UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

CVIČENIA Z MATICOVÉHO POČTU 2

Diplomová práca

Zuzana Plšková

9.1.9 Aplikovaná matematika
Ekonomická a finančná matematika
Kód práce: b8c3a64e-16ed-4257-b56e-e6c92ecb2981

Vedúci práce: RNDr. Dušan Krajčovič, CSc

BRATISLAVA 2011

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Bc. Zuzana Plšková
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor:	9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	diplomová
Jazyk záverečnej práce:	slovenský

Názov : Cvičenia z Maticového počtu 2

Cieľ : Cieľom tejto diplomovej práce je vytvoriť praktickú príručku pre študentov k predmetu Maticový počet II. Ku každej téme je daný stručný prehľad učiva, za ktorým nasledujú riešené typové príklady, ktoré majú za cieľ lepšie pochopiť a osvojiť si základné pojmy. Okrem toho je v práci dostatok ďalších príkladov pre samostatnú prácu.

Vedúci : RNDr. Dušan Krajčovič, CSc.

Dátum zadania: 19.12.2008

Dátum schválenia: 07.04.2011

....
prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
garant študijného programu

Plšková Zuzana
....
študent

....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

D. Krajčovič
....
vedúci práce

Poďakovanie

Týmto by som chcela poďakovať vedúcemu mojej diplomovej práce, RNDr. Dušanovi Krajčovičovi, CSc., za cenné pripomienky technického i štylistického charakteru a za jeho veľkú trpezlivosť pri odbornom vedení práce.

Čestné prehlásenie

Týmto prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s využitím svojich poznatkov a s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave, 1.augusta 2011

Zuzana Plšková

Abstrakt

Táto práca obsahuje stručnú teóriu, riešené príklady a príklady na samostatné precvičenie k predmetu Maticový počet II. Práca sa venuje dvom tematickým celkom, ktoré sú obsahom letného semestra. Mala by byť pomôckou pre študentov, ktorí si chcú zlepšiť svoje vedomosti a poznatky v oblasti maticového počtu.

Abstract

This diploma thesis contains a concise theory, solved exercises and exercises to practice the subject Matrix calculation II. This thesis describes two thematic parts which are taught in summer term. It should help students who are willing to improve their knowledge and skills in the field of matrix calculation.

OBSAH

„Matematika je veda o najzložitejších abstrakciách, k akým môže ľudský um dospieť.“

-Alfred North Whitehead-

ÚVOD

Táto práca je rozdelená na 2 kapitoly, z ktorých sa každá venuje jednému tematickému celku. Práca obsahuje príklady na Jordanov normálny tvar, singulárny rozklad a pseudoinverzné matice. Téma Jordanov normálny tvar zasahuje hlbšie do problematiky a preto je mu v tejto práci venovaná väčšia časť. Práca je určená predovšetkým študentom druhého ročníka letného semestra predmetu Maticový počet II, študijného programu Ekonomická a finančná matematika. Na úspešné riešenie príkladov sa predpokladá znalosť základov lineárnej algebry a geometrie z prvého ročníka a problematiky zahrnutej v predmete Maticový počet I. Táto učebnica je použiteľná v plnom rozsahu len, ak čitateľ navštevuje predmet Maticový počet II, kde sa dozvie všetky teoretické podrobnosti potrebné na úspešné zvládnutie všetkých príkladov.

Na začiatku každej kapitoly je stručné zhrnutie teórie a metód výpočtov, po ktorej zväčša nasleduje niekoľko vzorových riešení. Na konci každej kapitoly je uvedených niekoľko príkladov na samostatné precvičenie. Každá kapitola obsahuje dohromady približne 30 príkladov numerického a dôkazového charakteru. Ku každému vzorovo neriešenému príkladu sa na konci práce, v kapitole 3. Riešenia, návody a poznámky, nachádza riešenie príkladu, alebo stručný návod, ako príklad riešiť, príp. tvrdenie dokázať. Pri niektorých typoch príkladov, kde riešenie nie je jednoznačné, vám môže vyjsť iný výsledok. To však neznamená, že je nesprávny.

Príklady pre účely tejto práce boli na žiadosť zadávateľa práce čerpané najmä z uvedených zbierok

SMIRNOV, J.M.: Sbornik zadac po analyticeskoj geometrii a linejnoj algebre, Moskva, Logos, 2005;

STRANG, G. : Linear algebra and its applications, Boston, Thomson Learning, 1988;

HARVILLE, D.A. : Matrix algebra exercises and solution, New York, Springer-Verlag, 2001;

a z ďalších internetových zdrojov. Pre výučbové potreby neuvádzam zdroj každého jedného príkladu, pretože by to zbierku spravilo zbytočne neprehľadnou.

Dúfam, že Vám práca pomôže pri učení sa jednotlivých tém, ako aj príklady na ich precvičenie.

"Matematické úlohy môžeme rozdeliť na triviálne a doteraz nevyriešené."
-Aleš Pultr-

KAPITOLA 1

JORDANOV NORMÁLNY TVAR MATICE

1.1. Vlastné čísla a vlastné vektory matice

Nech A je štvorcová matica rádu n, ktorá je maticovou reprezentáciou nejakého lineárneho zobrazenia.

Definícia 1.1: Polynóm n-tého rádu

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

nazývame **charakteristický polynóm** matice A a jeho korene, ktoré môžu byť buď reálne alebo komplexné, nazývame charakteristickými, alebo vlastnými číslami matice A.

Definícia 1.2: Nenulový vektor h, pre ktorý platí

$$Ah = \lambda h,$$

kde λ je vlastné číslo matice A, nazývame **vlastným vektorom** matice A.

Definícia 1.3: Algebraickou násobnosťou $\boldsymbol{m_j}$ vlastného čísla λ_j nazývame násobnosť koreňa λ_j v charakteristickom polynóme.

Definícia 1.4: Geometrickou násobnosťou vlastného čísla nazývame dimenziu podpriestoru vlastných vektoroch prislúchajúcich k danému vlastnému číslu.

Definícia 1.5: Budeme hovoriť, že polynóm $p(x)$ anuluje štvorcovú maticu A, ak $p(A) = 0$ (0-nulová matica). Potom normovaný (tj. taký polynóm, ktorého koeficient pri najväčšej mocnine x je rovný 1) polynóm minimálneho stupňa, ktorý anuluje maticu A, budeme nazývať **minimálny polynóm** matice A a budeme ho označovať $\mu(x)$.

Definícia 1.6: Nech h_1 je vlastný vektor matice A. To znamená, že platí rovnica

$$Ah_1 = \lambda h_1$$

Vektor h_1^1, ktorý je riešením rovnice

$$(A - \lambda I)h_1^1 = h_1,$$

nazývame pridruženým vektorom 1.rádu. Vektor h_1^2, ktorý je riešením rovnice

$$(A - \lambda I)h_1^2 = h_1^1,$$

nazývame pridruženým vektorom 2.rádu, atď... Vektor h_1^n, ktorý je riešením rovnice

$$(A - \lambda I)h_1^n = h_1^{n-1},$$

nazývame pridruženým vektorom n −tého rádu.
Všimnite si, že platí

$$(A - \lambda I)^k h_k = h_1.$$

Algoritmus nájdenia vlastných čísel a vlastných vektorov

1. Nájsť vlastné čísla matice :
   a) napísať charakteristickú rovnicu :

$$det(A - \lambda I) = 0,$$

   b) nájsť jej korene $\lambda_j, j = 1, \ldots, n$ a ich algebraické násobnosti.

2. Nájsť vlastné vektory matice
   a) pre všetky λ_j vyriešiť rovnicu :

$$\left(A - \lambda_j I\right)h = 0,$$

   b) takto vypočítaný vektor h bude vlastným vektorom matice A zodpovedajúci vlastnému číslu λ_j.

Príklad 1: Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Nájdeme charakteristický polynóm a riešime charakteristickú rovnicu

$$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 = \lambda^2(2 - \lambda) = 0.$$

Dostaneme dve vlastné čísla $\lambda_1 = 0$ s algebraickou násobnosťou $m_1 = 2$ a $\lambda_2 = 2$ s algebraickou násobnosťou $m_2 = 1$. Vypočítame vlastné vektory pre $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & -1 \\ 2 & 2-\lambda_1 & 2 \\ 3 & 1 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je zrejmé, že hodnosť matice je rovná 2. Z toho vyplýva, že počet vlastných vektorov pre $\lambda_1 = 0$ je rovný $n - hod(A - \lambda_1 I) = 1$. Dostaneme jeden vlastný vektor a jeden pridružený

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathrm{h}_1^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analogicky nájdeme vlastný vektor pre $\lambda_2 = 2$. V tomto prípade to bude vektor

$$h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

1.2. Jordanova bunka a Jordanova matica (Jordanov normálny tvar)

Definícia 1.7: Jordanovou bunkou rádu k matice A, ktorá zodpovedá vlastnému číslu λ, nazývame maticu

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & . & . & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Inými slovami, na hlavnej diagonále tejto matice sa nachádza vlastné číslo λ a na diagonále nad ňou sú rozmiestnené jednotky. Všetky ostatné prvky tejto matice sú rovné 0. Nižšie sú uvedené príklady Jordanových buniek prvého, druhého a tretieho rádu :

$$J_1(\lambda) = (\lambda), \qquad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Definícia 1.8: Blokovo diagonálnu maticu, na diagonále ktorej stoja Jordanove bunky, nazývame **Jordanova matica**

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_{k_3}(\lambda_3) & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & . & . & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Príklad 2: Nižšie je uvedená Jordanova matica, ktorá pozostáva z troch Jordanových buniek

- rozmeru 1 zodpovedajúca vlastnému číslu $\lambda_1 = 3$
- rozmeru 2 zodpovedajúca vlastnému číslu $\lambda_1 = 4$
- rozmeru 3 zodpovedajúca vlastnému číslu $\lambda_1 = 5$

$$J = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

□

1.3. Počet a rozmer Jordanových buniek

Nech A je matica, ktorej Jordanov tvar chceme nájsť, λ_j sú vlastné čísla tejto matice. Potom počet Jordanových buniek rádu k, ktoré zodpovedajú vlastnému číslu λ_j, definujeme číslom

$$r^{k-1} - 2.r^k + r^{k+1},$$

kde

$$r^k = hod\left(A - \lambda_j I\right)^k, \qquad r^0 = n\,, \qquad r^{m_j+1} = r^{m_j},$$

kde $k = 1, \dots, m_j$ a m_j je algebraická násobnosť koreňa λ_j.

Príklad 3: Nájdite Jordanov normálny tvar matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Nájdeme počet a rozmer Jordanových buniek zodpovedajúcich každému vlastnému číslu tejto matice. Ako nájsť vlastné čísla sa podrobne rozoberalo v kapitole (1.1). Nech vlastné čísla matice A sú $\lambda_1 = 0$ s algebraickou násobnosťou $m_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$ s algebraickou násobnosťou $m_2 = 2$. Nájdeme počet a rozmer Jordanových buniek zodpovedajúcich vlastnému číslu $\lambda_1 = 0$ s algebraickou násobnosťou $m_1 = 1$.

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je zrejmé, že $hod(A - \lambda_1 I) = 2$ a teda

$$r^1 = r^2 = hod(A - \lambda_1 I)^1 = 2,$$

$$r^0 = n = 3.$$

Z toho vyplýva, že počet Jordanových buniek rádu 1 je rovný

$$r^0 - 2r^1 + r^2 = 3 - 2.2 + 2 = 1.$$

Je jasné, že ďalšie bunky pre toto vlastné číslo neexistujú. To znamená, že pre $\lambda_1 = 0$ s algebraickou násobnosťou $m_1 = 1$ existuje len jediná Jordanova bunka tvaru

$$J_1(0) = (0).$$

Ďalej podobným spôsobom určíme bunky pre druhé vlastné číslo $\lambda_2 = -1$ s algebraickou násobnosťou $m_2 = 2$.

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je jasné, že $hod(A - \lambda_2 I) = 2$ a teda

$$r^1 = hod(A - \lambda_2 I)^1 = 2.$$

Ďalej

$$(A - \lambda_2 I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 6 \\ 2 & -6 & -3 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že $hod(A - \lambda_1 I)^2 = 1$ a teda

$$r^2 = r^3 = hod(A - \lambda_1 I)^2 = 1.$$

Teraz môžeme určiť počet a rozmer Jordanových buniek pre toto vlastné číslo :

- rádu 1: $r^0 - 2r^1 + r^2 = 3 - 2.2 + 1 = 0;$
- rádu 2: $r^1 - 2r^2 + r^3 = 2 - 2.1 + 1 = 1.$

Teda pre $\lambda_2 = -1$ dostaneme jednu bunku rádu 2 :

$$J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Čiže Jordanov normálny tvar danej matice A je

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

1.4. Jordanova báza

Nech matica A má Jordanov normálny tvar J. Budeme hľadať maticu H, pre ktorú platí

$$HJ = AH,$$

kde

$$H = \left(h_{ij}\right)$$

je matica prechodu od pôvodnej bázy $e = (e_1, \dots, e_n)$ k Jordanovej báze $h = (h_1, \dots, h_n)$.

1.4.1 Pridružené vektory

Aby sme našli Jordanovu bázu, je potrebné uskutočniť nasledujúce výpočty pre každú Jordanovu bunku. Všimnime si Jordanovu bunku rádu k zodpovedajúcu vlastnému číslu λ_j. K nej hľadáme vektory Jordanovej bázy

$$h, h^1, h^2, \dots, h^{k-1},$$

kde

h … je vlastný vektor zodpovedajúci vlastnému číslu λ
h^1 … je pridružený vektor 1.rádu
h^2 … je pridružený vektor 2.rádu
...
h^{k-1} … je pridružený vektor $(k-1)$.rádu

Túto postupnosť vektorov nájdeme riešením nasledujúcich systémov

$$\begin{cases} \left(A - \lambda_j I\right)h = 0 \\ \left(A - \lambda_j I\right)h^1 = h \\ \cdots \\ \left(A - \lambda_j I\right)h^{k-1} = h^{k-2} \end{cases}$$

Po vykonaní týchto výpočtov so všetkými Jordanovými bunkami dostaneme vektory, ktoré tvoria Jordanovu bázu

$$h, h^1, h^2, \dots, h^{k-1}, f, f^1, f^2, \dots, f^{l-1}, \dots,$$

kde $h, f, \dots$ sú vlastné vektory. Vektorom $h, h^1, h^2, \dots, h^{k-1}$ zodpovedá Jordanova bunka k $-$teho rádu. Vektorom $f, f^1, f^2, \dots, f^{l-1}$ zodpovedá Jordanova bunka l $-$teho rádu, atď.

Príklad 4: Vrátime sa k príkladu z predchádzajúcej kapitoly (1.3). V tomto príklade sme dostali dve Jordanove bunky

$$J_1(0) = (0),$$
$$J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Najprv si všimnime $J_1(0)$. Pomocou vzťahu (2.7) nájdeme vlastný vektor h zodpovedajúci vlastnému číslu $\lambda_1 = 0$:

$$h = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Je zrejmé, že pridružené vektory k danej Jordanovej bunke neexistujú. Teraz si všimnime druhú Jordanovu bunku $J_2(-1)$. Je zrejmé, že k nej treba nájsť jeden vlastný vektor a jeden pridružený . Ak použijeme vzťahy (2.13), dostaneme nasledujúce vektory

$$f = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ … vlastný vektor zodpovedajúci vlastnému číslu } \lambda_2 = -1$$

$$f^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ … a k nemu pridružený vektor 1.rádu}$$

Takto sme dostali všetky vektory, ktoré tvoria maticu H. Teda matica prechodu k Jordanovej báze bude mať nasledujúci tvar

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jordanova báza je v tomto prípade tvorená stĺpcami matice H. To znamená, že platí

$$HJ = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & -8 & 0 \end{pmatrix} = AH.$$

□

1.4.2 Koreňové podpriestory

Nech má minimálny polynóm matice A tvar

$$\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sú rôzne vlastné čísla matice A.

Definícia 1.9: Koreňovým podpriestorom matice A nazývame lineárny podpriestor

$$N(A - \lambda_i)^{k_i}, \quad i = 1, \dots, s,$$

kde čísla λ_i a k_i sú dané rozkladom minimálneho polynómu $\mu(\lambda)$.

Veta 1.1: Nech A je štvorcová matica rádu n, potom $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ sa dá rozložiť na priamy súčet koreňových podpriesorov

$$\mathbb{R}^n\ (\mathbb{C}^n) = N(A - \lambda_1)^{k_1} \oplus \dots \oplus N(A - \lambda_s)^{k_s}.$$

Lineárne zobrazenie prislúchajúce matici A má potom v báze vytvorenej z báz týchto koreňových podpriestorov špeciálnu blokovo-diagonálnu maticu

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}.$$

1.4.3 Jordanove reťazce

Nech B_i je ohraničenie $A - \lambda_i I$ na koreňový podpriestor $N(A - \lambda_i)^{k_i}$. Nech pre nejaký vektor x platí

$$B_i^j(x) \neq 0 \quad a \quad B^{j+1}(x) = 0.$$

Označme

$$B_i^j(x) = e^0, B_i^{j-1}(x) = e^1, \dots, B_i(x) = e^{j-1}, x = e^j,$$

potom e^0 je vlastným vektorom B_i, pretože platí

$$B_i(e^0) = B_i^{j+1}(x) = 0.$$

Definícia 1.10: Nech pre vektory $e^1, \dots, e^j$ platí

$$B_i(e^1) = e^0, \dots, B_i(e^2) = e^1, \dots, B_i\left(e^j\right) = e^{j-1}.$$

Potom hovoríme, že vektory $e^0, e^1, \dots, e^j$ vytvárajú Jordanov reťazec s počiatočným vektorom e^0.

Poznámka: Vektory $e^1, \dots, e^j$, ako vidno, sú pridružené vektory k vlastnému vektoru e^0.

Otázkou zostáva, ako vybrať vlastné vektory v prípade, že vlastný podpriestor $V(\lambda)$ všetkých vlastných vektorov, ktoré prislúchajú k tomu istému vlastnému číslu λ, má dimenziu väčšiu ako 1.

1.4.4 Konštrukcia Jordanovej bázy (algoritmus I)

Predpokladajme, že poznáme korene charakteristického polynómu matice A a ich algebraické násobnosti. Nech λ je niektoré vlastné číslo matice A. Zostavíme maticu $A - \lambda I$. Ak $h(A - \lambda I) > n - m$, kde m je algebraická násobnosť koreňa λ, budeme postupne vytvárať matice $(A - \lambda I)^l$, až kým nenájdeme takú mocninu k, pre ktorú platí

$$(A - \lambda I)^k = n - m.$$

Toto číslo k sa rovná násobnosti koreňa k v minimálnom polynóme $\mu(A)$ matice A. Potom nájdeme prienik

$$S(A - \lambda I)^{k-1} \cap V(\lambda),$$

kde $V(\lambda)$ je množina (podpriestor) vlastných vektorov matice A prislúchajúcich vlastnému číslu λ. Nájdeme maximálnu lineárne nezávislú množinu vektorov z $Im(A - \lambda I)^{k-1} \cap V(\lambda)$. Toto sú tie vlastné vektory, z ktorých vytvárame reťazce maximálnej dĺžky k. Ak je celkový počet vektorov z týchto reťazcov menší ako algebraická násobnosť m, vytvoríme prienik

$$S(A - \lambda I)^{k-2} \cap V(\lambda)$$

Doplníme predtým vybrané vlastné vektory z

$$S(A - \lambda I)^{k-1} \cap V(\lambda)$$

do bázy podpriestoru

$$S(A - \lambda I)^{k-2} \cap V(\lambda)$$

Tieto vlastné vektorý budú vytvárať reťazce dĺžky $k - 1$. Ak je celkový súčet vektorov vo všetkých reťazcoch menší ako m vytvoríme podpriestor

$$S(A - \lambda I)^{k-3} \cap V(\lambda)$$

...atď, až kým spoločný súčet vektorov vo všetkých reťazcoch nebude rovný algebraickej násobnosti m.

V nasledujúcich dvoch príkladoch je ilustrovaný postup výpočtu Jordanového normálneho tvaru a bázy podľa algoritmu I.

Príklad 5: Nájdite Jordanov normálny tvar, bázu a minimálny polynóm matice A, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie: Charakteristický polynóm tejto matice je

$$P(\lambda) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}. det\begin{pmatrix} 1-\lambda & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^5,$$

z čoho vyplýva, že matica A má jediné vlastné číslo $\lambda = 1$ algebraickej násobnosti 5.
Postupne počítame mocniny matice $A - I$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

čiže

$$hod(A - I) = 3 = r^1.$$

Ďalej

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tj.

$$hod(A - I)^2 = 1 = r^2.$$

A nakoniec

$$(A - I)^3 = 0 \ (nulová\ matica)$$

a

$$hod((A-I)^3) = 0 = r^3.$$

Z toho vyplýva, že existuje jedna Jordanova bunka $J_3(1)$ tretieho rádu, lebo

$$r^2 - 2r^3 + r^4 = 1 - 2.0 + 0 = 1$$

a jedna Jordanova bunka $J_2(1)$ druhého rádu, pretože

$$r^1 - 2r^2 + r^3 = 3 - 2.1 + 0 = 1.$$

Teda

$$J = \begin{pmatrix} J_3(1) & \\ & J_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Minimálny polynóm matice A je $(1-\lambda)^3$. Teraz budeme hľadať Jordanovu bázu. Podpriestor $V(1)$ vlastných vektorov, prislúchajúcich vlastnému číslu $\lambda = 1$ je vytvorený napríklad vektormi

$$h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ktoré dostaneme riešením systému

$$(A-I)x = 0.$$

Podpriestor $S((A-I)^2)$, ako ľahko vidno, je vytvorený vektorom h_1, ktorý je súčasne koncom reťazca dĺžky 3. Počítame postupne k nemu pridružené vektory h_1^1 a h_1^2

$$(A-I)h_1^1 = h_1,$$

z čoho dostaneme, že

$$h_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podobne vypočítame h_1^2 riešením systému lineárnych rovníc

$$(A-I)h_1^2 = h_2$$

a teda

$$h_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vektory h_1^1 a h_1^2 nie sú dané jednoznačne, podľa možností vyberáme tie najjednoduchšie. Pretože

$$\dim S(A-I) \cap V(1) = 1,$$

ľahko overíme, že vlastný vektor h_2 je z podpriestoru $S(A-I)$ (môžeme ho dostať ako lineárnu kombináciu tretieho a piateho stĺpca matice $A-I$). Vypočítame k nemu pridružený vektor prvého rádu h_2^1

$$(A-I)h_2^1 = h_2,$$

čiže

$$h_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

čiže platí

$$AH = HJ.$$

Teda minimálny polynóm matice A je

$$\mu(A) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)^3.$$

Príklad 6: Nájdite Jordanov normálny tvar, bázu a minimálny polynóm matice A, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Charakteristický polynóm tejto matice je

$$P(\lambda) = det(A-\lambda I) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)^3.$$

Teda vlastné čísla matice A sú $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$, obe algebraickej násobnosti 3. Začneme s vlastným číslom $\lambda_1 = 1$. Zostrojíme matice

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

teda

$$hod(A - I) = 4 = r^1$$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

čiže

$$hod((A - I)^2) = 3 = r^2.$$

Podobne vypočítame

$$(A - I)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

čiže

$$hod((A - I)^3) = 3 = r^4 = r^5 = \cdots$$

Pretože platí

$$r^0 - 2r^1 + r^2 = 6 - 2.4 + 3 = 1,$$

$$r^1 - 2r^2 + r^3 = 4 - 2.3 + 3 = 1,$$

$$r^2 - 2r^3 + r^4 = 3 - 2.3 + 3 = 0,$$

existuje jedna Jordanova bunka $J_1(1)$ prvého rádu a tiež jedna Jordanova bunka $J_2(1)$ druhého rádu. Ak budeme počítať s vlastným číslom $\lambda_2 = 2$, dostaneme

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$hod(A - 2I) = 5 = r^1.$$

$$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&0&-1&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&-5&0&18\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-2&0&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

čiže

$$hod((A-2I)^2)=4=r^2.$$

Podobne vypočítame, že

$$hod((A-2I)^3)=3=r^3=r^4=\cdots$$

To znamená, že

$$r^0-2r^1+r^2=6-2.5+4=0,$$

$$r^1-2r^2+r^3=5-2.4+3=0,$$

$$r^2-2r^3+r^4=4-2.3+3=1,$$

a existuje len jediná Jordanova bunka $J_3(2)$ tretieho rádu a Jordanova matica je

$$J=\begin{pmatrix}J_1(1)&&\\&J_2(1)&\\&&J_3(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&2&1&0\\0&0&0&0&2&1\\0&0&0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

Teraz sa vrátime k vlastnému číslu $\lambda_1=1$ a nájdeme vlastné a pridružené vektory prislúchajúce tomuto vlastnému číslu. Riešením homogénneho systému

$$(A-I)x=0$$

zistíme, že podpriestor $V(1)$ vlastných vektorov je vytvorený dvomi vektormi

$$h_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad \text{a} \quad h_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Z toho vyplýva, že musí existovať ešte jeden pridružený vektor. Aby sme zistili, ku ktorému vlastnému vektoru z podpriestoru $V(1)$ existuje, hľadáme prienik

$$V(1)\cap S(A-I).$$

Ľahko zistíme, že štvrtý stĺpec matice $A-I$ sa zhoduje s vektorom h_2. Pretože vektor h_1 sa nedá vyjadriť ako lineárna kombinácia stĺpcov matice $A-I$,

$$dim\big(S(A-I)+V(1)\big)=5.$$

Pretože

$$dim\,S(A-I)+dim\,V(1)=6,$$

dostávame, že

$$dim\big(S(A-I)\cap V(1)\big)=1,$$

a teda bázou tohto prieniku je vektor h_2. Riešením systému lineárnych rovníc

$$(A-I)h_2^1=h_2$$

vypočítame pridružený vektor prvého rádu

$$h_2^1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Už vieme, že k vlastnému číslu $\lambda_2=2$ existuje len jedna Jordanova bunka $J_3(2)$ tretieho rádu. To znamená, že existuje jeden vlastný vektor a dva k nemu pridružené vektory. Riešením homogénneho systému lineárnych rovníc

$$(A-2I)x=0$$

vypočítame, že podpriestor $V(2)$ vlastných vektorov je v tomto prípade vytvorený vektorom

$$h_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Pridružené vektory h_3^1 a h_3^2 k h_3 dostaneme ako riešenia systémov

$$(A-2I)h_3^1=h_3 \quad a$$

$$(A-2I)h_3^2=h_3^1 \quad (alebo\ (A-2I)^2h_3^2=h_3),$$

čiže napríklad

$$h_3^1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad h_3^2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Takto dostaneme maticu H tvorenú vektormi $h_1, h_2, h_2^1, h_3, h_3^1, h_3^2$, tj.

$$H=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&3&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

1.4.5 Konštrukcia Jordanovej bázy (algoritmus II)

Postupne rozoberieme niekoľko prípadov.

a) Nilpotentné matice

Definícia 1.11: Maticu A typu $n \times n$ budeme nazývať **nilpotentná**, ak jej charakteristický polynóm

$$P(\lambda) = \pm\lambda^n.$$

To znamená, že existuje také prirodzené číslo $k \leq n$, že platí $A^k = 0$ (nulová matica).

Nech k je minimálne číslo s touto vlastnosťou. Z toho vyplýva, že k je súčasne aj maximálny rozmer Jordanovej bunky v Jordanovom tvare matice A. Aby sme našli Jordanovu bázu matice A, musíme vybrať nejakú maximálnu množinu vektorov

$$\left\{e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, \dots, e_{r_k}^{(k)}\right\}$$

z podpriestoru $N(A^k)$ (v tomto prípade $N(A^k) = \mathbb{R}^n$), ktorá je lineárne nezávislá vzhľadom k podpriestoru

$$N(A^{k-1}) \subset N(A^k).$$

To znamená, že žiadna netriviálna lineárna kombinácia týchto vektorov nepatrí do podpriestoru $N(A^{k-1})$. Inými slovami, stačí vybrať ľubovoľnú bázu faktorového priestoru

$$N(A^k) \big/ N(A^{k-1})$$

a za vektory $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, \dots, e_{r_k}^{(k)}$ zvoliť ľubovoľné vzory vektorov tejto bázy z $N(A^k)$ pri projekcii

$$\pi: \quad N(A^k) \to N(A^k) \big/ N(A^{k-1}).$$

Vektory $e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, \dots, e_{r_k}^{(k)}$ sú počiatočnými vektormi reťazcov dĺžky k, ktorým budú zodpovedať Jordanove bunky rádu k.
Ďalej vytvoríme vektory

$$e_1^{(k-1)} = Ae_1^{(k)}, \dots, e_{r_k}^{(k-1)} = Ae_{r_k}^{(k)},$$

ktoré sú z podpriestoru $N(A^{k-1})$. Doplníme ich vektormi

$$e_{r_k+1}^{(k-1)}, \dots, e_{s_{k-1}}^{(k-1)}$$

do bázy podpriestoru $N(A^{k-1})$, kde

$$s_{k-1} = r_k + r_{k-1}$$

tak, aby množina vektorov

$$e_{r_k+1}^{(k-1)}, \dots, e_{s_{k-1}}^{(k-1)}$$

bola lineárne nezávislá k podpriestoru $N(A^{k-2})$.
Vektory, ktorými dopníme množinu

$$e_1^{(k-1)}, \dots, e_{r_k}^{(k-1)}$$

budú počiatočnými vektormi reťazcov dĺžky $k-1$ a budú im zodpovedať Jordanove bunky rádu $k-1$. Takto postupujeme ďalej. Napríklad predpokladajme, že sme zostrojili vektory

$$e_1^{(j-1)}, \dots, e_{s_j}^{(j-1)},$$

kde

$$s_j = r_k + r_{k-1} + \dots + r_j.$$

Doplníme vektory

$$e_1^{(j-2)} = Ae_1^{(j-1)}, \dots, e_{s_j}^{(j-2)} = Ae_1^{(j-1)}$$

do bázy podpriestoru $N\left(A^{j-1}\right)$ tak, aby takto vzniknutá množina vektorov bola lineárne nezávislá vzhľadom k priestoru $N\left(A^{j-1}\right)$, čim dostaneme počiatočné vektory reťazcov dĺžky j-1 a im zodpovedajúce Jordanove bunky rádu $j-1$, atď...

b) Matica s jediným vlastným číslom $\boldsymbol{\lambda_0}$

Ak charakteristický polynóm

$$P(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_0)^n,$$

potom je matica $A - \lambda_0 I$ nilpotentná. V tomto prípade hľadáme Jordanovu bázu matice podľa bodu a) a táto báza bude Jordanovou bázou súčasne aj matice A. Jordanova matica matice A sa bude líšiť od Jordanovej matice matice $A - \lambda_0 I$ len v tom, že na hlavnej diagonále bude mať namiesto núl všade číslo λ_0.

c) Ľubovoľná matica

Vo všeobecnom prípade, keď charakteristický polynóm

$$P(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots \left(\lambda - \lambda_q\right)^{\alpha_q},$$

tj. má aspoň dva rôzne korene, sa lineárny priestor $\mathbb{R}^n$ rozkladá na priamy súčet tzv. koreňových podpriestorov zodpovedajúcich vlastným číslam λ_i. Pretože sú tieto koreňové podpriestory invariantné vzhľadom k matici A, môžeme A chápať na každom z týchto podpriestorov ako maticu s jediným vlastným číslom a teda budeme postupovat podľa bodu b).

Aby sme našli Jordanovu formu a Jordanovu bázu matice A, musíme postupne uvažovať všetky vlastné čísla λ_i matice A a pre každé λ_i skúmať singulárnu maticu $A - \lambda_i I$, kde $i = 1,2, \dots, q$. Pretože matica $A - \lambda_i I$ je singulárna, vždy nájdeme také číslo k, že

$$hod(A - \lambda_i I)^{k+1} = hod(A - \lambda_i I)^k$$

To znamená, že hľadáme takú minimálnu mocninu k, pri ktorej sa hodnosť $A - \lambda_i I$ stabilizuje. Ďalej musíme vybrať nejakú maximálnu lineárne nezávislú množinu vektorov z podpriestoru

$$N(A - \lambda_i I)^k,$$

ktoré sú lineárne nezávislé vzhľadom na podpriestor

$$N(A - \lambda_i I)^{k-1}.$$

Potom nájdeme ich obrazy pri transformácii $A - \lambda_i I$ a doplníme do bázy podpriestoru

$$N(A - \lambda_i I)^{k-1}, \text{atď.}$$

Jediný rozdiel s prípadom b), tj. s maticou s jediným vlastným číslom je v tom, že v tomto prípade je

$$N(A - \lambda_i I)^k = \mathbb{R}^n,$$

čo neplatí v prípade matíc s aspoň dvomi rôznymi vlastnými číslami.

□

V nasledujúcich dvoch príkladoch je ilustrovaný postup výpočtu Jordanového normálneho tvaru a bázy podľa algoritmu II.

Príklad 7: Nájdite Jordanov normálny tvar, bázu a minimálny polynóm matice A, kde

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 & 6 & 8 \\ 9 & 5 & 6 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Nájdeme charakteristický polynóm danej matice A.

$$P(\lambda) = det \begin{pmatrix} -7-\lambda & -4 & -4 & 6 & 8 \\ 9 & 5-\lambda & 6 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda).\, det \begin{pmatrix} -7-\lambda & -4 \\ 9 & 5-\lambda \end{pmatrix} .\, det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -9 \\ 4 & -7-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)^5.$$

To znamená, že matica A má práve jedno vlastné číslo $\lambda = -1$. Budeme hľadať vlastné vektory tejto matice, tj. riešime systém lineárnych rovníc

$$(A + \lambda I)x = (A + 1I)x = 0$$

Upravujeme maticu $A + I$

$$A + I = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -4 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 6 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 6 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a riešime systém

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - 3x_5 &= 0, \\ 2x_3 - 3x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Riešením tohto systému dostaneme, že vlastné vektory sú

$$f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a všetky ich lineárne kombinácie. To znamená

$$N(A+I) = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

a

$$dim\, N(A+I) = 3,$$

$$hod\ (A+I) = 2.$$

Výpočtom ďalej zistíme, že $(A+I)^2 = 0$ (nulová matica). To znamená, že

$$N[(A+I)^2] = \mathbb{R}^5,$$

$$dim\, N[(A+I)^2] = 5,$$

$$hod\ (A+I)^2 = 0.$$

Počet Jordanových buniek prvého rádu vypočítame zo vzťahu

$$r^0 - 2r^1 + r^2 = 5 - 2.2 + 0 = 1$$

a počet Jordanových buniek druhého rádu je

$$r^1 - 2r^2 + r^3 = 2 - 2.0 + 0 = 2.$$

Z toho vyplýva, že Jordanova matica má tvar

$$J = \begin{pmatrix} J_2(-1) & & \\ & J_2(-1) & \\ & & J_1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a minimálny polynóm matice A je rovný

$$\mu(A) = (\lambda+1)^2.$$

Teraz prejdeme k výpočtu Jordanovej bázy. Pretože platí

$$N(A+I) \subset N[(A+I)^2] = \mathbb{R}^5$$

hľadáme dva vektory z $N[(A+I)^2]$, ktoré sú lineárne nezávislé s podpriestorom

$$N(A+I),$$

tj. linárne nezávislé s vlastnými vektormi matice $A + I$. Tieto vektory budú tvoriť začiatočné vektory reťazcov dĺžky 2, tj. budú to pridružené vektory. Môžeme zvoliť napríklad vektory

$$h_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a \quad h_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$(A + I)h_1^1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -3f_1 = h_1 \in N(A + I)$$

a

$$(A + I)h_2^1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -2f_1 + 2f_3 = h_2 \in N(A + I).$$

Vektor h_3 musíme vybrať tak, aby bol vlastným vektorom, ktorý je linárne nezávislý s vektormi h_1, h_1^1, h_2, h_2^1. Môžeme vybrať napríklad vektor

$$h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in N(A + I).$$

Potom

$$H = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a platí

$$AH = HJ.$$

Príklad 8: Nájdite Jordanov normálny tvar, bázu a minimálny polynóm matice A, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Pretože matica A je horná trojuholníková matica, jej charakteristický polynóm je

$$P(\lambda) = (-\lambda)^4(1-\lambda)^4.$$

Z toho vyplýva, že má dva štvornásobné korene $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 1$.
Pretože

$$hodA = 6 = r^1$$

a

$$hodA^2 = hod \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & -1 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 1 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & -4 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 = r^2$$

vypočítame, že počet Jordanových buniek $J_1(0)$ prvého rádu je

$$r^0 - 2r^1 + r^2 = 8 - 2.6 + 4 = 0$$

a počet Jordanových buniek $J_2(0)$ druhého rádu je

$$r^1 - 2r^2 + r^3 = 6 - 2.4 + 4 = 2.$$

Podobne matica

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 & 2 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnosť matice $A - I$ je

$$hod(A - I) = 7,$$

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 4 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a

$$hod[(A-I)^2] = 6.$$

Ďalej počítame

$$(A-I)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & -6 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -3 & -11 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$hod[(A-I)^3] = 5,$$

a nakoniec

$$(A-I)^4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 & 8 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 5 & 15 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & -6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$hod[(A-I)^4] = 4 = hod[(A-I)^5].$$

Výpočtom zistíme, že existuje len jedna

$$r^3 - 2r^4 + r^5 = 5 - 2.4 + 4 = 1$$

Jordanova bunka $J_4(1)$ štvrtého rádu. To znamená, že

$$J = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Minimálny polynóm matice A je

$$\mu(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)^4.$$

Teraz zostrojíme Jordanovu bázu. Ako počiatočné vektory reťazcov dĺžky 2 pre $\lambda_1 = 0$, tj. pridružené vektory 1.rádu, môžeme vziať vektory

$$h_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

potom

$$h_1 = Ah_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a

$$h_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

potom

$$h_2 = Ah_2^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tieto vektory sú lineárne nezávislé a tvoria bázu podpriestoru $N(A^2)$. Aby sme našli bázu podpriestoru

$$N[(A-I)^4],$$

musíme vypočítať vektor h_3^3, pre ktorý platí

$$(A-I)^4 h_3^3 = 0,$$

tj. pridružený vektor tretieho rádu, ktorý nepatrí do podpriestoru

$$N[(A-I)^3].$$

Ľahko zistíme, že takým vektorom je napríklad vektor

$$h_3^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Potom ostatné vektory Jordanovej bázy vypočítame postupne

$$h_3^2 = (A - I)h_3^3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -12 \\ -9 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a

$$h_3^1 = (A - I)h_3^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a

$$h_3 = (A - I)h_3^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostávame, že

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 & 7 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -6 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4.6 Porovnanie algoritmov I a II konštrukcie Jordanovej bázy

Nasledujúci príklad ilustruje oba algoritmy. Čitateľ si môže porovnať výhody a nevýhody oboch algoritmov.

Príklad 9: Nájdite Jordanov normálny tvar, bázu a minimálny polynóm matice A, kde

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Nájdeme charakteristický polynóm tejto matice

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\left[det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right]^2=[(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)]^2=(1-\lambda)^6$$

Z toho vyplýva, že existuje jediné vlastné číslo $\lambda=1$ s algebraickou násobnosťou $m=6$. Zostrojíme maticu $A-I$ a upravíme ju na trojuholníkový tvar

$$(A-I)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

teda

$$hod(A-I)=3=r^1.$$

Potom podobne upravíme maticu

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

čiže

$$hod(A-I)^2=1=r^2.$$

Ľahko sa presvedčíme, že

$$(A-I)^3=0 \text{ (nulová matica)}$$

a

$$hod(A-I)^3=0=r^3=r^4=\cdots$$

Pretože platí

$$r^0 - 2r^1 + r^2 = 6 - 2.3 + 1 = 1,$$
$$r^1 - 2r^2 + r^3 = 3 - 2.1 + 0 = 1,$$
$$r^2 + 2r^4 + r^4 = 1 - 2.0 + 0 = 1,$$

Jordanova matica J má tvar

$$J = \begin{pmatrix} J_3(1) & & \\ & J_2(1) & \\ & & J_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a minimálny polynóm má tvar

$$\mu(\lambda) = (1 - \lambda)^3.$$

Jordanovu bázu budeme hľadať najskôr podľa *algoritmu I* na str. 19. V prvom rade nájdeme vlastné vektory matice A riešením homogénneho systému

$$(A - I)x = 0.$$

Pretože

$$(A - I) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

riešime systém lineárnych rovníc

$$x_1 + x_3 + x_4 = 0$$
$$-x_4 + x_5 = 0$$
$$x_5 + x_6 = 0,$$

ktorého všeobecným riešením je vektor

$$\begin{pmatrix} -x_3 + x_6 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_6 \\ -x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že vlastný podpriestor $V(1)$ je tvorený vektormi

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Budeme hľadať vlastný vektor $h_1 \in V(1)$, ktorý vytvára reťazec dĺžky 3. Pre tento vektor musí platiť

$$h_1 \in S((A-I)^2) \cap V(1).$$

Pretože

$$S((A-I)^2) = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

a

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2f_1 + (-2)f_2 = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dostávame, že

$$h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ďalej vypočítame k nemu pridružené vektory h_1^1 a h_1^2 prvého a druhého rádu. Vektor h_1^1 je riešením systému lineárnych rovníc

$$(A-I)h_1^1 = h_1,$$

z ktorého po úprave dostaneme systém

$$x_1 + x_3 + x_4 = 2$$

$$-x_4 + x_5 = 0$$

$$x_5 + x_6 = 0.$$

Všeobecné riešenie má tvar

$$\begin{pmatrix} 2 - x_3 + x_6 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_6 \\ -x_6 \\ x_6 \end{pmatrix}.$$

Ak za parametre zvolíme hodnoty $x_2 = 0, x_3 = 1, x_6 = -1$, dostaneme pridružený vektor prvého rádu

$$h_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pomocou h_1^1 vypočítame pridružený vektor druhého rádu h_1^2 zo systému

$$(A - I)h_1^2 = h_1^1$$

alebo

$$(A - I)^2 h_1^2 = h_1.$$

Úpravou dostaneme rovnicu

$$x_4 + x_6 = 1 \quad \rightarrow \quad x_4 = 1 - x_6.$$

Z toho dostaneme všeobecné riešenie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 - x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}.$$

Ak zvolíme za parametre hodnoty $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$ a $x_6 = 1$, dostaneme vektor

$$h_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ktorý je posledným vektorom prvého reťazca dĺžky 3, začínajúceho vektorom h_1.
Pretože

$$\dim S((A - I)^2) \cap V(1) = 1$$

viac vektorov dĺžky 3 neexistuje a preto musíme nájsť vektory $h_2 \in V(1)$, ktorými sa začínajú reťazce dĺžky 2.
Keďže podpriestor

$$S(A - I) = \left[e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

a

$$\dim S(A - I) \cap V(1) = 2$$

pričom

$$S((A-I)^2) \subset S(A-I),$$

doplníme vlastný vektor h_1 do bázy podpriestoru $S(A-I)$ vektorom h_2 tak, aby $h_2 \in V(1)$. Pretože vektor

$$f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)e_1 + (+1)e_3 = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (+1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S(A-I),$$

a

$$f_3 \notin S(A-I)$$

a tiež

$$h_1 = 2e_1$$

môžeme za h_2 zvoliť vektor f_2. K nemu pridružený vektor vypočítame riešením systému

$$(A-I)h_2^1 = h_2,$$

ktorého všeobecné riešenie je

$$\begin{pmatrix} -1 - x_3 + x_6 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_6 \\ 1 - x_6 \\ x_6 \end{pmatrix}.$$

Ak zvolíme parametre $x_2 = x_3 = 0$ a $x_6 = 1$, dostaneme pridružený vektor h_2^1 prvého rádu k h_2, tj.

$$h_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pretože vlastný vektor

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

je lineárne nezávislý s vektormi $h_1, h_1^1, h_1^2, h_2, h_2^1$, môžeme ho dať do Jordanovej bázy za vektor h_3, ktorý dáva reťazec dĺžky 1.
To znamená, že matica

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teraz budeme hľadať Jordanovu bázu podľa druhého *algoritmu II* na strane 25 a preto jednotlivé vektory tejto bázu budeme hľadať v opačnom poradí. Pretože

$$(A - I)^3 = 0 \text{ (nulová matica)}$$

a teda

$$N((A - I)^3) = \mathbb{R}^6,$$

môžeme za vektor h_1^2 zvoliť ľubovoľný nenulový vektor, ktorý nepatrí do podpriestoru $N((A - I)^2)$. Pretože tento podpriestor je daný podmienkou

$$x_4 + x_6 = 0.$$

Kvôli jednoduchosti nasledujúcich výpočtov vyberieme

$$h_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$h_1^1 = (A - I)h_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a

$$h_1 = (A - I)h_1^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Za vektor h_2^1 môžeme vybrať taký vektor, ktorý patrí do $N((A - I)^2)$ a je lineárne nezávislý s vektorom h_1^1 vzhľadom k podpriestoru $V(1)$, čo znamená, že stačí vziať také riešenie rovnice

$$x_4 + x_6 = 0 \quad ((A - I)^2 x = 0),$$

ktoré je lineárne nezávislé s h_1^1 a také, že žiadna netriviálna ilneárna kombinácia vektorov h_1^1 a h_2^1 nie je z podpriestoru $V(1)$, tj. nie je vlastným vektorom. Napríklad týmto podmienkam vyhovuje vektor

$$h_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pretože vektoro $h_1^1 \notin\ V(1)$,s tačí overiť, že vektor $h_1^1 + \alpha h_2^1$, pre $\alpha \neq 0$, nespĺňa systém

$$x_1 + x_3 + x_4 = 2$$

$$x_4 + x_6 = 0$$

$$x_5 + x_6 = 0,$$

ktorého riešenia sú z podpriestoru $N\big((A - I)\big) = V(1)$. Ak dosadíme súradnice tohto vektora $h_1^1 + \alpha h_2^1$ do poslednej rovnice vyššie uvedého systému, zistíme, že $\alpha = 0$, čo nemôže nastať podľa predpokladu výberu $\alpha \neq 0$. Potom vektor

$$h_2 = (A - I)h_2^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je lineárne nezávislý s vektorom h_1^2, z čoho vyplýva, že množina vektorov $\{h_1, h_1^1, h_1^2, h_2, h_2^1\}$ je linárne nezávisla. Posledný vektor h_3 Jordanovej bázy musí byť lineárne nezávislý s vektormi h_1^2, h_2 a musí byť súčasne aj vlastným vektorom a takýmto vektorom je napríklad vektor

$$h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ako vidno, dostali sme týmto postupom tú istú maticu H ako pri prvom postupe, avšak to nemusí byť pravidlom. Závisí to od výberu počiatočných resp. koncových vektorov Jordanových reťazcov.

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5. Jordanov normálny tvar pre reálne matice s komplexnými vlastnými číslami

Definícia 1.12: Nech $\varphi: V \to V$ je reálne lineárne zobrazenie $n-$rozmerného reálneho priestoru V. Nech V^C je komplexifikácia reálneho priestoru V. Zobrazenie $\varphi^C: V^C \to V^C$, kde $V^C = V \oplus iV$ je dané vzťahom

$$\varphi^C.(v_1 + iv_2) = \varphi(v_1) + i\varphi(v_2)$$

nazývame **komplexifikácia lineárneho zobrazenia $\boldsymbol{\varphi}$**.

Ak $\lambda = \alpha + i\beta \in C$ je vlastné číslo lineárneho zobrazenia φ (resp. φ^C) s vlastným vektorom $w = v_1 + iv_2$, potom aj $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta \in C$ je vlastné číslo zobrazenia φ (resp. φ^C), ktorému zodpovedá vlastný vektor $\bar{w} = v_1 - iv_2$. V reálnej báze sú lineárne zobrazenia φ a φ^C reprezentované tou istou reálnou maticou A.
Nech g je vlastný vektor matice A a $g^1, \dots, g^{k-1}$ sú k nemu pridružené vektory z V^C, tj. platí

$$(A - \lambda I)g = 0 \text{ a } (A - \lambda I)g^j = g^{j-1}, \qquad j = 1, \dots, k-1,$$

podobne aj pre vektory $\bar{g}, \bar{g}^1, \dots, \bar{g}^{k-1}$, kde $\bar{g}$ je komplexne združený vektor s g, platí

$$(A - \lambda I)\bar{g} = 0 \text{ a } (A - \lambda I)\bar{g}^j = \bar{g}^{j-1}, \qquad j = 1, \dots, k-1,$$

Vektorom $g, g^1, \dots, g^{k-1}$ zodpovedá Jordanova bunka rádu k

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + i\beta & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + i\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix}.$$

Podobne vektorom $\bar{g}, \bar{g}^1, \dots, \bar{g}^{k-1}$ zodpovedá Jordanova bunka

$$J_k(\bar{\lambda}) = \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - i\beta & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \alpha - i\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}.$$

1.5.1 Tvorba reálnej Jordanovej bázy

Z vektorov $g, g^1, \dots, g^{k-1}, \bar{g}, \bar{g}^1, \dots, \bar{g}^{k-1}$ vytvoríme novú reálnu bázu :

$$h_1 = \frac{1}{2}(g + \bar{g}) \qquad\qquad h_2 = \frac{1}{2i}(g - \bar{g})$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$h_{2k-1} = \frac{1}{2}(g^{k-1} + \bar{g}^{k-1}) \qquad\qquad h_{2k} = \frac{1}{2i}(g^{k-1} - \bar{g}^{k-1}),$$

čiže $h_1 = Re(g), h_2 = Im(g)$, atď..., tj. platí

$$g = h_1 + ih_2 \qquad\qquad \bar{g} = h_1 - ih_2$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$g^j = h_{j-1} + ih_j \qquad\qquad \bar{g}^j = h_{j-1} - ih_j.$$

Pre vektor h_1 dostaneme

$$\varphi(h_1) = \frac{1}{2}\big(\varphi(g) + \varphi(\bar{g})\big) = \frac{1}{2}\big(\lambda g + \bar{\lambda}\bar{g}\big) = \frac{1}{2}\big(\lambda g + \overline{\lambda g}\big) = Re(\lambda g) =$$
$$= Re(\alpha + i\beta)(h_1 + ih_2) = \alpha h_1 - \beta h_2,$$

podobne platí

$$\varphi(h_2) = \ \beta h_1 + \ \alpha h_2,$$
$$\varphi(h_3) = \frac{1}{2}\big(\varphi(g^1) + \varphi(\bar{g}^1)\big) = \frac{1}{2}\big(\lambda g^1 + g + \bar{\lambda}\bar{g}^1 + \bar{g}\big) = h_1 + \frac{1}{2}\big(\lambda g^1 + \overline{\lambda g^1}\big) =$$
$$= h_1 + Re(\lambda g^1) = h_1 + Re(\alpha + i\beta)(h_3 + ih_4) = h_1 + \alpha h_3 - \beta h_4,$$
$$\varphi(h_4) = h_2 + \ \beta h_3 + \ \alpha h_4,$$

atď...

Teda v báze $h_1, \dots, h_{2k}$ sa komplexná $2k \times 2k$ matica $\begin{pmatrix} J_k(\lambda) & 0 \\ 0 & J_k(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}$ zmení na reálnu $2k \times 2k$ maticu

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{cc|cc} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ \hline & & \alpha & \beta \\ & & -\beta & \alpha \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{cc|cc} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ \hline & & \alpha & \beta \\ & & -\beta & \alpha \end{array} \end{pmatrix}$$

alebo v skrátenej forme

$$\begin{pmatrix} \Lambda_2 & I_2 & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & \Lambda_2 \end{pmatrix},$$

kde

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Príklad 10: Nájdite Jordanov normálny tvar a bázu matice A, kde

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -17 & -19 & 4 & -17 \\ 6 & -4 & -6 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & -4 & 1 & -4 \\ -32 & 26 & 29 & -5 & 26 \\ 6 & -6 & -5 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

- **a)** nad $\mathbb{C}$,
- **b)** nad $\mathbb{R}$.

Riešenie :

a)

$$det(A - \lambda I) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + 12\lambda^{13} - 16\lambda^2 + 12\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$$
$$= (\lambda - 1)\big(\lambda - (1 - i)\big)^2\big(\lambda - (1 + i)\big)^2.$$

Čiže dostali sme vlastné čísla $\lambda_1 = 1$ s algebraickou násobnosťou $m_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i$ s algebraickou násobnosťou $m_2 = 2$ a $\lambda_3 = 1 - i$ s algebraickou násobnosťou $m_3 = 2$. Potom Jordanov normálny tvar matice je

$$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$H_{\mathbb{C}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{6}+\frac{26}{9}i & -\frac{1}{9}-\frac{1}{6}i & \frac{7}{6}-\frac{26}{9}i & -\frac{1}{9}+\frac{1}{6}i \\ 0 & \frac{2}{9}+i & -\frac{2}{9}-\frac{5}{9}i & \frac{2}{9}-i & -\frac{2}{9}+\frac{5}{9}i \\ 0 & \frac{13}{18}+\frac{8}{9}i & -\frac{8}{9}+\frac{1}{6}i & \frac{13}{18}-\frac{8}{9}i & -\frac{8}{9}-\frac{1}{6}i \\ -1 & -2-\frac{77}{18}i & 0 & -2+\frac{77}{18}i & 0 \\ 1 & \frac{1}{9}+\frac{1}{2}i & 1 & \frac{1}{9}-\frac{1}{2}i & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{g_1} & \boldsymbol{g_2} & \boldsymbol{g_3} & \overline{\boldsymbol{g_2}} & \overline{\boldsymbol{g_3}} \end{array} \end{array}.$$

b) Podľa vyššie uvedeného postupu teraz vytvoríme novú reálnu bázu.

$$h_1 = g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$h_4 = \frac{1}{2}(g_3 + \overline{g_3}) = \begin{pmatrix} -{}^{1}/_{9} \\ -{}^{2}/_{9} \\ -{}^{8}/_{9} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$h_2 = \frac{1}{2}(g_2 + \overline{g_2}) = \begin{pmatrix} {}^{7}/_{6} \\ {}^{2}/_{9} \\ {}^{13}/_{18} \\ -2 \\ {}^{1}/_{9} \end{pmatrix};$$

$$h_5 = \frac{1}{2i}(g_3 - \overline{g_3}) = \begin{pmatrix} -{}^{1}/_{6} \\ -{}^{5}/_{9} \\ {}^{1}/_{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$h_3 = \frac{1}{2i}(g_2 - \overline{g_2}) = \begin{pmatrix} {}^{26}/_{9} \\ 1 \\ {}^{8}/_{9} \\ -{}^{77}/_{18} \\ {}^{1}/_{2} \end{pmatrix};$$

Dostávame

$$H_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 1 & {}^{7}/_{6} & {}^{26}/_{9} & -{}^{1}/_{9} & -{}^{1}/_{6} \\ 0 & {}^{2}/_{9} & 1 & -{}^{2}/_{9} & -{}^{5}/_{9} \\ 0 & {}^{13}/_{18} & {}^{8}/_{9} & -{}^{8}/_{9} & {}^{1}/_{6} \\ -1 & -2 & -{}^{77}/_{18} & 0 & 0 \\ 1 & {}^{1}/_{9} & {}^{1}/_{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Príklad 11: Nájdite Jordanov normálny tvar matice A, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a) nad $\mathbb{C}$,
b) nad $\mathbb{R}$.

Riešenie:

a) Nájdeme vlastné čísla matice ako riešenie systému

$$det(A-\lambda I) = det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 + 1 = (\lambda^2 + i)(\lambda^2 - i) = 0.$$

Riešime rovnicu

$$\lambda^2 = i = cos\frac{\pi}{2} + i.sin\frac{\pi}{2},$$

$$\lambda_1 = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} + i.sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = cos\frac{\pi}{4} + i.sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i,$$

$$\lambda_2 = \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2} + i.sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2} = cos\frac{5\pi}{4} + i.sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i,$$

$$\lambda^2 = -i = cos\frac{3\pi}{2} + i.sin\frac{3\pi}{2},$$

$$\lambda_3 = \frac{\frac{3\pi}{2}}{2} + i.sin\frac{\frac{3\pi}{2}}{2} = cos\frac{3\pi}{4} + i.sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i,$$

$$\lambda_4 = \frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{2} + i.sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{2} = cos\frac{7\pi}{4} + i.sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i,$$

$\lambda_4 = \overline{\lambda_1}$ a $\lambda_2 = \overline{\lambda_3}$.

Nájdeme vlastné vektory prislúchajúce vlastnému číslu λ_1 ako riešenie systému lineárnych rovníc $(A - \lambda_1 I)x = 0$

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme homogénny systém rovníc

$$x_1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)x_2 \Rightarrow x_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)x_4$$

$$\Rightarrow x_1 = -ix_4$$

$$x_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)x_4$$

$$x_3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)x_4 = 0 \implies x_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)x_4,$$

ktorého riešením je vektor

$$g_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -i \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 1 \end{pmatrix} = x_4 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

pre $\lambda_4 = \overline{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ dostaneme komplexne združený vlastný vektor

$$\overline{g_1} = x_4 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Nájdeme vlastné vektory prislúchajúce vlastnému číslu $\lambda_2 = \overline{\lambda_3}$ ako riešenie systému $det(A - \lambda_2 I) = 0$

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme homogénny systém rovníc

$$x_1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)x_2=0 \;\Rightarrow\; x_1=-ix_4$$

$$x_2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)x_4=0 \;\Rightarrow x_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)x_4$$

$$x_3+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)x_4=0 \Rightarrow x_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)x_4,$$

ktorého riešením je vektor

$$g_3=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=x_4\begin{pmatrix} -i \\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 1 \end{pmatrix}=x_4\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Podobne dostaneme aj vlastný vektor $\overline{g_3}$ prislúchajúci vlastnému číslu $\lambda_3=\overline{\lambda_2}$

$$\overline{g_3}=\begin{pmatrix} i \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 1 \end{pmatrix}=x_4\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Jordanov normálny tvar matice A nad $\mathbb{C}$ bude mať tvar

$$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 = \overline{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 = \overline{\lambda_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix}$$

a Jordanova báza je tvorená stĺpcami matice H, kde

$$H_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} -i & i & -i & i \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i & -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i & -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Jordanov normálny tvar matice A nad $\mathbb{R}$ bude mať tvar

$$J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$H_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

1.6. Aplikácia Jordanového normálneho tvaru

Príklad 12: Nájdite A^n, ak n je prirodzené číslo a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: A^n budeme hľadať v tvare $A^n = HD^nH^{-1}$, kde H je matica, ktorá pozostáva z vlastných vektorov a D je diagonálna matica, ktorá pozostáva z vlastných čísel na diagonále a všade inde má nuly.

$$H^{-1}AH = D = diag(\lambda) \Rightarrow A = HDH^{-1}$$

$$A^n = \underbrace{AAA \dots A}_{n-krát} = \underbrace{(HDH^{-1})(HDH^{-1})(HDH^{-1}) \dots (HDH^{-1})}_{n-krát} =$$

$$= HD(H^{-1}H)D(H^{-1}H)D(H^{-1}H) \dots D(H^{-1}H)DH^{-1} =$$

$$= HDIDIDI \dots DIDH =$$

$$= HDDD \dots DH^{-1} = HD^nH^{-1}.$$

Charakteristický polynóm je $det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$. Dostali sme dve vlastné čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -1$. Vypočítame vlastné vektory. Vlastný vektor prislúchajúci k vlastnému číslu $\lambda_1 = 2$ dostaneme ako riešenie systému $(A - \lambda_1 I)x = 0$, čiže

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

riešením je vektor $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Druhý vlastný vektor dostaneme ako riešenie systému $(A - \lambda_2 I)x = 0$, čiže

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

riešením je vektor $h_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nech H je matica, ktorej stĺpce tvoria vlastné vektory. Potom

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } H^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Takto dostávame

$$H^{-1}AH = D = diag(-1,2).$$

Potom n −tá mocnina matice A je

$$A^n = HD^nH^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 4(2^n) & -8(-1)^n + 8(2^n) \\ \\ -(-1)^n + 2^n & 4(-1)^n + 2(2^n) \end{pmatrix}$$

Príklad 13: Nájdite e^A, ak

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: e^A budeme hľadať v tvare $e^A = HDH^{-1}$, kde H je matica, ktorá pozostáva vlastných vektorov a D je diagonálna matica, ktorá pozostáva z vlastných čísel na diagonále a všade inde má nuly.

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

$$D = diag\left(e^{\lambda}\right)$$

Charakteristický polynóm je $det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 7\lambda - 12 = (\lambda - 4)(\lambda - 3)$. Dostali sme dve vlastné čísla $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = 3$. Vypočítame vlastné vektory. Vlastný vektor prislúchajúci k vlastnému číslu $\lambda_1 = 4$ dostaneme ako riešenie systému $(A - \lambda_1 I)x = 0$, čiže

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

riešením je vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Druhý vlastný vektor dostaneme ako riešenie systému $(A - \lambda_2 I)x = 0$, čiže

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

riešením je vektor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Potom $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $H^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^4 - e^3 & e^4 - e^3 \\ 2e^3 - 2e^4 & 2e^3 - e^4 \end{pmatrix}$$

Príklad 14: Definujeme $cos(A)$ matice A nasledovne

$$cos(A) = I - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \dots$$

Nech v je vlastný vektor a λ vlastné číslo matice A, tj. $Av = \lambda v$. Ukážte, že v je tiež vlastným vektorom matice $cos(A)$ a nájdite vlastné čísla $cos(A)$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} cos(A)v &= Iv - \frac{1}{2!}A^2v + \frac{1}{4!}A^4v - \dots \\ &= v - \frac{1}{2!}\lambda^2 v + \frac{1}{4!}\lambda^4 v - \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\lambda^2 + \frac{1}{4!}\lambda^4 - \dots\right)v \\ &= cos(\lambda)v \end{aligned}$$

Teda v je vlastný vektor $cos(A)$ a k nemu prislúchajúce vlastné číslo je $cos(\lambda)$.

Príklad 15: Daná je matica

$$A = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice A.

Riešenie: Charakteristický polynóm matice A je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \pi\lambda = \lambda(\lambda - \pi),$$

z čoho dostávame, že $\lambda_1 = \pi$ a $\lambda_2 = 0$. Ľahko zistíme, že k nim prislúchajúce vlastné vektory sú

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Z predchádzajúce príkladu vyplýva, že matica $cos(A)$ má vlastný vektor v_1 s vlastným číslom $cos(\pi) = -1$ a v_2 s vlastným číslom $cos(0) = 1$. Z rozkladu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

dostaneme, že

$$cos(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos(\pi) & 0 \\ 0 & cos(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad 16: Vypočítajte $cos(A)$, ak

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Najskôr nájdeme Jordanov kanonický tvar matice A. Ľahko vypočítame charakteristický polynóm

$$P(\lambda) = -\lambda^3.$$

To znamená, že $\lambda = 0$ je jediné vlastné číslo matice A. Pretože matica

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

má $hod(A) = 1$, Jordanova kanonický tvarpozostáva z jedinej trojrozmernej bunky

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aby sme našli zodpovedajúcu Jordanovu bázu, nájdeme pridružený vektor tretieho rádu, ktorý nie je z podpriestoru $N(A^2)$. Takým je napríklad vektor

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Postupne vypočítame

$$e_2 = Ae_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad e_1 = Ae_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Čiže

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pretože

$$cos(J) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dostaneme, že

$$cos(A) = H.cos(J).H^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

1.7. Príklady na precvičenie

17. Nájdite algebraickú násobnosť každého vlastného čísla matice

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$,

d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

18. Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matíc

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$,

d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

e) $E = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$,

f) $F = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

g) $G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

19. Nájdite Jordanove bunky matíc

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$,

d) $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

e) $E = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,

f) $F = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$,

g) $G = \begin{pmatrix} 15 & 28 & -7 \\ -6 & -11 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$,

h) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

i) $I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$,

j) $J = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 11 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, **k)** $K = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

20. Nájdite Jordanov normálny tvar matíc

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} 39 & -64 \\ 25 & -41 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

d) $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 9 & -5 \end{pmatrix}$,

g) $G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

h) $H = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$,

i) $I = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -12 \\ 20 & 0 & -12 \\ 30 & -3 & -16 \end{pmatrix}$,

j) $J = \begin{pmatrix} -13 & 8 & 1 & 2 \\ -22 & 13 & 0 & 3 \\ 8 & -5 & 0 & -1 \\ -22 & 13 & 5 & 5 \end{pmatrix}$,

k) $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

l) $L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

21. Nájdite Jordanov normálny tvar matíc a Jordanovu bázu

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $D = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 13 & 2 & 7 \\ -20 & -2 & -10 \end{pmatrix}$,

e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

f) $F = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 & -8 \\ -6 & -3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$,

g) $G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & -3 \\ 4 & 7 & -1 & -4 \\ -12 & -20 & 3 & 12 \\ 12 & 20 & -4 & -13 \end{pmatrix}$,

h) $H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

i) $I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

j) $J = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

k) $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

l) $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$,

m) $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

22. Nájdite Jordanov normálny tvar pre maticu 5×5, ktorej charakteristický polynóm ma tvar $P(\lambda) = (\lambda - 2)^5$.

23. Nájdite Jordanov normálny tvar pre maticu, ktorej charakteristický polynóm $P(\lambda)$ má tvar

a) $P(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 5)^2$
b) $P(\lambda) = (\lambda - 2)^4(\lambda - 3)^2$
c) $P(\lambda) = (\lambda - 7)^5$
d) $P(\lambda) = (\lambda - 2)^7$
e) $P(\lambda) = (\lambda - 3)^4(\lambda - 5)^4$

24. Nájdite A^n, ak n je prirodzené číslo a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

25. Nájdite A^{100}, ak

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 13 & 2 & 7 \\ -20 & -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

26. Nájdite A^{101}, ak

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

27. Nájdite e^A, ak

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $A = \begin{pmatrix} 21 & 17 & 6 \\ -5 & -1 & -6 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

28. Nájdite sin a cos matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -4 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

29. Nájdite ln A matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 1 & -4 & -4 \\ -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

30. Dokážte, že ak $A^2 = 0$, potom $e^A = I + A$.

31. Nech $A^2 = A$. Nájdite vzorec pre e^A (podobne ako v príklade 25).

32. Nech A je reálna matica typu $n \times n$ a $A^T = -A$. Dokážte, že e^A je ortogonálna matica.

33. Nájdite normálny tvar a zodpovedajúcu ortonormálnu bázu kosohermitovskej matice

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} 2i & 2+i \\ -2+i & -2i \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

34. Nájdite normálny tvar a zodpovedajúcu ortonormálnu bázu kososymetrickej matice

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

35. Nájdite normálny tvar a zodpovedajúcu ortonormálnu bázu unitárnej matice

a) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & 1 & -1+i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$.

36. Nájdite normálny tvar a zodpovedajúcu ortonormálnu bázu ortogonálnej matice

a) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & -4 \\ 2 & 5 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Je ťažké presvedčiť žiakov, že ich v živote čakajú problémy podstatne horšie ako tie, ktoré poznajú z hodín algebry a geometrie."

-Edgar W. Howe-

KAPITOLA 2

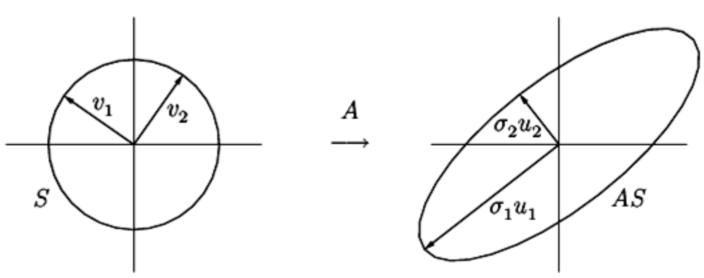
SINGULÁRNY ROZKLAD MATICE A PSEUDOINVERZNÉ MATICE

2.1 Singulárny rozklad matice

2.1.1 Geometrická interpretácia

Nech S^{n-1} je jednotková sféra v $\mathbb{R}^n$ a nech A je matica typu $m \times n$, $m \geq n$. Pre jednoduchosť predpokladajme $hod(A) = n$. Obrazom $A(S^{n-1})$ sféry S^{n-1} je elipsoid v $\mathbb{R}^m$.
Najskôr definujme n singulárnych čísel matice A, ktoré predstavujú dĺžky n hlavných poloosí obrazu $A(S^{n-1})$, ozn. $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, pričom predpokladáme, že $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$.
Definujme n ľavých singulárnych vektorov matice A. To sú jednotkové vektory $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ orientované v smere hlavných poloosí hyperelipsy $A(S^{n-1})$, ktorých číslovanie zodpovedá číslovaniu singulárnych čísel.
Ďalej definujme n pravých singulárnych vektorov matice A. To sú jednotkové vektory $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sféry S^{n-1}, ktoré sú predobrazmi hlavných polosí $A(S^{n-1})$, pričom platí

$$Av_j = \sigma_j u_j.$$



Zobrazenie v $\mathbb{R}^2$.

2.1.2 Redukovaný singulárny rozklad matice

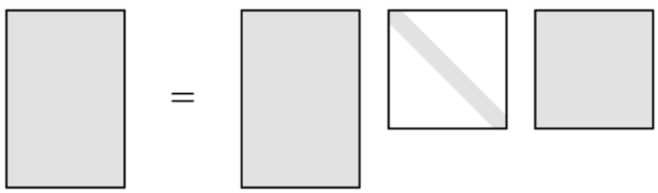
Z rovnosti $Av_j = \sigma_j u_j$, $1 \leq j \leq n$ dostávame maticové vyjadrenie

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \left[v_1 \middle| v_2 \middle| \ldots \middle| v_n \right] = \left[u_1 \middle| u_2 \middle| \ldots \middle| u_n \right] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \cdots & \\ & \sigma_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix},$$

čo skrátene zapisujeme $AQ_2 = \hat{Q}_1\hat{\Sigma}$, kde $\hat{\Sigma}$ je diagonálna $n \times n$ matica so singulárnymi číslami na hlavnej diagonále a $\hat{Q}_1$ je $m \times n$ matica s ortonormálnymi stĺpcami. Pretože Q_2 je unitárna, dostávame

$$A = \hat{Q}_1\hat{\Sigma}\mathrm{Q}_2^{\mathrm{T}},$$

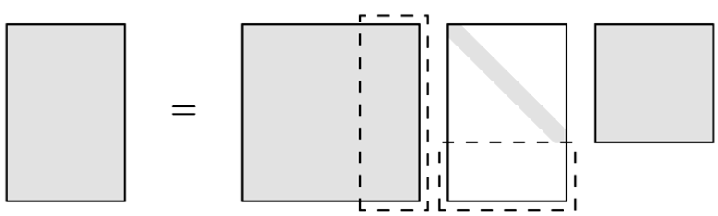
kde ${Q_2}^{\mathrm{T}}$ je inverzná k Q_2. Takýto rozklad matice A nazývame redukovaný singulárny rozklad matice.



A $\hat{Q}_1$ $\hat{\Sigma}$ $\mathrm{Q}_2^{\mathrm{T}}$

2.1.3 Úplný singulárny rozklad matice

Maticu $\boldsymbol{\hat{Q}_1}$ nahradíme maticou $\boldsymbol{Q_1}$, ktorú dostaneme tak, že stĺpce matice $\boldsymbol{\hat{Q}_1}$ doplníme do ortonormálnej bázy priestoru $\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$. Podobne maticu $\boldsymbol{\hat{\Sigma}}$ nahradíme maticou $\boldsymbol{\Sigma}$, ktorú dostaneme doplnením nulových riadkov ako je znázornené na obrázku



A Q_1 Σ $\mathrm{Q}_2^{\mathrm{T}}$

Teda dostávame $A = Q_1\Sigma Q_2^T$, kde Q_1 je všeobecne unitárna $m \times m$ matica, Q_2 je unitárna $n \times n$ matica a Σ je reálna diagonálna $m \times n$ matica.

2.1.4 Vlastnosti singulárneho rozkladu matice

a) Stĺpcový podpriestor matice A je $S(A) = [u_1, u_2, \dots, u_r]$ a nulový podpriestor je $N(A) = [v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n]$. Je to dôsledok faktu, že stĺpcový podpriestor $S(\Sigma) = \langle e_1, e_2, \dots, e_r \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$ a nulový podpriestor $N(\Sigma) = \langle e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$.

b) 2-norma matice A $\|A\|_2 = \sigma_1$ a Frobeniova norma matice A $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2}$.

c) Ak $A^T = A$, potom singulárne čísla matice A sa rovnajú absolútnym hodnotám vlastných čísel matice A.

d) Ak $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, potom

$$|\det(A)| = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i.$$

e) **Zmena bázy**

Pri vhodnej voľbe báz singulárny rozklad matice umožňuje transformovať každú maticu na diagonálnu. Ak

$$b' = Q_1^*.b$$
$$x' = Q_2^T.x,$$

potom

$$Ax = b \iff Q_1^*.b = Q_1^* A x = Q_1^* Q_1 \Sigma Q_2^T x \iff b' = \Sigma x'.$$

Príklad 1: Vypočítajte singulárny rozklad matice $A = \mathrm{Q}_1 \Sigma \mathrm{Q}_2^{\mathrm{T}}$, ak

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

$$\mathrm{A^T A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vypočítame vlastné čísla matice $\mathrm{A^T A}$ ako korene charakteristického polynómu $det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, kde $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Normalizovaný vlastný vektor prislúchajúci vlastnému číslu

$$\lambda_1 = 3 \text{ je } v_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1 \text{ je } v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

čiže

$$Q_2^T = (v_1 \quad v_2)^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Singulárne čísla sú $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$. Ďalej počítame

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} A v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \qquad u_2 = A v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Vektor u_3 vypočítame napríklad tak, že nájdeme bázu podpriestoru $N(A^T)$, tj. vektor

$$u_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Potom

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

a teda

$$A = Q_1 \Sigma Q_2^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

□

Príklad 2: Vypočítajte singulárny rozklad matice s ortogonálnymi stĺpcami, ak

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Pretože $A^T A = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$ a $\lambda_1 = 49$, $\lambda_2 = 25$, singulárne čísla sú $\sigma_1 = 7$, $\sigma_2 = 5$. Matica

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$u_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a u_3 dostaneme ako vektor kolmý na u_1 a u_2, čiže

$$u_3 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$A = \mathrm{Q}_1\Sigma\mathrm{Q}_2^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

2.2 Pseudoinverzné matice

Definícia 2.1: Nech A je matica typu $m \times n$ a nech $h(A) = r$. Ak $A = LU$ (resp. $A = P^{-1}LU$), potom z matice U vytvoríme maticu $\overline{U}$ typu $r \times n$ odstránením posledných $m - r$ nulových riadkov. Podobne z matice L (resp. $P^{-1}L$) odstránením posledných $m - r$ stĺpcov vytvoríme maticu $\overline{L}$ (resp. $\overline{P^{-1}\,L}$) typu $m \times r$ pričom platí

$$A = \overline{L}.\overline{U} \text{ (resp. } A = \overline{P^{-1}\,L}.\overline{U})$$

Potom $A = \overline{L}.\overline{U}$ nazývame **kostrový rozklad** matice A.

Nech A je matica typu $m \times n$, na ktorú nekladieme žiadne podmienky. Potom optimálnym pseudoriešením systému $Ax = b$ nazývame vektor $\bar{x}$, ktorý je určený dvomi podmienkami:

1. vektor $A\bar{x}$ je rovný ortogonálnej projekcii vektora b na $S(A)$,
2. vektor $\bar{x} \in S(A^T)$.

Definícia 2.2: Matica Σ^+ je matica typu

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & . & . & \vdots \\ 0 & 0 & 1/\sigma_r & 0 & . & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde σ_i sú singulárne čísla matice A.

Definícia 2.3: Maticu A^+ budeme nazývať pseudoinverznou maticou k matici A, ak spĺňa nasledujúce podmienky

a) $AA^+A = A$
b) $A^+AA^+ = A^+$
c) $(AA^+)^T = AA^+$
d) $(A^+A)^T = A^+A$

2.2.1. Vlastnosti pseudoinverznej matice A^+

a) $A^+ = A^{-1}$, ak A je regulárna.

b) $(A^+)^+ = A$

c) $(A^+)^T = (A^T)^+$

d) $A^+ = \begin{cases} (A^TA)^{-1}A^T & \text{ak } hod(A_{m\times n}) = n \\ A^T(AA^T)^{-1} & \text{ak } hod(A_{m\times n}) = m \end{cases}$

e) $(PAQ)^+ = Q^TA^+P^T$, ak P a Q sú ortogonálne matice, ale vo všeobecnosti $(AB)^+ \neq B^+A^+$

2.2.2. Výpočet pseudoinverznej matice

Budeme používať dva spôsoby výpočtu pseudoinverznej matice.

a) Nech A má singulárny rozklad $A = Q_1\Sigma Q_2^T$, potom pseudinverznú maticu A^+ vypočítame pomocou vzťahu $A^+ = Q_2\Sigma^+Q_1^T$.
b) Ak $A = BC$ je kostrový rozklad matice A, potom pseudonverznú maticu vypočítame

$$A^+ = C^+B^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T.$$

Ak A^+ je pseudoinvezná matica k matici A, potom optimálne pseudoriešenie k systému Ax=b je dané vzťahom

$$\bar{x} = A^+b.$$

Príklad 3: Nájdite optimálne pseudoriešenie systému $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Počítame

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vlastné hodnoty matice A^TA sú $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 1$. Preto singulárne čísla sú $\sigma_1 = \sqrt{3}$ a $\sigma_2 = 1$. Prislúchajúce vlastné vektory sú

$$v_1 = \begin{pmatrix} -{}^1/_{\sqrt{2}} \\ {}^1/_{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} {}^1/_{\sqrt{2}} \\ {}^1/_{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Av_1 = \begin{pmatrix} {}^1/_{\sqrt{6}} \\ {}^2/_{\sqrt{6}} \\ -{}^1/_{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \qquad u_2 = Av_2 = \begin{pmatrix} {}^1/_{\sqrt{2}} \\ 0 \\ {}^1/_{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Vektor u_3 nájdeme ako bázu nulového podpriestoru matice A^T

$$u_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Potom singulárny rozklad matice je

$$A = Q_1 \Sigma Q_2^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Pseudoinverznú maticu A^+ matice A dostaneme ako

$$A^+ = \mathrm{Q}_2 \Sigma^+ \mathrm{Q}_1^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Potom riešenie systému $Ax = b$ dostaneme ako optimálne pseudoriešenie $\bar{x} = A^+b$, čiže

$$\bar{x} = A^+b = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Príklad 4: Pomocou kostrového rozkladu matice A nájdite A^+, ak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \bar{L}\bar{U},$$

kde $\bar{L}\bar{U}$ je kostrový rozklad matice A, ktorý dostaneme pomocou LU-rozkladu matice A. Potom

$$A^{+} = [\overline{U}^T(\overline{U}\,\overline{U}^T)^{-1}][(\overline{L}^T\overline{L})^{-1}\overline{L}^T] = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{2}\!/_{3} & -{}^{1}\!/_{3} & {}^{1}\!/_{3} \\ -{}^{5}\!/_{3} & {}^{4}\!/_{3} & -{}^{1}\!/_{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -{}^{5}\!/_{3} & {}^{4}\!/_{3} & -{}^{1}\!/_{3} \end{pmatrix}.$$

$\square$

2.3 Riešené príklady

Príklad 5: Predpokladajme, že

$$A = Q_1 \Sigma Q_2^T = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4)^T.$$

a) Nájdite $\mathrm{hod}(A)$ a bázu podpriestoru $S(A)$.
b) Aké sú vlastné čísla a vlastné vektory matice $A^T A$?
c) Čomu sa rovná Av_1?

Riešenie:
a) $\mathrm{hod}(A) = \mathrm{hod}(A^T A) = 2 - \textit{počet nenulových singulárnych čísel}$
b) $\mathrm{A^T A} = (\mathrm{Q_1 \Sigma Q_2^T})^\mathrm{T}(\mathrm{Q_1 \Sigma Q_2^T}) = \mathrm{Q_2 \Sigma^T Q_1^T Q_1 \Sigma Q_2^T} = \mathrm{Q_2 \Sigma^T \Sigma Q_2^T}$, čiže $\mathrm{A^T A Q_2} = \mathrm{Q_2 \Sigma^T \Sigma}$, z čoho vyplýva, že vlastné čísla matice $\mathrm{A^T A}$ sú diagonálne prvky matice $\Sigma^\mathrm{T}\Sigma$, tj. 4, 1, 0, 0 a vlastné vektory matice $\mathrm{A^T A}$ sú v_1, v_2, v_3, v_4 stĺpce matice $\mathrm{Q_2}$.
c) $\mathrm{Q_2^T} v_1 = \begin{pmatrix} - & v_1^T & - \\ - & v_2^T & - \\ - & v_3^T & - \\ - & v_4^T & - \end{pmatrix}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pretože vektory v_j sú navzájom ortogonálne,

$\Sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathrm{Q_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2u_1$, tj. $Av_1 = \mathrm{Q_1 \Sigma Q_2^T} v_1 = 2u_1$.

□

Príklad 6: Nájdite pseudoinverznú maticu A^+ pomocou singulárneho rozkladu a maticu ortogonálnych projekcií P_1 na $S(A)$ a P_2 na $S(A^T)$, ak

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Všimnime si, že matica

$$A^T A = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 0 \\ -12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má jeden vlastný vektor $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, ktorý zodpovedá vlastnej hodnote $\lambda_1 = 25$ a dva vlastné vektory, ktoré sú kolmé na x_1 a zodpovedajú vlastnému číslu 0. Tieto vlastné vektory nájdeme ako bázu nulového podpriestoru $N(A)$. Teda

$$x_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Potom singulárne číslo $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5$. Nakoniec, pretože Q_1 je 1×1 matica, môže byť rovná buď (1) alebo (-1). Riešením rovnice

$$Ax_1 = \sigma_1 y_1$$

dostaneme $y_1 = (1) = Q_1$. Teda

$$A = \mathrm{Q}_1 \Sigma \mathrm{Q}_2^{\mathrm{T}} = (1)(5 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Pseudoinverznú maticu dostaneme

$$A^+ = \mathrm{Q}_2 \Sigma^+ \mathrm{Q}_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} 3/25 \\ -4/25 \\ 0 \end{pmatrix}^T.$$

Matica ortogonálnej projekcie na $S(A)$ je

$$P_1 = AA^+ = \mathrm{Q}_1 \Sigma \mathrm{Q}_2^{\mathrm{T}} \mathrm{Q}_2 \Sigma^+ \mathrm{Q}_1^{\mathrm{T}} = (1).$$

Matica ortogonálnej projekcie na $S(A^T)$ je

$$P_2 = A^+A = \mathrm{Q}_2 \Sigma^+ \mathrm{Q}_1^{\mathrm{T}} \mathrm{Q}_1 \Sigma \mathrm{Q}_2^{\mathrm{T}} = \mathrm{Q}_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Q}_2^{\mathrm{T}} = x_1 x_1^T = \begin{pmatrix} 9/25 & 12/25 & 0 \\ 12/25 & 16/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pretože x_1 je jednotkový vektor, je to práve matica ortogonálnej projekcie na podpriestor generovaný vektorom x_1, čo je $S(A^T)$.

□

Príklad 7: Dokážte, že $hod(A) = r$, tj. počtu nenulových singulárnych čísel.

Riešenie: Hodnosť diagonálnej matice je rovná počtu nenulových prvkov, a v rozklade $A = \mathrm{Q}_1 \Sigma \mathrm{Q}_2^{\mathrm{T}}$ majú $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2^{\mathrm{T}}$ plnú hodnosť. Preto $hod(A) = hod(\Sigma) = r$.

Príklad 8: Dokážte, že obrazom jednotkovej sféry $S^{n-1} = \{x : \|x\|_2 = 1\}$ pri lineárnej transformácii danej regulárnou maticou A je elipsoid.

Riešenie: Nech A je regulárna matica a nech $S^{n-1} = \{x : \|x\|_2 = 1\}$ je jednotková sféra. Nech A má singulárny rozklad

$$A = \mathrm{Q}_1 \Sigma \mathrm{Q}_2^{\mathrm{T}} \qquad \text{a teda} \qquad A^{-1} = \mathrm{Q}_2 \mathrm{D}^{-1} \mathrm{Q}_1^{\mathrm{T}},$$

kde $\mathrm{D} = \mathrm{diag}\,(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ a Q_1, Q_2 sú ortogonálne matice. Potom pre každé $y \in AS^{n-1}$ existuje $x \in S^{n-1}$ také, že platí $y = Ax$. Označme $w = \mathrm{Q}_1^{\mathrm{T}} \mathrm{y}$, potom platí

$$1 = \|x\|_2^2 = \|A^{-1}Ax\|_2^2 = \|A^{-1}y\|_2^2 = \left\|\mathrm{Q}_2 \mathrm{D}^{-1} \mathrm{Q}_1^{\mathrm{T}} \mathrm{y}\right\|_2^2 = \left\|\mathrm{D}^{-1} \mathrm{Q}_1^{\mathrm{T}} \mathrm{y}\right\|_2^2 = \|\mathrm{D}^{-1} \mathrm{w}\|_2^2$$
$$= \frac{w_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{w_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots \frac{w_n^2}{\sigma_n^2}.$$

□

Príklad 9: Nech číslo podmienenosti matice A v 2 –norme je $\kappa_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$. Dokážte, že $\kappa_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.

Riešenie:

$$\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \|A\|_2 = \left\|\mathrm{Q}_1 \Sigma \mathrm{Q}_2^{\mathrm{T}}\right\|_2 = \|D\|_2 = \sigma_1$$

$$\min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2} = \frac{1}{\left\|\mathrm{Q}_2 \mathrm{D}^{-1} \mathrm{Q}_1^{\mathrm{T}}\right\|_2} = \frac{1}{\|\mathrm{D}^{-1}\|_2} = \sigma_n$$

Inými slovami najdlhší a najkratší vektor AS^{n-1} majú príslušné dĺžky $\sigma_1 = \|A\|_2$ a $\sigma_n = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$, čiže $\kappa_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$.

□

2.4 Príklady na precvičenie

10. Dokážte, že nenulové singulárne čísla matice A sú druhé odmocniny z nenulových vlastných čísel A^TA alebo AA^T.

11. Ak $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$ sú nenulové singulárne čísla matice A, potom funkcia $\vartheta_k(A) = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2)}$ definuje jednotkovú invariantnú normu z $\mathbb{R}^{m\times n}$ (alebo $\mathbb{C}^{m\times n}$) pre každé $k = 1,2,\dots,r$. Ukážte, že pre 2-normu a Frobeniovu normu platí $\|A\|_2^2 = \sigma_1^2$ a $\|A\|_F^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_r^2$.

12. Každá zo štyroch nasledujúcich noriem matice je ohraničená zhora aj zdola konštantným násobkom ostaných maticových noriem. Presnejšie, $\|A\|_i \leq \alpha\|A\|_j$, kde α je (i,j)-prvok v nasledujúcej matici

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \infty & F \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \infty \\ F \end{array} & \begin{pmatrix} * & \sqrt{n} & n & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & * & \sqrt{n} & 1 \\ n & \sqrt{n} & * & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & \sqrt{n} & \sqrt{n} & * \end{pmatrix}
\end{array}$$

Pri analýze limitných hodnôt nerozlišuje, ktorá z noriem je použitá, preto hovoríme o ekvivalentných maticových normách. Ukážte, prečo sú prvky $(2,F)$ a $(F,2)$ správne.

13. Ak $Ax = b$ je riešiteľný, potom $x = A^+b$ je riešenie s minimálnou euklidovskou normou.

14. Ak $Ax = b$ nie je riešiteľný, potom $x = A^+b$ je riešením normálneho systému s minimálnou euklidovskou normou.

15. Dokážte, že ak $|\varepsilon| < \sigma_r^2$ pre najmenšie nenulové singulárne číslo matice $A_{m\times n}$, potom existuje $(A^TA + \varepsilon \mathrm{I})^{-1}$ a $\lim_{\varepsilon\to 0}(A^TA + \varepsilon \mathrm{I})^{-1}A^T = A^+$.

16. Dokážte, že ak σ_r je najmenšie nenulové singulárne číslo matice $A_{m\times n}$, potom

$$\sigma_r = \min_{\substack{\|x\|_2=1 \\ x\in S(A^T)}} \|Ax\|_2 = \frac{1}{\|A^+\|_2}.$$

17. Nájdite pseudoinverznú maticu k matici $A = O$ (nulová matica) typu $m \times n$.

18. Nech $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vypočítajte pseudoinverznú maticu A^+a vektor $\bar{x}$, ktorý je riešením systému $A\bar{x} = b = Pb$.

19. Nech matica A má ortonormálne stĺpce. Čomu sa rovná pseudoinverzná matica A^+?

20. Nech matica AA^T je regulárna. Potom ukážte, že

a) $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$ a $\bar{x} = A^+b$.

b) $A = (1\ 1)$. Nájdite optimálne riešenie $u + v = 3$.

21. Nájdite singulárny rozklad matice, ak

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$,

e) $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

f) $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

22. Minimálna dĺžka riešenia systému $Ax = b$ získaného pomocou metódy najmenších štvorcov je $x^+ = A^+ b = Q_2 \Sigma^+ Q_1^T b$. Dokážte.

23. Nájdite pseudoinverznú maticu pre matice

a) $A = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$,

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

e) $E = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

24. Nech Q je matica typu $m \times n$ a má ortonormálne stĺpce. Nájdite jej pseudoinverznú maticu Q^+.

25. Aká je minimálna dĺžka riešenia systému $x^+ = A^+ b$ získaného metódou najmenších štvorcov, ak

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

26. Ak $A = Q_1 \Sigma Q_2^{-1}$ je rozložená na QS' (prevrátený polárny rozklad), čo sú Q a S'?

27. Nech T je $m \times p$ matica a W je $n \times q$ matica. Nech $G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$, kde G_{11} je typu $p \times m$, reprezentuje ľubovoľnú pseudoinverznú maticu typu $(m + n) \times (p + q)$ blokovo diagonálnej matice $A = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}$. Ukážte, že G_{11} je pseudoinverzná matica matice T a G_{22} je pseudoinverzná matica matice W. ďalej ukážte, že $TG_{12}W = 0$ a $WG_{21}T = 0$.

28. Vysvetlite, prečo sú AA^+ a A^+A matice projekcie (a preto symetrické). Na aké základné podpriestory sa premietajú?

29. Dokážte nasledujúce vlastnosti matice A^+,

a) $A^+ = A^{-1}$, ak A je regulárna.

b) $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, potom $A^+ = A^T(AA^T)^+ = (A^TA)^+A^T$.

c) Ak A má lineárne nezávislé stĺpce, potom $(A^TA)^{-1}A^T$ je jej pseudoinverzná matica. Dokážte.

d) Ak A má lineárne nezávislé riadky, potom $A^T(A^TA)^{-1}$ je jej pseudoinverzná matica. Dokážte.

„Matematik je slepý človek v temnej miestnosti hľadajúci čiernu mačku, ktorá tam nie je.“

-Charles Darwin-

KAPITOLA 3

RIEŠENIA, NÁVODY, POZNÁMKY

Kapitola 1 - Jordanov normálny tvar matice

$\boxed{\textbf{17}}$ **a)** $\lambda_1 = 2,\ m_1 = 1,\ \lambda_2 = 4,\ m_2 = 1$; **b)** $\lambda_1 = 2,\ m_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ m_2 = 1,\ \lambda_3 = 6,\ m_3 = 1$; **c)** $\lambda_1 = 6, m_1 = 1, \lambda_2 = 8, m_2 = 2$; **d)** $\lambda_1 = 1, m_1 = 1, \lambda_2 = 2, m_2 = 2$; **e)** $\lambda_1 = 2,\ m_1 = 3$

$\boxed{\textbf{18}}$ Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matíc

a) $\lambda_1 = 1, m_1 = 1$

$\lambda_2 = -4, m_2 = 1$

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

b) $\lambda = -1, m = 2$

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

c) $\lambda_1 = 1, m_1 = 2$

$\lambda_2 = -1, m_2 = 1$

$v_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix}$

d) $\lambda_1 = 2, m_1 = 2$

$\lambda_2 = 8, m_2 = 1$

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

e) $\lambda_1 = -6, m_1 = 2$

$\lambda_2 = 0, m_2 = 1$

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$

f) $\lambda_1 = 0, m_1 = 1$

$\lambda_2 = 1, m_2 = 1$

$\lambda_3 = 2, m_3 = 2$

$v_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}4\\3\\0\\0\end{pmatrix},$

$v_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

g) $\lambda_1 = 2, m_1 = 2$

$\lambda_2 = 1, m_2 = 2$

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\boxed{19}$ **a)** $J_3(2)$; **b)** $J_2(-1) \oplus J_1(-1)$; **c)** $J_2(-1) \oplus J_1(10)$; **d)** $J_3(-1)$; **e)** $J_2(1) \oplus J_1(2)$; **f)** $J_2(0) \oplus J_1(1)$; **g)** $J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(2)$; **h)** $J_3(1) \oplus J_1(1)$; **i)** $J_2(0) \oplus J_2(0)$; **j)** $J_2(8) \oplus J_1(12) \oplus J_1(12)$; **k)** $J_1(3) \oplus J_3(2)$.

$\boxed{20}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

l) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$;

$\boxed{21}$ Nájdite Jordanov normálny tvar a Jordanovu bázu matíc

a) $\lambda_1 = -1, m_1 = 3, J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

báza: $\{(1,1,-1), (0,0,-1), (-1,0,1)\}$;

b) $\lambda_1 = -1, m_1 = 2$ a $\lambda_2 = 1, m_2 = 1, J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

báza: $\{(1,1,-1), (-1,0,0), (-2,-1,2)\}$;

c) $\lambda_1 = -1, m_1 = 2$ a $\lambda_2 = 1, m_2 = 1, J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

báza: $\{(1,1,-1), (-1,0,0), (-1,1,0)\}$;

d) $\lambda_1 = 1, m_1 = 2$ a $\lambda_2 = 0, m_2 = 1, J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

báza: $\{(1,1,-2), (1,2,-2), (-3,-5,7)\}$;

e) $\lambda_1 = 1, m_1 = 4, J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

báza: $\{(1,-1,0,0), (1,0,-1,0), (1,0,0,-1), (1,0,0,0)\}$;

f) $\lambda_1 = 1, m_1 = 2$ a $\lambda_2 = -1, m_2 = 2, J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

báza: $\{(1,1,-3,3), (-1,0,1,-1), (2,1,-3,3), (-6,-3,10,-9)\}$;

g) $\lambda_1 = 1, m_1 = 2$ a $\lambda_2 = -1, m_2 = 2, J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 01 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

báza: $\{(0,1,-2,2), (1,0,-1,1), (-1,-1,4,-4), (3,3,-11,12)\}$;

h) $\lambda_1 = 0, m_1 = 2$ a $\lambda_2 = -1, m_2 = 2, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

báza: $\{(1,1,-3,3), (-1,0,1,-1), (0,0,1,-1), (-2,-1,6,-5)\}$;

i) $\lambda_1 = 1, m_1 = 3$ a $\lambda_2 = 2, m_2 = 2, J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

báza : $\{(1,0,0,0,0), (0,1,-1,0,0), (0,0,1,-1,0), (-1,0,0,1,-1), (-1,0,0,0,1)\}$;

j) $\lambda_1 = 2, m_1 = 3$ a $\lambda_2 = 3, m_2 = 2, J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

báza : $\{(2,1,0,0,1), (1,0,1,0,0), (0,1,0,1,0), (-1,0,0,1,0), (2,0,0,0,1)\}$;

k) $\lambda_1 = 1, m_1 = 5, J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

báza : $\{(1,0,0,0,0), (3,2,1,0,0), (0,0,0,0,1), (0,1,0,0,0), (0,0,-2,1,0)\}$;

l) $\lambda_1 = 1, m_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1, m_2 = 4, J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

báza : $\{(1,0,0,0,0), (3,2,1,0,0), (0,0,0,0,1), (0,1,0,0,0), (0,0,-2,1,0)\}$;

m) $\lambda_1 = 3, m_1 = 6, J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

báza : $\{(1,0,0,0,0,0), (0,0,1,0,0,0), (0,1,-2,1,0,1), (0,1,-1,1,-1,1),$
$(0,1,0,0,-1,1), (0,0,0,0,-1,1)\}$;

$\boxed{\textbf{22}}$ J musí pozostávať z jednej Jordanovej bunky rádu 2 a ostatné musia byť rádu 2 alebo 1. Z toho vyplýva, že sú len dve možnosti :

$$J = \left(\begin{array}{cc:cc:c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) ;$$

Všimnite si, že na diagonálne musia byť samé 2, pretože 2 je jediné vlastné číslo.

$\boxed{\mathbf{23}}$ **a)** Keďže výraz $(t-2)$ sa v charakteristickom polynóme nachádza 3 $-$krát, z toho vyplýva, že 2 sa musí na hlavnej diagonále vyskytovať tiež 3 $-$krát. Podobne 5 sa musí na hlavnej diagonále nachádzať 2 $-$krát. Dostávame 6 rôznych možných Jordanových tvarov :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & 1 \\ & & & & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & 1 \\ & & & & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & 1 \\ & & & & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix};$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{pmatrix};$$

c)

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & & & \\ & & 7 & 1 & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 & & & \\ & 7 & & & \\ & & 7 & & \\ & & & 7 & \\ & & & & 7 \end{pmatrix};$$

d)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix};$$

e)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 5 & 1 & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix};$$

$\boxed{\mathbf{24}}$ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2[1+(-1)^{n+1}] & 1+(-1)^{n+1} \\ 0 & -1+2(-1)^n & -1+(-1)^n \\ 0 & 2[1+(-1)^{n+1}] & 2+(-1)^{n+1} \end{pmatrix};$

$\boxed{\mathbf{25}}$ $A^{100} = \begin{pmatrix} 307 & 100 & 203 \\ 310 & 101 & 205 \\ -614 & -200 & -406 \end{pmatrix};$

$\boxed{\mathbf{26}}$ $A^{101} = \begin{pmatrix} -102 & -103 & -204 \\ -101 & -100 & -200 \\ 101 & 101 & 201 \end{pmatrix};$

$\boxed{\mathbf{27}}$ **a)** $\begin{pmatrix} 4e-3 & 2-2e \\ 6e-6 & 4-3e \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 \\ e^2 & 0 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} e^a & b.e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix} 3/2 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix};$

e) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13e^{16}-e^4 & 13e^{16}-5e^4 & 2e^{16}-2e^4 \\ -9e^{16}+e^4 & -9e^{16}+5e^4 & -2e^{16}+2e^4 \\ 16e^{16} & 16e^{16} & 4e^{16} \end{pmatrix};$

$\boxed{\mathbf{28}}$ $\sin A = A$; $\cos A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix};$

$\boxed{\mathbf{29}}$ $\ln A = \begin{pmatrix} 1 & -9/2 & -7/2 \\ 1 & -11/2 & -9/2 \\ -1 & 11/2 & 9/2 \end{pmatrix};$

$\boxed{30}$ Vyplýva priamo z definície $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$;

$\boxed{31}$ Ak $A^2 = A$, potom $e^A = I + (e-1)A$;

$\boxed{32}$ Platí $(e^A)^T = e^{A^T}$. Ak $A^T = -A$, potom $(e^A)^T e^A = e^{A^T} e^A = e^{-A} e^A = e^{A-A} = e^0 = I$;

$\boxed{33}$ **a)** $\begin{pmatrix} ai & 0 \\ 0 & -ai \end{pmatrix}$, báza: $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}\right)\right\}$; **b)** $\begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}$, báza: $\left\{\left(\frac{1-2i}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1-2i}{\sqrt{6}}\right)\right\}$;

c) $\begin{pmatrix} 3i & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, báza: $\left\{\left(\frac{-1+3i}{6}, \frac{-1-3i}{6}, \frac{4}{6}\right), \left(\frac{-1-3i}{6}, \frac{-1+3i}{6}, \frac{4}{6}\right)\right\}$;

$\boxed{34}$ **a)** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, báza: $\left\{\left(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right), \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\}$; **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, báza:

$\left\{\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right), (0,1,0), \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)\right\}$; **c)** $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, báza:

$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{5\sqrt{2}}, 0, \frac{7}{5\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{7}{5\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{5\sqrt{2}}\right)\right\}$;

$\boxed{35}$ **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + i2\sqrt{2}/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$, báza: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{2}\left(1, -1, i\sqrt{2}\right), \frac{1}{2}\left(1, -1, -i\sqrt{2}\right)\right\}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -(1+i)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, báza:

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 0,0,1), \frac{1}{2}(1, i, 1, -i), \frac{1}{2}(i, 1, -i, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1, i, 0)\right\}$

$\boxed{36}$ **a)** $\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, báza: $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1,2), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$;

b) $\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

báza: $\left\{\frac{1}{\sqrt{42}}(-1,2, -1,6), \frac{1}{\sqrt{14}}(3,2,1,0), \frac{1}{\sqrt{7}}(1, -2,1,1), \frac{1}{\sqrt{21}}(2, -1, -4,0)\right\}$

Kapitola 2 - Singulárny rozklad a pseudoinverzné matice

$\boxed{10}$ Z výpočtu $A^T A = (Q_1 \Sigma Q_2^T)^T (Q_1 \Sigma Q_2^T) = Q_2 \Sigma^T Q_1^T Q_1 \Sigma Q_2^T = Q_2 (\Sigma^T \Sigma) Q_2^T$ vidíme, že $A^T A$ je podobná $\Sigma^T \Sigma$ a preto má rovnaký počet n vlastných čísel. Vlastné čísla diagonálnej matice

$\Sigma^T\Sigma$ sú $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_p^2$, s $n-p$ dodanými vlastnými číslami ak $n > p$. Podobný výpočet použijeme aj pre m vlastných čísel AA^T.

$\boxed{\mathbf{11}}$ $\vartheta_1(A) = \sigma_1^2 = \|A\|_2^2$ je zrejmé. Výraz $\vartheta_k^2(A) = \|A\|_F^2$ dostaneme nasledovne:
$\|A\|_F^2 = trace(A^TA) = trace Q_2 \begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2^T = trace(D^2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2$,
kde $D = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ a "$trace$" označuje stopu matice.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Ak $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ sú nenulové singulárne čísla matice A, potom podľa cvičenia XX dostávame $\|A\|_2^2 = \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2 = \|A\|_F^2 \leq n\sigma_1^2 = n\|A\|_2^2$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Predpokladajme, že $Ax_0 = b$ a nahraďme A výrazom AA^+A, teda $b = Ax_0 = AA^+Ax_0 = AA^+b$. Preto A^+b je riešením $Ax = b$, ak je riešiteľný. Aby sme ukázali, že A^+b je riešením, všimnite si, že všeobecným riešením je $A^+b + N(A)$ (čiastočné riešenie plus všeobecné riešenie homogénnej rovnice), teda každé riešenie má tvar $z = A^+b + n$, kde $n \in N(A)$. Je zrejmé, že $A^+b \in S(A^+) = S(A^T)$ a teda $A^+b \perp n$. Preto $\|z\|_2^2 = \|A^+b + n\|_2^2 = \|A^+b\|_2^2 + \|n\|_2^2 \geq \|A^+b\|_2^2$. Rovnosť nastáva len vtedy, ak $n = 0$, takže A^+b je jediným riešením s minimálnou euklidovskou normou.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Riešenia normálneho systému sú riešenia normálnej rovnice $A^TAx = A^Tb$ a je jednoduché ukázať, že A^+b je jedným takým riešením. Aby sme ukázali, že A^+b je riešením normálneho systému s minimálnou euklidovskou normou, použijeme rovnaký postup ako v predošlom príklade.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Ak $A = \mathrm{Q}_1 \begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Q}_2^\mathrm{T}$ je singulárny rozklad, kde $D = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, potom $A^TA + \varepsilon\mathrm{I} = \mathrm{Q}_1 \begin{pmatrix} \mathrm{D}^2 + \varepsilon\mathrm{I} & 0 \\ 0 & \varepsilon\mathrm{I} \end{pmatrix} \mathrm{Q}_2^\mathrm{T}$ je singulárny rozklad so singulárnymi číslami, z ktorých žiadne nie je nulové, takže je regulárna. Okrem toho

$$(A^TA + \varepsilon\mathrm{I})^{-1}A^T = \mathrm{Q}_1 \begin{pmatrix} (\mathrm{D}^2 + \varepsilon\mathrm{I})^{-1}\mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Q}_2^\mathrm{T} \to \mathrm{Q}_1 \begin{pmatrix} \mathrm{D}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Q}_2^\mathrm{T} = A^+.$$

$\boxed{\mathbf{16}}$ Ak $A = \mathrm{Q}_1 \begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Q}_2^\mathrm{T}$ je singulárny rozklad, kde $D = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ a $A_{m\times n}^+ = \mathrm{Q}_1 \begin{pmatrix} \mathrm{D}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Q}_2^\mathrm{T}$ sú singulárne rozklady, v ktorých $\mathrm{Q}_2 = (\mathrm{Q}_{11} | \mathrm{Q}_{12})$, potom stĺpce matice Q_{11} tvoria ortonormálnu bázu podpriestoru $S(A^T)$, čiže $x \in S(A^T)$ a $\|x\|_2 = 1$ vtedy a len vtedy, ak $x = \mathrm{Q}_{11}\mathrm{y}$, kde $\|y\|_2 = 1$. Preto 2-norma je jednotkový invariant,

$$\min_{\substack{\|x\|_2=1 \\ x\in S(A^T)}} \|Ax\|_2 = \min_{\|y\|_2=1} \|A\mathrm{Q}_{11}\mathrm{y}\|_2 = \min_{\|y\|_2=1} \|D\mathrm{y}\|_2 = \frac{1}{\|\mathrm{D}^{-1}\|_2} = \sigma_r = \frac{1}{\|A^+\|_2}.$$

$\boxed{\mathbf{17}}$ Ak $A = 0$, riadkový podpriestor priestor je 0, $\bar{x} = 0$ a $A^+ = 0$;

$\boxed{\mathbf{18}}$ $A = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(1 \quad 1 \quad 1) = \bar{L}\bar{U}$, $A^+ = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$, $\bar{x} = A^+b = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $A\bar{x} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} = p$;

$\boxed{\mathbf{19}}$ $A^+ = A^T$, pretože riešením systému $Ax = b$ podľa metódy najmenších štvorcov je vektor $\bar{x} = A^Tb$;

$\boxed{\mathbf{20b}}$ $\bar{u} = \bar{v} = \frac{3}{2}$;

$\boxed{\mathbf{21}}$ **a)** $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3 & 2/3\\2/3 & -1/3 & 2/3\\2/3 & 2/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}(1)$;

c) $\begin{pmatrix}1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45}\\-2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45}\\2/3 & 0 & 5/\sqrt{45}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\sqrt{2} & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix}3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\sqrt{10} & 0 & 0\\0 & 3\sqrt{10} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & 2/3\\-2/3 & -1/3 & 2/3\\2/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix}1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{4} & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$;

$\boxed{\mathbf{22}}$ Násobením ortogonálnej matice Q_1^T sa dĺžka vektora x nemení, takže $\|Ax - b\| = \|Q_1\Sigma Q_2^Tx - b\| = \|\Sigma Q_2^Tx - Q_1^Tb\|$. Zaveďme novú premennú $y = Q_2^Tx = Q_2^{-1}x$, ktorá má rovnakú dĺžku ako x. Potom minimalizovanie $\|Ax - b\|$ je rovnaké ako minimalizácia $\|\Sigma y - Q_1^Tb\|$. Tento výraz má diagonálnu maticu a poznáme najlepšie $y^+ = \Sigma^+Q_1^Tb$, čiže najlepšie x^+ je $x^+ = Q_2y^+ = Q_2\Sigma^+Q_1^Tb$. Môžeme priamo overiť, že toto x^+ je v riadkovom podpriestore a to vyhovuje $Ax^+ = p$.

$\boxed{23}$ **a)** $A^+ = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$, **b)** $B^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, **c)** $C^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; **e)** $\frac{1}{81}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ -18 & -18 & 9 \\ -4 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{24}$ $Q^+ = Q^T$;

$\boxed{25}$ všeobecné riešenie $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$, riešenie s najmenšou dĺžkou $x^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$;

$\boxed{26}$ $A = Q_1 \Sigma Q_2^{-1} = Q_1 Q_2^{-1} Q_2 \, \Sigma Q_2^{-1} = QS'Q$, $Q = Q_1 Q_2^{-1}$, $S' = Q_2 \Sigma Q_2^{-1}$;

$\boxed{27}$ $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} = A = AGA = \begin{pmatrix} TG_{11} & TG_{12} \\ WG_{21} & WG_{22} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} TG_{11}T & TG_{12}W \\ WG_{21}T & WG_{22}W \end{pmatrix}$. Preto $TG_{11}T = T$ (G_{11} je pseudoinverzná matica matice T), $WG_{22}W = W$ (G_{22} je pseudoinverzná matica matice W), $TG_{12}W = 0$ a $WG_{22}W = 0$.

$\boxed{28}$ $A = Q_1 \Sigma Q_2^{-1} \Rightarrow A^+ = Q_2 \Sigma^+ Q_1^T \Rightarrow AA^+ = Q_1 \Sigma \Sigma^+ Q_1^T \Rightarrow (AA^+)^2 = Q_1 \Sigma \Sigma^+ \Sigma \Sigma^+ Q_1^T = Q_1 \Sigma \Sigma^+ Q_1^T = AA^+$, z rovnakého dôvodu to platí aj pre A^+A. A^+A sa premieta na stĺpcový podpriestor a AA^+ na riadkový podpriestor.

$\boxed{29}$ **a)** Ak A je regulárna, potom $Q_1 = Q_2 = I$ a $\Sigma = \mathrm{A}$ a teda $A^+ = A^{-1}$; **b)** Použite singulárny rozklad na napísanie $A^T(AA^T)^+ = Q_1 \begin{pmatrix} \mathrm{D}^\mathrm{T} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Q}_2^\mathrm{T} Q_2 \begin{pmatrix} \mathrm{D}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Q}_2^\mathrm{T} = Q_1 \begin{pmatrix} \mathrm{D}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Q}_2^\mathrm{T} = A^+$; **c)** Ak A má lineárne nezávislé stĺpce, potom riadkový podpriestor je celé R^n, $A^T A x^+ = A^T b$ je zrejmé; **d)** $A^T(A^T A)^{-1} b$ je v riadkovom podpriestore, pretože A^T-krát je každý vektor v tomto priestore. $A^T A x^+ = A^T A A^T (AA^T)^{-1} b = A^T b$.

„Matematik je človek, ktorý hovorí a, myslí b, píše c, ale správne je d."
-Jan Hric-

KAPITOLA 4

Použitá literatúra

[1] SMIRNOV, J.M.: Sbornik zadac po analyticeskoj geometrii a linejnoj algebre, Moskva, Logos, 2005
[2] STRANG, G. : Linear algebra and its applications, Boston, Thomson Learning, 1988
[3] HARVILLE, D.A. : Matrix algebra exercises and solution, New York, Springer-Verlag, 2001
[4] PLŠKOVÁ, Z. : Cvičenia z maticového počtu I, Bakalárska práca FMFI UK, Bratislava
[5] http://mff.alikuvkoutek.cz/quotes/?page=subjects
[6] http://citaty.dovrecka.sk/quote.php?id=3784
[7] http://web.math.hr/nastava/vekt/files/jordan-zad.pdf
[8] http://web.math.hr/nastava/vekt/files/jordan-rj.pdf
[9] www.math.sk/mpm/otazka_4.pdf
[10] thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/vyuka/lag2006/jordan.ps
[11] http://www.elf.stuba.sk/Katedry/KM/predmety/ufa/ufa4.pdf
[12] http://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_exponential
[13] http://dsedlackova1955.spaces.live.com/?_c11_BlogPart_BlogPart=blogview&_c=BlogPartqs=cat%3DCITATY
[14] www.comlab.ox.ac.uk/nick.trefethen/lec4.ps
[15] http://www.ling.ohio-state.edu/~kbaker/pubs/Singular_Value_Decomposition_Tutorial.pdf
[16] http://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition
[17] http://www.cis.rit.edu/~ejipci/Reports/svd.pdf
[18] http://www.caam.rice.edu/~caam453/lecture18.pdf