

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



Použitie metódy Monte Carlo vo financiách

Diplomová práca

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika
Študijný program: ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce:
doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

Autor práce:
Bc. Roman Tišliar

Bratislava 2011

Evidenčné číslo: 7bb64325-d6f0-4e35-b660-f6536a0d3477

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Roman Tišliar
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov práce: Použitie metódy Monte Carlo vo financiách
Cieľ práce: Prezentácia možnosti použitia simulačnej metódy Monte Carlo na riešenie rozličných problémov vo financiách a zhodnotenie efektívnosti metódy v daných problémoch.

Vedúci: doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

Dátum zadania: 15.02.2010

Dátum schválenia: 4.4.2011

.....
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu


.....
študent


.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

4.4.11

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatury.

Bratislava, 12. 4. 2011

.....
Vlastnoručný podpis

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce, za odbornú pomoc a pripomienky pri jej vypracovávaní.

Abstrakt

V tejto práci sa venujeme možnostiam použitia Monte Carlo simulácii v oblasti financií, konkrétne sa zameriavame na oceňovanie finančných derivátov. Cieľom práce je vysvetliť teoretický podklad pre aplikáciu Monte Carlo simulácii a následne praktická implementácia simulácie vývoja finančných aktív a úrokových mier a výpočet cien ich finančných derivátov. Budeme sa snažiť diskutovať efektívnosť, výhody a nevýhody použitia tejto metódy v rôznych aplikáciach a porovnávať s inými metódami a taktiež rozoberieme niektoré metódy, ktorých účelom je zefektívnenie simulácii.

Kľúčové slová: Monte Carlo simulácie, oceňovanie finančných derivátov, opcie, úrokové miery, generovanie náhodných čísel

Abstract

In this work we present applications of Monte Carlo simulations in finance, especially we focus on pricing financial derivatives. The aim of this work is to explain the theoretical basis for the application of Monte Carlo simulations and then the practical implementation of simulations of financial assets and interest rates and calculation prices of their financial derivatives. We will try to discuss the effectiveness, advantages and disadvantages of using this method in various applications and compare it with other methods and also we discuss some methods which are designed to improve efficiency of simulations.

Key words: Monte Carlo simulations, pricing financial derivatives, options, interest rates, generating random numbers

Obsah

Úvod	1
1 Úvod do metódy Monte Carlo	3
1.1 Základné fakty	3
1.2 Jednoduchý príklad	4
1.3 Použitie	5
1.4 Oceňovanie derivátov	6
1.4.1 Európske opcie	6
1.4.2 Ázijské opcie	8
1.5 Efektívnosť simulácii	9
2 Stochastický charakter aktív	11
2.1 Brownov pohyb	11
2.2 Opcie	12
2.3 Modely úrokovej miery	15
2.4 Bezrizikové oceňovanie	16
2.5 Black Scholes model	19
3 Generovanie náhodných čísel a procesov	21
3.1 Lineárne kongruentné generátory	21
3.2 Generovanie z normálneho rozdelenia	23
3.2.1 Algoritmus Box-Muller	25
3.2.2 Metóda inverznej transformácie	26
3.2.3 Viacrozmerné normálne premenné	27
3.3 Simulácia geometrického Brownovho pohybu	28
4 Redukcia variancie	33
4.1 Metóda kontrolovaných variet	33
4.2 Matching metóda	35
4.3 Ďalšie metódy	36
5 Simulácia a oceňovanie opcií	38
5.1 Európske opcie	38
5.2 Ázijské opcie	41
5.3 Bariérové opcie	43
5.4 Spread opcie	45

<i>OBSAH</i>	7
5.5 Košíkové opcie	47
5.6 Americké a bermudské opcie	48
5.6.1 Formulácia problému	49
5.6.2 Metóda náhodných stromov	49
5.6.3 Regresná metóda Monte Carlo	53
6 Simulácia modelov úrokových mier	58
6.1 Forwardové úrokové miery	58
6.1.1 LIBOR model úrokových mier	58
6.1.2 Simulácia LIBOR forwardových mier a oceňovanie derivátov	61
Záver	65
Príloha	67
Zoznam použitej literatúry	71

Úvod

S rozvojom finančných trhov a výpočtovej techniky sa rozvinula prirodzená snaha matematikov, ekonómov či finančníkov uchopiť vývoj finančných aktív ako akcie a dlhopisy prostredníctvom matematických modelov. Avšak kvôli stochastickému charakteru finančných trhov nedokážeme predpovedať ich presný vývoj. Náhodnosť je prirodzenou vlastnosťou, s ktorou sa stretávame u mnohých prírodných procesov, pre finančný a ekonomický sektor to platí taktiež, a jedinou našou možnosťou je štatisticky skúmať pozorovaný jav a využívať pravdepodobnostné modely na ich popis.

V prípade finančných trhov to znamená, že pomocou modelov, o ktorých si myslíme že pomerne presne popisujú ich vývoj, získavame informáciu v podobe pravdepodobnostného vývoja a snažíme sa to využiť v náš prospech. Najčastejšie ide o snahu zostaviť obchodnú stratégiu či portfólio, ktoré bude minimalizovať riziko vyplývajúce s náhodnosťou finančných trhov. Za týmto účelom sa rozvinul pomerne veľký trh finančných derivátov a jednou z úloh finančnej matematiky je určovanie cien týchto finančných inštrumentov. Postupom času vznikali deriváty rôzneho charakteru, jednoduchšie ale samozrejme aj zložité. Ceny jednoduchších derivátov sa dali nájsť aj hľadaním analytických riešení, zložitejšie typy však bolo potrebné riešiť numericky, čím vznikol priestor na rozvoj množstva metód na výpočet cien rôznych druhov derivátov. Jednou z týchto metód je aj simulačná metóda Monte Carlo.

Cieľom práce je teoretická a praktická implementácia metód Monte Carlo na rôzne problémy v oblasti oceňovania finančných derivátov a prezentácia metódy ako univerzálneho nástroja, ktorým sa dajú riešiť takmer všetky problémy v danej oblasti financií a zhodnotiť, v ktorých aplikáciách sa javí ako najefektívnejšia alebo naopak nevhodná.

Metóda Monte Carlo je svojou myšlienkou veľmi jednoduchá a široko použiteľná. Nebola dizajnovaná selektívne na použitie vo financiách, ale dá sa použiť v každej oblasti, kde sa snažíme získať informáciu o nejakom jave, ktorý vykazuje náhodnú dynamiku. V princípe pozostáva z niekoľkých základných krokov: poprvé zostavenie parametrického modelu popisujúceho sledovanú udalosť, po druhé generovanie náhodných čísel z konkrétnymi vlastnosťami a následné dosadenie vygenerovaného čísla do parametrického modelu, čo môžeme nazvať ako realizácia náhodného procesu a ako posledný krok je opakovanie tohto procesu a následné štatistické vyhodnotenie získaných výsledkov. Práca je členená s podobnou logikou, v prvých štyroch kapitolách je snaha o teoretickú implementáciu Monte Carlo metód vo financiách, tj. hlavne zostavenie parametrického modelu a generovanie náhodných čísel, kapitoly 5 a 6 sú viac venované praktickej implementácii a štatistickému vyhodnocovaniu použitia metód Monte Carlo v rôznych aplikáciách v oblasti financií.

V kapitole 1 je úlohou čo najjednoduchšie priblížiť myšlienku metódy Monte Carlo, možnosti jej využitia vo finančnej, ale aj iných oblastiach a nakoniec sú vyložené prvé jednoduché príklady použitia metódy Monte Carlo vo financiách, konkrétne pre oceňovanie derivátov ázijského a európskeho typu.

Metóda Monte Carlo ako taká pracuje len v rámci istého modelu, v tomto prípade využíva modely finančnej matematiky, preto je potrebné sa oboznámiť so základnými pojmami z tejto oblasti, ktoré budú využívané v priebehu celej práce ako sú markovovské procesy, Brownov pohyb, Black-Scholes model a najmä pre aplikácie Monte Carlo simulácii dôležitý princíp bezrizikového oceňovania finančných derivátov, a o ktorých sa dá dočítať v kapitole 2. Taktiež budú opísané rôzne typy opcí a ich výplatná štruktúra či podané základné fakty o modeloch úrokových mier.

Kapitola 3 je venovaná tomu, čo sa dá považovať za jadro Monte Carlo metód - generovanie náhodných čísel resp. náhodných procesov. Po zadefinovaní modelu, v tomto prípade nejakého modelu finančnej matematiky, si simulácia metódou Monte Carlo žiada vygenerovanie náhodného čísla z nejakého rozdelenia. Metódy generovania týchto čísel sú univerzálne a možno ich použiť vo finančných ale aj fyzikálnych modeloch, pre prípad použitia vo financiách sú zaujímavé spôsoby generovania jedno a viac rozmerných náhodných čísel z normálneho rozdelenia. Generovanie náhodných procesov predstavuje už konkrétnu aplikáciu generovania náhodných čísel na simuláciu dynamiky vývoja finančných aktív, príkladom je simulácia stochastickej diferenciálnej rovnice vývoja ceny finančného aktíva, ktorá sa dá následne využiť na počítanie cien derivátov.

Štvrtá kapitola pojednáva o metódach, ktoré majú za úlohu zefektívniť výpočty pomocou Monte Carlo simulácii, tj. metódy redukcie variancie, ktoré sa stali neoddeliteľnou súčasťou pri používaní všetkých Monte Carlo metód.

V kapitolách 5 a 6 sú diskutované numerické výsledky, konkrétne bude venovaná pozornosť simuláciám cien jednorozmerných európskych, ázijských, bariérových a amerických opcí, dvojrozmerných spread opcí, mnohorozmerných košíkových opcí európskeho a ázijského typu, ale aj simulácia LIBOR modelu úrokových mier a výpočet jeho derivátov, konkrétne typu cap. Každému typu derivátu je venovaná samostatná podkapitola, v ktorej sa dajú nájsť niektoré z numerických výsledkov daných simulácii, porovnanie s inými numerickými či analytickými metódami a záverečné zhodnotenie výhod, nevýhod či efektívnosti použitia Monte Carlo metód v jednotlivých prípadoch.

Kapitola 1

Úvod do metódy Monte Carlo

1.1 Základné fakty

Svojou myšlienkou prvý predchodca Monte Carlo simulácii sa dá považovať známy experiment Buffonovej ihly, ktorý spočíval v náhodných hodoch ihly dĺžky L na plochu, ktorá bola predelená rovnobežnými úsečkami vo vzdialenosti d ($d > L$), a pýtal sa aká je pravdepodobnosť, že ihla pretne úsečku. Matematicky prišiel na vzťah: $P = \frac{2L}{\pi d}$, pričom tento experiment sa dá použiť aj na zistenie čísla π . Toto bol teda prvý príklad generovania veľkého počtu náhodných, v tomto prípade hodov, na zistenie istých štatistických vlastností.

Prvýkrát v pravej podstate slova, bola metóda Monte Carlo použitá už počas druhej svetovej vojny v Los Alamos, keď vedci pracovali na prvej atómovej bombe a museli riešiť problém neutrónu a jeho správania sa v rozličných podmienkach. Bol to pomerne zložitý matematický problém, ktorý nebolo možné riešiť analyticky. Vtedy John von Neumann a Stanislaw Ulam prišli s riešením, ktoré bolo založené na modelovaní experimentu istými počítačovými simuláciami. Z tejto doby pochádza aj názov, projekt bol nazvaný "Monte Carlo", pravdepodobne podľa kasína Monte Carlo. Za účasti ďalších vedcov ako Fermi alebo Metropolis sa koncom 40-tych rokov ďalej rozvíjala. Prirodzene ďalší rozvoj metódy bol závislý na pokroku počítačovej techniky a preto plné uplatnenie našla až oveľa neskôr v dobe výkonnejších počítačov.

Metóda sa teda najviac spája s pojmom stochastické procesy, ktoré sú v dnešnej dobe všadeprítomné v matematickom modelovaní rôznych javov a sú úzko spojené s teóriou pravdepodobnosti, modelujeme nimi rôzne procesy v rôznych oblastiach, ktoré zahŕňajú istú dávku neistoty a náhodného správania sa.

Vo svojej podstate sú Monte Carlo simulácie založené na úplne jednoduchom princípe. Zostrojíme model, ktorým vieme čo najlepšie popísať skúmaný objekt, a ktorého správanie je stochastické, napríklad vývoj ceny akcie na finančnom trhu. Vygenerujeme veľké množstvo náhodných čísel, po ich vhodnej transformácii a iných úpravách budú vstupom do modelu. Nakoniec zozbierame a štatisticky vyhodnotíme výsledky.

Jednoduchá schéma Monte Carlo simulácie by vyzerala nasledovne:

1. Vytvorenie konkrétneho parametrického modelu
2. Vygenerovanie náhodných čísel a ich dosadenie do modelu
3. Výstup z modelu
4. Opakovanie krokov 2 a 3
5. Analýza numerických výsledkov

Aby sme si lepšie dokázali predstaviť, čo táto schéma znamená v nejakom konkrétnom prípade, tak v bode 1 môžeme použiť geometrický Brownov pohyb ako náš parametrický model (s parametrami čas do expirácie, expiračná cena, volatilita,...), v bode 2 vygenerujeme číslo zo štandardného normálneho rozdelenia a dosadíme ho do predpisu pre geometrický Brownov pohyb (podľa definovaných pravidiel) a v bode 3 výstupom modelu je výplata opcie v terminálnom čase diskontovaná do času 0. Potom nám stačí len opakovať takéto simulácie a priemerovať takto získané ceny, čím získame štatistický odhad ceny opcie. Každý z týchto krokov si postupne v priebehu práce rozoberieme podrobnejšie.

1.2 Jednoduchý príklad

Dobrym príkladom jednoduchého použitia metódy Monte Carlo je výpočet jednoduchého jednorozmerného určitého integrálu. Práve na jednoduchom výpočte integrálu si teraz ukážeme základné štatistické vlastnosti simulácii Monte Carlo.

Uvažujme určitý integrál $\alpha = \int_0^1 f(x)dx$, ktorý môžeme reprezentovať ako očakávanú hodnotu $E[f(U)]$, s U uniformne distribuovanými náhodnými číslami v intervale $\langle 0, 1 \rangle$. Potrebujeme mať nejaký mechanizmus, ktorý náhodne vyberá čísla z daného intervalu (napríklad rovnomerné rozdelenie, ktoré ponúka matlab). Ak je funkcia integrovateľná na danom intervale, výpočtom hodnoty funkcie $f(x)$ v tomto konečnom počte bodov U , získame odhad Monte Carlo :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i)$$

podľa zákona veľkých čísel $\hat{\alpha} \rightarrow \alpha$ pre zväčšujúce sa n . Ak by nás zaujímala chyba problém formulujeme nasledovne:

$$\sigma_f^2 = \int_0^1 (f(x) - \alpha)^2 dx$$

potom štandardná chyba $\hat{\alpha} - \alpha$ je normálne rozdelená so strednou hodnotou 0 a štandardnou odchýlkou σ_f/\sqrt{n} . Takto formulovaná štandardná chyba je centrálnym znakom Monte Carlo metódy. Je pomerne náročná na zvyšovanie presnosti a má pomalú konvergenciu, zvýšenie presnosti o jedno desatinné miesto by si vyžiadalo dodatočných 100 násobne viac bodov či pozorovaní. Na ukážku v tabuľke metódou Monte Carlo simulujeme hodnotu konkrétneho integrálu vyššie uvedeným postupom

$$I = \int_0^1 x.e^x dx$$

Tabuľka 1.1: Výpočet integrálu $I = \int_0^1 x.e^x dx$ metódou Monte Carlo pre daný počet N simulácií a jeho štandardná chyba(SE), počítané pre 10 replikácií

N	100	1000	10000	100000
I	1.0221	0.9979	1.0040	1.0004
SE	0.0770	0.0246	0.0078	0.0024

presná hodnota je $I = 1$ vypočítaná analyticky.

Tento príklad bol len ilustračný, ale Monte Carlo metóda nie je veľmi efektívnou metódou pri malých dimenziách a podobných jednoduchých problémoch. Avšak s nárastom dimenzií či zložitosti problému jeho aktraktivita a efektivita narastá. A tak nám poslúžil hlavne ako prvé zoznámenie s týmito simuláciami a ich systémom fungovania. Tiež si treba uvedomiť, že schopnosť vypočítať nejaký intergál ako očakávanie (strednú hodnotu), nám dáva dobrý nástroj pre použitie vo financiách, kde sú matematické modely definované pomocou stochastických integrálov a ceny finančných derivátov môžeme vyjadriť ako isté očakávané (stredné)hodnoty.

1.3 Použitie

Metóda má veľmi široké použitie, spomenieme aspoň niektoré.

Veľmi dôležitou oblasťou je fyzika, fyzikálna chémia a príbuzne obory. Široké použitie nachádza v štatistickej fyzike, napríklad pri modelovaní molekulovej dynamiky, v experimentálnej časticovej fyzike, alebo dokonca aj v astromómii prípadne v predpovediach počasia. Fyzika aj matematika často používa vo svojich modeloch a výpočtoch viacroz-
merné, výpočtovo náročné integrály a práve tu sa Monte Carlo metóda hlási o slovo. Ďalej sa využíva napríklad v hrách, významnú úlohu má pre tvorbu umelej inteligencie herných systémov. Takisto v mnohých oblastiach inžinierstva alebo optimalizačných úloh.

Pomocou Monte Carlo metód môžeme generovať náhodné čísla z rôznych rozdelení a preto nachádzajú dobré použitie aj pre samotnú štatistiku.

S výčtom použitia by sa dalo pokračovať, ale v tejto práci nás zaujímajú hlavne aplikácie v oblasti financií, kde nimi môžeme riešiť širokú paletu problémov. Vo finančnej matematike modelujeme všetky procesy ako stochastické procesy, ktoré často nemajú analytické riešenie alebo analytické výpočty sú veľmi zložité, preto sa vyžaduje kvalitný numerický aparát. Jedným z týchto numerických riešení sú Monte Carlo simulácie.

Môžeme nimi modelovať základné aktíva obchodované na finančných trhoch ako sú akcie, futures alebo dlhopisy a obrovského množstva ich finančných derivátov. Určujú hodnotu širokej palety opcií - od jednoduchých európskych cez ázijské, ktoré závisia na ceste, až po komplikované americké opcie, ktorých čas uplatnenia je ľubovoľný, ale aj pre ne existuje vhodný algoritmus, ktorý implementuje Monte Carlo metódy na výpočet. Okrem toho simuláciami vieme určiť aj tzv. "greeks", ktoré hovoria o citlivosti cien opcií na rôzne parametre či pohyb podkladového aktíva, ktoré v práci nebudeme spomínať, ale

viacero autorov sa venovalo aj tomuto problému, množstvo o danom probléme nájdeme v [3][5][2][21].

Dalšou veľkou oblasťou je oceňenie dlhopisov a ich derivátov, ktoré sa často modelujú napríklad short-rate modelmi, alebo forwardovými úrokovými mierami a výstupom sú očakávané výnosové krivky. Na reálnych trhoch sú často využívané swapy alebo cap-y, ktorých cena sa dá takisto dobre odhadnúť týmito metódami.

Okrem toho majú MC simulácie použitie aj v poistnom sektore, kde slúžia ako metóda simulovania modelov, ktoré istým spôsobom merajú a oceňujú riziká vyplývajúce z poistných udalostí. Princíp využitia Monte Carlo simulácii je v zostrojení distribučnej funkcie rozdelenia finančných rizík. V súčasnosti sa pomerne často používa model riadenia rizík s názvom Value at Risk, ktorý sa dá efektívne oceniť simuláciami Monte Carlo, viac v [16][5] a dobrý prehľad o aplikáciach Monte Carlo v poisťovníctve nájdeme aj v [2].

Samozrejme nemusíme sa obmedzovať len na uvedené použitie a môžeme vytvárať komplexnejšie modely a simulovať napríklad vývoj portfólia pozostávajúceho z množstva akcií a prípadne aj dlhopisov a tým pádom riešiť akúsi optimalizačnú úlohu, pýtať sa či danú akciu kúpiť predajť či ďalej držať s ohľadom na pravdepodobnostné očakávania, stanovovať strednú očakávanú hodnotu výnosu za isté obdobie takéhoto portfólia, názorným výstupom z takýchto simulácii bude napríklad histogram alebo iné štatistické ukazovatele.

Efektívnosť Monte Carlo simulácii vo všetkých prípadoch závisí od toho, aký model zostavíme aké techniky generácie náhodných čísel použijeme a podobne a tým môžeme ovplyvniť výsledok simulácie.

1.4 Oceňovanie derivátov

1.4.1 Európske opcie

Ako prvú ukážku použitia Monte Carlo simulácii vo financiách si ukážeme schému na výpočet súčasnej očakávanej hodnoty výplatnej funkcie európskej call opcie (viz. kapitola 2.2).

Uvažujme nasledujúce premenné: $S(t)$ bude hodnota vybranej akcie v čase t , T bude čas výplaty opcie (expiračný čas), K bude označovať expiračnú cenu, r bude bezriziková úroková miera, σ označuje volatilitu akcie. Tento typ opcie sa uplatňuje len v dobe splatnosti T s výplatou

$$(S(T) - K)^+ = \max(0, S(T) - K)$$

a následne túto hodnotu musíme diskontovať do času 0, teda hľadáme

$$E[e^{-rT}(S(T) - K)^+]$$

Teraz potrebujeme model, ktorým budeme modelovať cenu akcie. Tu si prizveme na pomoc stochastický kalkulus z finančnej matematiky (viac v kapitole 2), ktorý budeme používať aj v ďalších aplikáciach a cenu akcie opíšeme stochastickou diferenciálnou rovnicou s Brownovým procesom (viz. kapitola 2.1) W

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW(t)$$

Rovnica opisuje percentuálne zmeny ceny akcie, popisované geometrickým Brownovým pohybom (viz. kapitola 2.1), čo je výhodnejšie ako opisovať absolútny pohyb. Riešením tejto rovnice, teda riešením geometrického Brownového pohybu je

$$S(T) = S(0) \exp([r - 1/2\sigma^2]T + \sigma W(T)) = S(0) \exp([r - 1/2\sigma^2]T + \sigma\sqrt{T}Z) \quad (1.1)$$

Cena v čase 0, tj. $S(0)$, je nám známa. Náhodná premenná $W(T)$ je normálne rozdelená so strednou hodnotou 0 a disperziou T , kde to isté platí aj o výraze $\sqrt{T}Z$, za predpokladu, že premenná Z je normálne rozdelená so strednou hodnotou 0 a disperziou 1. Potom o akcii môžeme povedať, že jej pohyb je z lognormálneho rozdelenia. Hľadaný výraz $E[e^{-rT}(S(T) - K)^+]$, tj. očakávaná hodnota výplatnej funkcie európskej opcie v čase 0 je integrál s náhodnou premennou $S(T)$ lognormálne rozdelenou. Tento typ úloh má však pomerne jednoduché explicitné vzorce na riešenie (2.1), čiže Monte Carlo simulácie nie je efektívne používať, ale na ukážku schémy ich fungovania to postačuje.

Keď sa ešte raz pozrieme na rovnicu (1.1), zisťujeme, že potrebujeme vedieť generovať náhodné premenné, v tomto prípade Z , zo štandardného normálneho rozdelenia. Keď to budeme vedieť, simulácia vývoja premennej $S(T)$ nie je problém. Podrobnejšie sa problematike generovania takýchto náhodných premenných či vzoriek dostaneme v kapitole 3. Za predpokladu znalosti mechanizmu generovania z normálneho rozdelenia, algoritmus na výpočet ceny európskej call opcie v matlabe bude mať nasledovný tvar.

```
function Cn = EUCal(n, r, T, K, S0, sigma)
vygeneruj maticu Z rozmeru [1xn],  $Z_i \sim N(0, 1)$ 
for i=1:n
```

$$ST = S(0) * \exp((r - 1/2 * \text{sigma}^2) * T + \text{sigma} * \sqrt{T} * Z(i)); \quad (1.2)$$

```
C(i) = exp(-r * T) * max(0, ST - K);
```

```
end
```

```
Cn = mean(C)
```

Generujeme n Monte Carlo simulácií a pre každú sme vygenerovali náhodnú premennú $Z_i \sim N(0, 1)$. Pre výsledný odhad C_n podľa zákona veľkých čísel platí pre $n \rightarrow \infty$,

$$\hat{C}_n \rightarrow C$$

s pravdepodobnosťou 1.

Okrem tohto môže byť výstupom takýchto Monte Carlo simulácií aj interval spoľahlivosti. Vezmime veľké konečné n , potom interval spoľahlivosti $(1 - \delta)$ percentný má tvar

$$C_n \pm z_{\sigma/2} \frac{s_c}{\sqrt{n}}$$

kde $s_c = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (C_i - \hat{C}_n)^2}$ je výberová štandardná odchýlka a z_σ je $1 - \sigma$ kvantil štandardného normálneho rozdelenia ($\phi(z_\sigma) = 1 - \sigma$).

Týmto sme ukázali použitie jednoduchej Monte Carlo schémy na výpočet ceny európskeho typu derivátu. V kapitole 5.1 nájdeme podrobnejší výstup z takýchto simulácií a ich štatistickú analýzu.

1.4.2 Ázijské opcie

V druhom príklade bude ukázaný analogický postup oceňovania pre Ázijské opcie, ktoré majú o niečo zložitejšiu schému fungovania a to hlavne preto, že nás zaujíma hodnota akcie počas celého obdobia platnosti opcie, je to od cesty závislá opcia. Opäť viac k nim sa dá nájsť v kapitole 2.2 .

Keď v prípade európskych opcií sme potrebovali vedieť len pravdepodobnostné rozloženie ceny akcie v terminálnom čase $S(T)$, teraz budeme musieť simulovať celú cestu vývoja akcie a poznať pravdepodobnostné rozloženie v každom čase, presnejšie v každom diskretnom bode časového intervalu. A teda interval $[0, T]$ rozdelíme na m podintervalov, a na každom z nich budeme vykonávať náhodný výber podľa danej schémy. Opäť pohyb ceny akcie vyjadríme stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

v zmysle značení minulej sekcie. Riešenie si musíme vhodne aproximovať na diskretné intervaly, a to konkrétne použitím tvz. Eulerovej schémy

$$S(t + \Delta t) = S(t) + rS(t)\Delta t + \sigma S(t)\sqrt{\Delta t}Z \quad (1.3)$$

kde opäť vystupuje náhodná premenná Z zo štandardného normálneho rozdelenia. Keď sa pozrieme na vlastnosti takýchto stochastických procesov (viz. kapitola 2.1), teda že výraz $W(t + \Delta t) - W(t)$ má strednú hodnotu 0 a štandardnú odchýlku $\sqrt{\Delta t}$, môžeme urobiť m nezávislých výberov v našej m vrstvovej schéme, až sa nakoniec dopracujeme (pre zväčšujúce sa m) k čo najpresnejšej aproximácii rozdelenia pre premennú $S(T)$.

Vieme, že výplatná funkcia pre ázijský typ opcií má výplatnú funkciu v tvare

$$(\bar{S} - K)^+ \text{ kde } \bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S(t_j) \quad (1.4)$$

s delením času na intervaly $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$. Teraz potrebujeme opäť určiť diskontovanú hodnotu pre výplatnú funkciu $E[e^{-rT}(\bar{S} - K)^+]$.

Od tohoto bodu už môžeme postupovať analogicky podľa našej schémy ako pre európsku opciu z minulej sekcie, teda

$$S(t_{j+1}) = S(t_j) \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{j+1} - t_j) + \sigma\sqrt{t_{j+1} - t_j}Z_{j+1}\right] \quad (1.5)$$

kde Z_{j+1} je z $N(0, 1)$. Týmto spôsobom sme vytvorili množstvo rôznych ciest, z ktorých ľahko vieme vypočítať priemernú cenu. Takto by vyzeral algoritmus pre Monte Carlo simulácie ázijských opcií, pričom opäť sme predpokladali schopnosť generovania náhodných čísel z normálneho rozdelenia a konkrétne simulácie a štatistické vyhodnotenie takéhoto

typu opcií nájdeme v kapitole 5.2 .

```

function  $C_n = AsianCall(n, m, S_0, \sigma, r, \Delta t)$ 
for  $i=1:n$ 
vygeneruj maticu náhodných čísel  $Z$  rozmeru  $[n \times m]$ ,  $Z_{ij} \sim N(0, 1)$ 
for  $j=1:m-1$ 

 $S(j + 1) = S(j) * exp((r - 1/2 * sigma^2) * dt + sigma * sqrt(dt) * Z(i, j));$     (1.6)

end
priemerS = mean(S);
 $C(i) = exp(-r * T) * max(0, priemerS - K);$ 
end
 $Cn = mean(C)$ 

```

kde $dt = t_{j+1} - t_j$. Algoritmus pre každú z n simulácií vygeneruje m náhodných čísel $Z_{ij} \sim N(0, 1)$, kde m značí počet delení časového intervalu jednej simulácie. V týchto m bodoch vypočítame cenu podkladového aktíva a spriemerujeme na danej ceste. Toto opakujeme n krát, priemerovaním n ciest dostaneme odhad \hat{C}_n .

1.5 Efektívnosť simulácií

Pri vykonávaní počítačových simulácií potrebujeme zdefinovať isté kritéria, ktoré nám dokážu rozlíšiť efektívnosť rozličných simulácií rôznych modelov. Hlavné atribúty sú výpočtový čas, (ne)vychýlenosť odhadu a variancia.

Doteraz sme mohli predpokladať, že tieto odhady \hat{C}_n sú nevychýlené, tj. $E[\hat{C}_n] = C$. Odhad bol rovný jednochucho priemeru všetkých odhadov s konečnou varianciou. Z centrálnej limitnej vety potom vieme, že pre zvyšujúci sa počet simulácií n platí

$$\frac{\hat{C}_n - C}{\sigma_C / \sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

resp. môžeme zapísať

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\hat{C}_n - C}{\sigma_C / \sqrt{n}} \leq x \right) = \phi(x)$$

z toho ďalej vyplýva dôležitý vzťah pre rozdelenie chyby Monte Carlo simulácií

$$\hat{C}_n - C \cong N(0, \sigma_C^2 / n)$$

Zo simulácií by sme v mnohých prípadoch ťažko určili paramater σ_C , avšak vieme ho vhodne aproximovať tak, aby sme ho zo simulácií vedeli určiť a pritom zachovali vyššie uvedené vzťahy: $\sigma_C \cong s_c = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (C_i - \hat{C}_n)^2}$. Tento vzťah priamo hovorí ako vybrať odhad s nižšou varianciou.

Variancia sama o sebe však nemôže byť faktor, ktorý jednoznačne určí lepší odhad, ale musí byť vnímaná v kontexte ďalších faktorov, a to konkrétne s ohľadom na výpočtový čas. Môže sa stať, že odhad s malou varianciou bude mať mnohonásobne vyšší výpočtový čas ako odhad s oveľa menšou náročnosťou ale len o málo väčšou varianciou. Ako teba jednoznačne vyberať najlepší odhad. Tento problém sa dá sumarizovať nasledovne: pri porovnávaní viacerých nevychýlených odhadov musíme preferovať ten, ktorý má najnižšiu hodnotu $t_i \cdot \sigma_i^2$, pre počet odhadov $i = 1, \dots, n$, σ_i je výberová variancia odhadu a t_i označuje výpočtový čas. Ak predpokladáme zväčšujúcu výpočtovú kapacitu, tak tento odhad bude asymptoticky dávať najpresnejší výsledok a najužší interval spoľahlivosti.

Tento výsledok je potrebné ešte ďalej upraviť, pretože sa ľahko môže stať, že pri oceňovaní derivátov ako americké opcie, čas uplatnenia v každej simulácii bude odlišný, teda aj výpočtový čas bude rôzny, na rozdiel napríklad od ázijských opcií, kde počet časových krokov a generovanie náhodných vzoriek vždy prebiehalo v rovnakom objeme.

Toto dosiahneme jednoducho zovšeobecnením predchádzajúcich úvach, keď predpokladáme, že odhad a jeho výpočtový čas sú nezávislé pre všetky simulácie $(C_i, t_i), i = 1, \dots, n$. Problém voľby najefektívnejšieho z n odhadov tak môžeme zapísať v nasledujúcom tvare

$$\text{najefektívnejší odhad} = \min_{i=1,2..n} \sum_{j=1}^m \sigma_{C_j} \times t_j$$

kde suma prebieha cez jednotlivých m simulácií jediného odhadu, podrobnejší argument pre toto kritérium nájdeme v [23][5].

Môže samozrejme nastať situácia, že odhad C_n bude vychýlený, teda odhad zo simulácii nebude korešpondovať s očakávanou strednou hodnotou (teoretickou), to je napr. prípad amerických opcií, kde pri malom počte časových uzlov, cez ktoré sa simuluje, často dostávame odhad vychýlený nadol. Tomu sa chceme samozrejme vyhnúť. Často sa stretávame s prípadom, keď odhad bude vychýlený, ale pre zväčšujúci sa počet simulácií resp. vyšší počet časových uzlov ho budeme môcť považovať za asymptoticky nevychýlený teda vychýlenosť dokážeme eliminovať zvýšením výpočtovej náročnosti. Avšak vyskytnú sa aj prípady, keď takéto riešenia úplne neodstráni problém vychýlenosti. S problémom vychýlenosti je často spojená tzv. diskretizačná chyba, a metódy na jej elimináciu sa nazývajú diskretizačné metódy, ktorými sa nebudeme zaoberať, viac na túto tému sa dá nájsť v [5].

Aj na tieto fakty je nevyhnutné prihliadať pri formulácii modelu aby nevznikali vychýlené odhady a nezvyšovali sme zbytočne výpočtovú náročnosť.

Kapitola 2

Stochastický charakter aktív

Metódy Monte Carlo sami o sebe majú síce veľmi jednoduchú myšlienku a sú pomerne účinné a efektívne, ale musíme si uvedomiť, že len akýmsi spôsobom štatisticky vyhodnocujú model, ktorý pre nich zostrojíme. Zostrojenie komplexných modelov, pomerne presne fungujúcich je však už druhá vec. Vedný odbor finančná matematika nahromadil pomerne veľkú teóriu a množstvo modelov, ktoré opisujú v podstate všetky dôležité procesy, s ktorými sa stretávame v reálnom finančnom svete. Pri používaní Monte Carlo metódy vo financiách budeme používať práve tieto modely, preto je namieste sa s niektorými dôležitými myšlienkami zoznámiť a vysvetliť aké je prepojenie Monte Carlo metódy a finančného modelovania.

Hlavné myšlienky, ktoré sú pre naše potreby dôležité, sa dajú zhrnúť do nasledujúcich pár viet. Ak môže byť derivát perfektne zaistený obchodovaním s inými aktívami na trhu, tak potom cena derivátu je cena zaistovacej stratégie, často sa stretáme s pojmom samofinancovateľná stratégia. Diskontované ceny aktív sú martingalmi pri miere naviazanej na diskontný faktor a ceny sú potom očakávané hodnoty diskontovanej výplaty daného aktíva. Táto miera naviazaná na martingal a diskontný faktor je jediná. Potom vývoj ceny aktíva vieme popísať napríklad Brownovým pohybom. A práve vzťah vyjadrenia ceny aktíva ako očakávania, ktoré môžeme stotožniť so stochastickými integrálmi, je kľúčovým pojmom pre oceňovanie derivátov. Okrem iného nám to hovorí, že pri používaní Monte Carlo simulácii musíme vychádzať z vyššie spomínanej pravdepodobnostnej miery. Pri oceňovaní derivátov si musíme uvedomiť, že ceny derivátov vyjadrujeme vždy relatívne ku istému podkladovému aktívu, aby sme tým mohli zostrojiť stratégiu zaistovania portfólia.

2.1 Brownov pohyb

Najskôr potrebujeme zdefinovať niektoré pojmy. Ako prvé treba povedať, čo to vlastne je stochastický proces, o ktorom je stále reč. Majme náhodnú premennú $X(t)$, pre nejaké časy t z konkrétneho intervalu I . Potom stochastickým procesom nazývame systém takýchto premenných $X(t), t \in I$. Každý takýto proces má význačnú vlastnosť, je Markovovský. Je to vlastnosť, ktorá hovorí, že budúca hodnota (napr. cena akcie) náhodnej premennej

závisí len od poslednej hodnoty, nie však uz predchádzajúcej "histórie", všetky informácie sú obsiahnuté v súčasne hodnote, nepotrebujeme poznať všetky doterajšie hodnoty. Matematicky zapísané v reči podmienených pravdepodobností

$$P(X(t) < x | X(s)) = P(X(t) < x | X(s), X(u)) \text{ kde } u \leq s$$

Teraz môžeme zdefinovať *Brownov pohyb* [9][10]. Je to systém náhodných premenných v zmysle vyššej definície a značenia, pre ktorý platí

- Jednotlivé prírastky $X(t + \Delta t) - X(t)$ sú normálne rozdelené so strednou hodnotou $\mu\Delta t$ a varianciou $\sigma^2\Delta t$
- pre ľubovoľné delenie intervalu $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ sú prírastky definované ako $X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé náhodne premenné s rozdelením definovaným v predchádzajúcom bode
- $X(0) = 0$

Wienerov proces, ozn. $W(t)$, je taký špeciálny prípad Brownovho pohybu, ktorého parametre sú $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ a pre jeho prírastky platí: $dW = Z\sqrt{dt}$ a je Z normálne rozdelená náhodná premenná $N(0, 1)$. Tento pojem nám teraz umožní pomenovať matematicky to, s čím budeme často pracovať - *stochastickú diferenciálnu rovnicu*

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t)$$

ktorá popisuje dynamiku prírastkov nejakej premennej (môže ňou byť cena akcie), kde $W(t)$ je zdefinovaný Wienerov proces. Z tejto rovnice budeme vychádzať ako zo základnej pre oceňovanie derivátov či simuláciu ceny akcií, ak berieme $S(t)$ ako cenu akcie v čase t potom

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

popisuje dynamiku vývoja ceny aktíva opísaného geometrickým Brownovým pohybom. Z čoho sa dostávame k zdefinovaniu tzv. geometrickej verzie Brownovho pohybu. Majme Brownov pohyb $X(t)$ v zmysle vyššej definície, nech $y_0 \in \mathfrak{R}^+$, potom proces $Y(t), t \geq 0$

$$Y(t) = y_0 e^{X(t)}, t \geq 0$$

sa nazýva *geometrický Brownov pohyb* [9][10]. O premennej, ktorá sa riadi týmto procesom budeme hovoriť, že má lognormálne rozdelenie.

2.2 Opcie

Na finančných trhoch sú obchodované rôzne typy opcií, ktoré sú derivátmi podkladových aktív, slúžia hlavne na zaisťovanie portfólii, tvorbu stratégií, ale samozrejme aj na špekulácie. Rozlišujú sa rôznym typom výplatnej funkcie či počtom derivátov, z ktorých sú odvodené. Tu je niekoľko najpoužívanejších, ktoré budú v tejto práci hlavnou oblasťou simulácii a oceňovania derivátov.

Európske opcie: Sú to najjednoduchšie opcie, dávajú majiteľovi právo, ale nie povinnosť predať resp. kúpiť aktívum v stanovenom čase v budúcnosti za vopred stanovenú expiračnú cenu K . Pre potreby simulácii Monte Carlo nás bude zaujímať pravdepodobnostné rozloženie ceny $S(T)$ v terminálnom čase, nie však v časom počas celej platnosti opcie

Výplatná funkcia je jednoduchá pre call opciu $V = (S(T) - K)^+$ resp. pre put opciu $V = (K - S(T))^+$. Ich oceňovanie je pomerne jednoduché, existujú pre ne explicitné vzorce, ktoré sú riešením Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice(2.11), odvodenie nájdeme v[10]

$$V_{call}(S_0, t) = S_0 \Phi(d1) - K e^{-rT} \Phi(d2), V_{put}(S_0, t) = K e^{-rT} \Phi(-d2) - S_0 \Phi(-d1) \quad (2.1)$$

kde Φ je distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia, S_0 je počiatková cena, K je expiračná cena, T je terminálny čas, r je bezriziková úroková miera a

$$d1 = \frac{(r + \sigma^2/2)T + \ln(S_0/K)}{\sigma\sqrt{T}}, d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

okrem toho existuje viacero ďalších numerických schém. Tento typ opcií svojou jednoduchou štruktúrou je vhodný pre pochopenie hlbšej podstaty oceňovania derivátov a tiež rôznych vlastností simulácii Monte Carlo. Viac, vrátane numerických simulácií a porovnaní s analytickým riešením môžeme nájsť v kapitole 5.1 .

Od cesty závislé opcie: Z názvu vidíme, že to sú opcie, ktoré istým dopredu definovaným spôsobom budú závisieť na hodnotách podkladového aktíva počas celej doby $[0, T]$ platnosti opcie.

Medzi zástupcov tejto kategórie patria bariérové opcie, ázijské opcie, look-back opcie a ďalšie. Z hľadiska použitia metódy Monte Carlo oproti európskym opciám nastáva významná zmena, a teda zaujíma nás pravdepodobnostné rozloženie ceny podkladového aktíva nielen v čase $S(T)$, ale aj vo všetkých časoch na intervale $[0, T]$ resp. v daných bodoch delenia tohoto intervalu. Priblížim aspoň niektoré z týchto opcií.

Bariérové opcie[9]- sú zvyčajne charakterizované funkciami, ktoré definujú akúsi bariéru, ktorú keď podkladové aktívum prekročí, tak opcia v momente stráca svoju hodnotu resp. vstúpi v platnosť. Opcie sa delia na down/up podľa toho, či bariéru prekročili zdola resp. zhora a in/out podľa toho, či prekročením bariéry vstúpili v platnosť resp. stratili platnosť.

Za bariéru môže byť zvolená konštanta alebo aj funkcia, okrem toho môžeme definovať dolnú aj hornú bariéru súčasne. Niekedy sa zvykne vyplácať aj tzv. rabat, čo je suma, ktorú obdrží majiteľ opcie od vypisovateľa v prípade, že opcia predčasne vyprší (dosiahnutím bariéry). Jednou možnosťou výpočtu je spojená aproximácia v tvare

$$C_{down-out}^{call} = C_{BS}^{call} - (C_{down-in}^{call} | B \leq K) \quad (2.2)$$

kde $(C_{down-in}^{call} | B \leq K) = S e^{-DT} \left(\frac{B}{S}\right)^{2m} \Phi(y) - K e^{-rT} \left(\frac{B}{S}\right)^{2m-2} \Phi(y - \sigma\sqrt{T})$ a

$$m = \frac{r-D+0.5\sigma^2}{\sigma^2}, \quad y = \frac{\ln(B^2/SK)}{\sigma\sqrt{T}} + m\sigma\sqrt{T}$$

kde Φ je distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia a B je hodnota bariéry, K je expiračná cena, T je expiračný čas, r bezriziková úroková miera a C_{BS} je cena

európskej opcie zo vzťahu 2.1.

Ázijské opcie[6]: tento typ je charakteristický tým, že sú vyplácané v čase T rovnako ako európske opcie, avšak expiračná cena závisí na priemere (bude nás zaujímať aritmetický) ceny podkladového aktíva počas celej doby platnosti opcie, teda

$$V(S, A, T) = \max(S - A, 0) \text{ kde } A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i} \quad (2.3)$$

resp. iný typ

$$V(S, A, T) = \max(A - K, 0) \quad (2.4)$$

problém oceňovania ceny ázijskej opcie sa dá vyjadriť riešením parciálnej diferenciálnej rovnice viac k tomuto problému nájdeme napríklad v [9] a na riešenie je možné použiť metódu predstavenú u Večeř[20]

Simulácie a numerické výsledky oceňovania týchto typov opcií nájdeme v kapitole 5.2(ázijské opcie) resp. 5.3(bariérové opcie)

Spread opcia. Opcia na dve podkladové aktíva, výplatná funkcia je závislá od rozdielu hodnoty týchto aktív v terminálnom čase, tj. $C_{call} = \max((S_1(T) - S_2(T)) - K)$ resp. $C_{put} = \max(K - (S_1(T) - S_2(T)))$.

Existuje analytická aproximácia ceny tohoto derivátu, tvz. Kirkova aproximácia, má nasledovný tvar

$$C_{spread_{call}} = (S_2(0) + K)(e^{-rT}[S_A \cdot \Phi(d_1) - \Phi(d_2)]) \quad (2.5)$$

$$C_{spread_{put}} = (S_1(0) + K)(e^{-rT}[\Phi(-d_2) - S_A \Phi(-d_1)]) \quad (2.6)$$

$$S_A = \frac{S_1(0)}{S_2(0) + K}, \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + [\sigma_2 \frac{S_2(0)}{S_2(0) + K}]^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \frac{S_2}{S_2 + K}}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_A) + 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

kde $S_1(0), S_2(0)$ sú začiatkové hodnoty ceny podkladových aktív, K je expiračná cena, ρ je korelácia podkladových aktív, σ_1, σ_2 sú volatilitity aktív, T je čas expirácie, r bezriziková úroková miera a Φ je distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia.

Jedným z ďalších typov opcií, ktoré majú viac podkladových aktív sa nazývajú **Koškové opcie** a predstavujú širokú triedu opcií, tj. môžeme mať košík európskych či ázijských opcií. Sú to v podstate opcie na indexy či portfólia pozostávajúce z n rôznych akcií, špecifické tým, že potrebujeme vedieť koreláciu daných aktív. Výplatná funkcia môže mať tvar (pre európsky typ) $C_{call} = \max(S_1(T) + S_2(T) + \dots + S_n(T) - K)$.

Americké opcie[9][5]: sú jednoznačne najviac obchodovaným derivátnym artiklom. Uvádza sa, že viac ako 95% kontraktov je amerického typu. Od iných skôr spomínaných opcií sa líšia tým, že poskytujú právo nie povinnosť predať alebo kúpiť dané aktívum za dohodnutú expiračnú cenu K , kedykoľvek počas jej platnosti na intervale $[0, T]$. Už na prvý pohľad je evidentné, že oceniť takýto typ kontraktu bude o poznanie zložitejšie ako u ostatných typov opcií. Vyplyva to aj z toho, že táto opcia poskytuje vlastníkovi omnoho väčšiu flexibilitu ako napríklad európska, kde si opciu len kúpim a čakám, čo sa stane, u americkým mám možnosť zasiahnuť. Jej výplata je rovnakého charakteru ako európskych

opcií, pričom americké sú logicky drahšie, teda

$$\begin{aligned} V_{americke}(S, t) &\geq V_{europske}(S, t) \\ \text{výplata pre call : } V_{americke}(S, t) &\geq V_{americke}(S, T) = \max(0, S - K) \\ \text{výplata pre put : } V_{americke}(S, t) &\geq V_{americke}(S, T) = \max(0, K - S) \end{aligned}$$

S riešením týchto opcií to už nie je také jednoduché, existuje množstvo schém, ktoré umožňujú prevod problému na numerické riešenie, analyticky ich riešiť nedokážeme. Zaujímá nás ako si s riešením týchto opcií poradia Monte Carlo simulácie. Existuje niekoľko Monte Carlo algoritmov, ktoré sú schopné oceňiť americké opcie, niektoré z nich sme rozobrali a numericky porovnali jednu z nich s inými numerickými metódami v kapitole 5.6.

2.3 Modely úrokovej miery

Podkladovým aktívom pre deriváty úrokovej miery je dlhopis P . Hlavnou úlohou je nájsť časovú štruktúru úrokových mier $R(T_0, T)$ ako funkciu času expirácie dlhopisu. Cena pre typický dlhopis je daná

$$P(T_0, T) = e^{-R(T_0, T)(T-T_0)} \text{ potom } R(T_0, T) = -\frac{1}{T-T_0} \ln P(T_0, T)$$

s T_0 označujúcim dnešný čas. Budú nás zaujímať kontrakty s názvom forwardové úrokové miery[9][10], ktoré predstavujú hodnotu úrokovej miery medzi dvoma budúcimi časovými obdobiami. Myšlienka kontraktu je jednoduchá, je to dohoda že v čase t_1 kúpime dlhopis za cenu K s časom vypršania v čase t_2 . Pre cenu takéhoto dlhopisu platí

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u)du\right)$$

Z čoho vyplýva, že ak poznáme tvar forwardovej krivky, budeme poznať aj cenu dlhopisu v každom čase.

Na modelovanie dynamiky vývoja týchto úrokových mier existuje viacero modelov, ktoré opäť vychádzajú z myšlienok stochastického kalkulu. Forwardové miery sú ľahšie modelovateľné z matematického hľadiska, preto sa modely vzťahujú na ne, ale vieme, že sú ekvivalentné (v zmysle, že ich vieme navzájom matematicky previesť jednu na druhú) s časovou štruktúrou úrokových mier R . Najvšeobecnejší a najpoužívanejší rámec pre tieto modely je *Heath-Jarrow-Morton model*[9][10]. Časový priebeh úrokových mier je v nich daný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t)$$

Teda platia pre ňu vlastnosti ako pre stochastickú diferenciálnu rovnicu dynamiky vývoja akcie. Konkrétny model dostaneme, keď určíme konkrétny tvar pre volatilitu, ktorá môže byť pre každý model rôzne definovaná. Integrovaním dostaneme

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \mu(u, T)du + \int_0^t \sigma(u, T)dW(u)$$

po dosadení a nahradení driftu výrazom $\mu = \sigma(t, T)(\alpha_t - \Sigma(t, T))$, kde α je trhová cena rizika (v riziko neutrálnom svete je rovná 0) a

$$\Sigma(t, T) = - \int_t^T \sigma(t, u) du$$

potom pre cenu dlhopisu dostaneme

$$P(t, T) = \exp\left(- \int_t^T f(t, u) du\right)$$

Vďaka tomu, že cena dlhopisu je urcena pri martingalovej miere, vieme ho simulovať pomocou Brownovho pohybu a vypoctať celú štruktúru úrokových mier.

Dalšim typom modelu úrokových mier sú modely jednoduchých úrokových mier, tzv. LIBOR modely, ktorým sa špeciálne venujeme v kapitole 6, a ktoré sú vyznacne diskrétnym charakterom narozdiel oproti vyššie spomínaným spojitym prípadom. Tento prípad sa zdá byť prirodzenejší v spojitosti s Monte Carlo simuláciami, ktoré simulujú pohyb v zvolených časových uzloch, čo presne zodpovedá LIBOR modelom, pre ktoré sú rovnako definovane vopred zvolenými terminálnymi časmi. Úlohou Monte Carlo simulácii je generovať forwardovú štruktúru úrokových LIBOR mier, čo sa dá následne využiť na počítanie derivátov úrokových mier.

2.4 Bezrizikové oceňovanie

Majme trh s r aktívami, potom ich mozeme popisať stochastickými diferenciálnymi rovnicami

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i(S(t), t)dt + \sigma_i(S(t), t)^\top dW(t), \quad i = 1, \dots, r \quad (2.7)$$

kde W je r -rozmeny Brownov pohyb, σ_i má hodnoty z \mathfrak{R}^r , μ_i je skalár, μ a σ sú deterministické funkcie ceny $S(t) = (S_1(t), \dots, S_r(t))^\top$ v čase t . Ďalej treba definovať kovarianciu výnosov aktív

$$\Sigma_{ij} = \sigma_i^\top \sigma_j, \quad i, j = 1, \dots, r$$

Budeme teraz zostavovať obchodnú stratégiu, a na jej popis potrebujeme mať zedefinovane portfólio, ktoré bude hovoriť, koľko ktorých aktív máme v drzani v danom čase. Teda majme portfólio $P \in \mathfrak{R}^r$, kde P_i je mnozštvo i -teho aktíva v portfolii, jeho hodnota v danom čase t bude

$$P_1 S_1(t) + \dots + P_r S_r(t)$$

Obchodná stratégia je potom stochastický proces $P(t)$. V súlade s definíciou markovovskym procesom, rozhodnutia robíme len na základe informácie v čase t , nie jej predchádzajúcim časom, aby sme mali dobre definovanú merateľnost. Podľa obchodnej stratégie zafixujeme portfólio na hodnote $P(t)$ pre časový interval $(t, t + h)$, potom zmena hodnoty portfólia počas tohoto časového intervalu , kde h je nejaká malá veličina, vieme zapisať

ako: $P^\top(t)[S(t+h) - S(t)]$, čo vieme ďalej ľahko vyjadriť ako stochastický integrál pri danej pravdepodobnostnej miere

$$\int_0^t P(x)^\top dS(x)$$

ktorý pri spojitom obchodovaní predstavuje náš zisk zo stratégie. Samozrejme, toto platí pri istým dosť nereálnych podmienkach obchodovania, ale na modelovanie to zatiaľ stačí.

Aby platila podmienka samofinancovateľnosti[5][10] musí platiť pre všetky t nasledovná rovnosť

$$P(t)^\top S(t) - P(0)^\top S(0) = \int_0^t P(x)^\top dS(x) \quad (2.8)$$

Interpretácia je zrejímavá, na ľavej strane máme zmenu portfólia od jeho počiatočného stavu v čase 0 až po čas t s tým, že sme dodržiavali zadanú stratégiu, a pravá strana je ich akýmsi súčtom, teda našim ziskom.

Teraz do úvah pripojíme nejaký derivát vypísaný na aktíva vyššie, ktorý má výplatnú funkciu závislú na hodnote akcie v koncovom čase: $f(S(T))$ (Teda v tomto prípade nejaká európska opcia). Potom hodnota tohoto derivátu v čase t je daná nejakou funkciou $V(S(t), t)$, ktorá závisí v každom čase t na hodnote podkladového aktíva $S(t)$. Keď navyše prijmeme predpoklad, že je to spojitá funkcia, využitím *Itóovej lemy* [10][9] dostaneme

$$V(S(t), t) = V(S(0), 0) + \sum_{i=1}^r \int_0^t \frac{\partial V(S(x), x)}{\partial S_i} dS_i(x) + \int_0^t \left[\frac{\partial V(S(x), x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^r S_i(x) S_j(x) \Sigma_{ij}(S(x), x) \frac{\partial^2 V(S(x), x)}{\partial S_i \partial S_j} \right] dx$$

rovnako ak môžeme dosiahnuť $V(S(t), t)$ z počiatočnej hodnoty pomocou samofinancovanej stratégie, potom dostávame

$$V(S(t), t) = V(S(0), 0) + \sum_{i=1}^r \int_0^t P_i(x) dS_i(x)$$

posledné dve rovnice sú splnené vtedy ak

$$P_i(x) = \frac{\partial V(S(x), x)}{\partial S_i}, \quad \text{pre } i=1, \dots, r$$

a

$$\frac{\partial V(S, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^r \Sigma_{ij}(S, x) S_i S_j \frac{\partial^2 V(S, x)}{\partial S_i \partial S_j} = 0 \quad (2.9)$$

navyše platí $V(S(t), t) = P^\top(t)S(t)$ dostávame

$$V(S, t) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial V(S, t)}{\partial S_i} S_i \quad (2.10)$$

Táto posledná formulka má ústredný význam, hovorí sa jej aj parameter delta, respektíve stratégia delta hedžingu, a v preklade nám hovorí, koľko podkladového aktíva musíme

držať v portfóliu, keď držíme daný počet derivátov. A nakoniec v koncovom čase musí platiť

$$V(S, T) = f(S)$$

Táto konštrukcia dáva návod ako oceniť deriváty, spĺňa podmienku samofinancovateľnosti a dodržiava obchodnú stratégiu definovanú cez (2.8). Potom musíme predať tento derivát za cenu $V(S(0), 0)$ v čase 0 pričom obdržíme žiadanú výplatu $f(S(T), T) = V(S(T), T)$ v čase T , pričom nemáme žiadne riziko z tejto činnosti. Ak by predsalen niekto predal derivát v čase 0 za inú cenu, vyššiu či nižšiu, vznikla by arbitrážna príležitosť a niekto by ju na trhu veľmi rýchlo využil a zarobil bez rizika.

Musíme si všimnúť jednu veľmi dôležitú vec, konkrétne parameter μ , ktorý vystupuje v základnej rovnici (2.7). Čitateľ si mohol všimnúť, že tento parameter nevystupuje ani v predchádzajúcej kapitole, kde boli ukázané prvé príklady použitia Monte Carlo vo financiách a takisto nevystupuje v riešeniach rovníc (2.10)(2.11). Tento parameter, nazývaný drift, zodpovedá akejsi rýchlosti návratnosti akcie prípadne očakávanému výnosu. V reálnom svete platí vzťah, že čím vyšší očakáva investor výnos, tým musí prijať vyššiu mieru rizika, v tomto prípade σ . To, že tento parameter vypadáva je odôvodnené tým, že drift je zahrnutý už v podkladovom aktíve, na ktorom závisí derivát. Okrem toho to implikuje fakt, že pri oceňovaní derivátov nás nezaujímajú investorov vzťah k riziku.

Pri parametri μ ešte ostaneme, pretože by mohol byť problematický, keby sme chceli na celú túto schému aplikovať metódu Monte Carlo. Ak by sme v modeli dospeli k takejto pomerne jednoduchej a jednoznačnej rovnici, máme ľahkú úlohu, avšak ak by výplatná funkcia a cena závisela na ceste ako u mnohých opcií, takto jednoducho problém nevyriešime. Často nenájdem ani analytické riešenie a rovnaké tvrdenie platí ak derivát je odvodený z viacerých aktív. Toho sú faktory, ktoré veľmi komplikujú riešenie. V takýchto situáciách sa otvára priestor pre Monte Carlo simulácie. Aby sme ich však mohli aplikovať musíme vyriešiť jeden kľúčový problém, ktorý sa týka pravdepodobnostnej miery, na ktorej počítame ceny derivátov pomocou Monte Carlo simulácie. Budeme sa snažiť v jednoduchosť ukázať v čom spočíva problém a jeho riešenie, presnejšie matematické odvodenia sa dajú nájsť v [5][10].

Vo forme ako máme zapísanú stochastickú diferenciálnu rovnicu, jej dynamiku popisuje pravdepodobnostná miera M_r (snaží sa popísať reálne správanie, reálna miera). My budeme chcieť na naše simulácie použiť vhodnejšiu mieru, takzvanú bezrizikovú M_{rn} .

Na toto potrebujeme zdefinovať stochastický diskontný faktor. Je to nejaký vždy kladný proces $Z(t)$, v jeho reči bude cena derivátu očakávaná hodnota v terminálnom čase $V(T)$, ktorú diskontujeme faktorom $\frac{Z(t)}{Z(T)}$ a v čase 0 má hodnotu

$$V(0) = E_r \left[\frac{V(T)}{Z(T)} \right]$$

čo môžeme interpretovať tak, že terminálna hodnota $V(T)$ určuje hodnotu $V(0)$ pomocou stochastického diskontovania. Samozrejme platí, že výplatu nedostaneme skôr ako v čase T . Fundamentálna veta financií nám však hovorí, a dá sa to samozrejme dokázať, že nemožnosť arbitráže implikuje existenciu stochastického diskontného faktora, čo je pre ďalšie potreby pri používaní Monte Carlo simulácii veľmi dôležité, pretože nás priamo navádza na myšlienky riziko-neutrálneho oceňovania [5][10][9].

Dostávame sa teda k spomínanej riziko-neutrálnej miere, pod ktorou budeme oceňovať prostredníctvom Monte Carlo metód. Táto miera M_{rn} je ekvivalentná k spomenutej reálnej pravdepodobnostnej miere M_r . Otázka, čo znamená, že je ekvivalentná, je čisto technická záležitosť, použitím nástrojov ako martingal[10], adaptované procesy[10] či Girsanovova veta[10], sa to dá ukázať a matematicky vysvetliť, pre potreby tejto práce to nie je nutné, podrobnejšie to nájdeme rozobraté v [10][5].

A práve konkrétnu transformáciu, zobrazuje rovnica, ktorá je kľúčová pre Monte Carlo metódy

$$V(0) = E_{rn} \left[\frac{V(T)}{B(T)} \right] = e^{-rT} E_{rn}[V(T)]$$

potom rovnica dynamiky vývoja ceny aktíva na trhu prejde na tvar

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = rdt + \sigma_i(S(t), t)^T dW(t)$$

kde $B(t) = B(0)e^{rt}$ označuje aktívum zhodnocované bezrizikovou úrokovou mierou r (napríklad dlhopis). Čo to v praktickom zmysle znamená? Asi toľko, že diskontovať cenu musíme a cez stochastický diskontný faktor by to šlo veľmi ťažko a numericky to implementovať by bolo veľmi problematické. Našťastie matematicky vieme previesť túto "reálnu" mieru na bezrizikovú aparátom finančnej matematiky.

Pri oceňovaní derivátov majú diskontované ceny aktív teda dôležitú technickú vlastnosť, sú to martingaly, pričom táto vlastnosť sa zaisťuje predovšetkým cez vhodnú voľbu driftu (teda môžeme ho napríklad nahradiť bezrizikovou úrokovou mierou r pri oceňovaní akciových derivátov). Keďže Monte Carlo simulácie počítajú očakávanú hodnotu nejakej veličiny, tento prevod mier nám umožní počítať cenu derivátu ako $E_{rn}[e^{-rT}f(S(T))]$, kde E_{rn} znamená očakávanie pri bezrizikovej miere M_{rn} . Za účelom získania tejto hodnoty simulujeme cestu podkladového aktíva na časovom intervale $[0, T]$ pomocou riziko neutrálnej dynamiky, teda pod riziko-neutrálnou mierou. V každej simulácii potom cenu diskontujeme do času 0 teda $:e^{-rT}f(S(T))$. Nakoniec priemerovaním obrovského množstva diskontovaných cien dostaneme danú očakávanú hodnotu ceny derivátu v čase 0, čiže ceny, za ktorú by sme mali derivát predávať resp. kupovať.

2.5 Black Scholes model

V skratke si povieme niečo o najznámejšom modeli finančnej matematiky, Black-Scholesovom modeli[10][9], ktorý sa uvádza v každej publikácii, ktorá sa dotýka finančnej matematiky, a to pravdepodobne z toho dôvodu, že sa na ňom názorne a jednoducho dajú ukázať myšlienky, na ktorých stojí teória, prípadne je tento model odrazový mostík ku komplikovanejším problémom.

Majme portfólio zložené z dvoch aktív, akcie a dlhopisu. Akcia sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou a nesie riziko

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t)$$

W je Brownov pohyb, ďalej máme dlhopis zhodnocovaný bezrizikovou mierou r

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = r dt$$

riešením tejto rovnice je $B(t) = B(0)e^{rt}$. Ak uvažujeme klasickú európsku call opciu s výplatom $f(S(T)) = (S(T) - K)^+$ v terminálnom čase T s expiračnou cenou K , spolu s terminálnou podmienkou vieme určiť na základe rovníc (2.9)(2.10) cenu derivátu V . Dalšími krokmi (celé odvodenie sa dá nájsť napríklad v [10][9]) by sme dospeli k finálnej parciálnej diferenciálnej rovnici pre európsku call opciu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (2.11)$$

s terminálnou podmienkou $V(S, T) = \max(S - E, 0)$, pričom pre tento model poznáme aj explicitné vzorce(2.1).

Keď budeme pracovať pod riziko neutrálnou mierou M_{r_n} , cenu akcie v modeli môžeme vyjadriť ako

$$S(T) = S(0)e^{([r - \frac{1}{2}\sigma^2]T + \sigma W(T))} \quad (2.12)$$

Aktíva rastú v čase t podľa dynamiky $B(t) = e^{rt}$. Potom cena opcie v čase 0 implikuje formulu : $E[e^{-rT}(S(T) - K)^+]$. Tento tvar je dôležitý pre Monte Carlo simulácie, pretože numerická schéma bude vychádzať z daného tvaru riešenia(2.12).

Kapitola 3

Generovanie náhodných čísel a procesov

Ústredným znakom metód Monte Carlo je generovania náhodných čísel resp. spôsob ich generovania. Ako sme spomenuli pre prípad ceny akcie, jej simulovanie zjednodušené prebieha tak, že vygenerujeme obrovské množstvo náhodných čísel, ktoré predstavujú akési cesty, ktorými cena akcie môže ísť. Samozrejme, toto je zjednodušené povedané a nasledovať by mala otázka, ako numericky generovať tieto čísla aby mali výpovednú hodnotu. Výpočtové programy ako napr. matlab ponúkajú svoje generátory náhodných čísel rôzneho druhu, o to ako tieto generátory fungujú sa už väčšinou veľmi nezaujíname. V tejto kapitole si ukážeme základnú schému, na ktorej sú založené generátory generujúce čísla z rovnomerného (uniformného) rozdelenia, pozrieme sa na niektoré algoritmy generujúce náhodné čísla či náhodné vektory z normálneho rozdelenia, ktoré nás v súvislosti s financiami najviac zaujímajú. Predstavíme si aj algoritmy, ktoré generujú náhodné premenné z viacrozmerného normálneho rozdelenia, čo je veľmi užitočné, keby sme chceli simulovať vývoj viacerých aktív na trhu súčasne, teda akési portfólio akcií. V neposlednej rade si ukážeme ako vygenerovať resp. simulovať Brownov pohyb pomocou náhodných čísel.

3.1 Lineárne kongruentné generátory

Pod týmto názvom sa najčastejšie rozumie rekurentný predpis všeobecného lineárneho kongruentného generátora [1][3][7][5][6] náhodných čísel

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= (ax_i + c) \pmod m \\r_{i+1} &= x_{i+1}/m\end{aligned}$$

kde čísla a, c, m sú číselné konštanty, m je funkcia modulo (celý zvyšok po delení číslom m), ktorých voľba je rozhodujúca pre kvalitu generovania náhodných čísel, x sú dané náhodné čísla a r sú náhodné čísla transformované na jednotkový interval (teda generátor z rovnomerného rozdelenia $R(0, 1)$). Algoritmus je lineárny, teda je pochopiteľné, že má pomerne vysokú rýchlosť a navyše existuje viacero modifikácií tohoto základného algoritmu.

Dôležitá vec, nad ktorou sa treba pozastaviť je slovo "náhodný", pretože všetky tieto generátory, ktoré sa používajú, nie sú náhodné v pravom slova zmysle definícií teórie

pravdepodobnosti, často sú preto označované ako pseudo-náhodné generátory. Už z tvaru týchto generátorov, teda je to akýsi rekurentný predpis, sa dá vytušiť, že po sebe nasledujúce čísla x_{n-1} a x_n nie sú nezávislé a ani sekvencia takto vygenerovaných čísel nie je náhodná. Avšak vhodnou voľbou parametrov, prípadne inými vylepšeniami vieme spraviť numericky takú sekvenciu náhodných čísel, ktorá je takmer totožná s teoretickou sekvenciou náhodných čísel z definície resp. sa k nej veľmi približuje. Avšak faktom ostáva, že algoritmus po zvolení náhodného začiatočného čísla x_0 pracuje ďalej deterministicky. Možnosti ako overiť, že algoritmus vygeneroval čísla, ktoré naozaj spĺňajú požadované vlastnosti, sú štatistické testy.

Potrebujeme teda zostojiť algoritmus s nasledujúcimi vlastnosťami: a) čísla r_i sú rovnomerne rozdelené v intervale $(0,1)$, následne si toto rozdelenie vieme transformovať do ľubovoľného iného rozdelenia, b) čísla r_i sú vzájomne nezávislé, teda nie je medzi nimi žiadna korelácia, a nie je možné predpovedať nasledovnú hodnotu z predchádzajúcich, teda nájsť vzor generovania.

Nasledujúca veta hovorí ako vhodne zvoliť parametre lineárneho kongruentného generátora aby sme dosiahli plnú periódu predtým ako sa zopakuje sekvencia, keďže dlhšia sekvencia predstavuje "lepšiu" náhodnosť.

Veta: *Všeobecný(zmiešaný) kongruentný generátor má plnú periódu práve vtedy keď*

- 1) c a m sú nesúdeliteľné (jediný spoločný deliteľ je 1)
- 2) každé prvočíslo, ktoré delí m delí aj $a - 1$
- 3) $a - 1$ je deliteľné číslom 4 ak aj m je deliteľné číslom 4

Na základe týchto faktov bolo navrhnutých viacero modelov, ktorá sa líšia pochopiteľne hodnotami parametrov, uvádzame prehľad [1][6][5][7] niektorých z nich.

- $m = 2^{31} - 1$, $a = 16807$, $c=0$, Lewis, Goldman, Miller
- $m = 2^{31} - 1$, $a = 742938285$, $c=0$, Fishman, Moore
- $m = 2147483399$, $a = 40692$, $c=0$, L'Ecuyer

Hlavným zameraním je mať čo najdlhšiu periódu, v ktorej sa čísla neopakujú, dĺžka takejto periódy je $m - 1$. Je očividné, že čím dlhšia perióda, tým akoby stále lepšie numericky aproximujeme rovnomerné rozdelenie.

Môžeme si vygenerovať jednoduchú sekvenciu s parametrami $a = 7$, $m = 13$, $c = 0$ a vyzerať nasledovne

$$1, 7, 10, 5, 9, 11, 12, 6, 3, 8, 4, 2, 1, 7, ..$$

teda po dvanástich číslach sa opakuje, čo je maximálna perióda ($m - 1$), keby sme zvolili parameter $m = 12$ dostaneme

$$1, 7, 1, 7, ..$$

čiže sme dostali naopak najkratšiu možnú periódu. Hodnota parametra je teda kľúčová.

Podobný postup môžeme aplikovať aj pre viacrozmernejší prípad, čiže budeme generovať k -dimenzionálny vektor náhodných čísel X . Označme A maticu s náhodnými číslami z

intervalu $0, 1, \dots, m-1$ rozmeru $k \times k$, a za predpokladu, že máme vstupný vektor X_0 , maticový kongruentný generátor definujeme ako

$$X_n = (AX_{n-1} + C) \bmod m$$

Na záver tohoto odseku, treba povedať, že všetky výpočtové programovacie jazyky ako napríklad matlab majú zabudované svoje generátory, ktoré sú založené na podobných princípoch. Avšak na zabezpečenie predovšetkých väčšej vierohodnosti výpočtov, sú naprogramované s využitím pokročilejších techník ako napríklad tvz. *zamiešavanie*[8][7], ktoré spočíva v tom, že sa vygenerujú dve nezávislé sekvencie náhodných čísel a potom sa konkrétnym algoritmom premiešavajú. Výsledkom je omnoho dlhšia perióda bez opakovania a tým dá sa povedať väčšia náhodnosť. V matlabe na generovanie náhodných čísel z rovnomerného rozdelenia na intervale $(0,1)$ slúži funkcia *rand*.

3.2 Generovanie z normálneho rozdelenia

Predtým ako sa pustíme do konkrétnych algoritmov na generovanie náhodných čísel z normálneho rozdelenia je potrebné povedať o všeobecných metódach generovania z ľubovoľného rozdelenia.

Jednou možnosťou je *metóda inverznej transformácie*[7][5][8][1]. Ak teda uvažujeme distribučnú funkciu F nejakého rozdelenia (exponenciálneho, normálneho, gamma, atď.) úlohou je generovať náhodnú premennú X pre ktorú platí $P(X \leq x) = F(x)$, kde využitím fungujúceho generátora z rovnomerného rozdelenia platí

$$X = F^{-1}(U), \quad U \sim R(0, 1) \quad (3.1)$$

Toto pravidlo sa dá ľahko uplatniť na viaceré pravdepodobnostné rozdelenia, a má svoje výhody pre špeciálne typy úloh a rozdelenia ako napríklad exponenciálne. Všeobecne však nie je najrýchlejšia a vždy vhodná, širšie upltnenie nachádza druhá metóda: *metóda Acceptance-Rejection*[1][6][5][7] (Priятие-Zamietnutie).

Táto metóda je širšie uplatniteľná a jej myšlienka je veľmi jednoduchá. Vygeneruje náhodnú vzorku z jednoduchého rozdelenia (rovnomerného), a následne ho presne zadefinovaných mechanizmom zamieťa resp. prijíma vzhľadom na požadované pravdepodobnostné rozdelenie. Majme cieľové pravdepodobnostné rozdelenie s hustotou f definované na množine \mathfrak{R} a druhé rozdelenie s hustotou g na rovnakej množine, z ktorého vieme generovať náhodné čísla. Budeme sa riadiť predpisom

$$f(x) \leq cg(x), \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

c je konštanta. Postup je taký, že vygenerujeme číslo X z g a akceptačné kritérium bude hodnota pravdepodobnosti $f(X)/cg(X)$. Pre premennú U z rovnomerného rozdelenia $R(0, 1)$ teda máme pravidlo: prijímeme číslo X ak

$$U \leq f(X)/cg(X)$$

Keď je X zamietnuté postup opakujeme až kritérium prijme danú hodnotu X , potom táto hodnota bude želané náhodné číslo z rozdelenia s hustotou f . Ku konkrétnym algoritmom s touto schémou sa dostaneme ďalej v tejto sekcii.

Predtým si ešte potrebujeme ujasniť niektoré dôležité vlastnosti normálneho rozdelenia. Jeho rozdelenie so strednou hodnotou μ a disperziou σ^2 je dané hustotou

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

a kumulatívnu distribučnou funkciou

$$\Phi(x, \mu, \sigma) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{u^2/2} du$$

Teraz prichádza dôležitá vlastnosť pre konštrukciu simulácii. Ak je náhodná premenná Z z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou 0 a disperziou 1, tj. $Z \sim N(0, 1)$ potom platí

$$\mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Z tohto vyplýva, že stačí poznať vhodné algoritmy na generovanie premennej $Z \sim N(0, 1)$ a uvedenou transformáciou získame náhodnú premennú z normálneho rozdelenia s ľubovoľne zvolenými parametrami.

Pre metódy Monte Carlo sú zaujímavé viacrozmerné prípady, napríklad simulácia portfólia zloženého z viacerých akcií, čiže prípady keď potrebujeme generovať k -rozmerný vektor náhodných čísel. Pre prípad normálneho rozdelenia to znamená poznať k -rozmerný vektor μ a $k \times k$ kovariančnú maticu Σ , teda $N(\mu, \Sigma)$. Hustota má v tomto prípade tvar

$$f(x, \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\right), \quad \forall x \in \mathfrak{R}^k$$

kde $|\Sigma|$ je determinant Σ a zároveň platí, že Σ je symetrická a kladne semidefinitná ($x^\top \Sigma x \geq 0$ pre $\forall x \in \mathfrak{R}^k$).

Dosadením $\mu = 0$ a $\Sigma = I_k$ dostaneme hustotu aj pre viacrozmerné štandardné normálne rozdelenie $N(0, I_k)$.

Potom daný k -rozmerný vektor $X \sim N(\mu, \Sigma)$ má jednotlivé zložky dané rozdelením $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ a $\sigma_i^2 = \Sigma_{ii}$. Zložky i a j vektora X majú kovarianciu danú

$$\text{Cov}[X_i, X_j] = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = \Sigma_{ij} \quad (3.2)$$

a tiež vieme o ich korelácii ρ_{ij} , že platí

$$\rho_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (3.3)$$

resp. iný tvar rovnosti prepísaný do maticového tvaru

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \dots & \rho_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k1} & \dots & \rho_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_k \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

3.2.1 Algoritmus Box-Muller

Tento algoritmus [17][7][5] generuje náhodné čísla z 2-rozmerného štandardného normálneho rozdelenia $N(0, I_2)$. Je pomerne jednoduchý a jeho systém fungovania je založený na nasledujúcich faktoch

- premenná $R = Z_1^2 + Z_2^2$ je exponenciálne rozdelená so strednou hodnotou 2

$$P(R \leq x) = 1 - e^{-x/2}$$

- bod R so súradnicami (Z_1, Z_2) je rovnomerne distribuovaný na kružnici s priemerom \sqrt{R} so stredom v $(0, 0)$.

Postup bude nasledovný. Najprv vygenerujeme R , za týmto účelom využijeme spomínanú metódu *inverznej transformácie*, teda bude platiť: $R = -2 \log(U_1)$, kde $U_1 \sim R(0, 1)$ je z rovnomerného rozdelenia, ktoré vieme generovať. Ďalej potrebujeme vygenerovať náhodný bod na kružnici, čo sa dá spraviť tak, že rovnomerne generujeme uhol na množine $(0, 2\pi)$, čiže : $K = 2\pi U_2$, $U_2 \sim R(0, 1)$. Týmto dostaneme požadovaný bod na kružnici so súradnicami $(Z_1, Z_2) = (\sqrt{R} \cos K, \sqrt{R} \sin K)$. Algoritmus v matlabe môže vyzerať nasledovne

```
function [Z1,Z2]=BoxMuller(n)
U1 = rand(n, 1); U2 = rand(n, 1);
R = -2. * log(U1); K = 2 * pi. * U2;
Z1 = sqrt(R). * cos(K);
Z2 = sqrt(R). * sin(K);
```

Ako príklad výstupu pre $n = 15$ dostávame sekvenciu 15 náhodných čísel zo štandardného normálneho rozdelenia:

```
DATA1=[-0.26535,1.5728,0.86633,-1.0154,0.37656,0.6889,-0.75427,1.0919
,0.62607,0.8183,0.28815,0.21628,-0.32071,-0.10827,0.58895]
```

O normalite vygenerovaných dát sa môžeme presvedčiť štatistickým testom, napríklad v programe R-Gui Shapiro-Wilk testom testujem hypotézu, že dáta sú z normálneho rozdelenia.

Tento algoritmus sa dá zefektívniť, a to konkrétne do podoby navrhutej autormi Marsaglia a Bray[5]. Ich algoritmus znižuje výpočtovú náročnosť tým, že sa vyhýba počítaniu funkcií $\sin(x)$ a $\cos(x)$ a využíva spomínanú schému *acceptance-rejection*, kde generuje čísla (U_1, U_2) uniformne vo štvorci so súradnicami $[-1, 1] \times [-1, 1]$ a následne prijíma také číslo X , pre ktoré platí: $X = U_1^2 + U_2^2 \leq 1$ (akceptačné kritérium). Tým dostávame sekvenciu čísel rovnomerne rozložených na jednotkovom disku. Ďalej analogicky ako v pôvodnom algoritme využívam metódu inverznej transformácie z exponenciálneho rozdelenia a posledným krokom je predelenie súradníc (U_1, U_2) hodnotou \sqrt{X} , čím spravíme transformáciu z jednotkového disku na jednotkový kruh. Kód v matlabe môže mať nasledovný tvar

```
function [Z1,Z2]=MB(n)
U1 = rand(n, 1); U2 = rand(n, 1);
U1 = 2. * U1 - 1; U2 = 2. * U2 - 1;
```



```

X = U1.^2 + U2.^2; I = find(X <= 1);
Y = sqrt(-2.*log(X(I)));
Z1 = U1(I).*Y./sqrt(X(I));
Z2 = U2(I).*Y./sqrt(X(I))

```

Normalitu môžeme preveriť analogicky nejakým štatistickým testom normality dát.

3.2.2 Metóda inverznej transformácie

Tento algoritmus vychádza zo schémy spomínanej na začiatku sekcie (3.1), vracia hodnotu Φ^{-1} , viac na túto tému sa dá nájsť v [1][5][7]. Niekoľko konkrétnych algoritmov môžeme nájsť v [7] a rovnako jeden algoritmus bol navrhnutý autormi Beasley, Springer a Moro [5], ktorý navrhli aproximáciu inverznej distribučnej funkcie normálneho rozdelenia, využitím vlastnosti symetrie normálneho rozdelenia $\Phi^{-1}(1 - u) = -\Phi^{-1}(u)$, čo znamená, že nám stačí pracovať na intervale $[0.5, 1]$ resp. $(0, 0.5]$. Ich aproximácia má nasledovný tvar

$$\Phi^{-1}(u) \approx \frac{\sum_{n=0}^3 a_n (u - 1/2)^{2n+1}}{1 + \sum_{n=0}^3 b_n (u - 1/2)^{2n}}, \quad 0.5 \leq u \leq 0.92$$

pre $u > 0.92$ je presnejšia aproximácia nasledovného tvaru

$$\Phi^{-1}(u) \approx g(u) = \sum_{n=0}^8 c_n [\log(-\log(1 - u))]^n, \quad 0.92 \leq u < 1$$

Môžeme si všimnúť, že sa tu vyskytuje pomerne veľa konštánt, ktoré samozrejme majú svoju presnú hodnotu. V matlabe algoritmus vyzerá nasledovne

```

function x=InverseN(n)

```

```

x=zeros(n,1);

```

```

a0=2.50662823884;a1=-18.61500062529;a2=41.39119773534;a3=-25.44106049637;

```

```

b0=-8.47351093090;b1=23.08336743743;b2=-21.06224101826;b3=3.13082909833;

```

```

c0=0.3374754823;c1=0.976169019;c2=0.160797972;c3=0.027643881;c4=0.00384057;

```

```

c5=0.0003951897;c6=0.00003217679;c7=0.00000288817;c8=0.0000003960315;

```

```

for i = 1 : n

```

```

u = rand(1,1); y = u - 0.5;

```

```

if (abs(y) < 0.42) r = y * y;

```

```

x(i) = y * (((a3 * r + a2) * r + a1) * r + a0) / (((b3 * r + b2) * r + b1) * r + b0) * r + 1);

```

```

else

```

```

if (y > 0) r = 1 - u; r = log(-log(r));

```

```

x(i) = c0 + r * (c1 + r * (c2 + r * (c3 + r * (c4 + r * (c5 + r * (c6 + r * (c7 + r * c8)))))); end

```

```

if (y < 0) r = u; r = log(-log(r));

```

```

x(i) = -1 * (c0 + r * (c1 + r * (c2 + r * (c3 + r * (c4 + r * (c5 + r * (c6 + r * (c7 + r * c8)))))); end

```

```

end

```

```

end

```

3.2.3 Viacrozmerné normálne premenné

Niektoré základné vlastnosti pre viacrozmerné normálne premené boli uvedené na začiatku kapitoly a z nich budeme teraz vychádzať. Máme teda daný k -rozmerný vektor $X \sim N(\mu, \Sigma)$, μ je k -rozmerný vektor, Σ je definovaná prostredníctvom vlastností (3.2) a (3.4).

Pre potreby numerického algoritmu musíme predefinovať rozdelenie $N(\mu, \Sigma)$ všeobecnejším predpisom. Používa sa nasledujúca schéma, v ktorej $X = \mu + AZ$, $Z \sim N(0, I)$ a kde A je ľubovoľná matica, pre ktorú platí $AA^T = \Sigma$. Potom bude platiť, že $X \sim N(\mu, AA^T)$. Toto je vlastnosť, ktorá umožňuje pracovať s maticou Σ nepriamo prostredníctvom matice A . Použiť ju môžeme ako dôsledok vlastnosti viacrozmerného normálneho rozdelenia, konkrétne lineárnej transformačnej vlastnosti.

Využitím metód na generovanie zo štandardného normálneho rozdelenia vieme zostrojiť $Z \sim N(0, I)$ pozostávajúci z nezávislých náhodných premenných Z_1, \dots, Z_k . Z toho vyplýva, že jediné čo potrebujeme pre generovanie premennej X z viacrozmerného normálneho rozdelenia, je nájsť spomínanú maticu A .

Na tento účel bol zostrojený algoritmus, ktorý hľadá maticu A s danými vlastnosťami reprezentujúcu maticu Σ a označuje sa ako Choleskyho faktorizácia.

Riešenie A bude v tvare dolnej trojuholníkovej matice, pretože je to numericky najvýhodnejší tvar, budeme vlastne riešiť nasledovnú sústavu

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu_1 + A_{11}Z_1 \\ X_2 &= \mu_2 + A_{21}Z_1 + A_{22}Z_2 \\ &\vdots \\ X_k &= \mu_k + A_{k1}Z_1 + A_{k2}Z_2 + \dots + A_{kk}Z_k \end{aligned}$$

Pre 2-rozmerný prípad by faktorizácia vyzerala nasledovne

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \text{ prejde na tvar } \rightarrow A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_2 \end{pmatrix}$$

Keď to dosadíme do sústavy vyššie pre (X_1, \dots, X_k) dostaneme predpis ako generovať z 2-rozmerného rozdelenia

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu_1 + \sigma_1 Z_1 \\ X_2 &= \mu_2 + \sigma_2 \rho Z_1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 \end{aligned}$$

Vidíme teda, že keď vieme generovať premenné $Z_{1,2} \sim N(0, 1)$, máme jednoznačný predpis ako vygenerovať 2-rozmernú premennú $X \sim N(\mu, \Sigma)$. Tento postup sa dá zovšeobecniť na k -rozmerný, a požadovaná matica sa dá nájsť algoritmom, ktorého schéma a ďalšie fakty nájdeme napríklad v [5][18][7]. Algoritmus vychádza z nasledovných rovností

$$A_{ij} = \left(\Sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} A_{ik}A_{jk} \right) / A_{jj}, \quad j < i \quad \text{a} \quad A_{ii} = \sqrt{\Sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}^2}$$

V matlabe to vyzera nasledovne

```

function L = MultiN(n, Sigma)
L = zeros(n, n); L(1, 1) = sqrt(Sigma(1, 1));
if(eig(Sigma)) > 0 disp('je kladne definitná') end
for j=1:n
for i=j:n
v(i) = Sigma(i, j);
for k=1:(j-1)
v(i) = v(i) - L(j, k) * L(i, k);
end
L(i, j) = v(i)/sqrt(v(j));
end
end

```

Matlab ponúka preddefinovanú funkciu $L = chol(Sigma)$, ktorá dáva totožný výsledok. Pred spustením algoritmu je potrebné overiť, či je matica kladne definitná, jednou možnosťou je určiť vlastné čísla, v matlabe na tento účel stačí použiť funkciu - $eig(Sigma)$. Z teórie platí, že vlastné čísla musia byť kladné a ak je to splnené môžeme pokračovať. Ako príklad môžeme uviesť nasledovný výstup, ak poznáme tvar kovariačnej matice Σ

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.32 \\ 0.32 & 0.64 \end{pmatrix} \text{ prejde na tvar } \rightarrow L = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0.64 & 0.48 \end{pmatrix}$$

Ľahko si overíme, že je naozaj splnená vlastnosť $L * L' = \Sigma$.

3.3 Simulácia geometrického Brownovho pohybu

V tejto kapitole sme doteraz hovorili iba o metódach, ktoré generujú náhodné čísla, avšak zatiaľ sme neukázali konkrétnu možnosť ako ich implementovať, čím by bolo docielené premostenie Monte Carlo algoritmov a finančných modelov. K tomuto účelu zostrojíme numerickú schému pre generovanie Brownovho pohybu, jedno a viacrozmernú a aj jej geometrickú verziu.

Zámerom je generovať hodnoty Brownovho pohybu $X(t_1), \dots, X(t_2)$ v zadaných bodoch časového intervalu $0 < t_1 < \dots < t_n$. Keďže už vieme generovať náhodné premenné (napr. algoritmom Box-Muller, alebo metódou inverznej transformácie) zo štandardného normálneho rozdelenia, ozn. Z_1, \dots, Z_n , dostávame konkrétnu numerickú schému na simuláciu náhodného procesu s Brownovým pohybom

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n - 1$$

pre $X(0)$ dané, čo sa dá zapísať aj ako

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(s) ds + \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(u) du} Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n - 1$$

pre časovo závislé koeficienty, čo môžeme nahradiť Eulerovou numerickou aproximáciou

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \mu(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n - 1$$

Takáto konštrukcia je postačujúca pre množstvo aplikácií pri modelovaní akcií, opcií či úrokových mier. Existuje však viacero algoritmov, ktoré sa snažia aproximovať celý vývoj, teda snažia sa zistiť, čo sa deje medzi bodmi t_i . S podobnými snahami sú spojené problémy ako diskretizačná chyba. Iné metódy ako napr. "Brownian bridge" generujú Brownov pohyb odlišným a zložitejším algoritmom, ktorý sa dá efektívne použiť pri niektorých aplikáciách hlavne v zmysle redukcie variancie. Nebudeme sa im venovať bližšie, viac detailov sa dá nájsť v [5][2][3].

V modelovaní finančných aktív sa preferuje geometrický Brownov pohyb, pretože na rozdiel od klasického, sú pre takéto modelovanie dôležité len relatívne prírastky a nie absolútne, čo má samozrejme svoje výhody.

Zmena explicitného riešenia nastáva pre parameter driftu, už to bolo spomínané v (2.11) a (2.12), a teda geometrický Brownov pohyb $N(\mu, \sigma)$, kde μ v drifte nahradíme bezrizikovou úrokovou mierou r podľa princípu bezrizikového oceňovania, s počiatočnou hodnotou $S(0)$ je daný vzťahom

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left[r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t + \sigma W(t) \right)$$

Keďže vieme, že prírastky premennej $W(t)$ sú nezávislé a normálne rozdelené môžeme tento vzťah prepísať do rekúrie vracajúcej hodnoty v uzlových bodoch delenia časového intervalu $[0, T] : 0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = T$ do tvaru

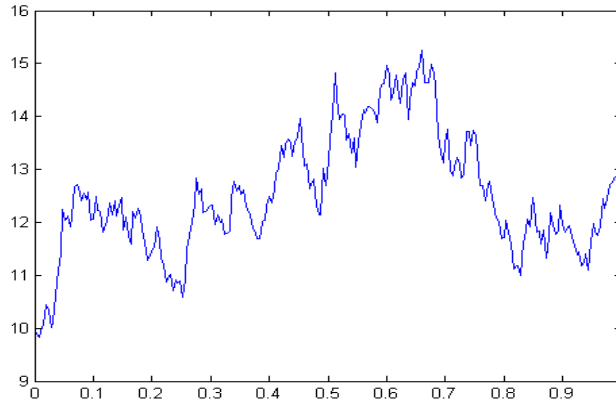
$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp \left(\left[r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] (t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \right)$$

kde Z_1, \dots, Z_n sú nezávislé premenné z normálneho rozdelenia $N(0, 1)$. Ďalej mnohonásobným simulovaním ciest podkladového aktíva podľa tejto schémy a princípov bezrizikového oceňovania derivátov z kapitoly 2.4 dostávame široko použiteľný nástroj pre počítanie cien rôznych derivátov. Príkladom môžu byť ázijské, bariérové opcie alebo look-back opcie, ktoré sa dajú modelovať týmto jednoduchým geometrickým Brownovým pohybom, kde pre každý typ je potrebná istá úprava algoritmu, napríklad zadenovanie bariéry a zaznamenávanie jej prekročenia pre bariérové opcie. Pre všetky tieto príklady výplatná funkcia závisí na hodnotách $(S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_n))$ v daných uzlových bodoch časového intervalu a odhady týchto cien sú asymptoticky nevychýlené. Akýmsi vylepšením tohoto modelu môže byť zahrnutie tvz. deterministickej funkcie volatility, ktorá umožňuje definovať parameter σ ako funkciu podkladového aktíva, čiže

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r dt + \sigma(S(t), t) dW(t)$$

problémom môže byť nájsť takú funkciu, ktorá bude platná pre všetky aktíva daného portfólia, hlavne ak rôzne aktíva majú rôzne doby splatnosti a expiračné ceny. Za predpokladu znalosti takejto funkcie vieme napísať rekúziu v tvare

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp \left(\left[r - \frac{1}{2} \sigma^2(S(t_i), t_i) \right] (t_{i+1} - t_i) + \sigma(S(t_i), t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \right)$$



Obr. 3.1: 1 realizácia geometrického Brownovho pohybu

Uvažujme teraz, že akcie budú vyplácať dividendy. Nech $D(t)$ je hodnota dividend vyplatených za čas $[0, t]$, a nech akcia vypláca spojitý dividendový výnos δ , tj. $\delta S(t)$. Potom $D(t)$ bude rásť podľa dynamiky

$$\frac{dD(t)}{dt} = \delta S(t) + rD(t)$$

Ak vieme, že cena akcie $S(t)$ spĺňa geometrický Brownov pohyb s parametrami $\text{GBP}(\mu, \sigma^2)$, potom drift bude mať tvar

$$\mu S(t) + \delta S(t) + rD(t)$$

a podľa princípov bezrizikového oceňovania drift prejde na tvar: $\mu = r - \delta$, čiže dynamika vývoja ceny podkladového aktíva vyplácajúceho dividendy má tvar

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left[(r - \delta) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t + \sigma W(t) \right)$$

ktorý nahradíme opäť Eulerovou schémou. Teda dopad dividend sa prejavuje znížením miery rastu aktíva o hodnotu dividendového výnosu. Zahnutie dividendového výnosu môže byť potrebné vo viacerých prípadoch. Ako príklad môžeme uviesť akciové indexy, kde desiatky akcií môžu vyplácať rôzne hodnoty dividend a práve ich aproximácia pomocou parametra δ môže byť dôležitá pre presnejšie určenie ceny indexu. Iným príkladom sú komodity, kde skladovacie náklady môžu byť modelované ako záporné dividendy, prípadne výmenné kurzy alebo future kontrakty, kde dynamika ich vývoja bude mať tvar

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left[M - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t + \sigma W(t) \right)$$

kde

- $M = 0$ pre modelovanie futures kontraktov. Tento fakt môže byť mierne prekvapujúci, takže sa pozrieme na jeho krátke zdôvodnenie. Nech $F(t, T)$ označuje budúcu

cenu v čase t pre kontrakt s expiráciou v čase T . Vieme, že tento typ kontraktu má nulovú hodnotu v začiatočnom čase $t = 0$ a platí

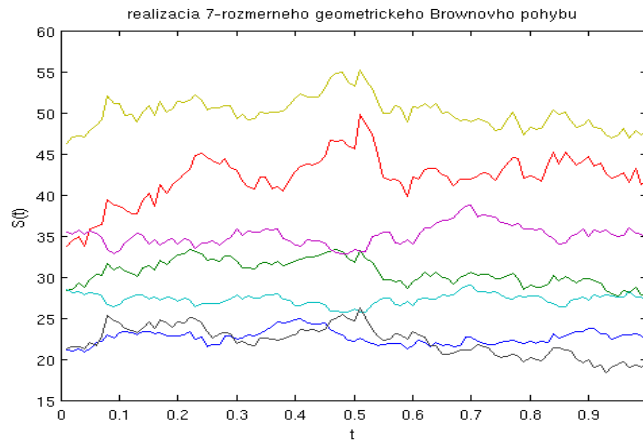
$$0 = e^{-r(T-t)} E[(S(T) - F(t, T)) | F_t]$$

kde F_t označuje históriu trhových cien do času t a v čase $t = T$ platí vzťah $S(T) = F(T, T)$, čo je ekvivalentné s podmienkou: $F(t, T) = E[F(T, T) | F_t]$. Teda future cena je martingal pod rizikovo neutrálnou mierou a musíme zvoliť hodnotu 0 za parameter driftu, čiže future cena sa riadi dynamikou

$$\frac{dF(t, T)}{F(t, T)} = \sigma dW(t) \quad (3.5)$$

- M =(úroková miera domácej meny - úroková miera zahraničnej meny) pre výmenné kurzy.

Toto potom opäť analogicky nahradíme numerickou schémou a môžeme simulovať pohyby aktív.



Obr. 3.2: 1 realizácia 7-rozmerného geometrického Brownovho pohybu

Poslednou vecou, na ktorú sa pozrieme bude viacrozmerný Brownov pohyb a jeho generovanie. Už sme uviedli základné vlastnosti, takže ich znova nebudeme opakovať. Keď si vezmeme d -aktív na trhu, ktoré sa riadia geometrickým Brownovým pohybom s driftom μ , kovariančnou maticou Σ s vlastnosťami (3.2),(3.4),(3.3) a použitím Choleskyho faktorizácie z časti 3.2.3 túto dynamiku zapíšeme systémom

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i dt + \sum_{j=1}^d A_{ij} dW_j(t), \quad i = 1, \dots, d$$

Potom vieme napísať predpis pre simulovanie viacrozmerného GBP(μ, Σ), v uzlových bodoch $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$

$$S_i(t_{k+1}) = S_i(t_k) \exp \left(\left[\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right] [t_{k+1} - t_k] + \sqrt{t_{k+1} - t_k} \sum_{j=1}^d A_{ij} Z_{k+1,j} \right), \quad i = 1, \dots, d$$

kde $k = 0, \dots, n - 1$, Z je matica rozmeru $[d \times n]$, ktorej elementy sú nezávislé náhodné čísla z rozdelenia $N(0,1)$ a pre potreby oceňovania derivátov nahradíme drift μ bezrizikovou úrokovou mierou r , tj. $\mu_i = r$. Schopnosť generovať viacrozmerný Brownov pohyb otvára možnosť simulovania a oceňovania ďalších typov derivátov, v ktorých Monte Carlo metódy môžu nachádzať dobré uplatnenie, keďže je známe, že sú dobre aplikovateľné na problémy s vyššími dimenziami.

Ako príklad takýchto simulácií môžeme uviesť niekoľko príkladov. Simulácia dvoch aktív $S_1(t), S_2(t)$, kde výplata je daná rozdielom ich ceny a expiračnej ceny K teda: $([S_1(T) + S_2(T)] - K)^+$, takýto typ opcií sa nazýva *spread opcia*. Iným príkladom sú *košíkové opcie*, teda akési opcie na portfólio pozostávajúce z dvoch a viac podkladových aktív. Takisto bariérové opcie sa vyskytujú ako dvojrozmerný problém. K týmto problémom oceňovania derivátov sa vrátíme pri konkrétnych simuláciách v kapitole 5.

Ako ukážku na obr. 3.1 je zobrazená jedna realizácia jedno-rozmerného geometrického Brownovho pohybu resp. viacrozmerného na obr. 3.2. Pre jednorozmerné aj viacrozmerné problémy nám potom stačí generovať rovnaké pohyby či vzorky tisíc až milión krát pomocou predpisov uvedených v tejto časti (v závislosti od toho, či chceme zahrnúť do simulácie dividendy alebo simulovať cenu derivátu na future a pod.), dodefinovať špecifické okrajové podmienky pre konkrétny typ derivátu, diskontovať do súčasného času (času 0) a následne ako posledný krok spriemerovať cez všetky simulácie. Pre definovanie okrajových podmienok a diskontovanie využijeme znalosti z kapitoly 2 o stochastickom charaktere aktív a fakty o vlastnostiach rôznych typov derivátov, pri následnom generovaní používame metódy z kapitoly 3, tj. metóda Box-Muller, Choleského faktorizácia a podobne. Ďalším rozšírením týchto teoretických modelov bude aplikácia na deriváty úrokovej miery (kapitola 6), či hľadanie ceny amerických opcií (kapitola 5.6).

Kapitola 4

Redukcia variancie

V tejto kapitole sa pokúsime predstaviť metódy, ktorých cieľom je znížiť varianciu simulácií, čo ako už bolo povedané predstavuje pomerne veľký problém Monte Carlo metód, ktorých konvergencia sa pohybuje v ráde $O(n^{-1/2})$, čo spôsobuje, že za účelom zvyšovania presnosti potrebujeme výrazne zvyšovať počet simulácií. Týmito metódami môžeme ušetriť nejaký výpočtový čas, tým že na dosiahnutie rovnakej variancie budeme vďaka nim potrebovať menej simulácií.

4.1 Metóda kontrolovaných variét

Ako prvú vec si zadefinujeme premenné Y_1, \dots, Y_n , ktoré predstavujú výstup z daného počtu n simulácií (ako príklad môžeme uviesť $Y_i = e^{-rT}(S(T) - K)^+$), resp hocijaký iný payoff). Tu by sa skončilo a vypočítal by sa priemer z takýchto simulácií. Myšlienka metódy kontrolovaných variét spočíva v tom, že dodefinojeme ďalší súbežný proces s Y , ktorý označíme X . V jednotlivých simuláciách dostaneme páry (X_i, Y_i) , ktoré budú nezávislé náhodné premenné a navyše predpokladáme, že očakávanie $E[X]$ je známe. Ako výsledok dostanem nový odhad

$$\bar{Y}(b) = \bar{Y} - b(\bar{X} - E[X]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - b(X_i - E[X]))$$

kde b je parameter, dá sa povedať, že výraz $(\bar{X} - E[X])$ slúži ako kontrolný faktor premennej $E[Y]$. Navyše platí, že tento odhad je nevychýlený a konzistentný.

Čo nás veľmi zaujíma je variancia tohoto odhadu

$$\text{Var}[Y_i(b)] = \text{Var}[Y_i - b(X_i - E[X])] = \sigma_Y^2 - 2b\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + b^2\sigma_X^2 \equiv \sigma^2(b) \quad (4.1)$$

σ je variancia X resp. Y a ρ je ich korelácia, a teda variancia odhadu $\bar{Y}(b)$ je $\sigma^2(b)/n$ pričom štandardný odhad \bar{Y} má varianciu σ_Y^2/n . Zo vzťahu (4.1) vyplýva, že nový odhad metódou

kontrolovaných variet má nižšiu varianciu ak: $b^2\sigma_X < 2b\sigma_Y\rho_{XY}$. Navyše vidieť, že existuje optimálna úroveň hodnoty parametra $b = b^*$, ktorá minimalizuje hodnotu variancie v (4.1)

$$b^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY}$$

odhad tejto hodnoty môže byť problematický, jednou z možností je použiť regresiu. Keď hodnotu b^* opäť dosadíme do (4.1) dostávame vzťah medzi varianciou nového a pôvodného odhadu bez redukcie variancie

$$\frac{\text{Var}[\bar{Y} - b^*(\bar{X} - E[X])]}{\text{Var}[\bar{Y}]} = 1 - \rho_{XY}^2$$

Implementácia. Nadvižeme na teóriu a pokúsime sa implementovať túto metódu na problém simulovania podkladových aktív a neskôr použiť pri simuláciách aktív a ich derivátov. Uvažujme podkladové aktívum, ktoré sa riadi geometrickým Brownovým pohybom. Podľa značenia vyššie, potrebujeme identifikovať proces Y a X . Nech proces Y je diskontovaný payoff napr. Európskej opcie $Y = e^{-rT}(S(T) - K)^+$. Pre proces X ako bolo povedané, potrebujeme vedieť jeho očakávanie, toto však môže byť nejaký martingal, pretože jeho očakávanie v nejakom budúcom čase je jeho počiatočná hodnota. V reči simulácie akcií, ak $S(t)$ je cena akcie v čase t , potom $e^{-rt}S(t)$ je martingal a jeho očakávaná hodnota je $E[e^{-rT}S(T)] = S(0)$. Podľa teoretickej schémy tejto metódy môžeme napokon zostrojiť odhad metódy kontrolovaných variet

$$\hat{Y}(b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - b[S_i(T) - e^{rT}S(0)]) \quad (4.2)$$

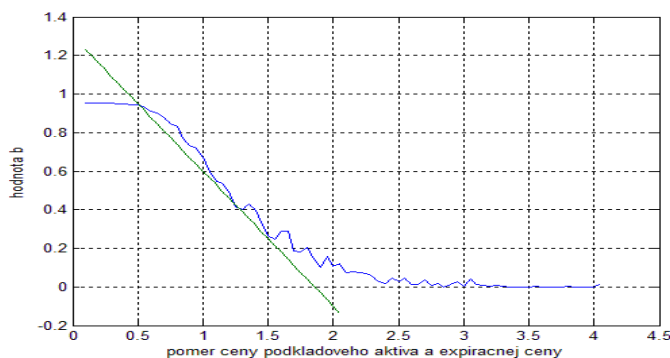
Takto navrhnutá implementácia je vhodná pre európsky typ opcií, pre iné deriváty sa bude líšiť tvarom kontrolného faktoru X . Pre ázijské opcie sa používa ako kontrolný faktor cena vypočítaná pomocou geometrického priemeru, konkrétne by odhad kontrolovanými varietami mal tvar

$$\hat{Y}(b) = C_a - b(C_g - C_{ga})$$

kde C_a je cena vypočítaná Monte Carlo simuláciami z aritmetického priemeru, C_g je cena vypočítaná Monte Carlo simuláciami pomocou geometrického priemeru a C_{ga} je cena vypočítaná analytickým vzorcom s geometrickým priemerom. Prípustné sú samozrejme aj iné možnosti. Podrobnejšie o kontrolovaných varietách pre ázijské opcie nájdeme v [1].

Parameter b jednoznačne závisí od pomeru expiračnej ceny a ceny podkladového aktíva, pričom ak fixujeme cenu podkladového aktíva S_0 a meníme expiračnú cenu K , tvar funkcie, ktorou vieme určiť optimálnu hodnotu b ostáva prakticky nezmenený s absolútnou zmenou ceny S_0 , čiže je tu len akási relatívna závislosť. Vďaka tomu vieme nájsť funkciu, ktorá zobrazuje optimálnu hodnotu parametra b vzhľadom na pomer K/S_0 . Funkcia má tvar ako na obrázku 4.1. Dá sa všimnúť, že pre rozumný pomer K/S_0 , sa dá hodnota parametra aproximovať lineárnou funkciou, ako dobrá aproximácia môže poslúžiť nasledovný odhad

$$\hat{b} = 1.3 - 0.7 \frac{K}{S_0}$$

Obr. 4.1: Hodnoty koeficientu b pre rôzny pomer expiračnej ceny a ceny aktíva

kde za rozumné sa dajú považovať hodnoty v rozmedzí $K/S_0 \in (0.5, 1.5)$, pre hodnoty nižšie ako 0.5 (resp väčšie ako 1.5) stačí nastaviť $b = 0.1$ (resp. $b = 0.95$). Prípadne môžeme odhadnúť parameter b regresiou podľa vzťahu

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \equiv \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}$$

4.2 Matching metóda

Táto metóda na rozdiel od predchádzajúcej je založená na transformácii simulovaných ciest podkladového aktíva. Opäť budeme predpokladať bezrizikovú dynamiku podkladového aktíva v zmysle $E[S(t)] = e^{rt}S(0)$ a predpokladáme odhad ako priemer simulovaných ciest

$$\bar{S}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i(t)$$

zdrojom variancie je, že pre konečné n takýto odhad nebude korešpondovať s hodnotou $E[S(t)]$ čiže

$$e^{-rt}\bar{S}(t) \neq S(0)$$

Táto metóda navrhuje ako predísť týmto chybám transformáciou simulovaných ciest v zmysle

$$\tilde{S}_i(t) = S_i(t) \frac{E[S(t)]}{\bar{S}(t)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

resp.

$$\tilde{S}_i(t) = S_i(t) + E[S(t)] - \bar{S}(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

Implementácia. Týchto niekoľko teoretických myšlienok metódy sa teraz pokúsime implementovať na geometrický Brownov pohyb, aby sme tak metódu mohli použiť na simuláciu aktív. Vieme, že geometrický Brownov pohyb budeme simulovať dynamikou

$$S(t_k) = S(t_{k-1}) \exp\left([r - 1/2\sigma^2](t_k - t_{k-1}) + \sigma\sqrt{t_k - t_{k-1}}Z_i\right), \quad i=1, \dots, n \text{ je počet simulácií}$$

Ako prvá možnosť je upraviť spôsob generovania náhodných čísel $Z_i \sim N(0, 1)$ v danej schéme. Najjednoduchšia takáto transformácia Brownovho pohybu podľa schémy (4.4) by mohla mať tvar

$$\tilde{W}_i(t) = W_i(t) - \bar{W}(t)$$

resp. sa ponúka aj formulácia

$$\tilde{W}_i(t) = \frac{W_i(t) - \bar{W}(t)}{s(t)/\sqrt{t}}$$

kde $s(t)$ je výberová štandardná odchýlka $W_1(t), \dots, W(t)$ a \bar{W} je ich priemer. Implementácia tejto myšlienky na geometrický Brownov pohyb pre potreby simulácii vyzerá nasledovne

$$W_i(t_k) = \sum_{j=1}^k \sqrt{t_j - t_{j-1}} Z_{ij}$$

kde $Z_{ij} \sim N(0, 1)$ a zadefinujeme si nasledovné premenné

$$\bar{Z}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{ij}, \quad s_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_{ij} - \bar{Z}_j)^2$$

a

$$\tilde{W}_i(t_k) = \sum_{j=1}^k \sqrt{t_j - t_{j-1}} (Z_{ij} - \bar{Z}_j) \quad (4.5)$$

$$\tilde{W}_i(t_k) = \sum_{j=1}^k \sqrt{t_j - t_{j-1}} \frac{Z_{ij} - \bar{Z}_j}{s_j} \quad (4.6)$$

Pre geometrický Brownov pohyb môžeme zvoliť aj inú transformáciu, na základe (4.3) nadobudne tvar

$$\tilde{S}_i(t) = S(0) e^{rT} \frac{n e^{\sigma W_i(t)}}{\sum_{j=1}^n e^{\sigma W_j(t)}} \quad (4.7)$$

Konstrukcie (4.5), (4.7), (4.6) použijeme a zhodnotíme ich efektívnosť na základe konkrétnych simulácií v kapitole 5.

4.3 Ďalšie metódy

Redukcia variancie sa stala dôležitým predmetom skúmania pre použitie Monte Carlo metód. Postupne bolo predstavených viacero metód od veľmi jednoduchých a univerzálne aplikovateľných až po zložité a len na špecifické problémy použiteľné.

Najjednoduchšou metódou sú tzv. *Antithetics varieties*, ktoré sú aplikovateľné v podstate na ľubovoľný problém a sú jednoduché na implementáciu. Poskytujú však oproti iným metódam relatívne malé zníženie variancie. Základný princíp metódy je nasledovný: v každej simulácii vygeneruj náhodné číslo Z_i a k nemu prislúchajúci odhad Y_i , rovnaké náhodné číslo, ale negatívne vzaté, tj. $-Z_i$, použi na výpočet odhadu Y_i^a . Dostaneme dvojice

nezávislých odhadov $(Y_1, Y_1^a), (Y_2, Y_2^a), \dots, (Y_n, Y_n^a)$, avšak vrámci dvojice medzi odhadom Y_i a Y_i^a môže byť prítomná korelácia. Požiadavkou na účinné fungovanie metódy je, aby táto korelácia bola záporná. Antithetics odhad Y_i v každej simulácii je priemerom odhadov Y_i a Y_i^a teda

$$Y_i = \frac{Y_i + Y_i^a}{2} \Rightarrow \text{Var}(Y_i) = \frac{\text{Var}(Y_i) + \text{Var}(Y_i^a) + 2\text{Cov}(Y_i, Y_i^a)}{4}$$

výsledný antithetics odhad má tvar

$$\hat{Y}_{antithetics} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i + Y_i^a}{2} \right) \quad (4.8)$$

kde n označuje počet Monte Carlo simulácií. Cieľom metódy je teda dosiahnuť nižšiu varianciu vygenerovaním dvoch odhadov v každej z n simulácií, ako použitím $2n$ štandardných simulácií.

Pomerne účinnou metódou sa javí aj tzv. *Stratified sampling*, ktorá sa snaží kontrolovať distribúciu generovaných náhodných čísel, ale je pomerne zložitá a často sa musí vytvoriť pre konkrétny model. Všeobecné skúsenosti ukazujú jej schopnosť výrazne znížiť varianciu.

Najzložitejšou metódou je tzv. *Importance sampling*, ktorá vyžaduje precíznu implementáciu a dokáže znížiť varianciu výrazne viac ako iné metódy, avšak pri nevhodnej implementácii môže naopak varianciu aj zvýšiť.

V práci zvolené metódy predstavujú istý kompromis medzi zložitosťou implementácie a veľkosťou redukcie variancie. O všetkých týchto metódach môžeme nájsť množstvo materiálu v[1][2][3][5][6].

Kapitola 5

Simulácia a oceňovanie opcií

5.1 Európske opcie

Predtým ako začneme simuláciami počítať ceny opcií, je potrebné povedať tri poznámky.

Prvá sa týka generátorov náhodných čísel. Pre potreby práce budeme potrebovať len náhodné čísla z normálneho rozdelenia, pričom na tento účel môžu slúžiť generátory náhodných čísel z normálneho rozdelenia opísané v kapitole 3.2 a tieto naozaj aj dávajú hodnoverné ceny opcií pri ich použití v simuláciach. Na všetky simulácie budeme používať generátor čísel normálneho rozdelenia prístupný v matlabe *randn* a to hlavne z dôvodu jeho vyššej rýchlosti oproti ostatným generátorom. Okrem toho treba povedať, že ako pomerne zlá metóda sa ukazuje metóda inverznej transformácie, ktorú neodporúčame používať.

Druhá poznámka sa týka hodnôt parametrov použitých v simuláciach. V tejto práci nie je úlohou presné určenie parametrov a ani sa nezaobráame metódami ako dosiahnuť čo možno najhodnovernejšie parametre. Uvádzané parametre vychádzajú z reálnych dát, na odhad parametra volatilita bola použitá historická volatilita resp. implikovaná volatilita. Ľahko si vieme predstaviť software, ktorý by ako vstupy do Monte Carlo simulácií sťahoval a presne počítal hodnoty parametrov a tým zabezpečil maximálnu vierohodnosť vypočítaných cien opcií tak, aby súhlasili s reálne obchodovanou cenou. Dôležitejšie je porovnanie cien opcií s danými parametrami relatívne ku iným metódam, resp. vplyv zmeny parametrov ako čas do expirácie alebo expiračná cena a ďalšie na hodnotu opcie.

Posledná poznámka spočíva v uvedení si, že vypočítané ceny opcií nie sú nemenné, ale každá ďalšia simulácia by mohla dať mierne odlišnú cenu v dôsledku štandardnej chyby daného odhadu.

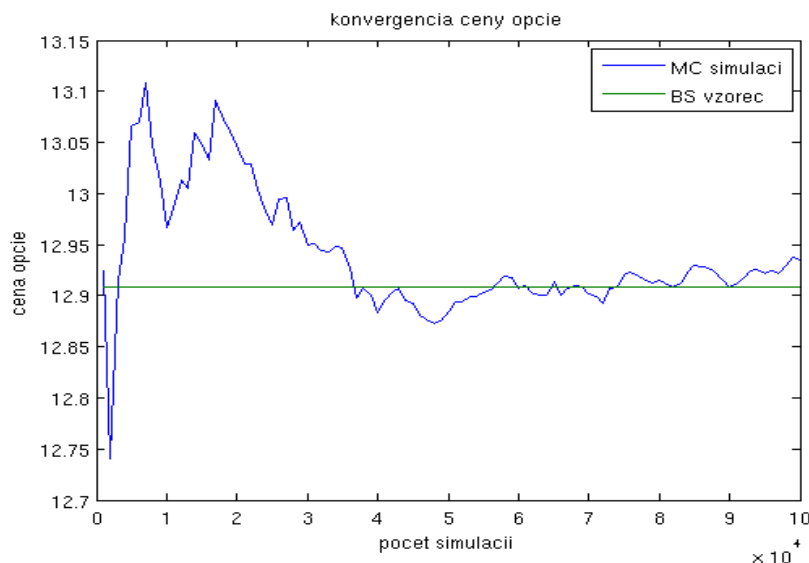
V tejto časti začneme simuláciami najjednoduchšieho typu opcií, európskych opcií. O simuláciach tohoto typu sme už hovorili v kapitole 1.4 a tak len nadvižeme na spomínané fakty a použijeme jednoduchý algoritmus (1.2) na získanie cien opcií. Keďže je to jednoduchý typ opcií s malou výpočtovou náročnosťou, môžeme si dobre otestovať vlastnosti metódy pre rôzny počet simulácií, rôzne parametre a taktiež otestujeme diskutované metódy redukcie variancie z kapitoly 4, ktorých použitie je nutné pre efektívnosť a konkurenciaschopnosť Monte Carlo simulácií.

Tabuľka 5.1: Ceny európskych call a put opcií pre rôzne parametre, $\sigma(INTC) = 0.18$, $\sigma(IBM) = 0.26$, úroková miera $r = 1\%$

S01(INTC)=20.48	call, T1=0.12					call, T2=0.48				
strike počet MCs	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	C_{BS}	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	C_{BS}
K1=20	0.57	0.51	0.52	0.52	0.52	1.76	1.74	1.74	1.75	1.75
K2=24	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.44	0.44	0.44	0.44	0.434
K3=17	3.53	3.52	3.52	3.51	3.51	3.59	3.81	3.82	3.81	3.81
S01(INTC)=20.48	put, T1=0.12					put, T2=0.48				
K1=20	0.50	0.52	0.50	0.50	0.50	1.27	1.19	1.18	1.18	1.18
K2=24	3.54	3.50	3.52	3.53	3.52	3.74	3.85	3.85	3.84	3.84
K3=17	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
S02(IBM)=144.17	call, T1=0.12					call, T2=0.48				
K1=145	3.31	3.25	3.27	3.27	3.27	7.14	7.11	7.10	7.10	7.10
K2=155	0.58	0.59	0.59	0.59	0.59	3.42	3.45	3.44	3.44	3.44
K3=135	10.02	9.94	9.96	9.96	9.96	12.83	12.96	12.90	12.91	12.91
čas	10 ⁻³ s	0.009s	0.088s	0.88s						

Tabuľka 5.2: Porovnanie priemerných cien európskych opcií pre rôzne metódy redukcie variancie, výsledky pre 1000 replikácií Monte Carlo simulácii pre parametre: $S_0=144.17$, $\sigma=0.18$, $T=0.48$, $r=0.01$, $K=135$

	n=50		n=100		n=250		n=1000		n=2000	
	\bar{C}	$std(\bar{C})$	\bar{C}	$std(\bar{C})$	\bar{C}	$std(\bar{C})$	\bar{C}	$std(\bar{C})$	\bar{C}	$std(\bar{C})$
BR	12.74	2.15	12.84	1.51	12.88	0.93	12.93	0.47	12.90	0.34
KV	12.90	0.67	12.92	0.49	12.90	0.32	12.91	0.15	12.91	0.1
MM1	12.87	0.73	12.88	0.51	12.88	0.32	12.90	0.17	12.91	0.12
MM2	12.84	0.57	12.87	0.42	12.90	0.25	12.91	0.13	12.91	0.08
MM3	12.84	0.25	12.89	0.18	12.90	0.11	12.90	0.05	12.91	0.04



Obr. 5.1: Konvergencia ceny call opcie pre zväčšujúci sa počet simulácií s parametrami $S_0=144.17, \sigma=0.18, T=0.48, r=0.01, K=135$

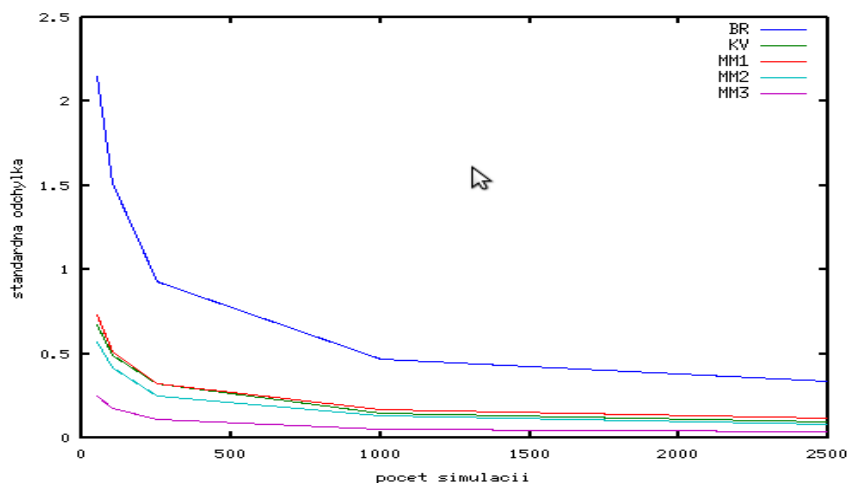
V tabuľke 5.1 sú zaznamenané ceny call resp. put opcií pre akcie Intel(INTC) a IBM pre rôzne parametre času a expiračnej ceny, pričom ceny môžeme porovnať s analyticky vypočítanou cenou C_{BS} podľa vzorca (2.1). Na obrázku 5.1 je graficky zobrazená konvergencia ceny call opcie vypočítanej z Monte Carlo simulácií pre zvyšujúci sa počet simulácií n , a ako vieme z kapitoly 1 o efektívnosti simulácií, štandardná chyba závisí od veľkosti vzorky a znižuje sa faktorom $O(n^{-1/2})$, čo sa dá pozorovať aj na danom obrázku.

V tabuľke 5.2 sme porovnávali rôzne metódy redukcie variance, preto si pripomeňme o označme predstavené metódy redukcie variance z kapitoly 4:

1) **KV**: Kontrolované variety (4.2), 2) **MM1**: Moment matching metóda 1 (4.5), 3) **MM2**: Moment matching metóda 2 (4.7), 4) **MM3**: Moment matching metóda 3 (4.6)

Každá z týchto metód bola otestovaná pri simuláciách cien call opcií pre dané parametre, vrátane odhadov bez redukcie variance, pre rôzne hodnoty počtu simulácií n na vzorke 1000 replikácií. Z týchto replikácií bola odhadnutá priemerná cena opcie a jej štandardná odchýlka, výsledky môžeme vidieť v tabuľke 5.2. Grafické porovnanie štandardných odchýlok môžeme vidieť na obrázku 5.2. Je očividné, že každá redukcia variance je výrazne lepšia ako keby sa nepoužila, najefektívnejšie sa ukazujú metóda kontrolovaných variet a metóda MM3, ktoré odporúčame používať a budeme ich aplikovať aj na ďalšie problémy. Časovo dávajú všetky metódy porovnateľné výsledky okrem metódy MM2, ktorá je výrazne najpomalšia.

Záver: Testovali sme Monte Carlo simulácie za účelom výpočtu ceny európskych opcií a mohli sme sa presvedčiť o platnosti teoretických vlastností rozoberaných v predchádzajúcich kapitolách. Vo všeobecnosti sme zistili, že odhad ceny z Monte Carlo simulácií dáva rovnaké resp. porovnateľné výsledky s cenami určenými podľa analytického vzorca (2.1), avšak spoľahlivosť veľmi závisela hlavne od počtu Monte Carlo simulácií, pričom pre



Obr. 5.2: Porovnanie štandardnej odchýlky pre rôzne metódy redukcie variancie pre 1000 replikácií a daný počet n simulácií, pre cenu call opcie s parametrami $S_0=144.17$, $\sigma=0.18$, $T=0.48$, $r=0.01$, $K=135$

dostatočnú spoľahlivosť (teda presnosť aspoň na druhom desatinnom mieste) sme potrebovali použiť rádovo vysoký počet (v ráde 10^4) simulácií a preto v porovnaní s analytickou metódou má výrazne vyššiu výpočtovú náročnosť. Okrem toho ako všeobecný trend môžeme pozorovať, že presnosť resp. rýchlosť konvergenencie sa zvyšuje so znižujúcou sa cenou opcie, teda inak povedané Monte Carlo simulácie sú mierne závislé či citlivé na hodnotu parametrov, hlavne na volatilitu a čas expirácie.

Použitím metód redukcie variancie, sme výrazne zlepšili spoľahlivosť, štandardná odchýlka pre niektoré metódy klesla aj viac ako o polovicu. Zlepšenie spoľahlivosti odhadu dosiahneme ak skombinujeme menší počet Monte Carlo simulácií s istým počtom replikácií (zvolíme tak aby výpočtový čas simulácií + replikácií bol menší ako pôvodný čas 1 replikácie väčšieho počtu simulácií), použijeme niektorú z metód redukcie variancie a ceny z replikácií spriemerujeme, dosiahneme podstatne vyššiu spoľahlivosť odhadu pri nižšom výpočtovom čase, avšak stále ostáva v platnosti, že pre tento typ derivátu, Monte Carlo simulácie nie sú vhodnou metódou výpočtu. Priestor sa však ukazuje pre výpočet viacerozmerých európskych opcií (viz kapitola 5.5).

5.2 Ázijské opcie

V nasledujúcich dvoch časti si ukážeme ako oceňovať od cesty závislé opcie pomocou simulácií, konkrétne začneme s ázijskými opciami. O Monte Carlo algoritme pre oceňovanie tohoto typu opcií sme už hovorili v kapitole 1.4 (1.6) a budeme teda postupovať podľa

tejto schémy. Keďže je to typ od cesty závislý, musíme byť schopný uchovávať pri simulácii pohyb ceny aktíva počas celej doby platnosti, a práve na tento účel môže dobre poslúžiť práve Monte Carlo metóda. Ako sme videli v kapitole 2, poznáme viac typov výplatnej funkcie(2.3)(2.4), použitie budeme demonštrovať na type (2.3) a budeme používať aritmetické priemerovanie. Budeme sledovať hlavne optimálny počet bodov delenia intervalu, cez ktoré budeme priemerovať cenu, keďže príliš veľa bodov by veľmi zvyšoval výpočtový čas, na druhej strane malý počet môže dávať nepresné(tvz. nadol vychýlené) výsledky. Tiež budeme sledovať vplyv metód redukcie variancie, konkrétne metódy kontrolovaných variet a moment matching 3, ktoré poskytovali pomerne veľké zníženie variancie u európskych opcií.

Počítali sme cenu ázijskej call opcie s konkrétnymi parametrami, pričom sledujeme kvalitu simulácii pre rôzny počet bodov delenia n časového intervalu a daný počet Monte Carlo simulácii. Výsledky nájdeme v tabuľke 5.3.

V ďalšej tabuľke 5.4 nájdeme porovnanie efektívnosti Monte Carlo simulácie v porovnaní s výpočtom ceny ázijských opcií riešením parciálnej diferenciálnej rovnice metódou predstavenou u Večeř[20].

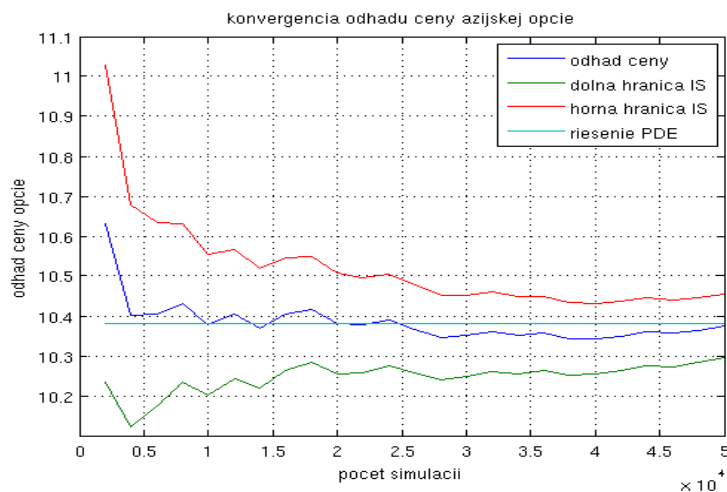
Tabuľka 5.3: Cena ázijských call opcií typu (2.3) na akcie INTC s parametrami $S_0=144.17, \sigma=0.18, r=1\%$, počítané pre 3000 MC simulácii a 100 replikácii, n =počet bodov delenia časového intervalu

		n=20	n=50	n=100	n=150	n=200	
		\bar{C}	\bar{C}	\bar{C}	\bar{C}	\bar{C}	$std(\bar{C})$
K=145,T=0.12	BR	1.65	1.69	1.71	1.71	1.72	0.05
	KV	1.66	1.70	1.71	1.72	1.72	0.05
	MM3	1.66	1.69	1.70	1.71	1.72	0.03
K=135,T=0.48	BR	10.28	10.33	10.34	10.37	10.38	0.17
	KV	10.28	10.36	10.37	10.36	10.36	0.09
	MM3	10.26	10.34	10.36	10.36	10.37	0.05

Záver: Metóda Monte Carlo nachádza dobré uplatnenie pre oceňovanie ázijských opcií

Tabuľka 5.4: Porovnanie výpočtu ceny ázijskej call opcie typu (2.3) metódou Monte Carlo(s počtom bodov delenia časového intervalu $n=300$), riešením parciálnej diferenciálnej rovnice(PDE) pre rôzny počet bodov delenia priestoru(n) a času($n=200$)

$S_0=144.17$	Monte Carlo			PDE		
	n=20000	n=50000	n=10 ⁵	n=100	n=500	n=1000
K=140,T=0.48	6.68	6.69	6.69	6.70	6.69	6.69
K=135,T=0.48	10.36	10.37	10.37	10.38	10.38	10.38
K=145,T=0.12	1.71	1.72	1.72	1.73	1.73	1.72
std(C)	0.02	0.01	0.007			
čas	≈ 1.6s	≈ 4.5s	≈ 9s	1.5s	2.7s	15s



Obr. 5.3: Konvergencia ceny ázijskej call opcie použitím moment matching metódy s vyznačeným 95% intervalom spoľahlivosti a porovnanie s cenou vypočítanou riešením PDE, použitých bolo 200 bodov priemerovania

s aritmetickým priemerovaním, pre ktoré neexistuje uzavretá analytická formula, preto použitie simulácii môže byť pre aritmetické ázijské opcie vhodnou voľbou na výpočet, hlavne pre malý počet bodov priemerovania dostávame rýchle a presné výsledky. Navyše oproti analytickým aproximáciám nepotrebujem poznať informáciu o minulých cenách, ale vystačíme si so simuláciami. Použitie metódy Monte Carlo pre ázijský typ opcií dáva relatívne porovnateľné výsledky aj vzhľadom na riešenie získané z PDE, čo sa týka presnosti aj rýchlosti, a to aj v prípadoch vyžadujúcich použitie pomerne veľkého počtu bodov priemerovania. Osvedčilo sa opäť použitie metódy moment matching(MM3) a kontrolovaných variet na redukciiu variancie, ktoré signifikantne zrýchľujú konvergenciu. V platnosti ostáva aj citlivosť na veľké hodnoty parametra času do expirácie a volatility. Často je potrebné použiť pomerne veľký počet bodov priemerovania (aspoň 150), čo je aj zdrojom zvyšovania výpočtovej náročnosti a aj vzhľadom na dané pozorovania je všeobecne lepšie použiť metódu riešenia PDE pre vysoký počet bodov priemerovania, ktorá je pomerne málo citlivá na hodnoty parametrov a zároveň pomerne rýchla. Treba však ešte upriamiť pozornosť na situácie, kedy je výhodné používať metódu Monte Carlo, a to je hlavne prípad viacrozmerých ázijských opcií(košíkových či amerických ázijských, viz. kapitola 5.5 a 5.6).

5.3 Bariérové opcie

Budeme pokračovať v opciách závislých na ceste a metódou Monte Carlo oceníme jeden typ bariérových opcií, menovite down-and-out bariérovú opciu. Princíp Monte Carlo algoritmu je opäť pomerne jednoduchý, podobný princípu, ktorý platil pre ázijské opcie, avšak v každom kroku časového vývoja podkladového aktíva $S(t)$ sledujeme, či jeho cena prekročila

zadefinovanú bariéru B , tj. sledujeme podmienku $S(t) < B$, pričom ak prekročila bariéru, tak danú simuláciu zastavíme a cenu opcie z danej simulácie nastavíme rovnú 0, v opačnom prípade bude cena opcie daná diskontovaním výplatnej funkcie do času 0. Po vykonaní dostatočného množstva simulácii dostaneme Monte Carlo odhad. Teda schematicky

1. Generuj pohyb podkladového aktíva: $dt = T/n, t \in [0, T]$
 $S(t+1) = S(t) \exp([r - \frac{1}{2}\sigma^2]dt + \sigma\sqrt{dt}Z_{t+1}), \quad Z_i \sim N(0, 1)$
2. Nastav $C_i = \begin{cases} 0 & \text{ak } S(t) < B \text{ pre ľubovoľné } t \in [0, T] \\ e^{-rT} \max(0, S(T) - K) & \text{inak} \end{cases}$
3. Vypočítaj priemer(Monte Carlo odhad): $\hat{C} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m C_i$

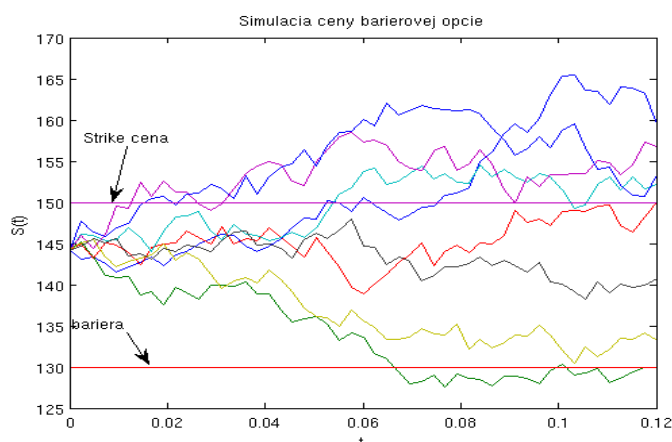
Simuláciami uvedeným algoritmom narazíme na problém, ktorý je spojený s faktom, že na presný výpočet ceny opcie potrebujem oveľa jemnejšie delenie časového intervalu, obzvlášť v prípade, keď bariéra leží blízko začiatkovej hodnote aktíva, alebo má dlhú dobu do splatnosti a je pravdepodobná väčšia frekvencia zásahu bariéry. Pre oceňovanie ázijských opcií nebola potrebná taká jemnosť delenia časového intervalu, keďže sme vystačili s diskretným aritmetickým priemerom, avšak ak chceme presnú cenu bariérovej opcie potrebujeme spraviť istú korekciu, ktorá bude zohľadňovať diskretný charakter bariéry. Riešením tohoto problému je korekcia navrhnutá u Glasserman,Broadie,Kou[13]. Nová bariéra B^* podľa tejto korekcie bude mať tvar

$$B^* = B(\pm\beta\sigma\sqrt{dt}), \beta \approx 0.5826((+) \text{ ak } B \geq S_0, \text{ inak } (-)) \quad (5.1)$$

V tabuľke 5.5 môžeme naozaj pozorovať výrazné zlepšenie Monte Carlo odhadu a rovnako pozorujeme, že pre bariéru blízko začiatkovej hodnote s dlhším časom do vypršania je odhadnutá cena opcie výrazne menej presnejšia ak nepoužívame korekciou a dosahuje vysokú chybu aj pri počte viac ako $n = 500$ delení časového intervalu, pričom v prípade krátkej doby do splatnosti a vzdialenejšej bariéry sme dostali pomerne presný výsledok aj bez korekcie už pre $n = 200$. Výsledky Monte Carlo metódy môžeme porovnať s inými numerickými metódami v tabuľke 5.6, konkrétne metódami konečných diferencií Crank-Nicholson a explicitnou metódou konečných diferencií. Okrem toho existujú viaceré analytické aproximácie a tvz. metódy stromov, dobrý prehľad týchto metód ponúka [19].

Tabuľka 5.5: Cena bariérových call opcií typu down-and-out na akcie INTC s parametrami $S_0=144.17, \sigma=0.18, r=1\%$, počítané pre 3000 MC simulácii a 100 replikácii

		n=50	n=100	n=200	n=300	n=500	
		\bar{C}	\bar{C}	\bar{C}	\bar{C}	\bar{C}	$std(\bar{C})$
K=142,T=0.48	B=140	5.03	4.74	4.54	4.47	4.36	0.14
	B*	4.06	4.03	4.02	4.00	4.00	0.14
K=150,T=0.12	B=130	1.47	1.48	1.50	1.50	1.50	0.04
	B*	1.47	1.48	1.50	1.50	1.50	0.04



Obr. 5.4: 8 simulácii vývoja ceny akcie, taktiež je vyznačená bariéra, ak cena klesne pod túto bariéru cena opcie z danej simulácie je nulová, v simuláciach kde sa udrží nad bariérou jej cena bude daná diskontovaním konkrétnej výplatnej funkcie

Tabuľka 5.6: Porovnanie výpočtu ceny bariérovej call opcie metódou Monte Carlo (s počtom bodov delenia časového intervalu $n=200$), analytického riešenia a metódy konečných diferencií (FD): Crank-Nicholson FD a Explicitná metóda FD, tiež môžeme vidieť priemerný čas 1 simulácie

$S_0=144.17$	Analytic	Monte Carlo			C-N FD		Explicit FD	
n		$2 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	10^5	100	500	100	500
$K=142, B=140, T=0.48$	4.02	3.99	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
$K=150, B=130, T=0.12$	1.50	1.51	1.50	1.50	1.52	1.50	1.52	1.51
čas(std)		15s(0.02)	38s(0.01)	76s(0.008)	0.23s	9.7s	0.23s	1.52s

Záver: Použitie Monte Carlo metód pre jednorozmerné bariérové opcie sa ukazuje ako neefektívne a to z dôvodu vysokej výpočtovej náročnosti a nepresností ako dôsledku diskrétného generovania pohybu ceny, keď bolo treba použiť viac ako 200 delení časového intervalu a taktiež korekciu (5.1). Okrem toho je metóda veľmi citlivá na veľkosť bariéry a čas do vypršania. Výhodnejšie je preto použiť niektorú zo spomínaných metód konečných diferencií. Avšak Monte Carlo metóda by mohla nájsť uplatnenie pre špeciálne typy bariérových opcií, napríklad takých, ktorých bariéra sa mení postupom času v závislosti od ceny podkladového aktíva resp. iných komplikovanejších typov. Taktiež nachádza uplatnenie pri viacrozmerných problémoch bariérového typu.

5.4 Spread opcie

V tejto časti aplikujeme metódy Monte Carlo na dvojrozmerný problém opcií vypisovaných na rozdiel v cene dvoch aktív. Konkrétne si vezmeme do pozornosti tzv. *crack spread*

opcie, ktoré sa vypisujú na rozdiel future ceny *crude oil* a ceny *heating oil*. Keďže simulujeme ceny dvoch aktív potrebujeme okrem ich volatilit na korektné ocenenie poznať aj ich koreláciu a tým danú kovariančnú maticu(3.4). Následne aplikujeme myšlienky Choleskyho faktorizácie resp. generovania náhodných čísel z dvojrozmerné normálneho rozdelenia, konkrétne pre dvojrozmerný problém použijeme vzťahy z kapitoly 3.2.3.. Ďalšou vecou, ktorú musíme zohľadniť je, že pre oceňovanie future kontraktov musíme zobrať nulový drift, tj. $\mu = 0$ podľa princípu (3.5).

Na ocenenie potrebujeme teda nasledovné informácie, ktoré boli odhadnuté na základe historických dát, a ktoré využijeme v nasledovnom algoritme :

1. Parametre: $\sigma_1(\text{Crude oil})=0.41, \sigma_2(\text{Heating oil})=0.37, \rho(\text{korelácia})=0.96$
2. Náhodné čísla generuj podľa predpisu:

$$X = (X_1, X_2) = (\sigma_1 Z_1, \sigma_2 \rho Z_1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2), \text{ kde } Z = (Z_1, Z_2) \sim N(0, I)$$
3. Simuluj podľa predpisu:

$$S_i(T) = S_i(0) \exp\left(\frac{1}{2} \sigma_i^2 T + \sqrt{T} X_i\right), i=1,2$$

$$C_j = e^{-rT} \max(0, [S_1(T) - S_2(T)] - K)$$
4. Opakuj n krát získaj Monte Carlo odhad: $\hat{C} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C_j$

Bez väčších problémov sme sa preniesli do problému o vyššej dimenzii. V tabuľkách 5.7 a 5.8 si opäť môžeme pozrieť numerické výsledky takto aplikovanej metódy na výpočet ceny call crack spread opcie na futures s danými parametrami.

Tabuľka 5.7: Cena crack spread call opcií na rozdiel ceny crude oil a heating oil s počiatočnou cenou $S_{0ho}=2.27, S_{0co}=84.71, r=1\%$

		n=100		n=1000		n=5000		n=20000	
		\bar{C}	$std(\bar{C})$	\bar{C}	$std(\bar{C})$	\bar{C}	$std(\bar{C})$	\bar{C}	$std(\bar{C})$
K=80, T=0.48	BR	10.35	1.71	10.42	0.54	10.43	0.24	10.43	0.13
	MM3	10.35	0.45	10.43	0.14	10.42	0.06	10.43	0.03
K=90, T=0.12	BR	2.03	0.51	2.02	0.16	2.01	0.07	2.01	0.03
	MM3	2.01	0.22	2.01	0.07	2.01	0.03	2.01	0.01

Záver: Výpočet ceny crack spread call opcií metódou Monte Carlo (viz. tabuľka 5.7) dáva porovnateľné výsledky v porovnaní s analytickým riešením a lepšie výsledky v porovnaní s metódou binomického stromu (porovnanie nájdeme v tabuľke 5.8) a taktiež dosahuje pomerne rýchlu konvergenciu. Napriek tomu pre takýto jednoduchý typ dvojrozmernej opcie je výhodnejšie použiť analytickú aproximáciu. Ponúka sa však množstvo modifikácií pre daný typ opcie, ktorý by Monte Carlo metóda pomerne jednoducho vyriešila naproti tomu analytické riešenie by bolo nedostupné. Ako príklad by sme mohli uvažovať rozdiel cien priemerných cien dvoch aktív, rozdiel maxima jedného aktíva a priemernej ceny druhého aktíva, resp. by sme mohli problém rozšíriť aj na rozdiel 3 aktív a podobne a práve v týchto prípadoch je vhodné použiť metódu Monte Carlo.

Tabuľka 5.8: Porovnanie analytickej aproximácie, Monte Carlo simulácie a 3D binomickej metódy stromov pre výpočet crack spread call opcií na rozdiel ceny futures kontraktov crude oil a heating oil s počiatočnou cenou $S_{0ho}=2.27, S_{0co}=84.71, r=1\%$

T=0.48	Kirk	MC(n=3000,rep=100)				3D binomický strom		
						n=50	n=100	n=200
K=85	8.23	8.24	8.23	8.22	8.24	8.30	8.25	8.25
K=95	4.97	4.97	4.97	4.96	4.96	4.99	4.97	4.98
čas	≈ 0	0.27s				0.04s	0.20s	1.40s

5.5 Košíkové opcie

Budeme pokračovať vo zvyšovaní dimenzie (počet podkladových aktív) a v tejto časti oceníme košíkové opcie, konkrétne budeme počítať ceny opcií na košík 10 podkladových aktív. Využijeme poznatky z oceňovania ázijských a európskych opcií a vypočítame košíkové ázijské opcie a košíkove európske opcie na 10 podkladových aktív. Práve pre tento typ opcií je očakávané najlepšie využitie Monte Carlo metódy, keďže ide o vysokorozmerný problém, na ktorý je účinné použiť jedine vhodnú numerickú metódu, pričom analytické riešenie ako u jednorozmerných problémov tentoraz absentuje.

Všeobecná schéma algoritmu:

1. Z dát odhadni korelačnú maticu $\rho(3.3)$ a volatilitu $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ a vypočítaj kovariančnú maticu $\Sigma(3.2)$
2. Vygeneruj vektor náhodných čísel $Z \sim N(0, I)$ s rozmerom $[1 \times n]$, kde n je počet podkladových aktív
3. Použi Choleského faktorizáciu a podľa princípu z kapitoly 3.2.3 vygeneruj n -rozmerný vektor z normálneho rozdelenia $X \sim N(0, \Sigma)$
4. Generuj n -rozmerný pohyb podkladového procesu

$$S_i(t+1) = S_i(t) \exp([r - 1/2\sigma^2]dt + \sqrt{dt}X)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad t \in [0, T], \quad dt = T/N, \quad N = \text{počet delení časového intervalu}$$

5. Vypočítaj diskontovanú cenu opcie z danej výplatnej funkcie:

$$C_j = e^{-rT} \max(0, \sum_{i=1}^n S_i(T) - K) \text{ pre európsky typ resp.}$$

$$C_j = e^{-rT} \max(0, \sum_{i=1}^n \bar{S}_i - K) \text{ pre ázijský typ}$$

6. Opakuj m -krát, priemeruj a získaj odhad ceny opcie: $\hat{C} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m C_j$

Záver: Keďže viackrát počas práce sme poukazovali na výhodnosť použitia metódy Monte Carlo vo vysokých dimenziách, v tejto časti sme ukázali jej použitie na 10-rozmerný problém oceňovania opcií. Či už pre košíkové opcie európskeho typu alebo ázijského (aritmetického) typu, pomerne jednoduchou implementáciou, ktorá bola oproti problému jednorozmerných opcií rozšírená iba o potrebu zahrnutia kovariančnej matice do výpočtov, sme určili ceny

Tabuľka 5.9: Cena európskych košíkových opcií pre parametre $\sigma(T = 0.1) = (0.155, 0.278, 0.188, 0.213, 0.288, 0.156, 0.196, 0.205, 0.299, 0.175)$, $\sigma(T = 1) = (0.158, 0.298, 0.2, 0.21, 0.3, 0.134, 0.231, 0.246, 0.234, 0.178)$, $r = 1\%$, $S_0 = (150, 348.5, 21.08, 28.3, 33.79, 28.43, 35.46, 46.25, 21.21, 79.08)$, korelácie a uvedené parametre sú získané na základe historických dát, čas 1 Monte Carlo replikácie

	n=1000		n=10000		n=50000		n=100000	
	\bar{C}	$std(\bar{C})$	\bar{C}	$std(\bar{C})$	\bar{C}	$std(\bar{C})$	\bar{C}	$std(\bar{C})$
K=800, T=0.1	13.22	0.68	13.12	0.24	13.12	0.09	13.11	0.07
kontrolované variety	13.12	0.40	13.11	0.14	13.10	0.05	13.12	0.04
K=850, T=1	22.89	2.03	22.68	0.64	22.69	0.3	22.73	0.21
kontrolované variety	22.80	1.37	22.71	0.45	22.68	0.22	22.75	0.18
čas	0.04s		0.31s		3.37s		35s	

Tabuľka 5.10: Cena ázijských košíkových call opcií typu (2.3), s rovnakými parametrami ako pre európske opcie v tab. 5.9, N =počet bodov priemerovania, počet simulácií=5000 (resp. 2500 + 2500 antithetics pre odhad s redukciovou varianciou), zobrazený je aj čas jednej replikácie

	N=20	N=50	N=100	N=150	N=200	$std(\bar{C})$
	\bar{C}	\bar{C}	\bar{C}	\bar{C}	\bar{C}	
K=800, T=0.1	5.85	6.06	6.18	6.16	6.20	0.17
antithetics	5.90	6.14	6.18	6.15	6.23	0.15
K=850, T=1	12.14	12.80	12.98	13.05	13.04	0.45
antithetics	12.38	12.98	12.91	13.00	13.04	0.43
čas	1.19s	2.37s	4.39s	6.42s	8.44s	

daných opcií, o výsledkoch sa môžeme presvedčiť v tabuľkách 5.9 a 5.10. Výpočtový čas bol relatívne rozumný vzhľadom na dimenziu problému. Zistili sme opäť aj citlivosť metódy na parametre (hlavne času do expirácie a volatility). Pokúsili sme sa implementovať aj predtým diskutované metódy redukcie variancie. Pre európsky typ metóda kontrolovaných variety poskytla signifikantné, aj keď malé zvýšenie spoľahlivosti, ostatné rozoberané metódy nie je vhodné použiť. Pre ázijský typ nebolo možné použiť žiadnu z daných metód a preto sme sa pokúsili použiť inú metódu, konkrétne antithetics variates. Táto však neprinesla žiadne signifikantné zníženie variancie. Pre oba prípady preto ostáva skúmanie metód redukcie variancie otvorené. Sumárom môžeme povedať, že pre daný typ opcií je vhodné používať Monte Carlo simulácie.

5.6 Americké a bermudské opcie

Týmto typom opcií budeme venovať o niečo väčší priestor ako druhom derivátov rozoberaných doteraz. Hlavným dôvodom je ich väčšia komplexnosť a samozrejme aj fakt, že

americké opcie sú suverénne najviac obchodovaným derivátom na svetových finančných trhoch. Algoritmická náročnosť spočíva hlavne v tom, že majú viac možností kedy sa dajú uplatniť, bermudské vo vopred určených časoch (napríklad raz za deň, raz za mesiac), americké dokonca kedykoľvek. Bolo zostavených niekoľko algoritmov, ktoré umožňujú použitie Monte Carlo metódy, pokúsime sa teoreticky ukázať v čom spočívajú dve z nich vybrané a na konkrétnych simuláciách zhodnotiť presnosť či numerickú náročnosť a porovnať tieto výsledky z výsledkami iných numerických metód.

5.6.1 Formulácia problému

V skratke si potrebujeme zdefinovať riešený problém, množstvo faktov ostáva v platnosti ako v predchádzajúcich simuláciách: problém simulácie je definovaný ako Markovovský proces $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$, generovanie podkladových aktív bezrizikovou dynamikou ako geometrický Brownov pohyb s rozdelením $N(r, \sigma^2)$, navyše rozhodovanie o uplatnení opcií v čase t je dané funkciou $X(t)$, avšak sú tu isté podstatné rozdiely.

Majme teda proces predstavujúci diskontovaný payoff opcie v čase t , ozn. $C(t)$, $0 \leq t \leq T$. Okrem toho máme množinu prípustných zastavovacích časov $(\tau, \tau \in [0, T])$. Našou všeobecnou úlohou je nájsť maximum funkcie $C(t)$ cez množinu zastavovacích časov

$$\sup_{\tau} E[C(\tau)]$$

Najlepšie to bude vidieť na príklade americkej put opcie, jej hodnota bude

$$\sup_{\tau} E[e^{-r\tau}(K - S(\tau))^+]$$

hľadáme optimálny zastavovací čas τ^* , pre ktorý platí

$$\tau^* = \inf(t \geq 0 : S(t) \leq b^*(t))$$

kde b^* je optimálna hranica uplatnenia opcie, ak podkladové aktívum dosiahne túto hranicu je optimálne uplatniť opciu.

Je očividné, že bude potrebné zvoliť inú diskrétnu množinu zastavovacích časov a nedá sa úplne vyhovieť podmienke spojitosti možnosti uplatňovania amerických opcií. Pre dostatočne malé časové delenie intervalu zastavovacích časov sme však schopný veľmi dobre aproximovať cenu americkej opcie a súbežne s tým dostávame vhodnú metódu na oceňovanie bermudských typov derivátov.

5.6.2 Metóda náhodných stromov

Ako už naznačuje názov, podstatou tohoto algoritmu bude simulovanie Markovovských procesov $X(t), t \in [0, T]$ pomocou geometrického Brownovho pohybu nasledovným schematickým systémom: zo začiatočnej hodnoty X_0 vygenerujeme v vetiev $X_1^{1, \dots, v}$, z každého takéhoto uzlu vygenerujeme ďalších v vetiev a pokračujem až kým nevyčerpáme predpísaný počet u uzlov. Do pozornosti hneď na začiatku treba dať zjavne exponenciálne narastajúcu náročnosť metódy s ohľadom na parametre v :=parameter vetvenia a u :=počet zastavení(uzlov), kde hlavne druhý z nich je jej veľkým zdrojom.

Dôležitá myšlienka metódy je, že používa na odhad ceny opcie dva vychýlené odhady, horný a dolný, avšak ich vhodným definovaním a kombináciou vieme dostať jeden odhad, ktorý bude takmer taký efektívny ako jeden nevychýlený odhad. Definujme si \hat{V}_h ako horný odhad a \hat{V}_d ako dolný odhad, pričom oba sú priemerom n Monte Carlo simulácii pre dané parametre a danú definíciu odhadu. Potom pre konštrukciu metódy je typická nerovnosť

$$E[\hat{V}_h(v, u)] \geq V_0 \geq E[\hat{V}_d(v, u)]$$

Pre oba, horný aj dolný odhad, vieme nájsť interval spoľahlivosti (povedzme 95%)

$$(IS)_h = (\hat{V}_h(v, u) \pm I(\hat{V}_h(v, u))) \text{ resp } (IS)_d = (\hat{V}_d(v, u) \pm I(\hat{V}_d(v, u)))$$

kde I je horná resp. dolná hranica intervalu spoľahlivosti(kvantil), ktorý sa zužuje pre zväčšujúci sa parameter n , u a v . Keď ich skombinujeme v tom zmysle, že vezmem hornú hranicu horného odhadu a dolnú hranicu dolného odhadu, dostanem 90% interval spoľahlivosti pre hodnotu V_0

$$IS(\hat{V}_0) = (\hat{V}_d(v, u) - I(\hat{V}_d(v, u)), \hat{V}_h(v, u) + I(\hat{V}_h(v, u))) \quad (5.2)$$

Pre takto definovaný interval spoľahlivosti už platí, že zvyšovaním paramateru vetvenia v a počtu uzlov u a tiež nárastom počtu simulácii n sa hodnota bude limitne blížiť ku skutočnej hodnote. Ako blízko sa k nej dostaneme závisí na voľbe parametrov v a u , avšak pre ich veľké hodnoty výpočtový čas narastá exponenciálnou rýchlosťou.

Teraz sa bližšie pozrieme na to ako zostrojím horný resp. dolný odhad a na ich praktickú implementáciu. Pri implementácii budeme používať takzvanú spätnú rekúziu dynamickeho programovania v tvare

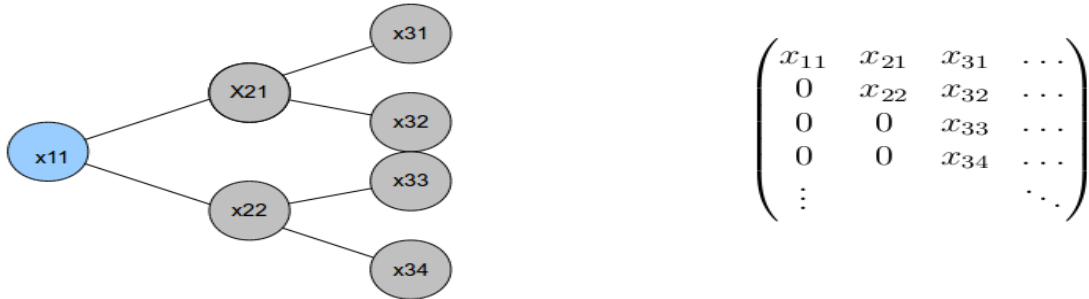
$$V_{i,u} = p(x_{i,u}) \quad (5.3)$$

$$V_{i,j-1} = \max(p(x_{i,j-1}), E[V(x_{ij})|X_{i,j-1}]) \quad (5.4)$$

kde $p(x_{i,u})$ je diskontovaná výpltná funkcia v uzle $x_{i,u}$, V_{ij} je hodnota opcie v danom čase(uzle) x_{ij} , u je počet uzlových bodov. Vo vzťahu 5.4 prvý výraz v maximalizačnej funkcii je aktuálna hodnota, druhý výraz je odhadnutá hodnota, čiže ak je v danom časovom uzle väčšia prvá hodnota, oplatí sa uplatniť opciu, v opačnom prípade je výhodnejšie neuplatniť a pokračovať. Horný a dolný odhad sa bude líšiť spôsobom výpočtu tohoto odhadu v každom uzle. Zavedme si najskôr vhodné označenie uzlov stromu. Hodnota $x_{i,j}$ znamená i -ty uzol na j -tej časovej vrstve (viz. obrázok 5.5).

Horný odhad. Podľa systému spätnej rekúzie indukcie (5.3) a (5.4) potrebujeme teda nájsť nejaký odhad hodnoty opcie $V(x_{i,j-1})$ v danom časovom uzle x_{ij} . Budeme postupovať spätne a to spôsobom, že odhad ceny opcie $V(x_{i,j-1})$ v predchádzajúcom časovom uzle určíme ako priemer hodnôt vo všetkých v uzloch(parameter vetvenia) v ďalšej časovej vrstve, ktoré z neho vychádzajú. Matematicky pre odhad ceny opcie

$$\hat{V}(x_{i,j-1}) = \max \left(p(x_{i,j-1}), \frac{1}{v} \sum_{i=1+c}^{v+c} x_{i,j} \right)$$



Obr. 5.5:

kde c označuje z ktorého uzla vychádzam a nadobúda hodnoty $v, 2v, 3v, \dots, uv$, tj. v =prvý uzol, $2v$ =druhý uzol atď., inak povedané ak sa nachádzame v j -tej časovej vrstve, v ktorej poznám výplatné funkcie $p(x_{ij})$, a chcem vypočítať odhad pre cenu opcie v predchádzajúcej vrstve v uzle $x_{i,j-1}$ musím vypočítať priemer z výplatných funkcií v j -tej časovej vrstve v bodoch x_{ij} , ktoré vychádzajú z uzla $x_{i,j-1}$.

Interval spoľahlivosti pre horný odhad má tvar

$$IS = \bar{V}_h(u, v) \pm z_{\delta/2} \frac{s_h(u, v)}{\sqrt{n}}$$

kde $\bar{V}_h(u, v)$ je výberový priemer a $s_h(u, v)$ je výberová štandardná odchýlka z n replikácií a $z_{\delta/2}$ je $1-\delta$ kvantil.

Hovoríme, že tento odhad je vychýlený zhora v zmysle

$$E[\hat{V}(x_{i,j})] \geq V(x_{i,j})$$

čo vyplýva z faktu, že pri rozhodovaní o tom či uplatniť opciu v danom časovom uzle a výpočte odhadu ceny opcie používame tú istú informáciu. Vlastne porušujeme pravidlá toku informácii tým, že pri rozhodovaní pozeráme o krok do budúcnosti.

Dolný odhad. Tento odhad má snahu odstrániť práve spomínaný defekt horného odhadu a to tak, že sa snaží rozhodovanie o uplatnení a výpočet odhadu ceny opcie informačne oddeliť. Vysvetlíme si to na nasledovnej zjednodušenej schéme, majme problém určiť

$$\max(p, E[Y])$$

kde p je výplatná funkcia v nejakom uzle a $E[Y]$ odhad ceny opcie pre daný uzol. Dolný odhad spočíva v modifikácii výpočtu daného odhadu ceny opcie a to nasledovne. Množinu Y si rozdelíme na dve disjunktné podmnožiny Y_1 a Y_2 a vypočítame ich priemery \bar{Y}_1 a \bar{Y}_2 a tie použijeme na odhad ceny podľa nasledovnej všeobecnej schémy

$$\hat{V} = \begin{cases} p & \text{ak } \bar{Y}_1 < p \\ \bar{Y}_2 & \text{inak} \end{cases}$$

Čiže hodnota \bar{Y}_1 sa použila na rozhodovanie o tom či uplatniť opciu a v prípade rozhodnutia neuplatniť slúži \bar{Y}_2 ako odhad pre pokračujúcu hodnotu, tj. hodnotu v ďalšej časovej vrstve. Takýto odhad je zdola vychýlený v zmysle

$$E[\hat{V}_d] = Pr(\bar{Y}_1 \leq p) \cdot p + (1 - Pr(\bar{Y}_1 \leq p))E[Y] \leq \max(p, E[Y])$$

Teraz sa to pokúsime vysvetliť konkrétnejšie. Vezmime si nejaký uzol $x_{i,j}$, majme parameter $v = 3$, potom z neho budú vychádzať tri vrcholy $x_{1+c,j+1}, x_{2+c,j+1}, x_{3+c,j+1}$, pre $c = 0, v, 2v, \dots, uv$. Označme $N1 = p(x_{1+c,j+1}), N2 = p(x_{2+c,j+1}), N3 = p(x_{3+c,j+1})$. Zrátame odhady

$$\begin{aligned} ak \quad (N2 + N3)/2 > p(x_{ij}) &\Rightarrow P1 = N1 \text{ inak } P1 = p(x_{ij}) \\ ak \quad (N1 + N3)/2 > p(x_{ij}) &\Rightarrow P2 = N2 \text{ inak } P2 = p(x_{ij}) \\ ak \quad (N1 + N2)/2 > p(x_{ij}) &\Rightarrow P3 = N3 \text{ inak } P3 = p(x_{ij}) \end{aligned}$$

resp. všeobecne

$$\text{ak } (N_1 + \dots + N_{k-1} + N_{k+1} + \dots + N_v)/(v-1) > p(x_{ij}) \Rightarrow P_k = N_k \text{ inak } P_k = p(x_{ij})$$

Čo sme teda spravili. Za účelom odhadu sme vždy vynechali jeden vrchol a zo zvyšných dvoch (resp. $v-1$ vrcholov pre iné hodnoty parametra v) vrcholov sme vypočítali očakávanú výplatu, teda priemer výplat pre danú množinu $v-1$ vrcholov. Túto odhadnutú hodnotu porovnáme s hodnotou výplaty vo vrchole x_{ij} a podľa toho sa rozhodujeme, či uplatniť opciu alebo pokračovať. Vynechaná hodnota bude slúžiť ako výplata, ktorú dostaneme ak sa rozhodneme neuplatniť opciu vo vrchole x_{ij} . Ako posledný krok dopočítame výplatu v uzle x_{ij} ako priemer

$$\hat{V}_d = (P_1 + \dots + P_v)/v$$

Interval spoľahlivosti pre dolný odhad má tvar

$$IS = \bar{V}_d(u, v) \pm z_{\sigma/2} \frac{s_d(u, v)}{\sqrt{n}}$$

kde $\bar{V}_d(u, v)$ je výberový priemer a $s_d(u, v)$ je výberová štandardná odchýlka z n replikácií a $z_{\sigma/2}$ je $1-\delta$ kvantil.

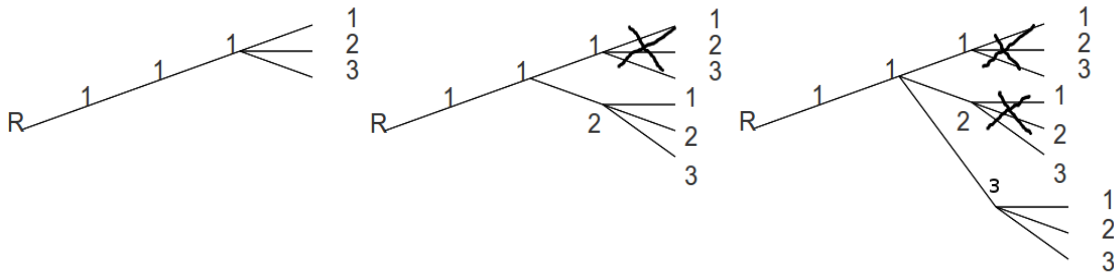
Nakoniec z týchto odhadov, dolného a horného odhadu, dostaneme interval spoľahlivosti pre odhad hodnoty \hat{V}_0 naznačený v (5.2) v konkrétnom tvare

$$IS(\hat{V}_0(u, v)) = \left(\bar{V}_{0d}(u, v) - z_{\delta/2} \frac{s_d(u, v)}{\sqrt{n}}, \bar{V}_{0h}(u, v) + z_{\delta/2} \frac{s_h(u, v)}{\sqrt{n}} \right)$$

$\bar{V}_{0d}(u, v)$ je stredná hodnota dolného odhadu ceny opcie v čase 0, $s_d(u, v)$ je štandardná odchýlka týchto dolných odhadov a $z_{\delta/2}$ je $1-\delta$ kvantil normálneho rozdelenia, analogicky sme získali hodnoty pre horný odhad. Tento odhad sa potom asymptoticky so zvyšujúcou sa počítačovou náročnosťou blíži ku skutočnej hodnote a podľa uvedenej schémy môžeme vypočítať cenu konkrétnej bermudskej opcie alebo aproximovať cenu americkej opcie.

Broadie a Glasserman[5][11] navrhli zefektívnenie algoritmu z pohľadu výpočtového času a redukcie variancie. Vychádza z faktu, že hodnota horného a dolného odhadu v konkrétnom uzle závisí len od podstromu vychádzajúceho z tohoto uzla, vďaka čomu sa dá skonštruovať algoritmus, ktorého výpočtová náročnosť sa zníži z exponenciálnej na rád $O(uv + 1)$.

Myšlienku metódy si môžeme demonštrovať na zjednodušenom príklade. Označme si postupnosť uzlov ako $j_1 j_2 \dots j_i$, kde každé j_i môže nadobudnúť v hodnôt $1, \dots, v$, v je parameter vetvenia, a majme nejakú začiatočnú hodnotu ozn. R , z ktorej vychádzame. Budeme sledovať len jednu vetvu namiesto toho aby sme vygenerovali celý strom. Majme štvorkrokový strom (viz. obr.(5.6)) s parametrom vetvenia $v = 3$. Začneme vygenerovaním "najvrchnejšieho uzla- 1111, kde zistíme že nemôžeme ísť ďalej, a preto vygenerujeme všetkých nasledovníkov uzla 111- tj. máme tri uzly 1111,1112,1113. Z týchto uzlov vypočítame dolný a horný odhad. Odhady si uložíme, uzly "zahodíme" a pokračujeme kde sme skončili, teda vygenerujeme ďalšieho nasledovníka uzla 11- tj uzol 112 jeho nasledovníkov 1121,1122,1123 a znova vypočítame odhady, "zahodíme" uzly a pokračujeme vygenerovaním uzla 113 a jeho nasledovníkov a postup opakujeme. Týmto spôsobom pokračujeme, až kým neprídeme k hodnote R , čo bude požadovaná cena bermudskej resp. americkej opcie.



Obr. 5.6: Priebeh algoritmu na zníženie výpočtovej náročnosti, uzly sú generované postupne

5.6.3 Regresná metóda Monte Carlo

V tejto sekcii sa budeme venovať využitiu regresie pre výpočet cien bermudských a amerických opcií, známy algoritmus tohoto typu navrhli Longstaff a Schwartz[14] viac k problému môžeme nájsť aj u Glassermana[5] a u Korn,Korn,Kroisandt[2] a tiež u Chidinma[15].

Základná myšlienka je výpočet cien opcií $C_i(x)$ ako regresie z hodnôt $V_{i+1}(X_{i+1})$ stavovej premennej x , ktorá môže predstavovať hodnoty stochastického procesu. Regresný odhad spočíva v lineárnej kombinácii funkcií premennej x a výpočte regresných koeficientov. Úlohu si môžeme vyjadriť nasledovne

$$E[V_{i+1}(X_{i+1})|X_i = x] = \sum_{r=1}^M \beta_{ir} \psi_r(x)$$

kde $\psi_r : R^d \rightarrow R$ sú bázické funkcie pre regresiu a β_{ir} sú konštanty, $r = 1, \dots, M$. Cenu opcie C_i môžeme prepísať do nasledovného tvaru

$$C_i(x) = \beta_i^\top \psi(x)$$

kde $\beta_i^\top = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{iM})$ a $\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_M(x))$ vektor koeficientov β_i bude daný vzťahom

$$\beta_i = (E[\psi(X_i)\psi(X_i)^\top])^{-1}E[\psi(X_i)V_{i+1}(X_{i+1})] \equiv B_\psi^{-1}B_{\psi V}$$

pre nejakú maticu B_ψ rozmeru $M \times M$ a vektor $B_{\psi V}$ rozmeru M . Koeficienty β_{ir} budeme odhadovať z dvojíc hodnôt $(X_i, V_{i+1}(X_{i+1,j}))$, $j = 1, \dots, b$, čiže z hodnoty procesu X v čase i a hodnoty opcie v čase $i + 1$. Keď predpokladáme, že hodnoty $V_{i+1}(X_{i+1,j})$ sú známe a procesy (X_{1j}, \dots, X_{mj}) sú nezávislé potom odhad metódou najmenších štvorcov je daný

$$\hat{\beta}_i = \hat{B}_\psi^{-1}\hat{B}_{\psi V} \quad (5.5)$$

a elementy matice \hat{B} resp. vektora $\hat{B}_{\psi V}$ majú predpis

$$\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \psi_q(X_{ij})\psi_r(X_{ij}) \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \psi_r(X_{ik})V_{i+1}(X_{i+1,k})$$

Samozrejme hodnoty V_{i+1} sú zvyčajne neznáme preto ich nahradíme odhadmi \hat{V}_{i+1} . Všetky ostatné hodnoty vieme odhadnúť z párov po sebe nasledujúcich vygenerovaných hodnôt podkladového procesu $(X_i, X_{i+1,j})$, $j = 1, \dots, b$. Podľa takto zadaných pravidiel dostávame odhad ceny opcie v tvare

$$\hat{C}_i(x) = \hat{\beta}_i^\top \psi(x) \quad (5.6)$$

Pre takto zadanú regresnú metódu môžeme zostaviť algoritmus na Monte Carlo odhad bermudskej resp. americkej opcie, má nasledovný všeobecný tvar:

1. Generuj b nezávislých ciest (X_{1j}, \dots, X_{mj}) , $j = 1, \dots, b$ podkladového Markovovského procesu
2. V koncových uzloch nastav $\hat{V}_{mj} = p_m(X_{mj})$, p_m je výplatná funkcia opcie
3. Použi spätnú indukciu(dynamiku): pre $i = m - 1, \dots, 1$
 - pre dané hodnoty $\hat{V}_{i+1,j}$, $j = 1, \dots, b$ použi regresiu podľa zadaných pravidiel a vypočítaj odhad $\hat{\beta}_i = \hat{B}_\psi^{-1}\hat{B}_{\psi V}$ (5.5)
 - vypočítaj \hat{C}_i podľa vzťahu(5.6) a nastav

$$\hat{V}_{ij} = \max\{p_i(X_{ij}), \hat{C}_i(X_{ij})\}, \quad j = 1, \dots, b \quad (5.7)$$

4. Nastav $\hat{V}_0 = (V_{11} + \dots + V_{1b})/b$, dostávame Monte Carlo odhad ceny opcie

Tabuľka 5.11: Porovnanie výpočtu ceny americkej call opcie regresnou metódou Monte Carlo (pre $N = 50000$ simulácii a n =počet delení časového intervalu), metódou Cox-Ross-Rubenstein(n =počet delení časového intervalu) a metódou konečných diferencií(n =počet delení priestoru ceny akcie a času), parametre: $\sigma(T = 0.33) = 0.236, \sigma(T = 1) = 0.279, r = 1\%$

$S_0=46.12$	Regresia Monte Carlo			CRR metóda		Konečné diferencie		
n	100	200	300	100	300	100	300	500
K=48,T=0.33	1.77	1.77	1.78	1.78	1.77	1.48	1.73	1.78
K=40,T=1	8.68	8.69	8.71	8.71	8.70	8.70	8.70	8.70
čas(std)	18s(0.01)	36s(0.01)	55s(0.01)	0.22s	1.35s	0.01s	0.02s	0.04s

Pre $b \rightarrow \infty$ odhad \hat{V}_0 konverguje ku skutočnej hodnote $V_0(X_0)$. Najznámejšia úprava tohoto všeobecného algoritmu navrhli Longstaff a Schwartz[14], konkrétne odhad (5.7) v algoritme nahradili nasledovným odhadom

$$\hat{V}_{ij} = \begin{cases} p_i(X_{ij}) & \text{ak } p_i(X_{ij}) \geq \hat{C}_i(X_{ij}) \\ \hat{V}_{i+1,j} & \text{ak } p_i(X_{ij}) < \hat{C}_i(X_{ij}) \end{cases}$$

rovnako navrhujú vynechať uzly pre ktoré platí: $p(X_{ij}) = 0$. Takýto odhad opäť konverguje pre $b \rightarrow \infty$ ku skutočnej hodnote. Avšak z dôvodu diskrétného generovania pohybu ceny opcie bude v praxi prítomné vychýlenie smerom nadol od skutočnej hodnoty.

Presnosť či úspešnosť počítania cien opcií na základe regresie závisí aj od vhodne zvolených bázičiek funkcií. Najčastejšou voľbou sú polynómy, a navyše platí, že so stúpajúcou dimenziou (počtom podkladových aktív) rýchlo narastá počet bázičiek funkcií, ktoré musíme použiť. Na stručný prehľad možných tvarov bázičiek funkcií je možné nahliadnuť v nasledujúcej tabuľke, tak ako boli navrhnuté u Korn,Korn,Kroisandt[2].

typ	Bázičké funkcie
1	$I_m = (1, 1, 1..1, 1)$
2	$S_1, S_2, \dots, S_m + \text{typ 1}$
3	všetky mocniny do 3. rádu: $S_i, S_i^2, S_i^3, i=1, \dots, m$
4	$S_i, S_i^2, S_i^3, i = 1, \dots, m + h(S_1, S_2, \dots, S_m)$
5	mocniny do 3. rádu jednej premennej + $h(S_1, S_2, \dots, S_m)$ + krížne násobky: $S_i \cdot S_j (i \neq j)$
6	všetky mocniny do 7. rádu

Všeobecne lepšie výsledky sa dosahujú s typom 5 s krížnymi násobkami, ale prezentované bázičké funkcie nie sú záväzné a prípustné sú ďalšie modifikácie týchto základných funkcií.

Pre lepšie pochopenie mechanizmu metódy si ukážeme výpočet ceny opcie s parametrami $T = 1, \sigma = 0.279, r = 0.01, K = 40, S_0 = 46.12$, pričom budeme pre jednoduchosť uvažovať dva zastavovacie časy: $t_1 = 0.5, t_2 = 1$ a vykonáme 3 simulácie. Značenie je nasledovné: V :=matica odhadnutých výplat v danom čase t_i (podľa (5.7)), E :=matica výplat ak využijeme opciu v danom čase t_i , St :=časový vývoj podkladového aktíva a β označuje

regresný koeficient. Stĺpce matíc označujú zastavovacie časy a riadky matice predstavujú jednotlivé simulácie. Potom algoritmus má nasledovný priebeh:

1. *Simuluj podkladové aktívum a vypočítaj matice C , E v koncovom čase:*

$$St = \begin{pmatrix} 46.12 & \mathbf{49.659} & 52.581 \\ 46.12 & 36.262 & 41.586 \\ 46.12 & \mathbf{52.165} & 41.135 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{12.581} \\ 0 & 0 & 1.586 \\ 0 & 0 & \mathbf{1.135} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 9.659 & 52.581 \\ 0 & 0 & 41.586 \\ 0 & 12.165 & 41.135 \end{pmatrix}$$

2. *V čase $t_1 = 0.5$ (tj. v druhom stĺpci) nájdí riadky, v ktorých sú hodnoty matice St nenulové (v tomto prípade 1 a 3) a vektor týchto hodnôt použi ako vstup do regresie X , ako vstup Y do regresie diskontuj hodnoty (v riadkoch 1 a 3) prislúchajúce nasledovnej časovej vrstve ($t_2 = 1$) matice V :*

$$X = \begin{pmatrix} 49.659 \\ 52.165 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 12.5178 \\ 1.1295 \end{pmatrix}$$

3. *Odhadni koeficient β , v tomto prípade je daný ako:*

$$RegMat = [\text{ones}(\text{size}(X, 1), 1), X, X.^2, X.^3], \quad \beta = RegMat \setminus Y$$

(zápis regresie v matlabe, základné funkcie sú X, X^2, X^3)

$$\Rightarrow \beta = (0, 0, 0.0974413, -0.001859985)$$

a využi metódu spätnej indukcie podľa (5.7), potom odhad pre V je pomocou regresie daný ako

$$V([1, 3], 2) = 0 + 0.X + 0.0974413.X^2 - 0.001859985.X^3 = \begin{pmatrix} 12.5178 \\ 1.1295 \end{pmatrix}$$

teda matice V má tvar a porovnaním s maticou E dostávame stratégiu uplatnenia

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 12.5178 & 12.581 \\ 0 & 0 & 1.586 \\ 0 & 1.1295 & 1.135 \end{pmatrix}, \xrightarrow{\text{uplatni ak } E > V} \text{stratégia} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ak stratégia=1 (pre daný index ij matíc) nahraď hodnotu v matici V hodnotou z matice E , ak stratégia=0 nahraď hodnotu vo V diskontovanou hodnotou E z nasledujúcej časovej vrstvy, potom dostávame konečný tvar matice V , ktorý by sme mohli použiť v ďalšej iterácii ak by sme mali viac časov zastavenia. Pre tento príklad tu algoritmus končí, pokračujeme výpočtom ceny

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 12.5178 & 12.581 \\ 0 & 1.578 & 1.586 \\ 0 & 12.165 & 1.135 \end{pmatrix}$$

4. *Vypočítaj cenu opcie podľa stratégie uplatnenia z matice St*

$$St = \begin{pmatrix} 46.12 & 49.659 & \mathbf{52.581} \\ 46.12 & 36.262 & \mathbf{41.586} \\ 46.12 & \mathbf{52.165} & 41.135 \end{pmatrix},$$

$$cena = \frac{\text{payoff}}{\text{počet simulácií}} = \frac{e^{-0.01 \cdot 1}(12.581 + 1.586) + e^{-0.01/2}12.156}{3} = 8.71$$

Zvyšovanie počtu simulácii prirodzene zvýši počet riadkov matíc, a zvyšovanie počtu zastavovacích časov zase zvýši počet stĺpcov matíc. Analogickým spôsobom pre menší počet zastavovacích časov môžeme oceňovať rôzne bermudské opcie a vysokým počtom zastavovacích časov môžeme aproximovať americké opcie a tiež môžeme meniť podľa potreby výplatnú štruktúru.

Záver: V tejto sekcii sme predstavili dva spôsoby, ktorými sa dajú metódami Monte Carlo oceňovať americké resp. bermudské opcie. Vzhľadom na komplikovanejší charakter tohoto druhu opcií aj algoritmy vychádzajúce z princípov Monte Carlo boli komplikovanejšie v porovnaní s algoritmami európskych či exotických typov opcií a bolo navrhnutých viacero rozličných metód výpočtu, dobrý prehľad nájdeme u Glassermana[5]. My sme sa zamerali na najpoužívanejší z týchto algoritmov, ktorým je regresná metóda Monte Carlo. Ukazuje sa, že je dobrým nástrojom na oceňovanie bermudských opcií malým počtom zastavení, kde sa javí ako veľmi efektívna voľba. Metóda náhodných stromov je vhodnou na použitie len pre malý počet bodov zastavenia, inak sa stáva veľmi neefektívnou a môže byť metódou výpočtu rovnako pre bermudské opcie s malým počtom možností uplatnenia opcie. Konkurenčnou a porovnateľnou možnosťou v jednorozmernom prípade je použitie metódy binomických stromov.

Rovnako pre veľký počet zastavení môžeme touto metódou aproximovať aj cenu americkej opcie (viz. tabuľka 5.11, použili sme bázické funkcie typu 3), kde však narážame na problém rýchlo sa zvyšujúceho výpočtového času s rastom počtu bodov zastavenia a taktiež diskretný charakter možností zastavenia bude generovať podhodnotené, tzv. nadol vychýlené odhady, ktoré pre zvyšujúci sa počet Monte Carlo simulácii nekonvergujú ku skutočnej hodnote, ale len ku hodnote závislej od počtu bodov zastavenia. Rovnako ako v ostatných jednorozmerných prípadoch aj na americké opcie sme aplikovali metódu redukcie variancie, konkrétne metódu moment matching, a výrazne zvýšiť spoľahlivosť odhadov. Výpočtový čas rýchlo rastie pri použití veľkého počtu simulácii (v rádoch vyšších ako 10^4) a vysokého počtu časov zastavení z dôvodu rýchlo sa zvyšujúcich nárokov na pamäťovú kapacitu. V jednorozmernom prípade preto nájdeme spoľahlivejšie resp. rýchlejšie metódy na ich oceňovanie ako sa dá vidieť v tabuľke 5.11.

Avšak rovnako ako pre už analyzované problémy aj regresnú metódu Monte Carlo vieme aplikovať na vyššie dimenzie a týmto efektívne oceniť viacerozmerné bermudské opcie, košík amerických opcií resp. iné špecifické typy viacerozmerných opcií daného typu. Glasserman v [5] použil metódu na 7-rozmerný problém oceňovania americkej opcie, Longstaff a Schwartz[14] počítali americko-ázijské opcie, teda ázijské opcie s ľubovoľným časom uplatnenia, Korn, Korn, Kroisandt[2] použili metódu na výpočet americkej 3-rozmernej *max* opcie, teda opcie ktorá vypláca rozdiel maximálnej hodnoty z troch aktív a expiračnej ceny a okrem toho všetci z týchto autorov porovnávali výsledky pre rozličné použité bázické funkcie, ktoré taktiež mali vplyv na výsledok. Aj na základe týchto výsledkov a našich zistení môžeme povedať, že regresná metóda Monte Carlo môže byť efektívny spôsob výpočtu rozličných typov viacerozmerných amerických či bermudských opcií a poskytuje zaujímavú oblasť na ďalšie skúmanie možností aplikácie metódy.

Kapitola 6

Simulácia modelov úrokových mier

V tejto kapitole prejdeme od simulácii cien opcií ku derivátom úrokovej miery. Aj v tejto oblasti nachádzajú Monte Carlo metódy široké uplatnenie. Môžeme ju aplikovať na short-rate modely a modely vychádzajúce z Heath-Jarrow-Morton rámca predstavené v kapitole 2.3, a boli by sme schopný zostrojiť numerickú schému využívajúcu myšlienok Monte Carlo metód a vďaka tomu simulovať vývoj úrokových mier resp. časovú štruktúru úrokových mier a následne počítat ceny dlhopisov alebo ceny derivátov ako sú swapy a capy. Množstvo podrobností o daných aplikáciach nájdeme v [5][2][22]. My sme vybrali pre aplikáciu Monte Carlo simulácii LIBOR model, ktorého podstatu vysvetlíme v ďalšom texte a následne ukážeme aj spôsob, ako pomocou simulácii vypočítat cenu derivátu *cap*.

6.1 Forwardové úrokové miery

6.1.1 LIBOR model úrokových mier

Tento model popisuje vývoj časovej štruktúry úrokových mier prostredníctvom forwardových úrokových mier. Oproti spomínaným modelom z kapitoly 2.3 nie je založený na spojitom priebehu, ale časová štruktúra úrokových mier je určovaná len v daných časových uzloch. Práve tento prípad sa lepšie približuje reálnej situácii, keďže úrokové miery nie sú určované spojite. Takýto model sa nazýva aj LIBOR model úrokových mier.

Označme si L ako nejakú mieru prislúchajúcu pre nejaký časový interval δ (typicky nadobúda hodnoty $\delta = 1/4$ pre štvrtrok a podobne). Úrokový výnos z jednej peňažnej jednotky v danom časovom intervale je δL . Potom forwardovú úrokovú mieru si môžeme predstaviť tak, že keď zafixujeme δ a určíme si nejaký čas do expirácie, potom forwardová miera $L(0, T)$ je miera nastavená pre čas 0 a platná na intervale $[T, T + \delta]$. Čiže ak vstúpime do nejakého kontraktu v čase 0 za účelom požičania si jednej peňažnej jednotky v čase T a vyplatíme ju úrokom v čase $T + \delta$, tak výnos za toto obdobie bude $\delta L(0, T)$. Vzťah

medzi forwardovou LIBOR mierou a cenami dlhopisov je daný vzťahom

$$L(0, T) = \frac{B(0, T) - B(0, T + \delta)}{\delta B(0, T + \delta)}$$

okrem toho vieme napísať vzťah medzi LIBOR mierou a spojitou forwardovou mierou

$$L(0, T) = \frac{1}{\delta} \left(\exp \left(\int_T^{T+\delta} f(0, u) du \right) - 1 \right)$$

Ďalej treba poznamenať, že LIBOR miery budeme považovať za bezrizikové, teda budú spĺňať podmienku bezarbitrážneho oceňovania.

Ako bolo povedané, v tomto type modelu budeme uvažovať konečnú, vopred fixovanú množinu expiračných časov

$$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_M < T_{M+1}$$

ďalej označme dĺžku časového intervalu medzi jednotlivými expiračnými časmi ako

$$\delta_i = T_{i+1} - T_i, \quad i = 0, 1, \dots, M$$

Pre každý čas do expirácie T_n majme definovanú $B_n(t)$ cenu dlhopisu v čase t , ktorý vyprší v čase T_n , $0 \leq t \leq T_n$. Obdobne forwardovú mieru v čase t zodpovedajúcu expiračnému času $[T_n, T_{n+1}]$ budeme označovať ako $L_n(t)$. Na základe tejto terminológie si môžeme vyjadriť vzťah medzi forwardovou mierou a cenou dlhopisu ako

$$L_n(t) = \frac{B_n(t) - B_{n+1}(t)}{\delta_n B_{n+1}(t)}, \quad 0 \leq t \leq T_n, \quad n = 0, 1, \dots, M$$

kde si treba uvedomiť, že po čase T_n určenie $L_n(t)$ nemá zmysel, a platí že $L_n(t) = L_n(T_n)$ pre $t > T_n$. Okrem toho vieme obrátiť tento vzťah a určiť cenu dlhopisu v expiračných časoch zo znalosti forwardových mier

$$B_n(T_i) = \prod_{j=i}^{n-1} \frac{1}{1 + \delta_j L_j(T_i)}, \quad n = i + 1, \dots, M + 1$$

kde treba mať na pamäti, že LIBOR forwardové miery určujú cenu dlhopisu len v daných expiračných časoch, nie však v ľubovoľnom čase $T_n \leq t \leq T_{n+1}$ medzi nimi, a to kvôli neznalosti diskontného faktora v časoch t . Celú túto schému si môžeme prehliadnúť na obrázku 6.1. .

Majme funkciu $q : [0, T_{M+1}] \rightarrow \{1, \dots, M + 1\}$, kde $q(t)$ bude práve jedno číslo také, že

$$T_{q(t)-1} \leq t \leq T_{q(t)}$$

čo znamená, že funkcia $q(t)$ priradzuje index nasledujúceho expiračného času pre ľubovoľne zvolené t a vďaka tomu môžeme dedefinovať cenu dlhopisu aj v ľubovoľnom čase t predpisom

$$B_n(t) = B_{q(t)}(t) \prod_{j=q(t)}^{n-1} \frac{1}{1 + \delta_j L_j(t)}, \quad 0 \leq t < T_n$$

Druhá možnosť, ktorú môžeme využiť je modelovať vývoj pod tvz. *forwardovou mierou*, ozn. P_{M+1} , s prislúchajúcim expiračným časom T_{M+1} a vziať ako numeraire dlhopis B_{M+1} a opäť definovať diskontovaný dlhopis ako $D_n(t) = B_n(t)/B_{M+1}$ kde

$$D_n(t) = \prod_{j=n+1}^M (1 + \delta_j L_j(t))$$

a znova by sme boli schopný zistiť, že stochastická diferenciálna rovnica pre dynamiku LIBOR mier prejde na tvar

$$\frac{dL_n(t)}{L_n(t)} = - \sum_{j=n+1}^M \frac{\delta_j L_j(t) \sigma_n(t)^\top \sigma_j(t)}{1 + \delta_j L_j(t)} dt + \sigma_n(t)^\top dW^{M+1}(t), \quad 0 \leq t \leq T_n \quad (6.3)$$

Keď vezmeme $n = M$ dostávame

$$\frac{dL_M(t)}{L_M(t)} = \sigma_M(t)^\top dW^{M+1}(t)$$

a zisťujeme, že L_M je martingal pod forwardovou mierou pre čas expirácie T_{M+1} a navyše ak σ_M je deterministické potom $L_M(t)$ má lognormálne rozdelenie $\log N(-\tilde{\sigma}_M^2(t)/2, \tilde{\sigma}_M^2(t))$, kde

$$\tilde{\sigma}_M(t) = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \|\sigma_M(u)\|^2 du} \quad (6.4)$$

6.1.2 Simulácia LIBOR forwardových mier a oceňovanie derivátov

Oceňovanie derivátov úrokových mier si zvyčajne vyžaduje použitie simulácii, práve Monte Carlo simulácie sú veľmi častou voľbou ako získať cenu derivátov ako sú caplets resp. capy alebo swaptions resp. swapy, a samozrejme množstva iných typov derivátov.

Pri simuláciach LIBOR mier budeme vždy fixovať časové uzly $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1}$, ktoré budú splývať so zadanými časmi expirácie. Ako sme spomínali budeme používať konštantnú volatilitu. Okrem toho musíme akceptovať, že pri simuláciach bude prítomná istá diskretizačná chyba, ktorej sa ťažko vyhnúť, aj keď existujú diskretizačné metódy vyvinuté za týmto účelom, ktoré sa ju snažia minimalizovať.

Máme viacero možností ako simulovať LIBOR miery, častá voľba je jednoduchá Eulerova schéma, ktorá v princípe simuluje dynamiku ľubovoľnej stochastickej diferenciálnej rovnice (pre náš prípad 6.3), ktorú aj použijeme.

Budeme postupovať podľa nasledujúcej schémy, ktorá v súlade s (6.3) má tvar

$$L_n(t_{i+1}) = L_n(t_i) + \mu_n(L(t_i), t_i) L_n(t_i) [t_{i+1} - t_i] + L_n(t_i) \sqrt{t_{i+1} - t_i} \sigma_n(t_i)^\top Z_{i+1} \quad (6.5)$$

s driftom v tvare

$$\mu_n(L(t_i), t_i) = - \sum_{j=n+1}^M \frac{\delta_j L_j(t_i) \sigma_n(t_i)^\top \sigma_j(t_i)}{1 + \delta_j L_j(t_i)}$$

kde Z_1, Z_2, \dots sú nezávislé náhodné vektory s rozdelením $N(0, I)$ v priestore R^m . Okrem toho predpokladajme, že máme k dispozícii vstupný vektor cien dlhopisov, a nastavíme začiatocný vektor LIBOR mier podľa predpisu

$$L_n(0) = \frac{B_n(0) - B_{n+1}(0)}{\delta_n B_{n+1}(0)}, \quad n = 1, \dots, M \quad (6.6)$$

Na základe takto definovaného modelu pre dynamiku vývoja LIBOR úrokových mier si ukážeme ako oceňovať deriváty typu *cap*. Cap si môžeme predstaviť ako množinu tvz. capletov, pričom každý caplet môžeme chápať ako jednoduchú call opciu na forwardovú mieru (LIBOR).

Ak uvažujeme časový interval pre konkrétny expiračný čas $[T_n, T_{n+1}]$, k nemu uvažujeme podkladovú úrokovú mieru L_n , ktorej hodnota $L_n(T_n)$ je fixovaná v čase T_n . Ďalej si označíme expiračnú cenu ako K a výplatnú funkciu pre caplet v tvare $\delta_n(L_n(T_n) - K)^+$. Cenu takto definovaného capletu v čase t označme $C_n(t)$, cenu v terminálnom čase poznáme: $C_n(T_{n+1}) = \delta_n(L_n(T_n) - K)^+$ a našou úlohou bude nájsť cenu v čase 0, tj. $C_n(0)$.

Pri forwardovej miere P_{n+1} s prislúchajúcim expiračným časom T_{n+1} , vlastnosť martingalu sa aplikuje na výraz $C_n(t)/B_{n+1}(t)$ a pre hodnotu $C_n(0)$ teda dostávame

$$C_n(0) = B_{n+1}(0)E_{n+1} \left[\frac{\delta_n(L_n(T_n) - K)^+}{B_{n+1}(T_{n+1})} \right] \quad (6.7)$$

kde E_{n+1} je očakávanie pri miere P_{n+1} a navyše $B_{n+1}(T_{n+1}) = 1$ a teda dané očakávanie závisí len od pravdepodobnostného rozloženia $L_n(T_n)$. Ak navyše vezmeme σ_n ako deterministické, potom $L_n(T_n)$ má lognormálne rozloženie $\log N(-\tilde{\sigma}_n^2(T_n)/2, \tilde{\sigma}_n^2(T_n))$, kde $\tilde{\sigma}_n$ spĺňa (6.4).

Pre analogicky definovaný caplet existuje aj analytická aproximácia, tvz. *Black formula*, ktorá má tvar

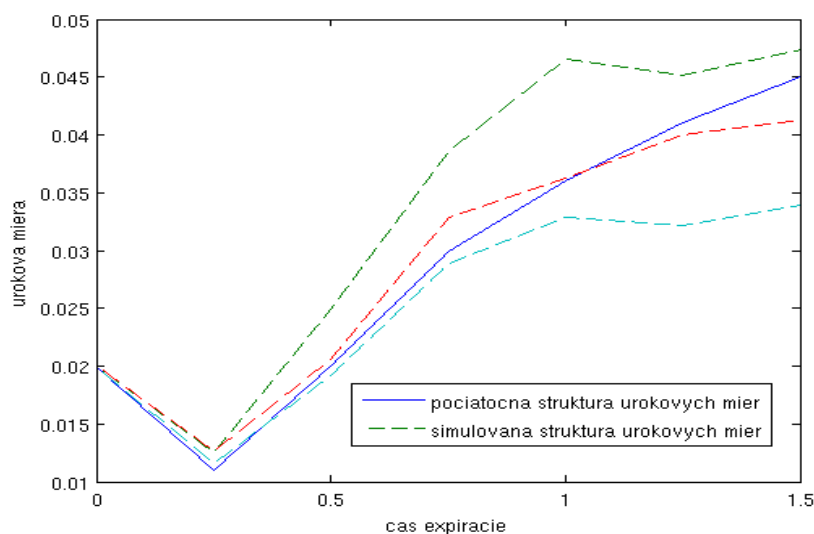
$$C_n(0) = b \left(F \Phi \left(\frac{\log(F/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} \right) - K \Phi \left(\frac{\log(F/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right) \quad (6.8)$$

kde v súlade s doterajším značením $F = L_n(0)$, $\sigma = \tilde{\sigma}_n(T_n)$, $T = T_n$ a $b = \delta_n B_{n+1}(0)$.

Ako sme povedali derivát typu cap je súborom vyššie zadaných capletov, teda istých platieb vyplácaných v stanovených expiračných termínoch T_i . Nasledujúca schéma podrobne popisuje jeden konkrétny výstup a predstavuje všeobecný algoritmus na výpočet ceny derivátu cap

1. Zdefinujeme si parametre $\delta = 0.25$ (rovnaké časové rozostupy medzi expiračnými časmi), $\sigma = 0.2$ (konštatná volatilita), $K = 0.02$ (expiračná cena) a zvolíme $n=6$ (čiže máme 1.5 ročný cap derivát), vstupný vektor forwardových cien je $L_n(0) = (0.02, 0.011, 0.02, 0.03, 0.036, 0.041, 0.045)$
2. Vygeneruj forwardovú LIBOR štruktúru úrokových mier predpisom (6.5) a vypočítaj prislúchajúci numeraire podľa predpisu

$$B_{n+1}(T_i) = \prod_{j=i}^{n+1} \frac{1}{1 + \delta_j L_j(T_i)}$$



Obr. 6.2: Simulácia štruktúry úrokovej miery, plnou čiarou je znázornená počiatočná štruktúra LIBOR mier a prerušovanou čiarou 3 jej simulácie

a diskontovanú cenu opcie ako

$$C_i(T_{i+1}) = \frac{(L_i(T_i) - K)^+}{B_{n+1}(T_{i+1})} \quad (6.9)$$

jeden takýto výstup je v nasledujúcich tabuľkách (viz. tabuľka 6.1)

Tabuľka 6.1: Jeden výstup výpočtu ceny cap podľa schémy (6.9) pomocou simulácii LIBOR modelu, následný výstup cien pre daný počet n simulácii spolu so štandardnou chybou odhadu a porovnanie s antithetics odhadom(4.8) pre $n=(n/2+n/2)$ antithetics) simulácii

T_i	0	0.25	0.50	0.75	1.0	1.25	1.5	
$L_i(T_i)$	0.0200	0.0136	0.0217	0.0339	0.0379	0.0423	0.0528	
$B_{n+1}(T_{i+1})$		0.9454	0.9547	0.9581	0.9686	0.9782	0.9870	$V = \sum_{i=1}^n C_i(T_{i+1})$
$C_i(T_{i+1})$		0	0	0.0017	0.0144	0.0183	0.0226	0.0569
	n=1000		n=10000		n=100000			
	\bar{V}	SE	\bar{V}	SE	\bar{V}	SE		
	50.14	0.71	49.01	0.22	48.94	0.07		pre násobené *1000
antithetics	49.06	0.75	48.72	0.24	48.94	0.08		pre násobené *1000
čas(antithetics)	0.37(0.24)s		3.7(2.1)s		55(28)s			

3. Vypočítaj cenu opcie z danej simulácie ako: $V = \sum_{i=1}^n C_i(T_{i+1}) = 0.0569$

4. Opakuj N -krát a získaj Monte Carlo odhad: $\hat{V} = \sum_{i=1}^{10^6} V_i = 0.04898(\text{SE}=0.0002)$

Záver: Monte Carlo simulácia je účinným a široko použiteľným nástrojom na simulovanie vývoja úrokových mier, či už spojitého charakteru alebo ako sme ukázali v tejto kapitole diskrétného charakteru, čiže LIBOR modely úrokových mier a navyše simulácia ponúka vysokú flexibilitu pre oceňovanie derivátov úrokových mier. Zaoberali sme sa oceňovaním derivátu typu cap, kde sme neboli obmedzovaný množstvom a charakterom expiračných časov či tvarom volatility. Aj keď sme použili konštatnú volatilitu, v praxi pomocou zložitejších metód môžeme určiť presnú štruktúru volatility, krátko k tomuto problému nájdeme v [5], na presnejší výpočet ceny derivátu. V analytickom prístupe sa nám ponúka Blackova formula na výpočet caplets majúca obmedzenia a často na riešenie problémov nie je postačujúca.

Celkovo je preto simulačný prístup metódy Monte Carlo výhodnejší a prirodzenejší pre oceňovanie reálnych cien derivátov trhových úrokových mier. Taktiež sme skúmali možnosti použitia jednoduchej metódy redukcie variancie, tzv. antithetics, ktorá aj keď významné zníženie variancie neponúka, šetrí istý výpočtový čas. Avšak zostáva tu otvorený priestor na skúmanie sofistikovanejších metód zvyšovania efektívnosti metódy.

Ako iné aplikácie podobného typu môžeme uviesť často používané swapy [10] a pomocou Monte Carlo metód simulovať vývoj swapových mier a následne počítať deriváty ako sú swaptions, na túto tému môžeme nájsť viac v [5][2][22].

Záver

V práci sme sa zaoberali použitím Monte Carlo metódy v oblasti financií, konkrétne sme ich aplikovali na simulácie vývoja finančných aktív ako sú akcie, futures či LIBOR úrokové miery a výpočet cien ich derivátov. Sledovali sme hlavne efektívnosť tejto metódy, čiže sme sledovali výpočtovú náročnosť a varianciu, pri jej použití na výpočet cien rôznych typov finančných derivátov. Rovnako sme sledovali vplyv zmeny parametrov na výsledky simulácii, diskutovali sme použitie metód redukcie variancie na ich zefektívnenie a taktiež sme porovnávali výsledky získané Monte Carlo simuláciami s inými analytickými či numerickými metódami a na základe toho zhodnocovali vhodnosť či efektívnosť použitia Monte Carlo metódy pri riešení rôznych problémov.

Danou metódou sme schopní vypočítať, dá sa tvrdiť, všetky typy derivátov, avšak ako sme zistili s pomerne odlišnou efektívnosťou. Všeobecnou črtou použitia pri všetkých typoch derivátov je prítomnosť štandardnej chyby, ktorá je závislá od počtu použitých simulácií a predstavuje najväčší problém metódy. Preto je nevyhnutné používať rôzne metódy redukcie variancie, v práci boli použité hlavne metódy kontrolovaných variet a moment matching metóda, použitím ktorých sa vo viacerých prípadoch výrazne podarilo znížiť varianciu a tým aj znížiť výpočtový čas a zvýšiť spoľahlivosť výpočtov. Medzi výhody metódy môžeme zahrnúť pomerne jednoduchú algoritmickú implementáciu.

Pri oceňovaní derivátov sa efektívnosť metódy líši s ohľadom na štruktúru derivátu či počet podkladových aktív. Zistenia môžeme zhrnúť do nasledovných niekoľkých bodov:

- Jednorozmerný prípad: ako užitočná a pomerne efektívna sa ukazuje aplikácia na výpočet aritmetických ázijských opcií, pre nižší počet bodov priemerovania dostávame presné a rýchle riešenia, v ostatných prípadoch je vhodnejšie počítať ceny riešením parciálnej diferenciálnej rovnice. Naopak najmenej efektívnou voľbou je použitie metódy v prípade bariérových opcií, z dôvodu vysokého výpočtového času a vychýlenia odhadu ceny z dôvodu diskrétneho sledovania prekročenia bariéry a v tomto prípade je vhodnejšie použiť inú numerickú metódu ako napríklad metódu konečných diferencií. Spoľahlivú cenu s relatívne nízkym výpočtovým časom dostávame aj pre prípad európskej opcie, avšak z dôvodu existencie jednoduchého analytického riešenia nie je efektívne v tomto prípade používať simulácie.

- Špeciálnu pozornosť sme venovali Monte Carlo metódam oceňovania amerických a bermudských opcií, ktorých implementácia je náročnejšia ako v ostatných jednorozmerných aplikáciách z dôvodu komplikovanejšej výplatnej štruktúry, konkrétne sme najviac pozornosti venovali regresnej metóde Monte Carlo. Zistili sme, že metóda poskytuje porovnateľné výsledky s inými numerickými metódami avšak s pomerne vysokou výpočtovou

náročnosťou. Získaná cena je závislá na počte časov zastavenia a použitých bázických funkcií, ktoré môžu byť zdrojom zvyšovania výpočtového času resp. vychýlenosti odhadu ceny a v jednorozmernom prípade je preto vhodnejšie použiť iné numerické metódy. Druhá metóda, ktorej sme venovali pozornosť, metóda náhodných stromov, je numericky veľmi náročná a vhodná len na oceňovanie bermudských opcií s malým počtom možností uplatnenia.

- Viacrozmerný prípad: atraktivita metódy narastá s nárastom dimenzií problému. Podarilo sa nám oceňiť dvojrozmernú crack spread opciu a takisto desaťrozmerné košíkové opcie ázijského aj európskeho typu. Dosiahli sme kvalitatívne rovnaké výsledky ako v jednorozmerných prípadoch, a preto metódy Monte Carlo umožňujú prechod do vyšších dimenzií iba s relatívne nízkym nárastom výpočtového času a pomocou nich sme schopní oceňiť košík opcií ľubovoľných výplatných štruktúr. Regresná metóda Monte Carlo rovnako umožňuje prechod do vyšších dimenzií, čím poskytuje možnosť výpočtu rozličných viacrozmerných amerických typov derivátov a môže byť často vhodnou voľbou pre výpočet a tiež poskytuje zaujímavý výhľad na skúmanie Monte Carlo metód pre viacrozmerné americké deriváty.

- V prípade jednorozmerných opcií sa dosahujeme najvýraznejšie zníženie variancie pomocou metódy moment matching, kde sa podarilo znížiť varianciu rádovo na tretinu, v prípade kontrolovaných variet približne o polovicu. Tieto metódy sa však nedajú uplatniť vo vyšších dimenziách resp. nedávajú dobré výsledky, preto pre viacrozmerné simulácie treba hľadať iné metódy redukujúce varianciu. Oblasť zaoberajúca sa redukciou variancie Monte Carlo odhadov necháva priestor pre ďalšie skúmanie, keďže používanie týchto metód je veľmi žiaduce.

- Zistili sme taktiež citlivosť metódy na parametre, konkrétne štandardná chyba simulácií narastá so zvyšovaním ceny opcie, rovnako je podstatná zvolená jemnosť delenia časového intervalu, ktoré na jednej strane rýchlo zvyšuje výpočtovú náročnosť na druhej strane pri veľmi hrubom delení často dostávame cenu derivátu, ktorá je vychýleným odhadom.

- Veľkou oblasťou uplatnenia Monte Carlo simulácií sú úrokové miery a výpočet ich derivátov. Konkrétne sme sa zaoberali simuláciou dynamiky vývoja LIBOR modelov úrokových mier a výpočtom derivátu typu cap. Monte Carlo metódy sú v tejto oblasti veľmi užitočné, keďže často nie je možné v reálnych aplikáciách analytické riešenie, a táto metóda je efektívnym spôsobom výpočtu. Samozrejme možnosti použitia sú široké a táto oblasť taktiež poskytuje výhľad na ďalšie skúmanie možností efektívnej aplikácie Monte Carlo metódy v oblasti financií.

Na záver sa dá zhodnotiť, že metóda Monte Carlo si určite nachádza svoje miesto medzi metódami na riešenie problémov v oblasti financií a taktiež sa dá predpokladať, že nebude strácať na atraktivite, keďže jej najväčšia nevýhoda - výpočtový čas sa neustále znižuje s rozvojom výkonnejšej výpočtovej techniky.

Príloha

Tu sa dajú nájsť kódy v matlabe použité na Monte Carlo simulácie rôznych typov derivátov.

1. Algoritmus na Monte Carlo simuláciu ceny ázijskej aritmetickej call opcie

```
function Price=Asiancall(n,N,m,r,T,S0,K,sigma)
%%Price=cena azijskej aritmetickej opcie,n=pocet simulacii,m=pocet replikacii,
%%N=pocet casovych krokov,r=bezrizikova ur.miera,T=expiracny cas,
%%K=strike cena,sigma=volatilita,S0=pociatocna cena,
%%se=standardna chyba 1 replikacie,t=vypoctovy cas
C=zeros(n,1);dt=T/N;S(1)=S0;e=cputime;b=0.4;
for ii=1:m
Z=randn(n,N);pZ=mean(Z);sZ=std(Z);
for i=1:n
for j=1:N-1
S(j+1)=S(j)*exp((r-1/2*sigma^2)*dt+sigma*sqrt(dt)*(Z(i,j)-pZ(j))/sZ(j) );
end
C(i)=exp(-r*T)*max(0,mean(S)-K);
end
Cn(ii)=mean(C);
end
Price=mean(Cn);odchylka=std(Cn),t=cputime-e,se=std(C)/sqrt(n)
```

2. Algoritmus na Monte Carlo simuláciu ceny košíkovej európskej call opcie

```
function [Price,t]=kosik(n,m,T,r,K,D,sigma,S0)
%%n=pocet simulacii,m=pocet replikacii,T=cas expiracie,r=bezrizikova miera,
%%K=strike cena,D=matica vyvoja cien jednotlivych aktiv(D=load('data.txt'));
%%price=priemerna cena kosikovej europskej opcie z m replikacii,t=cas vypoctu,
%% S0=vektor pociatocnych cien,sigma=volatilita aktiv
nn=length(sigma);korelacia=corrcoef(D);S0=S0';sigma=sigma';e=cputime;
COVM=diag(sigma*ones)*korelacia*diag(sigma*ones);A=chol(COVM)';
for j=1:m
Z=randn(nn,n);
```

```

for i=1:n
X=A*Z(:,i);
S=S0.*exp((r-0.5*sigma.^2)*T+sqrt(T).*X);
C(i)=exp(-r*T)*max(0,sum(S)-K);
% redukcia variancie, je potrebne odhadnut koeficient b
% C(i)=exp(-r*T)*max(0,sum(S)-K)-sum(b*(S-exp(r*T)*S0));
end
Cn(j)=mean(C);
end
Price=mean(Cn);rozptyl=std(Cn),t=cputime-e;

```

3. Algoritmus na Monte Carlo simuláciu ceny košíkovej ázijskej(aritmetickej) call opcie

```

function [Price,t]=kosikasian(n,N,m,T,r,K,D,S0,sigma)
%% N=pocet casovych krokov, ostatne znacenie ostava rovnake
nn=length(sigma);S=zeros(nn,N);korelacia=corrcoef(D);S(:,1)=S0;
S0=S0';sigma=sigma';e=cputime;
COVM=diag(sigma*ones)*korelacia*diag(sigma*ones);
A=chol(COVM)';dt=T/N;
for j=1:m
for i=1:n
Z1=randn(nn,N-1);
for k=1:N-1
X=A*Z1(:,k);
S(:,k+1)=S(:,k).*exp((r-0.5*sigma.^2)*dt+sqrt(dt).*X);
end
C(i)=exp(-r*T)*max(0,sum(mean(S'))-K);
end
Cn(j)=mean(C);
end
Price=mean(Cn);rozptyl=std(Cn),t=cputime-e;

```

4. Algoritmus na Monte Carlo simuláciu ceny americkej a bermudskej call opcie regresnou metódou

```

function [Price,t]=LSMamerican(n,N,m,S,K,T,r,sigma)
%% N=pocet casovych krokov,n=pocet MC simulacii
%% m=pocet replikacii,S=zaciatocna cena,T=maturita,K=strike
%% cena,v=volatilita,r=urokova miera
%% Price=cena americkej opcie,t=cas vypoctu
e=cputime;St=zeros(n,N);V=zeros(n,N);E=zeros(n,N);strategia=zeros(n,N);
for ii=1:m
dt=T/(N-1);St(:,1)=S;

```

```

drift=(r-sigma^2/2)*dt;BP=sigma*sqrt(dt);Z=randn(n,N);pZ=mean(Z);sZ=std(Z);
for i=1:n, %simulacia n ciest
st=S; for k=2:N, %simulacia jednej cesty
st=st*exp(drift+BP*(Z(i,k)-pZ(k))/sZ(k));St(i,k)=st;%zahrnuta redukcia variancie
end
end
st=St(:,N);E(:,N)=max(st-K,0);
V(:,N)=E(:,N);strategia(:,N)=(E(:,N)>0);
for k=N-1:-1:2,
st=St(:,k);
E(:,k)=max(z*(st-K),0);%zahrnieme iba nenulove payoffs
id=find(E(:,k)>0);%najde in-the-money indexy
X=St(id,k);Y=V(id,k+1)*exp(-r*dt);
RegMat=[ones(size(X,1),1),X,X.^2,X.^3]; % regresia
p=RegMat \ Y;
R=p(1)+p(2)*X+p(3)*X.^2+p(4)*X.^3;
V(id,k)=R;
%Ak exercise hodnota je viac ako pokracujuca hodnota uplatnit
strategia(id,k)=E(id,k) > V(id,k);strategia(find(strategia(:,k)),k+1:N)=0;
id=find(strategia(:,k) == 0);
V(id,k)=V(id,k+1)*exp(-r*dt);
id=find(strategia(:,k) == 1);V(id,k)=E(id,k);
end
%vypocitaj vyplatu z uplatnenia opcie
vyplata=0;
for i=1:N
id=find(strategia(:,i) == 1);st=St(id,i);
vyplataS=exp(-r*(i-1)*dt)*max(st-K,0);vyplata=vyplata+sum(vyplataS);
end
LSMprice(ii)=vyplata/n;
end
Price=mean(LSMprice),Rozptyl=std(LSMprice),t=cputime-e,

```

5. Algoritmus na Monte Carlo simuláciu LIBOR mier a ceny cap

```

function [price,SE,t]=LIBORcap(N,vol,K,dT,L)
%%N=pocet simulacii,vol=volatilita,K=strike,
%%L=pociatocny vektor urokovych mier,n=pocet bodov zastavenia
%%vstupy vol,K,dt mozu byt aj konstatny aj vektory
n=length(L)-1;e=cputime;C=zeros;V=zeros;
%%zadefinujeme volatilitu a terminalne casy
delta=dT.*ones(n+1,1);sigma=vol.*ones(n+1,n+1);
for ii=1:N
Z=randn(n+1,1);
%% simulacia vyvoja LIBOR mier %%

```

```
for i=n+1:-1:1
for k=1:i-1
suma=sum((delta.*sigma(:,k).*L(:,k))./(1 + delta.* L(:,k)));
drift=suma*sigma(i,k)*L(i,k)*dT;BP=sigma(i,k)*L(i,k)*sqrt(dT)*Z(k);
L(i,k+1)=L(i,k)-drift+BP;
end
end
%% vypočet numeraire %%
for k=1:n+1
num=1./(1+delta.*L(:,k));
B(n+1,k)=prod(num);
end
%% vypočet cien jednotlivých capletov(call typ) %%
for i= 1:n
C(i+1)=max(0,L(i,i)-K)/B(n+1,i+1);
end
V(ii)=sum(C); %% vypočet ceny cap %%
end
price=1000*mean(V);SE=1000*std(V)/sqrt(N);t=cputime-e;
```

Literatúra

- [1] McLeish, D. L. :*Monte Carlo Methods in Finance*, 2000
- [2] Korn, R. - Korn, E. - Kroisandt, G.:*Monte Carlo Methods in Finance and Insurance*, 2010
- [3] Jäckel, P.:*Monte Carlo Methods in Finance*, 2002
- [4] Kalos, M. H.- Whitloch, P. A. :*Monte Carlo Methods*, New York University, 1986
- [5] Glasserman, P. :*Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, New York, 2003
- [6] Fishman, G. S.:*Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications*, 1996
- [7] Gentle, J. E. :*Random Number Generation and Monte Carlo Methods*, 2003
- [8] Dagpunar, J. S. :*Simulation and Monte Carlo*, 1999
- [9] Ševcovic, D.- Stehlíková, B.-Mikula, K. :*Analytické a numerické oceňovanie finančných derivátov*, STU Bratislava,2009
- [10] Melicherčík, I. - Olšarová, L. - Uradníček, V. :*Kapitoly z finančnej matematiky*, Bratislava, 2005
- [11] Broadie, M. - Glasserman, P. :*Pricing American-style securities using simulation*, Journal of economic dynamics and control(1997), s.1323-1352
- [12] Broadie, M. - Glasserman, P. :*A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options*
- [13] Broadie, M. - Glasserman, P. - Kou, S.:*A continuity correction for discrete barrier option*
- [14] Longstaff, F.A. - Schwartz, E.S. :*Valuating American Options by Simulation: A simple least-squares approach*, The review of financial studies(2001), s.113-147
- [15] Chidinma, A. :*Monte Carlo Methods for Pricing American Options*, 2009
- [16] Mucha, V. :*Určenie hodnoty Value at Risk využitím simulačnej metody Monte Carlo v neživotnom poistení*, EUBA Bratislava, 2006

- [17] Shinzato, T. :*Box-Muller Method*, 2007
- [18] Golub, G.H.-Van Loan, C.F. :*Matrix Computations*,1989
- [19] Rebib, R. :*Barrier Option Pricing*, 2008
- [20] Večeř, J. :*Unified Option Pricing*, 2002
- [21] Thom, H. :*Longstaff Schwartz pricing of bermudan and their greeks*, 2009
- [22] Le Doux, M. B. M. :*LIBOR and swap market models for pricing interest rates derivatives, Monte Carlo simulations*, 2004
- [23] Glynn P. W., Whitt W.:*The Asymptotic Efficiency of Simulation Estimators*, 1992