

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Finančné systémy a turbulencie

Diplomová práca

BRATISLAVA 2011

JURAJ PEŠKA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

Finančné systémy a turbulencie

Diplomová práca

Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce:
doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

Vypracoval:
Juraj Peška

Bratislava 2011

930d386c-d398-483f-8527-a012f31ce609



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Juraj Peška
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Finančné systémy a turbulencie

Cieľ : Aplikácia metód ekonofyziky na oblasť finančných systémov a turbulencií, s popisom analógií i rozdielností oboch oblastí a porovnaním vlastností daných systémov na reálnych dátach.

Vedúci : doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

Dátum zadania: 05.02.2010

Dátum schválenia: 21.04.2011

.....
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 24. 4. 2011

.....

Vlastnoručný podpis

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Júliusovi Vankovi PhD., za odbornú pomoc, cenné pripomienky a návrhy pri vypracovávaní diplomovej práce a rodičom za finančnú a psychickú podporu počas celého štúdia.

Abstrakt

Názov práce: Finančné systémy a turbulencie

Pracovisko: EFM, FMFI UK v Bratislave

Autor: Juraj Peška

Vedúci DP: doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

Dátum: 24.4.2011

Kľúčové slová: ekonofyzika, finančný systém, turbulencie, finančné indexy, vietor, ARMA model

Anotácia: Táto diplomová práca sa zaoberá popisom finančných systémov a porovnaním ich vlastností s turbulentnými procesmi. Všeobecne popisuje finančné systémy až ku konkrétnym indexom S&P500, Dow Jones a Nasdaq a pokúša sa ich kvalitatívne porovnať s turbulentným procesom prúdenia vetra s vysokým Reynoldsovým číslom a priemernou dennou rýchlosťou vetra. Pri porovnávaní sú použité metódy spektrálnej analýzy a ARMA modely.

Abstract

Diploma thesis: Financial systems and turbulence

Department: EFM, FMFI UK in Bratislava, Slovakia

Autor: Juraj Peška

Tutor: doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

Date: 24.4.2011

Key words: econophysics, financial system, turbulence, financial index, velocity of wind, ARMA model

Annotation: This diploma thesis compares financial systems and turbulent processes. Generally, it describes financial indexes (S&P500, Dow Jones a Nasdaq) and there is qualitative confrontation with high frequency turbulent flow and average daily speed of wind. In this work, there are used spectral analysis methods and Arma models.

Obsah

Úvod	1
1 Ekonofyzika	3
1.1 Prehľad najznámejších smerov ekonofyziky	4
2 Finančné systémy a turbulencie	6
2.1 Finančné systémy	6
2.1.1 Funkcie a zložky finančného systému	7
2.1.2 Finančné trhy	8
2.1.3 Index Standard & Poor's 500 (S&P 500)	10
2.1.4 Index Dow Jones Industrials Average (DJIA)	11
2.1.5 Index Nasdaq Composite (NASDAQ)	12
2.2 Turbulencie	12
2.2.1 Vlastnosti turbulentného prúdenia tekutiny	13
2.2.2 Štatistický model turbulencie	14
2.2.3 Mierky turbulencie	16
3 Časové rady a ARMA modely	18
4 Paralelná analýza oboch systémov	21
4.1 Paralelná analýza vysokofrekvenčných dát	21
4.2 Analýza denných dát	27
4.2.1 Historické ceny indexov	29
4.2.2 Veterné dáta	35
4.2.3 Výsledné porovnania	41

Záver 42

Literatúra 44

Úvod

Finančná kríza je vo všeobecnosti považovaná za veľký problém. Ide o kolaps ekonomiky, ktorý má za následok zvýšenie nezamestnanosti, pokles produkcie i dopytu. Objavujú sa preto snahy o predvídanie takejto situácie, prípadné včasné zabránenie jej prepuknutiu. Hľadajú sa súvislosti aj medzi doteraz nespájanými oblasťami a rozvíjajú sa nové disciplíny, napríklad ekonofyzika.

V tejto práci sa budeme zaoberať jednou z oblastí ekonofyziky, finančnými systémami a turbulenciami a ich porovnaním. Tieto veličiny sú nezávislé v čase, ale nachádzame istú analógiu v ich správaní, a preto pokladáme za užitočné sa ich pokúsiť porovnať, prípadne využiť poznatky z jednej oblasti v druhej.

V prvej kapitole popíšeme ekonofyziku ako vedu, jeden z konkrétnych príkladov príčin jej rozvoja. Vymenujeme tiež zopár najznámejších smerov, ktorými sa zaoberá v súčasnosti. Tieto smery iba veľmi v skratke popíšeme, pričom si zvolíme finančné systémy a turbulencie ako oblasť, ktorej sa budeme venovať ďalej.

V druhej kapitole si v prvej časti zdefinujeme finančný systém, popíšeme si jeho funkcie a zložky. Bližšie popíšeme finančný trh ako hlavnú časť finančného systému a zvolíme si a popíšeme indexy S&P500, Dow Jones a Nasdaq ako konkrétne nástroje finančného trhu, s ktorými budeme pracovať. V druhej časti zdefinujeme pojem turbulencie a Reynoldsovho čísla, ako vhodnej veličiny na popis turbulencie. Vymenujeme si špecifické vlastnosti turbulentného prúdenia a popíšeme jednoduchý štatistický model turbulencie. Pokúsime sa o jednoduchú rozmerovú analýzu turbulencie.

V tretej kapitole si v skratke popíšeme teóriu časových radov, ARMA modelov. Túto teóriu využijeme v praktickej časti, pri práci s reálnymi dátami.

V štvrtej kapitole urobíme samotné porovnanie týchto dvoch systémov. V

prvej časti budeme porovnávať pomocou vysokofrekvenčných dát podľa odborného článku [9]. V druhej časti sa pokúsime o vlastnú analýzu pomocou denných dát vetra v niektorých štátoch USA. Zostavíme ARMA modely a následne porovnáme ich stavbu a koeficienty pri jednotlivých členoch, aby sme zistili možnú súvislosť systémov.

V závere podrobnejšie popíšeme zistené skutočnosti z praktickej časti a vyjadríme sa k celkovej problematike súvisu týchto dvoch systémov.

Kapitola 1

Ekonofyzika

Ekonofyzika je pomerne mladá vedná disciplína. Zaoberá sa využitím poznatkov z fyzikálnej oblasti v oblasti ekonómie. Aplikuje metódy a modely štatistickej fyziky na dáta získané z ekonomickej oblasti. Snaha popísať ekonómiu len pomocou matematických metód vytvára modely, ktoré sú veľmi bohaté na odvodzovanie dôsledkov a závislostí obsiahnutých veličín a subjektov, ale empirickým pozorovaním zisťujeme, že sa odlišujú od reálnych údajov. Ako príklad môžeme zobrať slávny hedge fond LTCM (Long Term Capital Management), ktorého investičná stratégia bola postavená na rozdieloch medzi výnosmi rôznych typov pevne úročených cenných papierov, podložená matematickými modelmi Myrona Scholesa a Roberta Mertona (nositelia Nobelovej ceny za ekonómiu 1997). Fond bol ziskový až do roku 1998, keď prepukla ruská finančná kríza. Matematické modely s ňou nerátali pre minimálnu pravdepodobnosť jej výskytu a fond prišiel za necelé 4 mesiace o 4,6 miliárd dolárov. Globálny finančný kolaps odvrátila americká FED (Federal Reserve) pôžičkou vo výške 3,5 miliárd dolárov.

Začalo sa preto hľadať v iných oblastiach. Ako jedna z vhodných metód na popis správania finančných mechanizmov sa ukázala oblasť štatistickej fyziky. Štatistická fyzika je teoretická disciplína zaoberajúca sa skúmaním makroskopických systémov. Za makroskopický považujeme mnohočasticový systém, ktorého vlastnosti sú determinované interakciou veľkého počtu častíc. Oblasť štatistickej fyziky sa ďalej delí na dve časti, klasickú a kvantovú štatistickú fyziku. Klasická

štatistická fyzika je založená na mechanickom modeli, v ktorom sa pohyb častíc opisuje zákonmi klasickej mechaniky. Kvantová štatistická fyzika vychádza z kvantovo - mechanického opisu pohybu častíc a sveta atómov. V ekonofyzike sa pod makroskopickým systémom myslí spoločenstvo ľudí. Častice tohto systému tvoria jedinci (ekonomickí agenti), ktorý medzi sebou uskutočňujú transakcie. Cieľom je zistenie všeobecných vlastností takéhoto systému.

K rozvoju ekonofyziky prispel nárast obchodovania na finančných trhoch. Najmä od roku 1973, kedy sa trhy stali aktívne 24-hodín denne. V období od roku 1973 do roku 1995 sa objem transakcií znásobil 80-krát. Takýto prudký rast vyvolával potrebu minimalizácie rizika na finančných trhoch. Matematické modely sa ťažko prispôsobujú množstvu nových informácií na trhoch, ich zložitej organizácii a spätnej väzbe, ako vhodnejšie sa ukazuje použitie aplikovanej fyziky pre jej veľký stupeň voľnosti. [3]

1.1 Prehľad najznámejších smerov ekonofyziky

Pokusov aplikovať fyzikálne metódy v rôznych oblastiach ekonómie bolo viacero, pričom nie vždy s úspechom. Vymenujeme si niekoľko najznámejších z nich:

- **Finančné systémy a turbulencie**- touto témou sa budeme zaoberať v ďalšom priebehu práce.
- **Ekonomické prostredie ako termodynamika**- aplikácia termodynamickej teórie na ekonomické dáta. Táto téma s orientáciou na trhovú teplotu je prehľadne spracovaná v [4]
- **Priebeh a vlastnosti cenových distribúcií**- spôsoby odvodenia z mikro - princípov, súvis s Lévyho distribúciou.
- **Štúdium vyšších štatistických momentov**- konečnosť druhého štatistického momentu, jeho súvis vo fyzike (spájaný s teplotou) a v ekonómii (spájaný s odhadom rizika pri obchodovaní)
- **Ekonomické vs ekologické systémy**- v oboch systémoch existuje koevolúcia (konkurencia, selekcia), porovnanie zisku v ekológii (score) a v ekonómii (teória hier)

- **Porovnávanie trhov a seizmických systémov-** koncepcia SOC= samoorganizovaného kritického správania (ide o skúmanie správania dynamických systémov a ich prechodu do kritického bodu bez nutnosti poznať či nastaviť správne parametre, napríklad pád snehovej lavíny)

Kapitola 2

Finančné systémy a turbulencie

Z kvalitatívneho pohľadu sa správanie finančných systémov dá porovnať so správaním turbulencií. Turbulencie si môžeme predstaviť ako vloženie veľkého množstva energie do systému a následné pozorovanie šírenia energie do okolia v menších mierach (napr. miešanie vedra s vodou). Porovnateľne vo finančných systémoch informácia aplikovaná do systému spôsobí reakcie investorov v menších mierach. Ukazuje sa však, že táto analógia sa nedá podporiť kvantitatívnymi výpočtami.

2.1 Finančné systémy

Finančný systém môžeme chápať ako mechanizmus, pri ktorom sa finančné prostriedky požičiavajú od subjektov, ktoré ich majú dostatok, k subjektom, ktoré ich potrebujú. Je súhrnom všetkých segmentov finančného trhu, obchodovaných finančných nástrojov a všetkých ekonomických subjektov, ktoré pri rešpektovaní legislatívou stanovených zákonov s týmito finančnými nástrojmi s využitím svojich obchodných znalostí a techník obchodujú, alebo poskytujú odborné finančné služby.

Vďaka prebiehajúcim finančným operáciám dochádza k zámene peňazí za rôzne druhy finančných služieb a nárokov, čo následne umožňuje nákup nových kapi-

tálových statkov a vedie k zvyšovaniu produkčných možností ekonomiky a teda k urýchľovaniu ekonomického rastu.

Finančný systém teda zaisťuje sústreďovanie a alokáciu dočasne voľných peňažných prostriedkov za účelom premeny úspor na investície. Určuje tiež, aké množstvo peňažných prostriedkov je v príslušnej dobe k dispozícii pre platby za tovary, služby a výrobné faktory a determinuje ceny úverov. [13]

2.1.1 Funkcie a zložky finančného systému

Realizácia finančných tokov a finančných transakcií je uskutočňovaná pomocou nasledovných funkcií finančného systému:

1. **Depozitná funkcia** - umožňuje ukladanie úspor do peňažných vkladov a cenných papierov
2. **Kreditná funkcia** - poskytovanie všetkých druhov úverov ekonomickým subjektom
3. **Funkcia uchovania hodnoty (bohatstva)** - pomocou finančných nástrojov je ekonomickým subjektom umožnené uchovávať svoju kúpnu silu až do doby konečného použitia svojich odložených peňažných zdrojov
4. **Funkcia likvidity** - možnosť premeny jednotlivých finančných aktív na peňažnú hotovosť
5. **Platobná funkcia** - poskytuje mechanizmus na vykonávanie všetkých druhov platieb
6. **Funkcia ochrany proti riziku** - ochrana pomocou poistných zmlúv a vytvárania diverzifikovaných portfólií vlastnených finančných aktív rozkladajúcich riziko prípadného poklesu ich cien
7. **Štátna regulačná funkcia** - pôsobenie štátu za pomoci monetárnej a fiškálnej politiky za účelom ovplyvňovania miery nezamestnanosti, miery inflácie a zabezpečenie stáleho ekonomického rastu

Finančný systém je nedeliteľnou súčasťou ekonomického systému. Ekono-
mika vytvára tok produkcie ako odpoveď na tok platieb. Dochádza k cirkulácii

produkcie a príjmov, ktorá je nezávislá a nekonečná. Efektívne fungujúci ekonomický systém je determinovaný tiež fungovaním finančného systému, ktorý má nasledujúce zložky:

- Finančné trhy
- Finančné inštitúcie ako sprostredkovatelia
- Finančné nástroje
- Veritelia a dlžníci
- Finančné transakcie

Finančné trhy tvoria hlavnú zložku finančných systémov.

2.1.2 Finančné trhy

Definícia 1. *Finančný trh je miesto, kde sa stretáva ponuka voľných finančných prostriedkov v podobe úspor rôznych ekonomických subjektov a dopyt rôznych ekonomických subjektov po týchto prostriedkoch, ktoré sa využívajú ako investície.*

[13]

Finančný trh býva definovaný ako vrchol všetkých ostatných trhov pre jeho univerzálnosť a schopnosť citlivo indikovať ekonomický vývoj a situáciu. Môžeme ho rozdeliť do kategórií podľa viacerých hľadísk:

- podľa účelu použitia prostriedkov - peňažný, kapitálový
- podľa účastníkov - bankový, medzi podnikový, burzový
- podľa vecného hľadiska - peňažný, kapitálový, poisťový, devízový, trh drahých kovov

Peňažný trh

Na peňažnom trhu si subjekty medzi sebou vymieňajú peňažné prostriedky. Typickou črtou finančných nástrojov obchodovaných na tomto trhu je krátka doba splatnosti, spravidla do jedného roka. Delíme ho na dve samostatné časti, trh krátkodobých úverov a trh krátkodobých cenných papierov. Vyznačujú sa

vysokou likviditou, nižším výnosom a rizikovosťou. Funkciou tohto trhu je financovanie kapitálu firiem, poskytovanie pôžičiek domácnostiam, firmám a vládam. Umožňujú tiež špekulatívne nákupy cenných papierov a komodít.

Kapitálový trh

Na tomto type trhu sa obchoduje s dlhodobými finančnými dokumentami. Môžeme ho rozdeliť na dve časti, trh dlhodobých úverov a trh dlhodobých cenných papierov. Oproti peňažnému trhu sú tieto finančné nástroje rizikovejšie, ale aj výnosnejšie.

Trh s cudzími menami

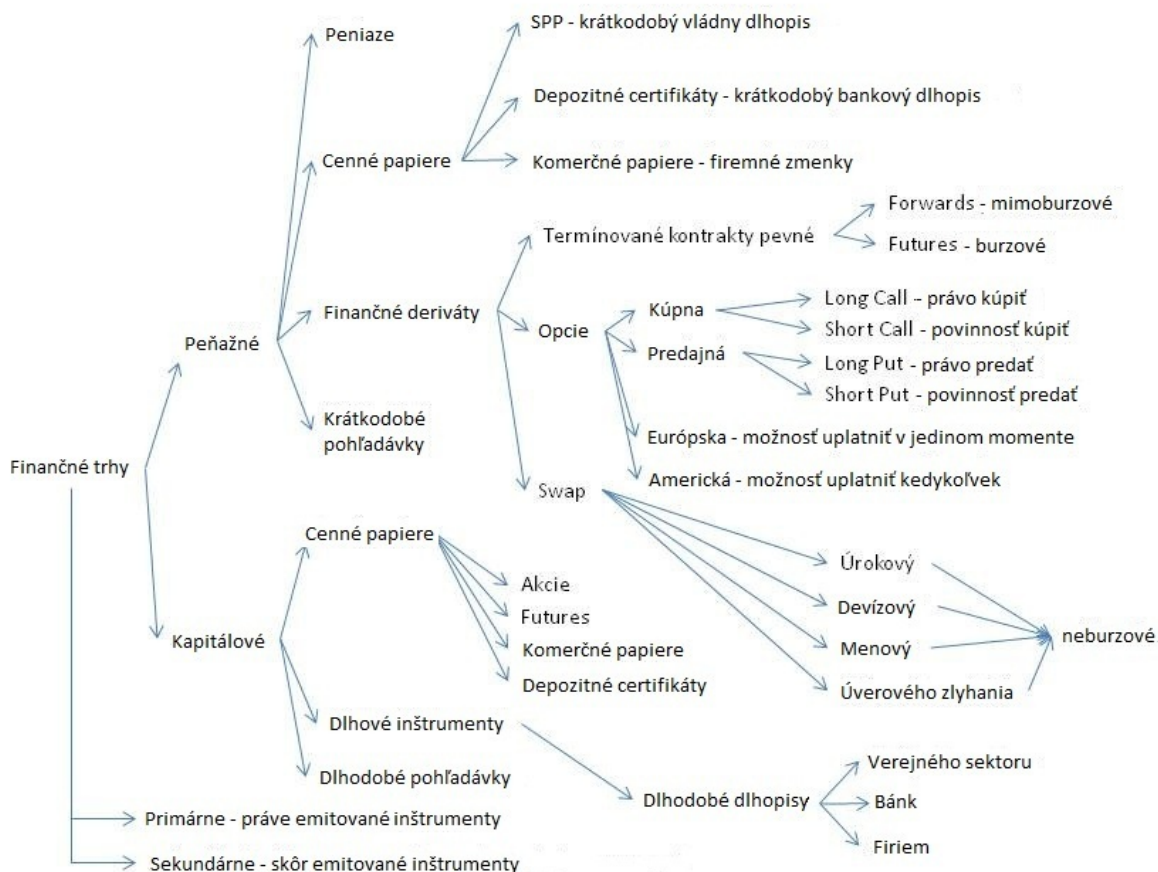
Delíme ich na dve základné skupiny, devízové a valutové trhy. Na devízových trhoch sa obchoduje s bezhotovostnými formami cudzích mien. Týmto procesom dochádza k tvorbe kurzu daných mien. Na valutovom trhu sa obchoduje s hotovostnými formami cudzích mien, pomocou kurzov odvodených z devízového trhu, pričom tieto kurzy sa môžu trochu odlišovať.

Trh drahých kovov

Medzi najvýznamnejšie patria trhy zlata a trhy striebra. Významné sú tiež trhy paládia a platiny. Ide vlastne o špecializované komoditné trhy.

Spracované podľa [6].

Na nasledujúcom obrázku máme zobrazené rozdelenie finančného trhu podľa typu obchodovaných finančných prostriedkov:



Obr. 2.1: Finančný trh (prevzaté z [14])

2.1.3 Index Standard & Poor's 500 (S&P 500)

V praktickej časti práce sa zameriame na americký akciový trh. Za štandardné meradlo jeho výkonnosti sa považuje index S&P 500. Ceny akcií v ňom obsiahnutých sú vážené trhovou kapitalizáciou príslušných firiem, čo je hodnota akcií, ktoré sú bežne k dispozícii investorskej verejnosti. Akcie zahrnuté v tomto indexe tvoria skoro 80% celkovej kapitalizácie amerického akciového trhu. Index

obsahuje akcie 500 firiem vybraných výborom spoločnosti Standard & Poor's U.S. Index Comitee na základe týchto kritérií:

- **musí ísť o americkú spoločnosť (od júla 2002)** – výbor posudzuje toto kritérium na základe množstva faktorov vrátane sídla hlavných operácií spoločnosti, jej štruktúry, účtovných štandardov, ktoré používa a dotácie na burze
- **trhová kapitalizácia spoločnosti vyššia ako 4 mld. USD** – toto kritérium sa z času na čas prehodnocuje, aby bolo konzistentné s trhovými podmienkami
- **adekvátne likvidita a cena akcií** – pomer ročne zobchodovanej hodnoty v dolároch k trhovej kapitalizácii by mal byť minimálne 0,3. Veľmi nízke ceny môžu ovplyvniť likviditu príslušnej akcie
- **podiel obchodovaných akcií aspoň 50%**
- **funkčná prevádzka** - uzavreté fondy, holdingové spoločnosti, partnerstvá a investičné združenia nie sú do indexu zahrnuté.

Index vznikol v období 1941-43 ako dôsledok potreby indikátora zobrazujúceho trhovú kapitalizáciu. Od roku 1968 patrí medzi komponenty indexu vedúcich ekonomických indikátorov (Index of Leading Economic Indicators) amerického ministerstva obchodu (U.S. Department of Commerce). Top 10 spoločností v ňom zahrnutých tvoria spolu jednu pätinu indexu:

1.Exxon Mobil 2.General Electric 3.Citigroup 4.Microsoft 5.AT&T 6.Bank of America 7.Procter & Gamble 8.Johnson & Johnson 9.Pfizer 10.Altria Group

2.1.4 Index Dow Jones Industrials Average (DJIA)

Ide o významný ukazovateľ vývoja amerického trhu. Prvý krát publikovaný bol v roku 1896. Skladá sa z 30 najviac obchodovaných spoločností na americkom trhu. Špecifický je v určovaní váh jednotlivých akcií - sú dané cenou za jednotlivú akciu, na rozdiel od väčšiny indexov, ktoré majú váhy určené na základe trhovej hodnoty celej spoločnosti. Od roku 1903 do roku 2007 patrila správa tohoto indexu firme Dow Jones & Co., v roku 2007 však túto firmu aj s indexom kúpil finančný magnát Rupert Murdoch. [14]

2.1.5 Index Nasdaq Composite (NASDAQ)

Je to index akciového trhu podobných akcií a cenných papierov obchodovateľných na burze NASDAQ. Skladá sa z viac ako 3000 komponentov. Obsahuje americké aj neamerické spoločnosti. Prvýkrát bol uvedený na trh v roku 1971. Na vstup do indexu musí mať cenný papier niektorý z bezpečnostných certifikátov. Cieľom je predísť výrazným šokom vo vývoji ceny indexu.

V praktickej časti práce sa pokúsime nájsť modely popisujúce vývoj týchto indexov, čiže vývoj amerického akciového trhu a porovnanáme ho so stavbou veterných modelov.

2.2 Turbulencie

Je ťažké presne popísať turbulenciu ako dej. Vyskytuje sa často v prírode a v podstate všade okolo nás (vietor, dym z horiaceho ohňa...) a napriek tomu máme o nej a spôsobe jej vývoja v čase len veľmi málo informácií, väčšinou získaných empirickými pozorovaniami.

Definícia 2. *Turbulencia je nepravidelný pohyb kvapalín alebo plynu po nepravidelných dráhach a nepravidelnou rýchlosťou. [1]*

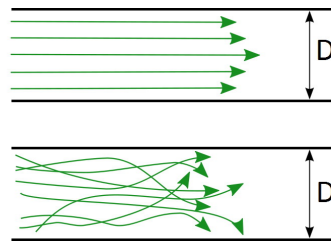
Turbulencia je vlastne špeciálny druh prúdenia tekutiny. Na popis prúdenia môžeme použiť Reynoldsovo číslo definované ako:

$$Re = \frac{D \cdot V}{\nu}$$

Je to bezrozmerná veličina popisujúca spôsob pretekania kvapaliny s rýchlosťou V potrubím s priemerom D a kinematickou viskozitou ν . Podľa veľkosti Reynoldsovho čísla delíme prúdenie tekutiny na:

- $< 0, 2320 >$ **laminárne prúdenie**
- $< 2320, 3450 >$ **prechodný stav**
- $< 3450, \infty >$ **turbulentné prúdenie**

V prechodnom stave sa dá empiricky zistiť pre každý druh tekutiny presná hodnota, kedy sa mení laminárne prúdenie na turbulentné. Táto hodnota sa potom nazýva kritické Reynoldsovo číslo.



Obr. 2.2: Príklad laminárneho (hore) a turbulentého (dole) prúdenia (zdroj [14])

2.2.1 Vlastnosti turbulentného prúdenia tekutiny

Definícia turbulencie je veľmi všeobecná, pre presnejšiu predstavu si vypíšeme niektoré špecifické vlastnosti turbulentného prúdenia:

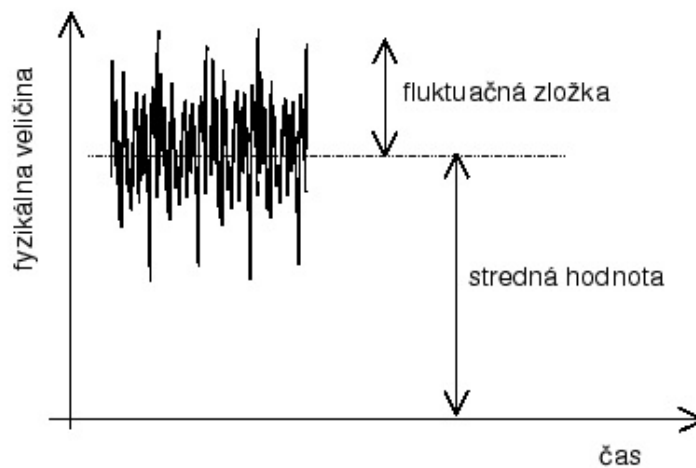
1. **Nepravidelnosť** - jednou z hlavných charakteristík je nepravidelnosť alebo náhodnosť, vylučuje deterministický prístup k turbulenciám a uprednostňuje využívanie štatistických metód
2. **Difuzivita** - difuzivita turbulencie spôsobuje rýchle miešanie a zvýšenie miery hybnosti, tepla a prenosu hmoty, je to vlastne nepravidelný spôsob rozptyľovania energie do okolia
3. **Veľké Reynoldsovo číslo** - turbulentné prúdenie nastáva pri vysokej hodnote Reynoldsovho čísla, čiže keď je laminárne prúdenie nestabilné. Pohyby častíc vtedy popisujú nelineárne parciálne diferenciálne rovnice, pričom riešenie takéhoto systému býva veľmi zložitý, často až neriešiteľný. Kombinácia náhodnosti a nelinearity výrazne sťažuje skúmanie turbulencií.
4. **Trojdimenzionálna kolísavá vírivosť** - turbulencie sa vyznačujú výraznou vírivosťou do všetkých smerov, preto vírivá dynamika zohráva dôležitú úlohu v popise ich správania
5. **Disipácia** - každá turbulencia je disipatívna, rozptyľuje energiu, pričom časť stráca nezvratnou premenou, napríklad na teplo
6. **Kontinuum** - turbulencia je súvislé, nepretržité prúdenie bez vnútornej štruktúry

7. Prúdenia tekutín - turbulencie sú prúdenia tekutín, pri dostatočne veľkom Reynoldsovom čísle je jedno či ide o kvapalinu alebo plyn a aj napriek tomu, že každý tok je vďaka náhodnosti a nelineárnosti iný, majú turbulentné prúdenia niektoré vlastnosti spoločné

Charakteristika turbulencie značne závisí od prostredia jej výskytu, preto momentálne nie je snaha vytvoriť univerzálnu všeobecnú teóriu pre všetky typy turbulencií, ale skôr rozdeliť turbulencie do tried na základe spoločných vlastností. Spracované podľa [7].

2.2.2 Štatistický model turbulencie

Štatistický model je postavený na časových priemeroch obsiahnutých fyzikálnych veličín.



Obr. 2.3: Turbulencia zdroj [8]

Napríklad zložka aktuálnej rýchlosti v smere osi x je súčtom časovo strednej hodnoty a fluktuáčnej zložky:

$$v_x = \overline{v_x} + v'_x \quad (2.1)$$

Z toho vyjadríme kinetickú energiu K pomocou časovo stredných hodnôt štvorcov fluktuálnych zložiek rýchlosti:

$$K = \frac{1}{2}(\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}) \quad (2.2)$$

Turbulencie môžeme rozdeliť na:

1. izotropné - všetky štatistické vlastnosti sú symetrické, čiže stredné hodnoty štvorca fluktuálnych rýchlostí vo všetkých smeroch sú rovnaké. Napríklad turbulencia za sitom pre zrovnomenie prúdenia.
2. homogénne - všetky štatistické vlastnosti sú nezávislé od miesta.
3. anizotropné (šmykové) - najbežnejšia forma turbulencie, ktorá sa vyskytuje v medznej vrstve, v potrubí, v úplave za telesom, vo voľnom prúde. Dá sa teoreticky veľmi ťažko podchytiť a preto sa používajú v jej súvislosti rôzne poloempirické predpoklady.

Štatistická teória turbulencie, ktorá podchycuje štatistickými metódami časovo spriemerované údaje o prúde je vhodná najmä pre izotropnú a homogénnu turbulenciu. Pre anizotropnú turbulenciu sa uplatnili doteraz iba poloempirické teórie.

Pokusy popísať anizotropnú turbulenciu pomocou matematicko-fyzikálneho modelu su pomerne mladé. V roku 1822 navrhol francúzsky inžinier C.M.L.H. Navier sústavu parciálnych diferenciálnych rovníc ako model popisujúci prúdenie nestlačiteľnej tekutiny. V tej dobe bol model fyzikmi zamietnutý, až v roku 1845 G.H. Stokes rigorózne odvodil model prúdenia tekutiny a dostal totožné rovnice ako Navier 23 rokov pred ním. Jeden z možných zápisov je:

$$\frac{\delta}{\delta t} u(r, t) + u(r, t) \cdot \nabla u(r, t) - \nu \cdot (\Delta) \cdot u(r, t) + \nabla P = f$$
$$\operatorname{div} u(r, t) = 0$$

Kde u je vektor rýchlosti prúdenia tekutiny na pozícii r v čase t , P je tlak a ν je kinematická viskozita danej tekutiny. Model je odvodený od síl, ktorými pôsobi na jednotlivé častice gravitácia, tlak a trenie o susedné častice. Napriek jednoduchému zápisu presné riešenie v trojrozmere neexistuje. Dôležitosť poznania správania turbulencií dokladá aj zaradenie odvodenia riešenia Navier-Stokesových rovníc medzi 7 miléniových problémov. Vyriešenie ľubovoľného z nich ocení Clayov matematický ústav sumou jeden milión dolárov.

2.2.3 Mierky turbulencie

Turbulencie si môžeme predstaviť ako vírivé prúdy vznikajúce za prekážkou v prúde. Tie najväčšie hneď za prekážkou majú veľkosť ako samotná prekážka. Tieto vírivé prúdy sa postupne rozpadajú na menšie, ktorých rozmer sa veľmi mení a pokrýva rádovo široké spektrum. Veľké prúdy odoberajú energiu z hlavného prúdu. Menšie prúdy dostávajú energiu z väčších prúdov, z ktorých sa vytvoria. Najmenšie vírivé prúdy odoberajú energiu z najbližších rozmerovo väčších. V oblasti najmenších prúdov l_n sa kinetická energia už transformuje do molekúl na vnútornú energiu a zvyšuje sa teplota. Tento proces sa nazýva disipácia.

Pre zjednodušenie použijeme rozmerovú analýzu, aby sme našli vzťah medzi najväčšími a najmenšími vírivými prúdmi. Rozmery najmenších vírivých prúdov budeme hľadať v tvare súčinu mocnín kinematickej viskozity ν a miery disipácie d :

$$l_n = \nu^x \cdot d^y = \left(\frac{[m^2]}{[s^2]}\right)^x \cdot \left(\frac{[m^2]}{[s^3]}\right)^y = [m]^1 \quad (2.3)$$

Dostaneme dve rovnice s dvoma neznámymi:

$$2x + 2y = 1 \quad x + 3y = 0 \implies x = \frac{3}{4}, \quad y = -\frac{1}{4}$$

Disipácia energie teda nastáva pri rozmere:

$$l_n = \left(\frac{\nu^3}{d}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.4)$$

Podobne zistíme časovú mierku disipácie:

$$t_n = \left(\frac{[m^2]}{[s^2]}\right)^p \cdot \left(\frac{[m^2]}{[s^3]}\right)^r = [s]^1 \quad (2.5)$$

$$2p + 2r = 0 \quad p + 3r = -1 \implies p = \frac{1}{2}, \quad r = -\frac{1}{2}$$

Disipácia energie nastáva v časovej mierke:

$$t_n = \left(\frac{\nu}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

Identickým postupom získame aj mierku rýchlosti disipácie:

$$V_n = \left(\frac{[m^2]}{[s^2]}\right)^s \cdot \left(\frac{[m^2]}{[s^3]}\right)^t = \frac{[m]}{[s]} \quad (2.7)$$

$$s + 2t = 0 \quad s + 3t = -1 \implies s = \frac{1}{4}, t = \frac{1}{4}$$

Disipácia energie nastáva pri rýchlosti:

$$V_n = (vd)^{\frac{1}{4}} \tag{2.8}$$

Poznaním presného matematického aparátu, ktorý by popisoval správanie a vlastnosti turbulentného prúdenia by mohlo výrazne pomôcť výskume aj v iných oblastiach, ale bohužiaľ zatiaľ pre nás turbulentné prúdenie zostáva exaktne matematicky neopísateľné.

Kapitola 3

Časové rady a ARMA modely

V tejto kapitole si popíšeme teóriu k časovým radom. Zdefinujeme si niektoré dôležité pojmy, ktoré využijeme v praktickej časti pri práci s reálnymi dátami.

Časový rad budeme brať ako náhodný proces definovaný nasledovne:

Definícia 3. *Náhodným procesom budeme nazývať systém náhodných premenných:*

$$\{X(\omega, t) : \omega \in \Omega, t \in T\}$$

kde Ω je množina elementárnych udalostí a T je čas.

[12]

Každý náhodný proces obsahuje nasledovné charakteristiky:

- $\mu_t = E(X_t)$ - stredná hodnota
- $\sigma_t^2 = D(X_t) = E(X_t - \mu_t)^2$ - rozptyl
- $cov(r, s) = E(X_r - \mu_r)(X_s - \mu_s)$ - kovariancia
- $\rho(r, s) = \frac{cov(X_r, X_s)}{\sqrt{D(X_r)}\sqrt{D(X_s)}}$ - korelácia

Definícia 4. *Časový rad budeme nazývať slabo stacionárny, ak pre neho platí:*

1. $E(X_t) = \mu$ pre $t \in T$
2. $D(X_t) = \sigma^2$ pre $t \in T$

$$3. \text{cov}(X_t, X_s) = \text{cov}(X_{t+k}, X_{s+k}) \text{ pre } s, t \in T, s \neq t$$

V tejto práci budeme pod pojmom stacionarita myslieť práve slabú stacionaritu.

[10]

Definícia 5. *Biely šum je proces, pre ktorý platí:*

$$1. E(X_t) = \mu \text{ pre } t \in T$$

$$2. D(X_t) = \sigma^2 \text{ pre } t \in T$$

$$3. \text{cov}(X_t, X_s) = 0 \text{ pre } s, t \in T, s \neq t$$

[10]

ARMA modely slúžia na modelovanie časových radov a tvorbu ich predikcií na základe hodnôt z minulosti s dôrazom na autokorelačnú analýzu. Jedná sa o špeciálne stochastické modely, vytvorené Georgem Boxom a Gwilym Jenkinsonom v roku 1970. Ich základným predpokladom je, že hodnota náhodnej premennej X_t závisí iba od stochastickej zložky a od predchádzajúcich hodnôt náhodnej premennej.

Definícia 6. *Autoregresný proces $AR(p)$ môžeme zapísať ako:*

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t$$

kde Y_t je náhodná premenná, ϵ_t je biely šum a $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ sú autoregresné koeficienty.

[11]

Zavedením pomocného operátora S , pre ktorý platí $S^i Y_t = Y_{t-i}$ vieme prepísať daný vzťah na rovníkový tvar:

$$(1 - \Phi_1 S - \Phi_2 S^2 - \dots - \Phi_p S^p) Y_t = \Phi_t(S) Y_t = \epsilon_t$$

Podmienka stacionarity pre $AR(p)$ proces je, že všetky korene rovnice

$$(1 - \Phi_1 S - \Phi_2 S^2 - \dots - \Phi_p S^p) = \Phi_t(S) = 0$$

musia ležať mimo jednotkového kruhu.

Definícia 7. Model s kľavým priemerom $MA(q)$ môžeme zapísať ako:

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \Theta_1\epsilon_{t-1} + \Theta_2\epsilon_{t-2} + \dots + \Theta_q\epsilon_{t-q} \quad [11]$$

Zavedením pomocného operátora R dostaneme nasledovný vzťah:

$$Y_t = (1 + \Theta_1R + \Theta_2R^2 + \dots + \Theta_qR^q)\epsilon_t = \Theta_q(R)\epsilon_t$$

MA procesy sú vždy stacionárne, overuje sa ich invertovateľnosť. Model je invertovateľný, ak korene rovnice

$$\Theta_q(R) = 0$$

ležia mimo jednotkového kruhu.

Definícia 8. Zmiešaním $AR(p)$ a $MA(q)$ procesu vznikne $ARMA(p,q)$ proces tvaru:

$$Y_t = \Phi_1Y_{t-1} + \Phi_2Y_{t-2} + \dots + \Phi_pY_{t-p} + \epsilon_t + \Theta_1\epsilon_{t-1} + \Theta_2\epsilon_{t-2} + \dots + \Theta_q\epsilon_{t-q} \quad [11]$$

Zavedením pomocného operátora U :

$$(1 - \Phi_1U - \Phi_2U^2 - \dots - \Phi_pU^p)Y_t = (1 - \Theta_1U - \Theta_2U^2 - \dots - \Theta_qU^q)\epsilon_t$$

$ARMA(p,q)$ proces je stacionárny podľa $AR(p)$ časti a invertovateľný podľa $MA(q)$ časti modelu. Správne zvolený $ARMA(p,q)$ model môžeme použiť na popis vývoja pozorovaných dát a na tvorbu predikcií. [spracované podľa [5], [11]]

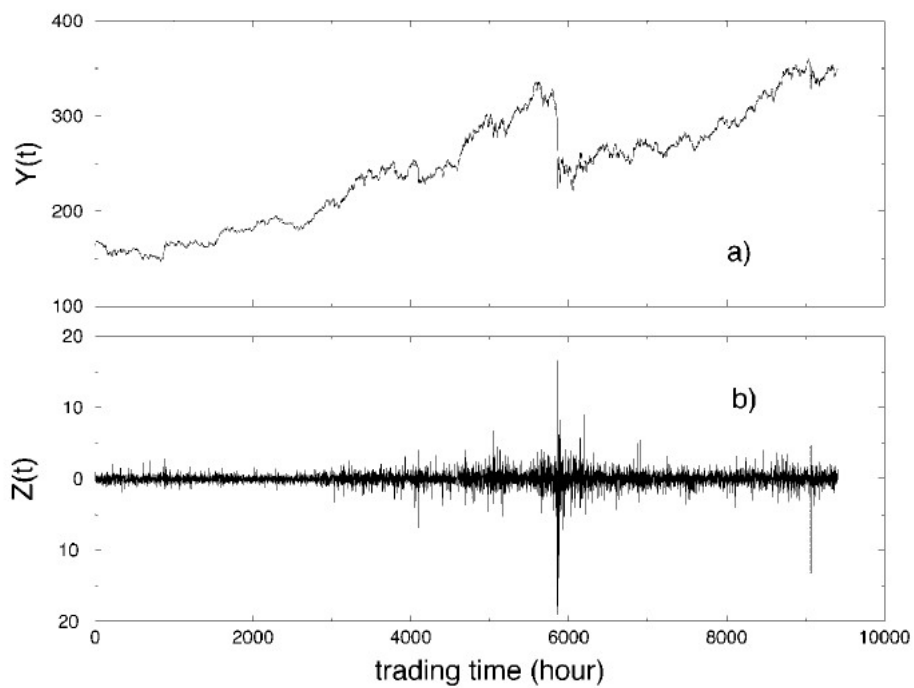
Kapitola 4

Paralelná analýza oboch systémov

Aby sme vedeli porovnať správanie finančných systémov a turbulencií, pokúsime sa urobiť paralelnú analýzu. V prvej časti budú analyzované vysokofrekvenčné dáta podľa článku [9], v druhej časti sa pokúsime o vlastnú analýzu s dennými dátami.

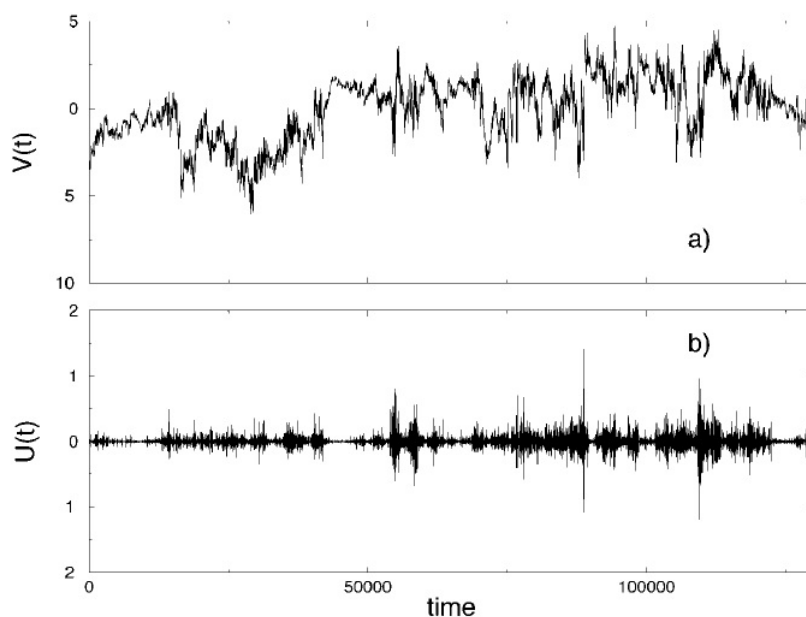
4.1 Paralelná analýza vysokofrekvenčných dát

Finančný systém bude reprezentovaný vývojom vysokofrekvenčného časového radu indexu S&P 500 počas obdobia 1984 - 1989. Ako turbulencie budeme uvažovať rýchlosť vetra 6 metrov nad pšeničným poľom v Connecticute v tom istom časovom intervale. Zobrazíme si dané údaje na grafoch v závislosti od času na Obr. 4.1 a Obr. 4.2:



Obr. 4.1: Index S&P 500

V časti **a** je zobrazení časový vývoj indexu s mierkou $\Delta t = 1$ hodina od januára 1984 do decembra 1989. V časti **b** je zobrazená zmena prírastkov indexu daná vzťahom $Z(t) = Y(t) - Y(t - \Delta t)$ v tom istom časovom období. Graf pozostáva z 1 447 514 pozorovaní, pričom pod pojmom trading time sa myslí čas od otvorenia po uzavretie trhu s následným pokračovaním pri ďalšom otvorení trhu.



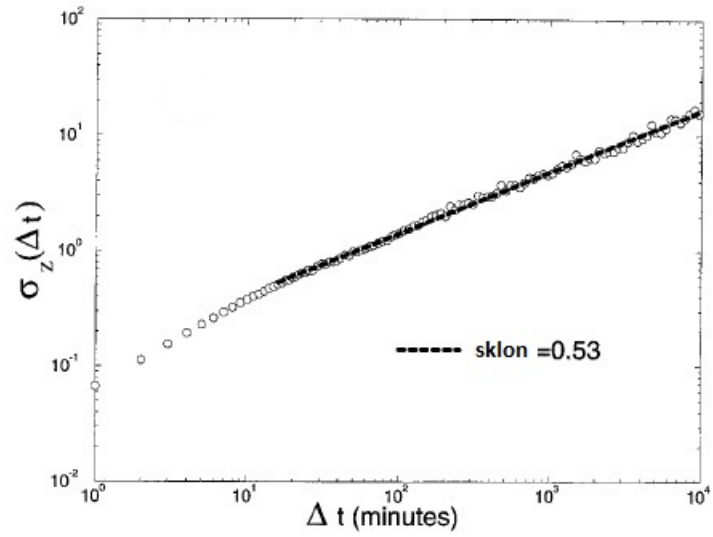
Obr. 4.2: Rýchlosť vetra

V časti **a** je zaznamenaní časový vývoj rýchlosti vetra v oblasti s veľkým Reynoldsovým číslom v danom období. V časti **b** je zobrazená zmena prírastkov rýchlosti vetra daná vzťahom $U(t) = V(t) - V(t - \Delta t)$ v tom istom časovom období. Ide o približne 130 000 meraní s nerovnomernou časovou jednotkou počas celého obdobia.

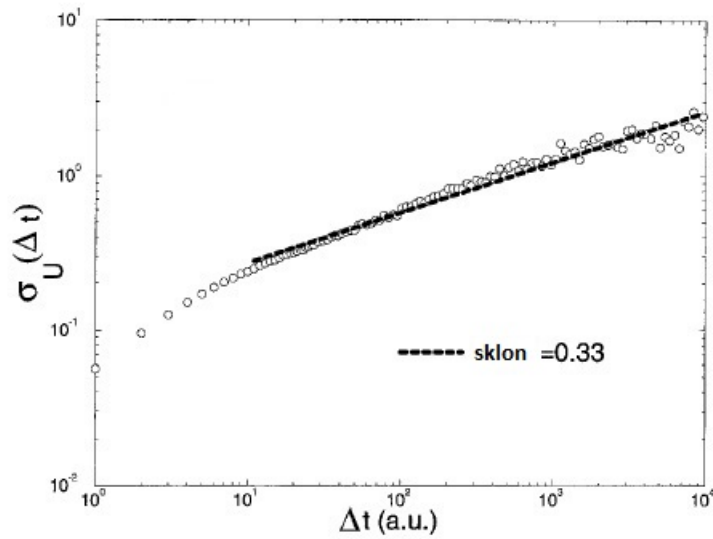
Na Obr. 4.3 a Obr. 4.4 sú zobrazené logaritmované smerodajné odchýlky prírastkov $Z(t)$ a $U(t)$. V oboch prípadoch je zjavná lineárna závislosť:

$$\begin{aligned}
 \log(\sigma(\Delta t)) &= a + b \cdot \log(\Delta t) \\
 \log(\sigma(\Delta t)) &= a + \log(\Delta t)^b \\
 \sigma(\Delta t) &= e^a + (\Delta t)^b \\
 \sigma(\Delta t) &= c \cdot (\Delta t)^b
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

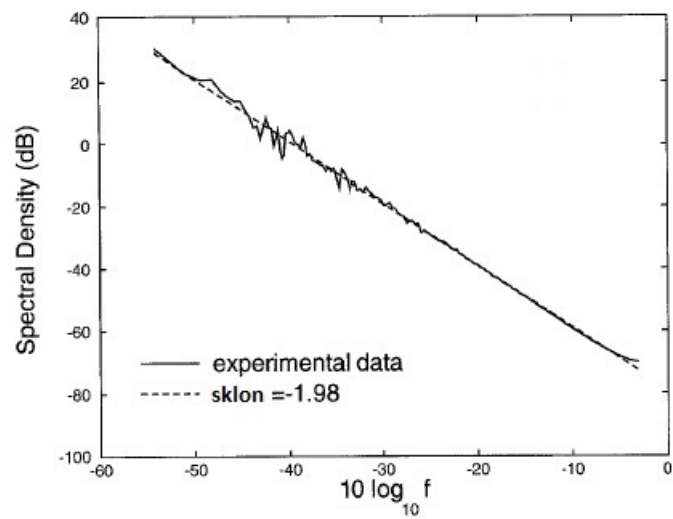
Pre index S&P500 nám pri daných dátach vyjde $b = 0,53$, čo je veľmi blízko teoretickej hodnote $\frac{1}{2}$ typickej pre náhodné procesy s nezávislými prírastkami (napríklad Brownov pohyb). Pre rýchlosť vetra dostávame $b = 0,33 \approx \frac{1}{3}$, ktorá je typická pre krátkodobé antikorelované náhodné procesy. [9]



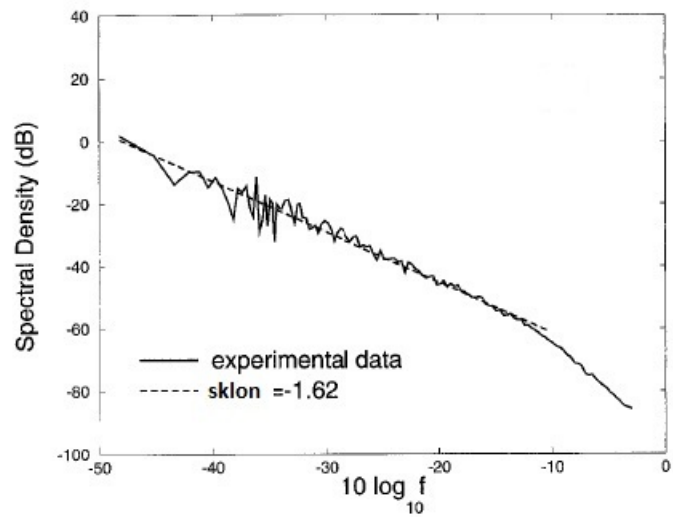
Obr. 4.3: Logaritmovaná smerodajná odchýlka prírastkov S&P500



Obr. 4.4: Logaritmovaná smerodajná odchýlka prírastkov rýchlosti vetra



Obr. 4.5: Spektrálna hustota indexu S&P500



Obr. 4.6: Spektrálna hustota rýchlosti vetra

Vypočítaním spektrálnej hustoty pre časové rady $Y(t)$ a $V(t)$ dostaneme Obr 4.5 a Obr 4.6. Spektrálnu hustotu dostaneme pomocou spektrálnej analýzy, čiže rozložením pôvodného časového radu na súčet sínusov a kosínusov za danú periódu pomocou Furierovej transformácie. Z daného vzťahu vyrátame tzv. spektrum. Cieľom spektrálnej analýzy je popísať silu signálu (alebo procesu) na konečnej množine dát. Je užitočná pri hľadaní šokov ukrytých v procese. Z obrázkov vidíme, že index S&P500 má menej šokovito rozložený priebeh spektrálnej hustoty so sklonom podobným ako má Brownov pohyb. Rýchlosť vetra ma viac šokovitý a nepravidelnejší priebeh spektrálnej hustoty s inerciálnym rozsahom. [9]

Porovnaním týchto dvoch systémov vidíme niekoľko podobností (periodicnosť, nie normálne rozdelenie hustoty pravdepodobnosti, podobné správanie zmien prírastkov), ale aj rozdielov (prírastky rýchlosti vetra vyzerajú antikorrelované, zatiaľ čo prírastky indexu S&P500 nekorelované, nie je zrejme žiadna analógia medzi disipáciou v turbulenciách a indexe S&P500).

O podobnú analýzu medzi devízovými trhmi a plne vyvinutými trojdimenzionálnymi turbulenciami sa pokúšal Ghashghaie v [2]. Hľadal súvislosti hlavne medzi ich hustotami pravdepodobnosti ale aj inými vlastnosťami. Jeho zistenia sú zhrnuté na Obr. 4.7. Napriek snahe sa mu nepodarilo jednoznačne potvrdiť ani vyvrátiť súvislosť týchto dvoch javov.

<i>Analógia medzi devízovými trhmi a trojdimenzionálnou turbulenciou</i>	
hydrodynamická turbulencia	devízové trhy
energia	informácia
priestorová vzdialenosť	časová strata
laminárne oblasti prerušované turbulentnými zhlukmi	zhluky s malou a veľkou volatilitou
stupňované rozloženie energie v priestore	informačná kaskáda v čase

Obr. 4.7: Analógia podľa Ghashghaie-a

4.2 Analýza denných dát

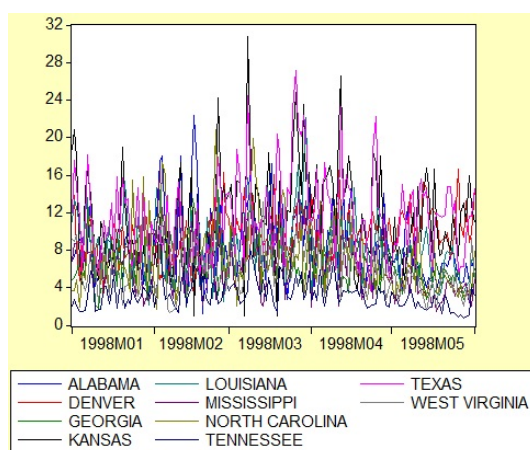
V tejto časti budeme analyzovať denné dáta pomocou štatistického programu Eviews. Veterné dáta bude zastupovať priemerná denná rýchlosť vetra v desiatich meteorologických staniách v USA počas obdobia 1.1.1998 až 1.6.1998 udávaná v míľach za hodinu (mph). Takýto vietor nemá vždy turbulentný charakter, nachádzame však niekoľko podobných vlastností s indexami. Vietor vzniká interakciou rovnakých častíc. Podobne víchrica má rovnaký charakter ako finančná kríza na jednotlivé častice. Dáta použité v tejto časti sú voľne dostupné na internete na adrese:

<<http://iridl.ldeo.columbia.edu/SOURCES/.NOAA/.NCDC/.DAILY/.FSOD/.AWND/>>

Finančný systém budú predstavovať indexy S&P500, Dow Jones Industrials Average a Nasdaq Composite počas obdobia 7.1.1998 až 1.7.1998. Pracovať budeme so zatváracou cenou obchodovateľného dňa v danom období. Historické ceny týchto indexov sú dostupné na internete na adrese:

<<http://finance.yahoo.com/q/hp?s=~GSPC+Historical+Prices>>

Pri indexoch budeme pracovať iba s dátami do 1.6.1998 a zvyšných cca 30 pozorovaní si ponecháme na porovnanie s našimi predikciami, aby sme sa uistili, že máme korektný model. Zobrazíme si skúmané dáta graficky na Obr. 4.8 a Obr. 4.9:



Obr. 4.8: Priemerná denná rýchlosť vetra

Z Obr. 4.8 vidíme, že hodnoty vetra nadobúdajú rôzne veľkosti v rozsahu od 1 do 32 mph. Kvôli neprehľadnosti obrázku nevieme odhadnúť trendy pre jednotlivé pozorovania, a nevieme preto odhadnúť stacionaritu dát. Budeme uvažovať, že jednotlivé veterné časové rady sú navzájom nezávislé - sú síce z rovnakého časového obdobia, ale predpokladáme, že vzdialenosti jednotlivých meracích staníc, ktoré sú každá v inom štáte sú dostatočné, aby predišli závislosti dát.



Obr. 4.9: Zatváracia cena indexov

Pri indexoch cena akcie rastie v čase, preto sú na Obr. 4.9 viditeľné rastúce trendy pozorovaní. Dá sa preto predpokladať, že dané časové rady sú nestacionárne.

Pokúsime sa vytvoriť pre obe skupiny dát čo najvhodnejšie ARMA modely, porovnáme tieto modely a vyvodíme z toho závery.

4.2.1 Historické ceny indexov

Postup zostavenia ARMA modelu si ukážeme na indexe S&P500 a potom aplikujeme aj na ďalšie dva indexy. Podmienkou pre tvorbu ARMA modelu je stacionarita dát. Otestujeme ju Augmented Dickey- Fuller testom. Dáta sú stacionárne, ak hypotézu jednotkového koreňa zamietame, čiže ak je p-value tohto testu menej ako 5%.

Na Obr. 4.10 vidíme, že p-value je 94,99%, čiže nezamietame hypotézu jednotkového koreňa a dáta musíme diferencovať. Opakovaním testu pre prvé diferencie na Obr. 4.11 už je p-value 0, a preto budeme ďalej pracovať s prvými diferenciami dát.

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on SAP		
Null Hypothesis: SAP has a unit root		
Exogenous: None		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=12)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	1.294688	0.9499
Test critical values: 1% level	-2.587607	
5% level	-1.943974	
10% level	-1.614676	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Obr. 4.10: Test stacionarity pôvodných dát

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on D(SAP)		
Null Hypothesis: D(SAP) has a unit root		
Exogenous: None		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=12)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-9.244227	0.0000
Test critical values: 1% level	-2.587607	
5% level	-1.943974	
10% level	-1.614676	

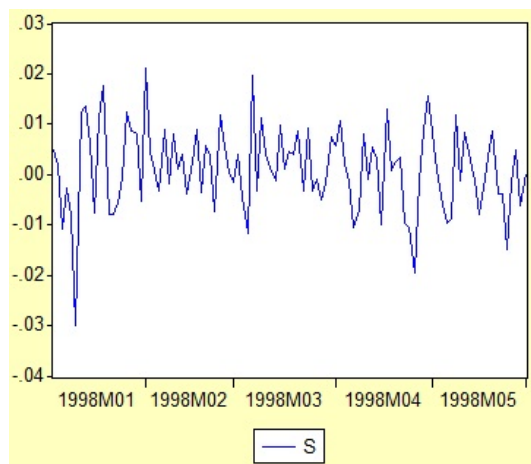
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Obr. 4.11: Test stacionarity diferencií

Aby sme získali stacionárne dáta, zavedieme si novú veličinu $S(t)$, ktorá bude reprezentovať relatívnu zmenu pôvodných dát, čiže ju definujeme:

$$S(t) = \log\left(\frac{Sap(t)}{Sap(t-1)}\right) \quad (4.2)$$

Takto upravené dáta si zobrazíme na Obr. 4.12:



Obr. 4.12: Relatívna zmena vývoja indexu S&P500

Pomocou korelogramu a signifikantnosti parametrov dostaneme pre vývoj $S(t)$ ARMA model na Obr. 4.13:

Dependent Variable: S
Method: Least Squares
Date: 04/21/11 Time: 21:14
Sample: 1/07/1998 6/01/1998
Included observations: 100
Convergence achieved after 28 iterations
Backcast: 1/05/1998 1/06/1998

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.001411	0.000539	2.618995	0.0103
AR(1)	1.530167	0.069432	22.03822	0.0000
AR(2)	-0.859949	0.055990	-15.35910	0.0000
MA(1)	-1.655652	0.062451	-26.51121	0.0000
MA(2)	0.886502	0.068694	12.90508	0.0000

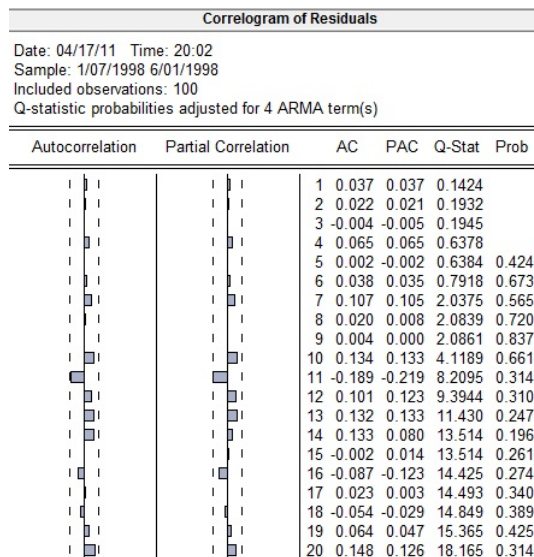
R-squared	0.159628	Mean dependent var	0.001211
Adjusted R-squared	0.124244	S.D. dependent var	0.008372
S.E. of regression	0.007835	Akaike info criterion	-6.811847
Sum squared resid	0.005831	Schwarz criterion	-6.681588
Log likelihood	345.5923	F-statistic	4.511290
Durbin-Watson stat	1.913748	Prob(F-statistic)	0.002218

Inverted AR Roots	.77- .52i	.77+ .52i
Inverted MA Roots	.83+ .45i	.83- .45i

Obr. 4.13: ARMA model pre $S(t)$

Vhodnosť modelu otestujeme Q-štatistikou. Nulová hypotéza je, že autokorelácia je nulová, čiže všetky p-value by mali byť viac ako 5%. Na nasledujúcich obrázkoch (Obr. 4.14, Obr. 4.15) vidíme, že táto podmienka je splnená aj pre

reziduá, aj pre mocniny reziduí. Zostáva nám overiť stacionaritu a invertovateľnosť modelu, ktorá sa podľa očakávania potvrdí (Obr. 4.16).



Obr. 4.14: Korelogram reziduí pre ARMA model

Correlogram of Residuals Squared					
Date: 04/17/11 Time: 19:57					
Sample: 1/07/1998 6/01/1998					
Included observations: 100					
Q-statistic probabilities adjusted for 4 ARMA term(s)					
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.027	0.027	0.0765	
		2 -0.074	-0.075	0.6435	
		3 -0.085	-0.081	1.4020	
		4 0.082	0.082	2.1223	
		5 -0.109	-0.128	3.4005	0.065
		6 0.115	0.133	4.8407	0.089
		7 0.059	0.047	5.2267	0.156
		8 -0.091	-0.111	6.1546	0.188
		9 0.030	0.098	6.2562	0.282
		10 -0.093	-0.154	7.2309	0.300
		11 0.108	0.149	8.5706	0.285
		12 -0.085	-0.107	9.4072	0.309
		13 -0.019	-0.063	9.4483	0.397
		14 -0.019	0.076	9.4902	0.486
		15 0.158	0.061	12.487	0.328
		16 -0.017	0.041	12.521	0.405
		17 -0.084	-0.104	13.383	0.419
		18 -0.112	-0.120	14.949	0.382
		19 -0.024	0.028	15.024	0.450
		20 0.055	0.003	15.406	0.495

Obr. 4.15: Korelogram mocnín reziduí pre ARMA model

Inverse Roots of AR/MA Polynomial(s)
Specification: S C AR(1) AR(2) MA(1) MA(2)
Date: 04/21/11 Time: 21:16
Sample: 1/07/1998 6/01/1998
Included observations: 100

AR Root(s)	Modulus	Cycle
0.765084 ± 0.524020i	0.927335	10.46270

No root lies outside the unit circle.
ARMA model is stationary.

MA Root(s)	Modulus	Cycle
0.827826 ± 0.448560i	0.941542	12.65326

No root lies outside the unit circle.
ARMA model is invertible.

Obr. 4.16: Test ARMA modelu

Výsledný model pre $S(t)$ je teda ARMA(2,2), pričom jeho rovnicový tvar je:

$$S_t = 0,001411 + u_t$$

$$u_t = 1,530167u_{t-1} - 0,859949u_{t-2} + \epsilon_t - 1,655652\epsilon_{t-1} + 0,886502\epsilon_{t-2}$$

$$(1 - 1,530167U + 0,859949U^2)u_t = (1 - 1,655652U + 0,886502U^2)\epsilon_t$$

$$(1 - 1,530167U + 0,859949U^2)(S_t - 0,001411) = (1 - 1,655652U + 0,886502U^2)\epsilon_t$$

$$S_t - 1,530167S_{t-1} + 0,859949S_{t-2} - c = \epsilon_t - 1,655652\epsilon_{t-1} + 0,886502\epsilon_{t-2}$$

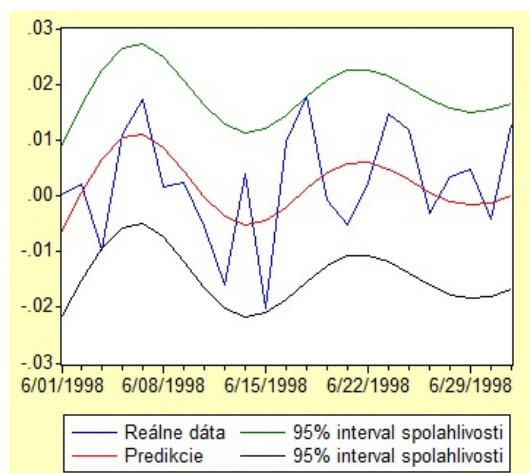
$$\text{kde } c = \frac{0,001411}{1 - 1,530167 + 0,859949}$$

$$S_t =$$

$$0,0042785 + 1,530167S_{t-1} - 0,859949S_{t-2} + \epsilon_t - 1,655652\epsilon_{t-1} + 0,886502\epsilon_{t-2}$$

$$\mathbf{S_t = 0,004 + 1,53S_{t-1} - 0,86S_{t-2} + \epsilon_t - 1,66\epsilon_{t-1} + 0,89\epsilon_{t-2}}$$

Tento model teraz vezmeme, a použijeme ho na predikovanie vývoja $S(t)$ v období 1.6.1998 až 1.7.1998.



Obr. 4.17: Predikcie pre index S&P500 a reálne hodnoty

Na Obr. 4.17 vidíme, že predikcie dobre popisujú reálne dáta a reálny vývoj $S(t)$ celý leží v 95% intervale spoľahlivosti predikcií, takže sme skutočne zvolili správny ARMA model.

Rovnakým postupom spracujeme aj zostávajúce dva indexy, pre zachovanie prehľadnosti si k nim zobrazíme už iba výsledný ARMA model a jeho rovnicový tvar.

Dow Jones Industrial Average

Dependent Variable: DJ
Method: Least Squares
Date: 04/21/11 Time: 21:57
Sample (adjusted): 1/12/1998 6/01/1998
Included observations: 97 after adjustments
Convergence achieved after 14 iterations
Backcast: 1/08/1998 1/09/1998

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.354821	0.056411	6.289988	0.0000
AR(2)	-0.722930	0.056194	-12.86493	0.0000
MA(1)	-0.258258	0.010139	-25.47175	0.0000
MA(2)	0.973960	0.011249	86.57871	0.0000
R-squared	0.198609	Mean dependent var		0.001680
Adjusted R-squared	0.172757	S.D. dependent var		0.008008
S.E. of regression	0.007284	Akaike info criterion		-6.965996
Sum squared resid	0.004934	Schwarz criterion		-6.859822
Log likelihood	341.8508	Durbin-Watson stat		2.133688
Inverted AR Roots	.18+ .83i	.18- .83i		
Inverted MA Roots	.13+ .98i	.13- .98i		

Obr. 4.18: ARMA model pre DJ(t)

Rovnicový tvar modelu: $DJ_t = 0,35DJ_{t-1} - 0,72DJ_{t-1} + \epsilon_t - 0,26\epsilon_{t-1} + 0,97\epsilon_{t-2}$

Nasdaq Composite

Dependent Variable: NC
Method: Least Squares
Date: 04/21/11 Time: 22:05
Sample (adjusted): 1/12/1998 6/01/1998
Included observations: 97 after adjustments
Convergence achieved after 51 iterations
Backcast: 1/08/1998 1/09/1998

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.324776	0.068528	4.739345	0.0000
AR(2)	-0.699050	0.074962	-9.325333	0.0000
MA(1)	-0.296666	0.022423	-13.23042	0.0000
MA(2)	0.953414	0.028270	33.72530	0.0000
R-squared	0.132881	Mean dependent var		0.001548
Adjusted R-squared	0.104910	S.D. dependent var		0.009887
S.E. of regression	0.009354	Akaike info criterion		-6.465694
Sum squared resid	0.008137	Schwarz criterion		-6.359521
Log likelihood	317.5862	Durbin-Watson stat		1.995152
Inverted AR Roots	.16+ .82i	.16- .82i		
Inverted MA Roots	.15+ .97i	.15- .97i		

Obr. 4.19: ARMA model pre NC(t)

Rovnicový tvar modelu: $NC_t = 0,32NC_{t-1} - 0,7NC_{t-1} + \epsilon_t - 0,3\epsilon_{t-1} + 0,95\epsilon_{t-2}$

4.2.2 Veterné dáta

Pristúpime k práci s veternými dátami. Obdobným postupom otestujeme 10 časových radov turbulencií pomocou Augmented Dickey- Fuller testu stacionarity. V rámci zachovania prehľadnosti uvedieme už len výslednú tabuľku s p-value pre každý štát zvlášť na Obr. 4.20.

Unit Root test			
Štát	p- value	Štát	p- value
Alabama	21.35 %	Mississippi	6.82 %
Denver	40.13 %	North Carolina	32.5 %
Georgia	30.07 %	Tennessee	32.72 %
Kansas	23.95 %	Texas	16.76 %
Louisiana	14.96 %	West Virginia	37.54 %

Obr. 4.20: Test jednotkového koreňa pre turbulentné dáta

Pre prvé diferencie vychádza pre všetky štáty test rovný 0, preto vo všetkých 10-tich prípadoch budeme pracovať s diferencovanými dátami. Zavedieme si podobne ako pri indexoch novú veličinu pre každý štát a definujeme ju ako relatívnu zmenu pôvodných dát, čiže ju definujeme (napríklad pre Alabamu):

$$AL(t) = \log\left(\frac{Alabama(t)}{Alabama(t-1)}\right) \quad (4.3)$$

Ďalej budeme pracovať s týmito novými premennými. Pre každú pomocou korelogramu a signifikantnosti parametrov zostavíme ARMA model, ktorý otestujeme Q-štatistikou a testom na stacionaritu a invertovateľnosť. Pre zachovanie prehľadnosti si uvedieme pre každú premennú už iba výsledný model a rovnicový tvar.

Alabama

Dependent Variable: ALA
 Method: Least Squares
 Date: 04/19/11 Time: 23:28
 Sample (adjusted): 1/03/1998 6/01/1998
 Included observations: 150 after adjustments
 Convergence achieved after 12 iterations
 Backcast: 1/02/1998

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.247592	0.086512	2.861937	0.0048
MA(1)	-0.971276	0.027784	-34.95755	0.0000
R-squared	0.357959	Mean dependent var		-0.001533
Adjusted R-squared	0.353621	S.D. dependent var		0.541587
S.E. of regression	0.435424	Akaike info criterion		1.188249
Sum squared resid	28.05987	Schwarz criterion		1.228391
Log likelihood	-87.11867	Durbin-Watson stat		1.928068
Inverted AR Roots	.25			
Inverted MA Roots	.97			

Obr. 4.21: ARMA model pre AL(t)

Rovnicový tvar modelu: $\mathbf{A}I_t = \mathbf{0},25\mathbf{A}I_{t-1} + \epsilon_t - \mathbf{0},97\epsilon_{t-1}$

Denver

Dependent Variable: DE
 Method: Least Squares
 Date: 04/19/11 Time: 23:34
 Sample (adjusted): 1/03/1998 6/01/1998
 Included observations: 150 after adjustments
 Convergence achieved after 12 iterations
 Backcast: 1/02/1998

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.002677	0.000842	3.179617	0.0018
AR(1)	0.246560	0.079749	3.091703	0.0024
MA(1)	-0.982925	0.012354	-79.56013	0.0000
R-squared	0.371155	Mean dependent var		0.000376
Adjusted R-squared	0.362599	S.D. dependent var		0.325493
S.E. of regression	0.259865	Akaike info criterion		0.162491
Sum squared resid	9.926912	Schwarz criterion		0.222704
Log likelihood	-9.186839	F-statistic		43.38093
Durbin-Watson stat	1.985584	Prob(F-statistic)		0.000000
Inverted AR Roots	.25			
Inverted MA Roots	.98			

Obr. 4.22: ARMA model pre De(t)

Rovnicový tvar modelu: $\mathbf{D}e_t = \mathbf{0},0036 + \mathbf{0},25\mathbf{D}e_{t-1} + \epsilon_t - \mathbf{0},98\epsilon_{t-1}$

Georgia

Dependent Variable: GEO
 Method: Least Squares
 Date: 04/19/11 Time: 23:37
 Sample (adjusted): 1/03/1998 6/01/1998
 Included observations: 150 after adjustments
 Convergence achieved after 11 iterations
 Backcast: 1/02/1998

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.263877	0.087697	3.008968	0.0031
MA(1)	-0.963248	0.029580	-32.56362	0.0000
R-squared	0.344858	Mean dependent var		0.001194
Adjusted R-squared	0.340431	S.D. dependent var		0.492582
S.E. of regression	0.400045	Akaike info criterion		1.018762
Sum squared resid	23.68529	Schwarz criterion		1.058904
Log likelihood	-74.40718	Durbin-Watson stat		1.957776
Inverted AR Roots	.26			
Inverted MA Roots	.96			

Obr. 4.23: ARMA model pre Geo(t)

Rovnicový tvar modelu: $\mathbf{Geo}_t = 0,26\mathbf{Geo}_{t-1} + \epsilon_t - 0,96\epsilon_{t-1}$

Kansas

Dependent Variable: KA
 Method: Least Squares
 Date: 04/19/11 Time: 23:45
 Sample (adjusted): 1/02/1998 6/01/1998
 Included observations: 151 after adjustments
 Convergence achieved after 13 iterations
 Backcast: 1/01/1998

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.965342	0.021147	-45.64953	0.0000
R-squared	0.428595	Mean dependent var		-0.003610
Adjusted R-squared	0.428595	S.D. dependent var		0.714738
S.E. of regression	0.540280	Akaike info criterion		1.613141
Sum squared resid	43.78532	Schwarz criterion		1.633123
Log likelihood	-120.7921	Durbin-Watson stat		1.811916
Inverted MA Roots	.97			

Obr. 4.24: ARMA model pre Ka(t)

Rovnicový tvar modelu: $\mathbf{Ka}_t = \epsilon_t - 0,97\epsilon_{t-1}$

Louisiana

Dependent Variable: LU
 Method: Least Squares
 Date: 04/19/11 Time: 23:53
 Sample (adjusted): 1/04/1998 6/01/1998
 Included observations: 149 after adjustments
 Convergence achieved after 7 iterations
 Backcast: 1/03/1998

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.305236	0.085783	3.558222	0.0005
AR(2)	-0.214566	0.084783	-2.530780	0.0124
MA(1)	-0.930178	0.036363	-25.58019	0.0000
R-squared	0.363464	Mean dependent var		-0.004041
Adjusted R-squared	0.354744	S.D. dependent var		0.494132
S.E. of regression	0.396926	Akaike info criterion		1.009794
Sum squared resid	23.00232	Schwarz criterion		1.070276
Log likelihood	-72.22966	Durbin-Watson stat		2.024020
Inverted AR Roots	.15+ .44i	.15- .44i		
Inverted MA Roots	.93			

Obr. 4.25: ARMA model pre $Lu(t)$

Rovnicový tvar modelu: $Lu_t = 0,31Lu_{t-1} - 0,21Lu_{t-1} + \epsilon_t - 0,93\epsilon_{t-1}$

Mississippi

Dependent Variable: SIP
 Method: Least Squares
 Date: 04/19/11 Time: 23:57
 Sample (adjusted): 1/02/1998 6/01/1998
 Included observations: 151 after adjustments
 Convergence achieved after 8 iterations
 Backcast: 12/31/1997 1/01/1998

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.527957	0.076018	-6.945146	0.0000
MA(2)	-0.383719	0.076968	-4.985439	0.0000
R-squared	0.308712	Mean dependent var		-0.002133
Adjusted R-squared	0.304073	S.D. dependent var		0.550482
S.E. of regression	0.459225	Akaike info criterion		1.294602
Sum squared resid	31.42219	Schwarz criterion		1.334566
Log likelihood	-95.74242	Durbin-Watson stat		2.014655
Inverted MA Roots	.94	-.41		

Obr. 4.26: ARMA model pre $Mi(t)$

Rovnicový tvar modelu: $Mi_t = \epsilon_t - 0,58\epsilon_{t-1} - 0,38\epsilon_{t-2}$

North Carolina

Dependent Variable: NC
 Method: Least Squares
 Date: 04/20/11 Time: 00:02
 Sample (adjusted): 1/04/1998 6/01/1998
 Included observations: 149 after adjustments
 Convergence achieved after 51 iterations
 Backcast: 1/01/1998 1/03/1998

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-1.319324	0.087124	-15.14311	0.0000
AR(2)	-0.661133	0.086203	-7.669460	0.0000
MA(1)	0.658821	0.061938	10.63675	0.0000
MA(2)	-0.568637	0.060477	-9.402474	0.0000
MA(3)	-0.853141	0.045671	-18.68006	0.0000
R-squared	0.424202	Mean dependent var		0.003428
Adjusted R-squared	0.408208	S.D. dependent var		0.601185
S.E. of regression	0.462480	Akaike info criterion		1.328554
Sum squared resid	30.79982	Schwarz criterion		1.429357
Log likelihood	-93.97726	Durbin-Watson stat		1.985438
Inverted AR Roots	-.66-.48i	-.66+.48i		
Inverted MA Roots	.93	-.80-.53i	-.80+.53i	

Obr. 4.27: ARMA model pre Nc(t)

Rovnicový tvar modelu: $Nc_t = -1,32Nc_{t-1} - 0,66Nc_{t-2} + \epsilon_t + 0,66\epsilon_{t-1} - 0,57\epsilon_{t-2} - 0,85\epsilon_{t-3}$

Tennessee

Dependent Variable: TE
 Method: Least Squares
 Date: 04/20/11 Time: 15:13
 Sample (adjusted): 1/04/1998 6/01/1998
 Included observations: 149 after adjustments
 Convergence achieved after 11 iterations
 Backcast: 1/03/1998

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.338038	0.090432	3.738039	0.0003
AR(2)	-0.218845	0.090364	-2.421804	0.0167
MA(1)	-0.889472	0.046066	-19.30869	0.0000
R-squared	0.314940	Mean dependent var		0.002941
Adjusted R-squared	0.305555	S.D. dependent var		0.472587
S.E. of regression	0.393822	Akaike info criterion		0.994094
Sum squared resid	22.64401	Schwarz criterion		1.054577
Log likelihood	-71.06003	Durbin-Watson stat		2.010352
Inverted AR Roots	.17+.44i	.17-.44i		
Inverted MA Roots	.89			

Obr. 4.28: ARMA model pre Ten(t)

Rovnicový tvar modelu: $Ten_t = 0,39Ten_{t-1} - 0,22Ten_{t-2} + \epsilon_t - 0,89\epsilon_{t-1}$

Texas

Dependent Variable: TEX
 Method: Least Squares
 Date: 04/20/11 Time: 15:16
 Sample (adjusted): 1/02/1998 6/01/1998
 Included observations: 151 after adjustments
 Convergence achieved after 9 iterations
 Backcast: 12/31/1997 1/01/1998

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.543823	0.072847	-7.465256	0.0000
MA(2)	-0.439404	0.073389	-5.987346	0.0000
R-squared	0.340359	Mean dependent var		0.001299
Adjusted R-squared	0.335932	S.D. dependent var		0.451349
S.E. of regression	0.367806	Akaike info criterion		0.850635
Sum squared resid	20.15693	Schwarz criterion		0.890599
Log likelihood	-62.22297	Durbin-Watson stat		2.013920
Inverted MA Roots	.99	- .44		

Obr. 4.29: ARMA model pre Tex(t)

Rovnicový tvar modelu: $\text{Tex}_t = \epsilon_t - 0,54\epsilon_{t-1} - 0,44\epsilon_{t-2}$

West Virginia

Dependent Variable: WV
 Method: Least Squares
 Date: 04/20/11 Time: 00:10
 Sample (adjusted): 1/04/1998 6/01/1998
 Included observations: 149 after adjustments
 Convergence achieved after 9 iterations
 Backcast: 1/03/1998

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.462581	0.085711	5.396996	0.0000
AR(2)	-0.229266	0.085483	-2.682021	0.0082
MA(1)	-0.920410	0.037864	-24.30855	0.0000
R-squared	0.298650	Mean dependent var		-0.004652
Adjusted R-squared	0.289042	S.D. dependent var		0.496426
S.E. of regression	0.418578	Akaike info criterion		1.116022
Sum squared resid	25.58030	Schwarz criterion		1.176504
Log likelihood	-80.14363	Durbin-Watson stat		2.046670
Inverted AR Roots	.23+ .42i	.23- .42i		
Inverted MA Roots	.92			

Obr. 4.30: ARMA model pre Wv(t)

Rovnicový tvar modelu: $\mathbf{Wv}_t = 0,46\mathbf{Wv}_{t-1} - 0,23\mathbf{Wv}_{t-2} + \epsilon_t - 0,92\epsilon_{t-1}$

4.2.3 Výsledné porovnania

V tejto časti sa pokúsime porovnať výsledky získané v praktickej časti. Výraznou spoločnou črtou indexov a rýchlosti vetra je nestacionarita dát. Tak ako indexy aj všetkých desať veterných časových radov bolo treba diferencovať, aby sme dostali stacionárne dáta, z ktorých sa dá vytvoriť ARMA model. V nasledujúcej tabuľke (Obr. 4.31) si prehľadne zobrazíme výskyt AR a MA koeficientov v jednotlivých dátach:

	C	AR(1)	AR(2)	MA(1)	MA(2)	MA(3)
Alabama		0,25		-0,97		
Denver	0,0036	0,25		-0,98		
Georgia		0,26		-0,96		
Kansas				-0,97		
Louisiana		0,31	-0,21	-0,93		
Mississippi				-0,58	-0,38	
North Carolina		-1,32	-0,66	-0,66	-0,57	-0,85
Tennessee		0,39	-0,22	-0,89		
Texas				-0,54	-0,44	
West Virginia		0,46	-0,23	-0,92		
S&P500	0,004	1,53	-0,86	-1,66	0,89	
Dow Jones		0,35	-0,72	-0,25	0,97	
Nasdaq		0,32	-0,7	-0,3	0,95	
	2	10	7	13	6	1

Obr. 4.31: Výskyt ARMA koeficientov v modeloch

Z tabuľky je zrejmé, že všetky veterné dáta aj indexy závisia na MA(1) člene. Rovnako významne zastúpený je aj AR(1) člen, ktorý sa vyskytuje v 10 z 13-tich prípadoch. Členy AR(2) a MA(2) majú približne 50% výskyt, pričom sú zastúpené vo všetkých indexoch. Konštanta je signifikantná iba pri jednom indexe a jednom vetre, navyše jej hodnota je v oboch prípadoch veľmi nízka a preto ju môžeme považovať za štatisticky nevýznamnú.

Z rovnicových tvarov vidíme, že koeficient pri MA(1) člene sa pri vetre pohybuje v intervale (-0.89, -0.98) okrem troch prípadov, keď je ovplyvnený koeficientami MA vyššieho rádu. Podobne koeficient pri AR(1) sa v turbulenciách pohybuje v intervale (0.25, 0.46) okrem jedného outliera. Porovnaním s indexami v dvoch prípadoch koeficient pri AR(1) člene patrí do intervalu pre vietor. Koeficienty pri MA(1) člene sú však úplne mimo intervalu pre vietor.

Záver

Túžba investorov predvídať vývoj finančného sektora, predovšetkým finančných trhov je dostatočne silná, aby motivovala ľudí pokúšať sa nájsť teóriu, ktorá by to dokázala. Takáto schopnosť by umožňovala nielen vysoký finančný zisk, ale bola by tiež výborný nástroj na regulovanie trhu samotného a prostriedkov na ňom obchodovaných, aby sa predišlo depresiám, veľkým poklesom a finančným krízam. Napriek snahe však zatiaľ takáto teória neexistuje. Rozvíjajú sa však disciplíny, ktoré sa pokúšajú novým pohľadom priniesť nové poznatky, ktoré by sa dali prakticky využiť. Jednou z takýchto disciplín je ekonofyzika. V tejto práci sme sa pokúsili priblížiť jednu z jej oblastí - konkrétne porovnanie finančných indexov a turbulencií. Keďže vysokofrekvenčné dáta, či už pre turbulenciu, alebo pre finančné indexy je takmer nemožné získať, museli sme v danej časti práce popísať už len výsledky z vedeckých článkov s podobným zameraním. Z ich výsledkov vyplýva istá súvislosť daných oblastí, ale objavili sa aj rozdielnosti, takže nebolo jednoznačne možné potvrdiť ich súvislosť. V praktickej časti sme sa následne pokúsili aplikovať novú myšlienku porovnania vývoja finančných indexov s priemernou dennou rýchlosťou vetra v niektorých štátoch USA. Vietor v nami použitých dátach nemá vždy turbulentný charakter a preto sa odlišuje od pokusov uskutočňovaných v tejto oblasti. Zostavením ARMA modelov sme sa snažili získať dostatočný aparát, ktorý popisuje vývoj veterných dát i finančných indexov v čase. Následne sme porovnali stavbu týchto modelov, či už medzi sebou a našli sme niekoľko súvislostí. Napriek zisteniu niekoľkých paralel sa však ani nám nepodarilo jednoznačne potvrdiť súvislosť oboch oblastí. Domnievame sa, že významným krokom v tejto oblasti by bolo vyriešenie Navier - Stokesových rovníc, ktoré by upresnili vlastnosti turbulentného prúdenia a pomohli by tak k jeho lepšiemu porozumeniu. Napriek tomu, že sa nám ne-

podarilo nájsť jednoznačnú súvislosť, predpokladáme stále intenzívnejší rozvoj takýchto oblastí so zapájaním nových myšlienok, pretože motivácia je značná, a len neustálym výskumom a túžbou po poznaní môže ľudstvo napredovať.

Literatúra

- [1] Mantegna R. N., Stanley J. L., 2004 *An Introduction to Econophysics*
- [2] Ghashghaie S., 2004 *Turbulent Cascades in Foreign Exchange Markets*
- [3] Horvát Denis, 2006 *Ekonofyzika*
Dostupná na internete:<http://158.197.33.91/~horvath/ECONO/VYUKA_EKONOFYZIKA/econphys.ps>
- [4] Brezová Martina, 2010 *Ekonomické prostredie ako termodynamika*
Dostupná na internete:<<http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/>>
- [5] Hamilton J. D. 1994 *Time Series Analysis*

- [6] Rejnuš Oldřich, 2004 *Úvod do teorie finančního trhu*
- [7] Tennekes H., Lumley J. L., 1972 *A first course of turbulence*
- [8] Molnár Vojtech, 2009 *Počítačová mechanika tekutín*
Dostupná na internete:<<http://www.cfd.sk/cfd-book/masterhtml.html>>
- [9] Mantegna R. N., Stanley J. L., 1997 *Stock market dynamic and turbulence: parallel analysis of fluctuation phenomena*
- [10] Zubáčová Zdenka, 2011 *Spracovanie predikčných modelov pre prognózy spotreby zemného plynu v predajnom portfóliu SPP na slovenskom území*
- [11] Štekláčová Lucia, 2003 *Meranie produkčnej medzery SR*

[12] Vojteková Mária *Operačná analýza 2*

Dostupná na internete: <<http://fpedas.uniza.sk/~vojtek/01MarkovoveRet.pdf>>

[13] <<http://www.euroekonom.sk>>

[14] <<http://www.wikipedia.org/>>