat{\varepsilon}_{it} = \rho \hat{\varepsilon}_{i,t-1} + \sum_{j=1}^p \mathcal{G}_j \Delta \hat{\varepsilon}_{i,t-j} + v_{itp}$$

Nulová hypotéza hovorí, že nepozorujeme kointegráciu medzi premennými.

Asymptotické rozdelenia všetkých DF testov aj ADF testu konvergujú k štandardnému normálnemu rozdeleniu  $N(0,1)$ . [2]



## Pedroniho test

Pedroni (2000, 2004) navrhol viaceré testy, ktoré umožňujú pracovať aj s heterogenitou krajín. Jeho testy sa rozdeľujú do dvoch skupín. Prvá skupina pracuje s určitým priemerom testovacích štatistík kointegrácie pre jednotlivé časové rady v priereze krajín. Druhá skupina testov je založená na samostatnom priemerovaní členov v čitateli a v menovateli. [2]

## 3.3 Práca s panelovými dátami

Pri práci s časovými radmi si musíme uvedomiť, s akými dátami vlastne pracujeme. Základným predpokladom nevychýleného odhadu OLS je exogenita premenných. Vyžadujeme teda, aby vysvetľujúce premenné neboli korelované s chybovým členom. Ak by sme tento predpoklad porušili, museli by sme do modelu zapracovať inštrumentálnu premennú, ktorá by bola korelovaná s vysvetľujúcou premennou, ale nie s chybovým členom.

Ďalej potrebujeme zistiť, či pracujeme so stacionárnymi alebo s nestacionárnymi dátami. Pri nestacionárnych dátach môže vzniknúť problém falošnej regresie, kedy sa nám zdá, že existuje vzťah medzi dvomi premennými, no v skutočnosti túto falošnú závislosť spôsobuje jestvujúci trend. Problémy s nestacionaritou sa dajú odstrániť viacerými spôsobmi.

### Odhad pomocou diferencií

Uvažujeme model aj s fixnými efektmi a jeho v čase posunutú alternatívu

$$\begin{aligned} y_{it} &= \alpha_i + \beta x_{it} + u_{it} \\ y_{i,t-1} &= \alpha_i + \beta x_{i,t-1} + u_{i,t-1} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 2, \dots, T \end{aligned} \quad (3.21)$$

Po odpočítaní rovníc dostávame

$$\Delta y_{it} = \beta \Delta x_{it} + \Delta u_{it} \quad (3.22)$$

Výhodou takéhoto modelu je, že diferencovaním odstránime člen vyjadrujúci fixné efekty, teda nemáme už žiadne problémy s prípadnou koreláciou fixných efektov s vysvetľujúcimi premennými a ani s heterogenitou modelu vo fixných efektoch. Taktiež, ak boli

vysvetľovaná a vysvetľujúca premenná integrované prvého rádu, po ich diferencovaní dostávame už stacionárne procesy. [5]

### ECM (Error correction model)

Nestacionarita a aj prípadná kointegrácia dát sa dá modelovať pomocou EC (Error correction) modelov, pričom zavedieme jednoduchú transformáciu. Uvažujeme základný model v tvare

$$y_{it} = \beta x_{it} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.23)$$

Zavedieme EC člen v nasledovnom tvare

$$\xi_{it} = y_{it} - \beta x_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.24)$$

$\xi_{it}$  je chybový člen regresie  $y_{it}$  na  $x_{it}$ . EC model potom definujeme ako

$$\Delta y_{it} = \alpha \xi_{i,t-1} + \gamma \Delta x_{it} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (3.25)$$

kde  $u_{it}$  sú nezávislé rovnako rozdelené s nulovou strednou hodnotou a varianciou  $\sigma_u^2$ . Model hovorí, že  $\Delta y_{it}$  môžeme vysvetliť pomocou v čase posunutej hodnoty  $\xi_{i,t-1}$  a  $\Delta x_{it}$ . Člen  $\xi_{i,t-1}$  môžeme chápať ako úroveň odchýlenia sa modelu od ekvilibria, teda vyjadruje dlhodobý vzťah, zatiaľ čo člen  $\Delta x_{it}$  vyjadruje krátkodobú dynamiku. [15]

### Metóda odhadu

Môžeme si zvoliť viaceré metódy riešenia regresie, napríklad metódu najmenších štvorcov (OLS), alebo dvojštádiovú metódu najmenších štvorcov s využitím inštrumentálnej premennej (TSLS), pri ktorej však musíme nájsť vhodný inštrument, ktorý bude korelovaný s vysvetľujúcou premennou, no nebude korelovaný s chybovým členom. My budeme modely vytvárať takým spôsobom, aby sme zamedzili novej existencii endogenity vysvetľujúcich premenných a budeme využívať na výpočet OLS regresiu.

### Váha pozorovaní

Pri odhade môžeme využiť rozličné váhy pozorovaní.

*Prierezové váhy* – pomocou nich vieme do odhadu zovšeobecnenou metódou najmenších štvorcov zahrnúť aj predpoklad heteroskedasticity v prierezových údajoch, teda rozličnú varianciu reziduí pre rôzne krajiny.

$$E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{it} | X_i^*) = \sigma_i^2$$

$$E(\varepsilon_{is}\varepsilon_{jt} | X_i^*) = 0$$

pre všetky  $i, j, s, t$ , kde  $i \neq j$  a  $s \neq t$  a  $X_i^*$  obsahuje vektor vysvetľujúcich premenných aj s fixnými, resp. náhodnými efektmi, ak sú do modelu zahrnuté.

*Prierezové SUR váhy* – uvažujeme s heteroskedasticitou a súčasne aj s koreláciou dát v priereze krajín, no rezíduá v rozličných periódach nesmú byť korelované.

$$E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt} | X_t^*) = \sigma_{ij}$$

$$E(\varepsilon_{is}\varepsilon_{jt} | X_t^*) = 0$$

pre všetky  $i, j, s, t$ , kde  $s \neq t$ . Táto metóda však zlyháva pre veľký počet krajín s malým počtom pozorovaní pre každú krajinu.

*Periódové váhy* – umožňujú počítať s heteroskedasticitou vyskytujúcou sa v čase.

*Periódové SUR váhy* – uvažujú s heteroskedasticitou aj koreláciou pozorovaní v čase pre danú krajinu. [7]

## 4. Modelovanie demografických procesov

V empirickej časti mojej diplomovej práce budeme skúmať dva základné ekonomicko-demografické fenomény, Prestonovu krivku a demograficko-ekonomický paradox. Budeme hľadať vhodné doplňujúce vysvetľujúce premenné a identifikovať spoločensko-technologické zmeny na objasnenie priebehu modelovaných demografických veličín.

### 4.1 Prestonova krivka

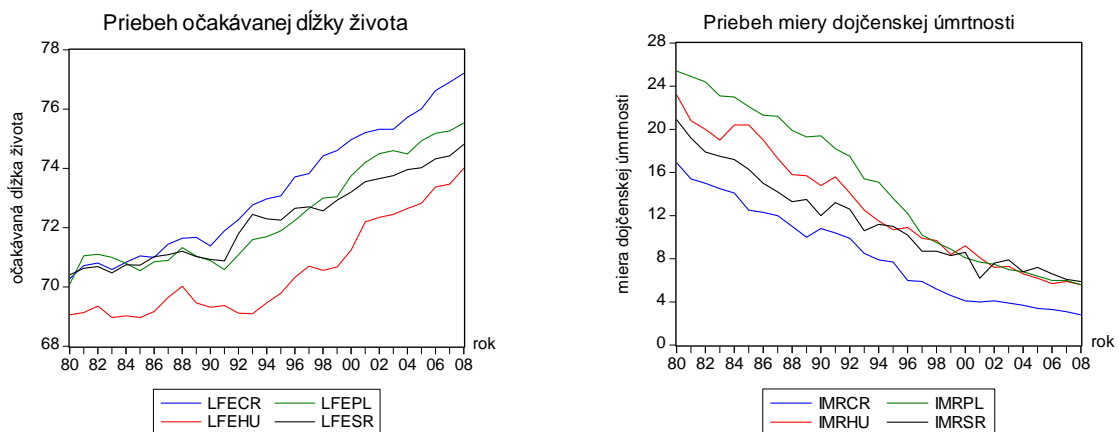
Pomocou panelovej regresie budeme modelovať a hľadať vzťah medzi očakávanou dĺžkou života a HDP na obyvateľa. Očakávame, že pri náraste HDP na obyvateľa bude rásť aj očakávaná dĺžka života vzhľadom na lepšie možnosti zdravotnej starostlivosti v krajine a lepšie podmienky na zdravý životný štýl. Existujú viaceré možnosti určenia presného tvaru závislosti pozorovaných veličín. Jednou z možností je lineárna závislosť, kedy predpokladáme, že bez ohľadu na aktuálnu úroveň HDP na obyvateľa sa pri jeho zmene o jednu jednotku očakávaná dĺžka života zmení o  $k$  jednotiek, pričom hľadáme tento neznámy parameter  $k$ . Takýto prístup má však viaceré nevýhody. Lineárny tvar závislosti nevie dobre zachytiť citlivosť na veľkosť premenných. Ďalšou možnosťou je vyjadrenie vzťahu pomocou hyperbolickej závislosti. Vtedy však nastáva problém s interpretáciou samotných výsledkov. My budeme pracovať so závislosťou v logaritmickom tvare, ktorý umožňuje zachytiť aj vplyv veľkostí jednotlivých premenných. Pracujeme s krajinami V4, teda s Českou republikou (CR), Maďarskom (HU), Poľskom (PL) a so Slovenskou republikou (SR). Na úvod bližšie popíšeme premenné, ktoré budeme v modeloch využívať.

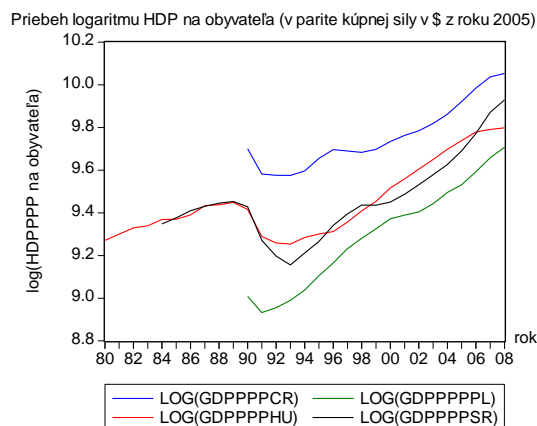
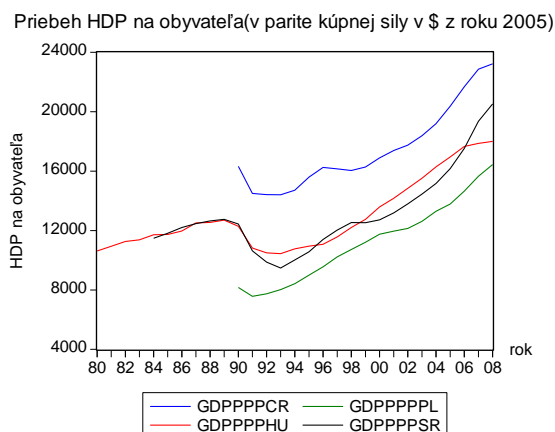
*Očakávaná dĺžka života pri narodení* – do roku 1990 očakávaná dĺžka života v pozorovaných krajinách iba veľmi mierne rástla. Okolo roku 1990 nastala štrukturálna zmena vo vývoji tejto veličiny, kedy začala rásť omnoho rýchlejším tempom. Je to dané zlepšeným prístupom krajín ku najnovším technologickým prostriedkom, ktoré pomohli ku efektívnejšej liečbe pacientov. Ako príklad môžeme uviesť zavedenie rýchlej zdravotnej služby na Slovensku, ktorá dovtedy absentovala. Kúpili sa nové sanitky, ktoré boli usposobené na resuscitáciu už priamo vo vozidle, pacient nemusel čakať až na dopravenie do nemocnice. Najnižšieho veku sa ľudia dožívajú v Maďarsku, zatiaľ čo najdlhšie sa dožívajú v Českej republike. V Poľsku a v Slovenskej republike sú hodnoty pomerne vyrovnané. V texte túto premennú budeme označovať ako *LFE* (Life expectancy). Zdrojom údajov je databáza World dataBank. [32]

**HDP na obyvateľa** – je vyjadrené v dolároch z roku 2005 v parite kúpnej sily (PPP - Purchasing power parity). Údaje sú nebalancované, pričom za Maďarsko máme údaje od roku 1980 po rok 2008, za Slovensko od roku 1984 po rok 2008 a za Poľsko a Českú republiku od roku 1990 po rok 2008. V krajinách došlo v roku 1992 k poklesu úrovne HDP na obyvateľa, no v nasledujúcich rokoch tento ukazovateľ začal rásť až do času hospodárskej krízy v roku 2008. Krajina s najnižšou hodnotou HDP na obyvateľa je Poľsko, kde sa ukazovateľ pohybuje na úrovni medzi 8000-16000\$ na obyvateľa. Z tohto hľadiska najbohatšou krajinou je jednoznačne Česká republika s hodnotami medzi 14000-23000\$ na obyvateľa. Maďarsko a Slovenská republika sú v tomto ukazovateli porovnateľné krajiny. My budeme konkrétne pracovať s logaritmovaným radom, ktorý má rovnaký charakter priebehu. V texte ho budeme označovať ako  $\log(GDP PPP)$ . Zdrojom údajov je databáza World dataBank. [32]

**Miera dojčenskej úmrtnosti** – ukazovateľ klesá takmer počas celého pozorovaného obdobia bez výrazných štrukturálnych zlomov. Najvyššia hodnota miery dojčenskej úmrtnosti je v Poľsku, zatiaľ čo najnižšia v Českej republike. Približne od roku 1999 sa hodnoty ukazovateľa vyrovnali vo všetkých krajinách, okrem Českej republiky, ktorá má hodnoty po celý čas nižšie. Na začiatku sa pohybujeme na úrovni približne od 16 po 25 zomrelých, pričom na konci pozorovaného obdobia sme na úrovni okolo 5,7 a v Českej republike iba 2,8 zomretých do jedného roka na 1000 živonarodených. V texte túto premennú budeme označovať ako *IMR* (Infant mortality rate). Zdrojom údajov je databáza Eurostatu. [30]

*Graf 4.1: Priebehy očakávanej dĺžky života, miery dojčenskej úmrtnosti, HDP na obyvateľa a logaritmu HDP na obyvateľa pre krajiny V4*





Najskôr si musíme uvedomiť, s akými dátami vlastne pracujeme. Už na základe grafov môžeme tušiť, že dáta budú nestacionárne. Tento predpoklad overíme pomocou panelových testov jednotkového koreňa.

U jednotlivých procesov uvažujeme s priesečníkom. Fisherov test pracuje s asymptotickým  $\chi^2$  rozdelením, ostatné testy s asymptotickým normálnym rozdelením. LLC, Breitungov a Hadriho test uvažujú spoločný jednotkový koreň, zvyšné testy uvažujú rozdielne jednotkové korene. Okrem Hadriho testu všetky testy majú ako nulovú hypotézu výskyt nestacionarity.

Tabuľka 4.1: Sumárne výsledky panelových testov jednotkového koreňa pre nebalancované rady od roku 1980 po rok 2008 a pre balancované od roku 1990 po rok 2008

	log(GDPPPP)				LFE				IMR			
	I(0)		I(1)		I(0)		I(1)		I(0)		I(1)	
	stat.	prob.	stat.	prob.	stat.	prob.	stat.	prob.	stat.	prob.	stat.	prob.
LLC	0.614	0.73	1.184	0.882	3.915	1	-5.601	0	-2.123	0.017	-6.11	0
Breitung	-0.867	0.193	-1.229	0.11	-1.016	0.155	-5.62	0	2.282	0.989	-3.162	8E-04
IPS	2.414	0.992	-1.395	0.082	5.865	1	-4.699	0	0.242	0.596	-6.346	0
ADF - Fisher	1.047	0.998	12.21	0.142	0.052	1	36.71	0	5.768	0.673	52.75	0
PP - Fisher	0.128	1	41.14	0	0.009	1	66.97	0	20.45	0.009	97.37	0
Hadri Z-stat	4.894	0	1.929	0.027	6.604	0	4.55	0	6.89	0	1.591	0.056

	log(GDPPPP)				LFE				IMR			
	I(0)		I(1)		I(0)		I(1)		I(0)		I(1)	
	stat.	prob.	stat.	prob.	stat.	prob.	stat.	prob.	stat.	prob.	stat.	prob.
LLC	-0.495	0.31	-2.594	0.005	3.525	1	-5.061	0	-2.123	0.017	-6.11	0
Breitung	-0.534	0.297	0.341	0.633	-1.393	0.082	-5.358	0	2.282	0.989	-3.162	8E-04
IPS	2.212	0.987	-2.107	0.018	5.518	1	-4.662	0	0.242	0.596	-6.346	0
ADF - Fisher	1.427	0.994	17.01	0.03	0.058	1	36.33	0	5.768	0.673	52.75	0
PP - Fisher	0.12	1	19.93	0.011	0.012	1	50.6	0	20.45	0.009	97.37	0
Hadri Z-stat	4.982	0	1.629	0.052	7.77	0	3.681	1E-04	6.89	0	1.591	0.056

Na základe štatistík viacerých testov jednotkového koreňa môžeme usúdiť, že procesy  $\log(GDPPPP)$ ,  $LFE$  a  $IMR$  sú integrované prvého rádu. Jednotkový koreň pre nediferencované rady potvrdili všetky testy. Avšak pre náš nebalancovaný panel sa zdá byť najvhodnejší test Fisherovho typu, ktorý uvažuje s rozdielnym koeficientom  $\rho_i$  pre jednotlivé časové rady a tiež podporuje aj nebalancovaný panel. Tento test nám potvrdil, že už nie sú všetky diferencované časové rady v paneli nestacionárne, ale aspoň jeden z nich je stacionárny. Pri  $\log(GDPPPP)$  nie je výsledok celkom jednoznačný. Pri balancovaných paneloch konštatovali takmer všetky testy stacionaritu diferencovaného radu. U všetkých premenných uvažujeme teda s integrovanosťou rádu  $I(1)$ .

Taktiež na to, aby bol odhad pomocou OLS metódy nevychýlený, musia naše dáta spĺňať podmienku exogenity. Vysvetľujúca premenná teda nesmie byť korelovaná s rezíduami modelu. Už zo samotného charakteru našich dát neuvažujeme s možnou endogenitou, nakoľko očakávaná dĺžka života pri narodení dieťaťa by nemala mať vplyv na úroveň HDP na obyvateľa a taktiež ani na dojčenskú úmrtnosť.

Začneme najjednoduchším nebalancovaným modelom od roku 1980 po rok 2008.

$$LFE_{it} = c + \beta \log(GDPPPP) + u_{it}$$

V ňom však musíme uvážiť, či môžeme krajiny v premennej HDP homogenizovať, alebo naopak koeficienty rozlišovať. Tiež je potrebné uvážiť použitie fixných, resp. náhodných efektov, ktoré taktiež slúžia na lepšie rozlíšenie správania sa krajín.

Budeme pracovať s modelom, v ktorom sa krajiny správajú heterogénne v premennej HDP na obyvateľa, nakoľko majú veľmi rozdielne koeficienty pri tejto premennej, teda je potrebné rozlišovať jej vplyv. Taktiež heterogenitu potvrdzuje aj rozdiel v reziduálnej sume štvorcov, ktorý je veľmi výrazný,  $RSS_{non-pool}=55,21471$  a  $RSS_{pool}=228,993$ , a teda  $F=91,27224$ , čo je väčšia hodnota ako kritická  $F(3,87)= 2,709402$ . Tiež do modelu pridáme aj fixné efekty, nakoľko odlišný charakter závislosti očakávanej dĺžky života a HDP sa neprejaví iba v rozdielnom sklone krivky závislosti, ale taktiež aj v jej vertikálnom posune. Fixné efekty potvrdzuje aj F-test, kedy  $RSS_{FEM}=41,06163$  a  $RSS_{pool}=53,94108$ . Potom  $F=8,78252$  je väčšia ako kritická hodnota  $F(3,84)= 2,713227$ . Budeme teda pracovať s modelom v tvare

#### Model 4.1.1

$$LFE_{it} = c + \alpha_i + \beta_i \log(GDPPPP) + u_{it}$$

Mohli by sme taktiež uvážiť aj možnosť použitia náhodných efektov namiesto fixných pomocou Hausmanovho testu.

Tabuľka 4.2: Výstup z Hausmanovho testu

Hausmanov test		
Chi-Sq. Statistic	Chi-Sq. d.f.	Prob.
0.667768	1	0.4138

Hausmanov test nepotvrdil systematický rozdiel v odhadoch pomocou fixných a náhodných efektov, teda na základe tohto testu by bolo vhodnejšie použiť náhodné efekty, ktoré sú efektívnejšie. V modeli však budeme uvažovať s fixnými efektmi, nakoľko tie sa častejšie používajú pri makroekonomických modeloch s menším počtom pozorovaných krajín a za dlhšie časové obdobie. Výber krajín nie je náhodný, ako to býva pri mikroekonomickom modelovaní, a teda nie je potrebné zavádzať náhodnosť do koeficientov.

Tabuľka 4.3: Model 4.1.1 s využitím heterogenity v premennej HDP na obyvateľa a s použitím fixných efektov

LFE			
C	1.004554	<b>Fixed Effects (Cross)</b>	
CR--LOG(GDPPPPCR)	10.2399	CR--C	-26.4969
HU--LOG(GDPPPPHU)	8.754699	HU--C	-13.22296
PL--LOG(GDPPPPPL)	6.53147	PL--C	11.49634
SR--LOG(GDPPPPSR)	4.732354	SR--C	26.73907

Potvrdil sa očakávaný vzťah medzi úrovňou HDP na obyvateľa a očakávanou dĺžkou života, kedy pri náraste HDP na obyvateľa rastie aj očakávaná dĺžka života. Tento vplyv je najsilnejší v Českej republike, zatiaľ čo najslabší je na Slovensku. Na Slovensku došlo k najnižšiemu nárastu očakávanej dĺžky života, zatiaľ čo HDP na obyvateľa zaznamenalo najvyšší nárast spomedzi všetkých štyroch krajín, teda vzájomný vzťah medzi týmito veličinami je slabší ako u ostatných krajín. Fixné efekty vyrovnávajú rozdiely v očakávanej dĺžke života kvôli rozdielnymi koeficientom krajín v premennej HDP.

Model môžeme ďalej vylepšiť uvážením zmeny priebehu očakávanej dĺžky života v roku 1992 pomocou zmeny charakteru reakcie očakávanej dĺžky života na HDP na hlavu, ktorú vyjadríme dodatočnou premennou  $sok92 * \log(GDPPPP)$ . Je však otázne, či táto zmena mala výrazné rozdiely medzi krajinami, teda či treba rozlišovať koeficient pri premennej



charakterizujúcej túto zmenu v roku 1992. V niektorých krajinách táto zmena nastala o čosi neskôr a niekde mala prudší priebeh, ako u ostatných krajín, teda by sme mali reakciu na zmenu rozlišovať. To potvrdzujú aj reziduálne sumy štvorcov v alternatívnych modeloch, kde  $RSS_{pool}=12,80215$  a  $RSS_{non-pool}=9,087519$ . F-štatistika má teda hodnotu  $F=10,90032$ , čo je väčšie ako kritická hodnota  $F(3,80)=2,718785$ . Pracujeme s modelom v tvare

Model 4.1.2

$$LFE_{it} = c + \alpha_i + \beta_i \log(GDPPP) + \gamma_i sok92 \cdot \log(GDPPP) + u_{it}$$

Výsledky modelu sú uvedené v tabuľke 4.4.

Model by sme ďalej mohli rozšíriť pridaním ďalšej vysvetľujúcej premennej. Vplyv na očakávanú dĺžku života môže mať okrem samotného HDP na obyvateľa aj úroveň zdravotnej starostlivosti. Jednou z možností, ako ju vyjadriť, je pomocou celkových výdavkov na zdravotníctvo. Tieto by však nemohli byť vyjadrené v dolároch na obyvateľa v parite kúpnej sily, nakoľko by došlo ku koreláciám vysvetľujúcich premenných, HDP na obyvateľa a celkových výdavkov na obyvateľa. Keď totiž HDP vzrastie, je predpoklad, že narastú aj výdavky na zdravotníctvo, pokiaľ by sa v krajine nezmenila situácia a na zdravotníctvo by sa vynakladala stále rovnaká časť z HDP. Nastal by teda problém multikolinearity. Tento fakt síce neznižuje silu predikcie modelu ako celku, no ovplyvňuje výsledky koeficientov pri jednotlivých premenných, ktoré neodzrkadľujú skutočný vplyv týchto premenných na vysvetľovanú premennú. Je teda vhodnejšie výdavky na zdravotníctvo uvažovať v tvare ako podiel z HDP v krajine, kedy už nedochádza ku silnej korelácii, nakoľko nárast premennej HDP nemusí zdvihnúť aj percentuálny podiel výdavkov na zdravotníctvo. [28]

Výsledky takýchto modelov však nedávali presvedčivé výsledky o skutočnom vplyve výdavkov na zdravotníctvo, nakoľko sa zdalo, že ich nárast ovplyvňuje očakávanú dĺžku života negatívne, teda v týchto krajinách je možno určitý hlbší problém so zdravotným stavom populácie, kedy nejde kauzalita v smere od zvýšených výdavkov na zdravotnú starostlivosť po zvýšenie očakávanej dĺžky dožitia, ale prevláda skôr opačný vplyv, teda zhoršené zdravie populácie a jeho znížená očakávaná dĺžka života má za následok nutný nárast výdavkov na zdravotníctvo. Taktiež je však možné, že tento ukazovateľ nevie celkom dobre vysvetliť skutočný vplyv zlepšenej zdravotnej starostlivosti na dĺžku dožitia, preto sa pokúsime využiť inú vysvetľujúcu premennú.

Budeme uvažovať s mierou dojčenskej úmrtnosti. Tá na jednej strane vplyva na očakávanú dĺžku života priamo, teda keď sa zníži miera dojčenskej úmrtnosti, predĺži sa tým aj očakávaný vek dožitia a tiež táto veličina aj nepriamo vyjadruje zlepšenú úroveň zdravotníctva.

Rozšírime *model 4.1.2* o ďalšiu premennú a panel vybalancujeme, teda budeme pracovať s dátami od roku 1990 po rok 2008. Miera dojčenskej úmrtnosti mala v krajinách rozdielne vplyvy, teda musíme ju heterogenizovať, čo potvrdzuje aj F-test.

Hodnoty reziduálnych súm štvorcov sú  $RSS_{non-pool}=5,176887$  a  $RSS_{pool}=4,305162$  a  $F=3,78586$ . V porovnaní s kritickou hodnotou  $F(3,63)=2,750541$  by sme nemali model homogenizovať, teda pracujeme s modelom v tvare

#### Model 4.1.3

$$LFE_{it} = c + \alpha_i + \beta_i \log(GDPPP_{it}) + \gamma_i \text{sok92} \cdot \log(GDPPP_{it}) + \delta_i IMR + u_{it}$$

Tabuľka 4.4: Porovnanie modelov pre očakávanú dĺžku života

		<b>Model 4.1.2</b>	<b>Model 4.1.3</b>
C		10.71852***	32.88424***
CR--LOG(GDPPPPCR)		8.952147***	4.839013***
HU--LOG(GDPPPHEU)		7.391762***	5.317797***
PL--LOG(GDPPPPL)		6.171507***	4.831603***
SR--LOG(GDPPPSR)		3.418287***	2.325952***
CR--SOK92*LOG(GDPPPPCR)		0.199654***	0.051166
HU--SOK92*LOG(GDPPPHEU)		0.108756***	-0.004096
PL--SOK92*LOG(GDPPPPL)		0.056245*	0.022238
SR--SOK92*LOG(GDPPPSR)		0.207354***	0.148494***
CR--IMRCR			-0.367021***
HU--IMRHEU			-0.19665**
PL--IMRPL			-0.087607
SR--IMRSR			-0.147773**
Fixné efekty	CR--C	-25.39014	-4.008654
	HU--C	-10.65869	-10.28705
	PL--C	4.658854	-3.839841
	SR--C	28.11985	18.13555
R <sub>A</sub> <sup>2</sup>		0.974632	0.980257
DW		1.94373	1.409257
F-stat.		318.8405	249.2578
F-prob.		0	0

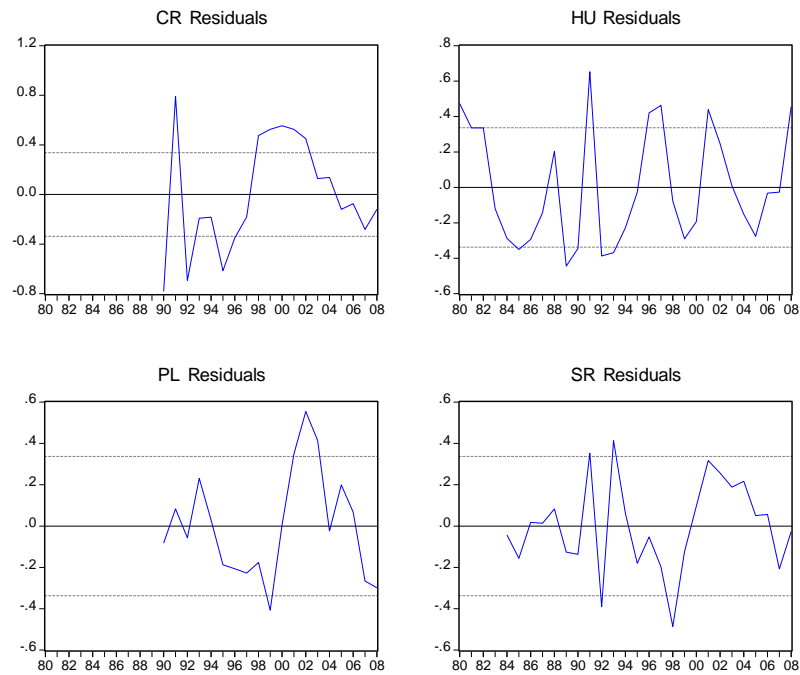
Pozn: \*\*\* - signifikancia na úrovni 1%, \*\* - signifikancia na úrovni 5%, \* - signifikancia na úrovni 10%

V *modeli 4.1.2* sa potvrdila kladná závislosť medzi očakávanou dĺžkou života a úrovňou HDP, ktorú má však každá krajina na inej úrovni. Záporné fixné efekty v Českej republike upravujú vysoký koeficient pri úrovni HDP na obyvateľa, kladné fixné efekty na Slovensku zasa upravujú nízky koeficient pri premennej HDP na obyvateľa. Spoločensko-technologický šok v roku 1992 spôsobil silnejšie previazanie HDP na obyvateľa a očakávanej dĺžky života. Hodnota DW štatistiky je blízka hodnote 2, no v nebalancovanom modeli sa nedá použiť. Na základe F-štatistiky je model významný a tiež hodnota  $R^2_A$  hovorí o dobrom vysvetlení variability dát modelom. Mohli by sme tiež uvážiť použitie váh, no vzhľadom na to, že nemali na model žiaden zásadný vplyv, neuvažovali sme ich.

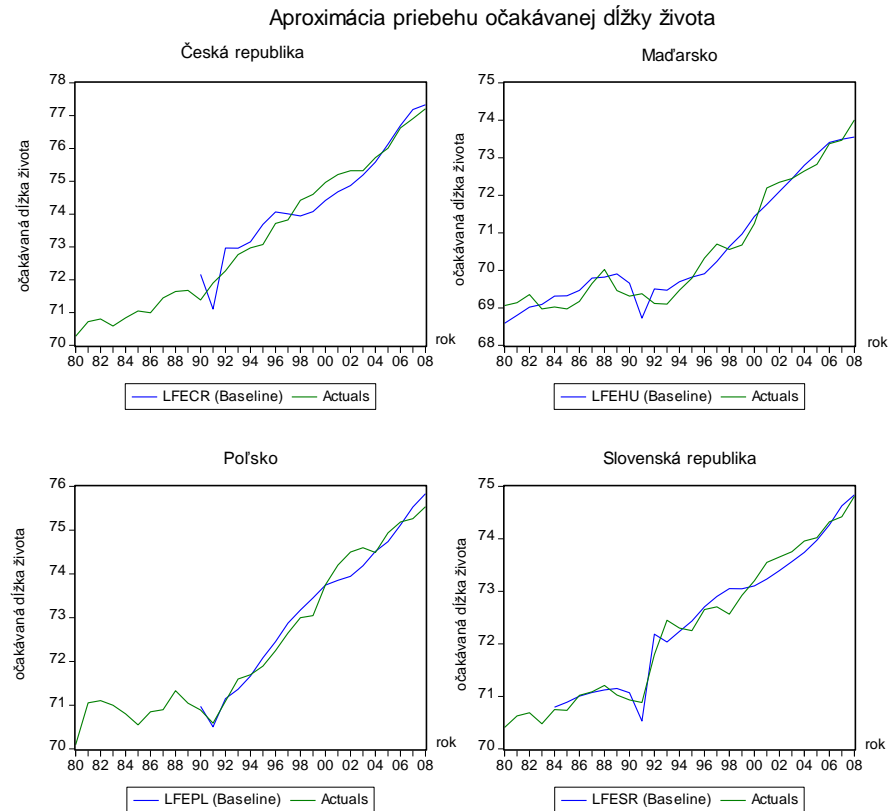
Taktiež aj v *modeli 4.1.3* sme podľa očakávania dostali kladnú závislosť očakávanej dĺžky života od úrovne HDP a zápornú závislosť od miery dojčenskej úmrtnosti. Teda čím viac detí umrie počas prvého roku života, tým viac poklesne očakávaná dĺžka života. Veľkosti koeficientov pri premennej HDP na obyvateľa sa oproti *modelu 4.1.2* zmenšili, nakoľko do modelu pribudla nová vysvetľujúca premenná. Taktiež aj rozdiely medzi krajinami v danom koeficiente sa zmenšili. Najsilnejší vplyv má miera dojčenskej úmrtnosti v Českej republike. Zaznamenávame tam najnižšie hodnoty tohto ukazovateľa, preto sú Česi citlivejší na jeho nárast. Naopak v Poľsku má táto premenná najmenší vplyv, nakoľko hodnoty miery dojčenskej úmrtnosti v Poľsku sú najvyššie spomedzi všetkých štyroch krajín. Šok v roku 1992 mal pozitívny vplyv na očakávanú dĺžku života. Nesignifikantný vyšiel koeficient pri šoku v Maďarsku, ktorý podľa modelu má záporný efekt, no nevieme s určitosťou povedať, či pôsobí práve takým spôsobom, vzhľadom na to, že skutočná zmena v priebehu očakávanej dĺžky života v Maďarsku nastala až o čosi neskôr, ako v ostatných krajinách. V *modeli 4.1.3* šok v roku 1992 stráca takú významnosť, akú mal v *modeli 4.1.2* ešte bez uváženia doplňujúcej vysvetľujúcej premennej. Ovplyvňuje to aj skrátené pozorované obdobie. Na základe F-štatistiky je *model 4.1.3* významný a tiež hodnota  $R^2_A$  hovorí o dobrom vysvetlení variability dát modelom. V modeli neuvažujeme s váhami, nakoľko ich použitie nemalo výrazný vplyv na odhad.

Z grafu 4.2 vidíme, že reziduá *modelu 4.1.2* majú hodnotu približne do 0,8 a sú nestacionárne.

Graf 4.2: Priebeh rezíduí modelu 4.1.2



Graf 4.3: Aproximácia priebehu očakávanej dĺžky života modelom 4.1.2, Baseline – modelové hodnoty, Actuals – skutočný priebeh



Vidíme, že model pomerne dobre vystihuje spoločensko-technologickú zmenu v roku 1992 a adaptuje svoje hodnoty na zmenený vzťah medzi úrovňou HDP na obyvateľa a očakávanou dĺžkou života.

V modeli 4.1.3, keďže už pracujeme s balancovaným modelom, môžeme využiť aj DW štatistiku. Jej hodnota je 1,409257, teda je možný výskyt sériovej korelácie alebo kointegrácie. Hodnoty reziduí sú všetky do veľkosti 0,6 a nevykazujú trend, teda predpokladáme, že v modeli sa nenachádza problém sériovej korelácie. Je teda zbytočné ho ďalej diferencovať, musíme skôr uvážiť možnosť kointegrácie, čiže existencie dlhodobého vzťahu medzi veličinami.

Tabuľka 4.5: Kao a Pedroniho panelové testy kointegrácie pre  $LFE$ ,  $\log(GDPPPP)$ ,  $IMR$  (bez uváženia trendu)

				Vážená štatistika	
		t-Statistic	Prob.	t-Statistic	Prob.
	Kao - ADF	-2.30702	0.0105		
Pedroni	Panel v-Statistic	1.147668	0.1256	1.053472	0.1461
	Panel rho-Statistic	-1.03366	0.1506	-0.88892	0.187
	Panel PP-Statistic	-1.94584	0.0258	-1.74688	0.0403
	Panel ADF-Statistic	-2.10944	0.0175	-1.96507	0.0247

Tabuľka 4. 6: Johansen-Fisherov panelový test kointegrácie pre  $LFE$ ,  $\log(GDPPPP)$ ,  $IMR$

No. of CE(s)	Fisher Stat.*(from trace test)		Fisher Stat.*(from max-eigen test)	
		Prob.		Prob.
None	25.3	0.0014	19.11	0.0143
At most 1	12.99	0.1122	12.86	0.1167
At most 2	8.92	0.3491	8.92	0.3491

Kaov a Pedroniho testy s určitou nepotvrdili ani nevrátili existenciu dlhodobého vzťahu. Johansen-Fisherov test potvrdil existenciu dvoch kointegračných vektorov. Môžeme teda pracovať s viacerými dlhodobými vzťahmi. Pri zahrnutí oboch kointegračných vektorov  $LFE = a + b \cdot \log(GDPPPP)$  a  $LFE = c + d \cdot IMR$  sa ukázali byť tieto dlhodobé vzťahy nesignifikantné, a taktiež je aj zložitejšia ich vysvetliteľnosť pri simultánnom použití. My využijeme dlhodobý vzťah očakávanej dĺžky života a HDP na obyvateľa so zreteľom na jeho zmenu v roku 1992, pričom ho uvažujeme v zjednodušenej podobe bez konštanty,  $LFE = a(1 + b \cdot sok92) \cdot \log(GDPPPP)$ . Uváženie konštanty sa dá jednoducho realizovať pripočítaním a odpočítaním konštanty  $a0\beta$  na pravej strane rovnice,

pričom zmena oproti modelu bez konštanty by sa odrazila na posunutých hodnotách  $\Delta LFE$  práve o konštantu  $a0\beta$ . Využívame jedнокrokovú metódu odhadu, teda koeficienty dlhodobého vzťahu odhadujeme priamo v modeli. Dlhodobý vzťah uvažujeme vo všetkých krajinách rovnaký. Krátkodobý vzťah medzi HDP a očakávanou dĺžkou života môžeme považovať za nesignifikantný a z modelu vylúčiť, nakoľko zvýšenie HDP v určitom roku nespôsobí v tom istom roku zvýšenie v očakávanej dĺžke života, jeho vplyv sa prejaví až po čase. Tento fakt potvrdzujú aj modely, v ktorých reakcia rýchlosti zmeny očakávanej dĺžky života ( $\Delta LFE$ ) na rýchlosť zmeny HDP ( $\Delta \log(GDP PPP)$ ) je nevýznamná. Pracujeme s Error correction modelom, kde sa snažíme vyjadriť rýchlosť zmeny očakávanej dĺžky života ako reakciu na rýchlosť zmeny v miere dojčenskej úmrtnosti (krátkodobý vplyv) a tiež ako reakciu na vychýlenie sa od dlhodobého vzťahu (dlhodobý vplyv). Pracujeme s nebalancovaným modelom od roku 1980 po rok 2008.

#### Model 4.1.4

$$\Delta LFE_{it} = a0\beta + \alpha \Delta IMR_{it} + \beta(LFE_{i,t-1} - a0 - \gamma(1 + \delta sok92) \cdot \log(GDP PPP_{i,t-1})) + u_{it}$$

Tabuľka 4.7: Model 4.1.4, EC model s uvážením dlhodobého vzťahu medzi očakávanou dĺžkou života a HDP na obyvateľa

D(LFE)	
D(IMR?)	-0.08511**
LFE?(-1)	-0.03065
LOG(GDP PPP?(-1))	0.226431
SOK92*LOG(GDP PPP?(-1))	0.033323***

Pozn: \*\*\* - signifikancia na úrovni 1%, \*\* - signifikancia na úrovni 5%, \* - signifikancia na úrovni 10%

Dlhodobý vzťah má tvar

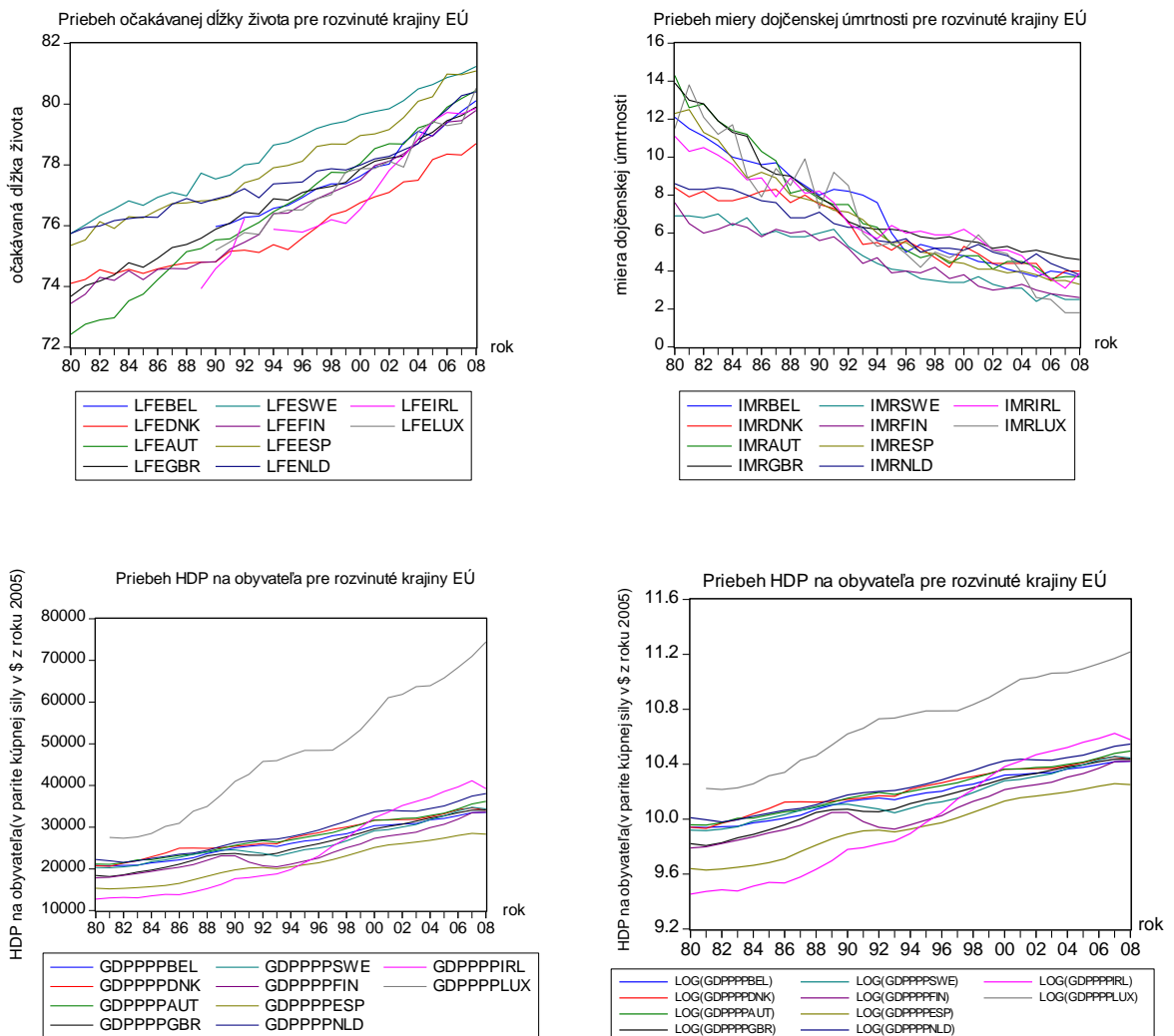
$LFE = 7,38763(1 + 0,14717 \cdot sok92) \cdot \log(GDP PPP)$ , pričom korekcia na odchýlku od dlhodobej rovnováhy má tvar

$-0,03065(LFE_{-1} - \{7,38763(1 + 0,14717 \cdot sok92) \cdot \log(GDP PPP_{-1})\})$ . Teda keď bola pred rokom skutočná hodnota očakávanej dĺžky života väčšia, ako by mala byť na základe dlhodobého vzťahu, tak zápornou korekciou s koeficientom  $-0,03065$  sa dĺžka života upraví, aby sa priblížila dlhodobému vzťahu. Zmena v roku 1992 dlhodobý vzťah ešte posilnila, nakoľko očakávaná dĺžka života začala rýchlejšie rásť, a teda jej reakcia na simultánny rast HDP bola intenzívnejšia. Taktiež rýchlosť nárastu miery dojčenskej úmrtnosti negatívne vplýva na rýchlosť rastu očakávanej dĺžky života, čo je vyjadrenie

krátkodobého vzťahu. Vďaka priamemu vplyvu miery dojučenskej úmrtnosti na očakávanú dĺžku života sa tento vplyv prejaví aj v krátkodobom horizonte.

Môžeme teraz porovnať situáciu v krajinách V4 s rozvinutými krajinami EÚ. Pre krajiny V4 pracujeme s balancovaným modelom v období medzi rokmi 1993 a 2008 a pre vyspelé krajiny s nebalancovaným medzi rokom 1981 a 2008. Uvažujeme dlhodobý vzťah rovnaký pre krajiny. Pri označovaní krajín používame nasledujúce skratky: BEL – Belgicko, DNK – Dánsko, AUT – Rakúsko, GBR – Veľká Británia, SWE – Švédsko, FIN – Fínsko, ESP – Španielsko, NLD – Holandsko, IRL – Írsko, LUX – Luxembursko.

*Graf 4.4: Priebehy očakávanej dĺžky života, miery dojučenskej úmrtnosti, HDP na obyvateľa a logaritmu HDP na obyvateľa pre rozvinuté krajiny EÚ*



Vidíme, že rozvinuté krajiny nezaznamenali počas vývoja od roku 1980 žiadnu výraznú zmenu, očakávaná dĺžka života rastie stále približne rovnakým tempom, rovnako aj HDP na obyvateľa a miera dojčenskej úmrtnosti klesá, pričom rozdiely medzi krajinami sa postupne znižujú.

Tabuľka 4.8: Modely 4.1.5, 4.1.6, EC modely s uvážením dlhodobého vzťahu medzi očakávanou dĺžkou života a HDP na obyvateľa

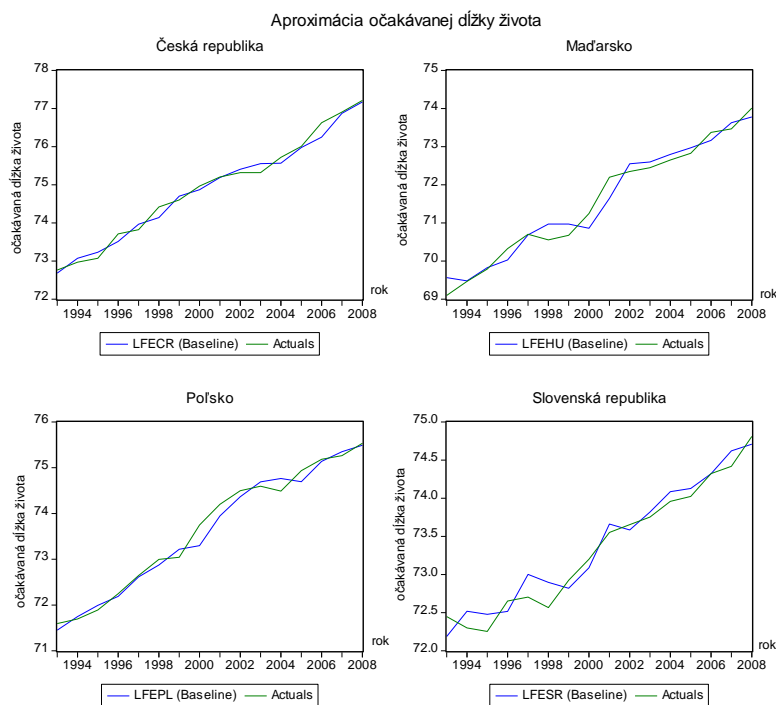
krajiny V4		rozvinuté krajiny EÚ	
D(LFE)		D(LFE)	
D(IMR?)	-0.11208***	D(IMR?)	-0.05465*
LFE?(-1)	-0.03222*	LFE?(-1)	-0.0102
LOG(GDP PPP?(-1))	0.269875*	LOG(GDP PPP?(-1))	0.098074*
Durbin-Watson stat	2.006282	F-statistic	3.527089
F-statistic	5.673186	Prob(F-statistic)	0.030886
Prob(F-statistic)	0.0055		

Pozn: \*\*\* - signifikancia na úrovni 1%, \*\* - signifikancia na úrovni 5%, \* - signifikancia na úrovni 10%

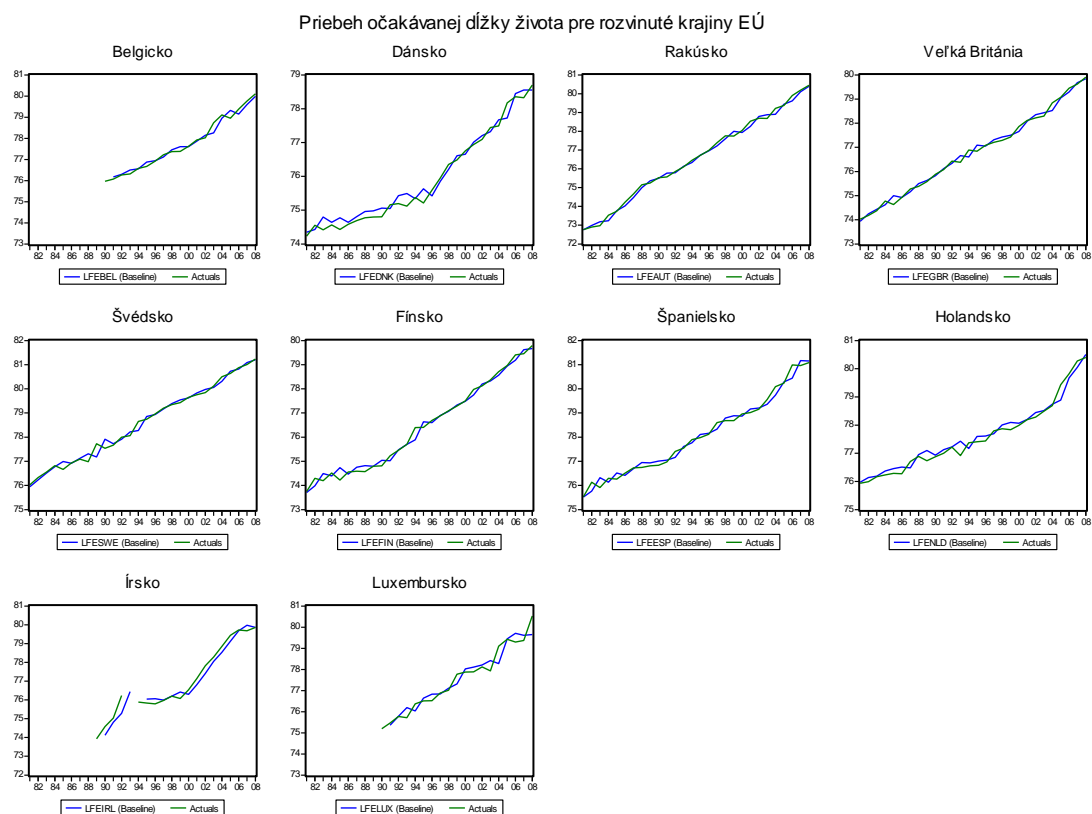
Na základe *F*-štatistiky považujeme modely za signifikantné a tiež balancovaný model má *DW*- štatistiku blízku hodnote 2. Krajiny V4 sú citlivejšie na zmenu rýchlosti rastu miery dojčenskej úmrtnosti ako rozvinuté krajiny. Rozvinuté krajiny sú menej citlivé na odchýlku od dlhodobého vzťahu, ktorý má podobu  $LFE = 9,61510 \cdot \log(GDP PPP)$ . U krajín V4 má tvar  $LFE = 8,37601 \cdot \log(GDP PPP)$ . Dlhodobý vzťah u rozvinutých krajín má však slabšiu hodnotu významnosti, teda nevieme s určitosťou povedať, že v skutočnosti pôsobí v modelom odhadnutej podobe.



Graf 4.5: Aproximácia priebehu očakávanej dĺžky života modelom 4.1.5 v krajinách V4, Baseline – modelové hodnoty, Actuals – skutočný priebeh



Graf 4.6: Aproximácia priebehu očakávanej dĺžky života modelom 4.1.6 v rozvinutých krajinách EÚ, Baseline – modelové hodnoty, Actuals – skutočný priebeh



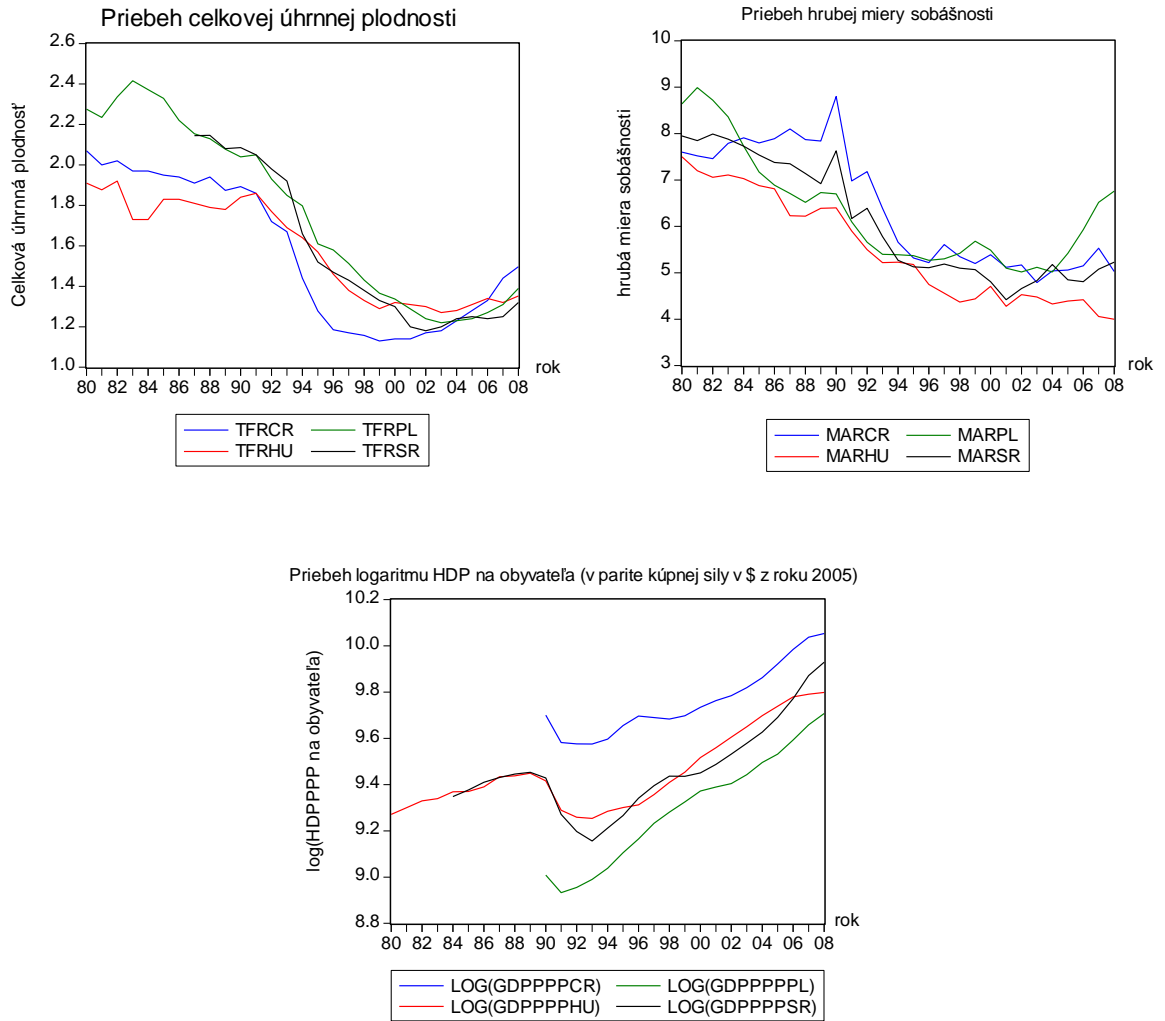
## 4.2 Demograficko-ekonomický paradox

Pomocou panelovej regresie budeme modelovať a hľadať vzťah medzi úhrnnou plodnosťou a HDP na obyvateľa. Očakávame, že pri náraste HDP na obyvateľa bude klesať úhrnná plodnosť aj napriek tomu, že na založenie rodiny sú vytvorené vhodnejšie podmienky. Tak ako aj u Prestonovej krivky, máme možnosť vzťah vyjadriť v rôznych funkčných tvaroch. Vzhľadom na lepšiu interpretáciu a citlivosť na veľkosť parametrov budeme pracovať so závislosťou v logaritmickom tvare. Pracujeme s krajinami V4, teda s Českou republikou, Maďarskom, Poľskom a so Slovenskou republikou. Na úvod bližšie popíšeme premenné, ktoré budeme v modeloch používať. HDP na obyvateľa bolo už popísané v predchádzajúcej časti u Prestonovej krivky.

**Úhrnná plodnosť** – približne do roku 1991 úhrnná plodnosť mierne klesá vo všetkých krajinách. Následne okolo roku 1991 nastáva spoločensko-technologická zmena, ktorá má za následok prudký pokles úhrnnej plodnosti vo všetkých krajinách, teda sa môže zdať, že paradox funguje, pretože úroveň HDP narastá. Pokles úhrnnej plodnosti sa časom spomaľuje až sa okolo roku 2002 ustáli. Potom do reprodukčného veku prichádzajú silné ročníky 70-tych rokov, ktoré sa rozhodli odložiť založenie rodiny a niekedy okolo roku 2003 nastáva tzv. „baby-boom“, kedy prichádza na svet viac detí, ako v predchádzajúcom období, teda úhrnná plodnosť rastie. V texte budeme premennú označovať ako TFR (Total fertility rate). Zdrojom údajov je databáza World dataBank. [32]

**Hrubá miera sobášnosti** – vývoj tejto premennej je veľmi podobný vývoju úhrnnej plodnosti. Približne do roku 1990 hrubá miera sobášnosti mierne klesá, keď po roku 1990 dôjde k jej prudkému prepadu. Je dobré si tiež všimnúť, že zmeny sklonu krivky hrubej miery sobášnosti sa na úhrnnej plodnosti prejavia približne o rok neskôr, nakoľko v našich krajinách predpokladáme, že ľudia sa najskôr zosobášia a až približne o rok majú potomstvo. Zmena situácie nastáva v roku 2003. Zatiaľ, čo úhrnná plodnosť rastie, manželstvá ostávajú na rovnakej úrovni, až na Poľsko, kde došlo k výraznému nárastu. Teda v krajinách V4 sa zoslabil vplyv manželstiev na úhrnnú plodnosť, kedy je viac párov, ktoré majú deti bez toho, aby boli zosobášení, čo je charakteristické už pre rozvinuté krajiny v druhej demografickej transformácii. V texte budeme premennú označovať ako MAR. Zdrojom údajov je databáza Eurostatu. [32]

Graf 4.7: Priebehy úhrnnej plodnosti, hrubej miery sobášnosti a logaritmu HDP na obyvateľa pre krajiny V4



Najskôr uvažíme, či pracujeme so stacionárnymi dátami. Už z grafu môžeme vidieť, že oba časové rady majú určitý trend, teda budú zrejme nestacionárne. Potvrdíme to panelovými testmi jednotkového koreňa. Z predchádzajúcej časti už poznáme rád  $I(1)$  procesu logaritmu HDP na obyvateľa. U jednotlivých procesov uvažujeme s priesečníkom a trendom.

Tabuľka 4.9: Sumárne výsledky panelových testov jednotkového koreňa pre nebalancované rady od roku 1980 po rok 2008 a pre balancované od roku 1990 po rok 2008

	TFR				MAR			
	I(0)		I(1)		I(0)		I(1)	
LLC	2.95024	0.9984	0.93736	0.8257	1.06405	0.8563	-1.5509	0.0605
Breitung	3.44604	0.9997	-2.1689	0.015	2.2352	0.9873	-3.0504	0.0011
IPS	2.83318	0.9977	-0.9838	0.1626	2.18216	0.9855	-4.0752	0
ADF - Fisher	0.85994	0.999	11.4596	0.177	2.76845	0.948	30.0938	0.0002
PP - Fisher	0.96739	0.9984	22.0267	0.0049	3.99836	0.8573	93.8062	0
Hadri Z-stat	2.4298	0.0076	3.31048	0.0005	3.87715	0.0001	1.71732	0.043

	TFR				MAR			
	I(0)		I(1)		I(0)		I(1)	
LLC	2.93932	0.9984	-1.7533	0.0398	1.06405	0.8563	-1.5509	0.0605
Breitung	3.76332	0.9999	-2.1186	0.0171	2.2352	0.9873	-3.0504	0.0011
IPS	4.42312	1	0.09328	0.5372	2.18216	0.9855	-4.0752	0
ADF - Fisher	0.30249	1	5.70767	0.6799	2.76845	0.948	30.0938	0.0002
PP - Fisher	0.08148	1	11.7713	0.1617	3.99836	0.8573	93.8062	0
Hadri Z-stat	4.55247	0	3.08899	0.001	3.87715	0.0001	1.71732	0.043

Na základe Fisherovho testu (ktorý podporuje nevybalancovaný panel) sa potvrdila integrovanosť všetkých procesov prvého rádu  $I(1)$  pri nebalancovaných radoch, hoci u úhrnnej plodnosti nie jednoznačne. Pri balancovaných dátach taktiež nie všetky testy potvrdili integrovanosť prvého rádu, ale pripúšťajú až integrovanosť druhého rádu u úhrnnej plodnosti. Pracujeme s nestacionárnymi časovými radmi a budeme musieť v modeloch uvážiť možnosť autokorelácie a kointegrácie.

Vysvetľujúce premenné  $\log(GDPPPP)$  a  $MAR$  uvažujeme ako exogénne.

Panelové testy kointegrácie nemajú zhodné výsledky na výskyt dlhodobého vzťahu medzi úhrnnou plodnosťou a logaritmom HDP, pričom Pedroniho testy kointegráciu zamietajú, Johansenov test ju prijíma a Kaoov test ju prijíma na hladine významnosti 10%.

Tabuľka 4.10: Kaoov a Pedroniho panelové testy kointegrácie pre TFR,  $\log(GDPPPP)$  (s uvážením trendu aj priesečníka u Pedroniho)

		vážená			
		t-Statistic	Prob.	t-Statistic	Prob.
	Kao - ADF	-1.49076	0.068		
Pedroni	Panel v-Statistic	0.487191	0.3131	0.067661	0.473
	Panel rho-Statistic	1.164226	0.8778	1.535588	0.9377
	Panel PP-Statistic	1.353804	0.9121	1.953659	0.9746
	Panel ADF-Statistic	0.583564	0.7202	1.332793	0.9087

Tabuľka 4.11: Johansen-Fisherov panelový test kointegrácie pre TFR,  $\log(\text{GDPPPP})$

No. of CE(s)	Fisher Stat.*(from trace test)		Fisher Stat.*(from max-eigen test)	
		Prob.		Prob.
None	21.77	0.0054	18.39	0.0185
At most 1	10.5	0.2315	10.5	0.2315

Začneme najjednoduchším modelom s logaritmicou závislosťou od HDP, pričom budeme uvažovať rovnaký sklon krivky závislosti, ale s rôznym vertikálnym posunom, teda budeme používať fixné efekty.

Na základe Hausmanovho testu by sme mohli využiť aj náhodné efekty, ale pre makroekonomické panely je vhodnejšie použitie fixných efektov.

Tabuľka 4.12: Výstup z Hausmanovho testu

Hausmanov test		
Chi-Sq. Statistic	Chi-Sq. d.f.	Prob.
3.563045	1	0.0591

Pracujeme s nebalancovaným modelom od roku 1980 po rok 2008.

*Model 4.2.1*

$$TRF_i = c + \alpha_i + \beta \log(\text{GDPPPP}_i) + u_i$$

Tabuľka 4.13: Model 4.2.1 s homogenitou v premennej HDP na obyvateľa a s použitím fixných efektov

TFR			
C	10.51261	<b>Fixed Effects (Cross)</b>	
LOG(GDPPPP?)	-0.94748	CR--C	0.096928
		HU--C	0.02528
		PL--C	-0.1947
		SR--C	0.04889

Zistili sme zápornú logaritmicou závislosť, teda s rastúcim HDP klesá úhrnná plodnosť. Nakoľko hodnota HDP na obyvateľa je v Poľsku na najnižšej úrovni, no táto krajina nemá až tak zásadne vyššiu úhrnnú plodnosť v porovnaní s ostatnými, musia tento rozdiel upraviť záporné fixné efekty. Medzi krajinami nie je potrebné rozlišovať vplyv HDP na obyvateľa, nakoľko rozdiely nie sú výrazné.

Tento model však veľmi dobre pokrýva variabilitu v dátovej štruktúre, pretože má veľmi nízku hodnotu  $R^2$  na úrovni 0,44.

Na lepšiu simuláciu skutočnosti do modelu zapracujeme určité šoky, ktoré sú pozorovateľné na grafe priebehu úhrnnej plodnosti. Prvá zmena nastala okolo roku 1992. Úhrnná plodnosť začala vo všetkých krajinách prudko klesať. Zmena mala rovnaký charakter pre všetky krajiny, no rozdielnu silu. Ďalšia zmena prišla okolo roku 2004, kedy úhrnná plodnosť začala vo všetkých krajinách opäť stúpať, hoci niekde jej nárast začal už o čosi skôr. Vytvoríme nový model už aj so zahrnutím šokov v roku 1992 a 2004. Tie budeme uvažovať ako zmenu charakteru reakcie úhrnnej plodnosti na HDP na obyvateľa. Šok v roku 1992 budeme chápať ako heterogénny, nakoľko v krajinách prebiehal v rôznej intenzite a potvrdzuje to aj F-test, kedy  $RSS_{non-pool}=1,124673$  a  $RSS_{pool}=1,529973$ , teda  $F=9,85015$ , čo je väčšie ako kritická hodnota  $F(3,82)=2,715937$ . Naďalej pracujeme s nebalancovaným modelom od roku 1980 po rok 2008.

#### Model 4.2.2

$$TRF_{it} = c + \alpha_i + \beta \log(GDPPPP_{it}) + \gamma SOK04 \cdot \log(GDPPPP_{it}) + \delta_i SOK92 \cdot \log(GDPPPP_{it}) + u_{it}$$

Zistili sme zápornú závislosť od logaritmu HDP. Šok v roku 2004 mal podľa očakávania pozitívny vplyv na úhrnnú plodnosť, naopak zmena v roku 1992 na úhrnnú plodnosť vplývala negatívne a pokles plodnosti sa zrýchlil. Súhrnné výsledky sú uvedené v tabuľke 4.14.

Vysvetlenie variability v dátach v tomto modeli je už dobré, no môže nastať ešte problém autokorelácie alebo kointegrácie. Nakoľko hodnota DW štatistiky je v nebalancovaných modeloch nefunkčná, musíme použiť iné metódy. Rezíduá v modeli nie sú autokorelované, no dosahujú hodnoty až 0,3, čo je vzhľadom na úhrnnú plodnosť pohybujúcu sa v hodnotách okolo 1,4 vysoká hodnota. Je teda možné, že sme do modelu nezahrnuli nejakú podstatnú časť. Pokúsime sa túto zlú špecifikáciu zlepšiť použitím ďalšej vysvetľujúcej premennej.

Existuje viacero teórií, čo môže mať vplyv na úhrnnú plodnosť. Na jednej strane to môže byť vzdelanie, pričom s vyššou vzdelanostnou úrovňou v krajine dochádza k poklesu úhrnnej plodnosti. Je to dané tým, že ženy sa chcú vzdelávať a neskôr uplatniť aj v pracovnom procese, a teda nemajú toľko času na starostlivosť o potomstvo. Nastáva však problém korelácie HDP na obyvateľa v krajine so vzdelanostnou úrovňou, teda k problému multikolinearity. Čím je totiž krajina bohatšia, tým viac sú ľudia motivovaní sa vzdelávať, pretože vedia, že v budúcnosti sa im štúdium v praxi zúročí a tiež nemajú problém

s financovaním štúdia. Došlo by teda ku skresleniu významu jednotlivých parametrov v modeli.

Ďalším možným vysvetľujúcim parametrom by mohla byť sila náboženskej tradície v krajine. Očakáva sa, že čím má krajina hlbšiu náboženskú tradíciu, tým u nej dochádza ku menšiemu poklesu úhrnnej plodnosti. Jednou možnosťou, ako vyjadriť takúto tradíciu, je pomocou podielu detí narodených mimo manželstva ku celkovému počtu narodených detí. Vplyv tejto premennej sa však v modeloch ukázal byť nedostatočne vysvetľujúci, a tak musíme špecifikovať model pomocou inej premennej, a to hrubej miery sobášnosti. Vieme, že táto premenná má podobný vývoj v čase s úhrnnou plodnosťou. Približne okolo roku 1991 došlo ku prudšiemu poklesu hrubej miery sobášnosti a asi rok na to aj k prudkému poklesu úhrnnej plodnosti. Obidve veličiny v nasledujúcich rokoch klesali a neskôr sa ustálili. Ich vývoj sa odlišuje až po roku 2004, kedy dochádza k nárastu úhrnnej plodnosti, zatiaľ čo miera sobášnosti ostala na približne rovnakej úrovni, až na Poľsko, kde prudko vzrástla. Budeme pracovať s balancovaným modelom od roku 1990 po rok 2008, pričom šok v roku 1992 pokryje nová vysvetľujúca premenná hrubá miera sobášnosti, no šok v roku 2004 musíme do modelu zahrnúť v podobe zmeneného charakteru reakcie úhrnnej plodnosti na HDP na obyvateľa. Budeme rozlišovať reakciu na zmenu HDP na obyvateľa, nakoľko sa medzi krajinami líši. To potvrdzuje aj F-test, kde  $RSS_{non-pool}=0,814956$  a  $RSS_{pool}=0,327143$ , teda  $F=32,80488$ , čo je väčšia hodnota ako kritická hodnota  $F(3,66)=2,735541$ . Vplyv hrubej miery sobášnosti sa medzi krajinami veľmi nelíši, teda túto premennú uvažujeme ako homogénnu. Obdobne aj zmena v roku 2004 je homogénna medzi krajinami. V modeli použijeme namiesto aktuálnej hodnoty hrubej miery sobášnosti jej o rok dozadu posunutú hodnotu, nakoľko jej zmena sa podľa očakávaného správania má odzrkadliť v úhrnnej plodnosti približne po roku.

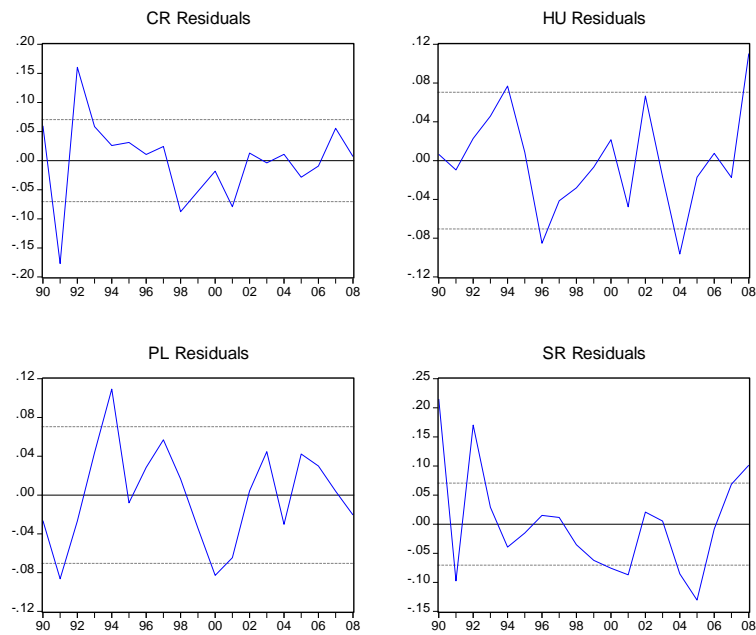
#### *Model 4.2.3*

$$TRF_{it} = c + \alpha_i + \beta MAR_{i,t-1} + \gamma SOK04 \cdot \log(GDPPP_{it}) + \delta_i \log(GDPPP_{it}) + u_{it}$$

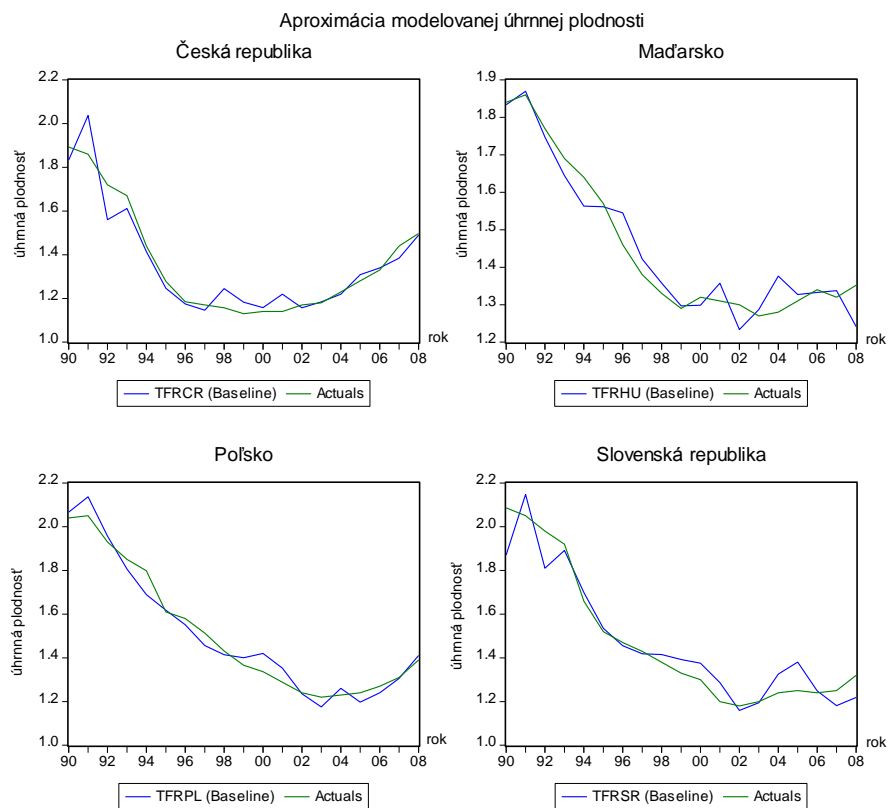
V tabuľke 4.14 vidíme, že hodnota  $R_A^2$  je pomerne vysoká a tiež  $DW$  štatistika má blízku hodnotu 2. Na základe F-štatistiky je tiež model významný. Rezíduá majú hodnoty do 0,15, s výnimkou prvého rezídua v Slovenskej republike, kde však úhrnná plodnosť bola ešte na vysokej úrovni.

Mohli by sme ešte uvážiť použitie váh v modeli, no pre krajiny V4 nie je vhodné ich použitie, nakoľko výsledky nevhodne skresľujú a znižujú silu modelu.

Graf 4.8: Priebeh rezíduí modelu 4.2.3



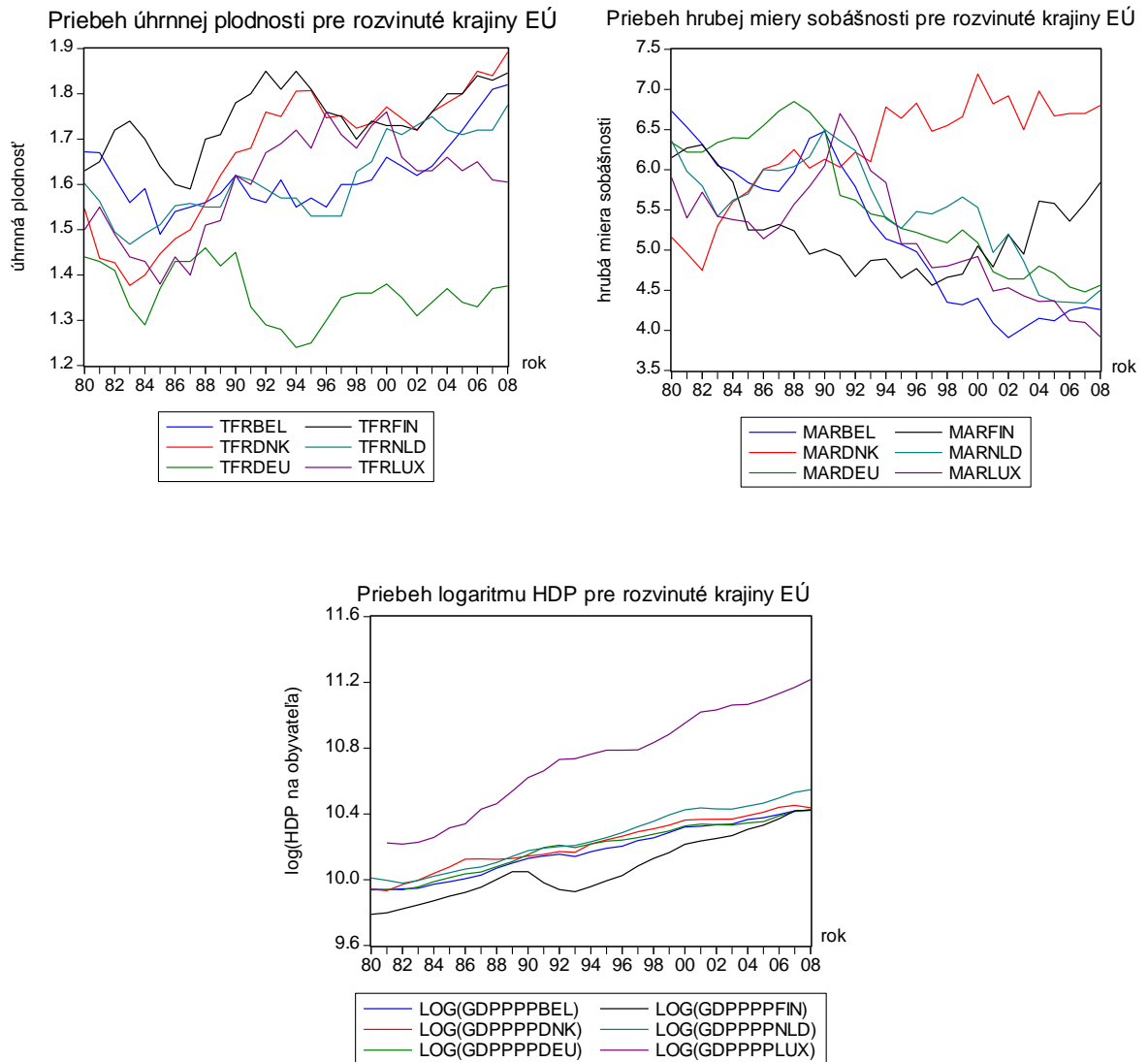
Graf 4.9: Aproximácia priebehu úhrnnej plodnosti modelom 4.2.3, Baseline – modelové hodnoty, Actuals – skutočný priebeh





Pre porovnanie môžeme urobiť podobný model aj pre rozvinuté krajiny EÚ, pričom používame skratky BEL – Belgicko, DNK – Dánsko, DEU – Nemecko, FIN – Fínsko, NLD – Holandsko, LUX – Luxembursko.

*Graf 4.10: Priebehy úhrnnej plodnosti, hrubej miery sobášnosti a logaritmu HDP na obyvateľa pre rozvinuté krajiny EÚ*



Úhrnná plodnosť klesala o čosi skôr, ako v krajinách V4, a teda od roku 1980 zaznamenávame jej stagnáciu, resp. mierny nárast. Hrubá miera sobášnosti vo väčšine krajín klesá, s výnimkou Dánska, kde rastie. HDP od roku 1980 rastie bez výraznejšej zmeny v trende. Tak, ako aj pri paneli V4, modelujeme rovnakú závislosť s výnimkou šoku v roku 2004, ktorý vo vyspelých krajinách nenastal. Pracujeme s balancovaným modelom od roku 1981 po rok 2008. V modeli uvažujeme s možným výskytom prierezovej korelácie a heteroskedasticity, čo zohľadníme použitím prierezových SUR váh.

Model 4.2.4

$$TRF_{it} = c + \alpha_i + \beta MAR_{i,t-1} + \gamma_i \log(GDPPPP_{it}) + u_{it}$$

Na základe tabuľky 4.14 vidíme, že tentoraz sa už demograficko-ekonomický paradox nepotvrdil, nakoľko rozvinuté krajiny už sú na konci štvrtej fázy demografickej transformácie a vzťah medzi HDP a úhrnnou plodnosťou nie je taký jednoznačný. Teda podobne, ako aj u Českej republiky, je koeficient pri HDP kladný. Všetky koeficienty sú signifikantné, no vzhľadom na vysoké hodnoty  $R^2$  a  $R^2_A$  a hodnotu DW štatistiky na úrovni  $DW=1,03$  môže byť v tomto modeli ešte problém so zlou špecifikáciou, ktorú neskôr vyriešime uvážením dlhodobého vzťahu pomocou Error correction modelu.

Tabuľka 4.14: Porovnanie modelov pre úhrnnú plodnosť

		<i>Model 4.2.2</i>	<i>Model 4.2.3</i>	<i>Model 4.2.4</i>
C		12.6643***	3.422407***	-3.174209***
LOG(GDPPPP?)		-1.145143***		
CR--LOG(GDPPPPCR)			0.395704**	
HU--LOG(GDPPPPHU)			-0.263626**	
PL--LOG(GDPPPPPL)			-1.025289***	
SR--LOG(GDPPPPSR)			-0.58079***	
BEL--LOG(GDPPPPBEL)				0.658938***
DNK--LOG(GDPPPPDNK)				0.633593***
DEU--LOG(GDPPPPDEU)				0.191984***
FIN--LOG(GDPPPPFIN)				0.234222***
NLD--LOG(GDPPPPNLD)				0.611635***
LUX--LOG(GDPPPPLUX)				0.290475***
SOK04*LOG(GDPPPP?)		0.030895***	0.01189***	
CR--SOK92*LOG(GDPPPPCR)		-0.051968***		
HU--SOK92*LOG(GDPPPPHU)		-0.035231***		
PL--SOK92*LOG(GDPPPPPL)		-0.029592***		
SR--SOK92*LOG(GDPPPPSR)		-0.073516***		
MAR?(-1)			0.260787***	0.052967***
fixné efekty	CR--C	0.247443	-7.472156	
	HU--C	-0.1132	-0.773013	
	PL--C	-0.33977	6.125111	
	SR--C	0.219	2.120058	
	BEL--C			-2.196057
	DNK--C			-1.964699
	DEU--C			2.273792
	FIN--C			2.284536
	NLD--C			-1.781939
	LUX--C			1.384368
R <sub>A</sub> <sup>2</sup>		0.847454	0.930414	0.977544
DW		1.439302	1.88745	1.03022
F-stat.		55.9369	112.4234	606.8192
F-prob.		0	0	0

Pozn: \*\*\* - signifikancia na úrovni 1%, \*\* - signifikancia na úrovni 5%, \* - signifikancia na úrovni 10%

V *modeli 4.2.2* po šoku v roku 1992 zaznamenala najvýraznejší pokles Slovenská republika. Vzhľadom na spoločný koeficient pri premennej HDP, fixné efekty upravujú posun krivky závislosti. Česká republika má najvyššie hodnoty HDP na obyvateľa, no úhrnná plodnosť nemá výrazne nižšiu hodnotu oproti ostatným krajinám, teda kladné fixné efekty posunú jej modelovanú hodnotu úhrnnej plodnosti nahor. Naopak Poľsko dosahuje najnižšie hodnoty HDP na obyvateľa, preto záporné fixné efekty musia upraviť úhrnnú plodnosť v krajine, aby zodpovedala skutočnosti.

V *modeli 4.2.3* sme podľa očakávania dostali kladnú závislosť úhrnnej plodnosti od hrubej miery sobášnosti. Teda, čím viac ľudí sa zosobášia, tým väčší počet detí sa po roku narodí. Koeficienty pri premennej HDP sú v absolútnej hodnote v porovnaní s *modelom 4.2.2* výrazne menšie, čo je zapríčinené zahrnutím novej vysvetľujúcej premennej do modelu. Ďalej vidíme, že čím má krajina vyššiu hodnotu HDP na obyvateľa, tým nižšiu úhrnnú plodnosť dosahuje. Výnimku tvorí iba Česká republika. Je to spôsobené tým, že táto krajina je spomedzi krajín V4 najrozvinutejšou a prešla štvrtou fázou demografickej transformácie rýchlejšie ako ostatné.

Názory na vplyv na úhrnnú plodnosť sú rôzne. Jedna možnosť je, že závislosť úhrnnej plodnosti od HDP na obyvateľa má síce logaritmický tvar, ale pri vyspelejších krajinách s vyššou hodnotou HDP na obyvateľa už úhrnnú plodnosť ovplyvňujú iné faktory, ktoré môžu spôsobiť jej nárast aj napriek nárastu HDP, nakoľko ten už nemá taký vplyv. Druhou možnosťou je, že závislosť medzi úhrnnou plodnosťou a HDP na obyvateľa má tvar *u-krivky*, teda pri vyspelejších krajinách s vysokými hodnotami HDP už toto bohatstvo umožní vytvoriť lepšie podmienky na založenie si rodiny s väčším počtom detí.

V Českej republike teda zvýšené HDP, spoločne s vládou politikou, vytvára lepšie podmienky v krajine na rozvoj rodiny.

Šok v roku 2004 zmiernil negatívny vplyv HDP, resp. v Českej republike posilnil pozitívny vplyv, úhrnná plodnosť mala väčší priestor na nárast. V porovnaní s *modelom 4.2.2* bola táto zmena menej výrazná. Fixné efekty sú najnižšie v Českej republike, a to práve preto, lebo na základe kladnej závislosti HDP a úhrnnej plodnosti v tejto krajine by sme očakávali vyššiu hodnotu vysvetľovanej premennej ako v skutočnosti má, čo upravujú fixné efekty. Naopak v Poľsku je koeficient pri HDP najvyšší, teda by sme očakávali nízke hodnoty úhrnnej plodnosti. Je síce pravda, že Poľsko má najnižšie hodnoty HDP na obyvateľa v porovnaní s ostatnými krajinami, no rozdiely nie sú až také výrazné, ako vo vypočítaných koeficientoch. Fixné efekty opäť upravujú modelom odhadnutú nižšiu hodnotu úhrnnej plodnosti ako v skutočnosti v Poľsku je.

Keď sa pozrieme na vplyv hrubej miery sobášnosti v *modeli 4.2.3* a *4.2.4*, vidíme jeho omnoho menšiu silu v rozvinutých krajinách ako v krajinách V4. Vo vyspelých krajinách nie je pravidlom, že sa ľudia zosobášia ešte predtým ako spolu majú deti. To je aj myšlienka druhej demografickej transformácie, kedy spoločnosť prestáva žiť usporiadaným rodinným životom a vyskytuje sa viac osamelých žien s deťmi.

Špecifikujeme teraz EC model pre rozvinuté krajiny, pričom nebudeme uvažovať s krátkodobým vplyvom HDP, nakoľko nárast HDP v danom roku nemusí ovplyvniť nárast úhrnnej plodnosti v tom istom roku. Neuvažujeme žiadne váhy v modeli.

Tabuľka 4.15: Model 4.2.5, EC model s uvážením dlhodobého vzťahu pre rozvinuté krajiny EÚ

D(TFR)	
D(MAR?(-1))	0.042245***
TFR?(-1)	-0.01742
LOG(GDPPPP?(-1))	0.003505
$R_A^2$	0.054793
DW	2.182722
F-stat.	5.666559
F-prob.	0.004196

Pozn: \*\*\* - signifikancia na úrovni 1%, \*\* - signifikancia na úrovni 5%, \* - signifikancia na úrovni 10%

Vidíme, že krátkodobo rýchlosť zmeny hrubej miery sobášnosti negatívne ovplyvní rýchlosť zmeny úhrnnej plodnosti. Dlhodobý vzťah medzi úhrnnou plodnosťou a logaritmom HDP má tvar  $LFE = 0,20121 \cdot \log(GDPPPP)$ . Dlhodobý vzťah z Error correction modelu potvrdil kladný vplyv HDP na obyvateľa na úhrnnú plodnosť vo vyspelých krajinách, hoci nie na hladine významnosti 10%.

## Záver

Na základe získaných dát sme zistili, že v pozorovaných krajinách došlo ku technologickým a spoločenským zmenám na začiatku 90-tych rokov, ktoré mali vplyv aj na viaceré demografické ukazovatele. Krajiny V4 prechádzajú rozvojovým procesom, kedy sa vyspelosťou postupne približujú rozvinutým európskym krajinám, no tento proces bude ešte pokračovať v niekoľkých ďalších rokoch až desaťročiach. Vzhľadom na súčasný nižší stupeň rozvoja týchto krajín a skoršiu fázu demografickej transformácie sme mohli očakávať, že sa potvrdia hľadané fenomény Prestonovej krivky a demograficko-ekonomického paradoxu. Pri skúmaní závislosti očakávanej dĺžky života od úrovne HDP sa potvrdil dlhodobý vzťah medzi týmito veličinami, pričom ten sa v čase mierne korigoval vzhľadom na šok na začiatku 90-tych rokov, kedy sa krajiny dostali k novým technologicky vyspelejším výrobkom z rozvinutých krajín, čo malo silný pozitívny vplyv na predĺženie očakávanej dĺžky života. K tomu taktiež aj dopomohla znížená miera dojčenskej úmrtnosti, ktorá mala vplyv na očakávanú dĺžku života jednak priamy, ale taktiež aj nepriamo vyjadruje úroveň zdravotnej starostlivosti v krajine. Čím je vyššia miera dojčenskej úmrtnosti, tým je nižší očakávaný vek dožitia. Zdravotný stav populácie však v krajinách V4 nie je ešte natoľko dobrý, ako v rozvinutých krajinách, kde funguje osвета zdravého životného štýlu, čo má za následok dlhší a kvalitnejší život. Je však predpoklad, že očakávaná dĺžka života sa bude predlžovať aj v našich krajinách, spoločne s rastom HDP, ktorý umožní populácií minúť viac prostriedkov na starostlivosť o vlastné zdravie. Existuje teda dlhodobý vzťah medzi očakávanou dĺžkou života a úrovňou HDP, ktorý významnejšie ovplyvňuje očakávanú dĺžku života v menej rozvinutých krajinách, zatiaľ čo v rozvinutých krajinách odchylenie sa od dlhodobého vzťahu nie je až natoľko významné.

V úhrnnej plodnosti nastali počas pozorovaného obdobia medzi rokmi 1980 a 2008 taktiež viaceré zmeny vo vývoji, kedy začiatkom 90-tych rokov došlo k prudkému poklesu tejto premennej, vzhľadom na spoločenské zmeny v krajine, kedy ľudia nevedeli presne, čo môžu očakávať, z čoho plynula neistota a aj menšia túžba na založenie si rodiny. Tento pokles sa zastavil až po roku 2000, pričom okolo roku 2004 došlo k opätovnému nárastu úhrnnej plodnosti a k tzv. „baby-boomu“. Počas obdobia poklesu úhrnnej plodnosti úroveň HDP narastala, teda bol predpoklad na potvrdenie ekonomicko-demografického paradoxu. Ten sa v našich krajinách aj potvrdil, pričom sme brali do úvahy aj zmeny v rokoch 1992 a 2004. Medzi krajinami sa tento dlhodobý vzťah veľmi nelíšil. Vzhľadom však na možnú

nedostatočnú špecifikáciu modelu sme do neho zapracovali ďalšiu vysvetľujúcu premennú, hrubú mieru sobášnosti. Tá mala veľmi podobný vývoj ako úhrnná plodnosť, iba približne o rok posunutý, pričom až v roku 2004 sa od seba začali odchyľovať. Zahnutím tejto premennej sa podarilo vysvetliť aj zmenu v roku 1992, ktorá prebehla u oboch premenných v približne rovnakej miere. Hrubá miera sobášnosti mala pozitívny vplyv na vývoj úhrnnej plodnosti. V rozšírenom modeli už bolo potrebné odlišiť vzťah medzi úhrnnou plodnosťou a HDP medzi krajinami, pričom vo všetkých krajinách, okrem Českej republiky, sa demograficko-ekonomický paradox potvrdil. Česká republika je najrozvinutejšou krajinou v našom paneli a prešla štvrtou fázou demografickej transformácie rýchlejšie ako ostatné krajiny a identifikovali sme u nej pozitívny vplyv úrovne HDP na úhrnnú plodnosť. Obdobný model sme vytvorili aj pre rozvinuté krajiny EÚ, ktorý potvrdil pozitívny vplyv HDP na úhrnnú plodnosť, tak ako aj u Českej republiky. Z toho môžeme usúdiť, že demograficko-ekonomický paradox platí iba do určitej hranice úrovne HDP, kedy pri bohatších krajinách už na úhrnnú plodnosť viac vplývajú iné vysvetľujúce premenné, resp. zvýšeným bohatstvom krajiny sú vytvorené aj lepšie podmienky na výchovu potomstva. Sobášnosť mala na úhrnnú plodnosť medzi rozvinutými krajinami menší vplyv ako v krajinách V4, vzhľadom na to, že vo vyspelejších štátoch ľudia majú deti aj bez toho, aby boli manželmi, resp. aby vôbec spolu žili, čo je myšlienka druhej demografickej transformácie, kedy spoločnosť žije menej usporiadaným rodinným životom.

## Literatúra

- [1] AZOMAHOU, T., TAPAS, M. 2007, *Age dynamics and economic growth: Revisiting the nexus in a nonparametric setting*, in *Economic Letters* 99, s. 67-71
- [2] BALTAGI, B. H. 2005, *Econometric Analysis of Panel Data*, 3rd Edition, England: John Wiley & Sons, Ltd 2005, 291 s., ISBN 0-470-01456-3
- [3] BEARDSLEY, K. 2001, *Longitudinal Data Analysis*, Atlanta: Emory, 2001. 6 s.
- [4] BEST, R. 2008, *An Introduction to Error Correction Models*: prezentácia, Oxford Spring School for Quantitative Methods in Social Research 2008
- [5] BRÜDERL, J. 2005, *Panel Data Analysis*, Mannheim: University of Mannheim 2005. 22 s.
- [6] DIVINSKÝ, B. 2007, *Labor market – migration nexus in Slovakia: time to act in a comprehensive way*, Tlačiareň Durlák 2007, 231 s., ISBN 978-80-89158-17-1
- [7] EViews 5 User's Guide, 2004, Quantitative Micro Software, LLC, 990 s.
- [8] FIDRMUC, J. 2010. *Prednášky zo semináru z ekonómie 4*, Bratislava: FMFI UK, 2010
- [9] GEORGIADIS, G., PINEDA, J., RODRÍGUEZ, F. 2010, *Has the Preston Curve Broken Down?*, in *Human Development Research Paper* 2010/32, 59 s.
- [10] GIBSON, B. 2009. *Technical notes – Hausman*, Vermont: UVM, 2009. 3 s.
- [11] GONZÁLEZ-RIVERA, G., GONZALO, J. 2002, *Spurious Regression and Simple Cointegration*: prezentácia, Berkeley: University of California a Madrid: U. Carlos III de Madrid, 2002. 22 s.
- [12] JURČOVÁ, D. 2002, *Krátky slovník základných demografických pojmov*: akty. Bratislava: Inštitút informatiky a štatistiky, 2002. 38 s.
- [13] Kolektív autorov CIA 2001, *Long-Term Global Demographic Trends: Reshaping the Geopolitical Landscape*, 2001. 100 s.
- [14] Kolektív autorov ESCAP 2007, *Development of Health Systems in the Context of Enhancing Economic Growth towards Achieving the Millennium Development Goals in Asia and the Pacific The Nexus Between Health and Economic Growth*, United Nations Economic and Social Commission for Asia and the Pacific, 2007. 174 s.
- [15] Kolektív autorov Madras School of Economics 2008, *Cointegration and Error Correction Model*, Chennai: Madras school of Economics, 2008, 37 s.



- [16] Kolektív autorov UN 2006, *World population to 2300*, USA: United Nations 2004, 254 s.
- [17] KOTOVOVÁ, K. 2005, *Modelovanie rovnovážneho výmenného kurzu pomocou panelových modelov*: diplomová práca, Bratislava: UK, 2010. 51 s.
- [18] KUNST, R. M. 2009, *Econometric Methods for Panel Data – Part II*, Viedeň: University of Vienna, 9 s.
- [19] LESTHAEGHE J. R. 2005, *Second demographic transition*, Brusel: Vrije Universiteit Brussel , 2005, 7 s.
- [20] LUSKÁČIK, M., LUSKÁČIKOVÁ ,A., SZOMOLÁNYI, K. 2010, *Panelové dáta v programe EViews*, Bratislava: EUBA, 2010. 9 s.
- [21] MASON, A., 2003, *Economic Demography*, in Handbook on Population, Springer 2005, Part III, s.549-575
- [22] MAYER, M. 2010, *Unbalanced Panel Data Models*: prezentácia, Viedeň: University of Vienna 2010. 19 s.
- [23] RAHMAN, S. 2004, *An Alternative Estimation to Spurious Regression*, Econometric Society 2004 Australasian Meetings 194, Econometric Society, 16 s.
- [24] RIAHI, K., GRÜBLER, A., NAKICENOVIC, N. 2006, *Scenarios of long-term socio-economic and environmental development under climate stabilization*, in Technological Forecasting & Social Change 74, 2007, s. 887-935
- [25] VERBEEK, M. 2008, *A guide to modern econometrics*, 3rd Edition, John Wiley & Sons 2008, 472 s., ISBN 978-0-470-51769-7
- [26] WONGBOONSIN, P., WONGBOONSIN, K. 2009, *Global Economic-Demographic Challenges: Role of Institutions of Higher Learning Towards Competent and Productive Workforce*: prezentácia, Chulalongkorn University, Thailand 2009, 27 s.
- [27] YAFFEE, R., 2003. *A Primer for Panel Data Analysis*, in Connect, roč.9, č. 2, s. 62-72

### **online zdroje**

- [28] Barcelona Field Studies Centre, *Demographic Transition Model*[online]. [cit. 2011-02-02]. Dostupné na stránke:  
<<http://geographyfieldwork.com/DemographicTransition.htm>>

- [29] Český statistický úřad [online]. Dostupné na stránce:  
<[http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/obyvatelstvo\\_hu](http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/obyvatelstvo_hu)>
- [30] Databáza Eurostatu[online]. Dostupné na stránce:  
<[http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/statistics/search\\_database](http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/statistics/search_database)>
- [31] Databáza OECD[online]. Dostupné na stránce:  
<<http://stats.oecd.org/Index.aspx?DataSetCode=HEALTH>>
- [32] Databáza World dataBank [online]. Dostupné na stránce:  
<<http://databank.worldbank.org/ddp/home.do>>
- [33] GREENE, W., *Econometric Analysis of Panel Data: class notes* [online]. [cit. 2011-04-03], New York: NYU. Dostupné na stránce:  
<<http://pages.stern.nyu.edu/~wgreene/Econometrics/PanelDataNotes.htm>>
- [34] HAAG, M. 2005, *Stationary and Nonstationary Random Processes, Connexions*, 2005 [online], [cit. 2011-08-03]. Dostupné na stránce:  
<<http://cnx.org/content/m10684/2.2/>>
- [35] LAST, J. M. 2002, *Demographic Trap*, in Encyclopedia of Public Health. Ed. Lester Breslow. Gale Cengage, 2002[online]. [cit.2011-11-02]. Dostupné na stránce:  
<<http://www.enotes.com/public-health-encyclopedia/demographic-trap>>
- [36] MONTGOMERY, K., *The demographic transition* [online]. [cit. 2011-03-02]. Dostupné na internete:  
<<http://www.marathon.uwc.edu/geography/demotrans/demtran.htm>>
- [37] MYRSKYLÄ, M., KOHLER, H-P, BILLARI, F. 2009, *Advances in development reverse fertility declines*, in Nature 460, 741-743 [online], [cit. 2011-12-02]. Dostupné na stránce: <<http://www.nature.com/nature/journal/v460/n7256/full/nature08230.html>>