

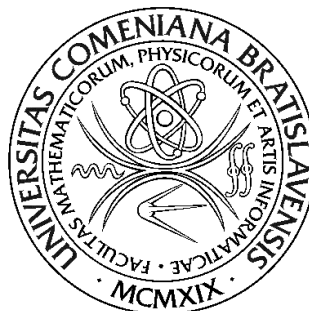
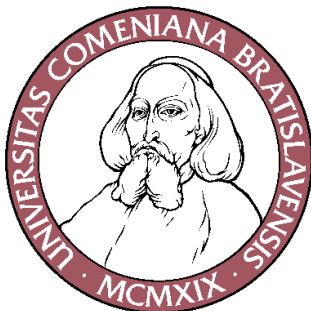
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2011

TOMISLAV SIMEUNOVIČ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



Kompaktné konečno-diferenčné schémy na výpočet amerických typov finančných derivátov

Študijný odbor: ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce:
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Diplomant: Tomislav Simeunovič

Bratislava 2011

efd079ff-5377-4acc-97cb-cebb4c5b0477



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Tomislav Simeunovič
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Kompaktné konečno-diferenčné schémy na výpočet amerických typov finančných derivátov

Cieľ : Návrh a analýza kompaktných konečno-diferenčných schém na výpočet amerických typov finančných derivátov so zameraním na put opcie.

Vedúci : prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 03.02.2010

Dátum schválenia: 05.04.2011

.....
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 18.04.2011

.....

Vlastnoručný podpis

Pod'akovanie

Na tomto mieste by som sa rád poďakoval svojmu diplomovému vedúcemu prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za čas, ktorý mi obetoval pri konzultovaní, za poskytnuté materiály, odborné rady a všetku jeho námahu spojenú s touto prácou.

Abstrakt

Simeunovič Tomislav : *Kompaktné konečno-diferenčné schémy na výpočet Amerických typov finančných derivátov*

Diplomový vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2011

Táto práca sa zaoberá problematikou oceňovania amerických finančných derivátov. Úlohy takéhoto typu vedú k ťažko riešiteľným parciálnym diferenciálnym rovniciam, ktoré nevieme analyticky riešiť. Sme preto odkázaní používať rôzne numerické schémy. Tie často transformujú rovnicu, ktorú chceme riešiť na iný tvar, pre ktorý vieme zostrojiť numerickú schému, ktorá je jednoduchšia, alebo stabilnejšia. Pri amerických opciách máme oproti európskym navyše jednu premennú, ktorou je hranica predčasného uplatnenia. To vnáša do modelu ďalšiu zložitosť. V práci sa pozrieme aj na to, ako vieme v existujúcich numerických schémach zohľadniť dividendy, transakčné náklady, alebo iné nedokonalosti trhu. V poslednej časti si ukážeme, ako jednotlivé parametre opcie ovplyvňujú jej cenu a hranicu predčasného uplatnenia. Budeme používať numerickú schému pre tzv. transformovanú rovnicu. Pre túto metódu sú v práci navrhnuté riešenia na odstránenie skokovej zmeny numericky počítanej hranice predčasného uplatnenia put opcie a jednoduchý princíp zrýchlenia konvergenzie, ktorý je taktiež možné využiť na zvýšenie presnosti metódy.

Kľúčové slová

Opcie, Americká put opcia, Hranica predčasného uplatnenia, Transformačná metóda, Numerické metódy, Nelineárne modely volatility, Black-Scholes, Metóda konečných diferencií

Abstract

Simeunovic Tomislav : *Compact finite-difference methods for computing american types of financial derivatives*

Supervisor: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2011

The thesis deals with the numerical pricing of American financial derivatives. Such problems that are discussed in the thesis often lead to partial differential equations, which are not possible to be solved analytically. Therefore, it is necessary to use some kind of numerical scheme. This scheme use to transform original equation which should be solved to a new form that is simpler, or more stable. In case of American options, pricing task is more complicated than of the European. It is because of free boundary occurrence, which means one more variable in the model. Thesis also describes how in the existing numerical models are taken into account dividend yield, transaction costs or other market imperfections. The last part of the thesis is focused at how different parameters affect the option price and the free boundary position. It is used a numerical scheme for so called transformed equation. There is also proposed solution for removing initial step change in numerical free boundary solution and as well introduced simple method for accelerating convergence, which it is possible to use for improving the quality of the mentioned model.

Keywords

Option, American put options, Free boundary, Numerical methods, Non-linear volatility models, Black-Scholes, Transformed Black-Scholes PDE, Finite difference method

Obsah

Úvod	2
1 Opcie	3
1.1 O opciách	3
1.1.1 Čo sú to opcie	3
1.1.2 Typy opcií	3
1.1.3 Úvod do oceňovania opcií	3
1.1.4 Súvislosť hranice predčasného uplatnenia s cenou opcie	8
2 Nelineárne modely	10
2.1 Potreba nelineárnych modelov volatility	10
2.2 Lelandov model	10
2.3 RAPM model	11
2.4 Barles-Sonerov model	13
3 Transformačná metóda	17
3.1 Put opcia	17
3.1.1 Transformácia funkcie ceny put opcie	17
3.1.2 Black-Scholesova rovnica pre transformovanú funkciu put opcie	19
3.1.3 Nulové dividendy	21
3.2 Call opcia	22
3.2.1 Transformácia funkcie ceny call opcie	22
3.2.2 Black-Scholesova rovnica pre transformovanú funkciu call opcie	23
3.3 Model s nelineárnou volatilitou	25
3.4 Výpočet ceny opcie z riešenia transformovanej rovnice	26
4 Numerická aproximačná schéma	27
4.1 Numerická metóda pre transformovanú rovnicu ceny americkej put opcie	27
4.1.1 Metóda konečných diferencií pre transformovanú rovnicu	28
4.2 Prípád nulových dividend	32
4.3 Použitie nelineárneho modelu volatility	33
4.4 Výpočet ceny opcie z numerického riešenia transformovanej rovnice	34
5 Praktické testy	35
5.1 Porovnanie presnosti numerickej schémy pre transformovanú rovnicu a metódu PSOR	35

5.1.1	Prípád nulových dividend	35
5.1.2	Porovnanie s inými známymi metódami	36
5.2	Zvýšenie presnosti metódy pre časy blízke expirácii	38
5.3	Vplyv nelineárnych modelov volatility na polohu voľnej hranice a cenu opcie	42
5.4	Vplyv jednotlivých parametrov nelineárnych modelov na výsledky	46
5.5	Numerická metóda pre model s nenulovými dividendami	47
5.5.1	Rýchlosť konvergenzie Newtonovej metódy oproti pô- vodnému iteračnému algoritmu	49
6	Záver	53
	Zoznam použitej literatúry	55

Použité symboly

- $V, V(S, t)$ - cena opcie
 - S - cena podkladového aktíva, najčastejšie akcie
 - t - časová premenná
 - T - čas expirácie opcie
 - E - expiračná cena opcie
 - σ - volatilita podkladového aktíva. V prípade, ak sa nejedná o konštantu, tak označíme $\sigma(\cdot)$
 - μ - trendová zložka vývoja ceny aktíva
 - r - bezriziková úroková miera
 - D - dividendový výnos
 - $S_f(t), \varrho(\tau)$ - poloha hranice predčasného uplatnenia
 - w_t - Wienerov proces v čase t
 - C - trhové transakčné náklady spojené s nákupom/predajom
 - m - počet dielikov delenia časovej premennej v numerických schémach
 - k - dĺžka časového delenia v numerických schémach
 - n - počet dielikov delenia priestorovej premennej v numerických schémach
 - h - dĺžka priestorového delenia v numerických schémach
-
- ODR - obyčajná diferenciálna rovnica
 - PDR - parciálna diferenciálna rovnica
 - PSOR - "Projected Successive Over Relaxation" numerická metóda na výpočet ceny opcie

Zoznam tabuliek

1	Porovnanie numerickej metódy pre transformovanú rovnicu a metódy PSOR	36
2	Porovnanie hodnoty voľnej hranice pre viaceré numerické a analytické metódy	38
3	Porovnanie relatívnych chýb vzhľadom na metódu PSOR	38
4	Porovnanie voľnej hranice na dlhšom časovom horizonte	39
5	Porovnanie relatívnych chýb na dlhšom horizonte vzhľadom na metódu PSOR	40
6	Porovnanie presnosti modifikovanej numerickej metódy pre transformovanú rovnicu a metódy PSOR	42
7	Porovnanie polohy predčasnej hranice pre rôzne modely volatility	44
8	Porovnanie ceny opcie pre rôzne modely volatility	45
9	Porovnanie polohy voľnej hranice a ceny opcie pre rôzne nakalibrované nelineárne modely	47
10	Porovnanie výsledkov modelu s dividendami a modelu bez dividend	50
11	Porovnanie rýchlosti konvergenzie Newtonovej metódy a metódy bisekcie	52

Zoznam obrázkov

1	Hodnota call a put opcie v expiračnom čase s expiračnou cenou 40	4
2	Typický graf ceny európskej call opcie na akciu vyplácajúcu dividendy	6
3	Typický graf ceny americkej call opcie na akciu vyplácajúcu dividendy	7
4	Životnosť americkej put opcie a jej uplatnenie v prípade $S = S_f(t)$	8
5	Inverzná funkcia k $\Psi(x)$	16
6	Numerické rozloženie bodov S , pre $\varrho(\tau) = 20$	28
7	Schéma numerického riešenia transformovanej rovnice	29
8	Porovnanie výslednej ceny $V(S, t)$ pre metódu PSOR (modrá) a transformovanú numerickú schému (červená), $T = 1, E = 100, \sigma = 0.65, r = 0.02$	36
9	Porovnanie polohy hranice predčasného uplatnenia $\varrho(\tau)$ pre metódu PSOR (modrá) a transformovanú numerickú schému (červená), $T = 1, E = 100, \sigma = 0.65, r = 0.02$	37

10	Skoková zmena medzi $\varrho(\tau_0)$ a $\varrho(\tau_1)$. $E = 100, \sigma = 0.30, T = 0.00001, r = 0.02$	39
11	Asymptotika upraveného numerického riešenia $\varrho(\tau)$ v blízkosti expirácie	41
12	Priebeh volatility Barles-Soner pre $E = 100, \sigma = 0.3, r = 0.02$. $\tau_1 = 0.025, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.25, \tau_4 = 1$	43
13	Porovnanie $\varrho(\tau)$ pre $E = 100, \sigma = 0.25, r = 0.02, \tau_{MAX} = 1$. Modrý graf predstavuje lineárnu volatilitu, zelený Lelandov model a červená predstavuje model Barles-Soner	45
14	Porovnanie ceny opcie $V(S, t)$ pre rôzne modely volatility. $E = 100, T = 1, \sigma = 0.65, r = 0.02$. Modrý graf predstavuje lineárnu volatilitu, zelený Lelandov model a červená predstavuje model Barles-Soner	46
15	Porovnanie ceny opcie $V(S, t)$ pre Lelandov model (vľavo) a Barles-Sonerov model (vpravo) pri použití rôznych hodnôt pre parametre $a, b = 0.01, 0.07, 0.13, 0.25, 0.35$	48
16	Porovnanie polohy predčasnej hranice $\varrho(\tau)$ pre Lelandov model (vľavo) a Barles-Sonerov model (vpravo) pri použití rôznych hodnôt pre parametre $a, b = 0.01, 0.07, 0.13, 0.25, 0.35$	48
17	Porovnanie hodnôt $\varrho(1)$ pre parametre $E = 100, \sigma = 0.65, r = 0.05$ a $D_1 = 0, D_2 = 0.0001, D_3 = 0.001, D_4 = 0.01, D_5 = 0.03$	51
18	Počet iterácií pre Newtonovu metódu (zeleným) a metódu bisekcie (modrým). $T = 0.1, \sigma = 0.25, E = 100, r = 0.02, D = 0.01$	52

Úvod

Vo svete sa na finančných trhoch okrem komodít, akcií a dlhopisov obchodujú aj finančné deriváty. Týmto termínom označujeme produkt, ktorého cena je nejakým spôsobom odvodená od ceny podkladového aktíva. Mnohé z týchto derivátov sú natoľko komplikované, že rôzne modely ich oceňovania sa skúmajú desaťročia. Napríklad v USA sa každoročne na finančných trhoch uzavrie objem obchodov, ktorý niekoľkonásobne prevyšuje HDP tejto krajiny ¹. Preto využitie aj drobnej chyby, v cene nejakého inštrumentu, môže zarobiť obrovské finančné prostriedky. Z 500 najvýkonnejších superpočítačov vo svete sa 8.60 % používa práve na finančné výpočty ². Preto sa hľadajú stále nové modely a zdokonaľujú sa existujúce, aby sa čo najviac zhodovali s realitou a zároveň boli čo najmenej výpočtovo náročné. Pomocou rôznych metód volatility vieme modelovať nedokonalosti trhu, ako sú nekompletný trh, alebo transakčné náklady. V tejto práci sa budeme zaoberať *americkými put opciami*, metódami ich oceňovania, polohou *hranice predčasného uplatnenia* a nakoniec si na praktických testoch ukážeme vplyv jednotlivých parametrov na dosiahnuté výsledky. Keďže americké *call* a *put* opcie majú z hľadiska finančnej matematiky veľa spoločného, ukážeme si aj aplikácie na výpočet *call* opcie. Počas toho si ukážeme, s akými problémami sa potýkame pri jednotlivých metódach a pokúsime sa ich odstrániť.

Práca je rozdelená na päť kapitol, záver a prílohy. V prvej kapitole sa zoznámime všeobecne s opciami, ukážeme si analytické rovnice, ktoré spĺňa ich cena a povieme si, v čom sa líši oceňovanie amerických a európskych opcií. Druhá kapitola je venovaná rôznym modelom volatility, ktoré majú za úlohu modelovať nedokonalosti na finančných trhoch. V tretej kapitole si ukážeme, ako transformovať BS nerovnicu pre americké opcie na systém, v ktorom nebudú vystupovať nerovnosti a bude jednoduhšie riešiteľný. V štvrtej kapitole zostrojíme numerickú schému pre takúto transformovanú úlohu a numerické výsledky potom prezentujeme v piatej kapitole. Na konci práce sa nachádza záver, v ktorom sú zhrnuté novo nadobudnuté poznatky a osobitná kapitola s prílohami, kde nájdeme použitý kód v jazyku *Matlab*. Súčasťou práce sú aj obrázky, ktoré majú názornejšie dopomôcť k pochopeniu danej problematiky.

¹<http://en.wikipedia.org/wiki/Financialization>

²<http://www.top500.org/stats/list/36/area>

1 Opcie

1.1 O opciách

1.1.1 Čo sú to opcie

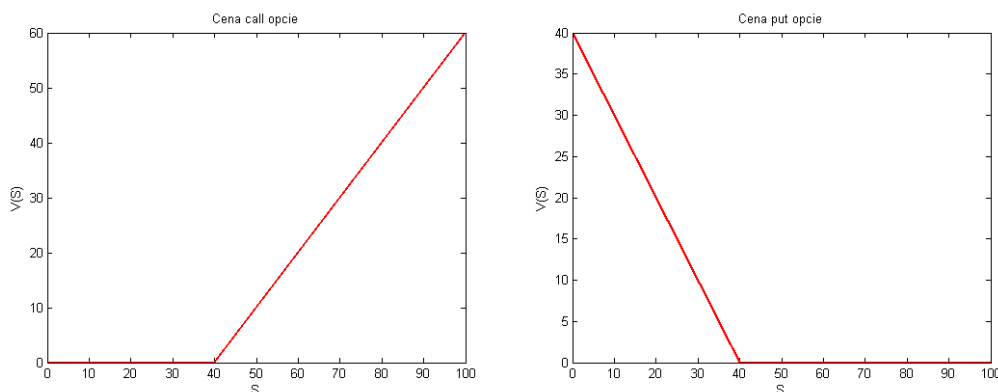
Opcia vo všeobecnosti predstavuje právo, nie však povinnosť uskutočniť v dohodnutom čase kontrakt na ktorý sa viaže. To dáva majiteľovi opcie výhodu oproti vypisovateľovi opcie, ktorý nemá možnosť sa rozhodnúť či sa kontrakt uskutoční, alebo nie. Za toto právo musí majiteľ opcie niečo zaplatiť, preto je častou úlohou opciu oceniť.

1.1.2 Typy opcií

Najčastejším a najviac obchodovaným typom opcie je taký, kde podkladové aktívum tvorí obchodovateľná akcia. Opcia sa uzavrie na stanovenú expiračnú cenu E a expiračný čas T (môže byť aj interval) určujúci, kedy možno opciu uplatniť. Podľa typu opcie má držiteľ právo podkladové aktívum v čase expirácie kúpiť (tzv. *Call*, alebo *kúpna opcia*), alebo predať (tzv. *Put*, alebo *predajná opcia*) za expiračnú cenu. Po uplynutí expiračnej doby je opcia bezcenná a neumožňuje vykonať dohodnutý kontrakt. Ako podkladové aktívum môže byť okrem akcie použitá aj komodita, dlhopis (alebo iný derivát úrokovej miery), burzový index, menový výmenný kurz alebo aj future zmluva. Táto práca sa bude zaoberať americkými opciami, ktoré sa od európskych líšia tým, že ich môžeme uplatniť ešte pred expiračným časom. To zvýhodňuje držiteľa americkej opcie, oproti držiteľovi opcie európskej. Vo svete existujú špecializované burzy, ktoré sa zameriavajú na obchodovanie s opciami (napr. Chicago Board Options Exchange). V roku 2009 bolo iba v USA uzavretých skoro 4 mld. opčných kontraktov a celosvetovo 9.5 mld. [1]

1.1.3 Úvod do oceňovania opcií

V čase expirácie opcie ($t = T$) má podkladové aktívum cenu S a držiteľ opcie sa môže rozhodnúť, či sa kontrakt uskutoční a či podkladové aktívum kúpi (resp. predá) za cenu E . V prípade, že sa jedná o *call opciu* a držiteľ sa rozhodní ju uplatniť, tak získa akciu o hodnote S za cenu E . Predpokladajme však, že túto akciu možno predať aj kúpiť na finančnom trhu za cenu S v ľubovoľnom množstve. Kedže aj držiteľ opcie má možnosť takéhoto nákupu (resp. predaja), oplatí sa mu uplatniť opciu iba v prípade, že mu umožní kúpiť podkladové aktívum lacnejšie, resp. predať drahšie. Hodnota opcie v čase uplatnenia je



Obr. 1: Hodnota call a put opcie v expiračnom čase s expiračnou cenou 40

hodnota jej finančného prínosu pre majiteľa:

$$V(S, T) = (S - E)^+, \quad (1)$$

v prípade *call opcie* a

$$V(S, T) = (E - S)^+, \quad (2)$$

v prípade *put opcie*. Aby sme vedeli určiť cenu opcie aj pred časom expirácie, musí existovať model popisujúci vývoj ceny podkladového aktíva. Keďže dopredu nevieme určiť cenu akcie v budúcnosti, tak do modelu musíme zahrnúť stochastickú premennú. Na to použijeme *Wienerov proces* w_t , ktorého rozdelenie v čase t zodpovedá normálnemu rozdeleniu, $N(0, t)$. Extrémne hodnoty sú teda nepravdepodobné a najčastejšie bude proces nadobúdať hodnoty okolo bodu nula. Ďalej môžeme predpokladať, že akcia má okrem stochastickej zložky aj zložku trendovú μ , ktorá sa dá interpretovať ako priemerný prírastok za jednotku času. Môžeme očakávať, že pre väčšie hodnoty S bude aj absolútna hodnota jej zmeny ΔS väčšia. Preto namiesto modelu $dS = f(t) + g(t)dw_t$, budeme uvažovať takéto zmeny pre podiel $\frac{\Delta S}{S}$. Vývoj zmeny S bude preto vyhovovať stochastickej diferenciálnej rovnici:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \quad (3)$$

kde volatilita $\sigma > 0$ nám určuje vplyv stochastického člena. Čím je σ väčšia, tým je stochastický vplyv výraznejší a zmena S menej predpovedateľná. Častý spôsob oceňovania derivátov vo financiách je pomocou derivátu s neznámou cenou vytvoriť známy produkt, ktorého cenu poznáme. Takto postupovali aj Black so Scholesom, keď v článku [8] odvodili cenu *európskej call opcie* bez

dividend. Princíp spočíva vo vytvorení portfólia s konštantne nulovou hodnotou pomocou akcie S , opcie V a dlhopisu B . Takéto oceňovanie má však aj obmedzenia. Predpokladá splnenie niekoľkých podmienok, ktoré ako sa v praxi ukazuje, nebývajú splnené. Poskytuje nám však aspoň základné teoretické východisko pre ďalšie modely oceňovania. Medzi základné predpoklady tohto oceňovania patrí:

- Žiadna arbitráž na trhu - nemožno pomocou nákupu/predaja inštrumentov existujúcich na trhu zaručiť istý zisk
- Dokonale likvidný trh bez transakčných nákladov - možno kúpiť resp. predať ľubovoľné množstvo akcií za rovnakú trhovú cenu bez toho, aby sa týmto ich cena zmenila
- Rovnaká úroková miera - úroková miera r je rovnaká pre všetky obdobia a možno si za ňu požičať ľubovoľné množstvo peňazí

Za týchto predpokladov dokážeme skonštruovať portfólio, zložené z Q_S kusov akcie S , Q_V kusov opcie V a jedného bezrizikového dlhopisu B , ktoré má v čase konštantne nulovú hodnotu. Ak takéto portfólio označíme ako Π , tak nutne musí platiť $\frac{d\Pi}{dt} = 0$ pre všetky $t \in (0, T)$. Hodnota takéhoto portfólia sa mení zmenou S a V , ako aj zmenou ceny dlhopisu B (ktorá je však deterministická, lebo $\frac{dB}{dt} = rBdt$). Tieto zmeny treba kompenzovať zmenou podielov Q_S a Q_V v portfóliu, a tiež nákupom resp. predajom dlhopisov δB . Nasledovná stochastická ODR, popisujúca zmenu hodnoty hedgeovacieho portfólia Π musí byť z toho dôvodu konštantne nulová (obsiahlejšie v [3]):

$$Q_S dS + Q_V dV - r(SQ_S + VQ_V)dt = 0. \quad (4)$$

Použijúc Itovu Lemmu [9] a poznatok, že $dS = \mu S dt + \sigma S dw$:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw, \quad (5)$$

a dosadením do (4) dostaneme:

$$0 = \left(Q_S \mu S + Q_V \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) - rSQ_S - rVQ_V \right) dt + \left(Q_S \sigma S + Q_V \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dw. \quad (6)$$

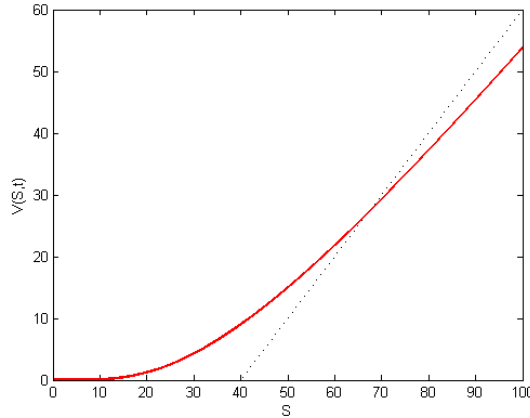
Kedže prírastok na hodnote portfólia Π má byť konštantne rovný nule, musí aj stochastický aj deterministický prírastok byť stále rovný nule. Zo stochastického člena ľahko vyčítame, že $\frac{Q_S}{Q_V} = -\frac{\partial V}{\partial S}$ a následným dosadením do deterministického prírastku získame vzťah:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (7)$$

Táto rovnosť je známa ako *Black-Scholesova rovnica* (odvodené spolu s cenou európskej call opcie bez dividend v článku [8]). Uvedomme si, že pri celom procese odvodenia ceny pomocou zahedgeovaného portfólia sme ani raz nevyužili to, aké má V vlastnosti a aká je jej hodnota. *Black-Scholesova rovnica* musí byť splnená pre všetky typy derivátov, ktoré majú byť obchodovateľné na dokonale likvidnom trhu, bez možnosti arbitráže. Pokiaľ do modelu pridáme dividendy $D > 0$, ktoré bude spojitou vyplácať podkladové aktívum, zmení sa aj tvar *Black-Scholesovej rovnice* a tieto dividendy tam budú zohľadnené (obširnejšie v [3]) nasledovne:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (8)$$

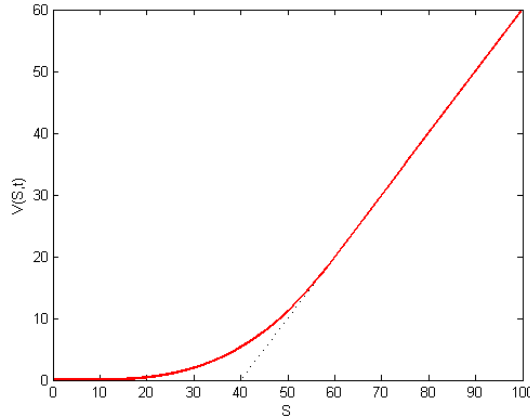
Na rozdiel od európskych opcií nemôže byť cena tých amerických nižšia ako



Obr. 2: Typický graf ceny európskej call opcie na akciu vyplácajúcu dividendy

hodnota pay-off diagramu. Je to spôsobené tým, že držiteľ má v každom čase možnosť opciu uplatniť, čím by si zabezpečil rovnaký zisk ako držiteľ európskej opcie v expiračnom čase. Cena americkej opcie sa preto vždy nachádza nad grafom pay-off diagramu, alebo sa ho dotýka. V prípade, ak sa ho dotýka, znamená to, že jej hodnota je rovnaká ako zisk z jej aktuálneho uplatnenia, a preto je jej uplatnenie optimálne. Cena akcie (alebo iného podkladového aktíva), pre ktorú sa oplatí v čase t opciu uplatniť, sa označuje $S_f(t)$ a nazýva sa *hranica predčasného uplatnenia*, alebo *voľná hranica* (z ang. free boundary). *Black-Scholesova rovnica* pre cenu americkej opcie je splnená ako nerovnosť:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0, \quad (9)$$

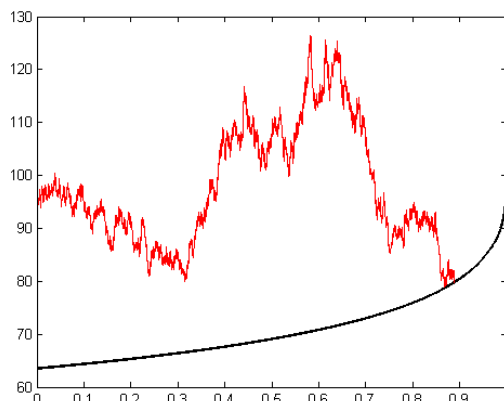


Obr. 3: Typický graf ceny americkej call opcie na akciu vyplácajúcu dividendy

kde rovnosť sa pre *call opcie* nadobúda na intervale $S \in [0, S_f(t)]$ ($S \in [S_f(t), \infty]$ pre *put opcie*). Nerovnosť je na intervale, kde dochádza k uplatneniu opcie $S \in [S_f(t), \infty]$ ($S \in [0, S_f(t)]$ pre *put opcie*). Môžeme to interpretovať tak, že ak *call opciu* držíme pre $0 < S < S_f(t)$, je to optimálna hedgeovacia stratégia, ak ju však držíme aj pre $S_f(t) < S < \infty$, nie je to optimálne a z majetku strácame. To nám spolu dáva jeden vzťah pre lineárnu komplementaritu americkej opcie:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) (V(S, t) - V(S, T)) = 0. \quad (10)$$

V prípade *put opcie* sa cena akcie nachádza nad *hranicou predčasného uplatnenia* $S_f(t) < S < \infty$, a uplatňujeme ju v prípade, že cena pod túto hranicu padne. Až kým sa tak nestane, opciu držíme. Obrázok (Obr. 4) ilustruje prípad držania *put opcie* vypísanej na expiračnú cenu $E = 100$. V čase $t = 0$ má podkladová akcia hodnotu $S = 95$. Čierna krivka predstavuje *hranicu predčasného uplatnenia*. Z obrázku si môžeme všimnúť, že opciu držíme, až kým sa cena akcie nedostane aspoň na úroveň *hranice predčasného uplatnenia*. V tomto konkrétnom prípade dochádza k uplatneniu v čase $t \approx 0.9$ pri cene $S \approx 80$.



Obr. 4: Životnosť americkej put opcie a jej uplatnenie v prípade $S = S_f(t)$

1.1.4 Súvislosť hranice predčasného uplatnenia s cenou opcie

Úloha na ocenenie americkej call opcie je úlohou na riešenie systému:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{pre } 0 < S < S_f(t), \quad (11)$$

$$V(0, t) = 0, \quad (12)$$

$$V(S_f, t) = S_f - E, \quad (13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f, t) = 1, \quad (14)$$

$$V(S, T) = (S - E)^+. \quad (15)$$

kde podmienka (12) znamená, že call opcia vypísaná na akciu, ktorej cena je konštantne nulová má tiež nulovú hodnotu. Vzorec (13) znamená, že v momente ako akcia dosiahne v čase t cenu $S_f(t)$, tak ju uplatníme. Vzorec (14) môžeme interpretovať tak, že nárast ceny o jednotku na hranici uplatnenia (rovnako aj nad ňou), zvýši cenu opcie tiež o jednotku. Dôsledkom je, že sa cena opcie v každom čase $t > 0$ napojí na pay-off diagram hladko.

V prípade put opcie je systém analogický:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{pre } S_f(t) < S < \infty, \quad (16)$$

$$V(0, t) = Ee^{-r(T-t)}, \quad (17)$$

$$V(S_f, t) = E - S_f(t), \quad (18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f, t) = -1, \quad (19)$$

$$V(S, T) = (E - S)^+. \quad (20)$$

Tentoraz podmienka (17) znamená istotu získania finančných prostriedkov v hodnote E za čas $T - t$. Hodnota tohto obchodu je v tom prípade iba odiskontovaná budúca hodnota (úrokovou mierou r). Vzorec (18) znamená, že dochádza k uplatneniu podobne ako v prípade *call opcie*. Taktiež podobná situácia ako v prípade *call opcie* je aj na *hranici predčasného uplatnenia*, kde dochádza k hladkému napojeniu na pay-off diagram. Na rozdiel od *call opcie*, však s rastúcou cenou S hodnota *put opcie* V klesá.

2 Nelineárne modely

2.1 Potreba nelineárnych modelov volatility

Klasický model oceňovania opcií s konštantnou volatilitou, $\sigma > 0$, sleduje hodnotu opcie vypísanej na podkladové aktívum S , ktorého cena sa vyvíja podľa stochastickej ODR:

$$dS = (\mu - D)Sdt + \sigma SdW. \quad (21)$$

Akýkoľvek derivát aktíva S , ktorý má byť obchodovateľný, musí nutne spĺňať *Black-Scholesovu* PDR:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (22)$$

Pričom z (21) sa k (22) dopracujeme cez konštrukciu portfólia s konštantnou hodnotou v priebehu času. Takéto portfólio sa dá konštruovať iba pri splnení niektorých silných predpokladov, ako je kompletný trh ³ s nulovými transakčnými nákladmi. Na modelovanie niektorých javov, ako sú spomínané transakčné náklady, nedokonalý trh, alebo riziko z nezaisteného portfólia, je však potrebné zameniť konštantný člen σ za všeobecnejšiu funkciu volatility, závislú od zvyšných parametrov. Vo všeobecnosti sa používa funkcia v tvare:

$$\sigma = \sigma(S^2 \partial_S^2 V, S, T - t). \quad (23)$$

Volatilita je teda funkciou ceny podkladového aktíva S , druhej derivácie ceny opcie podľa ceny podkladového aktíva $\partial_S^2 V$ a času do expirácie $T - t$.

2.2 Lelandov model

Leland sa v svojom článku [12] zaoberá hedgeovaním, ktorým Black so Scholesom [8] odvodili nearbitrážnu cenu pre opciu V . Najskôr rozoberá, aký vplyv má rebalancovanie portfólia v diskretnom čase (namiesto spojito) na kvalitu zahedgeovania. Podobne ako Black a Scholles, snažil sa replikovať opciu V portfóliom $\Pi = \delta S + B$. Zistil, že aj keď v prípade diskretného hedgeovania nevieme zaručiť dokonalú replikáciu, vieme ho zahedgeovať tak, aby pre vzniknutú hedgeovaciu chybu ΔH_t , za čas Δt platilo: $E(H_t) = 0$. Zmena však nastane zvýšením volatility σ . Za časový okamih Δt sa hodnota portfólia Π

³ kompletný trh je taký, kde sú možné všetky stávky na budúci stav sveta s použitím existujúcich aktív

zmení vplyvom transakčných nákladov, zmeny hodnoty dlhopisu a zmeny hodnoty akcie nasledovne:

$$\Delta\Pi = \Delta\delta S + rB\Delta t - \frac{C}{2} |\Delta\delta| S. \quad (24)$$

Kedže toto portfólio replikuje opciu V , musia sa ich ceny rovnať, inak by nastala arbitráž. Preto platí $\Delta V = \Delta\Pi$. Zmena hodnoty opcie sa dá vyjadriť z *Itovej lemy* ako:

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t. \quad (25)$$

Odtiaľ je zrejmé, že $\delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, čo je rovnaký vzťah ako pri hedgeovaní bez transakčných nákladov. Porovnaním zvyšných členov, zistíme, že musí platiť:

$$rB\Delta t - \frac{C}{2} |\Delta\delta| S = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t. \quad (26)$$

Leland ďalej ukázal, že $\frac{C}{2} |\Delta\delta| S = \frac{\sigma^2}{2} Le S^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \Delta t$, kde Le sa nazýva *Lelandovo číslo* a je dané ako $Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{C}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right)$. Dosadením do (26) dostaneme rovnosť:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (27)$$

s modifikovanou volatilitou $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \left(1 + Le \operatorname{sign} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right)$, pričom σ je odporovaná historická volatilita a Le je *Lelandovo číslo*. Ľahko sa presvedčíme, že táto modifikovaná volatilita je klesajúcou funkciou dĺžky doby rebalancovania. Tento dôsledok je prirodzený, keďže so skracovaním Δt nám rastú transakčné náklady. Vieme, že pre *európske call* a *put* opcie bez dividend platí $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} > 0$, preto je modifikovaná volatilita konštantná a vždy väčšia ako historická: $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2(1 + Le) > \sigma^2$. Vo všeobecnosti je však volatilita skákajúca:

$$\sigma(S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, S, \tau) = \begin{cases} \hat{\sigma}_1^2 & \text{ak } \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} < 0 \\ \hat{\sigma}_2^2 & \text{ak } \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} > 0 \end{cases}, \quad (28)$$

kde $\sigma_1^2 = \sigma^2(1 - Le)$ a $\sigma_2^2 = \sigma^2(1 + Le)$.

2.3 RAPM model

Risk adjusted pricing methodology je model volatility, ktorý je prípadom všeobecného tvaru (23). Prvýkrát bol odvodený v článku od M.Kratka

[10] a neskôr zovšeobecnený D.Ševčovičom a M.Jandačkom [11]. Tento model sa snaží zohľadniť v cene opcie riziko, ktorému je investor vystavený kúpou opcie, alebo jej vypísaním. Prirodzene môžeme očakávať, že investor vystavený riziku (či už je to držiteľ, alebo vypisovateľ), bude za toto riziko požadovať finančnú kompenzáciu. Vieme, že funkcia ceny opcie $V(S, t, \sigma)$ je rastúcou funkciou parametra σ . Preto, ak je riziku vystavený vypisovateľ, očakávame vyššiu volatilitu a tým aj vyššiu výslednú cenu. Pokiaľ je riziku vystavený majiteľ, je to naopak. Riziko spočíva v tom, že na rozdiel od modelu, kde uvažujeme konštantnú σ a splnené všetky potrebné predpoklady, v tomto prípade nevieme dokonale replikovať dlhopis iba pomocou opcie V a časti podkladového aktíva δS . Kvôli prítomnosti transakčných nákladov už nie je možné robiť potrebné rebalancovanie spojite. Je preto nutné nájsť optimálny časový krok medzi zmenami v portfóliu Δt . Tento jednak nebude príliš krátky, kvôli transakčným nákladom a ani príliš dlhý, kvôli riziku z nezaisteného portfólia. Podobne ako v prípade dokonalého trhu bez transakčných nákladov, vychádzame aj tentokrát z portfólia:

$$\Pi = V + \delta S. \quad (29)$$

Je zložený z jedného kusu opcie a δ kusov aktíva S . Zmena za jednotku času Δt je spôsobená zmenou hodnoty dlhopisu, vyplatením dividend, ale aj zmenou spôsobenou nezaisteným portfóliom:

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t - \delta D S \Delta t - (r_{TC} + r_{VP}) S \Delta t. \quad (30)$$

Celkové riziko r_R je súčtom rizika vyplývajúceho z transakčných nákladov r_{TC} a rizika z volatilného nezaisteného portfólia r_{VP} . Platia pre ne nasledovné vzťahy:

$$r_{TC} = \frac{C \hat{\sigma} S}{\sqrt{2\pi}} \left| \partial_S^2 V \right| \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}, \quad (31)$$

$$r_{VP} = \frac{1}{2} R \hat{\sigma}^4 S^2 \Gamma^2 \Delta t. \quad (32)$$

Riziko z transakčných nákladov r_{TC} je rovnaké ako v Lelandovom modeli, kde bolo zahrnuté do zmeny portfólia ako:

$$\Delta \Pi_{Lel} = -\frac{C}{2} |\Delta \sigma| S = \frac{C \sigma S^2}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sqrt{\Delta t}. \quad (33)$$

Tento výraz je rovnaký ako $r_{TC} S \Delta t$. Transakčné náklady $C = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S}$ sú rovnaké, ako v Lelandovom modeli. Leland však neuvažoval nad finančnou kompenzáciou za riziko, ktoré vyplývalo z nedokonalého hedgeovania. Uspokojil sa

s tým, že stredná hodnota straty je nulová. V [11] je navrhnuté zohľadnenie rizika z nezaisteného portfólia pomocou variancie ceny portfólia vzhľadom k cene akcie, $\text{var}\left(\frac{\Delta\Pi}{S}\right)$, ktorá je navyše násobená faktorom averzie voči riziku R . Táto hodnota reprezentuje averziu investora voči riziku a aj r_{TC} je rastúcou funkciou R . Ševčovič a Jandačka v [11] pomocou Itovej lemy odvodili tvar (32), kde $\Gamma = \partial_S^2 V$ a C označuje transakčné náklady prislúchajúce k aktívu S . Minimalizáciou celkového rizika $\Delta\hat{t} = \underset{\Delta t}{\text{argmin}} r_R$ získame optimálny časový krok medzi rebalancovaniami:

$$\Delta\hat{t} = \frac{\left(\frac{C}{R\sqrt{2\pi}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\hat{\sigma}^2 |S\Gamma|^{\frac{2}{3}}}, \quad (34)$$

s optimálnym rizikom:

$$\hat{r}_R = \frac{3}{2} \left(\frac{C^2 R}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \hat{\sigma}^2 |S\Gamma|^{\frac{4}{3}}. \quad (35)$$

Aplikáciou modelu na *Black-Scholesovu rovnicu* získame rovnicu, v ktorej je oproti (22) navyše člen $-r_R S$ na ľavej strane. Ten však vieme zahrnúť do rovnice pomocou úpravy volatility σ nasledovne:

$$r_R S = \frac{3}{2} \left(\frac{C^2 R}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \hat{\sigma}^2 |S\Gamma|^{\frac{4}{3}} S = \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^2 \Gamma (\Gamma S)^{\frac{1}{3}} 3 \left(\frac{C^2 R}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (36)$$

Kedže $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$, tak prvé členy sú členmi druhej derivácie V podľa S v *Black-Scholesovej* rovnici:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(1 + 3 \left(\frac{C^2 R}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} (S \partial_S^2 V)^{\frac{1}{3}}\right) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (37)$$

Ľahko sa presvedčíme o tom, že v prípade $C = 0$ (žiadne transakčné náklady, rebalancujeme spojito), alebo $R = 0$ (žiadna averzia k riziku, nerebalancujeme vôbec) dostaneme lineárnu BS rovnicu (22).

2.4 Barles-Sonerov model

Barles a Soner odvodili nelineárny model pre *call opciu*, ktorý je zložitejší ako predchádzajúce dva. Vychádzali pritom z práce Hodgesa a Neubergera [23], ktorý použili úžitkovú funkciu. Ich princíp bol založený na tom, že stanovíme počiatočnú hodnotu dlhopisov x a akcií y . Ich objem v čase vyjadrujú funkcie

$X(s)$ a $Y(s)$ pre $s \in [t, T]$. S plynúcim časom meníme ich objem a to predajom dlhopisov a nákupom akcií, alebo naopak. Túto obchodnú stratégiu popisujú funkcie $L(s)$ (predaj dlhopisov, nákup akcií) a $M(s)$ (predaj akcií, nákup dlhopisov). Menované funkcie sú vlastne agregovaným súčtom nákupu/predaja v čase. Uvažujeme aj prítomnosť transakčných nákladov $C \in (0, 1)$. Vývoj počtu dlhopisov potom môžeme vyjadriť nasledovne:

$$X(s) = x - \int_t^s S(\tau)(1 + C)dL(\tau) + \int_t^s S(\tau)(1 - C)dM(\tau). \quad (38)$$

Hodnotu dlhopisov si môžeme zameniť za hodnotu peňazí, ktorú máme k dispozícii. Prvý člen nám vyjadruje nákup akcií za zvýšenú trhovú cenu a druhý člen je predaj akcií za zníženú cenu o transakčné náklady. Hodnota akcií je jednoduchšia, keďže funkcie $L(s)$ a $M(s)$ agregujú nákup (resp. predaj) počas plynutia času:

$$Y(s) = y + L(s) - M(s). \quad (39)$$

Podľa Hodgesa a Neubergera je cena opcie maximálna jej cena taká, aby maximálna očakávaná užitočnosť z koncového kapitálu bola rovnaká, či akciu vlastníme, alebo nie. To znamená, že ak je maximálna užitočnosť bez opcie daná ako:

$$V_1(x, y, S(t), t) = \sup_{L(\cdot), M(\cdot)} E [U(X(T) + Y(T)S(T))], \quad (40)$$

tak maximálna užitočnosť koncového kapitálu pri predaji N call opcií za cenu Λ je:

$$V_2(x + N\Lambda, y, S(t), t) = \sup_{L(\cdot), M(\cdot)} E [U(X(T) + N\Lambda + Y(T)S(T) - N(S(T) - K)^+)]. \quad (41)$$

Ako funkciu užitočnosti použili Barles so Sonerom funkciu $U(\xi) = 1 - e^{-\gamma\xi}$. Môžeme si všimnúť, že užitočnosť z predaja N opcií pri rizikovej averzii γ , nám dáva rovnakú užitočnosť ako predaj 1 opcie pri averzii γN . Preto sa zvykne skúmať asymptotický prípad $\gamma N \rightarrow \infty$ s asymptotickou funkciou užitočnosti $U_\varepsilon(\xi) = 1 - e^{-\frac{\xi}{\varepsilon}}$, kde $\varepsilon = \frac{1}{\gamma N}$. Po zavedení pomocných funkcií $z_{1,2} : R \times (0, \infty) \times (0, T) \rightarrow R$, ktoré vyjadrujú hodnotu opcie v prípade oboch stratégií. Ľahko nahliadneme, že $z_1(y, S(t), T) = 0$ pre stratégiu bez opcií, a $z_2(y, S(t), T) = (S(T) - K)^+$ pre stratégiu s opciou. Cena opcie vychádzajúca z optimalizácie užitočnosti je potom $\Lambda(x, y, S(t), t) = z_2(y, S(t), t) - z_1(y, S(t), t)$. Nakoniec Barles a Soner ukázali, že ak platí $C = a\sqrt{\varepsilon}$, tak pre $\varepsilon \rightarrow 0$ a $C \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} z_1 &\rightarrow 0, \\ z_2 &\rightarrow V, \end{aligned}$$

kde V je riešením nelineárnej *Black-Schollesovej* rovnice:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (42)$$

Výraz $\hat{\sigma}^2$ označuje nelineárnu funkciu volatility spĺňajúcu:

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \left(1 + \Psi \left(e^{r(T-t)} a^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right), \quad (43)$$

s historickou volatilitou σ , averziou voči riziku $a = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$ a funkciou Ψ spĺňajúcou ODR:

$$\Psi'(x) = \frac{\Psi(x) + 1}{2\sqrt{x\Psi(x)} - x} \quad \text{pre } x \neq 0, \quad (44)$$

s počiatočnou podmienkou:

$$\Psi(0) = 0. \quad (45)$$

Analýzou tejto funkcie ešte Barles a Soner ukázali, že platí:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 1, \quad (46)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x) = -1. \quad (47)$$

Môžeme preto pre dostatočne veľký argument x funkciu $\Psi(x)$ aproximovať identitou. V tom prípade volatilitu aproximujeme výrazom:

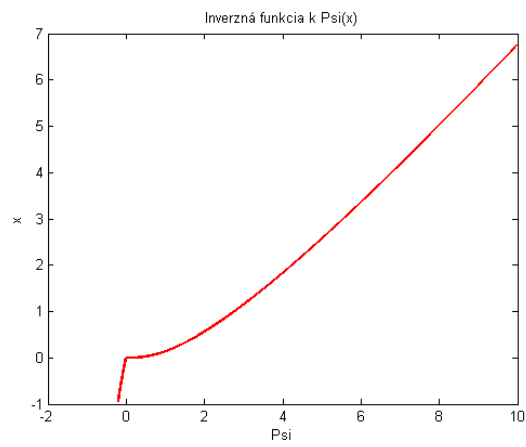
$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \left(1 + e^{r(T-t)} a^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right). \quad (48)$$

Pre malú hodnotu argumentu x funkciu $\Psi(x)$ sa však nemožno s touto aproximáciou uspokojiť. V článku [14] je odvodený implicitný vzťah, ktorý spĺňa funkcia $\Psi(x)$:

$$x = \left(-\frac{\operatorname{arcsinh} \sqrt{\Psi}}{\sqrt{\Psi+1}} + \sqrt{\Psi} \right)^2 \quad \text{pre } \Psi > 0, \quad (49)$$

$$x = -\left(\frac{\operatorname{arcsin} \sqrt{-\Psi}}{\sqrt{\Psi+1}} - \sqrt{-\Psi} \right)^2 \quad \text{pre } -1 < \Psi < 0. \quad (50)$$

Ako vidieť z grafu (Obr. 5), tak funkcie $\Psi^{-1}(x)$ a $\Psi(x)$ sú rastúce. Dostatočne presné riešenie vďaka tomu nie je problém získať numericky.



Obr. 5: *Inverzná funkcia k $\Psi(x)$*

3 Transformačná metóda

V článku [6] Ševčovič navrhuje riešenie ceny *americkej call opcie* pomocou transformáciu v tvare:

$$\tau = T - t, \quad (51)$$

$$x = \ln \left(\frac{S_f(T - \tau)}{S} \right). \quad (52)$$

Táto transformácia nám okrem obráteného plynutia času transformuje aj priestor $S \in (0, S_f(t))$, (na ktorom je splnená *Black-Scholesova nerovnosť* (9) ako rovnosť) na priestor $x \in (0, \infty)$ (11). Poloha voľnej hranice $S_f(t)$ zostáva napriek tomu stále neznáma. Ševčovič ďalej ukázal, že existuje pomocné portfólio Π , pomocou ktorého dokážeme vyjadriť *Black-Scholesovu rovnicu* v nových premenných. Zároveň dostaneme aj vzťah pre polohu voľnej hranice. My si najskôr ukážeme ako sa podobná transformácia dá aplikovať na *put opcie* a potom si pripomenieme transformáciu pre *call opciu* z ktorej táto idea vychádza [5]. Nakoniec si ukážeme ako do transformovanej rovnice možno zakomponovať model s nelineárnou volatilitou.

3.1 Put opcia

3.1.1 Transformácia funkcie ceny put opcie

Na začiatku tejto práce sme si ukázali, že ak chceme riešiť úlohu na ocenenie *put opcie*, tak je potrebné vyriešiť systém:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{pre } S_f(t) < S < \infty, \quad (53)$$

$$V(\infty, t) = 0, \quad (54)$$

$$V(S_f, t) = E - S_f, \quad (55)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f, t) = -1, \quad (56)$$

$$V(S, T) = (E - S)^+. \quad (57)$$

Z poznatkov o európskych opciách vieme, že pre podobný systém existuje explicitné riešenie. Tam však bola nerovnosť (9) splnená ako rovnosť na celom intervale $S \in (0, \infty)$ a tiež sa tam nevyskytovala neznáma S_f . Systém pre americkú opciu je navyše obtiažne riešiteľný aj numericky, keďže kvôli prítomnosti voľnej hranice už nevieme, kde je nerovnosť splnená ako rovnosť, a kde nie. Ako možné riešenie sa javí použiť podobnú transformáciu ako (51),(52), ktorá tieto dve oblasti odseparuje. Na rozdiel od *call opcie* držíme *put opciu*

3.1 Put opcia

pri vysokej cene a uplatňujeme pri dostatočne nízkej. Preto *Black-Scholesova rovnica* nie je splnená na intervale $S \in (0, S_{f,call}(t))$ ako v prípade *call opcie*, ale na intervale $S \in (S_{f,put}(t), \infty)$. Na prvom spomínanom intervale dochádza k uplatneniu opcie, preto sa jej cena rovná cene dosadenej do pay-off diagramu. Túto oblasť preto nie je nutné skúmať, bude nás zaujímať iba poloha *hranice predčasného uplatnenia*. Aby sme získali *Black-Scholesovu rovnicu* platnú na intervale $x \in (0, \infty)$ je nutné použiť transformáciu:

$$\tau = T - t, \quad (58)$$

$$x = \ln \left(\frac{S}{S_f(T - \tau)} \right), \quad (59)$$

keďže platí $S > S_f$ počas celého času držania opcie. Označme si $\varrho(\tau) = S_f(T - \tau)$, potom definujeme pomocné portfólio Π nasledovne:

$$\Pi(x, \tau) = V(S, t) - S \frac{\partial V}{\partial S}(S, t). \quad (60)$$

Portfólio Π pozostáva z 1 ks opcie a $-\frac{\partial V}{\partial S}$ ks akcie. Teda rovnako ako za-hedgeované portfólio, pomocou ktorého Black a Scholes odvodili (7). Ak si vyjadríme premenné S, t pomocou nových premenných x, τ :

$$S = e^x S_f(T - \tau) = e^x \varrho(\tau), \quad (61)$$

$$t = T - \tau. \quad (62)$$

Lahko teraz vyjadríme, čomu sa rovná Π v novom priestore:

$$\Pi(x, \tau) = V(e^x \varrho(\tau), T - \tau) - (e^x \varrho(\tau)) \frac{dV}{dS}(e^x \varrho(\tau), T - \tau). \quad (63)$$

Ďalšou úlohou je získať vzťah medzi portfóliom $\Pi(x, \tau)$ a pôvodnou rovnicou (7). Kvôli tomu je nutné poznať parciálne derivácie Π podľa jednotlivých premenných. Derivovaním podľa x dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial S}(e^x \varrho(\tau), T - \tau)(e^x \varrho(\tau)) - (e^x \varrho(\tau)) \left(\frac{\partial V}{\partial S}(e^x \varrho(\tau), T - \tau) \right) \\ &\quad - (e^x \varrho(\tau)) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(e^x \varrho(\tau), T - \tau)(e^x \varrho(\tau)) \right) \\ &= -(e^x \varrho(\tau))^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(e^x \varrho(\tau), T - \tau) = -S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t). \end{aligned} \quad (64)$$

3.1 Put opcia

V rovnici (7) sa nachádza aj druhá derivácia podľa S , preto budeme potrebovať $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = -2(e^x \varrho(\tau))(e^x \varrho(\tau)) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(e^x \varrho(\tau), T - \tau) \quad (65)$$

$$\begin{aligned} & - (e^x \varrho(\tau))^2 \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(e^x \varrho(\tau), T - \tau)(e^x \varrho(\tau)) \\ & = -2S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) - S^3 \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(S, t). \end{aligned} \quad (66)$$

Nakoniec vyjadríme deriváciu podľa časovej premennej. Netreba zabudnúť na to, že aj premenná x je závislá od času:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} &= \frac{\partial V}{\partial S}(e^x \varrho(\tau), T - \tau)(e^x \varrho'(\tau)) + \frac{\partial V}{\partial t}(e^x \varrho(\tau), T - \tau)(-1) \\ & - (e^x \varrho'(\tau)) \left(\frac{\partial V}{\partial S}(e^x \varrho(\tau), T - \tau) \right) \\ & - (e^x \varrho(\tau)) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(e^x \varrho(\tau), T - \tau)(e^x \varrho'(\tau)) + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}(e^x \varrho(\tau), T - \tau)(-1) \right) \\ & = -\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) - S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t)(e^x \varrho'(\tau)) + S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}(S, t). \end{aligned} \quad (67)$$

3.1.2 Black-Scholesova rovnica pre transformovanú funkciu put opcie

Budeme predpokladať, že riešenie $V(S, t)$ je hladké. Táto vlastnosť je splnená pre $t \in \langle 0, T \rangle$, a v čase expirácie riešenie poznáme. Rovnosť (7) potom bude platiť aj po zderivovaní podľa S . Po prenasobení oboch strán hodnotou S dostaneme nasledovný vzťah:

$$\begin{aligned} & S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + (r - D)S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \\ & + \frac{\sigma^2}{2} 2S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\sigma^2}{2} S^3 \frac{\partial^3 V}{\partial S^3} - rS \frac{\partial V}{\partial S} = 0. \end{aligned} \quad (68)$$

Teraz treba nahradiť tieto členy novými premennými pomocou derivácií portfólia Π . Prvý člen vieme napísať ako:

$$S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} = \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} - \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (69)$$

3.1 Put opcia

Využili sme, že $\frac{e^x \varrho'(\tau)}{S} = \frac{\varrho'(\tau)}{\varrho(\tau)}$. Člen $(r - D)S \frac{\partial V}{\partial S}$ ponecháme v pôvodnom tvare. Ostatné členy prepíšeme nasledovne:

$$(r - D)S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = -(r - D) \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad (70)$$

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \quad (71)$$

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\sigma^2}{2} S^3 \frac{\partial^3 V}{\partial S^3} = \frac{\sigma^2}{2} \left(-\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right), \quad (72)$$

$$-rS \frac{\partial V}{\partial S} = r\Pi - rV. \quad (73)$$

Poskladaním dostaneme nasledovnú rovnosť, v ktorej sa miešajú netransformované premenné S, t s transformovanými premennými x, τ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} - \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - (r - D) \frac{\partial \Pi}{\partial x} \\ + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\sigma^2}{2} \left(-\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right) - rV + r\Pi = 0. \end{aligned} \quad (74)$$

Netransformované premenné, nám spolu vytvárajú *Black-Scholesovu rovnicu* (7). Keďže pracujeme na intervale $x \in (0, \infty)$, tam je rovná nule. Po odstránení členov týchto nadbytočných členov získame rovnosť pre Π :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} - \alpha(\tau) \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + r\Pi = 0, \quad (75)$$

kde α sme pre jednoduchosť označili množinu členov $\alpha(\tau) = \frac{\varrho'(\tau)}{\varrho(\tau)} + r - D - \frac{\sigma^2}{2}$. Dostali sme PDR pre Π . Potrebujeme k nej ešte počiatkové a okrajové podmienky a nejaké dodatočné podmienky pre ϱ , keďže aj to je stále neznáme. Prvú podmienku získame z (18),(19) a (60):

$$\begin{aligned} \Pi(0, \tau) &= V(S_f(T - \tau), T - \tau) - S_f(T - \tau) \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(T - \tau), T - \tau) \\ &= E - S_f(T - \tau) - S_f(T - \tau)(-1) = E. \end{aligned} \quad (76)$$

Okrajová podmienka $x \rightarrow \infty$ reprezentuje stav, kedy $S \gg S_f$. Vtedy opcia nemá žiadnu hodnotu a rovnako $\frac{\partial V}{\partial S} = 0$. Preto má druhá okrajová podmienka nasledovný tvar:

$$\Pi(\infty, \tau) = 0. \quad (77)$$

Počiatkové podmienky pre čas $\tau = 0$, ktorý zodpovedá času maturity opcie, získame z (60). Stačí si uvedomiť, že cena $V(S, t)$ je daná z pay-off diagramu

3.1 Put opcia

a pre hodnotu derivácie platí $\frac{\partial V}{\partial S} = -1$ v prípade, že je cena dostatočne malá a opciu uplatňujeme. Inak je táto hodnota rovná nule. Počiatočná podmienka má preto tvar:

$$\Pi(x, 0) = \begin{cases} E & \text{pre } x < \ln\left(\frac{E}{\varrho(0)}\right) \\ 0 & \text{inak} \end{cases}.$$

Poslednú podmienku dostaneme zo vzťahu medzi Π a $\varrho(\tau)$. Pri dosiahnutí úrovne uplatnenia opciu okamžite uplatňujeme, z toho dôvodu musí pre jej cenu platiť

$$E - S_f(t) = V(S_f(t), t). \quad (78)$$

Po zderivovaní tejto rovnosti podľa t dostávame vzťah:

$$-\frac{d}{dt}(S_f(t)) = \frac{\partial V(S_f(t), t)}{\partial S} \frac{d}{dt}(S_f(t)) + \frac{\partial V(S_f(t), t)}{\partial t}. \quad (79)$$

Kedže $\frac{\partial V(S_f(t), t)}{\partial S} = -1$ pre všetky hodnoty $S < S_f(t)$, tak $\frac{\partial V(S_f(t), t)}{\partial t} = 0$. Ako poslednú vec si treba uvedomiť, že $x \rightarrow 0^+$ reprezentuje prípad, kedy sa cena akcie približuje k *volnej hranici*. Kedže kvôli použitej transformácii sa stále nachádzame v zóne $S \in (\varrho(t), \infty)$, tak sa môžeme približovať jedine zhora. Pre hodnoty $x \rightarrow 0^+$ preto platia nasledovné vzťahy:

$$S \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) \rightarrow -\varrho(\tau), \quad (80)$$

$$S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) \rightarrow -\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau). \quad (81)$$

Z (60) vyplýva $S \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) = V(S, t) - \Pi(x, \tau)$ a následne ľahko z (53) odvodíme rovnosť:

$$(r - D)(-\varrho(\tau)) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau) - r(E - \varrho(\tau)) = 0, \quad (82)$$

z ktorej nám potom vyplynie vzťah medzi Π a ϱ :

$$\varrho(\tau) = \frac{rE}{D} + \frac{\sigma^2}{2D} \frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau). \quad (83)$$

3.1.3 Nulové dividendy

Prípad kedy neuvažujeme dividendy, tj. $D = 0$, je vlastne iba zovšeobecnením modelu, kde ich uvažujeme. Pri *call opcii* nie je dôvod sa takýmto prípadom

zaoberať, keďže jej cena by sa vtedy zhodovala s cenou európskej opcie, pre ktorú je známe explicitné riešenie. V prípade *put opcie* je situácia odlišná a má zmysel uvažovať aj nad prípadom, kedy akcia nevypláca dividendy. Do vzora (83) napríklad nemôžeme dosadiť $D = 0$ a pokračovať vo výpočtoch podľa tejto schémy. Z rovnice (82) nevieme vyjadriť explicitný vzťah medzi Π a τ pre $D = 0$, dostaneme však iný vzťah:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau) = -\frac{2rE}{\sigma^2}. \quad (84)$$

3.2 Call opcia

3.2.1 Transformácia funkcie ceny call opcie

V tejto časti sa pozrieme na transformačnú metódu pre *americkú call opciu* ako bola popísaná v knihe [5]. *Black-Scholesova lineárna rovnica* má tvar:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{pre } 0 < S < S_f(t), \quad (85)$$

$$V(0, t) = 0, \quad (86)$$

$$V(S_f, t) = S_f - E, \quad (87)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f, t) = 1, \quad (88)$$

$$V(S, T) = (S - E)^+. \quad (89)$$

Aplikujeme na ňu transformáciu v tvare:

$$\tau = T - t, \quad (90)$$

$$x = \ln \left(\frac{S_f(T - \tau)}{S} \right). \quad (91)$$

Všimnime si, že $x \in (0, \infty)$ zodpovedá v pôvodným premenným $S(t) \in (0, \varrho(t))$. Transformácia je teda opačná ako (52). Hodnoty $S(t) > \varrho(t)$ nie je potrebné skúmať, keďže vieme, že v tomto pásme je cena opcie totožná s pay-off diagramom. Polohu *hranice predčasného uplatnenia* $S_f(T - \tau)$ označíme rovnako ako pri *put opciách* $\varrho(\tau)$. Pomocné portfólio Π definujeme rovnako ako v (60). Z (91) vieme vyjadriť $S = e^{-x} S_f(T - \tau) = e^{-x} \varrho(\tau)$ a z (90) $t = T - \tau$. Teda pre Π dostaneme:

$$\Pi(x, \tau) = V(e^{-x} \varrho(\tau), T - \tau) - (e^{-x} \varrho(\tau)) \frac{\partial V}{\partial S}(e^{-x} \varrho(\tau), T - \tau) \quad (92)$$

Následne už nie je náročné odvodiť všetky potrebné derivácie:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial S}(e^{-x} \varrho(\tau), T - \tau)(-e^{-x} \varrho(\tau)) - (-e^{-x} \varrho(\tau)) \left(\frac{\partial V}{\partial S}(e^{-x} \varrho(\tau), T - \tau) \right) \\ &\quad - (e^{-x} \varrho(\tau)) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(e^{-x} \varrho(\tau), T - \tau)(-e^{-x} \varrho(\tau)) \right) \\ &= (e^{-x} \varrho(\tau))^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(e^{-x} \varrho(\tau), T - \tau) = S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t)\end{aligned}\quad (93)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} &= 2(e^{-x} \varrho(\tau))(-e^{-x} \varrho(\tau)) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(e^{-x} \varrho(\tau), T - \tau) \\ &\quad + (e^{-x} \varrho(\tau))^2 \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(e^{-x} \varrho(\tau), T - \tau)(-e^{-x} \varrho(\tau)) \\ &= -2S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) - S^3 \frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(S, t)\end{aligned}\quad (94)$$

Nakoniec vyjadríme deriváciu podľa časovej premennej:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} &= \frac{\partial V}{\partial S}(e^{-x} \varrho(\tau), T - \tau)(e^{-x} \varrho'(\tau)) + \frac{\partial V}{\partial t}(e^{-x} \varrho(\tau), T - \tau)(-1) \\ &\quad - (e^{-x} \varrho'(\tau)) \left(\frac{\partial V}{\partial S}(e^{-x} \varrho(\tau), T - \tau) \right) \\ &\quad - (e^{-x} \varrho(\tau)) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(e^{-x} \varrho(\tau), T - \tau)(e^{-x} \varrho'(\tau)) + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}(e^{-x} \varrho(\tau), T - \tau)(-1) \right) \\ &= -\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) - S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t)(e^{-x} \varrho'(\tau)) + S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}(S, t)\end{aligned}\quad (95)$$

3.2.2 Black-Scholesova rovnica pre transformovanú funkciu call opcie

Rovnako ako v prípade *put opcie* budeme predpokladať, že riešenie $V(S, t)$ je hladké. Táto vlastnosť je splnená pre čas $t \in \langle 0, T \rangle$. Zderivujeme (7) a získanú rovnosť (68) vyjadríme pomocou Π nasledovne:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} + \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + (r - D) \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \\ + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\sigma^2}{2} \left(-\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right) - rV + r\Pi = 0.\end{aligned}\quad (96)$$

Aj tu sa nachádzajú členy z *Black-Scholesovej rovnice*, ktoré môžeme odstrániť, keďže sú rovné nule. Potom:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} + \alpha(\tau) \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + r\Pi = 0,\quad (97)$$

kde $\alpha(\tau) = \frac{\varrho'(\tau)}{\varrho(\tau)} + r - D - \frac{\sigma^2}{2}$. Z podmienok (86),(87) a (88) dostaneme okrajové podmienky pre (97):

$$\begin{aligned}\Pi(0, \tau) &= V(S_f(T - \tau), T - \tau) - S_f(T - \tau) \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(T - \tau), T - \tau) \\ &= S_f(T - \tau) - E - S_f(T - \tau) = -E,\end{aligned}\tag{98}$$

$$\Pi(\infty, \tau) = V(0, T - \tau) - 0 \frac{\partial V}{\partial S}(0, T - \tau) = 0.\tag{99}$$

Počiatočné podmienky nám vyplynú z pay-off diagramu. Pre hodnoty $S(T)$ ostro menšie ako E , nemá opcia žiadnu hodnotu. Preto pre hodnotu deriváci podľa S platí $\frac{\partial V}{\partial S} = 0$. Hodnoty S v pásme $(E, S_f(T))$ znamenajú nenulovú hodnotu opcie a $\frac{\partial V}{\partial S} = 1$. Preto:

$$\Pi(x, 0) = \begin{cases} -E & \text{pre } x < \ln\left(\frac{\varrho(0)}{E}\right) \\ 0 & \text{inak} \end{cases}.$$

Ďalšiu podmienku dostaneme zo vzťahu medzi Π a $\varrho(\tau)$. Pri dosiahnutí úrovne uplatnenia opciu okamžite uplatňujeme, z toho dôvodu musí pre jej cenu platiť:

$$S_f(t) - E = V(S_f(t), t).\tag{100}$$

Po zderivovaní tejto rovnosti podľa t dostávame vzťah:

$$\frac{d}{dt}(S_f(t)) = \frac{\partial V(S_f(t), t)}{\partial S} \frac{d}{dt}(S_f(t)) + \frac{\partial V(S_f(t), t)}{\partial t}.\tag{101}$$

Kedže opciu by sme uplatnili aj pre vyššiu cenu ako S_f , tak platí $\frac{\partial V(S_f(t), t)}{\partial S} = 1$. Po dosadení do (101) dostávame, že musí nutne platiť $\frac{\partial V(S_f(t), t)}{\partial t} = 0$. Stav v blízkosti hranice uplatnenia nám popisujú hodnoty $x \approx 0^+$. Preto pre hodnoty $x \rightarrow 0$ platia nasledovné vzťahy:

$$S \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) \rightarrow \varrho(\tau),\tag{102}$$

$$S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) \rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau),\tag{103}$$

keďže $S \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) = V(S, t) - \Pi(x, \tau)$. Ich dosadením do (85) dostávame rovnosť, ktorá platí pre x na okolí bodu nula:

$$(r - D)\varrho(\tau) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau) - r(\varrho(\tau) - E) = 0.\tag{104}$$

Z rovnice (104) vyjadrením $\varrho(\tau)$ dostaneme rovnaký vzťah ako ten, ktorý nám explicitne preväzuje hodnoty Π a ϱ pri *put opcii* (83).

3.3 Model s nelineárnou volatilitou

Doteraz sme sa zaoberali prípadmi *call* a *put* opcií s konštantnou volatilitou, $\sigma = \text{konšt.}$ Vo všeobecnosti však môže byť volatilita daná ako funkcia ostatných premenných:

$$\sigma = \sigma(S^2 \partial_S^2 V, S, T - t), \quad (105)$$

s *Black-Scholesovou* rovnicou v zovšeobecnenom tvare:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma(S^2 \partial_S^2 V, S, T - t))^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (106)$$

Rovnakým postupom ako v prípade konštantnej volatility zostrojíme portfólio Π . Rovnosti (64), (66) a (67) pre americkú *put* opciu zostávajú zachované. Pri derivovaní (106) podľa S však už nemožno brať σ ako konštantu. Po zderivovaní a prenasobení S dostaneme nasledovnú rovnosť:

$$\begin{aligned} S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + (r - D)S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} 2\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial S} S^3 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \\ + \frac{\sigma^2}{2} 2S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\sigma^2}{2} S^3 \frac{\partial^3 V}{\partial S^3} - rS \frac{\partial V}{\partial S} = 0. \end{aligned} \quad (107)$$

Oproti rovnosti (68) máme v prípade nelinearnej volatility navyše člen $\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial S} S^3 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$. Pokiaľ sa pozrieme na vzťah medzi S a x , tak z (59) dostaneme:

$$\frac{dx}{dS} = \frac{S_f}{S} \frac{1}{S_f}, \quad (108)$$

a teda $dx = \frac{dS}{S}$. Pokiaľ v rovnici (75) nahradíme člen $\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$ členom $\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\sigma^2 \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)$ získame požadovaný tvar, keďže:

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\sigma^2 \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} 2\sigma \frac{d\sigma}{dS} \frac{dS}{dx} \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}. \quad (109)$$

Tým sme dostali pôvodný člen $\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$ a navyše aj požadovaný člen $\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial S} S^3 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$, lebo platí $\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$. Pri použití nelinearnej volatility dostaneme pre Π podobný vzťah ako (75):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} - \alpha(\tau) \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\sigma^2 \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right) + r\Pi = 0, \quad (110)$$

pre americký *put* a analogicky:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} + \alpha(\tau) \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\sigma^2 \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right) + r\Pi = 0, \quad (111)$$

pre americký *call*.

3.4 Výpočet ceny opcie z riešenia transformovanej rovnice

Vychádzať budeme z knihy [5], kde je ukázané ako z riešenia Π vypočítať cenu americkej call opcie V . Vzťah (60) si vieme napísať ako:

$$\Pi(x, \tau) = V(S, t) - S \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) = -S^2 \frac{d}{dS} (S^{-1}V(S, t)), \quad (112)$$

z čoho ľahko dostaneme rovnosť:

$$-S^{-2}\Pi(x, \tau) = -S^{-2}\Pi\left(\ln\left(\frac{S}{\varrho(T-t)}\right), T-t\right) = \frac{d}{dS} (S^{-1}V(S, t)) \quad (113)$$

Keď tento výraz zintegrujeme na intervale $[S_f(t), S]$ a využijeme poznatok, že $V(S_f(t), t) = E - S_f(t)$ dostaneme:

$$\frac{1}{S}V(S, t) - \frac{1}{\varrho(\tau)}(E - \varrho(\tau)) = \int_{S_f}^S -S^{-2}\Pi\left(\ln\left(\frac{S}{\varrho(T-t)}\right), T-t\right) dS. \quad (114)$$

Teraz v integrále využijeme, že $x = \ln\left(\frac{S}{\varrho(\tau)}\right)$ a $dx = \frac{1}{S}dS$ a dostaneme:

$$\frac{1}{S}V(S, t) - \frac{1}{\varrho(\tau)}(E - \varrho(\tau)) = \int_0^{\ln\frac{S}{\varrho(\tau)}} -S^{-2}\Pi(x, \tau) S dx. \quad (115)$$

Nakoniec v integrále použijeme rovnosť $S = e^x \varrho(\tau)$ a dostaneme vzťah na výpočet ceny americkej put opcie z riešenia transformovanej rovnice:

$$V(S, t) = \frac{S}{\varrho(\tau)} \left(E - \varrho(\tau) - \int_0^{\ln\frac{S}{\varrho(\tau)}} e^{-x}\Pi(x, \tau) dx \right). \quad (116)$$

Podobne je to pre cenu americkej call opcie, ak poznáme riešenie Π transformovanej rovnice:

$$V(S, t) = \frac{S}{\varrho(\tau)} \left(\varrho(\tau) - E + \int_0^{\ln\frac{\varrho(\tau)}{S}} e^x \Pi(x, \tau) dx \right). \quad (117)$$

4 Numerická aproximačná schéma

V minulej kapitole sme si ukázali ako transformovať systém (53)-(57) na systém:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} - \alpha(\tau) \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + r\Pi = 0, \quad (118)$$

$$\alpha(\tau) = \frac{\varrho'(\tau)}{\varrho(\tau)} + r - D - \frac{\sigma^2}{2}, \quad (119)$$

s dodatočnými podmienkami:

$$\Pi(x, 0) = \begin{cases} E & \text{pre } x < \ln\left(\frac{E}{\varrho(0)}\right), \\ 0 & \text{inak} \end{cases}, \quad (120)$$

$$\Pi(\infty, \tau) = 0, \quad (121)$$

$$\Pi(0, \tau) = E, \quad (122)$$

$$\varrho(\tau) = \frac{rE}{D} + \frac{\sigma^2}{2D} \frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau). \quad (123)$$

V prípade, že neuvažujeme dividendy sa podmienka (123) zmení nasledovne:

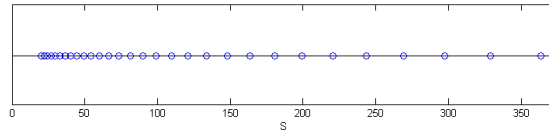
$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau) = -\frac{2rE}{\sigma^2}. \quad (124)$$

Zbavili sme sa nerovnosti, ktorá bola najväčšou prekážkou v riešení systému. Napriek tomu je stále zložitý, najmä preto, že sa v ňom nachádzajú 2 neznáme funkcie $\Pi(x, \tau)$ a $\varrho(\tau)$. Tieto sú navyše previazané vzťahom (123). Na riešenie preto potrebujeme dobrý numerický systém. Numerickým riešením transformovanej rovnice pre *americké call opcie* sa zaoberali autori v knihe [5] a podrobnejšie ho rozvinuli Kandilarov a Valkov v článku [15]. V nasledujúcich odstavcoch sa pozrieme na to, akým spôsobom sa dá numericky riešiť systém (118)-(122),(123), respektíve (118)-(122),(124) v prípade, že nie sú prítomné dividendy.

4.1 Numerická metóda pre transformovanú rovnicu ceny americkej put opcie

Aby sme vedeli vypočítať cenu *americkej put opcie* $V(S, t)$, potrebujeme úplne poznať riešenie $\Pi(x, \tau)$ a zároveň $\varrho(\tau)$. Systém ktorý musíme riešiť je 2D parciálna diferenciálna rovnica. Z počiatočnej podmienky (120) poznáme riešenie v čase $\tau = 0$. Podmienky (121) a (122) nám zase určujú, ako vyzerá funkcia

$\Pi(x, \tau)$ v krajných bodoch priestoru $x \in (0, \infty)$. Vďaka tomu sa ako vhodný nástroj javí metóda konečných diferencií. Časový priestor $\tau \in (0, T)$ diskretizujeme pomocou $m + 1$ bodov s krokom $k = \frac{T}{m}$, kde $\tau_j, j = 0, \dots, m$ bude predstavovať j -ty bod a jeho hodnota bude $\tau_j = jk$. Čo sa týka priestorovej premennej x , obmedzíme sa na priestor $x \in (0, L)$ pre dostatočne veľké L . V tomto prípade nám postačí $L \approx 4$, keďže v pôvodných premenných to znamená $S \in (\varrho(\tau), e^4 \varrho(\tau))$. Hodnoty, ktoré nepokryjeme znamenajú, že cena podkladového aktíva je 54.60 násobne vyššia, ako tá pri ktorej by došlo k predčasnému uplatneniu. Cenu takejto opcie môžeme aproximovať $V \approx 0$ bez toho, aby sme sa dopustili výraznejšej chyby. O rozšírení intervalu $(0, 4)$ pre x má zmysel uvažovať pri dlhých časoch expirácie, alebo ak je opcia vypísaná na akciu s vysokou volatilitou. Vtedy je vyššia pravdepodobnosť, že aj v prípade takto vysokej ceny dojde k uplatneniu, a preto aj opcia môže mať hodnotu, ktorá nie je zanedbateľná. Priestor $x \in (0, L)$ rozdelíme podobne ako časový priestor na $n + 1$ bodov s krokom $h = \frac{L}{n}$, kde $x_i, i = 0, \dots, n$ predstavuje i -ty bod s hodnotou $x_i = iL$. Mohli by sme použiť aj nelineárne delenie, aby sme lepšie pokryli hodnoty S blízke $\varrho(\tau)$. Avšak vďaka transformácii $S = e^x \varrho(\tau)$ sú body blízke $\varrho(\tau)$ lepšie pokryté ako tie vzdialené (Obr. 6). Preto nám postačí aj lineárne rozloženie bodov x_i . Symbolom Π_i^j označíme numerickú aproximáciu

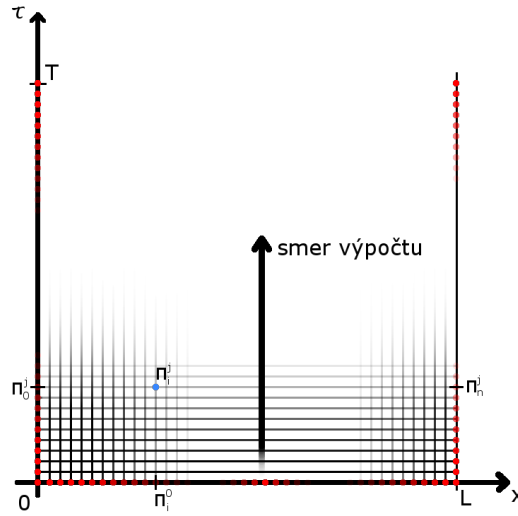


Obr. 6: Numerické rozloženie bodov S , pre $\varrho(\tau) = 20$

$\Pi(x_i, \tau_j)$. Obrázok (7) znázorňuje ako táto numerická úloha vyzerá. V čase $\tau = 0$ poznáme riešenie, keďže ide o čas expirácie opcie. Rovnako v každom čase poznáme aj okrajové hodnoty $\Pi(0, \tau_j)$ a $\Pi(x_n, \tau_j)$. Preto začneme počítať na časovej vrstve τ_1 , kde vypočítame numerickú aproximáciu spĺňajúcu systém (119)-(123). Potom pristúpime k posunu do ďalšej časovej vrstvy a výpočet zopakujeme. Takýmto spôsobom doriešime úlohu až do konca.

4.1.1 Metóda konečných diferencií pre transformovanú rovnicu

Ako prvé sa musíme zamyslieť, aké vzťahy by mala spĺňať numerická aproximácia riešenia Π . Budeme vychádzať zo vzťahu (110), ktorý je na rozdiel od vzťahu (119) splnený ako pre lineárne, tak aj pre nelineárne modely volatility. Pozrieme sa teraz ako bude vyzeráť táto rovnica pre bod Π_i^j . Použijúc *Eulerovu*



Obr. 7: Schéma numerického riešenia transformovanej rovnice

spätnú diferenciu pre časovú deriváciu dostaneme:

$$\frac{\Pi_i^j - \Pi_i^{j-1}}{k} - \alpha_i^j \frac{\partial \Pi_i^j}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left((\sigma_i^j)^2 \frac{\partial \Pi_i^j}{\partial x} \right) + r \Pi_i^j, \quad (125)$$

kde $\sigma_i^j = \sigma$ v prípade, ak uvažujeme konštantnú volatilitu. Ak nie, tak musíme σ_i^j vyčísliť v bode x_i, τ_j . Rovnako aj α_i^j je iba funkciou času, ak uvažujeme konštantnú volatilitu, pretože s meniacim časom sa nám mení hodnota člena $\frac{\rho'(\tau_j)}{\rho(\tau_j)}$. V prípade nelineárnej volatility treba samozrejme vyčíslovať α_i^j aj pre každé x_i . Rovnica (125) by bola jednoducho riešiteľná, ak by sa v nej nenachádzal člen $\frac{\rho'(\tau_j)}{\rho(\tau_j)}$. Tento je priamo závislý od riešenia Π^j , kvôli podmienke (123).

Preto pridáme do rovnice (125) premennú $\Pi_i^{j-\frac{1}{2}}$, ktorá bude predstavovať akýsi medzikrok. Zavedieme aj premennú $b^j = \frac{\rho'(\tau_j)}{\rho(\tau_j)} + r - D$, ktorá sa líši od α_i^j iba tým, že neobsahuje volatilitu σ_i^j . Preto je b^j už iba funkciou časovej premennej. Následne rozdelíme rovnicu na 2 časti:

Konvektívna časť

$$\frac{\Pi_i^{j-\frac{1}{2}} - \Pi_i^{j-1}}{k} - b^j \frac{\partial \Pi_i^{j-\frac{1}{2}}}{\partial x} = 0. \quad (126)$$

Difuzívna časť

$$\frac{\Pi_i^j - \Pi_i^{j-\frac{1}{2}}}{k} + \frac{(\sigma_i^j)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Pi_i^j - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left((\sigma_i^j)^2 \frac{\partial \Pi_i^j}{\partial x} \right) + r \Pi_i^j = 0. \quad (127)$$

Lahko si môžeme všimnúť, že rovnice (126) a (127) nám v súčte dajú veľmi podobný výraz ako (125). Rozdiel je iba ten, že sme v (126) namiesto $\frac{\partial \Pi^j}{\partial x}$ použili $\frac{\partial \Pi^{j-\frac{1}{2}}}{\partial x}$. Vďaka tomu nám v rovnici (126) vystupujú iba premenné Π^{j-1} a $\Pi^{j-\frac{1}{2}}$ a v rovnici (127) máme zase premenné $\Pi^{j-\frac{1}{2}}$ a Π^j . Aby takto získané riešenie bolo dostatočne presné, je nutné, aby sme sa touto zámenou nedopustili veľkej chyby a aby sa derivácie čo najviac zhodovali, $\frac{\partial \Pi^j}{\partial x} \approx \frac{\partial \Pi^{j-\frac{1}{2}}}{\partial x}$. Zatiaľ budeme len predpokladať, že ich môžeme zameniť, neskôr si ukážeme, prečo to tak je. *Konvektívna rovnica* (126) pripomína jeden krok z numerickej schémy na riešenie transportnej PDR, $\partial_\tau \Pi - b(\tau) \partial_x \Pi$. Vieme, že riešením PDR rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - f(t) \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

je funkcia $u(x, t) = u_0(x + F(t))$, kde $F(t)$ je primitívna funkcia $f(t)$. Primitívna funkcia $b(\tau) = \frac{\varrho'(\tau)}{\varrho(\tau)} + r - D$ je $B(\tau) = \ln \varrho(\tau) + (r - D)\tau$. Aplikovaním na *konvektívnu rovnicu* dostaneme:

$$\Pi^{j-\frac{1}{2}}(x) = \Pi^{j-1}(x + \ln \varrho(\tau_j) - \ln \varrho(\tau_{j-1}) + (r - D)k). \quad (128)$$

Teda $\Pi^{j-\frac{1}{2}}$ získame posunutím hodnôt z Π^{j-1} . *Hranica predčasného uplatnenia* $\varrho(t)$ je rastúca funkcia (napr. Obr. 4). Keďže sme použili transformáciu času, tak $\varrho(\tau)$ je klesajúcou funkciou parametra τ . Výraz $\ln \varrho(\tau_j) - \ln \varrho(\tau_{j-1})$ je teda záporný na každej časovej vrstve. Naopak, pre úrokovú mieru a dividendy predpokladáme, že $r > D$, a preto je člen $(r - D)\tau$ kladný. Riešenie Π^{j-1} je známe pre hodnoty $x \in (0, L)$. V prípade, že budeme pri výpočte $\Pi^{j-\frac{1}{2}}$ potrebovať funkčnú hodnotu mimo tohto intervalu, tak použijeme okrajové podmienky (121) a (122). Taktiež treba mať na pamäti, že pri výpočte vieme vyčíslíť funkciu Π^{j-1} iba v bodoch mriežky. Pri hodnotách mimo nich použijeme lineárnu interpoláciu:

$$\Pi^{j-1}(x) \doteq \alpha \Pi^{j-1}(x_i) + (1 - \alpha) \Pi^{j-1}(x_{i+1}), \quad (129)$$

$$\text{pre } x = \alpha x_i + (1 - \alpha) x_{i+1}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (130)$$

Problémom zostáva, že nepoznáme hodnotu $\varrho(\tau_j)$, ktorá je ako vidíme potrebná na výpočet Π^j . Tento algoritmus preto funguje iteračne. Najprv vypočítame $\hat{\Pi}^{j-\frac{1}{2},0}$ z Π^{j-1} a $\hat{\varrho}(\tau_j)_0 = \varrho(\tau_{j-1})$ pomocou *konvektívnej rovnice*. Následne vypočítame $\hat{\Pi}^{j,0}$ z *difúzívnej rovnice* použijúc $\hat{\Pi}^{j-\frac{1}{2},0}$ a vypočítame aj nové $\hat{\varrho}(\tau_j)_1$ z podmienky (123). Takýmto spôsobom iteratívne pokračujeme:

$$\varrho^{j,0} \rightarrow \Pi^{j-\frac{1}{2},0} \rightarrow \Pi^{j,0} \rightarrow \varrho^{j,1} \rightarrow \dots \quad (131)$$

4.1 Numerická metóda pre transformovanú rovnicu ceny americkej put opcie

Iteráciu ukončíme v prípade, že $|\varrho^{j,k} - \varrho^{j,k-1}| < \varepsilon$, kde ε je stanovená presnosť. V tomto momente ju môžeme ukončiť na časovej vrstve j , keďže vypočítané hodnoty $\varrho^{j,k}$, $\Pi^{j-\frac{1}{2},k-1}$, $\Pi^{j,k-1}$ spĺňajú (126) a (127) a tiež pre $\varrho^{j,k}$ platí:

$$\varrho^{j,k} = \frac{rE}{D} - \frac{(\sigma_0^j)^2}{2D} \frac{\Pi_0^{j,k-1} - E}{h}, \quad (132)$$

čo je vlastne vzťah (123) vyjadrený numericky. O tomto zobrazení ($\varrho^{j,k-1} \rightarrow \varrho^{j,k}$) predpokladáme, že je kontraktívne a zobrazuje množinu $\langle 0, E \rangle \rightarrow \langle 0, E \rangle$. To nám zaručuje na základe *Banachovej vety o pevnom bode* lineárnu rýchlosť konvergencie.

Ešte je nutné predstaviť numerický výpočet *difuzívnej rovnice*. Použijeme centrálnu diferenciu na (127) a dostaneme:

$$\begin{aligned} & \frac{\Pi_i^j - \Pi_i^{j-\frac{1}{2}}}{k} + r\Pi_i^j + \frac{(\sigma_i^j)^2}{2} \frac{\Pi_{i+1}^j - \Pi_{i-1}^j}{2h} \\ & - \frac{1}{2h} \left((\sigma_i^j)^2 \frac{\Pi_{i+1}^j - \Pi_i^j}{h} - (\sigma_{i-1}^j)^2 \frac{\Pi_i^j - \Pi_{i-1}^j}{h} \right) = 0 \end{aligned} \quad (133)$$

V tejto chvíli už máme vypočítané $\Pi^{j-\frac{1}{2}}$. Horeuvedený vzťah má platiť pre $i = 0, \dots, n$. Po prenásobení k a po separovaní premenných dostaneme:

$$\alpha_i^j \Pi_{i-1}^j + \beta_i^j \Pi_i^j + \gamma_i^j \Pi_{i+1}^j = \Pi_i^{j-\frac{1}{2}}, \quad (134)$$

$$\alpha_i^j = -\frac{k(\sigma_i^j)^2}{4h} - \frac{k(\sigma_{i-1}^j)^2}{2h^2}, \quad (135)$$

$$\gamma_i^j = \frac{k(\sigma_i^j)^2}{4h} - \frac{k(\sigma_i^j)^2}{2h^2}, \quad (136)$$

$$\beta_i^j = 1 + rk + \frac{k(\sigma_{i-1}^j)^2}{2h^2} + \frac{k(\sigma_i^j)^2}{2h^2} = 1 + rk - (\alpha_i^j + \gamma_i^j). \quad (137)$$

Ak neuvažujeme nelineárny model volatility, tak $\sigma_i^j = \sigma$. Inak je nutné vyčíslavať σ_i^j pre všetky $i = 0, \dots, n$. Následne potrebujeme vyriešiť systém:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^j & \beta_0^j & \gamma_0^j & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \vdots & & \alpha_i^j & \beta_i^j & \gamma_i^j & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & \alpha_{n-1}^j & \beta_{n-1}^j & \gamma_{n-1}^j \\ \dots & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_{-1}^j \\ \Pi_0^j \\ \vdots \\ \Pi_i^j \\ \vdots \\ \Pi_{n-1}^j \\ \Pi_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \Pi_0^{j-\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ \Pi_i^{j-\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ \Pi_{n-1}^{j-\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (138)$$

Lahko zistíme, že namiesto $n+1$ počítame rovnicu o $n+2$ neznámych členoch. Prvá a posledná rovnica vyjadrujú okrajové podmienky (121) a (122). Preto hodnota Π_{-1}^j slúži iba za účelom splnenia okrajovej podmienky, a vo výsledku ju nepoužijeme. Systém (138), ktorý potrebujeme riešiť, pozostáva z riedkej matice, ktorá má 3 diagonály. Na riešenie použijeme *Thomasov algoritmus* [16], ktorý je zovšeobecneným prípadom *Gausovej eliminácie*. No na rozdiel od *Gausovej eliminácie* je zložitosť algoritmu $O(n)$, namiesto $O(n^3)$. Pokiaľ platí, že $h^2 > k$, tak $\alpha_i^j, \gamma_i^j \approx 0$ a $\beta_i^j \approx 1$. Hodnoty $\Pi_i^{j-\frac{1}{2}}, \Pi_{i-1}^{j-\frac{1}{2}}$ sa preto iba málo líšia od hodnôt Π_i^j, Π_{i-1}^j . Chyba, ktorej sme sa dopustili zámienou $\frac{\partial \Pi^j}{\partial x}$ za $\frac{\partial \Pi^{j-\frac{1}{2}}}{\partial x}$ v *konvektívnej časti* je vďaka tomu tiež malá.

4.2 Prípád nulových dividend

V prípade, ak neuvažujeme dividendy, sa nám zmení rovnica (123) na (124). Nemáme už k dispozícii vzťah, ktorý by nam preväzoval hodnoty Π^j a ϱ^j . Namiesto toho musíme nájsť takú hodnotu ϱ^j , aby boli splnené rovnice (118)-(122) a (124). Zachováme v platnosti úvahy o rozdelení rovnice (118) na *konvektívnu* a *difuzívnu* časť. Keďže nám už neplatí rovnosť (123), tak by sme s nevedeli po ukončení iterácie vypočítať z $\Pi^{j,i}$ hodnotu $\varrho^{j,i+1}$ pre ďalšiu iteráciu. Namiesto toho sa môžeme pozrieť na výpočet $\Pi^{j-\frac{1}{2},i}$ a $\Pi^{j,i}$ ako na funkciu:

$$\Pi^{j,i} = \Phi(\varrho^{j,i}, \Pi^{j-1}). \quad (139)$$

Takto vypočítané riešenie spĺňa vzťahy (118)-(122) pre ľubovoľne zvolené $\varrho^{j,i}$. Naším cieľom je nájsť takú hodnotu ϱ^j , aby bola splnená aj podmienka (124). Ak máme vypočítané $\Pi^{j,i}$, tak použijúc *spättnú diferenciu* overíme, či platí:

$$\frac{\Pi_0^{j,i} - E}{h} = -\frac{2rE}{(\sigma_0^j)^2}. \quad (140)$$

Našou úlohou je dosiahnúť splnenie tohto vzťahu. Hodnota derivácie $y := \frac{\Pi_0^{j,i} - E}{h}$ je vyjadriteľná ako funkcia Π^{j-1} a hodnoty $\varrho^{j,i}$, ktorú hľadáme:

$$y = \Psi(\varrho^{j,i}, \Pi^{j-1}). \quad (141)$$

Potrebujeme nájsť koreň rovnice $\Psi(\varrho^{j,i}, \Pi^{j-1}) + \frac{2rE}{(\sigma_0^j)^2} = 0$. Aby sme mohli použiť *Newtonovu metódu* na hľadanie koreňa, potrebujeme vedieť odhadnúť deriváciu funkcie $\Psi(\varrho^{j,i}, \Pi^{j-1})$ podľa $\varrho^{j,i}$. Preto popri iterácii pre bod $\varrho^{j,i}$, správnym výpočet aj v bode $\varrho^{j,i} + \Delta$, kde Δ je dostatočne malé. Deriváciu v tomto bode odhadneme doprednou diferenciou:

$$\Psi'(\varrho^{j,i}, \Pi^{j-1}) = \frac{\Psi(\varrho^{j,i} + \Delta, \Pi^{j-1}) - \Psi(\varrho^{j,i}, \Pi^{j-1})}{\Delta}, \quad (142)$$

bod pre ďalšiu iteráciu potom vypočítame pomocou *Newtonovej metódy*:

$$\varrho^{j,i+1} = \varrho^{j,i} - \frac{\Psi(\varrho^{j,i}, \Pi^{j-1}) + \frac{2rE}{(\sigma_0^j)^2}}{\Psi'(\varrho^{j,i}, \Pi^{j-1})}. \quad (143)$$

Tento algoritmus má inú schému ako v prípade, že uvažujeme dividendy. V každej iterácii počítame $\Pi^{j-\frac{1}{2}}, \Pi^j$ pre $\varrho^{j,i}$ aj pre $\varrho^{j,i} + \Delta$.

$$\left. \begin{array}{l} \varrho^{j,i} \quad \rightarrow \Pi^{j-\frac{1}{2},i} \quad \rightarrow \Pi^{j,i} \\ \varrho^{j,i} + \Delta \quad \rightarrow \tilde{\Pi}^{j-\frac{1}{2},i} \quad \rightarrow \tilde{\Pi}^{j,i} \end{array} \right\} \rightarrow \varrho^{j,i+1}. \quad (144)$$

Iterácie na j -tej časovej vrstve ukončíme v prípade, že dostaneme riešenie, ktoré s dostatočnou presnosťou vyhovuje rovnici (140). Pre zrýchlenie konvergence môžeme začať v bode $\varrho^{j,0}$, ktorý bude čo najbližšie výslednému riešeniu ϱ^j . Pre naše potreby by postačil aj bod $\varrho^{j,0} = \varrho^{j-1}$. Ak však predpokladáme, že druhá derivácia funkcie $\varrho(\tau)$ je malá, lepšia aproximácia je $\varrho^{j,0} = 2\varrho^{j-1} - \varrho^{j-2}$.

4.3 Použitie nelineárneho modelu volatility

V kapitole o nelineárnych modeloch volatility sme si ukázali všeobecný tvar pre volatilitu:

$$\sigma = \sigma(S^2 \partial_S^2 V, S, T - t). \quad (145)$$

Numerickú schému máme však zostrojenú pre transformované premenné Π, x, τ . Z (64) nám vyplýva, že $S^2 \partial_S^2 V = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$. Z (61) vieme, že $S = e^x \varrho(\tau)$ a z (62)

$T - t = \tau$. Preto, ak poznáme predpis $\sigma(S^2 \partial_S^2 V, S, T - t)$, tak vieme vyčísliť σ_i^j na časovej vrstve j , na ktorej pracujeme nasledovne (použijúc *doprednú diferenciu*):

$$\sigma_i^j = \sigma \left(\frac{\Pi_i^{j-1} - \Pi_{i+1}^{j-1}}{h}, e^{x_i} \varrho^{j,p}, \tau_j \right). \quad (146)$$

V čase výpočtov na časovej vrstve j ešte nepoznáme ϱ^j , musíme použiť buď hodnotu ϱ^{j-1} , alebo súčasnú iteráciu $\varrho^{j,k}$.

4.4 Výpočet ceny opcie z numerického riešenia transformovanej rovnice

Pokiaľ by sme po vypočítaní numerického riešenia transformovanej rovnice Π mali záujem sa vrátiť k pôvodnej premennej V , aby sme vypočítali cenu opcie, tak použijeme vzťah (116). Predpokladajme, že poznáme riešenie Π pre jednu konkrétnu časovú hodnotu τ_j , a iba v diskrétnych bodoch $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Máme k dispozícii *hranicu predčasného uplatnenia* $\varrho(\tau)$ pre všetky predchádzajúce časové body, ale postačí nám poznať $\varrho(\tau_j)$. Chceme vypočítať hodnotu $V(S, t)$, pre $t = T - \tau_j$ a $S \in (\varrho(\tau_j), \infty)$. Integrál vo vzťahu (116) vypočítame numericky a použijeme pri tom známe hodnoty riešenia $\Pi(x, \tau_j)$. Definujme $n_{int} := \left\lfloor \frac{\ln \frac{S}{\varrho(\tau_j)}}{h} \right\rfloor$, t.j. n_{int} je maximálny taký index i pre ktorý je ešte $x_i < \ln \frac{S}{\varrho(\tau_j)}$. Integrál teraz numericky vyriešime sumovaním diskrétnych hodnôt:

$$V(S, t) = \frac{S}{\varrho(\tau_j)} \left(E - \varrho(\tau_j) - \sum_{i=0}^{n_{int}} e^{-x_{i+1}} \Pi(x_{i+1}, \tau_j) h \right). \quad (147)$$

5 Praktické testy

5.1 Porovnanie presnosti numerickej schémy pre transformovanú rovnicu a metódu PSOR

5.1.1 Prípad nulových dividend

V nasledujúcom odstavci porovnáme numerický algoritmus PSOR s numerickým algoritmom pre transformovanú rovnicu. Pozrieme sa na rýchlosť oboch algoritmov, ako aj na odchýlku výsledkov. Ako prvé treba pripomenúť, v čom sa tieto 2 algoritmy líšia. Pri metóde PSOR aplikujeme na pôvodný systém (16)-(20) transformáciu:

$$x = \ln \left(\frac{S}{E} \right), \quad (148)$$

$$\tau = T - t, \quad (149)$$

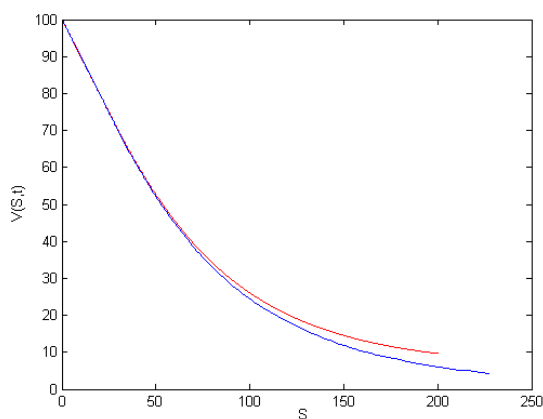
$$u(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} V(e^x, T - \tau), \quad (150)$$

a následne vhodne zvolíme α a β , čím dostaneme základný tvar parabolickej rovnice. Riešime to pomocou metódy konečných diferencií, avšak na každej časovej vrstve sa ešte musíme presvedčiť, že aktuálna cena sa nenachádza pod pay-off diagramom. Spätnou transformáciou na základe známeho $u(x_i, \tau_j)$ vieme vypočítať $V(S_i, t_j)$. Riešenie nám bude známe iba v diskretných bodoch S_i , pri dostatočne jemnom delení sa bude javiť ako hladké. Primárnym výstupom z PSOR metódy je teda cena $V(S, t)$. Pokiaľ by sme chceli zistiť polohu *hranice predčasného uplatnenia*, tak na základe vypočítaného riešenia $V(S_i, t_j)$ a vzťahu (18) vieme, že $S_f(t)$ je najväčšie také S , pre ktoré $V(S, t) = E - S$. My však poznáme riešenie $V(S, t)$ iba v niektorých diskretných bodoch S_i . Keďže predpokladáme $m \gg n$, delenie času je omnoho jemnejšie ako priestorové, a preto sa nám jedna hodnota S_i bude zdanlivo vyskytovať ako *hranica predčasného uplatnenia* vo viacerých časoch. Graf takto získaného riešenia $S_f(t)$ už nie je na pohľad hladký ako numerické riešenie $V(S, t)$. V prípade numerickej metódy pre transformovanú rovnicu je situácia opačná. Na každej časovej vrstve τ_j počítame $\Pi(x_i, \tau_j)$ na základe $\varrho(\tau_j)$. Po ukončení výpočtov máme k dispozícii riešenie $\varrho(\tau_j)$, pre $j = 0, 1, \dots, m$, ktoré vďaka jemnému časovému deleniu pôsobí hladko. Cenu opcie $V(S, t)$ potom dopočítame na základe vzťahu (147). Tu nám do rovnice vstupuje $\Pi(x_i, \tau_j)$, a rovnako ako v prípade PSOR metódy kvôli hrubšiemu deleniu priestorového kroku dostaneme výsledok, ktorý nie je hladký a obsahuje skokové zmeny.

5.1 Porovnanie presnosti numerickej schémy pre transformovanú rovnicu a metódu PSOR

Tabuľka 1: Porovnanie numerickej metódy pre transformovanú rovnicu a metódy PSOR

T	σ	r	$\varrho(T)_{\text{PSOR}}$	$\varrho(T)_{\text{TRANS}}$	% odchýlka	čas _{PSOR}	čas _{TRANS}
1	0.25	0.02	66.8981	66.8988	0.00	5.2098	200.0696
1	0.45	0.02	45.0229	44.4618	1.25	4.9704	209.0676
1	0.65	0.02	29.7601	29.3923	1.24	5.9977	209.2457
1	0.95	0.02	16.4310	16.0275	2.46	5.9295	211.6556
1	0.25	0.05	74.5276	74.8896	0.49	4.5094	201.1528
1	0.45	0.05	53.9021	53.5101	0.73	5.0498	227.9200
1	0.65	0.05	38.2893	37.7591	1.38	5.6066	235.6828
1	0.95	0.05	22.7183	22.4931	0.99	6.2823	212.3895
2	0.25	0.02	61.1402	60.7843	0.58	4.7446	224.3866
2	0.45	0.02	36.9354	36.3565	1.56	5.3581	206.5770
2	0.65	0.02	22.3130	21.8205	2.20	5.3394	208.9566
2	0.95	0.02	10.8609	10.5790	2.59	6.4803	209.9023
2	0.25	0.05	70.6099	71.0355	0.60	4.6092	218.1504
2	0.45	0.05	47.5209	47.0575	0.97	5.1455	206.1572
2	0.65	0.05	30.8510	30.8742	0.07	5.1431	147.2501
2	0.95	0.05	17.0333	16.8116	1.30	4.1542	180.4971

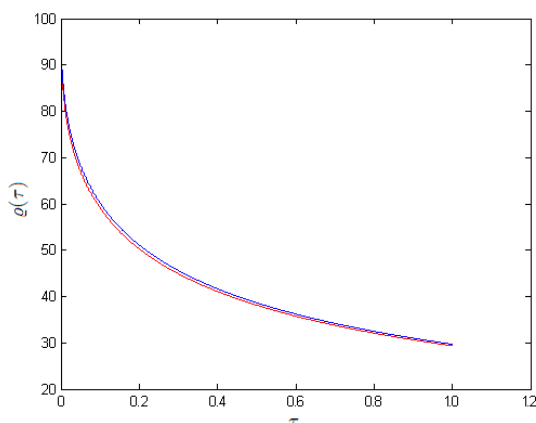


Obr. 8: Porovnanie výslednej ceny $V(S,t)$ pre metódu PSOR (modrá) a transformovanú numericnú schému (červená), $T = 1, E = 100, \sigma = 0.65, r = 0.02$

5.1.2 Porovnanie s inými známymi metódami

V tejto časti využijeme výsledky z článku [2], kde sa autori zaoberajú porovnaním presnosti rôznych numerickej metód pri výpočte *hranice predčasného*

5.1 Porovnanie presnosti numerickej schémy pre transformovanú rovnicu a metódu PSOR



Obr. 9: Porovnanie polohy hranice predčasného uplatnenia $q(\tau)$ pre metódu PSOR (modrá) a transformovanú numerickej schému (červená), $T = 1, E = 100, \sigma = 0.65, r = 0.02$

uplatnenia, ako aj výslednej ceny *put* opcie. Na krátkom horizonte, $T < 0.1$, porovnávajú analytické aproximačné metódy rôznych autorov:

- Kuske a Keller (KK) [21]
- Evans, Kuske a Keller (EKK) [22]
- Stamicar, Ševčovič a Chadam (SSCh-A) [19]
- Zhu (ZHU) [20]

s numerickejmi schémami:

- PSOR (PSOR)
- Upravený iteračný algoritmus založený na analytickej metóde SSCh-A (SSCh)

My k nim pridáme numerickej schému, ktorú sme získali z transformovanej rovnice v podkapitole (4.1). Väčšina analytických aproximácií sa sústreďujú na časy blízke expirácii, a pri dlhšom horizonte dávajú výsledky, ktoré sú už veľmi nepresné. Kvôli tomu aj autori článku [2] pri porovnávaní výsledkov na dlhšom časovom horizonte, $T > 0.1$, použili iba metódy PSOR, ZHU a SSCh. Všetky hodnoty sú vypočítané pre *americkú put opciu* vypísanú na expiračnú cenu $E = 100$, pričom podkladové aktívum má volatilitu $\sigma = 0.30$ a bezriziková úroková miera je $r = 0.1$. Z porovnaní (Tab. 3 a 5) vidíme, že naša numerickej schéma pre transformovanú rovnicu mierne zaostáva v presnosti pri časoch blízkyh expirácii. Naopak, ak sledujeme výsledky na dlhom horizonte, tak sa v porovnaní s ostatnými metódami javí ako najpresnejšia. Pri všetkých výpočtoch bolo použité časové delenie $m = 10000$ a priestorové delenie $n = 1000$ pre $x \in (0, 3)$, avšak ani zjemnenie delenia nepomohlo dosiahnuť presnejšie výsledky. Pre $T = 0.00001$, $m = 100000$ a $n = 1000$ sa vypočítaná hodnota

5.2 Zvýšenie presnosti metódy pre časy blízke expirácii

Tabuľka 2: Porovnanie hodnoty voľnej hranice pre viaceré numerické a analytické metódy

τ	EKK	ZHU	SSCh-A	SSCh	PSOR	TRANS
0.00001	99.69	99.51	99.69	99.69	99.70	99.08
0.00005	99.37	99.03	99.37	99.36	99.40	98.62
0.0001	99.14	98.72	99.15	99.11	99.20	98.38
0.0005	98.28	97.57	98.29	98.27	98.31	97.57
0.001	97.70	96.83	97.72	97.66	97.73	97.03
0.01	95.62	94.27	95.69	95.50	95.60	93.72
0.02	94.33	92.73	94.43	94.07	94.18	92.06
0.04	91.12	88.66	91.31	90.21	90.30	90.01
0.1	89.29	85.25	89.42	86.76	86.94	86.67

Tabuľka 3: Porovnanie relatívnych chýb vzhľadom na metódu PSOR

τ	EKK	ZHU	SSCh-A	SSCh	TRANS
0.00001	0.01%	0.19%	0.01%	0.01%	0.63%
0.00005	0.03%	0.37%	0.03%	0.04%	0.79%
0.0001	0.06%	0.49%	0.06%	0.09%	0.83%
0.0005	0.03%	0.76%	0.02%	0.04%	0.75%
0.001	0.03%	0.92%	0.01%	0.07%	0.72%
0.01	0.02%	1.39%	0.09%	0.10%	2.01%
0.02	0.16%	1.54%	0.27%	0.11%	2.30%
0.04	0.90%	1.82%	1.12%	0.11%	0.32%
0.1	2.70%	1.93%	2.86%	0.20%	0.31%

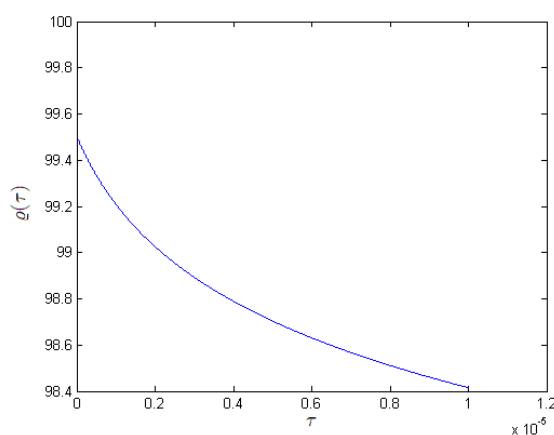
zmení z pôvodných 99.08 na 99.17.

5.2 Zvýšenie presnosti metódy pre časy blízke expirácii

Ako vidieť z tabuľky (Tab. 3), numerická metóda pre transformovanú rovnicu najviac zaostáva v presnosti za ostatnými metódami v časoch, ktoré sú blízke expirácii. Problémom je skok, ktorý vykoná numericky vypočítaná hodnota $\varrho(\tau_1)$ (Obr. 10). Na rozdiel od metódy PSOR, kedy máme aj v čase $\tau = 0$ nenulový vektor hodnôt, je začiatočná informácia v prípade transformovanej numerickej metódy minimálna. Máme k dispozícii vektor dĺžky n , ktorý je

Tabuľka 4: Porovnanie voľnej hranice na dlhšom časovom horizonte

τ	PSOR	ZHU	SSCh	TRANS
0.02	92.87	90.86	92.35	91.79
0.04	90.77	88.66	90.21	89.82
0.06	89.33	87.22	88.78	88.48
0.08	88.24	86.13	87.67	87.43
0.1	87.33	85.25	86.76	86.58
0.2	84.30	82.38	83.75	83.69
0.4	81.02	79.36	80.48	80.56
0.6	79.06	77.60	78.54	78.69
0.8	77.70	76.38	77.19	77.35
1	76.67	75.46	76.16	76.33
1.5	74.91	73.89	74.41	74.65
2	73.81	72.87	73.27	73.59
3	72.58	71.62	71.87	72.33
4	72.01	70.88	71.05	71.63
5	71.80	70.39	70.51	71.22



Obr. 10: Skoková zmena medzi $\varrho(\tau_0)$ a $\varrho(\tau_1)$. $E = 100, \sigma = 0.30, T = 0.00001, r = 0.02$

plný nól. Riešenie má spĺňať okrajovú podmienku (122) a zároveň má pre $\varrho(\tau_1)$ platiť podmienka (140). Kvôli charakteru úlohy je v tomto stave riešenie mimoriadne citlivé na zvolený spôsob aproximácie $\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau)$. Kým ako najpri-

Tabuľka 5: Porovnanie relatívnych chýb na dlhšom horizonte vzhľadom na metódu PSOR

τ	ZHU	SSCh	TRANS
0.02	2.16%	0.56%	1.18%
0.04	2.33%	0.62%	1.06%
0.06	2.37%	0.62%	0.96%
0.08	2.39%	0.64%	0.96%
0.1	2.38%	0.65%	0.87%
0.2	2.28%	0.65%	0.73%
0.4	2.05%	0.66%	0.57%
0.6	1.85%	0.66%	0.47%
0.8	1.70%	0.66%	0.45%
1	1.58%	0.66%	0.45%
1.5	1.37%	0.67%	0.35%
2	1.27%	0.73%	0.30%
3	1.32%	0.97%	0.35%
4	1.58%	1.34%	0.53%
5	1.96%	1.79%	0.81%

rodzenejší spôsob sa javí použiť:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau_j) \approx \frac{\Pi_0^j - E}{h}, \quad (151)$$

tak v [17] odporúčajú autori použiť aproximáciu:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau_j) \approx \frac{-3E + 4\Pi_0^j - \Pi_1^j}{2h}. \quad (152)$$

Rovnako aj aproximácie najbližším bodom dáva zmysel v prípade, že je druhá derivácia dostatočne malá a nedopustíme sa tým veľkej chyby:

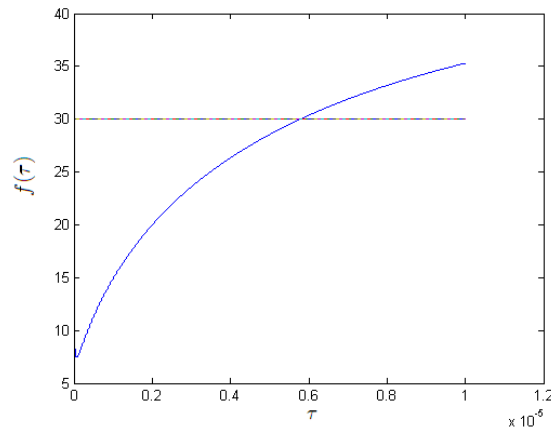
$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau_j) \approx \frac{\Pi_1^j - \Pi_0^j}{h}. \quad (153)$$

Každý z týchto spôsobov nám však pri riešení $\varrho(\tau_1)$ na prvej časovej vrstve dá iné riešenie a ani jeden neodstráni pôvodný skok. Dôvod prečo ku skokom nedochádza aj pri riešení úlohy na ďalších časových vrstvách je ten, že úloha je v stave, kedy bola podmienka (140) splnená na predchádzajúcej časovej vrstve. Na časovej vrstve j potom potrebujeme nájsť také $\varrho(\tau_j)$, aby sme ním

korigovali riešenie Π^j a podmienka (140) bola splnená aj na časovej vrstve j . Na prvej časovej vrstve však začíname s riešením, ktoré nespĺňa podmienku (140). Aby sme dosiahli požadovanú hodnotu, musíme hodnoty Π^1 korigovať veľkou zmenou $\varrho(\tau_1)$ oproti $\varrho(\tau_0)$. To je dôvod, prečo dochádza ku skokovej zmene, ako na obrázku (Obr. 10). Pre časy blízke expirácii sú však hodnoty pre voľnú hranicu dostatočne dobre aproximovateľné, pretože vieme, že platí limitný vzťah (pozri [2]):

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{E - \varrho(\tau)}{\sqrt{\tau} \sqrt{-\ln \tau}} = E\sigma. \quad (154)$$

Vďaka tomu poznáme dostatočne presne riešenie $\varrho(\tau_0)$. Vypočítame podľa štandardnej schémy Π^1 aj $\varrho(\tau_1)$ a následne zameníme $\varrho(\tau_1)$ za riešenie vypočítané pomocou (154). Týmto krokom zabezpečíme, že máme riešenie Π^1 spĺňajúce (122) aj (140) a zároveň $\varrho(\tau_1)$, ktoré je omnoho presnejšie, ako to pôvodne vypočítané iba pomocou transformovanej rovnice. Pokiaľ sa teraz pozrieme sa asymptotiku celého riešenia pre nejaký malý čas (napr. $T = 0.00001$), očakávame na základe vzťahu (154), že funkcia $f(\tau) = \frac{E - \varrho(\tau)}{\sqrt{\tau} \sqrt{-\ln \tau}}$ sa bude nachádzať v blízkosti $g(\tau) = E\sigma$. Obrázok (Obr. 11) zobrazuje asymptotiku numerického riešenia $\varrho(\tau)$ pre čas $T = 0.00001$. Požadovanú hodnotu $E\sigma = 30$ dosiahne iba na prvej časovej vrstve a to vďaka tomu, že sme zasiahli do výpočtu a zamenili hodnotu $\varrho(\tau_1)$. Porovnanie s výsledkom do ktorého sme nespravili takýto zásah, alebo s metódou PSOR nemá význam, keďže v jednom prípade máme na začiatku skok a v druhom musíme riešenie $\varrho(\tau)$ vyhladiť lineárnou interpoláciou. Tabuľka (Tab. 6) porovnáva takto získané výsledky s výsledkami,



Obr. 11: Asymptotika upraveného numerického riešenia $\varrho(\tau)$ v blízkosti expirácie

do ktorých sme v prvom kroku nezasiahli. Pre tieto nové výpočty sme použili

5.3 Vplyv nelineárnych modelov volatility na polohu voľnej hranice a cenu opcie

Tabuľka 6: Porovnanie presnosti modifikovanej numerickej metódy pre transformovanú rovnicu a metódy PSOR

τ	PSOR	ORIG	MODIF	% ORIG	% MODIF
0.00001	99.70	99.08	99.47	0.63 %	0.23 %
0.00005	99.40	98.62	99.00	0.79 %	0.40 %
0.0001	99.20	98.38	98.76	0.83 %	0.45 %
0.0005	98.31	97.57	97.94	0.75 %	0.38 %
0.001	97.73	97.03	97.40	0.72 %	0.34 %
0.01	95.60	93.72	94.08	2.01 %	1.62 %
0.02	94.18	92.06	92.44	2.30 %	1.88 %
0.04	90.30	90.01	90.40	0.32 %	0.11 %
0.1	86.94	86.67	87.07	0.31 %	0.15 %

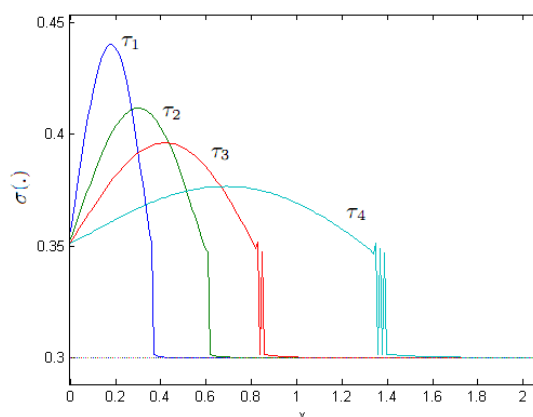
parametre metódy $T = 3$, $m = 100000$ a $n = 1000$. Ako z týchto výsledkov môžeme vidieť, zásah do hodnoty *hranice predčasného uplatnenia* na prvej časovej vrstve nám spôsobuje skoro konštantný rozdiel ≈ 0.40 vo výsledku. Toto je približne hodnota skoku, ktorú vykoná $\varrho(\tau_1)$. Toto odstránenie skoku nám zlepšuje výsledky na malom časovom horizonte, pri dlhšom období už nemá taký výrazný efekt.

5.3 Vplyv nelineárnych modelov volatility na polohu voľnej hranice a cenu opcie

V tejto časti sa pozrieme na to, aký vplyv má použitie nelineárnych modelov volatility na polohu *voľnej hranice*, ako aj na výslednú cenu opcie. V prípade európskych opcií vieme, že $V_{eur}(S, t, \sigma_1) \leq V_{eur}(S, t, \sigma_2)$ pre $\sigma_1 \leq \sigma_2$. U americkým opcií už to nie je také zrejmé, keďže volatilita vplyva na cenu aj prostredníctvom polohy *voľnej hranice*. Zo vzťahu (146) a z definície (28) nám vyplýva, že použitím *Lelandovho modelu* bude volatilita nadobúdať iba hodnoty $\sigma\sqrt{1 + Le}$ a σ , kde σ je príslušná lineárna volatilita. Vyplýva to z povahy numerického riešenia Π^j o ktorom vieme, že je nerastúce a v čase $\tau = 0$ obsahuje iba hodnoty 0. Vďaka tomu $S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} \geq 0$. Preto pomocou *Lelandovho modelu* dostaneme volatilitu $\sigma_{LEL} = \sigma\sqrt{1 + Le}$ v prípade, že $\Pi_i^j > \Pi_{i-1}^j$ a $\sigma_{LEL} = \sigma$, ak $\Pi_i^j = \Pi_{i-1}^j = 0$. Ďalej sa pozrieme na vplyv volatility modelu *Barles-Soner* na výsledky. Tento model bol síce odvodený ako model volatility pre *call opcie*, to nám však nebráni experimentálne ho použiť aj pri výpočtoch pre *put opcie*. Namiesto konštantnej volatility σ budeme používať parametri-

5.3 Vplyv nelineárnych modelov volatility na polohu voľnej hranice a cenu opcie

zovanú volatilitu $\sigma_{BSON} = \sigma \sqrt{1 + \Psi \left(e^{r(T-t)} a^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)}$. O funkcii $\Psi(x)$ vieme, že je rastúca a že platí $\Psi(0) = 0$. Argument funkcie Ψ použitý v *Barles-Soner* modeli volatility je vždy nezáporný vďaka nezápornosti výrazu $S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$. Vďaka tomu $\sigma_{BSON} \geq \sigma$ a použitím jedného, alebo druhého modelu dojde iba k zvýšeniu volatility, nikdy nie k zníženiu. Priebeh volatility pri použití modelu *Barles-Soner* ilustruje obrázok (Obr. 12). Ako z neho môžeme vidieť, hodnoty volatility pre tento nelineárny model sú vždy vyššie ako pri použití lineárnej volatility. V bode, kde sa nadobúda maximum je výraz $-\frac{\partial \Pi}{\partial x} = S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ maximálny. Ako vidieť z obrázku, maximálna hodnota sa pre časy blízke expirácii nadobúda pre hodnoty $x \approx 0$ a čím sa viac časovo vzdľujeme od expirácie, tak aj maximum sa posúva. Zároveň však jeho hodnota klesá, takže najvolatilnejšie by mali byť opcie, ktoré sa blížia k expirácii a cena podkladového aktíva je blízka realizačnej cene opcie, tj. $S \approx E$ a $\tau \approx 0$. Numerická metóda bude



Obr. 12: Priebeh volatility *Barles-Soner* pre $E = 100, \sigma = 0.3, r = 0.02$. $\tau_1 = 0.025$, $\tau_2 = 0.1$, $\tau_3 = 0.25$, $\tau_4 = 1$

veľmi podobná, ako tá použitá v prípade lineárneho modelu. Rozdiel nastáva v podmienke (84), ktorej tvar sa zmení kvôli závislosti σ od $\partial_x \Pi$:

$$\sigma^2 \left(-\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau), \tau \right) \frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau) = -2rE. \quad (155)$$

Pre každú časovú vrstvu potrebujeme nájsť hodnotu $\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau)$, pre ktorú bude rovnosť splnená. Hľadáme koreň rovnice $(\sigma(-x))^2 x = -2rE$. Ľahko sa môže presvedčiť, že ak existuje hodnota $x = \frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau)$ spĺňajúca túto rovnosť, tak musí byť záporná. To je konzistentné s doterajšou teóriou, keďže očakávame Π^j nerastúcu. Vieme, že $\sigma(x)$ je rastúcou funkciou x (resp. klesajúcou funkciou

5.3 Vplyv nelineárnych modelov volatility na polohu voľnej hranice a cenu opcie

$-x$). S rastúcim x , teda hodnota funkcie $g(x) = (\sigma(-x))^2 x$ tiež rastie. $g(x)$ je teda monotónna funkcia a zobrazuje:

$$g_{BSON}(-M) = (-M)\sigma\sqrt{1 + \Psi(e^{r(T-t)}a^2M)}, \quad (156)$$

$$g_{LEL}(-M) = (-M)\sigma\sqrt{1 + Le}, \quad (157)$$

$$g_{BSON}(0) = g_{LEL}(0) = 0, \quad (158)$$

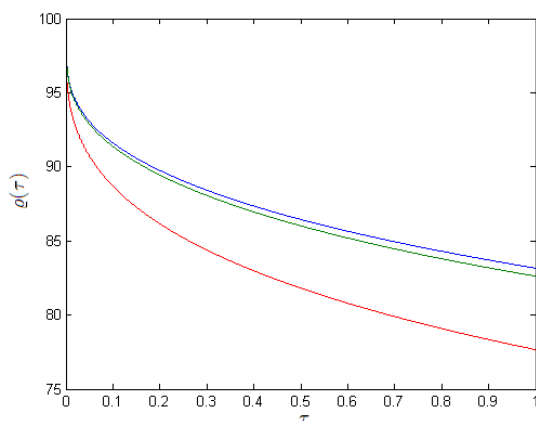
kde $-M$ označuje najmenšiu možnú hodnotu $\frac{\partial\Pi}{\partial x}(0, \tau)$. Dostatočne veľké M nám zaručuje existenciu koreňa a vďaka monotónnosti funkcie $g(x)$ ho vieme jednoducho nájsť. Keď už poznáme požadovanú hodnotu \hat{x} pre $\frac{\partial\Pi}{\partial x}(0, \tau)$, tak doriešime úlohu rovnako ako v prípade lineárneho modelu. Tabuľka (Tab. 7) porovnáva polohu voľnej hranice pre lineárnu volatilitu, *Lelandov model* a *Barles-Sonerov model*. Všetky metódy používali časové delenie $m = 10000$ a priestorové delenie $m = 500$, parametre nelineárnych modelov $C = 0.02$, $\Delta T = 1$, $a = 0.02$. Ako z tabuľky (Tab. 7) vidieť, tak použitie nelineárneho modelu má

Tabuľka 7: Porovnanie polohy predčasnej hranice pre rôzne modely volatility

T	σ	E	r	LIN	LEL	BSON
0.1	0.25	100	0.02	83.17	82.63	77.67
1	0.25	100	0.02	66.90	65.86	58.73
0.1	0.65	100	0.02	58.94	58.53	53.17
1	0.65	100	0.02	29.39	28.91	25.57
0.1	0.25	100	0.05	86.45	85.96	80.89
1	0.25	100	0.05	74.89	73.95	66.46

podobný vplyv ako zvýšenie volatility, tj. *hranica predčasného uplatnenia* sa posunie smerom nadol. Obrázok (Obr. 13) porovnáva priebeh $\varrho(\tau)$. Tabuľka (Tab. 8) porovnáva cenu opcie, ktorá je vypočítaná pomocou rôznych modelov volatility. Ako z tabuľky (Tab. 8) môžeme vidieť, tak použitím nelineárnej volatility sa cena opcie vždy zvýšila, čo je výsledok aký sme očakávali. Ďalšie poznatky, ktoré sa dajú z tabuľky vyčítať, ako napríklad to, že vyššia bezriziková úroková miera r znižuje cenu *put opcie*, alebo to, že vyššia volatilita σ ju zvyšuje, sú vo všeobecnosti známe. Obrázok (Obr. 14) porovnáva cenu *americkej put opcie* pre všetky tri nami použité modely volatility. Fakt, že nám *hranica predčasného uplatnenia* ϱ , ako aj cena V opcie vypočítané pomocou *Lelandovho modelu* lepšie kopírujú hodnoty získané pomocou lineárneho modelu, ako tie z modelu *Barles-Soner*, je daný v tomto prípade kalibráciou oboch modelov, keďže volatilita z modelu *Barles-Soner*, nám dávala podstatne vyššie hodnoty ako *Lelandov model*.

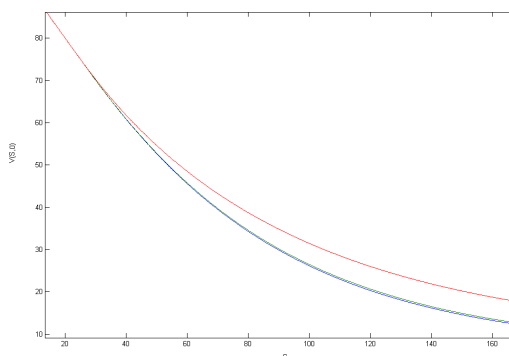
5.3 Vplyv nelineárnych modelov volatility na polohu voľnej hranice a cenu opcie



Obr. 13: Porovnanie $q(\tau)$ pre $E = 100, \sigma = 0.25, r = 0.02, \tau_{MAX} = 1$. Modrý graf predstavuje lineárnu volatilitu, zelený Lelandov model a červená predstavuje model Barles-Soner

Tabuľka 8: Porovnanie ceny opcie pre rôzne modely volatility

S	T	σ	E	r	LIN	LEL	BSON
80	0.1	0.25	100	0.02	20	20	20.04
100	0.1	0.25	100	0.02	3.58	3.69	4.97
150	0.1	0.25	100	0.02	0.24	0.26	0.35
80	1	0.25	100	0.02	21.50	21.70	23.45
100	1	0.25	100	0.02	9.62	9.95	12.67
150	1	0.25	100	0.02	1.26	1.39	2.55
80	0.1	0.65	100	0.02	21.60	21.66	23.12
100	0.1	0.65	100	0.02	8.98	9.09	11.62
150	0.1	0.65	100	0.02	1.19	1.23	2.04
80	1	0.65	100	0.02	34.32	34.60	38.76
100	1	0.65	100	0.02	26.17	26.50	31.49
150	1	0.65	100	0.02	14.60	14.95	20.24
80	0.1	0.25	100	0.05	20	20	20
100	0.1	0.25	100	0.05	3.33	3.44	4.74
150	0.1	0.25	100	0.05	0.19	0.20	0.27
80	1	0.25	100	0.05	20.45	20.59	22.15
100	1	0.25	100	0.05	8.30	8.61	11.30
150	1	0.25	100	0.05	0.86	0.96	1.91



Obr. 14: Porovnanie ceny opcie $V(S, t)$ pre rôzne modely volatility. $E = 100, T = 1, \sigma = 0.65, r = 0.02$. Modrý graf predstavuje lineárnu volatilitu, zelený Lelandov model a červená predstavuje model Barles-Soner

5.4 Vplyv jednotlivých parametrov nelineárnych modelov na výsledky

Predošlé výsledky sme všetky vypočítali pre presne stanovené parametre nelineárnych modelov volatility. V *Lelandovom modeli* sme uvažovali transakčné náklady $C = 0.02$ a časový krok $\Delta T = 1$. V modeli *Barles-Soner* sme rovnako uvažovali transakčné náklady $C = 0.02$ a $\varepsilon = 1$. Parameter $a = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$ vystupujúci vo vzťahu (43) mal teda stále hodnotu 0.02. Pokiaľ by sme však týmito parametrami hýbali, očakávame, že sa to prejaví na polohe *hranice predčasného uplatnenia*, ako aj na cene opcie. V článku [18] autori pracujú s hodnotami $a = 0.01, 0.07, 0.13, 0.25, 0.35$. Označme si $b = \frac{C}{\sqrt{\Delta T}}$ a porovnajme vplyv zmeny parametrov a a b na výsledky. Použijeme rovnaké hodnoty ako autori článku [18] a parametre opcie $E = 100, \sigma = 0.3, r = 0.02$. Získané výsledky ilustruje tabuľka (Tab. 9). Ako môžeme z tabuľky vidieť, pokiaľ nastavíme v *Lelandovom modeli* a *Barles-Sonerovom modeli* $a = b$ a použijeme rovnaké σ , tak *Barles-Sonerov model* sa nám správa ako model s vyššou volatilitou. Preto je vždy príslušná hodnota ceny opcie vyššia pre *Barles-Sonerov model* ako pre *Lelandov model* a príslušná hodnota *hranice predčasného uplatnenia* je nižšia. Obrázok (Obr. 15) porovnáva ceny $V(S, t)$ pre $t = T = 1$, použijúc rôzne hodnoty parametrov a a b . Podobne obrázok (Obr. 16) porovnáva polohu *voľnej hranice* pre oba modely pri použití rovnakých hodnôt a a b .

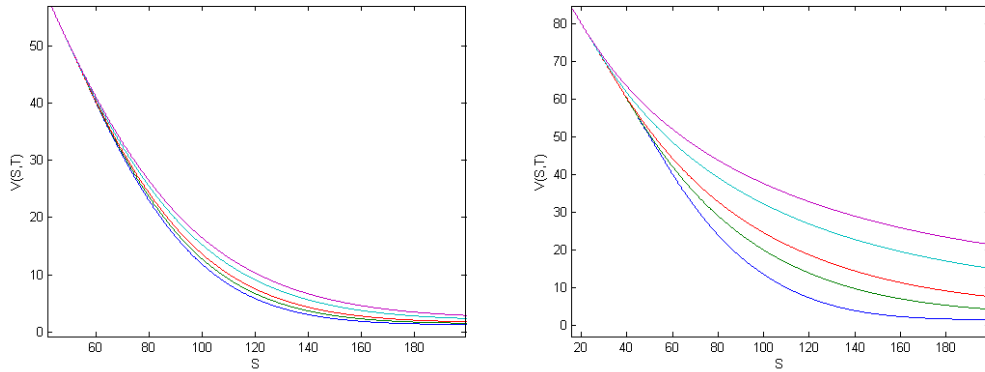
Tabuľka 9: Porovnanie polohy voľnej hranice a ceny opcie pre rôzne nakalibrované nelineárne modely

T	model	a (b)	$V(E, T)$	$\varrho(T)$
0.1	Leland	0.01	4.31	79.50
0.1	Barles-Soner	0.01	5.20	76.84
1	Leland	0.01	11.85	60.01
1	Barles-Soner	0.01	13.51	57.68
0.1	Leland	0.07	4.61	77.99
0.1	Barles-Soner	0.07	8.19	66.17
1	Leland	0.07	12.79	57.30
1	Barles-Soner	0.07	19.98	42.90
0.1	Leland	0.13	4.91	76.60
0.1	Barles-Soner	0.13	10.49	59.64
1	Leland	0.13	13.67	54.86
1	Barles-Soner	0.13	24.58	35.78
0.1	Leland	0.25	5.43	74.09
0.1	Barles-Soner	0.25	14.37	50.23
1	Leland	0.25	15.28	50.63
1	Barles-Soner	0.25	32.19	26.79
0.1	Leland	0.35	5.84	72.22
0.1	Barles-Soner	0.35	17.20	44.43
1	Leland	0.35	16.51	47.61
1	Barles-Soner	0.35	37.59	21.94

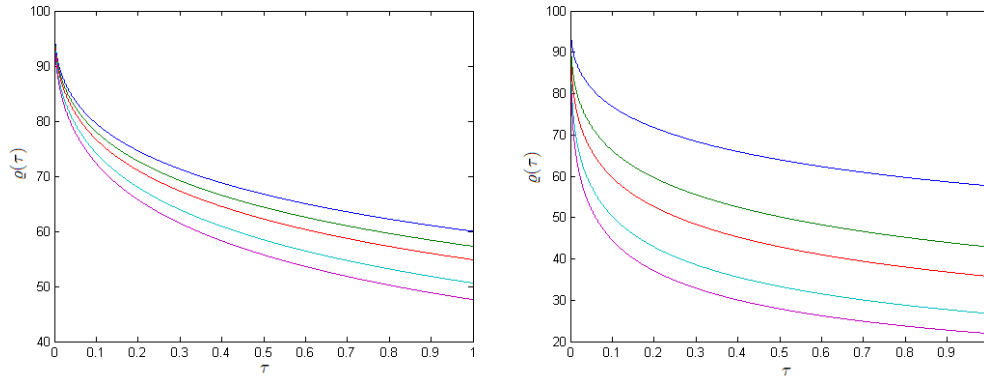
5.5 Numerická metóda pre model s nenulovými dividendami

Doteraz sme sa zaoberali iba modelmi opcií vypísanými na podkladové aktívum, ktoré nevyplácalo žiadne dividendy. V prípade, ak uvažujeme tento všeobecnejší prípad, musíme zahrnúť príslušné zmeny do modelu. Pre tento model platia vzťahy (118)-(123), preto jediná zmena nastáva v zamenení doteraz používanej podmienky (124) za podmienku (123). To je mierna komplikácia, keďže pri výpočte $\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau)$ používame hodnotu $\varrho^{j,p}$, ktorá sa rovnako nachádza aj vo vzťahu (123). Kvôli tomu dopredu nevieme povedať, akú hodnotu $\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau)$ požadujeme. V knihe [5] autori používajú v prípade *put opcie* iteratívny algoritmus:

$$\varrho^{j,p} \rightarrow \Pi^{j-\frac{1}{2},p} \rightarrow \Pi^{j,p} \rightarrow \varrho^{j,p+1}, \quad (159)$$



Obr. 15: Porovnanie ceny opcie $V(S,t)$ pre Lelandov model (vľavo) a Barles-Sonerov model (vpravo) pri použití rôznych hodnôt pre parametre $a, b = 0.01, 0.07, 0.13, 0.25, 0.35$



Obr. 16: Porovnanie polohy predčasnej hranice $\varrho(\tau)$ pre Lelandov model (vľavo) a Barles-Sonerov model (vpravo) pri použití rôznych hodnôt pre parametre $a, b = 0.01, 0.07, 0.13, 0.25, 0.35$

ktorý hodnotu $\varrho^{j,p+1}$ vypočíta tak, aby spĺňala spolu s vtedy známym $\Pi^{j,p}$ numericky zapísaný vzťah (123):

$$\varrho^{j,p+1} = \frac{rE}{D} + \frac{\sigma^2}{D} \left(\frac{\Pi_0^{j,p} - E}{h} \right). \quad (160)$$

Tento algoritmus je ukončený v prípade, ak rozdiel medzi predchádzajúcim a súčasným riešením dosiahne stanovenú presnosť, tj. $|\varrho^{j,p+1} - \varrho^{j,p}| < \varepsilon$. Po dosiahnutí takéhoto stavu vieme, že riešenie $\Pi^{j,p}, \varrho^{j,p}$ spĺňa vzťah (160) s maximálnou odchýlkou ε . Tento algoritmus sa nevyznačuje takou rýchlou konvergenciou, ako odhad $\varrho^{j,p+1}$ pomocou *Newtonovej metódy*. Ukážeme si však, že

Newtonova metóda sa dá aplikovať aj na model s dividendami. V modeli bez dividend sme hľadali ϱ^j , ktoré je koreňom rovnice:

$$\Psi(\varrho^j, \Pi^{j-1}) + \frac{2rE}{(\sigma_0^j)^2} = 0, \quad (161)$$

kde Ψ je definované ako (141). Povaha úlohy nám zaručuje klesajúcosť Ψ , ako funkcie od parametra ϱ , vďaka tomu sme vedeli spoľahlivo nájsť riešenie pomocou *Newtonovej metódy*. V prípade, ak teraz budeme uvažovať dividendy, potrebujeme, aby ϱ^j spĺňalo rovnicu:

$$\frac{(\sigma_0^j)^2}{D} \Psi(\varrho^j, \Pi^{j-1}) + \frac{rE}{D} - \varrho^j = 0. \quad (162)$$

Ľahko sa presvedčíme, že aj tento výraz je klesajúcou funkciou od parametra ϱ . Vďaka tomu vieme zaručiť konvergenciu *Newtonovej metódy* aplikovanej na túto úlohu. Aby sme vedeli zhodnotiť, či takáto metóda dáva presné výsledky porovnáme ju s modelom, kde sme neuvažovali dividendy. Budeme očakávať, že ak použijeme hodnoty $D \approx 0$, tak aj výsledky sa budú približovať k výsledkom vypočítaným pomocou bezdividendového modelu. Tabuľka (Tab. 10) porovnáva výsledky pre rôzne hodnoty σ, r a D . Ako môžeme z tejto tabuľky vyčítať, tak znižovaním dividendovej miery nám výsledky konvergujú k tým vypočítaným pomocou bezdividendového modelu. Vyplácanie dividend zvyšuje cenu *put opcie*, keďže konštantne znižuje jej cenu. Ešte výraznejší vplyv má však na polohu voľnej hranice, ktorá sa s rastúcimi dividendami posúva smerom nadol. Túto skutočnosť ilustruje obrázok (Obr. 17).

5.5.1 Rýchlosť konvergenie Newtonovej metódy oproti pôvodnému iteračnému algoritmu

V poslednej časti tejto kapitoly sa pozrieme na to, či použitie *Newtonovej metódy* zrýchľuje konvergenciu a ako veľmi. Porovnať ju môžeme s iteračnou metódou použitou pre *call opcie* v [5], ako aj s najjednoduchšou metódou na nájdenie koreňa monotónnej funkcie - metódou bisekcie. Pri iteračnej schéme (159) sa však ukazuje, že nemusí konvergovať, ako tomu bolo v prípade *call opcie*. Je tomu tak, kvôli výraznej zmene okrajovej podmienky. Hoci majú obe

Tabuľka 10: Porovnanie výsledkov modelu s dividendami a modelu bez dividend

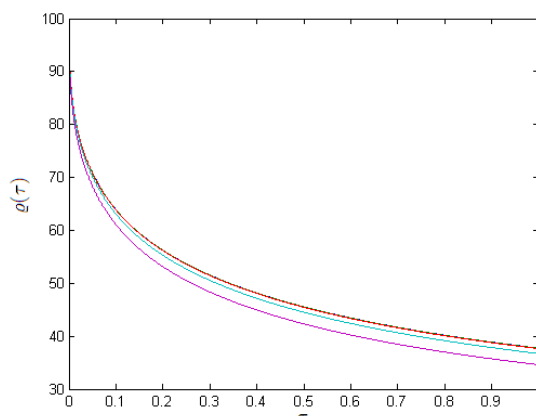
T	σ	E	r	D	metóda	$\varrho(T)$	V(E,T)
0.1	0.25	100	0.05	0	bez dividend	86.45	3.33
0.1	0.25	100	0.05	0.0001	s dividendami	86.44	3.33
0.1	0.25	100	0.05	0.001	s dividendami	86.38	3.34
0.1	0.25	100	0.05	0.01	s dividendami	85.72	3.40
0.1	0.25	100	0.05	0.03	s dividendami	83.79	3.55
1	0.25	100	0.05	0	bez dividend	74.89	8.30
1	0.25	100	0.05	0.0001	s dividendami	74.87	8.30
1	0.25	100	0.05	0.001	s dividendami	74.74	8.33
1	0.25	100	0.05	0.01	s dividendami	73.31	8.63
1	0.25	100	0.05	0.03	s dividendami	69.48	9.37
0.1	0.65	100	0.05	0	bez dividend	63.85	8.69
0.1	0.65	100	0.05	0.0001	s dividendami	63.84	8.69
0.1	0.65	100	0.05	0.001	s dividendami	63.77	8.69
0.1	0.65	100	0.05	0.01	s dividendami	62.99	8.75
0.1	0.65	100	0.05	0.03	s dividendami	60.98	8.90
1	0.65	100	0.05	0	bez dividend	37.76	24.25
1	0.65	100	0.05	0.0001	s dividendami	37.75	24.25
1	0.65	100	0.05	0.001	s dividendami	37.65	24.28
1	0.65	100	0.05	0.01	s dividendami	36.73	24.59
1	0.65	100	0.05	0.03	s dividendami	34.63	25.28
0.5	0.45	100	0.02	0	bez dividend	52.82	13.06
0.5	0.45	100	0.02	0.0001	s dividendami	52.79	13.06
0.5	0.45	100	0.02	0.001	s dividendami	52.60	13.08
0.5	0.45	100	0.02	0.01	s dividendami	50.40	13.33

podobný tvar:

$$\text{(put)} \quad \Pi(x, 0) = \begin{cases} E & \text{pre } x < \ln\left(\frac{E}{\varrho(0)}\right), \\ 0 & \text{inak} \end{cases}, \quad (163)$$

$$\text{(call)} \quad \Pi(x, 0) = \begin{cases} -E & \text{pre } x < \ln\left(\frac{\varrho(0)}{E}\right), \\ 0 & \text{inak} \end{cases}, \quad (164)$$

avšak vďaka tomu, že pre americké call opcie s dividendami platí $\varrho_{call}(0) = \frac{rE}{D}$, začíname na prvej časovej vrstve počítať s vektorom $\Pi^0 = (0, h, 2h, \dots, ih, \dots, L) =$

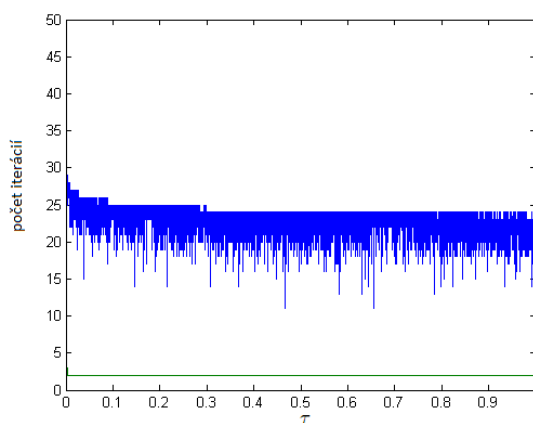


Obr. 17: Porovnanie hodnôt $q(1)$ pre parametre $E = 100, \sigma = 0.65, r = 0.05$ a $D_1 = 0, D_2 = 0.0001, D_3 = 0.001, D_4 = 0.01, D_5 = 0.03$

$(-E, -E, \dots, -E, 0, \dots, 0)$. Oproti tomu, pre *put opciu* vždy platí $q_{call}(0) = E$, a na prvej časovej vrstve máme $\Pi^0 = (0, h, 2h, \dots, ih, \dots, L) = (E, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$. Vnútorne iterácie na každej časovej vrstve majú za cieľ splnenie rovnosti (160). Člen $\frac{\Pi_0^{j,p} - E}{h}$ je kvôli začiatkovej podmienke veľmi citlivý na $q^{j,p}$ pre $\tau_j \approx 0$. Toto všetko má za následok narušenie kontraktívnosti zobrazenia $q^{j,p} \rightarrow q^{j,p+1}$, ktorá bola podmienkou konvergencie takejto schémy. Vzťah (160) je však stále klesajúcou funkciou od q . Vďaka tomu, vieme použiť najjednoduchšie možné riešenie, a to delenie intervalu, kým nenájdeme hodnotu s požadovanou presnosťou. Tabuľka (Tab. 11) porovnáva čas výpočtu a priemerný počet iterácií pre *Newtonovu metódu* a pre metódu delenia intervalu. Všetky hodnoty v tejto tabuľke boli počítané pre $E = 100$ a s požadovanou presnosťou pre (160) $\varepsilon = 0.00000001$. Vďaka takejto presnosti sa dosiahnuté výsledky líšia až za 4-tým desatinným miestom, a preto nemá veľký význam ich porovnávať. Pokiaľ sa pozrieme na výsledky, všimneme si, že *Newtonova metóda* bola v tomto prípade priemerne 5.96 násobne rýchlejšia (počet iterácií) a potrebovala na to priemerne 12.59 násobne menej času. Tieto čísla sa líšia približne 2 násobne, práve kvôli tomu, že pri každej iterácii *Newtonovej metódy* musíme počítať celý systém 2 krát. Obrázok (Obr. 18) porovnáva počet iterácií na všetkých časových vrstvách. Z teórie vieme, že *Newtonova metóda* konverguje kvadraticky. Bohužiaľ, pre tento konkrétny príklad sme neboli schopní urobiť porovnanie s iteračnou metódou (159), ktorá má lineárnu rýchlosť konvergencie. Rovnako aj metóda bisekcie má lineárnu rýchlosť konvergencie. Tieto teoretické znalosti sa nám na tomto príklade potvrdili, keďže *Newtonova metóda* skonvergovala vždy niekoľkonásobne rýchlejšie.

Tabuľka 11: Porovnanie rýchlosti konvergencie Newtonovej metódy a metódy bisekcie

model	T	σ	r	D	iterácie	čas
Newt	0.1	0.25	0.02	0.01	2.00	50.40
Bise	0.1	0.25	0.02	0.01	22.96	277.19
Newt	1	0.25	0.02	0.01	2.00	49.37
Bise	1	0.25	0.02	0.01	24.27	283.09
Newt	0.1	0.65	0.02	0.01	2.01	49.60
Bise	0.1	0.65	0.02	0.01	24.66	287.27
Newt	1	0.65	0.02	0.01	2.01	49.29
Bise	1	0.65	0.02	0.01	25.89	300.93
Newt	0.5	0.5	0.05	0.01	2.01	49.49
Bise	0.5	0.5	0.05	0.01	26.46	306.47
Newt	0.5	0.5	0.05	0.02	2.01	49.49
Bise	0.5	0.5	0.05	0.02	25.29	293.84
Newt	0.5	0.5	0.05	0.04	2.01	49.33
Bise	0.5	0.5	0.05	0.04	23.77	275.96
Newt	0.5	0.5	0.02	0.001	2.01	49.63
Bise	0.5	0.5	0.02	0.001	28.86	341.15

**Obr. 18:** Počet iterácií pre Newtonovu metódu (zeleným) a metódu bisekcie (modrým). $T = 0.1, \sigma = 0.25, E = 100, r = 0.02, D = 0.01$

6 Záver

V tejto práci sme sa venovali numerickým metódam na výpočet cien amerických finančných derivátov. Zamerali sme sa hlavne na *americkú put opciu*, aj keď sme si veľkú časť postupov predstavili aj na *call opciách*. Venovali sme sa numerickej metóde pre transformovanú rovnicu, ktorá bola navrhnutá v článku [6]. Metódu PSOR, ktorá je omnoho viac preskúmaná, sme mierne zanedbali a použili sme ju iba na porovnanie dosiahnutých výsledkov. Nami používaná metóda je pomalšia ako metóda PSOR a pri *put opcii* trpí nedostatkom presnosti pre časy blízke expirácii. Naproti tomu má tú výhodu, že jej výstupom je už vyhladená *hranica predčasného uplatnenia*, kým v metóde PSOR ide iba o sekundárny výsledok, ktorý je nutné dopočítať dodatočne. Ak nás zaujíma viac cena opcie, tak s tou je to presne naopak. Väčšina problémov tejto metódy je spôsobená "málo informáciami" v čase $\tau = 0$ oproti metóde PSOR. To má za následok veľký rozdiel vo výsledkoch, pri použití rôznych numerických metód, na aproximáciu derivácie. Zaujímavé by bolo preskúmať túto metódu aplikovanú na *call opciu*, keďže v tomto prípade je metóda v čase $\tau = 0$ "bohatšia", ak $r > D$. Tým sme sa ale v tejto práci nezaoberali a zamerali sme sa iba na *put opcie*. Hoci metóde PSOR stačí riešiť trojdiagonálny systém na každej časovej vrstve raz a nami používaná metóda ho potrebuje riešiť v priemere štyrikrát, rozdiel v zložitosti sa konštantne drží na úrovni štvor až päť násobku. Ďalšou výhodou tejto metódy je konvergencia aj pre relatívne "riedke" priestorové a časové delenie $m = 10000, n = 500$, ktoré dáva uspokojivo presné výsledky. Špecifikom tejto metódy je nutnosť nájsť koreň rovnice na každej časovej vrstve. Táto rovnica je však monotónna, čo nám ponúka veľa možností na nájdenie koreňa. Ako veľmi vhodná sa ukázala *Newtonova metóda*, ktorá má kvadratickú rýchlosť konverencie. Ukázali sme si, že ani pridaním dividend sme výkon metódy nijako výrazne neovplyvnili. Ešte všeobecnejšiu metódu sme získali použitím jedného z nelineárnych modelov dividend. Kým *Lelandov model* nám metódu takpovediac neskomplikoval, pri použití modelu *Barles-Soner* sme museli počítať hodnotu volatility pre každý bod priestorového delenia zvlášť. To je obzvlášť náročné, ak sa neuspokojíme s analytickou aproximáciou, ale požadujeme riešenie, ktoré je extrémne presné. Z numerických výsledkov ďalej vyplynulo, že použitím nelineárnej volatility sa výsledky zmenia podobne, ako po zvýšení lineárnej volatility. Výsledná cena je vyššia a *hranica predčasného uplatnenia* sa naopak posunie nižšie (pri *put opcii*). Takýto výsledok sme predpokladali a nie je v ničom prekvapivý. Na výpočet všetkých výsledkov v tejto práci sme použili jazyk *Matlab*, ktorý je oproti kompilovaným jazykom výrazne pomalší. Čas, ktorý sme potrebovali na celý výpočet sa pohyboval okolo dvoch minút. Z toho môžeme usúdiť, že pokiaľ by cieľom bol maximálny výkon metódy, tak na výkonnom počítači by sme po

od dodatočnej optimalizácie vedeli rovnako presný výsledok získať v priebehu pár sekúnd.

Zoznam použitej literatúry

- [1] World options statistics www.futuresindustry.org/webinars/downloads/March_2010_Webinar_Materials_Part_1_-_Will_Acworth_FIA.pdf
- [2] M. LAUKO, D. ŠEVČOVIČ (2010): *Comparison of numerical and analytical approximations of the early exercise boundary of the American put option*. ANZIAM journal 51, 2010, 430-448
- [3] D. ŠEVČOVIČ, B. STEHLÍKOVÁ, K. MIKULA (2009): *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. Nakladateľstvo STU, Bratislava 2009, ISBN: 9788022730143
- [4] D. ŠEVČOVIČ : *On a numerical approximation scheme for construction of the early exercise boundary for a class of nonlinear Black-Scholes equation*.
- [5] D. ŠEVČOVIČ, B. STEHLÍKOVÁ, K. MIKULA (2011): *Analytical and numerical methods for pricing financial derivatives*. Nova Science Publishers, Inc., Hauppauge, 2011, ISBN: 9781617287800
- [6] D. ŠEVČOVIČ (2001): *Analysis of the free boundary for the pricing of an American call option*. Euro. Journal on Applied Mathematics, 12 (2001), 25-37
- [7] J. ANKUDINOVA, M. EHRHARDT (2008): *On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations*. Comput. Math. Appl. Vol. 56, (2008), 799-812
- [8] F. BLACK, M. SCHOLES (1973): *The pricing of options and corporate liabilities*. The Journal of Political Economy Vol. 81, No. 3, 637-654
- [9] K. ITO (1951): *On stochastic differential equations*. Memoirs of the American Mathematical Society No. 4, 1-51
- [10] M. KRATKA (1998): *No mystery behind the smile*. Risk 9 Vol.11, No.4, 67-71
- [11] M. JANDAČKA, D. ŠEVČOVIČ (2005): *On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile*. Journal of Applied Mathematics 2005:3, 235-258
- [12] H. E. LELAND (1985): *Option Pricing and Replication with Transactions Costs*. The Journal of Finance Vol. 40, No.5, 1283-1301

- [13] G. BARLES, H. M. SONER (1998): *Option pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation*. Finance and Stochastic 2, 369-397 (1998)
- [14] E. DREMKOVA, M. EHRHARDT (2010): *A high-order compact method for nonlinear Black-Scholes option pricing equations of American Options*. poslané do: International Journal of Computer Mathematics Vol. 00, No. 00, January 2008, 1-18
- [15] J. KANDILAROV, R. VALKOV (2011): *A Numerical Approach for the American Call Option Pricing Model*. Lecture Notes in Computer Science Vol. 6046, Numerical Methods and Applications, Pages 453-460
- [16] S. D. CONTE, C. BOOR : *Elementary Numerical Analysis*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1972 ⁴
- [17] J. KANDILAROV, D. ŠEVČOVIČ : *Comparison of Two Numerical Methods for Computation of American Type of the Floating Strike Asian Option*.
- [18] D. ŠEVČOVIČ : *An iterative algorithm for evaluating approximations to the optimal exercise boundary for a nonlinear Black-Scholes equation*. Canad. Appl. Math. Quarterly, 15, No.1, (2007), 77-97
- [19] R. STAMICAR, D. ŠEVČOVIČ, J. CHADAM : *The early exercise boundary for the American put near expiry: numerical approximation*. Canad. Appl. Math. Quarterly, 7, No.4, (1999), 427-444
- [20] S. P. ZHU : *A new analytical approximation formula for the optimal exercise boundary of American put options*. International Journal of Theoretical and Applied Finance 9, No. 7 (2006), 1141–1177
- [21] R. KUSKE, J. B. KELLER : *Optimal exercise boundary for an American put option*. Applied Mathematical Finance 5 (1998), 107–116
- [22] J. D. EVANS, R. KUSKE, J. B. KELLER : *American options on assets with dividends near expiry*. Mathematical Finance 12 (2002), 219–237
- [23] S. HODGES, A. NEUBERGER : *Optimal replication of contingent claims under transaction costs*. Review of Future Markets 8, 1989, 222-239

⁴ http://en.wikipedia.org/wiki/Tridiagonal_matrix_algorithm

Prílohy

Zdrojové kódy v jazyku Matlab

Numerická metóda pre nelineárny model bez dividend

```
function [ro, Slast, Vlast]=PredcasnaHranicaLinearTransformPutNoDividNelinear(T, sigma, E, r, typ)
%premenna typ je typ nelinearnej volatility

m = 10000; %casove delenie
n = 500; %priestorove delenie
epsresnost = 0.0000001;
dx = 0.00000001;
tmax = T;
xmax = 5;
h = xmax/n;
k = tmax/m;
q = 0;

aktualpi = zeros(1, n+1);
PI_jpol = zeros(1, n+1);
%rho=zeros(m+1,1);

%Cena
Vlast = [];
Slast = 0:0.1:2*E;

%maplnime cas t=0
for i = 1 : n+1
    if ((xmax * (i-1)) / n)<0
        aktualpi(1, i) = E;
    else
        aktualpi(1, i) = 0;
    end
end
rho(1,1) = E;
lastpi = aktualpi;

%na kazdej dalsej vrstve riesime sustavu linearnych rovníc
for j = 2:m+1
    %disp(rho(j-1,1));
    aktualpi = lastpi;

    if j>2
        aktualrho = rho(j-1) + (rho(j-1) - rho(j-2));
    else
        aktualrho = rho(j-1);
    end
    %disp('Iteracia cislo: ');
    %disp(j);

    %Rho + deltaX na vypočet derivácie FI(rho)
    aktualrho = exp(log(aktualrho)-(r-q)*k - dx);
    minaktualrho = 0;
    maxaktualrho = rho(j-1);
    rhoalmin = [];
    rhoalmax = [];

    %Zistime ako deriváciu chceme dosiahnuť v case 0
    pozaktual = -2*r*E/(sigma^2);
    pozmax = 0;
    pozmin = -5*r*E/(sigma^2);
    odchylka = (NelinearnaSigma(-pozaktual, exp((xmax*(0))/n)*aktualrho, ...
        (tmax*(j-1))/m, r, typ, sigma)^2)*pozaktual + 2*r*E;
    while abs(pozmax - pozmin) > (epsresnost)
        if odchylka < 0
            pozmin = pozaktual;
        else
            pozmax = pozaktual;
        end
        pozaktual = (pozmax+pozmin)/2;
        odchylka = (NelinearnaSigma(-pozaktual, exp((xmax*(0))/n)*aktualrho, ...
            (tmax*(j-1))/m, r, typ, sigma)^2)*pozaktual + 2*r*E;
    end
    poz = pozaktual;

    for mikroiteracia = 1:100

        %Rho + deltaX na vypočet derivácie FI(rho)
        aktualrhoder = aktualrho + dx;
```

```

%Krok2
%vypocitame  $PI_{j-1/2,p+1} = \text{Tau}(PI_j, p; \rho_{j,p})$ 
PI_jpolder = zeros(1,n+1);
for it = 1 : n+1
    rhojminule = rho(j-1,1);
    korekcia = + log(aktualrho) - log(rhojminule) + (r-q)*k;
    koreciader = + log(aktualrhoder) - log(rhojminule) + (r-q)*k;
    %if korekcia > 0
    %disp('nieco');
    %end
    ksii = (xmax*(it-1))/n + korekcia;

    dol = floor(ksii*n/(xmax));
    hor = dol+1;

    if dol < n
        if dol >= 0
            dolnahodnota = lastpi(1,dol+1);
        else
            dolnahodnota = E;
        end
        if hor >= 0
            hornahodnota = lastpi(1,hor+1);
        else
            hornahodnota = E;
        end

        PI_jpol(1,it) = dolnahodnota*(hor - (ksii*n/(xmax))) + ...
            hornahodnota*((ksii*n/(xmax)) - dol);
    else
        PI_jpol(1,it) = 0;
    end

    %Pre rho+delta
    ksiider = (xmax*(it-1))/n + koreciader;

    dol = floor(ksiider*n/(xmax));
    hor = dol+1;

    if dol < n
        if dol >= 0
            dolnahodnota = lastpi(1,dol+1);
        else
            dolnahodnota = E;
        end
        if hor >= 0
            hornahodnota = lastpi(1,hor+1);
        else
            hornahodnota = E;
        end

        if dol < n
            PI_jpolder(1,it) = dolnahodnota*(hor - (ksiider*n/(xmax))) + ...
                hornahodnota*((ksiider*n/(xmax)) - dol);
        else
            PI_jpolder(1,it) = 0;
        end
    end
end

%Krok3
%vypocitame 3 diagonalny system  $A(PI_j, p; \rho_{j,p+1})PI_j, p+1 = PI_{j-1/2}$ 
a = zeros(n+2,1);
b = zeros(n+2,1);
c = zeros(n+2,1);
d = zeros(n+2,1);

ader = zeros(n+2,1);
bder = zeros(n+2,1);
cder = zeros(n+2,1);
dder = zeros(n+2,1);

sigmajnl = zeros(1,n+1);

for sigi = 1:n+2
    if sigi > n
        sigmajnl(sigi) = sigmajnl(sigi-1);
    else

```

```

        sigmaijnl(sigi) = NelinearnaSigma((lastpi(sigi) - lastpi(sigi+1))/h, ...
            exp((xmax*(sigi-1)/n)*aktualrho, (tmax*(j-1))/m, r, typ, sigma);
    end
end

if(mikroiteracia >= 100)
    disp('Problem_s_konvergeniou');
    ro = [-1];
    Slast = [-1];
    Vlast = [-1];
    return;
end

%naplnime maticu pre rho
for it = 1:n+2
    if it == 1
        a(it) = 1;
        d(it) = E;
    elseif it == n+2
        a(it) = 1;
        d(it) = 0;
    else
        %vycislime alfa, beta, gama pre susasny bod
        %it >= 2
        sigmaij = sigmaijnl(it);
        sigmaijminus = sigmaijnl(it-1);

        alhai = - k*(sigmaijminus^2)/(2*(h^2)) - k*(sigmaij^2)/(4*h);
        gammai = - k*(sigmaij^2)/(2*(h^2)) + k*(sigmaij^2)/(4*h);
        betai = 1 + r*k - (alhai + gammai);

        c(it-1) = alhai;
        a(it) = betai;
        b(it) = gammai;
        d(it) = PI_jpol(1, it-1);
    end
end

%naplnime maticu pre rho+dx
for it = 1:n+2
    if it == 1
        ader(it) = 1;
        dder(it) = E;
    elseif it == n+2
        ader(it) = 1;
        dder(it) = 0;
    else
        sigmaij = sigmaijnl(it);
        sigmaijminus = sigmaijnl(it-1);

        alhai = - k*(sigmaijminus^2)/(2*(h^2)) - k*(sigmaij^2)/(4*h);
        gammai = - k*(sigmaij^2)/(2*(h^2)) + k*(sigmaij^2)/(4*h);
        betai = 1 + r*k - (alhai + gammai);

        cder(it-1) = alhai;
        ader(it) = betai;
        bder(it) = gammai;
        dder(it) = PI_jpolder(1, it-1);
    end
end

%urcime hodnoty PI_p+1 pre novu casovu vrstvu
PI_n = thomas(a,b,c,d);
PI_n(1) = [];
PI_nder = thomas(ader, bder, cder, dder);
PI_nder(1) = [];

PI_n(n+1)=0;

der0 = (PI_n(1) - E)/h;
der0der = (PI_nder(1) - E)/h;

%F(aktualrho) = der0, F(aktualrho + dx) = der0der, chceme F(x) =
%-2rE/sigma^2
derder = (der0der - der0)/dx; %zmena derivacie v bode 0

%ukoncovacia podmienka
if abs(poz - der0) < epspresnost
    %disp(mikroiteracia);
    aktualpi = PI_n';
    break;
end
end

```

```

if (der0 < rhovalmin)
    disp('Chyba');
    ro = [-1];
    Slast = [-1];
    Vlast = [-1];
    return;
end
if (der0 > rhovalmax)
    disp('Chyba');
    ro = [-1];
    Slast = [-1];
    Vlast = [-1];
    return;
end

if der0 < poz
    maxaktualrho = aktualrho;
    rhovalmin = der0;
else
    minaktualrho = aktualrho;
    rhovalmax = der0;
end

zmena = ((poz - der0)/derder);
aktualrho = aktualrho + zmena;

if (aktualrho < minaktualrho) || (aktualrho > maxaktualrho)
    %zabezpeci, ze nebudeme oscilovat okolo nejakej hodnoty
    aktualrho = (minaktualrho + maxaktualrho)/2;
end

aktualpi = PI_n';

end
lastpi = aktualpi;
rho(j,1) = aktualrho;

%Vypocitame aj cenu
if j == m+1
    Vlast = zeros(1,length(Slast));
    for jV = 1:length(Slast) %Pre kazdu hodnotu S
        currentS = Slast(jV);

        if currentS <= aktualrho
            Vlast(jV) = E - currentS;
            continue;
        end

        nint = log(currentS/aktualrho);

        %Spocitame integral
        iter = 1;
        intSUM = 0;
        currentx = (xmax*iter)/n;
        while currentx < nint && iter < length(aktualpi)
            intSUM = intSUM + aktualpi(iter)*exp(-currentx)*h;
            iter = iter + 1;
            currentx = (xmax*iter)/n;
        end
        if iter < length(aktualpi)
            lastx = (xmax*(iter-1))/n;
            cast = (nint - lastx)/(currentx - lastx);
            intSUM = intSUM + aktualpi(iter)*exp(-currentx)*h*cast;
        end

        Vlast(jV) = (currentS/aktualrho)*(E - aktualrho - intSUM);
        if (Vlast(jV) > Vlast(jV-1)) %zabezpecime nerastucost odstrananim vykyvov
            Vlast(jV) = Vlast(jV-1);
        end
    end
end
Vlast = Vyhld(Vlast);
ro = rho;
return;
end

end

%plot(rho);
%ro = rho;
end

```

```

function [sigma] = NelinearnaSigma(S2partialV, S, tau, r, typ, sigmalin)
if strcmp(typ, 'linear') == 1
    sigma = sigmalin;
    return;
end
if strcmp(typ, 'leland') == 1
    Tcas = 1;
    C = 0.02;
    Lelandovocislo = sqrt(2/pi)*(C/(sigmalin*sqrt(Tcas)));
    sigma = sigmalin * sqrt(1 + Lelandovocislo * sign(S2partialV));
    return;
end
if strcmp(typ, 'barlessoner') == 1
    a = 0.02;
    argumentpsi = exp(r * tau)*(a^2)*S2partialV;
    psi = FindPsiRoot(argumentpsi);
    sigma = sigmalin * sqrt(1+psi);
    return;
end
end

function [y] = FindPsiRoot(x)
epsilon = 0.000001;

%prvotny nastrel y = x
ymin = -0.9999; %Psiinv(-1) = -inf
ymax = max(10,2*x); %Psiinv(2x) ~ 2x
ycurrent = x;
if ycurrent > ymax
    ycurrent = ymax;
end
if ycurrent < ymin
    ycurrent = ymin;
end

bestresult = PsiInv(ycurrent);
bestresulteps = PsiInv(ycurrent+eps);
if bestresult > x
    ymax = ycurrent;
end
if bestresult < x
    ymin = ycurrent;
end

while abs(bestresult - x) > 0.0001
%skusime x = y
    deriv = (bestresulteps - bestresult)/epsilon;
    ycurrent = ycurrent - (bestresult/deriv);
    if ycurrent > ymax
        ycurrent = (3*ymax + ymin)/4;
    end
    if ycurrent < ymin
        ycurrent = (ymax + 3*ymin)/4;
    end

    bestresult = PsiInv(ycurrent);
    bestresulteps = PsiInv(ycurrent+eps);

    if bestresult > x
        ymax = ycurrent;
    end
    if bestresult < x
        ymin = ycurrent;
    end
end
y = ycurrent;
end

function [x] = PsiInv(y)
if abs(y) < 0.01
    x = y;
    return;
end
if y > 0
    x = ( -(asinh(sqrt(y)))/(sqrt(y+1) + sqrt(y))^2;
    return;
end
if -1 < y && y < 0
    x = -( (asin(sqrt(-y)))/(sqrt(y+1) - sqrt(-y))^2;
    return;
end
x = 1/0;
end

```


Numerická metóda pre model s dividendami

```
function [ro, Slast, Vlast]=PredcasnaHranicaLinearTransformPut(T, sigma, E, r, D)
%Parametre funkcie
%T - cas do expiracie
%sigma - volatilita podkladoveho aktiva
%E - strike price
%r - bezrizikova urokovaya miera
%D - spojity dividendovy vynos z akcie

%Navratove hodnoty
%ro - pole hodnot pre precasnu hranicu uplatnenia
%Slast, Vlast - cena opcie pre niektore vybrane ceny v case t=0

%Numericke parametre
m = 10000; %casove delenie
n = 500; %priestorove delenie
epspresnost = 0.00000001; %presnost pre derivaciu dPI(0)
dx = 0.00000001; %pouzity krok na vypočet derivacie

tmax = T;
xmax = 5;
h = xmax/n;
k = tmax/m;
q = D;

%Inicializacia premennych
aktualpi = zeros(1,n+1);
PI_jpol = zeros(1,n+1);
PI_jpolder = zeros(1,n+1);

%Cena
Vlast = [];
Slast = 0:0.1:2*E;

%Naplnime cas t=0, j=0
for i = 1 : n+1
    if ((xmax * (i-1)) / n)<0
        aktualpi(1,i) = E;
    else
        aktualpi(1,i) = 0;
    end
end
rho(1,1) = E;
lastpi = aktualpi;

%Na kazdej dalsej vrstve riesime sustavu linearnych rovníc, t>0
for j = 2:m+1
    %Zaciname pocitat s poslednym riesenim
    aktualpi = lastpi;

    %Odhad riesenia pre zrychlenie konvergenzie
    if j>2
        aktualrho = rho(j-1) + (rho(j-1) - rho(j-2));
    else
        aktualrho = rho(j-1);
    end

    %Rho + deltaX na vypočet derivacie FI(rho)
    aktualrho = exp(log(aktualrho)-(r-q)*k - dx);
    %Hranice na riesenie rho(tau), kvoli kontrole konvergenzie
    minaktualrho = 0;
    maxaktualrho = rho(j-1);

    %Vnutorny cyklus na najdenie riesenia na casovej vrstve j
    for mikroiteracia = 1:100

        %Poistka pre pripad neskonvergovania
        if(mikroiteracia >= 100)
            disp('Problem_s_konvergenziou');
            ro = [-1];
            Slast = [-1];
            Vlast = [-1];
            return;
        end

        %Rho + deltaX na vypočet derivacie FI(rho)
        aktualrhoder = aktualrho + dx;

        %Krok2
        %vypocitame PI_{j-1/2,p+1} = Tau(PI_j,p;rho_j,p)
        for it = 1 : n+1
            %pre rho
            rhojminule = rho(j-1,1);
```

```

korekcia = + log(aktualrho) - log(rhojminule) + (r-q)*k;
korekciader = + log(aktualrhoder) - log(rhojminule) + (r-q)*k;

ksii = (xmax*(it-1))/n + korekcia;

dol = floor(ksii*n/(xmax));
hor = dol+1;

if dol < n
    if dol >= 0
        dolnahodnota = lastpi(1,dol+1);
    else
        dolnahodnota = E;
    end
    if hor >= 0
        hornahodnota = lastpi(1,hor+1);
    else
        hornahodnota = E;
    end
    PI_jpol(1,it) = dolnahodnota*(hor - (ksii*n/(xmax))) + ...
        hornahodnota*((ksii*n/(xmax)) - dol);
else
    PI_jpol(1,it) = 0;
end

%Pre rho+delta
ksiider = (xmax*(it-1))/n + korekciader;

dol = floor(ksiider*n/(xmax));
hor = dol+1;

if dol < n
    if dol >= 0
        dolnahodnota = lastpi(1,dol+1);
    else
        dolnahodnota = E;
    end
    if hor >= 0
        hornahodnota = lastpi(1,hor+1);
    else
        hornahodnota = E;
    end
    if dol < n
        PI_jpolder(1,it) = dolnahodnota*(hor - (ksiider*n/(xmax))) + ...
            hornahodnota*((ksiider*n/(xmax)) - dol);
    else
        PI_jpolder(1,it) = 0;
    end
end
end

%Krok3
%vypocitame 3 diagonalny system A(PI_j,p;rho_j,p+1)PI_j,p+1 = PI_j-1/2
alpha_i = - k*(sigma^2)/(2*(h^2)) - k*(sigma^2)/(4*h); %konstantna sigma pre linearny model
gamma_i = - k*(sigma^2)/(2*(h^2)) + k*(sigma^2)/(4*h); %konstantna sigma pre linearny model
beta_i = 1 + r*k - (alpha_i + gamma_i);

a = zeros(n+2,1);
b = zeros(n+2,1);
c = zeros(n+2,1);
d = zeros(n+2,1);

ader = zeros(n+2,1);
bder = zeros(n+2,1);
cder = zeros(n+2,1);
dder = zeros(n+2,1);
%maplnime maticu pre rho
for it = 1:n+2
    if it == 1
        a(it) = 1;
        d(it) = E;
    elseif it == n+2
        a(it) = 1;
        d(it) = 0;
    else
        c(it-1) = alpha_i;
        a(it) = beta_i;
    end
end

```

```

        b(it) = gammai;
        d(it) = PI_jpol(1,it-1);
    end
end

%naplnime maticu pre rho+dx
for it = 1:n+2
    if it == 1
        ader(it) = 1;
        dder(it) = E;
    elseif it == n+2
        ader(it) = 1;
        dder(it) = 0;
    else
        cder(it-1) = alphai;
        ader(it) = betai;
        bder(it) = gammai;
        dder(it) = PI_jpolder(1,it-1);
    end
end

%Krok 4
%vypocitame PI_j_p
PI_n = thomas(a,b,c,d);
PI_n(1) = [];
PI_nder = thomas(ader,bder,cder,dder);
PI_nder(1) = [];
PI_n(n+1)=0;

der0 = (PI_n(1) - E)/h;
%Sucasna hodnota vyrazu - rho + rE/D - sigma^2 * dPI(0) / 2D
delta0 = r*E + ((sigma^2*der0)/2) - aktualrho*q;
der0der = (PI_nder(1) - E)/h;
delta0der = r*E + ((sigma^2*der0der)/2) - aktualrhoder*q;
derder = (delta0der - delta0)/dx; %zmena derivacie v bode 0, podla rho
%Pozadovana hodnota vyrazu - rho + rE/D - sigma^2 * dPI(0) / 2D
poz = 0;

%ukoncovacia podmienka na vnutorny cyklus -> prechod na
%dalsiu casovu vrstvu
if abs(poz - delta0) < epspresnost
    aktualpi = PI_n';
    break;
end

%urcenie hranic pre riesenie
if delta0 < poz
    maxaktualrho = aktualrho;
else
    minaktualrho = aktualrho;
end

%hodnota pre dalsiu iteraciu urcenu na zaklade Newtonho algoritmu
aktualrho = aktualrho + ((poz - delta0)/derder);
if aktualrho < minaktualrho || aktualrho > maxaktualrho
    %zabezpeci, ze nebudeme oscilovat okolo nejakej hodnoty
    aktualrho = (minaktualrho + maxaktualrho)/2;
end

%urcime hodnotu PI pre dalsiu iteraciu
aktualpi = PI_n';

end
lastpi = aktualpi;
rho(j,1) = aktualrho;

%Na poslednej casovej vrstve vypocitame aj cenu
if j == m+1
    Vlast = zeros(1,length(Slast));
    for jV = 1:length(Slast) %Pre kazdu hodnotu S
        currentS = Slast(jV);

        if currentS <= aktualrho
            Vlast(jV) = E - currentS;
            continue;
        end

        nint = log(currentS/aktualrho);

        %Spocitame integral
        iter = 1;
        intSUM = 0;
        currentx = (xmax*iter)/n;
    end
end

```

```

while currentx < nint && iter < length(aktualpi)
    intSUM = intSUM + aktualpi(iter)*exp(-currentx)*h;
    iter = iter + 1;
    currentx = (xmax*iter)/n;
end
if iter < length(aktualpi)
    lastx = (xmax*(iter-1))/n;
    cast = (nint - lastx)/(currentx - lastx);
    intSUM = intSUM + aktualpi(iter)*exp(-currentx)*h*cast;
end

Vlast(jV) = (currentS/aktualrho)*(E - aktualrho - intSUM);
if(Vlast(jV) > Vlast(jV-1)) %zabezpecime nerastucost odstranenim vykrov
    Vlast(jV) = Vlast(jV-1);
end
end
Vlast = Vyhled(Vlast);
ro = rho;
return;
end
end
end

```

PSOR metóda

<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/17523>