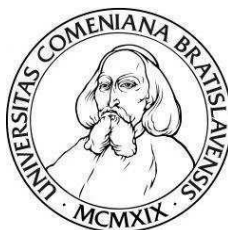


UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Konvergenčné modely úrokových mier

Diplomová práca

Vedúci diplomovej práce:
RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Autor:
Bc. Zuzana Zíková

Bratislava 2011

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Evidenčné číslo: db9986e9-c0f8-4336-a29a-e76a08011d52

Konvergenčné modely úrokových mier

Diplomová práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 9. 1. 9 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky,
FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
Školiteľ a konzultant: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2011

Bc. Zuzana Zíková



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Zuzana Zíková
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Konvergenčné modely úrokových mier

Cieľ : Oboznámiť sa s konvergenčnými modelmi úrokových mier. Študovať modely s volatilitou úmernou mocnine úrokovej miery, podľa analógie s jednofaktorovými modelmi. Hľadať aproximáciu riešenia rovnice pre cenu dlhopisu v takomto modeli. Navrhnuť postup kalibrácie a otestovať ho.

Vedúci : RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.

Dátum zadania: 02.02.2010

Dátum schválenia: 04.04.2011

.....
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

Zuzana Zíková
.....

študent

Yuhli Kuvra
.....

vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu prístupnosti)

20.4.2011 Yuhli Kuvra
.....

vedúci práce

Pod'akovanie

Touto cestou by som sa chcela poďakovať vedúcej diplomovej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. predovšetkým za odbornú pomoc s vypracovaním diplomovej práce, no taktiež aj za poskytnutie vhodnej literatúry, za cenné rady, námietky a pripomienky, ktoré si vyžadovali neraz množstvo času a trpezlivosti.

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že diplomovú prácu s názvom *Konvergenčné modely úrokových mier* som vypracovala samostatne, s použitím uvedenej literatúry a na základe konzultácií s vedúcou diplomovej práce.

Bratislava 20. 04. 2011

.....

Vlastnoručný podpis

ZÍKOVÁ, Zuzana *: *Konvergenčné modely úrokových mier* [diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúci práce: RNDr. Beáta Stehlíková ^x, PhD., Bratislava, 2011, 59 s.

* email: zuzkazz@gmail.com, ^x email: stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk

Abstrakt: Práca pojednáva o konvergenčných modeloch krátkodobých úrokových mier. Konvergenčný model vysvetľuje vývoj úrokovej miery v závislosti od vstupu krajiny do menovej únie. Prvý z takýchto modelov bol navrhnutý v roku 2000 autormi Corzo a Schwartz. Volatility domácej a európskej krátkodobej úrokovej miery sú konštantné. V našej práci sa zaoberáme dvojfaktorovým konvergenčným modelom Chan-Karolyi-Longstaff-Sandersovho typu (CKLS), kde predpokladáme nekonštantné volatility, v tvare mocnín úrokových mier, s analógiou v jednofaktorovom CKLS modeli. Dynamika systému je popísaná dvoma stochastickými diferenciálnymi rovnicami. Pre Vašíčkov model a pre špeciálny prípad Cox-Ingersoll-Rossovoho modelu je známe explicitné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice, podľa ktorej sa správa cena dlhopisu. Ak do riešenia Vašíčkovho modelu dosadíme za konštantné volatility členy $\sigma_d r_d^{\gamma_d}$ a $\sigma_e r_e^{\gamma_e}$, získame aproximáciu riešenia pre CKLS model. Vypočítame presnosť tejto aproximácie a ukážeme, že existuje možnosť jej spresnenia. V našej diplomovej práci taktiež navrhujeme postup kalibrácie modelu a testujeme ho najskôr na simulovaných a potom na reálnych dátach.

Kľúčové slová: modely úrokových mier, dvojfaktorové modely, konvergenčné modely, aproximácia, presnosť, kalibrácia, simulované dáta, reálne dáta

ZÍKOVÁ, Zuzana *: *Convergence model of interest rate* [diploma thesis]. Comenius University in Bratislava, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics. Supervisor of the thesis: RNDr. Beáta Stehlíková ^x, PhD., Bratislava, 2011, 59 p.

* email: zuzkazz@gmail.com, ^x email: stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk

Abstract: Our paper deals with convergence model of interest rates. The convergence model explains the evolution of interest rate in connection with the adoption of Euro currency. The first model of this kind was proposed in 2000 by Corzo and Schwartz. The volatilities of both the domestic and European short rates are constant. In our article we deal with two-factor convergence model of the interest rate of Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders type, where we assume the volatilities proportional to the power of the short rates, the analogy of one-factor models. Dynamics of the system is described by two stochastic differential equations. For Vasicek and for the special case of Cox-Ingersoll-Ross type model closed form solutions are known. Taking the solution for Vasicek model corresponding to same drift functions and correlation and substituting its constant volatilities by instantaneous volatilities $\sigma_e r_e^{\gamma_e}$ and $\sigma_d r_d^{\gamma_d}$ we obtain an approximation of the solution for CKLS model. We compute the order of accuracy for this approximation and show the possibility of its improvement.

Keywords: model of interest rate, two-factor model, convergence model, approximation, accuracy

Obsah

Použité symboly a skratky	1
Úvod	2
I Teoretická časť	3
1 Úvod do problematiky	4
1.1 Dlhopis a časová štruktúra úrokových mier	4
1.2 Okamžitá úroková miera	7
1.3 Ďalšie deriváty úrokovej miery	7
2 Modely úrokových mier	8
2.1 Jednofaktorové modely	8
2.2 Dvojfaktorové modely	13
3 Konvergenčné modely	14
3.1 Konvergenčný model Vašíčkovho typu	17
3.2 Konvergenčný model CIR typu	19
3.3 Konvergenčný model CKLS typu	20
II Odvodenie aproximácie	22
4 Aproximácia ceny dlhopisu v konvergenčnom modeli CKLS typu	23
4.1 Formulácia navrhutej aproximácie	23
4.2 Presnosť aproximácie pre CIR model s nulovou koreláciou	25
4.3 Numerické výsledky pre CIR model a jeho aproximáciu	27
4.4 Presnosť aproximácie vo všeobecnom CKLS modeli	28
4.5 Spresnenie aproximácie pre CKLS model	33
III Kalibrácia modelu	35
5 Metóda kalibrácie modelu	36
5.1 Spoločný rámec pre kalibráciu a formulácia optimalizačných úloh	37

5.2	Algoritmus na odhad parametrov v dvojfaktorovom CIR modeli s nulovou koreláciou	38
5.2.1	Simulované dáta	38
5.2.2	Odhad európskych parametrov	39
5.2.3	Odhad domácich parametrov	39
5.2.4	Presnosť odhadnutých výnosových kriviek	43
5.3	Simulačná analýza	44
5.4	Zovšeobecný algoritmus pre CKLS model s nulovou koreláciou a známymi γ_e, γ_d	48
5.5	Odhad korelácie ρ a parametrov γ_e, γ_d	48
5.5.1	Vplyv korelácie ρ na výnosy	49
5.5.2	Odhad mocniny γ_d	50
6	Kalibrácia modelu na reálnych dátach	52
6.1	Výber a použitie dát	52
6.2	Odhad dvojfaktorového CIR použitím slovenských dát	53
6.2.1	Presnosť európskych a slovenských odhadnutých výnosových kriviek . . .	53
	Záver	55
	Resume	56
	Literatúra	58

Použité symboly a skratky

CIR	=	Cox-Ingersoll-Ross model krátkodobej úrokovéj miery, v ktorom $\gamma = \frac{1}{2}$
CKLS	=	Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders model krátkodobej úrokovéj miery, v ktorom γ je daná všeobecne
x_d	=	spodný index d - vzťah ľubovoľnej premennej x k domácim dátam
x_e	=	spodný index e - vzťah ľubovoľnej premennej x k európskym dátam
\dot{f}	=	prvá derivácia funkcie f
\ddot{f}	=	druhá derivácia funkcie f
$f^{(n)}$	=	n -tá derivácia funkcie f

Úvod

Modely úrokových mier sú definované pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice. Dynamiku jednofaktorového modelu opisuje jedna rovnica, pre dvojfaktorový model sú potrebné dve rovnice, ktoré hovoria o vývoji oboch faktorov. V našej diplomovej práci sa zaoberáme dvojfaktorovými modelmi, konkrétne dvojfaktorovými konvergenčnými modelmi krátkodobých úrokových mier. Tie tvoria špeciálnu podtriedu dvojfaktorových modelov. Konvergenčný model opisuje vývoj európskej krátkodobej úrokovej miery, o ktorej sa predpokladá, že ovplyvňuje vývoj domácej krátkodobej úrokovej miery. Jeden z prvých takýchto modelov navrhli Corzo a Schwartz v roku 2000. Vychádza z Vašíčkovho modelu, kde volatility úrokových mier sú konštantné. Podobným modelom CIR typu sa zaoberá V. Lacko vo svojej diplomovej práci z roku 2010, na ktorú sme nadviazali. V našej práci sa zaoberáme všeobecnejším modelom, a to dvojfaktorovým konvergenčným modelom Chan-Karolyi-Longstaff-Sandersovho typu (CKLS), kde predpokladáme nekonštantné volatility, v tvare mocnín úrokových mier. Pre tento model hľadáme aproximáciu ceny dlhopisu na základe riešenia Vašíčkovho modelu, kde za konštantné volatility dosadíme mocniny krátkodobých úrokových mier.

Cieľom našej diplomovej práce je študovať modely s volatilitou úmernou mocnine úrokovej miery (CKLS model), podľa analógie s jednofaktorovými modelmi, kde budeme hľadať aproximáciu riešenia rovnice pre cenu dlhopisu v takomto modeli, keďže neexistuje explicitné riešenie. V diplomovej práci vychádzame z článkov [11] a [10]. Nakoniec sa pokúsime navrhnúť postup kalibrácie a otestovať ho.

Diplomová práca je rozčlenená na tri časti, ktoré tvorí šesť kapitol. Teoretická časť má tri kapitoly. V prvej z nich definujeme základné pojmy, ako dlhopis, časová štruktúra úrokových mier, okamžitá úroková miera a uvádzame stručný prehľad ďalších derivátov úrokových mier. V druhej kapitole sa venujeme jednofaktorovým a dvojfaktorovým modelom a v tretej podrobnejšie konvergenčným modelom rôznych typov. Druhá časť s názvom Odvodenie aproximácie tvorí jadro práce, v ktorom navrhujeme aproximáciu ceny dlhopisu v konvergenčnom modeli CKLS a zisťujeme jej presnosť. V tejto časti taktiež prezentujeme výsledky z numerického experimentu pre CIR model s nulovou koreláciou a jeho aproximáciu.

Rovnako dôležitou časťou diplomovej práce je kalibrácia, kde v piatej kapitole navrhujeme postup kalibrácie modelu, testujeme ho na simulovaných dátach a v šiestej kapitole uvádzame výsledky z kalibrácie použitím reálnych trhových dát, t. j. úrokových sadzieb na medzibankovom trhu.

Časť I

Teoretická časť

Kapitola 1

Úvod do problematiky

V tejto kapitole definujeme základné pojmy ako dlhopis, časová štruktúra úrokových mier, okamžitá úroková miera. Ukážeme si rôzne priebehy výnosových kriviek na príkladoch s reálnymi dátami. Spomenieme krátkodobé úrokové miery ako Euribor a iné. Stručne charakterizujeme, okrem dlhopisov, aj iné deriváty úrokovej miery. Podrobnejšie informácie sa nachádzajú v knihách [1],[12], [8].

1.1 Dlhopis a časová štruktúra úrokových mier

Dlhopis je najjednoduchší derivát úrokovej miery. Je to cenný papier, ktorý v čase splatnosti vyplatí jeho vlastníkovi nominálnu hodnotu F a v dohodnutých obdobiach bude vyplácať pravidelný úrok (kupón). Bezkupónový dlhopis s nominálnou hodnotou $F = 1$ sa nazýva diskontný dlhopis. Ďalej budeme pod dlhopisom rozumieť diskontný dlhopis.

Označme $P(t, T)$ cenu dlhopisu v čase t , ktorého splatnosť je v čase T . Tieto ceny dlhopisov určujú úrokové miery. Označme $R(t, T)$ úrokovú mieru v čase t so splatnosťou v čase T . Potom

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad (1.1)$$

vyjadrením $R(t, T)$ dostávame

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T-t}. \quad (1.2)$$

Funkcia $R(t, T)$ sa nazýva *časová štruktúra úrokových mier*. *Časová štruktúra úrokových mier* vyjadruje závislosť úrokovej miery (výnosu) od maturity dlhopisu, nazýva sa aj *výnosová krivka*. Príkladom úrokových mier je napríklad Euribor.

*Euribor*¹ (Euro Interbank Offered Rate) je medzibanková referenčná sadzba zverejňovaná denne od roku 1999. Skupinu bánk, ktoré prispievajú svojimi dátami k výpočtu Euriboru, nazývame *panel banks*, alebo *referenčné banky*. Referenčné banky denne dodávajú úrokové miery, o ktorých si myslia, že ich referenčné banky používajú pri vzájomných obchodoch. Z dát sa vynechá najnižších a najvyšších 15 % sadzieb, zo zvyšných sa urobí priemer, ktorý sa zaokrúhli na tri desatinné miesta. Štandardne sa tento priemer zverejňuje o 11:00 každý

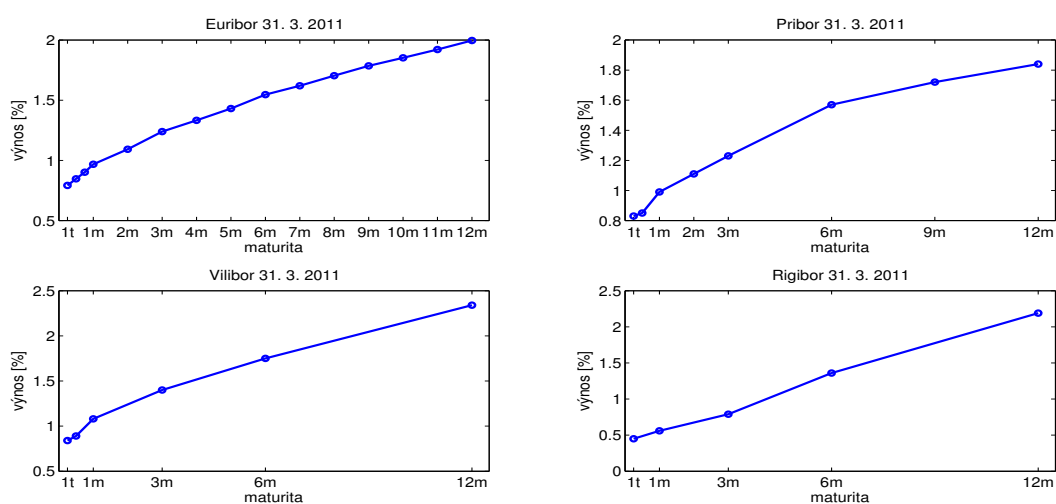
¹ spracované podľa [19]

deň. Existujú však aj výnimky a možnosti oneskoreného zverejnenia. Podrobnejšie informácie je možné nájsť na [19].

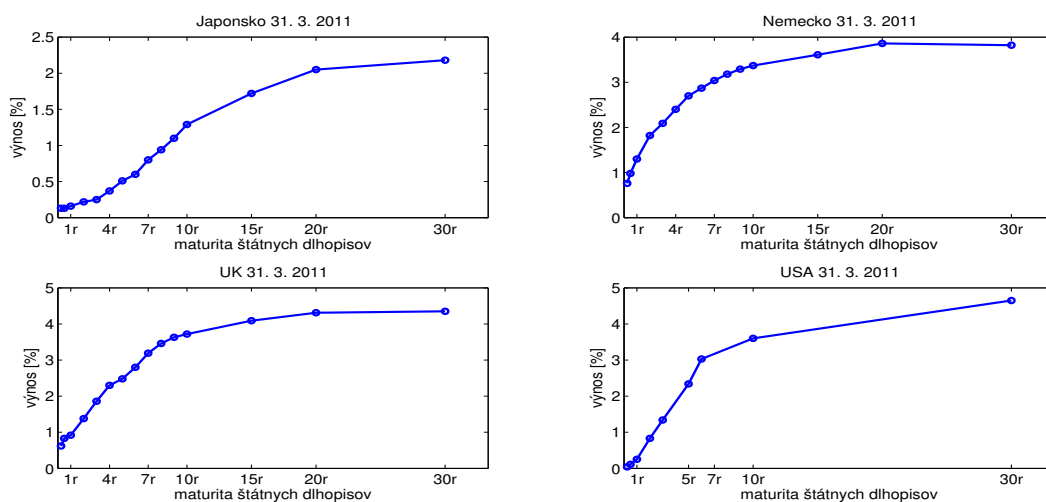
Krajina, ktorá nepatrí do menovej únie má svoju úrokovú mieru. Na Slovensku bola referenčná úroková sadzba *Bribor* (Bratislava Interbank Offered Rate) do 31. 12. 2008, no od 1. 1. 2009, prijatím eura, sa ňou stala Euribor. *Bribor* bola referenčná úroková sadzba počítaná ako priemerná hodnota predajných cien kótovaných referenčnými bankami k 11:00 bežného dňa. Existuje aj referenčná sadzba *Bribid*. *Bribor* a *Bribid* sú vo vzťahu ako Ask a Bid. *Bribor* aj *Bribid* sa denne počíta ako nevážený aritmetický priemer z hodnôt po odstránení najvyššej a najnižšej hodnoty pre daný deň. Medzi ďalšie úrokové miery patria napríklad: *Bribor* (Bratislava Interbank Offered rate), *Pribor* (Prague Interbank Offered Rate), *Libor* (London Interbank Offered Rate), *Rigibor* (Riga Interbank Offered Rate), *Talibor* (Tallinn Interbank Offered Rate), *Vilibor* (Vilnius Interbank Offered Rate), *Shibor* (Shanghai Interbank Offered Rate), *Pribor* (Paris Interbank Offered Rate), *Tibor* (Tokyo Inter Bank Offered Rate), *Athibor* (Athens Interbank Offered rate).

Iným príkladom môžu byť výnosy štátnych dlhopisov.

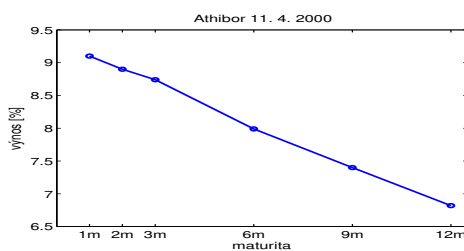
Výnosová krivka je zvyčajne rastúca, keďže na dlhšiu dobu zvyčajne požičiavame s vyšším úrokom. V dnešných dňoch to platí pri väčšine krajín. Znázorňuje to aj obrázok 1.1, kde je zobrazená časová štruktúra úrokových mier z dňa 31. 3. 2011 pre viaceré meny a obrázok 1.2 s výnosmi štátnych dlhopisov v niekoľkých štátoch, taktiež z dňa 31. 3. 2011. Klesajúca výnosová krivka môže byť v prípade, že očakávame pokles úrokových mier. Takáto situácia zvyčajne nastáva, ak očakávame zhoršenie ekonomickej situácie. Na obrázku 1.3 v prípade gréckeho *Athiboru* zaznamenávame prudko klesajúcu výnosovú krivku z dňa 11. 4. 2000. Na obrázku 1.4 znázorňujeme nemonotónne priebehy rôznych výnosových kriviek, napr. *Euribor* z dňa 14. 2. 2008, výnosy štátnych dlhopisov v UK z dňa 30. 10. 2008 a výnosy brazílskych štátnych dlhopisov z 30. 10. 2008 a z 31. 3. 2011.



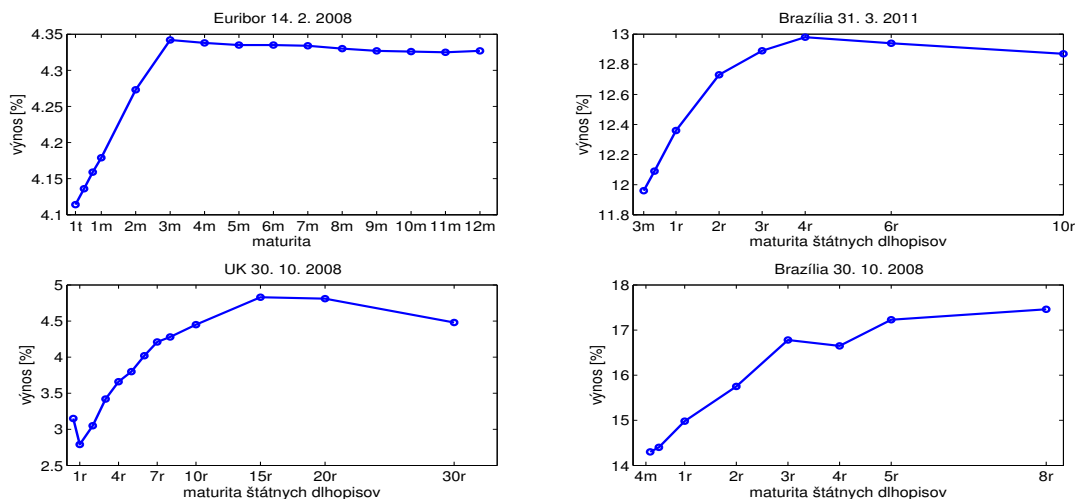
Obr. 1.1: Časová štruktúra úrokových mier z dňa 10. 3. 2011; Euribor, Pribor, Vilibor, Rigibor. Zdroj: [19], [17], [22], [14]. Vysvetlivky: 1t = 1 týždeň, 1m = 1 mesiac, 1r = 1 rok.



Obr. 1.2: Výnosy štátnych dlhopisov z dňa 31. 3. 2011 pre krajiny: Brazília, Japonsko, Nemecko, UK. Zdroj: [16]



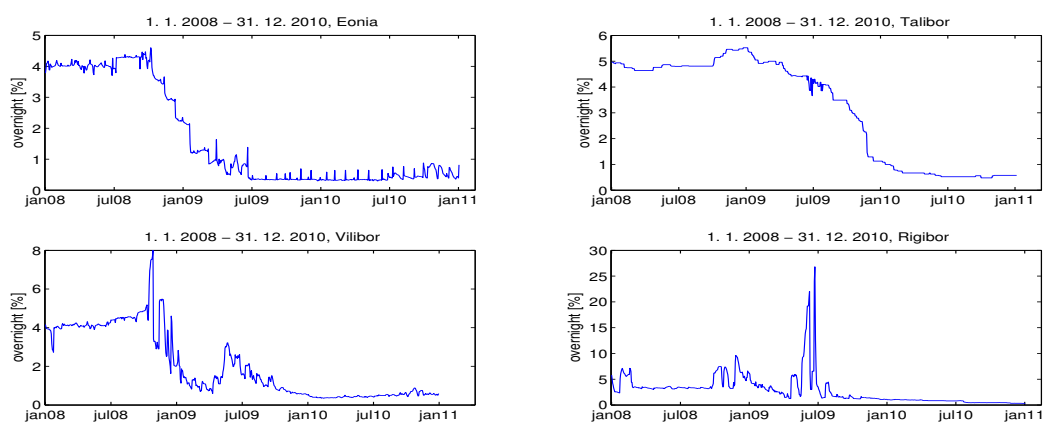
Obr. 1.3: Časová štruktúra úrokových mier, klesajúca výnosová krivka Athibor. Zdroj: [15].



Obr. 1.4: Časová štruktúra úrokových mier, nemonotónne výnosové krivky, Euribor a výnosy štátnych dlhopisov: Brazília a UK. Zdroj: [19], [15], [16].

1.2 Okamžitá úroková miera

Ak vo vzťahu (1.2) urobíme limitu $T \rightarrow t^+$, dostávame tzv. *okamžitú úrokovú mieru*, nazývanú aj *krátkodobá úroková miera* alebo *short rate*. Okamžitá úroková miera r je teda začiatkom výnosovej krivky: $r(t) = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T)$. Short rate predstavuje úrokovú mieru na veľmi krátky čas. Ide o teoretickú veličinu, prakticky má k nej najbližšie úroková miera na veľmi krátky čas, napríklad na jeden deň. Niekedy je takáto úroková miera na jeden deň uvádzaná spolu s inými splatnosťami ako *overnight* (napr. Bribor, Talibor, Vilibor) alebo je uvádzaná samostatne (napr. Eonia pre eurozónu). *Eonia (Euro Overnight Index Average)* je referenčná sadzba pre zrealizované jednoduché obchody v menovej únii.



Obr. 1.5: Priebeh okamžitej úrokovej miery v období od 1. 1. 2008 - 31. 12. 2010. Zdroj:[19],[22],[14],[18]

1.3 Ďalšie deriváty úrokovej miery

Medzi obchodovateľné deriváty úrokovej miery patria okrem dlhopisov aj forwardy, swapy, opcie na dlhopisy, capy, floory. V knihách [8] a [12] sa dajú nájsť podrobnejšie vysvetlenia fungovania derivátov, ako aj metódy ich oceňovania. Na tomto mieste uvádzame len stručnú charakteristiku niektorých z nich.

Swap je dohoda o zmene aktíva. Úrokový swap hovorí o zmene finančného toku plávajúcich platieb na tok fixných platieb. Tento derivát vypláca rozdiel platených úrokov. Menový swap je výmena úrokových platieb v rôznych menách, pričom na začiatku a na konci dochádza k výmene podkladových aktív za dohodnutý kurz. Právo, ale nie povinnosť vstúpiť do swapového kontraktu sa nazýva *swaption*.

Ďalšími derivátmi úrokových mier, používanými najmä v medzibankovom styku, sú *cap* a *floor*. *Cap (strop)* je dohoda, podľa ktorej kupujúci obdrží od predávajúceho rozdiel medzi trhovou úrokovou mierou a realizačnou cenou kontraktu v dohodnutom čase. Je to poistenie voči vysokej úrokovej miere. Napríklad ak je Euribor vyšší ako vopred dohodnutá hodnota, vyplátí sa rozdiel medzi nimi. Jednu zrealizovanú platbu nazývame *caplet*. Protikladom je *floor (dno)*, t. j. derivát, ktorým sa poistujeme voči nízkej úrokovej miere. Jednotlivé platby nazývame *floorlety*.

Kapitola 2

Modely úrokových mier

Existujú rôzne prístupy, ako modelovať úrokové miery, napríklad: short rate modely, forward rate modely, LIBOR market modely, atď. Charakteristiky týchto modelov je možné nájsť napríklad v knihách [1], [9]. V našej diplomovej práci sa zaoberáme konvergenčným modelom, ktorý patrí medzi short rate modely. Tieto modely sú formulované pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice:

$$dX = \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dW,$$

kde W je Wienerov proces. Funkcia $\mu(X, t)$ je trend, driftová časť rovnice a $\sigma(X, t)$ vyjadruje fluktuácie v okolí driftu. Riešením tejto stochastickej diferenciálnej rovnice je stochastický proces X , pomocou ktorého sa opisuje správanie sa okamžitej úrokovej miery. Rôznou voľbou driftu $\mu(X, t)$ a volatility $\sigma(X, t)$ v tejto rovnici získavame rôzne jednofaktorové (ak X je skalár) alebo viacfaktorové (ak X je vektor) modely úrokových mier.

2.1 Jednofaktorové modely

Vývoj okamžitej úrokovej miery v reálnej miere

Uvažujme stochastickú diferenciálnu rovnicu pre vývoj okamžitej úrokovej miery

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dW. \quad (2.1)$$

V tabuľke 2.1, prebratej z [1] a z [12], uvádzame prehľad jednofaktorových modelov, v poradí podľa roku ich vzniku, spolu s rovnicou vývoja krátkodobej úrokovej miery a taktiež zaznamenávame aj pravdepodobnostné rozdelenie úrokovej miery.

Ak má drift procesu tvar $\mu(r, t) = \kappa(\theta - r)$, kde $\kappa, \theta > 0$ sú konštanty, tak model má *mean-reversion* vlastnosť. To znamená, že úroková miera má tendenciu priťahovať sa k dlhodobej limitnej hodnote θ . Ak je úroková miera r väčšia ako hodnota θ , tak drift $\kappa(\theta - r)$ je záporný, čiže úroková miera je ťahaná dole k limitnej hodnote θ . Naopak, ak je úroková miera r menšia ako hodnota θ , tak drift $\kappa(\theta - r)$ je kladný, to znamená, že proces je ťahaný hore ku θ .

Takýto tvar má aj prvý z modelov okamžitej úrokovej miery, a to Vašíčkov model, v ktorom $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dW_t$. Jeho nevýhodou však je normálne rozdelenie úrokových mier, z čoho vyplýva možnosť dosiahnutia aj záporných úrokových mier. Normálne rozdelenie úrokových

Rok	Model	SDR	$r_t > 0$	$r_t \sim$	AB
1977	Vašíček	$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$	N	N	A
1978	Dothan	$dr_t = ar_t dt + \sigma r_t dW_t$	A	LN	A
1985	Cox-Ingersoll-Ross	$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$	A	$NC\chi^2$	A
1990	Hull & White	$dr_t = \kappa(\theta_t - r_t)dt + \sigma dW_t$	N	N	A
1990	Exponenciálny Vašíček	$dr_t = r_t(\mu - a\ln r_t)dt + \sigma r_t dW_t$	A	LN	N
1991	Black & Karasinski	$dr_t = r_t(\mu_t - a\ln r_t)dt + \sigma r_t dW_t$	A	LN	N
1992	CKLS	$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$	A	-	N
2000	Mercurio & Moraleda	$dr_t = r_t\left(\eta - \left(\lambda - \frac{\gamma}{a+\gamma_t}\right)\ln r_t\right)dt + \sigma r_t dW_t$	A	LN	A

Vysvetlivky: A=áno, N=nie, AB=existencia explicitného riešenia ceny dlhopisu (oceňovaniu dlhopisov sa budeme venovať neskôr, v kapitole 4), N =normálne rozdelenie, LN =lognormálne rozdelenie, $NC\chi^2$ =necentrálny chí-kvadrát rozdelenie.

Tabuľka 2.1: Prehľad jednofaktorových modelov krátkodobej úrokovej miery

mier má ešte Hull & Whitov model. Ostatné modely majú iné rozdelenia úrokových mier, pri ktorých je zabezpečená nezápornosť úrokových mier. Túto vlastnosť má napr. už aj Dothanov model, publikovaný o rok neskôr po Vašíčkovom modeli. Predpokladá však geometrický Brownov pohyb pre vývoj short rate: $dr = ardt + \sigma r dW$. Explicitným riešením tejto rovnice je $r(t) = r(0)e^{(a-\frac{\sigma^2}{2}t)+\sigma W(t)}$, a teda $E[r(t)|r(0)] = r(0)e^{at}$. Pre $a \neq 0$ to nie je realistické: ak $a > 0$, tak $E[r(t)|r(0)] \rightarrow \infty$ pre $t \rightarrow \infty$, ak $a < 0$, potom $E[r(t)|r(0)] \rightarrow 0$. Preto sa niekedy Dothanov model uvádza s $a = 0$ (napr. v knihe [5], my sme formuláciu modelu prebrali z [1], kde je a ľubovoľné). To však znamená, že vo vývoji úrokovej miery nie je žiaden trend, ale iba náhodná zložka.

Kladnosť úrokových mier, t. j. $r > 0$, je možné zabezpečiť napr. aj prostredníctvom využitia exponenciálnych funkcií, ako napr. v exponenciálnom Vašíčkovom modeli alebo v modeli Blacka a Karasinského. V týchto modeloch sa predpokladá, že $\ln r_t$ (t. j. nie samotná úroková miera) má normálne rozdelenie. Potom r_t má lognormálne rozdelenie.

Na zabezpečenie nezápornosti úrokových mier v CIR modeli slúži fakt, že ak je r_t blízko pri nule, potom volatilita je veľmi malá, takmer nulová a drift je kladný. Ak by r_t predsa dosiahlo nulu, volatilita je nulová a drift kladný, takže r_t sa v nasledujúcom okamihu vráti do kladných hodnôt. Ak je splnená podmienka: $2\kappa\theta \geq \sigma^2$, tak proces r_t je kladný s pravdepodobnosťou 1. (prebraté z [5])

V nasledujúcej kapitole ukážeme, ako sa dajú pomocou parciálnych diferenciálnych rovníc oceňovať deriváty. V tabuľke 2.1 si môžeme všimnúť, že pre staršie modely, existuje explicitné vyjadrenie ceny dlhopisu. Patria tam napríklad klasické modely ako Vašíčkov model, Cox-Ingersoll-Rossov model. Prioritou teda zrejme bolo navrhnúť taký model, ktorý umožňuje explicitné vzorce pre oceňovanie. Pre mnohé mladšie modely neexistuje takéto explicitné vyjadrenie, sú však realistickejšie pri porovnaní s reálnymi dátami. Pri neexistencii explicitných riešení sa zvyčajne hľadá aspoň aproximácia riešenia ceny dlhopisu a pracuje sa s kalibráciou modelov. Mohli by sme podotknúť, že práve z dôvodu, že novšie modely sú zložitejšie a ne-

existuje v nich explicitná formula pre ceny dlhopisu a iných derivátov, má zmysel sa venovať hľadaniu analytických aproximácií cien dlhopisov v modeloch úrokových mier. Do tejto skupiny modelov patrí aj CKLS model. Touto problematikou sa zaoberáme aj v našej diplomovej práci.

Podľa toho, či drift procesu závisí, alebo nezávisí od času, bolo by možné modely z tabuľky 2.1 rozdeliť na dve skupiny. Modely s časovo závislým driftom (t. j. Hull & White, Mercurio & Moradela, Black & Karasinski) nazývame bezarbitrážne modely. Správnou voľbou funkcie θ_t , μ_t , γ_t dosiahneme zhodu výnosovej krivky danej modelom s dnešnou výnosovou krivkou pozorovanou na trhu. V niektorých prípadoch ide o modifikáciu modelu s konštantnými koeficientami, napr. časovo závislou analógiou Vašíčkovho modelu je model Hulla Whita, taktiež časovo závislou analógiou exponenciálneho Vašíčkovho modelu je model Blacka Karasinského.

Rizikovo neutrálna miera a oceňovanie dlhopisov

Neexistencia arbitráže na trhu matematicky znamená, že existuje tzv. rizikovo neutrálna miera, v ktorej sa dajú oceňovať deriváty pomocou výpočtu stredných hodnôt. Predpokladajme, že vývoj krátkodobej úrokovej miery je Markovovský proces správajúci sa v rizikovo neutrálnnej miere podľa rovnice

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t,$$

kde $\mu(r_t, t)$, $\sigma(r_t, t)$ sú \mathcal{F}_t^W – adaptované procesy. Cena diskontného dlhopisu s maturitou T v čase $t < T$ spĺňa

$$P(t, T) = E_Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t^W \right].$$

Vo všeobecnosti, ak máme derivát s hodnotou $X = P_T$ v čase maturity T , tak jeho cena v čase t je:

$$P_t = P(r, t) = E_Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} X \mid \mathcal{F}_t^W \right] = E_Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} X \mid r_t = r \right].$$

Cena derivátu P v čase t spĺňa Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu v tvare:

$$-\frac{\partial P}{\partial t} + \mu(r, t)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r, t)}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0,$$

$$r > 0, \tau \in (0, T),$$

s koncovou podmienkou $P(r, T) = 1$, pre každé $r > 0$.

Podrobnejšie sa oceňovaniu derivátov úrokových mier v rizikovo neutrálnnej miere venuje Melicherčík v [8], odkiaľ sme prebrali tieto základné princípy oceňovania derivátov.

Vzťah reálnej a rizikovo neutrálnnej miery

Vidíme, že formulácia modelu v reálnej miere nám umožňuje zachytiť vlastnosti, ktoré pozorujeme vo vývoji short rate, napr. mean-reversion. Pri formulácii v rizikovo neutrálnnej miere sme zasa schopní oceňovať deriváty. Bolo by teda užitočné mať prevod medzi zápismi procesu v týchto dvoch mierach.

Keďže reálna miera P a rizikovo neutrálna miera Q sú ekvivalentné, podľa *obrátenej Girsanovej vety* ([8], str.164) existuje proces λ_t taký, že ak W_t je Wienerov proces v miere P , tak

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds \quad (2.2)$$

je Wienerov proces v miere Q . Navyše, *Radon-Nikodymova derivácia* vzhľadom k miere P je:

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}. \quad (2.3)$$

Na základe rovnosti (2.2), napísanej v diferenciálnom tvare $d\tilde{W}_t = dW_t + \lambda_t dt$, vieme prepisovať proces z jednej miery do druhej. Napríklad, ak proces je formulovaný v reálnej miere:

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dW, \quad (2.4)$$

tak v rizikovo neutrálnnej miere platí

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)(d\tilde{W} - \lambda(r, t)dt) = (\mu(r, t) - \lambda(r, t)\sigma(r, t))dt + \sigma(r, t)d\tilde{W}. \quad (2.5)$$

Žiaľ, tento prístup nie je praktický, keďže nič nehovorí o tom, ako funkcia λ vyzerá a čo vyjadruje. Treba zvoliť iný prístup. Nasledujúci postup je prebratý z knihy [5], v ktorej je možné nájsť podrobnosti. My tu uvádzame len hlavnú myšlienku. Ak formulujeme model v reálnej miere, dá sa ukázať, že musí existovať taká funkcia $\lambda(r, t)$, ktorá vyjadruje nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika. Vzhľadom na túto interpretáciu sa nazýva trhovú cenu rizika. Zdôraznime, že je spoločná pre všetky dlhopisy, nezávisí od maturity dlhopisu. Podľa *Girsanovej vety* ([8], str.164) teda existuje taká miera Q , ekvivalentná s mierou P , že (2.2) je Wienerov proces v miere Q a Radon-Nikodymova derivácia je daná vzťahom (2.3). Posledným krokom v [5] je dôkaz, že táto miera Q je presne rizikovo neutrálna miera. To znamená, že model môžeme zadať dvoma spôsobmi:

- pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice v reálnej miere a trhovej ceny rizika
- pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice v rizikovo neutrálnnej miere

Pritom platí, že volatility v oboch mierach sú rovnaké a pre drift platí:

$$(\text{rizikovo neutrálny drift}) = (\text{reálny drift}) - (\text{trhová cena rizika}) \times (\text{volatilita}). \quad (2.6)$$

Cena dlhopisu sa dá explicitne vypočítať vo Vašíčkovom modeli a CIR modeli. Uvádzame riešenia prebraté z [6].

Vašíčkov model v reálnej miere opisuje stochastická diferenciálna rovnica:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dW,$$

kde $\kappa, \sigma > 0$ a $\theta \geq 0$. Trhová cena rizika je v tomto prípade zvolená ako konštanta λ . V rizikovo neutrálnnej miere Vašíčkov model vyzerá nasledovne:

$$dr = (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma)dt + \sigma dW.$$

Cena diskontného dlhopisu spĺňa

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + \left[\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma \right] \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0,$$

s počiatočnou podmienkou $P(r, 0) = 1$.

Riešenie ceny dlhopisu v jednofaktorovom Vašíčkovom modeli nadobúda tvar:

$$P(r, \tau) = e^{A(\tau) - rD(\tau)},$$

kde funkcie $D(\tau)$, $A(\tau)$ vieme vyjadriť nasledovne:

$$D(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa},$$

$$A(\tau) = \left(\frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} - \tau \right) \times \left(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - e^{-\kappa\tau})^2.$$

CIR model v reálnej miere opisuje stochastická diferenciálna rovnica:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW,$$

kde $\kappa, \sigma > 0$ a $\theta \geq 0$. Trhová cena rizika je v tomto prípade zvolená ako $\lambda\sqrt{r}$, kde λ je konštanta. V rizikovo neutrálnej miere vyzerá CIR model nasledovne:

$$dr = (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma r)dt + \sigma\sqrt{r}dW.$$

Cena diskontného dlhopisu spĺňa rovnicu:

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + \left[\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma r \right] \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2 r}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0,$$

s počiatočnou podmienkou $P(r, 0) = 1$. Riešenie ceny dlhopisu v jednofaktorovom CIR modeli, môžeme zapísať v rovnakom tvare ako pri Vašíčkovom modeli, t. j. :

$$P(r, \tau) = e^{A(\tau) - rD(\tau)},$$

no s iným predpisom funkcií $D(\tau)$, $A(\tau)$:

$$D(\tau) = \frac{2(e^{\theta\tau} - 1)}{(\Phi + \Psi)(e^{\Phi\tau} - 1) + 2\Phi},$$

$$A(\tau) = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \ln \left(\frac{2\Phi e^{\frac{(\Phi+\Psi)\tau}{2}}}{(\Phi + \Psi)(e^{\Phi\tau} - 1) + 2\Phi} \right) \quad \text{kde} \quad \Psi = \kappa + \lambda\sigma \quad \text{a} \quad \Phi = \sqrt{(\kappa + \lambda\sigma)^2 + 2\sigma^2}.$$

Riešenia pre Vašíčkov a CIR model prevzaté z [6].

Ak v CKLS modeli je $\gamma \neq 0$, $\gamma \neq \frac{1}{2}$ (čiže ak nejde o Vašíčkov alebo CIR model) riešenia ceny dlhopisu nie sú známe. Navrhnuté aproximácie je možné nájsť v [3], [11], [10].

2.2 Dvojfaktorové modely

V dvojfaktorových modeloch je úroková miera vysvetľovaná dvoma faktormi. Nech je jedným faktorom r a druhý faktor označme ako x . Uvažujme dvojfaktorový model s koreláciou, v ktorom dynamika systému je daná dvoma stochastickými diferenciálnymi rovnicami, pričom $\rho \in (-1, 1)$ je korelácia medzi prírastkami Wienerových procesov W_1, W_2 .

$$\begin{aligned} dr &= \mu_r(r, x, t)dt + \sigma_r(r, x, t)dW_1, \\ dx &= \mu_x(r, x, t)dt + \sigma_x(r, x, t)dW_2, \\ \text{Cov}[dW_1, dW_2] &= \rho dt. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Proces x je náhodný proces, ktorý súvisí s okamžitou úrokovou mierou. Môže to byť nejaká finančná premenná - napr. dlhodobá úroková miera, rozdiel medzi dlhodobou a krátkodobou úrokovou mierou alebo úroková miera v eurozóne (v poslednom prípade ide o konvergenčný model, ktorému venujeme nasledujúcu kapitolu 3). Inú triedu modelov predstavujú modely so stochastickou volatilitou, v ktorých proces x vstupuje do funkcie $\sigma_r(r, x, t)$. Konkrétne príklady dvojfaktorových modelov sa dajú nájsť v knihách [1], [5], [9]. Uvedený model je možné prepísať do tvaru, ktorý v rovnicách obsahuje nezávislé Wienerove procesy (pozri napr. [9]).

$$\begin{aligned} dr &= \mu_r(r, x, t)dt + \sigma_r(r, x, t)d\tilde{W}_1, \\ dx &= \mu_x(r, x, t)dt + \sigma_x(r, x, t)[\rho d\tilde{W}_1 + (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}d\tilde{W}_2], \end{aligned}$$

Tento prepis sa využíva napríklad pri simuláciách.

Podobne ako v jednofaktorových modeloch, aj teraz máme dve možnosti formulácie modelu, a to pomocou:

- stochastickej diferenciálnej rovnice v reálnej miere a trhových cien rizika $\lambda_r(r, x, t), \lambda_x(r, x, t)$ zodpovedajúcich jednotlivým procesom
- stochastickej diferenciálnej rovnice v rizikovo neutrálnej miere

Pri zmene miery sa opäť menia len driftы a to rovnakým spôsobom

$$\begin{aligned} (\text{rizikovo neutrálny drift})_r &= (\text{reálny drift})_r - \lambda_r(r, x, t) \times (\text{volatilita})_r \\ (\text{rizikovo neutrálny drift})_x &= (\text{reálny drift})_x - \lambda_x(r, x, t) \times (\text{volatilita})_x. \end{aligned}$$

Ak short rate vyhovuje v reálnej miere stochastickej diferenciálnej rovnici (2.7) a trhové ceny rizika sú $\lambda_r(r, x, t), \lambda_x(r, x, t)$, tak cena dlhopisu P vyhovuje nasledujúcej parciálnej diferenciálnej rovnici (za predpokladu, že faktor x je kladný):

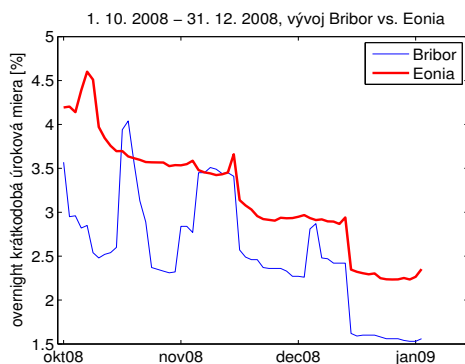
$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r(r, x, t) - \lambda_r(r, x, t)\sigma_r(r, x, t))\frac{\partial P}{\partial r} + (\mu_x(r, x, t) - \lambda_x(r, x, t)\sigma_x(r, x, t))\frac{\partial P}{\partial x} \\ + \frac{\sigma_r(r, x, t)^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{\sigma_x(r, x, t)^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \rho\sigma_r(r, x, t)\sigma_x(r, x, t)\frac{\partial^2 P}{\partial r\partial x} - rP = 0 \\ r, x > 0, \quad t \in (0, T) \end{aligned}$$

a platí koncová podmienka $P(r, x, T) = 1$ pre každé $r, x > 0$.

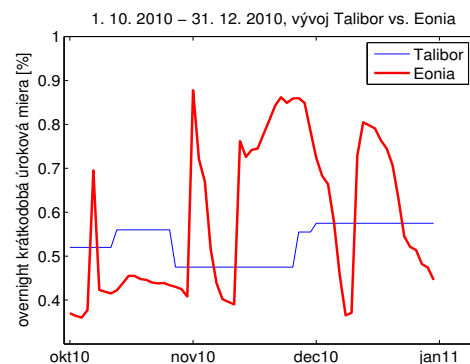
Kapitola 3

Konvergenčné modely

Špeciálny prípad dvojfaktorových modelov tvorí skupina konvergenčných modelov. Konvergenčný model vysvetľuje súvis správania sa úrokovej miery so vstupom pozorovanej krajiny do menovej únie. Priebeh vývoja úrokových mier štátov, ktoré už prijali euro, je znázornený na obrázkoch 3.1 a 3.2 v období posledných troch mesiacov pred vstupom danej krajiny do menovej únie. Na obrázku 3.1 je znázornený vývoj overnight krátkodobých úrokových mier na Slovensku a v eurozóne od 1. 10. 2008 do 31. 12. 2008. Na obrázku 3.2 je znázornený vývoj krátkodobých úrokových mier v Estónsku a v eurozóne od 1. 10. 2010 do 31. 12. 2010. Zaznamenávame teda posledné pozorovateľné hodnoty úrokových mier Bribor a Talibor.



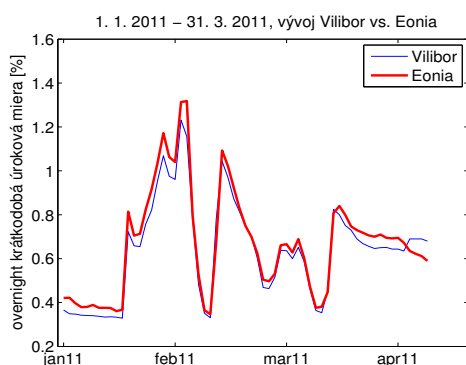
Obr. 3.1: Vývoj Briboru a Eonie
3 mesiace pred vstupom do menovej únie



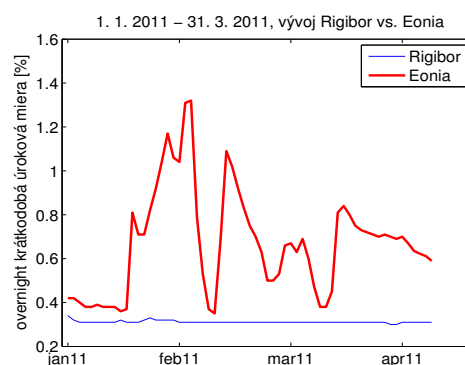
Obr. 3.2: Vývoj Taliboru a Eonie
3 mesiace pred vstupom do menovej únie

Na obrázkoch 3.3 a 3.4 je zaznamenaný vývoj overnight v Litve (t. j. Vilibor) a Lotyšsku (t. j. Rigibor) za prvý štvrtrok roku 2011. Napriek tomu, že sú to veľmi podobné pobaltské susediace krajiny, vidíme výrazný rozdiel. Na obrázku 3.3 môžeme sledovať výraznú konvergenciu Viliboru k Eonii, pričom na obrázku 3.4 takáto konvergencia premennej Rigiboru k Eonii nie je viditeľná. Eonia osciluje, kým Rigibor sa udržiava takmer na konštantnej hodnote.

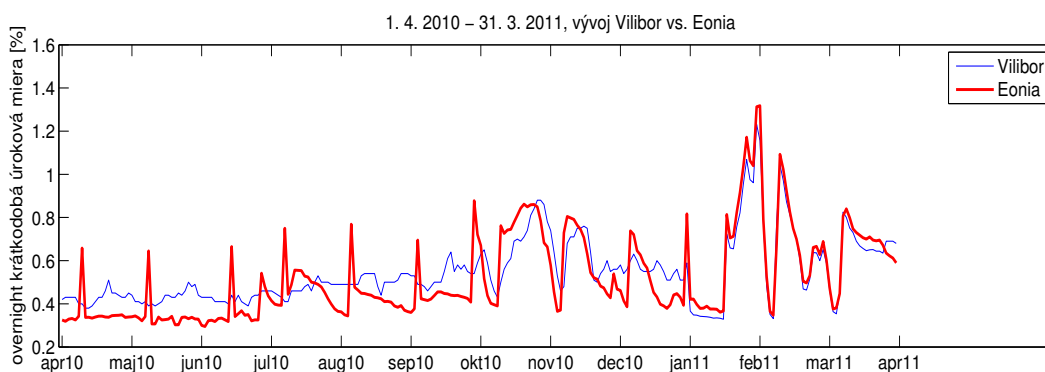
Obrázky 3.5 a 3.6, ktoré zaznamenávajú dlhšie obdobie (1 rok), potvrdzujú jav, že medzi Viliborom a Eoniou existuje silná korelácia, no medzi Rigiborom a Eoniou veľmi slabá. Pri pohľade na takéto dlhšie obdobie tiež vidíme, že pozorovanie z obrázku 3.4 ohľadom Rigiboru nie je univerzálne. Počas predchádzajúcich troch mesiacov je situácia presne opačná - Eonia je stabilná, a Rigibor má výraznejšie fluktuácie.



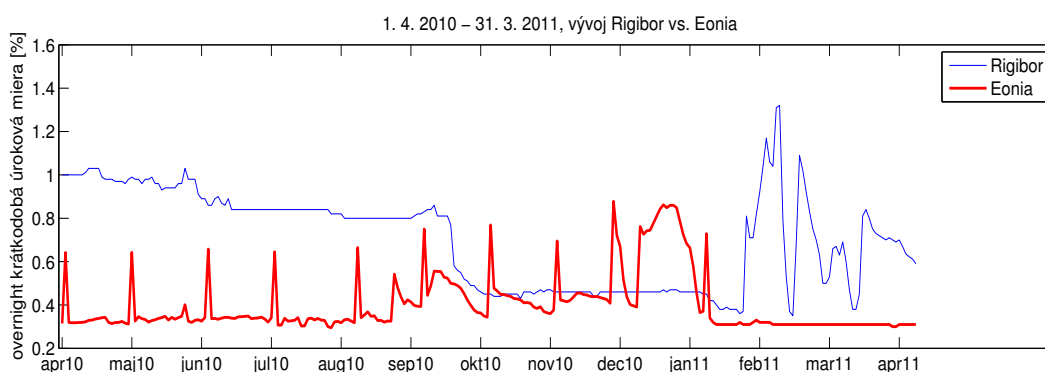
Obr. 3.3: Vývoj Viliboru a Eonia



Obr. 3.4: Vývoj Rigiboru a Eonia



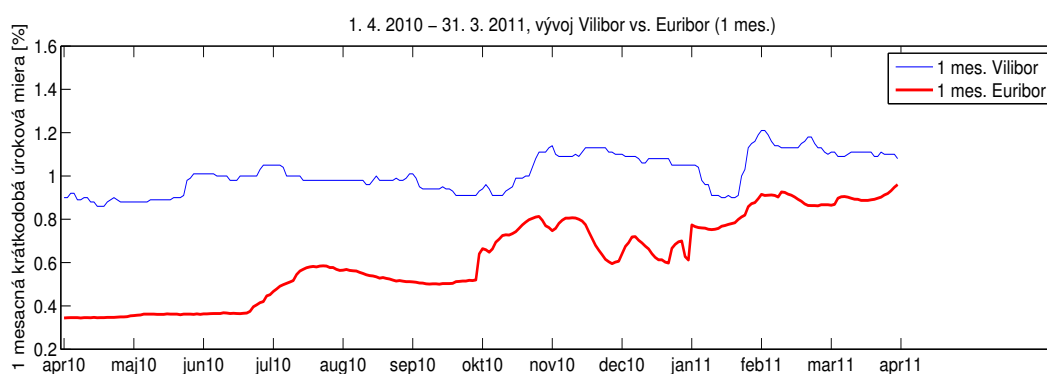
Obr. 3.5: Vývoj Viliboru a Eonia



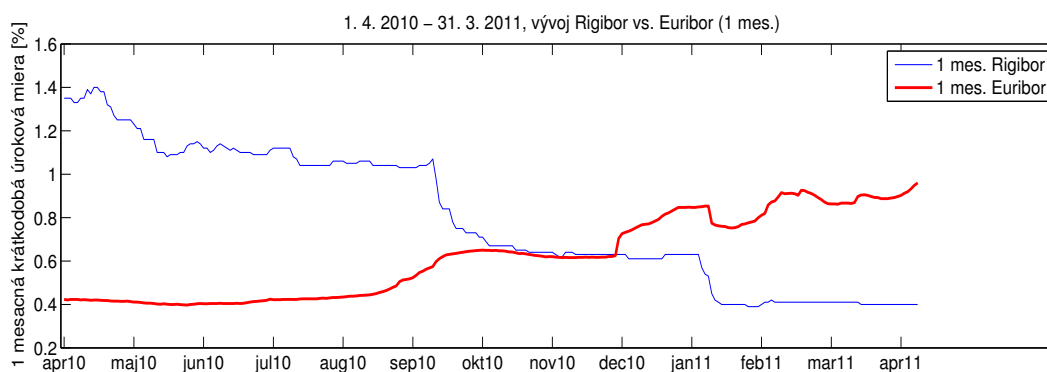
Obr. 3.6: Vývoj Rigiboru a Eonia

Obrázky 3.7 a 3.8 sú analogické obrázkom 3.5 a 3.6, pričom za krátkodobú úrokovú mieru neberieme overnight, ale mesačnú úrokovú mieru.

Konvergenčným modelom modelujeme vývoj správania sa dvoch krátkodobých úrokových mier, a to domácej a okamžitej úrokovej miery pre menovú úniu. Európska úroková miera sa modeluje pomocou jednofaktorového modelu, pričom sa predpokladá, že má vplyv na vývoj



Obr. 3.7: Vývoj 1 mesačných úrokových mier Vilibor a Euribor



Obr. 3.8: Vývoj 1 mesačných úrokových mier Rigibor a Euribor

domácej úrokovej miery a vstupuje do stochastickej diferenciálnej rovnice pre jej vývoj. Takýto model bol navrhnutý v článku [4]. Vychádza z Vašíčkovho modelu, kde volatility úrokových mier sú konštantné. Analogickým modelom Cox-Ingersoll-Rossovoho typu, kde volatility sú úmerné odmocnине úrokovej miery sa zaoberá V. Lacko vo svojej diplomovej práci [6]. V nasledujúcich častiach popíšeme tieto dva modely a ukážeme ako sa v nich dajú oceňovať dlhopisy. Potom uvedieme ich zovšeobecnenie pre nelineárnu volatilitu, analogickú volatilitu v jednofaktorovom modeli, ktorý navrhli Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders v [2]. Tento model potom bude objektom štúdia v nasledujúcich kapitolách s odvodením aproximácie a navrhnutím postupu kalibrácie, ktoré predstavujú hlavnú časť tejto práce.

3.1 Konvergenčný model Vašíčkovho typu

Prvý konvergenčný model bol navrhnutý v článku [4]. Model v reálnej miere nadobúda tvar

$$\begin{aligned} dr_d &= (a + b(r_e - r_d)) dt + \sigma_d dW_d, \\ dr_e &= (c(d - r_e)) dt + \sigma_e dW_e, \\ Cov[dW_d, dW_e] &= \rho dt. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Trhové miery rizika berieme konštantné, t. j. $\lambda_d(r_d, r_e, \tau) = \lambda_d$ a $\lambda_e(r_d, r_e, \tau) = \lambda_e$. Pre európsku úrokovú mieru máme vlastne jednofaktorový Vašíčkov model, v ktorom vývoj úrokovej miery spĺňa mean - reversion vlastnosť a priťahuje sa k limitnej hodnote d . Teda vieme jednoducho oceniť európske dlhopisy, pozri kapitolu 2.1. Koeficient $b > 0$ vyjadruje silu priťahovania domácej short rate k európskej s možnosťou vychýlenia určeného koeficientom a , kde a je priamo to vychýlenie. Koeficient $c > 0$ vyjadruje silu priťahovania európskej short rate k domácej.

Cena domáceho dlhopisu $P(r_d, r_e, \tau)$ s časom do splatnosti $\tau = T - t$ spĺňa nasledovnú parciálnu diferenciálnu rovnicu.

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (a + b(r_e - r_d) - \lambda_d) \frac{\partial P}{\partial r_d} + (c(d - r_e) - \lambda_e) \frac{\partial P}{\partial r_e} + \frac{\sigma_d^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} + \rho \sigma_d \sigma_e \frac{\partial^2 P}{\partial r_d \partial r_e} - r_d P = 0, \quad (3.2)$$

$r_d, r_e > 0, \quad \tau \in (0, T),$

a začiatočnú podmienku $P(r_d, r_e, 0) = 1$, pre všetky $r_d, r_e > 0$.

V rizikovo neutrálnej miere má model tvar

$$\begin{aligned} dr_d &= (a + b(r_e - r_d) - \lambda_d \sigma_d) dt + \sigma_d dW_d, \\ dr_e &= (c(d - r_e) - \lambda_e \sigma_e) dt + \sigma_e dW_e, \\ Cov[dW_d, dW_e] &= \rho dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

V týchto rovniciach predstavujú W_d, W_e Wienerové procesy v rizikovo neutrálnej miere.

Neskôr budeme potrebovať všeobecnejší model tohto typu. Uvažujme model, v ktorom v rovnici pre vývoj domácej krátkodobej úrokovej miery je rizikovo neutrálny drift všeobecnou lineárnou funkciou premenných r_d, r_e a v rovnici pre vývoj európskej krátkodobej úrokovej miery je rizikovo neutrálny drift zostáva všeobecnou lineárnou funkciou r_e . To znamená, že pre vývoj domácej a európskej úrokovej miery máme systém stochastických diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} dr_d &= (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) dt + \sigma_d dW_d, \\ dr_e &= (b_1 + b_2 r_e) dt + \sigma_e dW_e, \\ Cov[dW_d, dW_e] &= \rho dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Systém (3.4) zodpovedá systému (3.3), ak $a_1 = a - \lambda_d \sigma_d$, $a_2 = -b$, $a_3 = b$, $b_1 = cd - \lambda_e \sigma_e$, $b_2 = -c$. Parciálna diferenciálna rovnica pre cenu dlhopisu $P(r_d, r_e, \tau)$ potom je

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \frac{\partial P}{\partial r_d} + (b_1 + b_2 r_e) \frac{\partial P}{\partial r_e} + \frac{\sigma_d^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} + \rho \sigma_d \sigma_e \frac{\partial^2 P}{\partial r_d \partial r_e} - r_d P = 0, \quad (3.5)$$

$r_d, r_e > 0, \quad \tau \in (0, T),$

s počiatočnou podmienkou $P(r_d, r_e, 0) = 1$ pre $r_d, r_e > 0$.

Pri riešení rovnice (3.5). Postupujeme rovnakým spôsobom ako v špeciálnom prípade v článku [4]. Predpokladajme riešenie rovnice (3.5) v tvare

$$P(r_d, r_e, \tau) = e^{A(\tau) - D(\tau)r_d - U(\tau)r_e} \quad (3.6)$$

Zo začiatočnej podmienky pre cenu dlhopisu vyplývajú začiatočné podmienky pre funkcie A, D, U :

$$A(0) = D(0) = U(0) = 0.$$

Zderivovaním predpokladaného riešenia (3.6) dostávame (kde $\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial \tau}$, analogicky aj \dot{D}, \dot{U}): a ich dosadením do (3.5) dostávame

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} &= P(\dot{A} - \dot{D}r_d - \dot{U}r_e), & \frac{\partial P}{\partial r_d} &= P(-D), & \frac{\partial P}{\partial r_e} &= P(-U), \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} &= PD^2, & \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} &= PU^2, & \frac{\partial^2 P}{\partial r_d \partial r_e} &= PDU, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[-\dot{A}(\tau) + \dot{D}(\tau)r_d + \dot{U}(\tau)r_e - a_1D(\tau) - a_2r_dD(\tau) - a_3r_eD(\tau) - b_1U(\tau) \\ &\quad - b_2r_eU(\tau) + \frac{\sigma_d^2}{2}D^2(\tau) + \frac{\sigma_e^2}{2}U^2(\tau) + \rho\sigma_d\sigma_eD(\tau)U(\tau) - r_d]P = 0. \end{aligned}$$

Rovnicu vydelíme cenou dlhopisu P a vyjmeme r_d a r_e :

$$-\dot{A} - a_1D - b_1U + \frac{\sigma_d^2}{2}D^2 + \frac{\sigma_e^2}{2}U^2 + \rho\sigma_d\sigma_eDU + r_d(\dot{D} - a_2D - 1) - r_e(\dot{U} - a_3D - b_2U) = 0. \quad (3.7)$$

Rovnosť (3.7) má byť splnená pre všetky r_d, r_e , takže musí platiť

$$\begin{aligned} \dot{D}(\tau) &= 1 + a_2D(\tau), \\ \dot{U}(\tau) &= a_3D(\tau) + b_2U(\tau), \\ \dot{A}(\tau) &= -a_1D(\tau) - b_1U(\tau) + \frac{\sigma_d^2 D^2(\tau)}{2} + \frac{\sigma_e^2 U^2(\tau)}{2} + \rho\sigma_d\sigma_eD(\tau)U(\tau). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Riešenie tejto sústavy obyčajných diferenciálnych rovníc je analogické riešeniu systému obyčajných diferenciálnych rovníc vyplývajúceho z (3.3), ktoré je uvedené v [6], preto uvádzame len výsledok pre $a_2 \neq b_2$ (ak $a_2 = b_2$, tak $U(\tau)$ má iný tvar, ide však o veľmi špeciálny prípad, preto sa ním ďalej nezaobráame).

$$\begin{aligned} D(\tau) &= \frac{-1 + e^{a_2\tau}}{a_2}, \\ U(\tau) &= \frac{a_3(a_2 - a_2e^{b_2\tau} + b_2(-1 + e^{a_2\tau}))}{a_2(a_2 - b_2)b_2}, \\ A(\tau) &= \int_0^\tau -a_1D(s) - b_1U(s) + \frac{\sigma_d^2 D^2(s)}{2} + \frac{\sigma_e^2 U^2(s)}{2} + \rho\sigma_d\sigma_eD(s)U(s) ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Poznamenanajme, že aj funkcia $A(\tau)$ sa dá napísať v explicitnom tvare, pozri [6].

3.2 Konvergenčný model CIR typu

Corzo a Schwartz v článku [4], v ktorom sa zaoberajú Vašíčkovým modelom, tvrdia, že všetky ich výsledky sa dajú rozšíriť pre model CIR. V diplomovej práci [6] však bolo ukázané, že separácia premenných v tvare (3.6) je možná len pre prípad, v ktorom sú diferenciály Wienerových procesov riadiach domácu a európsku úrokovú mieru nekorelované. Tento model budeme, vzhľadom na možnosť výpočtu presných cien dlhopisov, používať na testovanie našej aproximácie, preto tu uvedieme jeho formuláciu, ako aj príslušný systém obyčajných diferenciálnych rovníc, na ktorý vedie oceňovanie dlhopisov.

Dvojfaktorový konvergenčný model CIR typu v reálnej miere bol v [6] formulovaný v tvare

$$\begin{aligned} dr_d &= (a + b(r_e - r_d)) dt + \sigma_d \sqrt{r_d} dW_d, \\ dr_e &= (c(d - r_e)) dt + \sigma_e \sqrt{r_e} dW_e, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$Cov[dW_d, dW_e] = \rho dt.$$

Trhové ceny rizika berieme úmerné odmocninám z príslušných okamžitých úrokových mier, t. j.: $\lambda_d(r_d, r_e, \tau) = \lambda_d \sqrt{r_d}$, $\lambda_e(r_d, r_e, \tau) = \lambda_e \sqrt{r_e}$.

Európska úroková miera je modelovaná jednofaktorovým CIR modelom, takže európske dlhopisy vieme oceňovať. Cena domáceho dlhopisu $P(r_d, r_e, \tau)$ s maturitou τ spĺňa nasledovnú parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + (a + b(r_e - r_d)) \frac{\partial P}{\partial r_d} + (c(d - r_e)) \frac{\partial P}{\partial r_e} \\ + \frac{\sigma_d^2 r_d}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} + \rho \sigma_d \sqrt{r_d} \sigma_e \sqrt{r_e} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d \partial r_e} - r_d P = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$r_d, r_e > 0, \quad \tau \in (0, T),$$

s počiatočnou podmienkou $P(r_d, r_e, 0) = 1$ pre $r_d, r_e > 0$.

Konvergenčný CIR model v rizikovo neutrálnej miere vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned} dr_d &= (a + b(r_e - r_d) - \lambda_d r_d) dt + \sigma_d \sqrt{r_d} dW_d, \\ dr_e &= (c(d - r_e) - \lambda_e r_e) dt + \sigma_e \sqrt{r_e} dW_e, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$Cov[dW_d, dW_e] = \rho dt.$$

Opäť sformulujeme model so všeobecnejšími koeficientami.

$$\begin{aligned} dr_d &= (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) dt + \sigma_d \sqrt{r_d} dW_d, \\ dr_e &= (b_1 + b_2 r_e) dt + \sigma_e \sqrt{r_e} dW_e, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$Cov[dW_d, dW_e] = \rho dt.$$

Model (3.12) zodpovedá parametrom $a_1 = a$, $a_2 = -b - \lambda_d$, $a_3 = b$, $b_1 = cd$, $b_2 = -c - \lambda_e$ v modeli (3.13). Parciálna diferenciálna rovnica pre cenu dlhopisu $P(r_d, r_e, \tau)$ potom je

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \frac{\partial P}{\partial r_d} + (b_1 + b_2 r_e) \frac{\partial P}{\partial r_e} \\ + \frac{\sigma_d^2 r_d}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2 r_e}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} + \rho \sigma_d \sqrt{r_d} \sigma_e \sqrt{r_e} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d \partial r_e} - r_d P = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\text{pre } r_d, r_e > 0, \quad \tau \in (0, T),$$

a začiatočná podmienka $P(r_d, r_e, 0) = 1$ pre $r_d, r_e > 0$.

Opäť predpokladajme riešenie v tvare (3.6). Analogickým spôsobom, ako sme dostali rovnicu (3.7) pri Vašíčkovom modeli, odvodíme podobnú rovnicu pre CIR model.

$$\left(-\dot{A} - a_1 D - b_1 U\right) + r_d \left(\dot{D} - a_2 D + \frac{\sigma_d^2}{2} D^2 - 1\right) + r_e \left(\dot{U} - a_3 D - b_2 U + \frac{\sigma_e^2}{2} U^2\right) = 0. \quad (3.15)$$

Z nej získame systém troch obyčajných diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \dot{D}(\tau) &= 1 + a_2 D(\tau) - \frac{\sigma_d^2 D^2(\tau)}{2}, \\ \dot{U}(\tau) &= a_3 D(\tau) + b_2 U(\tau) - \frac{\sigma_e^2 U^2(\tau)}{2}, \\ \dot{A}(\tau) &= -a_1 D(\tau) - b_1 U(\tau), \end{aligned} \quad (3.16)$$

s danými počiatočnými podmienkami

$$A(0) = D(0) = U(0) = 0,$$

ktorý vieme riešiť numericky.

3.3 Konvergenčný model CKLS typu

Zovšeobecnením jednofaktorového Vašíčkovho a CIR modelu je model, ktorý v reálnej miere navrhli Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders (CKLS) v článku [2]. Volatilita v ňom má tvar σr^γ . Model v rizikovo neutrálnej miere s takouto volatilitou a s lineárnym driftom bol študovaný v článku [3] a v nadväzujúcich článkoch [11], [10].

Analogickým spôsobom zovšeobecníme konvergenčné modely Vašíčkovho typu a CIR typu, uvedené v predchádzajúcich dvoch častiach. Uvažujeme model, v ktorom rizikovo neutrálny drift európskej short rate r_e je lineárnou funkciou r_e , drift domácej short rate r_d je lineárnou funkciou r_d a r_e a volatility nadobúdajú tvar $\sigma_e r_e^{\gamma_e}$ a $\sigma_d r_d^{\gamma_d}$. Teda stochastická diferenciálna rovnica v rizikovo neutrálnej miere, ktoré opisujú vývoj domácej r_d a európskej r_e krátkodobej úrokovej miery sú nasledovné:

$$\begin{aligned} dr_d &= (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e)dt + \sigma_d r_d^{\gamma_d} dW_d, \\ dr_e &= (b_1 + b_2 r_e)dt + \sigma_e r_e^{\gamma_e} dW_e, \\ Cov[dW_d, dW_e] &= \rho dt. \end{aligned}$$

Premenné $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_d, \sigma_e > 0$, $\gamma_d, \gamma_e \geq 0$ v modeli sú dané konštanty a $\rho \in (-1, 1)$ je korelácia medzi prírastkami Wienerovho procesu dW_d a dW_e . Tento model budeme nazývať *dvojfaktorový konvergenčný model CKLS typu*. Takýto model je hlavným objektom záujmu v našej diplomovej práci.

Cena domáceho dlhopisu $P(r_d, r_e, \tau)$ s maturitou τ spĺňa parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial P}{\partial \tau} + (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \frac{\partial P}{\partial r_d} + (b_1 + b_2 r_e) \frac{\partial P}{\partial r_e} \\ & + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} + \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d \partial r_e} - r_d P = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$r_d, r_e > 0, \quad \tau \in (0, T),$$

$$\text{a začiatočnú podmienku} \quad P(r_d, r_e, 0) = 1 \quad r_d, r_e > 0.$$

Ako sme videli v časti 3.1 a 3.2 pre Vašíčkov model ($\gamma_d = \gamma_e = 0$) a pre Cox-Ingersoll-Rossov model ($\gamma_d = \gamma_e = \frac{1}{2}$) s nulovou koreláciou $\rho = 0$ je možná separácia premenných tvaru (3.6) pre riešenie tejto rovnice. Vo všeobecnosti však dosadením tvaru riešenia (3.6) do (3.17) dostávame

$$\begin{aligned} & -\dot{A} + \dot{D}r_d + \dot{U}r_e - a_1 D - a_2 r_d D - a_3 r_e D - b_1 U \\ & - b_2 r_e U + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} D^2 + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2} U^2 + \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} D U - r_d = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ak $\rho \neq 0$, tak člen $\rho r_d^{\gamma_d} r_e^{\gamma_e}$ spôsobí, že pre $(\gamma_d, \gamma_e) \neq (0, 0)$ rovnosť (3.18) nemôže platiť pre všetky r_d, r_e . Ak $\rho = 0$, tak sú to členy $r_d^{2\gamma_d}$ a $r_e^{2\gamma_e}$, ktoré spôsobia, že rovnosť (3.18) nemôže platiť pre všetky r_d, r_e . Riešenie teda nemá tvar (3.6). Z tohto dôvodu nasledujúcu kapitolu 4 venujeme hľadaniu aproximácie riešenia pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom CKLS modeli.

Časť II

Odvodenie aproximácie

Kapitola 4

Aproximácia ceny dlhopisu v konvergenčnom modeli CKLS typu

V tejto kapitole na začiatku sformulujeme aproximáciu CKLS modelu pomocou Vašíčkovho modelu. Navrhnutú aproximáciu budeme testovať na CIR modeli. Pre CIR model s nulovou koreláciou poznáme aj presné riešenie, čo nám umožní zistiť presnosť navrhutej aproximácie. Ďalej odvodíme presnosť aproximácie pre všeobecný CKLS model a ukážeme, že presnosť získanej aproximácie je možné ešte zlepšiť. Definujeme novú aproximáciu, ktorá je o dva rády presnejšia.

4.1 Formulácia navrhutej aproximácie

Na začiatku je nutné aproximovať jednofaktorový CKLS model. Táto aproximácia sa použije na aproximáciu európskych dlhopisov. Použijeme aproximáciu z článku [10]. V tejto aproximácii dosadíme za konštantnú volatilitu vo Vašíčkovom modeli aktuálnu hodnotu volatility σr^γ . Dostávame tak

$$\ln P^{ap}(\tau, r) = \left(\frac{b_1}{b_2} + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{2b_2^2} \right) \left(\frac{1 - e^{b_2\tau}}{b_2} + \tau \right) + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{4b_2^3} (1 - e^{b_2\tau})^2 + \frac{1 - e^{b_2\tau}}{b_2} r. \quad (4.1)$$

Pre domáce dlhopisy (ďalej budeme pri cene domáceho dlhopisu vynechávať index d , t. j. P bude predstavovať cenu domáceho dlhopisu) definujeme analogickú aproximáciu, ktorá bude spočívať v nahradení členov σ_d, σ_e v riešení dvojfaktorového konvergenčného Vašíčkovho modelu (3.9) členmi $\sigma_d r_d^{\gamma_d}$ a $\sigma_e r_e^{\gamma_e}$. Potom aproximované riešenie nadobudne, (pre prípad $a_2 \neq b_2$) takýto tvar:

$$\begin{aligned} D(\tau) &= \frac{-1 + e^{a_2\tau}}{a_2}, \\ U(\tau) &= \frac{a_3(a_2 - a_2 e^{b_2\tau} + b_2(-1 + e^{a_2\tau}))}{a_2(a_2 - b_2)b_2}, \\ A(\tau) &= \int_0^\tau -a_1 D(s) - b_1 U(s) + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} D^2(s)}{2} + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e} U^2(s)}{2} + \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} D(s) U(s) ds. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Môžeme si všimnúť, že členy $D(\tau), U(\tau)$ ostali nezmenené, t. j. rovnaké ako v presnom riešení Vašíčkovho modelu (3.9), keďže nezávisia od σ_d, σ_e , a pre funkciu $A(r_d, r_e, \tau)$ platí:

$$\dot{A} = -a_1 D(\tau) - b_1 U(\tau) + \frac{\sigma_d^2}{2} r_d^{2\gamma_d} D(\tau)^2 + \frac{\sigma_e^2}{2} r_e^{2\gamma_e} U(\tau)^2 + \rho \sigma_d \sigma_e r_d^{\gamma_d} r_e^{\gamma_e} U(\tau) D(\tau).$$

Vypočítajme jednotlivé derivácie funkcií D, U, A potrebné pre vyjadrenie Taylorovho rozvoja logaritmu aproximatívnej ceny oceňovaného dlhopisu.

<i>i</i> -ta derivácia	0	1	2	3	4
$D^i(0)$	0	1	a_2	a_2^2	a_2^3
$U^i(0)$	0	0	a_3	$a_3(a_2 + b_2)$	$a_3 a_2^2 + b_2 a_3(a_2 + b_2)$
$A^i(0)$	0	0	$-a_1$	$-a_1 a_2 - b_1 a_3 + \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}$	$-a_1 a_2^2 - b_1 a_3(a_2 + b_2) + 3a_2 \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} + 3a_3 \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e^{\gamma_e}$

Tabuľka 4.1: Výpočet i -tych derivácií funkcií D, U, A pre aproximáciu CKLS modelu

Taylorov rozvoj štvrtého rádu pre logaritmus akejkoľvek, či už presnej alebo aproximatívnej, ceny dlhopisu P , uvažovanej v tvare (3.6), vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} \ln P &= A(\tau) - D(\tau)r_d - U(\tau)r_e \\ &= (A(0) - D(0)r_d - U(0)r_e) + \left(\dot{A}(0) - \dot{D}(0)r_d - \dot{U}(0)r_e \right) \tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\ddot{A}(0) - \ddot{D}(0)r_d - \ddot{U}(0)r_e \right) \tau^2 + \frac{1}{6} \left(A^{(3)}(0) - D^{(3)}(0)r_d - U^{(3)}(0)r_e \right) \tau^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \left(A^{(4)}(0) - D^{(4)}(0)r_d - U^{(4)}(0)r_e \right) \tau^4 + o(\tau^4). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Potom dosadením hodnôt z tabuľky 4.1 do (4.3) vieme $\ln P^{ap}$ vyjadriť takto:

$$\begin{aligned} \ln P^{ap} &= -r_d \tau + \frac{1}{2} (-a_1 - a_2 r_d - a_3 r_e) \tau^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(-a_1 a_2 - b_1 a_3 + \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} - a_2^2 r_d - a_3(a_2 + b_2)r_e \right) \tau^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \left(-a_1 a_2^2 - b_1 a_3(a_2 + b_2) + 3a_2 \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} + 3a_3 \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e^{\gamma_e} \right. \\ &\quad \left. - a_2^3 r_d - (a_3 a_2^2 + b_2 a_3(a_2 + b_2))r_e \right) \tau^4 + o(\tau^4). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Úroková miera je

$$\begin{aligned} R^{ap} &= -\frac{\ln P^{ap}}{\tau} = r_d + \frac{1}{2} (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \tau \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(a_1 a_2 + b_1 a_3 - \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} + a_2^2 r_d + a_3(a_2 + b_2)r_e \right) \tau^2 \\ &\quad + \frac{1}{24} \left(a_1 a_2^2 + b_1 a_3(a_2 + b_2) - 3a_2 \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} - 3a_3 \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e^{\gamma_e} \right. \\ &\quad \left. + a_2^3 r_d + (a_3 a_2^2 + b_2 a_3(a_2 + b_2))r_e \right) \tau^3 + o(\tau^3), \end{aligned}$$

teda výnosová krivka začína z r_d (tak ako má, keďže ide o aproximáciu výnosovej krivky zodpovedajúcej domácej short rate r_d). Všimnime si, že člen pri τ je polovica z rizikovo neutrálneho driftu dr_d .

4.2 Presnosť aproximácie pre CIR model s nulovou koreláciou

Predpis presného riešenia ceny dlhopisu v CIR modeli je daný systémom (5.6). Taktiež poznáme explicitný predpis pre aproximáciu ceny dlhopisu v CIR modeli. Získame ju tak, že do CKLS aproximácie (4.4) dosadíme $\gamma_d = \gamma_e = \frac{1}{2}$ a $\rho = 0$. V nasledujúcej stati vyjadríme Taylorov rozvoj presného riešenia a aproximácie a ich porovnaním odvodíme presnosť aproximácie pre CIR model v prípade nulovej korelácie.

Taylorov rozvoj presného riešenia pre CIR model

Označme $P^{CIR, \rho=0}$ presné riešenie CIR modelu s nulovou koreláciou. Aby sme mohli vyjadriť Taylorov rozvoj aproximácie presného riešenia pre CIR model, potrebujeme vyjadriť členy vystupujúce v (4.3). Zo systému (5.6) vyjadríme jednotlivé funkcie $A(\tau)$, $D(\tau)$, $U(\tau)$ a ich derivácie v bode $\tau = 0$.

Z počiatkovej podmienky $D(0) = U(0) = A(0) = 0$ a rovníc pre prvé derivácie funkcií D , U , A , t. j. systém obyčajných diferenciálnych rovníc (5.6), dostávame

$$\begin{aligned}\dot{D}(0) &= 1 + a_2 D(0) - \frac{\sigma_d^2 D^2(0)}{2} = 1, \\ \dot{U}(0) &= 0, \\ \dot{A}(0) &= 0.\end{aligned}$$

Vypočítame druhé derivácie funkcií D, U, A , do ktorých dosadíme už vypočítané hodnoty funkcií D, U, A a ich prvých derivácií v bode 0:

$$\begin{aligned}\ddot{D}(0) &= a_2 \dot{D}(0) - \frac{\sigma_d^2}{2} (2D(0)\dot{D}(0)) = a_2, \\ \ddot{U}(0) &= a_3 \dot{D}(0) + b_2 \dot{U}(0) - \frac{\sigma_e^2}{2} (2U(0)\dot{U}(0)) = a_3, \\ \ddot{A}(0) &= -a_1 \dot{D}(0) - b_1 \dot{U}(0) + \frac{\sigma_d^2}{2} (2D(0)\dot{D}(0)) + \frac{\sigma_e^2}{2} (2U(0)\dot{U}(0)) \\ &\quad + \rho \sigma_d \sigma_e (\dot{D}(0)U(0) + D(0)\dot{U}(0)) = -a_1.\end{aligned}$$

Podobne vypočítame tretie derivácie:

$$\begin{aligned}D^{(3)}(0) &= a_2 \ddot{D}(0) - \frac{\sigma_d^2}{2} 2 (\dot{D}(0)\dot{D}(0) + D(0)\ddot{D}(0)) = a_2^2 - \sigma_d^2, \\ U^{(3)}(0) &= a_3 \ddot{D}(0) + b_2 \ddot{U}(0) - \frac{\sigma_e^2}{2} 2 (\dot{U}(0)\dot{U}(0) + U(0)\ddot{U}(0)) = a_3 a_2 + b_2 a_3 = a_3 (a_2 + b_2), \\ A^{(3)}(0) &= -a_1 \ddot{D}(0) - b_1 \ddot{U}(0) = -a_1 a_2 - b_1 a_3.\end{aligned}$$

Analogicky postupujeme aj pri výpočte štvrtých derivácií. Prehľad vypočítaných derivácií uvádzame v tabuľke 4.2.

Použitím Taylorovho rozvoja štvrtého rádu (4.3) dostávame

<i>i</i> -ta derivácia	0	1	2	3	4
$D^i(0)$	0	1	a_2	$a_2^2 - \sigma_d^2$	$a_2^3 - 4a_2\sigma_d^2$
$U^i(0)$	0	0	a_3	$a_3(a_2 + b_2)$	$a_3a_2^2 - a_3\sigma_d^2 + b_2a_3(a_2 + b_2)$
$A^i(0)$	0	0	$-a_1$	$-a_1a_2 - b_1a_3$	$-a_1a_2^2 + a_1\sigma_d^2 - b_1a_3(a_2 + b_2)$

Tabuľka 4.2: Derivácie funkcií D, U, A v presnom riešení CIR modelu s nulovou koreláciou

$$\begin{aligned}
\ln P^{CIR, \rho=0} = & -r_d\tau + \frac{1}{2}(-a_1 - a_2r_d - a_3r_e)\tau^2 \\
& + \frac{1}{6}(-a_1a_2 - b_1a_3 - a_2^2r_d + \sigma_d^2r_d - a_3(a_2 + b_2)r_e)\tau^3 \\
& + \frac{1}{24}(-a_1a_2^2 + a_1\sigma_d^2 - b_1a_3(a_2 + b_2) + 4a_2\sigma_d^2r_d - a_2^3r_d \\
& - (a_3a_2^2 - a_3\sigma_d^2 + b_2a_3(a_2 + b_2))r_e)\tau^4 + o(\tau^4).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Taylorov rozvoj aproximácie pre CIR model

Označme $P^{CIR, \rho=0, ap}$ aproximáciu riešenia CIR modelu s nulovou koreláciou pomocou vzťahu (4.4). Dosadením $\gamma_d = \gamma_e = \frac{1}{2}$ a $\rho = 0$ do predpisu navrhnutej aproximácie, prípadne dosadením $\gamma_d = \gamma_e = \frac{1}{2}$ a $\rho = 0$ do tabuľky (4.1), kde sú vyjadrené jednotlivé derivácie funkcií D, U, A vo všeobecnom CKLS modeli, dostávame tabuľku (4.3). Dosadením hodnôt z tabuľky

<i>i</i> -ta derivácia	0	1	2	3	4
$D^i(0)$	0	1	a_2	a_2^2	a_2^3
$U^i(0)$	0	0	a_3	$a_3(a_2 + b_2)$	$a_3a_2^2 + b_2a_3(a_2 + b_2)$
$A^i(0)$	0	0	$-a_1$	$-a_1a_2 - b_1a_3 + \sigma_d^2r_d$	$-a_1a_2^2 - b_1a_3(a_2 + b_2) + 3a_2\sigma_d^2r_d$

Tabuľka 4.3: Derivácie funkcií D, U, A v aproximácii CIR modelu s nulovou koreláciou

4.3 do vzťahu (4.3) dostaneme Taylorov rozvoj štvrtého rádu aproximácie $\ln P^{CIR, \rho=0, ap}$ pre CIR model.

$$\begin{aligned}
\ln P^{CIR, \rho=0, ap} = & -r_d\tau + \frac{1}{2}(-a_1 - a_2r_d - a_3r_e)\tau^2 \\
& + \frac{1}{6}(-a_1a_2 - b_1a_3 + \sigma_d^2r_d - a_2^2r_d - a_3(a_2 + b_2)r_e)\tau^3 \\
& + \frac{1}{24}(-a_1a_2^2 - b_1a_3(a_2 + b_2) + 3a_2\sigma_d^2r_d - a_2^3r_d \\
& - (a_3a_2^2 + b_2a_3(a_2 + b_2))r_e)\tau^4 + o(\tau^4)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Presnosť aproximácie

Porovnaním (4.5) a (4.6) dostávame, že rozdiel

$$\ln P^{CIR, \rho=0, ap} - \ln P^{CIR, \rho=0} = \frac{1}{24}(-a_2\sigma_d^2r_d - a_1\sigma_d^2 - a_3\sigma_d^2r_e)\tau^4 + o(\tau^4) \tag{4.7}$$

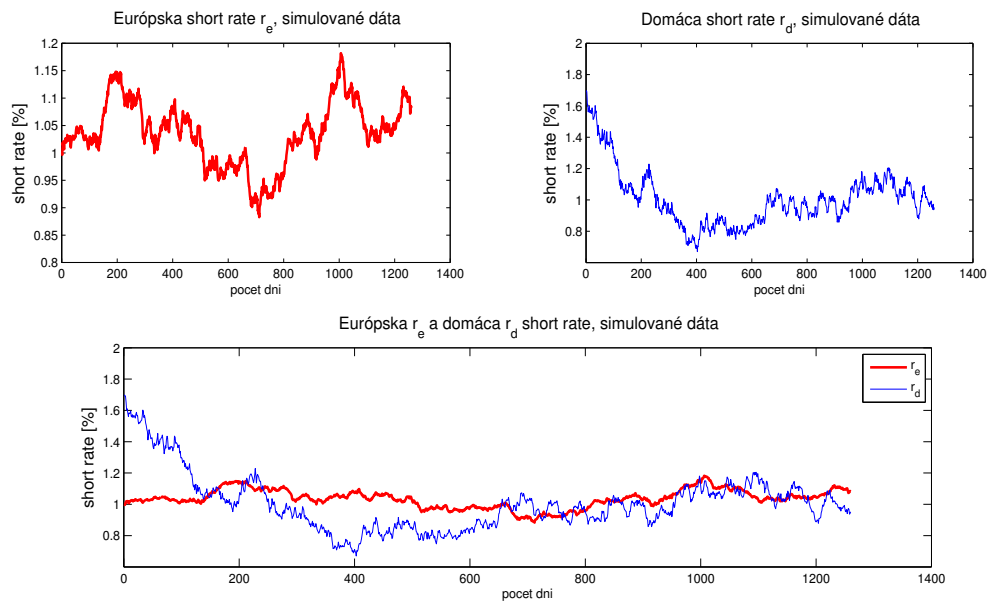
je štvrtého rádu.

4.3 Numerické výsledky pre CIR model a jeho aproximáciu

Uvažujme dvojfaktorový CIR model v rizikovo neutrálnej miere s nulovou koreláciou, čiže zvolíme $\rho = 0$, potom

$$\begin{aligned} dr_d &= (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e)dt + \sigma_d \sqrt{r_d} dW_d, \\ dr_e &= (b_1 + b_2 r_e)dt + \sigma_e \sqrt{r_e} dW_e, \\ Cov[dW_d, dW_e] &= 0. \end{aligned}$$

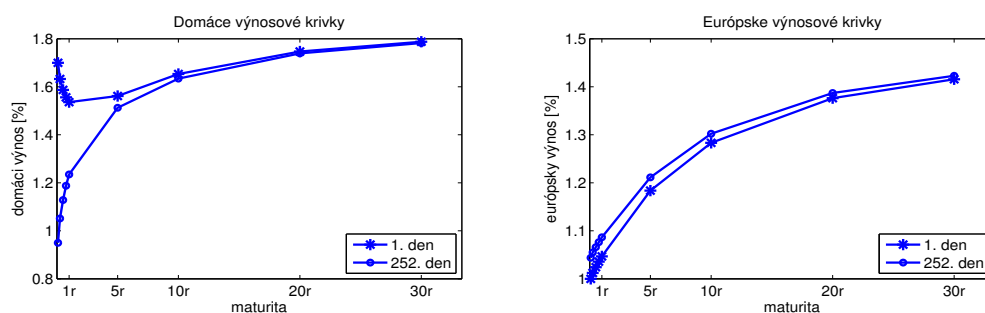
Zvoľme realistické parametre v reálnej miere (realistické v tom zmysle, že generujú realistické priebehy short rate a výnosových kriviek) nasledovne: $a = 0$, $b = 2$, $\sigma_d = 0.03$, $c = 0.2$, $d = 0.01$, $\sigma_e = 0.01$ a trhové miery rizika $\lambda_d = -0.25$, $\lambda_e = -0.1$. Použitím prevodných vzťahov na vyjadrenie parametrov v rizikovo neutrálnej miere prostredníctvom reálnych parametrov dostávame: $a_1 = a - \lambda_d \sigma_d = 0.0075$, $a_2 = -b = -2$, $a_3 = b = 2$, $b_1 = cd - \lambda_e \sigma_e = 0.003$, $b_2 = -c = -0.2$, $\sigma_d = 0.03$, $\sigma_e = 0.01$. Pre tieto parametre vygenerujeme dáta. S voľbou počiatočných hodnôt $r_d = 1.7\%$ a $r_e = 1\%$ vygenerujeme domácu a európsku short rate. Priebeh jednotlivých krátkodobých úrokových mier je zaznamenaný na obrázku 4.1.



Obr. 4.1: Priebeh európskej a domácej short rate počas 5 rokov

Na obrázku 4.2 znázorňujeme priebeh domácich a európskych výnosových kriviek pre dva konkrétne dni.

V tabuľkách 4.4 a 4.5 zaznamenávame presnú úrokovú mieru (t. j. vypočítanú numerickým riešením systému (4.2)), aproximovanú úrokovú mieru, ktorú získame dosadením presných parametrov (podľa ktorých sme dáta simulovali) do navrhutej aproximácie pre CIR model a



Obr. 4.2: Výnosové krivky pre 1. a 252. deň v simulovaných dátach (t. j. o rok neskôr)

ich rozdiel. Tabuľka 4.4 obsahuje tieto údaje pre prvý pozorovaný deň a tabuľka 4.5 pre 252. deň. Medzi týmito dvoma tabuľkami pozorujeme minimálne rozdiely. Trhové hodnoty Euriboru sa uvádzajú s presnosťou na tri desatinné miesta. Presnosť našej aproximácie je 10^{-5} až 10^{-6} pre dlhopisy s maturitou do jedného roka a 10^{-4} až 10^{-5} pre dlhopisy s maturitami až do 30 rokov. Ani voľbou iných dní, kde je iná kombinácia hodnôt r_d , r_e , nezískame veľmi rozdielne výsledky. Rozdiel medzi presnou a aproximovanou úrokovou mierou ostáva rádovo takmer stále rovnaký.

Mat. [rok]	Presný výnos [%]	Aprox. výnos [%]	Rozdiel [%]
$\frac{1}{4}$	1.63257	1.63256	7.1E-006
$\frac{1}{2}$	1.58685	1.58684	1.4E-005
$\frac{3}{4}$	1.55614	1.55614	4.8E-006
1	1.53593	1.53592	1.1E-005
5	1.56154	1.56155	-5.0E-006
10	1.65315	1.65323	-8.3E-005
20	1.74696	1.74722	-2.5E-004
30	1.78751	1.78787	-3.7E-004

Mat. [rok]	Presný výnos [%]	Aprox. výnos [%]	Rozdiel [%]
$\frac{1}{4}$	1.08249	1.08250	-8.2E-006
$\frac{1}{2}$	1.15994	1.15996	-1.7E-005
$\frac{3}{4}$	1.21963	1.21964	-7.0E-006
1	1.26669	1.26671	-1.6E-005
5	1.53685	1.53691	-6.2E-005
10	1.65113	1.65127	-1.4E-004
20	1.74855	1.74884	-2.9E-004
30	1.78879	1.78918	-3.9E-004

Tabuľka 4.4: Presné a aproximované úrokové miery pre 1. deň pozorovania, $r_d = 1.7\%$, $r_e = 1\%$

Tabuľka 4.5: Presné a aproximované úrokové miery pre 252. deň pozorovania, $r_d = 1.75\%$, $r_e = 1.06\%$

4.4 Presnosť aproximácie vo všeobecnom CKLS modeli

V kapitole 4.2 sme pomocou Vašíčkovho modelu aproximovali CIR model s nulovou koreláciou a zistili sme presnosť aproximácie. Teraz budeme analogickým spôsobom, opäť pomocou Vašíčkovho modelu, aproximovať všeobecný CKLS model. Cieľom tejto časti je odvodiť rád aproximácie (4.4) v tomto všeobecnom prípade. Zistenie presnosti aproximácie už nebude také jednoduché, ako to bolo v prípade CIR modelu s nulovou koreláciou, kde stačilo urobiť Taylorov rozvoj logaritmov presného riešenia a jeho aproximácie. Dá sa však použiť analogický postup, ako bol použitý v [10] a [11] pri jednofaktorových modeloch a v [6] pri štúdiu vplyvu korelácie ρ na ceny dlhopisov v konvergenčom CIR modeli.

Nech $f^{ex} = \ln P^{ex}$ je logaritmus presnej ceny dlhopisu P^{ex} v dvojfaktorovom CKLS modeli.

Nech $f^{ap} = \ln P^{ap}$ je logaritmus aproximácie ceny dlhopisu (4.4) pre dvojfaktorový konvergenčný CKLS model. Odvodíme rovnice, ktoré spĺňajú f^{ex} a f^{ap} . Platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^{ex}}{\partial \tau} &= P^{ex} \frac{\partial f^{ex}}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial P^{ex}}{\partial r_d} &= P^{ex} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d}, \\ \frac{\partial P^{ex}}{\partial r_e} &= P^{ex} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e}, \\ \frac{\partial^2 P^{ex}}{\partial r_d^2} &= \frac{\partial P^{ex}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} + P^{ex} \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_d^2} = P^{ex} \left[\left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_d^2} \right], \\ \frac{\partial^2 P^{ex}}{\partial r_e^2} &= \frac{\partial P^{ex}}{\partial r_e} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} + P^{ex} \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_e^2} = P^{ex} \left[\left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_e^2} \right], \\ \frac{\partial^2 P^{ex}}{\partial r_d \partial r_e} &= \frac{\partial P^{ex}}{\partial r_e} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} + P^{ex} \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_d \partial r_e} = P^{ex} \left[\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} + \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_d \partial r_e} \right], \end{aligned}$$

analogicky pre f^{ap} . Keďže P^{ex} vyhovuje rovnici (3.5), pre funkciu f^{ex} dostávame

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial f^{ex}}{\partial \tau} + (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} + (b_1 + b_2 r_e) \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \\ & + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} \left(\left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_d^2} \right) + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2} \left(\left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_e^2} \right) \\ & + \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} \left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} + \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_d \partial r_e} \right) - r_d = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ak do rovnice (4.8) dosadíme funkciu f^{ap} vznikne nenulová pravá strana, ktorú označíme $h(r_d, r_e, \tau)$, t. j.

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial f^{ap}}{\partial \tau} + (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} + (b_1 + b_2 r_e) \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} \\ & + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} \left(\left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{ap}}{\partial r_d^2} \right) + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2} \left(\left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{ap}}{\partial r_e^2} \right) \\ & + \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} \left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} + \frac{\partial^2 f^{ap}}{\partial r_d \partial r_e} \right) - r_d = h(r_d, r_e, \tau) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Definujme funkciu $g(r_d, r_e, \tau) = f^{ap} - f^{ex} = \ln P^{ap} - \ln P^{ex}$ ako rozdiel logaritmov približnej a presnej ceny dlhopisu. Platí

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial r_d} \right)^2 &= \left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \right)^2 = \left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \right)^2 - 2 \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d}, \\ \left(\frac{\partial g}{\partial r_e} \right)^2 &= \left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \right)^2 - 2 \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e}, \\ \frac{\partial g}{\partial r_d} \frac{\partial g}{\partial r_e} &= \left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \right) \left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \right) = \\ &= \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} + \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e}, \end{aligned}$$

a teda

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial g}{\partial \tau} + (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \frac{\partial g}{\partial r_d} + (b_1 + b_2 r_e) \frac{\partial g}{\partial r_e} + \\
 & \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial r_d} \right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial r_d^2} \right] + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial r_e} \right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial r_e^2} \right] + \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} \left(\frac{\partial g}{\partial r_d} \frac{\partial g}{\partial r_e} + \frac{\partial^2 g}{\partial r_d \partial r_e} \right) = \\
 & = - \left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial \tau} - \frac{\partial f^{ex}}{\partial \tau} \right) + (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \right) + (b_1 + b_2 r_e) \left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \right) \\
 & \quad + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} \left[\left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \right)^2 - 2 \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} + \frac{\partial^2 f^{ap}}{\partial r_d^2} - \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_d^2} \right] \\
 & \quad + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2} \left[\left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \right)^2 - 2 \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} + \frac{\partial^2 f^{ap}}{\partial r_e^2} - \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_e^2} \right] \\
 & \quad + \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} \left[\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} + \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} + \frac{\partial^2 f^{ap}}{\partial r_d \partial r_e} - \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_d \partial r_e} \right]
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Algebraickými úpravami pravej strany rovnice (4.10) a použitím platnosti rovníc (4.8) a (4.9) dostávame:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial g}{\partial \tau} + (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \frac{\partial g}{\partial r_d} + (b_1 + b_2 r_e) \frac{\partial g}{\partial r_e} + \\
 & \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial r_d} \right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial r_d^2} \right] + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial r_e} \right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial r_e^2} \right] + \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} \left(\frac{\partial g}{\partial r_d} \frac{\partial g}{\partial r_e} + \frac{\partial^2 g}{\partial r_d \partial r_e} \right) = \\
 & = h(r_d, r_e, \tau) + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} \left[\left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \right)^2 - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \right] + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2} \left[\left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \right)^2 - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \right] \\
 & \quad + \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} \left[2 \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} \right]
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Predpokladajme, že $g(r_d, r_e, \tau) = \sum_{k=\omega}^{\infty} c_k(r_d, r_e) \tau^k$. Najskôr si uvedomme, že pre $\tau = 0$ je presná a aj aproximatívna cena dlhopisu rovná jednej, a teda $f^{ex}(r_d, r_e, 0) = f^{ap}(r_d, r_e, 0) = 0$. To znamená, že $\omega > 0$ a teda na ľavej strane rovnice (4.11) je člen s najnižším rádom $c_\omega \omega \tau^{\omega-1}$. Potrebujeme teda zistiť rád pravej strany. Rád funkcie $h(r_d, r_e, \tau)$ vystupujúcej na tejto pravej strane sformulujeme vo forme lemy.

Lema 4.1. *Pre funkciu $h(r_d, r_e, \tau)$ platí*

$$h(r_d, r_e, \tau) = k_3(r_d, r_e) \tau^3 + k_4(r_d, r_e) \tau^4 + o(\tau^4),$$

kde

$$k_3(r_d, r_e) = \frac{1}{6} \sigma_d^2 \gamma_d r_d^{2\gamma_d-2} \left(2a_1 r_d + 2a_2 r_d^2 + 2a_3 r_d r_e - r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 + 2\gamma_d r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 \right), \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
 k_4(r_d, r_e) = & \frac{1}{48} \frac{1}{r_e^2} r_d^{-2+\gamma_d} \sigma_d \left(12a_2^2 \gamma_d r_d^{2+\gamma_d} r_e^2 \sigma_d - 16\gamma_d r_d^{1+3\gamma_d} r_e^2 \sigma_d^3 + 6a_3 b_1 \gamma_e r_d^2 r_e^{1+\gamma_e} \rho \sigma_e \right. \\
 & + 6a_3 b_2 \gamma_e r_d^2 r_e^{2+\gamma_e} \rho \sigma_e + 6a_3^2 \gamma_d r_d r_e^{3+\gamma_e} \rho \sigma_e - 3a_3 \gamma_d r_d^{2\gamma_d} r_e^{2+\gamma_e} \rho \sigma_d^2 \sigma_e \\
 & + 3a_3 \gamma_d^2 r_d^{2\gamma_d} r_e^{2+\gamma_e} \rho \sigma_d^2 \sigma_e + 6a_3 \gamma_d \gamma_e r_d^{1+\gamma_d} r_e^{1+2\gamma_e} \rho^2 \sigma_d \sigma_e^2 - 3a_3 \gamma_e r_d^2 r_e^{3\gamma_e} \rho \sigma_e^3 \\
 & + 3a_3 \gamma_e^2 r_d^2 r_e^{3\gamma_e} \rho \sigma_e^3 + 6a_1 \gamma_d r_d r_e^2 (2a_2 r_d^{\gamma_d} \sigma_d + a_3 r_e^{\gamma_e} \rho \sigma_e) \\
 & \left. + 6a_2 \gamma_d r_e^2 ((-1 + 2\gamma_d) r_d^{3\gamma_d} \sigma_d^3 + a_3 r_d (2r_d^{\gamma_d} r_e \sigma_d + r_d r_e^{\gamma_e} \rho \sigma_e)) \right).
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dôkaz. Z definície funkcie $h(r_d, r_e, \tau)$ vzt'ahom (4.9) vidíme, že obsahuje len f^{ap} , čo je explicitne daná funkcia. Nie je teda problém určiť koeficienty pri jednotlivých mocninách τ . V kapitole 4.1 sme ukázali výpočet Taylorovho rozvoja funkcie f^{ap} , rovnakým spôsobom pokračujeme ďalej a výsledky zhrnieme v tabuľke 4.6.

mocnina τ	koeficient v rozvoji f^{ap}
0	0
1	$-r_d$
2	$-\frac{1}{2}(a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e)$
3	$\frac{1}{6} \left(-a_1 a_2 - b_1 a_3 + \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} - a_2^2 r_d - a_3(a_2 + b_2)r_e \right)$
4	$\frac{1}{24} \left(-a_1 a_2^2 - b_1 a_3(a_2 + b_2) + 3a_2 \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} + 3a_3 \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} - a_2^3 r_d - (a_3 a_2^2 + b_2 a_3(a_2 + b_2))r_e \right)$
5	$\frac{1}{120} \left(-a_1 a_2^3 - a_2^4 r_d - a_2^3 a_3 r_e - a_2^2 \left(a_3 b_1 + a_3 b_2 r_e - 7r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 \right) - a_2 a_3 (b_1 b_2 + b_2^2 r_e - 10r_d^{\gamma_d} r_e^{\gamma_e} \rho \sigma_d \sigma_e) + a_3 \left(-b_1 b_2^2 - b_2^3 r_e + 4b_2 r_d^{\gamma_d} r_e^{\gamma_e} \rho \sigma_d \sigma_e + 3a_3 r_e^{2\gamma_e} \sigma_e^2 \right) \right)$

Tabuľka 4.6: Koeficienty v rozvoji funkcie f^{ap}

Výsledky z tabuľky 4.6 nám umožňujú vypočítať koeficienty rozvoja parciálnych derivácií funkcie f^{ap} . Napríklad, ak vieme, že

$$f^{ap} = -r_d \tau - \frac{1}{2} (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \tau^2 + \dots,$$

tak

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} &= -\tau - \frac{1}{2} a_2 \tau^2 + \dots, \\ \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} &= -\frac{1}{2} a_3 \tau^2 + \dots, \end{aligned}$$

atď. Koeficienty týchto a ďalších derivácií sú zhrnuté v tabuľkách 4.7 a 4.8.

mocnina τ	$\frac{\partial f^{ap}}{\partial \tau}$
0	$-r_d$
1	$-(a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e)$
2	$\frac{1}{2} \left(-a_1 a_2 - b_1 a_3 + \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} - a_2^2 r_d - a_3(a_2 + b_2)r_e \right)$
3	$\frac{1}{6} \left(-a_1 a_2^2 - b_1 a_3(a_2 + b_2) + 3a_2 \sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d} + 3a_3 \rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} - a_2^3 r_d - (a_3 a_2^2 + b_2 a_3(a_2 + b_2))r_e \right)$
4	$\frac{1}{24} \left(-a_1 a_2^3 - a_2^4 r_d - a_2^3 a_3 r_e - a_2^2 \left(a_3 b_1 + a_3 b_2 r_e - 7r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 \right) - a_2 a_3 (b_1 b_2 + b_2^2 r_e - 10r_d^{\gamma_d} r_e^{\gamma_e} \rho \sigma_d \sigma_e) + a_3 \left(-b_1 b_2^2 - b_2^3 r_e + 4b_2 r_d^{\gamma_d} r_e^{\gamma_e} \rho \sigma_d \sigma_e + 3a_3 r_e^{2\gamma_e} \sigma_e^2 \right) \right)$

Tabuľka 4.7: Koeficienty v rozvoji funkcie $\frac{\partial f^{ap}}{\partial \tau}$

Dosadením týchto rozvojev do definície funkcie $h(r_d, r_e, \tau)$ (4.9) a algebraickými úpravami dostávame tvrdenie lemy.

mocnina τ	0	1	2	3	4
$\frac{\partial f}{\partial r_d}$	0	-1	$-\frac{1}{2}a_2$	$\frac{1}{6} \left(2\sigma_d^2 \gamma_d r_d^{2\gamma_d-1} - a_2^2 \right)$	$\frac{1}{24} \frac{1}{r_d} \left(-a_2^3 r_d + 6a_2 \gamma_d r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 + 3a_3 \gamma_d r_d^{\gamma_d} r_e^{\gamma_e} \rho \sigma_d \sigma_e \right)$
$\frac{\partial f}{\partial r_e}$	0	0	$-\frac{1}{2}a_3$	$-\frac{1}{6} (a_3(a_2 + b_2))$	$-\frac{1}{24} \frac{1}{r_e} \left(a_3(a_2^2 r_e + a_2 b_2 r_e + b_2^2 r_e - 3\gamma_e r_d^{\gamma_d} r_e^{\gamma_e} \rho \sigma_d \sigma_e) \right)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial r_d^2}$	0	0	0	$\frac{1}{6} \left(2\sigma_d^2 \gamma_d (2\gamma_d - 1) r_d^{2\gamma_d-2} \right)$	$\frac{1}{24} \left(3\gamma_d r_d^{-2+\gamma_d} \sigma_d (2a_2(-1+2\gamma_d) r_d^{\gamma_d} \sigma_d + a_3(-1+\gamma_d) r_e^{\gamma_e} \rho \sigma_e) \right)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial r_e^2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{24} 3a_3(-1+\gamma_e) \gamma_e r_d^{\gamma_d} r_e^{-2+\gamma_e} \rho \sigma_d \sigma_e$
$\frac{\partial^2 f}{\partial r_d \partial r_e}$	0	0	0	0	$\frac{1}{24} 3a_3 \gamma_d \gamma_e r_d^{-1+\gamma_d} r_e^{-1+\gamma_e} \rho \sigma_d \sigma_e$

 Tabuľka 4.8: Koefficienty v rozvoji funkcií $\frac{\partial f}{\partial r_d}$, $\frac{\partial f}{\partial r_e}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial r_d^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial r_e^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial r_d \partial r_e}$

■

Ako sme už spomenuli, $f^{ex}(r_d, r_e, 0) = 0$. To znamená, že $f^{ex} = O(\tau)$, a teda aj parciálne derivácie $\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d}$, $\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e}$ sú rádu $O(\tau)$. Z tabuľky 4.8 vidíme, že $\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} = O(\tau)$, $\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} = O(\tau^2)$. Z tohto a z tvrdenia lemy (4.1) vyplýva, že pravá strana rovnice (4.11) je rádu aspoň τ^2 (môže byť aj vyššieho rádu, ak sa po úprave koeficient pri τ^2 , resp. pri vyšších mocninách, vynuluje). Rád ľavej strany rovnice (4.11) je $\tau^{\omega-1}$, čiže dostávame $\omega - 1 \geq 2$, t. j. $\omega \geq 3$.

Platí teda

$$f^{ap}(r_d, r_e, \tau) - f^{ex}(r_d, r_e, \tau) = O(\tau^3).$$

Najskôr z tohto tvrdenia a z tabuľky 4.8 zlepšime odhad pre $\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e}$:

$$\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} = \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} + O(\tau^3) = O(\tau^2) + O(\tau^3) = O(\tau^2)$$

Teraz urobíme odhady pre členy vystupujúce na pravej strane rovnice (4.11):

$$\left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \right)^2 - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} = \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \right) = O(\tau).O(\tau^3) = O(\tau^4) \quad (4.14)$$

$$\left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \right)^2 - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} = \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} \right) = O(\tau^2).O(\tau^3) = O(\tau^5) \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} &= \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} \right) \\ &+ \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \right) = O(\tau).O(\tau^3) + O(\tau^2).O(\tau^3) = O(\tau^4) + O(\tau^5) = O(\tau^4) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Keďže $h(r_d, r_e, \tau) = O(\tau^3)$, celá pravá strana rovnice (4.11) je $O(\tau^3)$ a koeficient pri τ^3 je koeficient funkcie $h(r_d, r_e, \tau)$ pri τ^3 , t. j. $k_3(r_d, r_e)$.

To znamená, že $\omega = 4$ a porovnaním koeficientov pri τ^3 na ľavej a pravej strane rovnice (4.11) dostaneme

$$-4c_4(r_d, r_e) = k_3(r_d, r_e),$$

t. j.

$$c_4(r_d, r_e) = -\frac{1}{4}k_3(r_d, r_e).$$

Týmto sme dokázali tvrdenie, ktoré môžeme sformulovať v tvare vety:

Veta 4.1. *Nech $P^{ex}(r_d, r_e, \tau)$ je cena domáceho dlhopisu v dvojfaktorovom CKLS konvergenčnom modeli, t. j. spĺňajúca rovnicu (3.17) a nech P^{ap} je aproximácia riešenia definovaná vzťahom (4.4). Potom*

$$\ln P^{ap}(r_d, r_e, \tau) - \ln P^{ex}(r_d, r_e, \tau) = c_4(r_d, r_e)\tau^4 + o(\tau^4),$$

kde koeficient je daný vzťahom

$$c_4(r_d, r_e) = -\frac{1}{24}\sigma_d^2\gamma_d r_d^{2\gamma_d-2} \left(2a_1r_d + 2a_2r_d^2 + 2a_3r_dr_e - r_d^{2\gamma_d}\sigma_d^2 + 2\gamma_d r_d^{2\gamma_d}\sigma_d^2 \right). \quad (4.17)$$

Poznamenajme, že ak dosadíme do tvrdenia vety (4.1) $\gamma_d = \frac{1}{2}$ a $\rho = 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} & \ln P^{ap}(r_d, r_e, \tau) - \ln P^{ex}(r_d, r_e, \tau) = \\ & = -\frac{1}{48}\frac{\sigma_d^2}{r_d} (2a_1r_d + 2a_2r_d^2 + 2a_3r_dr_e - r_d\sigma_d^2 + r_d\sigma_d^2) \tau^4 + o(\tau^4), \end{aligned}$$

po úprave máme

$$\ln P^{ap}(r_d, r_e, \tau) - \ln P^{ex}(r_d, r_e, \tau) = -\frac{1}{24}\sigma_d^2 (a_1 + a_2r_d + a_3r_e) \tau^4 + o(\tau^4),$$

čo sa zhoduje s výsledkom získaným v kapitole 4.2 pre CIR model v rovnici (4.5).

4.5 Spresnenie aproximácie pre CKLS model

V niektorých prípadoch (ako napr. v článku [11] v prípade jednofaktorového CKLS modelu) sa dá presnosť získanej aproximácie ešte vylepšiť tým, že sa nájdu ďalšie členy Taylorovho rozvoja rozdielu $\ln P^{ap} - \ln P^{ex}$. Ukážeme, že je tomu tak aj v prípade nášho modelu. Uvedomme si, že teraz, keď už vieme, že $f^{ap} - f^{ex} = O(\tau^4)$, môžeme zlepšiť odhady (4.14) a (4.16) nasledovne

$$\left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \right)^2 - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} = \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \right) = O(\tau) \cdot O(\tau^4) = O(\tau^5). \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} = \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} \left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_e} \right) + \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_e} \left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_d} \right) \\ & = O(\tau) \cdot O(\tau^4) + O(\tau^2) \cdot O(\tau^4) = O(\tau^5) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Z týchto nových odhadov (4.18) a (4.19), z odhadu (4.15) a z tvrdenia lemy 4.1 vyplýva, že aj koeficient pri τ^4 na pravej strane rovnice (4.11) pochádza len z funkcie h a rovná sa $k_4(r_d, r_e)$. Takže porovnaním koeficientov pri τ^4 na ľavej a pravej strane rovnice (4.11) dostaneme:

$$\begin{aligned} & -5c_5 + (a_1 + a_2r_d + a_3r_e) \frac{\partial c_4}{\partial r_d} + (b_1 + b_2r_e) \frac{\partial c_4}{\partial r_e} \\ & + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} \frac{\partial^2 c_4}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2} \frac{\partial^2 c_4}{\partial r_e^2} + 4\rho\sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} \frac{\partial^2 c_4}{\partial r_d \partial r_e} = k_4, \end{aligned}$$

čiže

$$c_5 = \frac{1}{5} \left[(a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \frac{\partial c_4}{\partial r_d} + (b_1 + b_2 r_e) \frac{\partial c_4}{\partial r_e} + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} \frac{\partial^2 c_4}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2} \frac{\partial^2 c_4}{\partial r_e^2} + 4\rho \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_e r_e^{\gamma_e} \frac{\partial^2 c_4}{\partial r_d \partial r_e} - k_4 \right]$$

kde c_4 je dané vzťahom (4.17) a k_4 je dané vzťahom (4.13). Po dosadení c_4 a k_4 dostávame:

$$\begin{aligned} c_5(r_d, r_e) = & \frac{1}{5} \left[-\frac{1}{12} a_3 \gamma_d r_d^{-1+2\gamma_d} (b_1 + b_2 r_e) \sigma_d^2 + \frac{1}{2} r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 \left(-\frac{1}{24} \gamma_d (-3 + 2\gamma_d) (-2 + 2\gamma_d) \right. \right. \\ & r_d^{-4+2\gamma_d} \sigma_d^2 (2a_1 r_d + 2a_2 r_d^2 + 2a_3 r_d r_e - r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 + 2\gamma_d r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2) - \frac{1}{24} \gamma_d r_d^{-2+2\gamma_d} \sigma_d^2 \\ & (4a_2 - 2\gamma_d (-1 + 2\gamma_d) r_d^{-2+2\gamma_d} \sigma_d^2 + 4\gamma_d^2 (-1 + 2\gamma_d) r_d^{-2+2\gamma_d} \sigma_d^2) - \frac{1}{12} \gamma_d (-2 + 2\gamma_d) \\ & r_d^{-3+2\gamma_d} \sigma_d^2 (2a_1 + 4a_2 r_d + 2a_3 r_e - 2\gamma_d r_d^{-1+2\gamma_d} \sigma_d^2 + 4\gamma_d^2 r_d^{-1+2\gamma_d} \sigma_d^2) \left. \right) \\ & + (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e) \left(-\frac{1}{24} \gamma_d (-2 + 2\gamma_d) r_d^{-3+2\gamma_d} \sigma_d^2 (2a_1 r_d + 2a_2 r_d^2 \right. \\ & + 2a_3 r_d r_e - r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 + 2\gamma_d r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2) - \frac{1}{24} \gamma_d r_d^{-2+2\gamma_d} \sigma_d^2 (2a_1 + 4a_2 r_d + 2a_3 r_e \\ & - 2\gamma_d r_d^{-1+2\gamma_d} \sigma_d^2 + 4\gamma_d^2 r_d^{-1+2\gamma_d} \sigma_d^2) \left. \right) + 4r_d^{\gamma_d} r_e^{\gamma_e} \rho \sigma_d \sigma_e \left(-\frac{1}{12} a_3 \gamma_d r_d^{-2+2\gamma_d} \sigma_d^2 \right. \\ & - \frac{1}{12} a_3 \gamma_d (-2 + 2\gamma_d) r_d^{-2+2\gamma_d} \sigma_d^2) - \frac{1}{48 r_e^2} r_d^{-2+\gamma_d} \sigma_d \left(12a_2^2 \gamma_d r_d^{2+\gamma_d} r_e^2 \sigma_d \right. \\ & - 16\gamma_d r_d^{1+3\gamma_d} r_e^2 \sigma_d^3 + 6a_3 b_1 \gamma_e r_d^2 r_e^{1+\gamma_e} \rho \sigma_e + 6a_3 b_2 \gamma_e r_d^2 r_e^{2+\gamma_e} \rho \sigma_e \\ & + 6a_3^2 \gamma_d r_d r_e^{3+\gamma_e} \rho \sigma_e - 3a_3 \gamma_d r_d^{2\gamma_d} r_e^{2+\gamma_e} \rho \sigma_d^2 \sigma_e + 3a_3 \gamma_d^2 r_d^{2\gamma_d} r_e^{2+\gamma_e} \rho \sigma_d^2 \sigma_e \\ & + 6a_3 \gamma_d \gamma_e r_d^{1+\gamma_d} r_e^{1+2\gamma_e} \rho^2 \sigma_d \sigma_e^2 - 3a_3 \gamma_e r_d^2 r_e^{3\gamma_e} \rho \sigma_e^3 + 3a_3 \gamma_e^2 r_d^2 r_e^{3\gamma_e} \rho \sigma_e^3 \\ & + 6a_1 \gamma_d r_d r_e^2 (2a_2 r_d^{\gamma_d} \sigma_d + a_3 r_e^{\gamma_e} \rho \sigma_e) + 6a_2 \gamma_d r_e^2 ((-1 + 2\gamma_d) r_d^{3\gamma_d} \sigma_d^3 \\ & \left. \left. + a_3 r_d (2r_d^{\gamma_d} r_e \sigma_d + r_d r_e^{\gamma_e} \rho \sigma_e) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Vieme teda navrhnúť presnejšiu aproximáciu, ako je vo vete 4.1. Novú vylepšenú aproximáciu označíme $\ln P^{ap2}$. Nasledujúca veta hovorí o jej tvare.

Veta 4.2. *Nech P^{ex} je presná cena dlhopisu v dvojfaktorovom CKLS modeli a nech P^{ap} je jeho aproximácia definovaná v (4.4). Definujme aproximáciu $\ln P^{ap2}$:*

$$\ln P^{ap2}(r_d, r_e, \tau) = \ln P^{ap} - c_4(r_d, r_e) \tau^4 - c_5(r_d, r_e) \tau^5,$$

kde c_4 je vyjadrené vo vete (4.1) vzťahom (4.17) a $c_5(r_d, r_e)$ je dané vzťahom (4.20).

Potom platí

$$\ln P^{ap2} - \ln P^{ex} = O(\tau^6).$$

Teda nová aproximácia $\ln P^{ap2}$ je rádu $O(\tau^6)$.

Časť III

Kalibrácia modelu

Kapitola 5

Metóda kalibrácie modelu

Úloha kalibrácie modelu krátkodobých úrokových mier určite nepatrí medzi problémy s jednoznačným priamočiarym riešením, o čom sme sa presvedčili aj v našej diplomovej práci.

Vo všeobecnosti sa metódy kalibrácie dajú rozdeliť podľa toho, či sa zameriavajú na štatistickú analýzu časového radu okamžitej úrokovej miery, na zhodu teoretických a trhových výnosových kriviek, resp. sú kombináciou týchto dvoch prístupov. Príkladom štatistickej analýzy je napríklad článok [2], kde sa tvar volatility v jednofaktorovom modeli určuje pomocou zovšeobecnenej metódy momentov aplikovanej na časový rad short rate. Príkladom porovnávania teoretických a aproximovaných výnosových kriviek je napríklad článok [13]. Existencia explicitných vzorcov pre ceny dlhopisov v jednofaktorovom Vašíčkovom a CIR modeli (pozri kapitolu 2.1) umožnila kalibráciu parametrov týmto spôsobom. Kombináciu týchto prístupov využívajú Corzo a Schwartz v článku [4] o konvergenčnom modeli Vašíčkovho typu. Všetky parametre, ktoré sa dajú odhadnúť z časového priebehu domácej a európskej short rate, odhadli týmto spôsobom. Zostávajúce trhové ceny rizika sa potom odhadli pomocou výnosových kriviek.

Pri takomto kombinovanom prístupe sa však z časového radu short rate odhadne väčšina parametrov. Informácia z časových radov úrokových mier s ostatnými maturitami (čo je niekoľkonásobne väčší počet dát) sa využije len pri odhade trhových cien rizika. Preto bolo našim cieľom navrhnúť takú metódu kalibrácie, ktorá by túto informáciu využila pri odhadovaní všetkých parametrov. Takýto prístup vyžaduje efektívny výpočet cien dlhopisov.

V diplomovej práci [6] z roku 2010 *Two-factor convergence model of Cox-Ingersoll-Ross Type* autor využíva modifikáciu Ait-Sahaliovej aproximácie hustôt procesov a odhaduje pomocou nej parametre short rate. Trhovú cenu rizika odhaduje z výnosových kriviek. Na každý výpočet účelovej funkcie tak počíta sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc, ktorá určuje ceny dlhopisov. To sa dá v prípade jednorozmernej optimalizácie, no optimalizácia všetkých parametrov týmto spôsobom by bola veľmi pomalá. Pritom však uvádza, že zmenou niektorých už odhadnutých parametrov dosiahne výrazné zlepšenie účelovej funkcie. Myšlienka optimalizácie výnosových kriviek vzhľadom na všetky parametre, prezentovaná v závere práce ([6], str. 45) ako možnosť pre ďalšiu prácu s modelom, je východiskom pre našu metódu.

5.1 Spoločný rámec pre kalibráciu a formulácia optimalizačných úloh

Podobne ako v diplomovej práci [6] uvažujeme odhad parametrov európskej úrokovej miery ako samostatný problém, ktorý je prvým krokom v odhadovaní modelu. Dôvodom je, že závislosť medzi európskou a domácou úrokovou mierou nie je vzájomné ovplyvňovanie sa dvoch premenných. Európska úroková miera sa vyvíja samostatne podľa určitého modelu. Odhad parametrov tohto modelu teda nemôže byť závislý od výberu štátu, pre ktorý budeme uvažovať konvergenčný model a od domácich úrokových mier v tomto štáte.

Uvažujme konvergenčný model CKLS typu v rizikovo neutrálnej miere

$$\begin{aligned} dr_d &= (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e)dt + \sigma_d r_d^{\gamma_d} dW_d, \\ dr_e &= (b_1 + b_2 r_e)dt + \sigma_e r_e^{\gamma_e} dW_e, \\ Cov[dW_d, dW_e] &= \rho dt. \end{aligned}$$

Nech:

- P_d^{ap}, P_e^{ap} sú aproximácie cien domácich (3.17) a európskych dlhopisov (pozri [10] a (4.1)).
- R_d, R_e sú skutočné výnosové krivky pozorované na trhu,
- $\tau_d = (\tau_d^1, \dots, \tau_d^{m_d}), \tau_e = (\tau_e^1, \dots, \tau_e^{m_e})$ sú maturity domácich, resp. európskych výnosov pozorované počas n_d , resp. n_e dní,
- index i zodpovedá dňom,
- index j zodpovedá maturitám.

Kalibrácia modelu sa potom rozdelí na dve časti:

1. Odhad európskych parametrov, ktorý spočíva v minimalizácii funkcie

$$F_e(b_1, b_2, \sigma_e, \gamma_e) = \frac{1}{m_e n_e} \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{m_e} w_e(i, j) \left(-\frac{\ln P_e^{ap}(i, j)}{\tau_e(j)} - R_e(i, j) \right)^2.$$

2. Odhad domácich parametrov, ktorý spočíva v minimalizácii funkcie

$$F_d(a_1, a_2, a_3, \sigma_d, \rho, \gamma_e) = \frac{1}{m_d n_d} \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=1}^{m_d} w_d(i, j) \left(-\frac{\ln P_d^{ap}(i, j)}{\tau_d(j)} - R_d(i, j) \right)^2,$$

pričom pri výpočte P_d^{ap} dosadzujeme za b_1, b_2, σ_e hodnoty získané v kroku 1.

Funkcie w_e, w_d vyjadrujú váhy. Rovnako ako v [13] zvolíme $w_e(i, j) = \tau_e(j)^2$ a $w_d(i, j) = \tau_d(j)^2$. Navrhnutý postup sa však dá upraviť aj pre inú voľbu váh. Pri našej voľbe váh teda riešime optimalizačné úlohy:

$$F_e(b_1, b_2, \sigma_e) = \frac{1}{m_e n_e} \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{m_e} \left(\ln P_e^{ap}(i, j) + R_e(i, j) \tau_e(j) \right)^2, \quad (5.1)$$

$$F_d(a_1, a_2, a_3, \sigma_d, \rho) = \frac{1}{m_d n_d} \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=1}^{m_d} \left(\ln P_d^{ap}(i, j) + R_d(i, j) \tau_d(j) \right)^2. \quad (5.2)$$

5.2 Algoritmus na odhad parametrov v dvojfaktorovom CIR modeli s nulovou koreláciou

Naším prvým cieľom je odhadnúť parametre v dvojfaktorovom CIR modeli, ktorý uvažujeme v rizikovo neutrálnej miere s nulovou koreláciou:

$$\begin{aligned} dr_d &= (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_e)dt + \sigma_d \sqrt{r_d} dW_d, \\ dr_e &= (b_1 + b_2 r_e)dt + \sigma_e \sqrt{r_e} dW_e, \\ Cov[dW_d, dW_e] &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Odhadované parametre modelu sú: $a_1, a_2, a_3, \sigma_d, b_1, b_2, \sigma_e$.

V tomto prípade vieme vypočítať presné výnosové krivky riešením systému obyčajných diferenciálnych rovníc. Môžeme preto vygenerovať dáta a sledovať presnosť našej kalibrácie a jej jednotlivých krokov.

5.2.1 Simulované dáta

V modeli (5.3), ktorý je v rizikovo neutrálnej miere, zvolíme parametre tak, ako sme ich už použili v kapitole 4.3, čiže:

$$a_1 = 0.0075, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = 2, \quad \sigma_d = 0.03, \quad b_1 = 0.003, \quad b_2 = -0.2, \quad \sigma_e = 0.01. \quad (5.4)$$

Pre túto simuláciu zvolíme $r_d = 0.03$ a $r_e = 0.015$ ako v kapitole 4.3. Vygenerujeme domácu a európsku short rate pre $n_e = n_d = 1260$ dní, t. j. 5 rokov s počtom dní v roku 252. Poznamenajme, že tu sú potrebné parametre v reálnej miere. Používame ich rovnaké ako v kapitole 4.3. Nemajú však vplyv na účelové funkcie F_e a F_d , ovplyvňujú len vygenerované hodnoty short rate. Na základe známych r_e a r_d vieme vygenerovať európske a domáce výnosové krivky. Vygenerujeme výnosy pre maturity $\tau_e = \tau_d = (\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots, \frac{12}{12})$, t. j. $m_e = m_d = 12$. Na výpočet výnosu európskeho dlhopisu s maturitou $\tau_e(j)$ v i -ty deň prepíšeme riešenie CIR modelu z kapitoly 2.1 pomocou parametrov v rizikovo neutrálnej miere, v ktorých máme teraz definovaný model. Pre výnos európskeho dlhopisu s maturitou $\tau_e(j)$ v i -ty deň máme presné riešenie v tvare:

$$R_e(i, j) = \frac{A + Br_e(i)}{\tau(j)}, \quad \text{kde}$$

$$A = \frac{2b_1}{\sigma_e^2} \ln\left(\frac{2\theta e^{(\theta-b_2)\frac{\tau(j)}{2}}}{(\theta-b_2)(e^{\theta\tau(j)}-1) + 2\theta}\right), \quad B = \frac{-2(e^{\theta\tau(j)}-1)}{((\theta-b_2)(e^{\theta\tau(j)}-1) + 2\theta)}, \quad \theta = \sqrt{(b_2^2 + 2\sigma_e^2)}. \quad (5.5)$$

Pripomeňme si (pozri kapitola 3.2), že na výpočet výnosu domáceho dlhopisu potrebujeme riešiť systém obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} \dot{D}(\tau) &= 1 + a_2 D(\tau) - \frac{\sigma_d^2 D^2(\tau)}{2}, \\ \dot{U}(\tau) &= a_3 D(\tau) + b_2 U(\tau) - \frac{\sigma_e^2 U^2(\tau)}{2}, \\ \dot{A}(\tau) &= -a_1 D(\tau) - b_1 U(\tau), \end{aligned} \quad (5.6)$$

s danými počiatočnými podmienkami

$$A(0) = D(0) = U(0) = 0.$$

Tento systém riešime numericky. Cena domáceho dlhopisu je $P(r_d, r_e, \tau) = e^{A(\tau) - D(\tau)r_d - U(\tau)r_e}$. Potom výnos domáceho dlhopisu s maturitou $\tau_e(j)$ v i -ty deň je:

$$R_d(i, j) = \frac{A(\tau) - D(\tau)r_d - U(\tau)r_e}{\tau_d(j)}. \quad (5.7)$$

V kapitole 4.3 môžeme vidieť grafické znázornenia priebehov týchto vygenerovaných dát a výnosových kriviek.

5.2.2 Odhad európskych parametrov

V tomto kroku ide vlastne o odhad parametrov CIR modelu. Metódu na odhad preberáme z článku [10]. Pre danú hodnotu mocniny γ_e (teda aj v tomto prípade) sa odhad ostatných troch parametrov dá redukovať na jednorozmernú úlohu. Zvyšné dva parametre sa dajú vyjadriť z nutných podmienok optimality a dosadiť do účelovej funkcie, ktorá sa tak stane funkciou jedného parametra.

Pre naše vygenerované dáta dostávame odhady, ktoré uvádzame v nasledovnej tabuľke.

parameter	b_1	b_2	σ_e
odhad	0.002999979	-0.199998121	0.010084680

Tabuľka 5.1: Odhad európskych parametrov

Môžeme si všimnúť, že ak by sme pre tieto dáta (vygenerované z CIR modelu) odhadli Vašíčkov model, drift (t. j. parametre b_1, b_2) by sa veľmi nezmenil - pozri výsledky v tabuľke 5.2.

parameter	b_1	b_2
odhad z Vašíčkovho modelu	0.003000343	-0.200027048
odhad z CIR modelu	0.002999979	-0.199998121

Tabuľka 5.2: Rizikovo neutrálny drift odhadnutý pomocou Vašíčkovho a CIR modelu

Táto vlastnosť bola inšpiráciou pre postup odhadu domácich parametrov, ktorú popíšeme v nasledujúcej časti.

5.2.3 Odhad domácich parametrov

Krok 1: Odhad rizikovo neutrálneho driftu

Na základe výsledkov pre jednofaktorový model sa pokúsime odhadnúť rizikovo neutrálny drift domácej úrokovej miery ako rizikovo neutrálny drift konvergenčného Vašíčkovho modelu. Predstavme si teda, že pre naše dáta odhadujeme konvergenčný Vašíčkov model. Všetky parametre a účelovú funkciu budeme označovať horným indexom vas , t. j. $F_d^{vas}, a_1^{vas}, a_2^{vas}$ atď.

V prvom kroku treba odhadnúť jednofaktorový Vašíčkov model pre európske dáta, to urobíme postupom z [10]. Teraz budeme optimalizovať funkciu F_d^{vas} v tvare:

$$F_d^{vas}(a_1^{vas}, a_2^{vas}, a_3^{vas}, \sigma_d^{vas}) = \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=1}^{m_d} \left(\ln P_d^{vas}(i, j) + R_d(i, j)\tau_d(j) \right)^2. \quad (5.8)$$

Pripomeňme si, že vo Vašíčkovom modeli platí

$$\ln P_d^{vas}(r_d, r_e, \tau) = A(\tau) - D(\tau)r_d - U(\tau)r_e,$$

sčítanec v F_d^{vas} prislúchajúci konkrétnej fixovanej j -tej maturite $\tau_d(j)$ je

$$\sum_{i=1}^{n_d} \left(A(\tau_d(j)) - D(\tau_d(j))r_d(i) - U(\tau_d(j))r_e(i) + R_d(i, j)\tau_d(j) \right)^2. \quad (5.9)$$

Keďže j je fixované, hodnoty $A(\tau_d(j))$, $-D(\tau_d(j))$, $-U(\tau_d(j))$ sú konštanty. Súčet (5.9), ktorý by mal byť malý (aby sa súčet cez j minimalizoval), potom pripomína úlohu lineárnej regresie, v ktorej aproximujeme

$$-R_d(i, j)\tau_d(j) \sim c_{0j} + c_{1j}r_d(i) + c_{2j}r_e(i) \quad \text{pre } i = 1, \dots, n; \quad j \text{ fixné.} \quad (5.10)$$

Pre každé j odhadneme túto lineárnu regresiu, výsledkom bude matica

$$C = \begin{bmatrix} c_{01} & c_{11} & c_{21} \\ c_{02} & c_{12} & c_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{0m_d} & c_{1m_d} & c_{2m_d} \end{bmatrix}.$$

Malo by platiť

$$c_{0j} \sim A(\tau_d(j)), \quad c_{1j} \sim -D(\tau_d(j)), \quad c_{2j} \sim -U(\tau_d(j)).$$

Určíme teda parametre funkcií A, D, U tak, aby táto zhoda bola čo najlepšia.

- Funkcia D závisí iba od parametra a_2^{vas} . Vyriešime jednorozmernú optimalizačnú úlohu

$$G_1(a_2^{vas}) = \sum_{j=1}^{m_d} \left(-D(\tau_d(j), a_2^{vas}) - c_{1j} \right)^2 \rightarrow \min_{a_2} \quad (5.11)$$

a získame odhad parametra a_2 . Pribeh funkcie G_1 pre naše dáta je zobrazený na obrázku 5.1 vľavo.

- Funkcia U závisí od parametrov a_3^{vas} , b_1^{vas} . Parameter b_1^{vas} je však z procesu pre európsku úrokovú mieru a už ho máme aj odhadnutý. Znova teda riešime jednorozmernú optimalizačnú úlohu

$$G_2(a_3^{vas}) = \sum_{j=1}^{m_d} \left(-U(\tau_d(j), a_3^{vas}) - c_{2j} \right)^2 \rightarrow \min_{a_3} \quad (5.12)$$

a získame odhad a_3^{vas} . Pribeh funkcie G_2 pre naše dáta je znázornený na obrázku 5.1 v strede.

- Funkcia A závisí od všetkých parametrov a_1^{vas} , a_2^{vas} , a_3^{vas} , b_1^{vas} , b_2^{vas} , σ_d^{vas} , σ_e^{vas} . Všetky parametre, okrem a_1^{vas} , σ_d^{vas} však už máme odhadnuté. Zostáva odhadnúť tieto dva. Všimnime si, že A je lineárna funkcia parametrov a_1^{vas} a $(\sigma_d^{vas})^2$. Ak teda napíšeme

úlohu analogicky ako v (5.11) a (5.12), optimálne hodnoty parametrov vieme explicitne vypočítať. Zderivujeme účelovú funkciu podľa týchto parametrov a položíme derivácie rovné nule, čím dostaneme sústavu dvoch lineárnych rovníc. Prakticky sa však ukázalo (pre niekoľko sád vygenerovaných dát), že tieto odhady su nestabilné, lebo matica sústavy je zle podmienená, s číslom podmienenosti 10^{18} až 10^{21} . Osvedčil sa nám iný postup: z podmienok optimality využijeme len deriváciu podľa $(\sigma_d^{vas})^2$ a vyjadríme tento parameter pomocou a_1^{vas} . Postupovali sme teda nasledovne.

Funkciu $\ln P^{ap}$ vyjadríme v tvare:

$$\ln P^{ap} = A(\tau) + D(\tau)r_d + U(\tau)r_e = c_0(r_d, r_e, \tau) + c_1(r_d, r_e, \tau)\sigma_d^2, \quad (5.13)$$

kde koeficienty $c_0(r_d, r_e, \tau)$, $c_1(r_d, r_e, \tau)$ vieme explicitne vyjadriť. Ich dosadením do účelovej funkcie a z podmienok prvého rádu dostávame:

$$\frac{\partial F_d}{\partial \sigma_d^2} = \frac{1}{mn} \left[\sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=1}^{m_d} (2c_1(c_0 + c_1\sigma_d^2)) + 2c_1 R_d(i, j)\tau(j) \right] = 0,$$

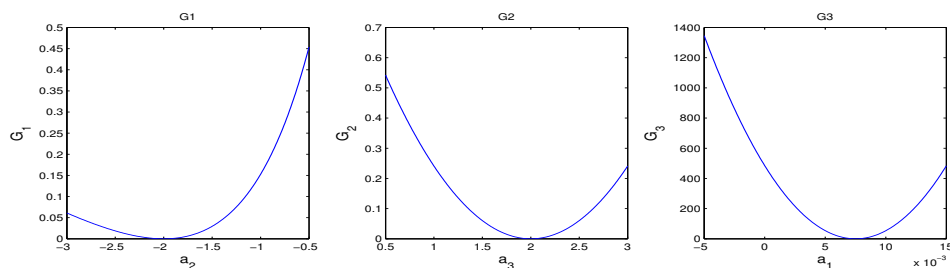
odtiaľ σ_d^2 :

$$\sigma_d^2 = \frac{-\sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=1}^{m_d} c_0 c_1 - \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=1}^{m_d} c_1 R_d(i, j)\tau(j)}{\sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=1}^{m_d} c_1^2}. \quad (5.14)$$

Teda pre každú hodnotu a_1^{vas} máme príslušnú optimálnu hodnotu $(\sigma_d^{vas})^2$. Sformulujeme jednorozmernú optimalizačnú úlohu:

$$G_3(a_1^{vas}) = \sum_{j=1}^{m_d} \left(A(\tau_d(j), a_1) - c_{0j} \right)^2 \rightarrow \min_{a_1}. \quad (5.15)$$

Týmto postupom už dostávame stabilné výsledky. Priebeh funkcie G_3 pre naše dáta je na obrázku 5.1 vpravo.



Obr. 5.1: Odhadovanie rizikovo neutrálneho driftu - funkcie G_1 , G_2 , G_3 .

V tabuľke 5.3 teraz zhrnieme výsledky, a to uvedieme odhad rizikovo neutrálneho driftu.

parameter	a_1	a_2	a_3
odhad	0.007503906	-2.000195313	2.000000000

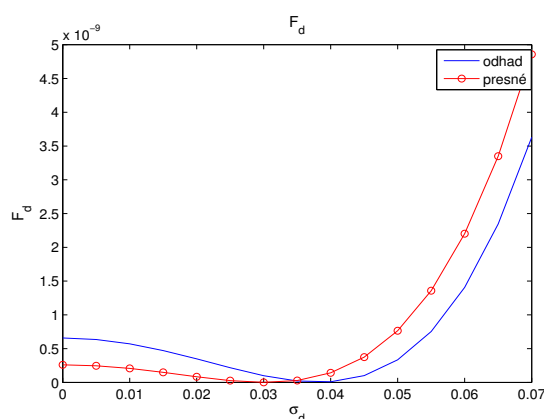
Tabuľka 5.3: Odhad rizikovo neutrálneho driftu

Krok 2: Odhad volatility

V tomto kroku už máme vypočítané tieto odhady:

- odhad parametrov b_1, b_2, σ_e pre vývoj európskej úrokovej miery (jednofaktorový CIR model),
- odhad parametrov a_1, a_2, a_3 z driftu vývoja domácej úrokovej miery (predchádzajúci krok).

Po dosadení všetkých týchto parametrov do účelovej funkcie nám ostane funkcia F_d funkciou jedného parametra, a to σ_d a teda ľahko nájdeme minimum. Graf pre naše parametre je na obrázku 5.2 a výsledný odhad v tabuľke 5.4



Obr. 5.2: Účelová funkcia F_d ako funkcia σ_d .

parameter	σ_d
presná hodnota	0.03
odhad	0.0400000

Tabuľka 5.4: Odhad parametra σ_d

Krok 3: Konečná úprava parametrov

V tomto kroku máme odhadnuté všetky premenné, t. j. $b_1, b_2, \sigma_e, a_1, a_2, a_3, \sigma_d$. Použijeme ich ako vstup do účelovej funkcie, kde realizujeme jej minimalizáciu cez 4 premenné, a to európske parametre a_1, a_2, a_3, σ_d . Parametre z kroku 2 slúžia ako štartovacie hodnoty. Z tabuľky 5.5 vidíme, že novoodhadnuté parametre a_1, a_2, a_3, σ_d sa veľmi nezmenili voči predchádzajúcemu

kroku. Tento výsledný odhad parametrov a_1, a_2, a_3, σ_d je presný približne na štyri desatinné miesta v porovnaní s presnými hodnotami.

parameter	a_1	a_2	a_3	σ_d
presné hodnoty	0.0075	-2	2	0.03
odhad po kroku 2	0.007503906	-2.000195313	2.000000000	0.040000000
výsledné	0.007499712	-1.999905093	1.999909656	0.030837036

Tabuľka 5.5: Odhad rizikovo neutrálneho driftu

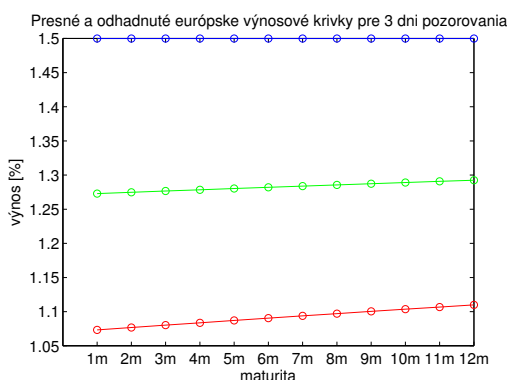
parameter	b_1	b_2	σ_e	a_1	a_2	a_3	σ_d
presné hodnoty	0.003	-0.2	0.01	0.0075	-2	2	0.03
výsledné	0.002999	-0.199998	0.010084	0.007499	-1.999905	1.9999096	0.030837

Tabuľka 5.6: Všetky odhadované parametre

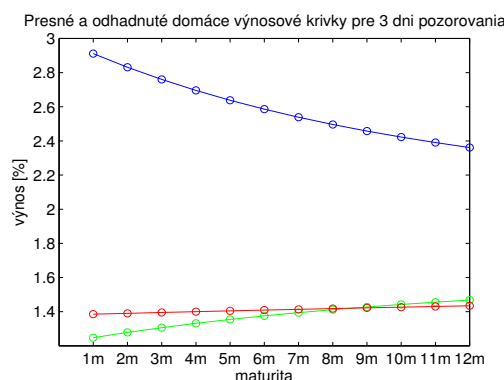
Keďže ide o simulované dáta, poznáme presné parametre, z ktorých boli dáta vygenerované. Poznáme skutočné výnosové krivky R_e, R_d , dané vzťahmi (5.5) a (5.7). Na základe poznania presného riešenia vieme analyzovať presnosť odhadnutých výnosových kriviek. Z odhadnutých parametrov vypočítame výnosové krivky a sledovať presnosť týchto aproximovaných výnosov, voči presným hodnotám výnosových kriviek. Venujeme sa tomu v nasledujúcej kapitole 5.2.4.

5.2.4 Presnosť odhadnutých výnosových kriviek

Na obrázku 5.3 vykresľujeme presné a odhadnuté európske výnosové krivky pre zvolené tri dni a na obrázku 5.4 ide o domáce výnosové krivky pre tie isté vybrané dni (t. j. 1. deň, 630. deň a 1260. deň pozorovania). Keďže rozdiely sú minimálne, na obrázkoch nevidíme rozdiel medzi presnými a odhadnutými výnosmi, ich presnosť zaznamenávame numericky v tabuľke 5.7.



Obr. 5.3: Európske výnosy a ich aproximácie



Obr. 5.4: Domáce výnosy a ich aproximácie

Mat. [rok]	Presný výnos [%]	Aproxim. výnos [%]	Rozdiel [%]	Mat. [rok]	Presná výnos [%]	Aproxim. výnos [%]	Rozdiel [%]
$\frac{1}{12}$	1.272926916	1.272926925	-9.55E-09	$\frac{1}{12}$	1.2473816	1.2473810	6.27E-07
$\frac{2}{12}$	1.274803079	1.274803093	-1.43E-08	$\frac{2}{12}$	1.2782728	1.2782710	1.81E-06
$\frac{3}{12}$	1.276658290	1.276658305	-1.45E-08	$\frac{3}{12}$	1.3061911	1.3061886	2.50E-06
$\frac{4}{12}$	1.278492815	1.278492825	-1.02E-08	$\frac{4}{12}$	1.3314768	1.3314740	2.80E-06
$\frac{5}{12}$	1.280306915	1.280306917	-1.69E-09	$\frac{5}{12}$	1.3544282	1.3544254	2.80E-06
$\frac{6}{12}$	1.282100850	1.282100839	1.10E-08	$\frac{6}{12}$	1.3753074	1.3753048	2.56E-06
$\frac{7}{12}$	1.283874875	1.283874848	2.77E-08	$\frac{7}{12}$	1.3943444	1.3943423	2.11E-06
$\frac{8}{12}$	1.285629241	1.285629193	4.82E-08	$\frac{8}{12}$	1.4117417	1.4117402	1.49E-06
$\frac{9}{12}$	1.287364197	1.287364125	7.24E-08	$\frac{9}{12}$	1.4276773	1.4276766	7.15E-07
$\frac{10}{12}$	1.289079987	1.289079887	1.00E-07	$\frac{10}{12}$	1.4423082	1.4423084	-1.97E-07
$\frac{11}{12}$	1.290776852	1.290776721	1.31E-07	$\frac{11}{12}$	1.4557728	1.4557740	-1.22E-06
$\frac{12}{12}$	1.292455032	1.292454866	1.66E-07	$\frac{12}{12}$	1.4681933	1.4681956	-2.31E-06

Tabuľka 5.7: Presnosť európskych (vľavo) a domácich (vpravo) výnosových kriviek

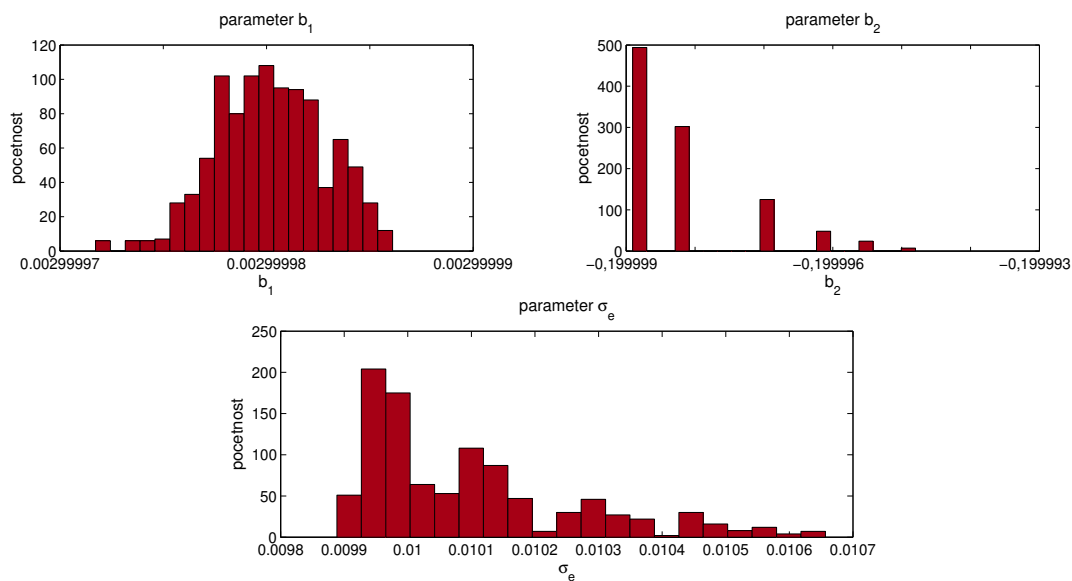
5.3 Simulačná analýza

Zrealizovali sme numerický experiment, pri ktorom sme vygenerovali 1000 sád domácich a európskych short rate a výnosových kriviek analogicky ako v kapitole 4.3 a v kapitole 5.2.1. Použili sme tie isté parametre v rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti, avšak s inou voľbou počiatkových hodnôt short rate, ktoré sme náhodne generovali z rovnomerného rozdelenia. Začiatkový bod domácej short rate bol volený rovnomerným rozdelením na intervale $[0.02, 0.04]$ a začiatkový bod európskej short rate z intervalu $[0.005, 0.025]$.

Na obrázku 5.5 zobrazujeme histogramy odhadov európskych parametrov b_1 , b_2 a σ_e . V tabuľke 5.8 uvádzame ich základné štatistické vlastnosti (minimum, maximum, priemer, medián a štandardnú odchýlku). Európsky odhad sa po druhom kroku nemení, čiže tento odhad je výsledným odhadom. Na obrázku 5.6 vykresľujeme histogram presnosti európskych výnosov, pričom štatistické vlastnosti sú uvedené v tabuľke 5.9.

Na obrázkoch 5.7 a 5.8 zobrazujeme histogramy odhadov domácich parametrov po druhom kroku a aj výsledné hodnoty. V tabuľkách 5.10 a 5.11 uvádzame základné štatistické vlastnosti týchto domácich odhadovaných koeficientov po druhom kroku a pre konečné hodnoty odhadov.

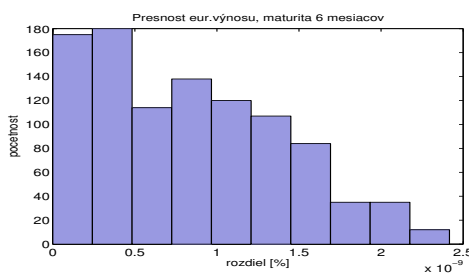
V tabuľke 5.12 máme štyri histogramy, v ktorých porovnávame presnosť (t. j. rozdiel medzi skutočným a odhadnutým výnosom v absolútnej hodnote) domácich výnosových kriviek po druhom kroku a na konci po treťom kroku pre rôzne maturity (3, 6, 9, 12 mesiacov). Vlastnosti vykresľovaných rozdielov uvádzame v tabuľke 5.13. Môžeme si všimnúť, že tento krok zvýši štandardnú odchýlku odhadov a_2 , a_3 (ostatné sú rádovo rovnaké). Hoci vidíme, že výsledný odhad je vo viacerých simuláciach presnejší ako odhad po druhom kroku, nie je to až tak významné, ak si uvedomíme, že dosahovaná presnosť nášho odhadu už po druhom kroku je približne 10^{-6} . Trhové hodnoty Euriboru sa zaznamenávajú s presnosťou na tri desatinné miesta. Tretí krok síce zlepší účelovú funkciu a presnosť odhadu výnosov, ale ide o také malé zmeny, ktoré pri použití reálnych dát nie sme schopní rozlíšiť. Realizácia tretieho kroku trvá časovo dlhšie ako zvyšok kalibrácie a preto tretí krok vynecháme.



Obr. 5.5: Odhady európskych parametrov

	b_1	b_2	σ_e
minimum	0.002999972	-0.1999989	0.0098885
maximum	0.002999986	-0.1999947	0.0106566
medián	0.002999980	-0.1999981	0.0100563
str. hodnota	0.002999980	-0.1999981	0.0100961
štand. odch.	2.62E-09	9.68E-07	1.69E-04

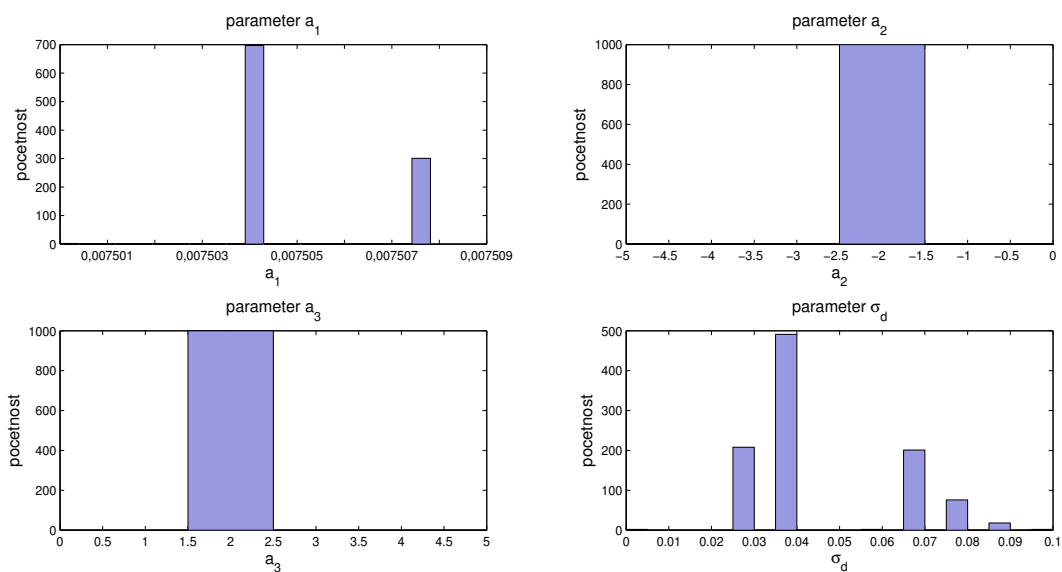
Tabuľka 5.8: Odhady európskych parametrov



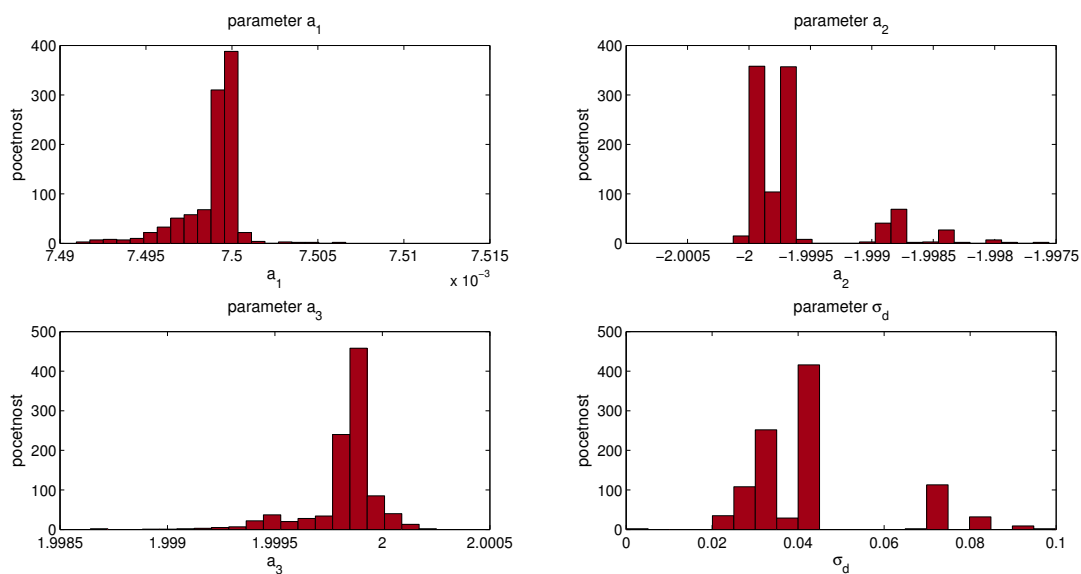
Obr. 5.6: Presnosť európskych výnosov

minimum	3.90E-14
maximum	2.42E-09
medián	7.67E-10
str. hodn.	8.35E-10
štand. odch.	5.72E-10

Tabuľka 5.9: Vlastnosti presnosti európskych výnosov, maturita 6 mesiacov



Obr. 5.7: Odhady domácich parametrov po druhom kroku



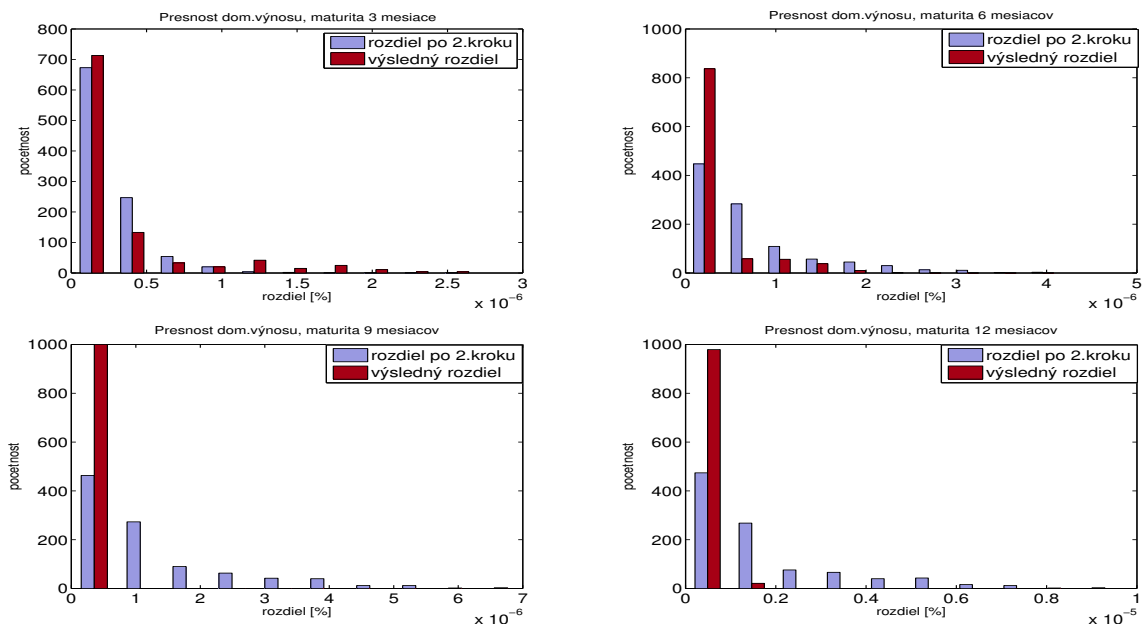
Obr. 5.8: Konečné odhady domácich parametrov

Odhady po 2.kroku	a_1	a_2	a_3	σ_d
minimum	0.0075000	-2.0001953	2.000	0.00000
maximum	0.0075078	-2.0001953	2.000	0.10000
medián	0.0075039	-2.0001953	2.000	0.04000
str. hodnota	0.0075050	-2.0001953	2.000	0.04797
štand. odch.	1.81E-06	3.15E-14	0.00E+00	1.78E-02

Tabuľka 5.10: Vlastnosti odhadov domácich parametrov po 2.kroku

Výsledné odhady	a_1	a_2	a_3	σ_d
minimum	0.0074909	-2.0001288	1.99864	0.00012
maximum	0.0075066	-1.9975580	2.00025	0.09980
medián	0.0074994	-1.9997378	1.99987	0.04048
str. hodnota	0.0074989	-1.9996355	1.99983	0.04157
štand. odch.	1.67E-06	4.42E-04	1.68E-04	1.57E-02

Tabuľka 5.11: Vlastnosti odhadov domácich parametrov



Tabuľka 5.12: Porovnanie presnosti domácich výnosov po 2.kroku a na konci po 3.kroku

3 mesiace	rozd.dom.výn. po 2.kroku v [%]	rozd.dom.výn. výsledný v [%]	6 mesiacov	rozd.dom.výn. po 2.kroku v [%]	rozd.dom.výn. výsledný v [%]
minimum	4.87E-10	3.67E-10	minimum	1.19E-08	3.83E-10
maximum	1.35E-06	2.70E-06	maximum	4.17E-06	2.15E-06
medián	1.84E-07	1.44E-07	medián	4.74E-07	1.15E-07
str. hodn.	2.38E-07	3.13E-07	str. hodn.	7.01E-07	2.58E-07
štand. odch.	2.12E-07	4.74E-07	štand. odch.	6.85E-07	3.85E-07
9 mesiacov	rozd.dom.výn. po 2.kroku v [%]	rozd.dom.výn. výsledný v [%]	12 mesiacov	rozd.dom.výn. po 2.kroku v [%]	rozd.dom.výn. výsledný v [%]
minimum	1.66E-09	2.85E-11	minimum	4.87E-09	1.54E-11
maximum	7.12E-06	5.25E-07	maximum	9.78E-06	1.67E-06
medián	7.91E-07	3.01E-08	medián	1.06E-06	6.56E-08
str. hodn.	1.20E-06	6.60E-08	str. hodn.	1.66E-06	1.70E-07
štand. odch.	1.21E-06	9.34E-08	štand. odch.	1.70E-06	2.58E-07

Tabuľka 5.13: Vlastnosti rozdielov domácich odhadov po 2.kroku a na konci pre maturity 3,6,9 a 12 mesiacov

5.4 Zovšeobecnený algoritmus pre CKLS model s nulovou koreláciou a známymi γ_e, γ_d

V tejto časti zovšeobecňujeme metódu kalibrácie pre CIR model s nulovou koreláciou z predchádzajúcej kapitoly. Použijeme ju pre CKLS model s nulovou koreláciou a známymi γ_e, γ_d . Zovšeobecnenie je priamočiare.

Daný algoritmus pozostáva z dvoch bodov:

1. Odhad európskych parametrov:
Ako sme uviedli v kapitole 5.2.2, pre danú hodnotu mocniny γ_e sa odhad ostatných troch parametrov dá redukovať na jednorozmernú úlohu. Vyriešením tejto úlohy dostávame odhad parametrov b_1, b_2, σ_e .
2. Odhad domácich parametrov: Odhad rizikovo neutrálneho driftu ostáva rovnaký ako v kapitole 5.2.3, keďže ide o odhad v konvergenčnom Vašíčkovom modeli. Odhad volatility realizujeme ako minimalizáciu účelovej funkcie cez parameter σ_d , analogicky ako v kapitole 5.2.3. Zmení sa len výpočet účelovej funkcie (namiesto hodnoty $\gamma_d = \frac{1}{2}$ dosadzujeme inú hodnotu γ_d). Konečnú úpravu parametrov pomocou štvorrozmernej optimalizácie (vzhľadom na parametre a_1, a_2, a_3, σ_d) nerealizujeme, vzhľadom na výsledky z CIR modelu s nulovou koreláciou.

5.5 Odhad korelácie ρ a parametrov γ_e, γ_d

Pri odhadoch výnosových kriviek a jednotlivých parametroch, t. j. pri optimalizácií sa nám nepodarilo získať odhad parametra ρ ani mocniny γ_d . Skúšali sme nasledovné postupy:

- Najskôr sme odhadli model s nulovou koreláciou - odhad európskych parametrov (podľa kapitoly 5.2.2) a odhad domácich parametrov, kroky 1 a 2 (podľa kapitoly 5.2.3). Potom sme domácu účelovú funkciu minimalizovali vzhľadom na parametre $a_1, a_2, a_3, \sigma_d, \rho$. Doteraz nájdené hodnoty odhadov a_1, a_2, a_3, σ_d a $\rho = 0$ sme zobrali do tejto minimalizácie ako štartovacie hodnoty. Očakávali sme, že optimalizácia rýchlo skončí a že výsledný bod sa bude nachádzať blízko tohto štartovacieho bodu, no nestalo sa tak, optimalizácia trvala veľmi dlho a odhadnuté parametre mali nerealistické hodnoty.
- Postupom z článku [10] sme odhadli optimálnu hodnotu mocniny γ_e , ktorú sa podarilo nájsť pomerne presne. Odhad realizujeme pre rôzne hodnoty parametra γ_e (napr. nejaké delenie intervalu $[0, 1]$). Zaznamenávame hodnotu účelovej funkcie a vyberieme optimálnu hodnotu. Tento postup sme chceli zopakovať aj pre odhad domácej mocniny γ_d . S predpokladom nulovej korelácie sme odhadli CKLS model pre rôzne hodnoty γ_d (napr. nejaké delenie intervalu $[0, 1]$). Avšak tento postup sa nám neosvedčil na rozdiel od jednofaktorového modelu, optimálna hodnota sa týmto spôsobom nenašla.

V nasledujúcich častiach sa pokúsime nájsť zdôvodnenie, prečo tieto stratégie zlyhávajú.

5.5.1 Vplyv korelácie ρ na výnosy

V nasledujúcej tabuľke uvádzame aproximácie domácich výnosových kriviek pri rôznej voľbe parametra ρ v CIR konvergenčnom modeli, pričom ostatné parametre berieme rovnaké ako v kapitole 4.3, pri numerickom testovaní CIR modelu s nulovou koreláciou a v kapitole 5.2, pri generovaní dát na testovanie navrhnutej metódy kalibrácie.

maturita [rok]	$\rho = 0$ dom.výnos [%]	$\rho = 0.3$ dom.výnos [%]	$\rho = 0.6$ dom.výnos [%]	$\rho = 0.9$ dom.výnos [%]
$\frac{1}{12}$	2.02936082	2.02936080	2.02936077	2.02936075
$\frac{2}{12}$	2.05524472	2.05524455	2.05524438	2.05524422
$\frac{3}{12}$	2.07806130	2.07806080	2.07806029	2.07805979
$\frac{4}{12}$	2.09816936	2.09816828	2.09816721	2.09816613
$\frac{5}{12}$	2.11588342	2.11588153	2.11587963	2.11587774
$\frac{6}{12}$	2.13147947	2.13147650	2.13147354	2.13147058
$\frac{7}{12}$	2.14519985	2.14519558	2.14519131	2.14518704
$\frac{8}{12}$	2.15725756	2.15725177	2.15724597	2.15724018
$\frac{9}{12}$	2.16784000	2.16783248	2.16782496	2.16781743
$\frac{10}{12}$	2.17711216	2.17710272	2.17709329	2.17708385
$\frac{11}{12}$	2.18521943	2.18520792	2.18519642	2.18518492
$\frac{12}{12}$	2.19229008	2.19227637	2.19226266	2.19224894

Tabuľka 5.14: Domáce výnosy pri rôznej voľbe parametra ρ

maturita [rok]	rozdiel dom.výnos [%] pre $\rho = 0.3$ a $\rho = 0$	rozdiel dom.výnos [%] pre $\rho = 0.6$ a $\rho = 0$	rozdiel dom.výnos [%] pre $\rho = 0.9$ a $\rho = 0$
$\frac{1}{12}$	-2.32E-08	-4.65E-08	-6.97E-08
$\frac{2}{12}$	-1.66E-07	-3.33E-07	-4.99E-07
$\frac{3}{12}$	-5.04E-07	-1.01E-06	-1.51E-06
$\frac{4}{12}$	-1.07E-06	-2.15E-06	-3.22E-06
$\frac{5}{12}$	-1.89E-06	-3.79E-06	-5.68E-06
$\frac{6}{12}$	-2.96E-06	-5.93E-06	-8.89E-06
$\frac{7}{12}$	-4.27E-06	-8.54E-06	-1.28E-05
$\frac{8}{12}$	-5.80E-06	-1.16E-05	-1.74E-05
$\frac{9}{12}$	-7.52E-06	-1.50E-05	-2.26E-05
$\frac{10}{12}$	-9.43E-06	-1.89E-05	-2.83E-05
$\frac{11}{12}$	-1.15E-05	-2.30E-05	-3.45E-05
$\frac{12}{12}$	-1.37E-05	-2.74E-05	-4.11E-05

Tabuľka 5.15: Rozdiely medzi domácimi výnosmi pri nulovej a nenulovej voľbe parametra ρ

Porovnaním tabuliek 5.14 a 5.15 s tabuľkami 4.4 a 4.5 (v ktorých sú uvedené presné a aproximované úrokové miery v CIR modeli s nulovou koreláciou) vidíme, že chyba aproximácie a závislosť od korelácie je približne rovnakého rádu. To je pravdepodobne dôvodom, prečo ich nevieme rozlíšiť a teda nevieme správne určiť hodnotu korelácie ρ .

Malé rozdiely vieme zdôvodniť aj teoreticky. V diplomovej práci [6] sa porovnávajú hodnoty cien dlhopisov pre model s nulovou a nenulovou koreláciou. Pre Vašíčkov model je dokázané

nasledovné tvrdenie.

Veta 5.1. *podľa [6]. Označme $P_{vas}(r_d, r_e, \tau; \rho)$ cenu domáceho dlhopisu v dvojfaktorovom konvergenčnom modeli Vašíčkovho typu s koreláciou ρ , potom:*

$$\ln P_{vas}(r_d, r_e, \tau; 0) - \ln P_{vas}(r_d, r_e, \tau; \rho) = -\frac{1}{8}a_3\rho\sigma_d\sigma_e\tau^4 + o(\tau^4).$$

Vzhľadom na konštrukciu našej aproximácie, ktorá vychádza z Vašíčkovho modelu platí:

Dôsledok 5.1. *Označme $P^{ap}(r_d, r_e, \tau; \rho)$ navrhnutú aproximáciu (4.4) pre cenu domáceho dlhopisu v dvojfaktorovom konvergenčnom modeli CKLS typu s koreláciou ρ , potom:*

$$\ln P^{ap}(r_d, r_e, \tau, 0) - \ln P^{ap}(r_d, r_e, \tau, \rho) = -\frac{1}{8}a_3\sigma_d\sigma_e r_d^{\gamma_d} r_e^{\gamma_e} \tau^4 + o(\tau^4).$$

Rozdiely sú teda malé a rádovo dokonca rovnaké ako je chyba aproximácie, ktorá je taktiež rádu $O(\tau^4)$.

Podobné tvrdenie, v ktorom sa počíta rozdiel v prípade modelu s nulovou a nenulovou (všeobecnou) koreláciou pre CIR model, je uvedené v [7], kde sa hovorí:

Veta 5.2. *podľa [7]. Označme $P_{cir}(r_d, r_e, \tau; \rho)$ cenu domáceho dlhopisu v dvojfaktorovom konvergenčnom modeli CIR typu, potom platí:*

$$\ln P_{cir}(r_d, r_e, \tau; 0) - \ln P_{cir}(r_d, r_e, \tau; \rho) = -\frac{1}{8}a_3\rho\sigma_d\sigma_e\sqrt{r_d r_e}\tau^4 + o(\tau^4).$$

Všimnime si, že pre našu aproximáciu platí rovnaký odhad rozdielu medzi $\ln P$ v prípade nulovej korelácie a všeobecnej korelácie ako presný CIR - prvý člen rozvoja je rovnaký. Malé rozdiely, ktoré dostávame použitím aproximácie s rôznymi hodnotami ρ nie sú nedostatkom aproximácie ale sú spôsobené samotným modelom.

5.5.2 Odhad mocniny γ_d

Z Taylorovho rozvoja navrhnutej aproximácie, odvodeného v kapitole 4, vyplýva

$$\ln P(\tau, r_d, r_e; \sigma_{d1}, \gamma_{d1}) - \ln P(\tau, r_d, r_e; \sigma_{d2}, \gamma_{d2}) = \frac{1}{6} \left(r_d^{2\gamma_{d1}} \sigma_{d1}^2 - r_d^{2\gamma_{d2}} \sigma_{d2}^2 \right) \tau^3 + o(\tau^3). \quad (5.16)$$

Majme hodnoty domácej short rate r_{di} , kde $(i = 1, \dots, n)$. Bude nás zaujímať, že pre akú kombináciu parametrov $\sigma_{d1}, \gamma_{d1}, \sigma_{d2}, \gamma_{d2}$ bude koeficient pri τ^3 malý. V priemere bude nulový, ak

$$\frac{1}{6n} \sum_{i=1}^n \left(r_{di}^{2\gamma_{d1}} \sigma_{d1}^2 - r_{di}^{2\gamma_{d2}} \sigma_{d2}^2 \right) = 0.$$

To znamená, že

$$\sigma_{d1}^2 \sum_{i=1}^n r_{di}^{2\gamma_{d1}} = \sigma_{d2}^2 \sum_{i=1}^n r_{di}^{2\gamma_{d2}},$$

$$\sigma_{d2} = \sigma_{d1} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n r_{di}^{2\gamma_{d1}}}{\sum_{i=1}^n r_{di}^{2\gamma_{d2}}}}.$$

Ak $r_{di} \sim \tilde{r}$ (t. j. hodnota okolo ktorej sa r_{di} pohybujú), tak

$$\sigma_{d2} \sim \sigma_{d1} \sqrt{\frac{n\tilde{r}^{2\gamma_{d1}}}{n\tilde{r}^{2\gamma_{d2}}}} = \sigma_{d1} \tilde{r}^{\gamma_{d1}-\gamma_{d2}}. \quad (5.17)$$

Zoberme opäť parametre konvergenčného CIR modelu z kapitoly 4.3 (t. j. $\sigma_{d1} = 0.03$, $\gamma_{d1} = 0.5$), pričom vezmeme $\tilde{r} = 0.01$. Pre niekoľko hodnôt γ_{d2} vypočítame podľa vzťahu (5.17) preškálovanú volatilitu σ_{d2} a pomocou našej aproximácie vypočítame a porovnáme výnosy. Tie uvádzame v tabuľkách.

maturita [rok]	$\gamma_d = 0.3$ dom.výn.[%]	$\gamma_d = 0.4$ dom.výn.[%]	$\gamma_d = 0.5$ dom.výn.[%]	$\gamma_d = 0.6$ dom.výn.[%]	$\gamma_d = 0.7$ dom.výn.[%]
$\frac{1}{12}$	2.0293612	2.0293610	2.0293607	2.0293605	2.0293602
$\frac{2}{12}$	2.0552459	2.0552451	2.0552442	2.0552432	2.0552421
$\frac{3}{12}$	2.0780632	2.0780616	2.0780598	2.0780577	2.0780554
$\frac{4}{12}$	2.0981716	2.0981690	2.0981661	2.0981628	2.0981590
$\frac{5}{12}$	2.1158855	2.1158819	2.1158777	2.1158730	2.1158676
$\frac{6}{12}$	2.1314809	2.1314761	2.1314706	2.1314643	2.1314572
$\frac{7}{12}$	2.1452000	2.1451939	2.1451870	2.1451792	2.1451703
$\frac{8}{12}$	2.1572557	2.1572485	2.1572402	2.1572308	2.1572200
$\frac{9}{12}$	2.1678357	2.1678271	2.1678174	2.1678064	2.1677939
$\frac{10}{12}$	2.1771047	2.1770950	2.1770839	2.1770713	2.1770569
$\frac{11}{12}$	2.1852084	2.1851974	2.1851849	2.1851708	2.1851547
$\frac{12}{12}$	2.1922750	2.1922628	2.1922489	2.1922333	2.1922155

Tabuľka 5.16: Domáce výnosy pri rôznej voľbe parametra ρ

maturita	rozd.dom.výn.[%] pre $\gamma_d = 0.3, \gamma_d = 0.5$	rozd.dom.výn.[%] pre $\gamma_d = 0.4, \gamma_d = 0.5$	rozd.dom.výn.[%] pre $\gamma_d = 0.6, \gamma_d = 0.5$	rozd.dom.výn.[%] pre $\gamma_d = 0.7, \gamma_d = 0.5$
$\frac{1}{12}$	4.55E-07	2.43E-07	-2.79E-07	-5.99E-07
$\frac{2}{12}$	1.65E-06	8.80E-07	-1.01E-06	-2.16E-06
$\frac{3}{12}$	3.37E-06	1.80E-06	-2.06E-06	-4.41E-06
$\frac{4}{12}$	5.46E-06	2.91E-06	-3.33E-06	-7.13E-06
$\frac{5}{12}$	7.80E-06	4.16E-06	-4.75E-06	-1.02E-05
$\frac{6}{12}$	1.03E-05	5.49E-06	-6.26E-06	-1.34E-05
$\frac{7}{12}$	1.29E-05	6.87E-06	-7.83E-06	-1.68E-05
$\frac{8}{12}$	1.56E-05	8.28E-06	-9.42E-06	-2.02E-05
$\frac{9}{12}$	1.82E-05	9.69E-06	-1.10E-05	-2.36E-05
$\frac{10}{12}$	2.09E-05	1.11E-05	-1.26E-05	-2.69E-05
$\frac{11}{12}$	2.35E-05	1.25E-05	-1.42E-05	-3.02E-05
$\frac{12}{12}$	2.61E-05	1.38E-05	-1.57E-05	-3.35E-05

Tabuľka 5.17: Rozdiely medzi domácimi výnosmi pre nejakú zvolenú koreláciu ρ a pre $\rho = 0.5$

Podobne ako v prípade závislosti od korelácie vidíme, že chyba aproximácie a závislosť od mocniny γ_d je numericky približne rovnakého rádu (aj keď Taylorov rozvoj rozdielu je o rád menší). To je pravdepodobne opäť dôvodom, prečo ich nevieme rozlíšiť a teda nevieme správne určiť hodnotu mocniny γ_d .

Kapitola 6

Kalibrácia modelu na reálnych dátach

V predchádzajúcej kapitole 5 sme navrhli metódu kalibrácie. Zistili sme, že sa dá použiť na odhad CKLS modelu s nulovou koreláciou, ak sú hodnoty mocnín σ_d , σ_e vopred dané. Na ukážku odhadneme CIR model s nulovou koreláciou.

6.1 Výber a použitie dát

Keďže konvergenčný model opisuje súvis vývoja krátkodobej úrokovej miery so vstupom pozorovanej krajiny do menovej únie, z toho dôvodu v tabuľke 6.1 uvádzame prehľad štátov spolu s rokom zavedenia eura v danej krajine.

Rok prijatia eura	Krajina
1999	Belgicko, Nemecko, Írsko, Španielsko, Francúzsko, Taliansko, Luxembursko, Holandsko, Rakúsko, Portugalsko, Fínsko
2001	Grécko
2007	Slovinsko
2008	Cyprus, Malta
2009	Slovensko
2011	Estónsko

Tabuľka 6.1: Zoznam členov menovej únie s rokom vstupu, Zdroj: [21]

Na metódu kalibrácie sme sa rozhodli použiť historické dáta do prijatia eura na Slovensku, a tak modelovať vývoj úrokovej miery na Slovensku a v menovej únii. Použili sme štvrtý kvartál roku 2008, t. j. tesne pred vstupom do menovej únie.

Uvažujme obdobie od 1. 10. 2008 do 31. 12. 2008, (t. j. 62 pracovných dní), z ktorého použijeme dáta, a to konkrétne priemer hodnôt Bribor a Bribid. Ďalej v texte používame pojem Bribor, hoci ide v skutočnosti o ich priemer. Za krátkodobú domácu úrokovú mieru vezmeme overnight. Domáce výnosové krivky sú pre maturity $\tau_d = (\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{6}{12}, \frac{9}{12}, \frac{12}{12})$. Ako európsku short rate berieme Eoniu a výnosové krivky uvažujeme pri rovnakých podmienkach, za rovnaké časové obdobie. Čiže $n_e = n_d = 62$, $\tau_e = \tau_d = (\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{6}{12}, \frac{9}{12}, \frac{12}{12})$, čiže $m_e = m_d = 6$.

6.2 Odhad dvojfaktorového CIR použitím slovenských dát

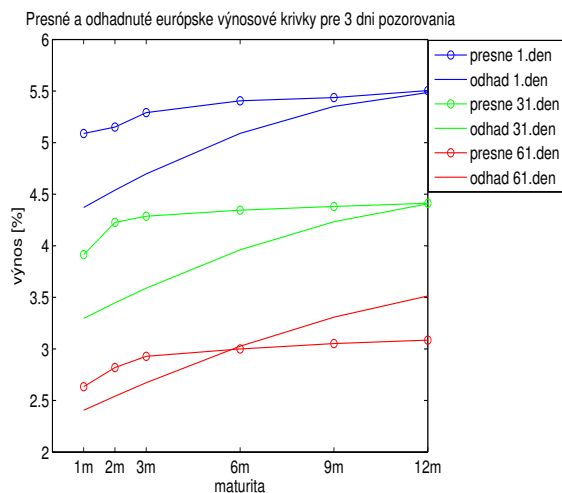
Postupujeme podľa algoritmu v kapitole 5. Výsledné odhady uvádzame v nasledovnej tabuľke.

parameter	b_1	b_2	σ_e	a_1	a_2	a_3	σ_d
presné hodnoty	0.003	-0.2	0.01	0.0075	-2	2	0.03
výsledné	0.0227	0.5000	1.1427	0.0879	-8.2052	7.3827	5

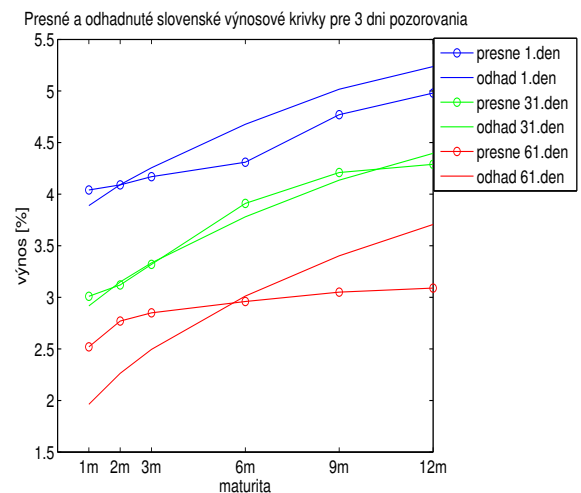
Tabuľka 6.2: Všetky odhadované parametre

6.2.1 Presnosť európskych a slovenských odhadnutých výnosových kriviek

V tejto časti porovnávame presné a odhadnuté výnosové krivky pre niekoľko zvolených dní. Na obrázku 6.1 znázorňujeme európske a na obrázku 6.2 domáce výnosové krivky pre tri dni pozorovania, a to 1. deň, 31. deň a 61. deň.



Obr. 6.1: Európske výnosy a ich aproximácie



Obr. 6.2: Domáce výnosy a ich aproximácie

V tabuľke 6.3 numericky zaznamenávame presné a odhadnuté, európske a domáce výnosy pre 31. deň z pozorovaných dát.

Mat. [rok]	Presný výnos [%]	Aproxim. výnos [%]	Rozdiel [%]
$\frac{1}{12}$	3.9140	3.2953	0.6187
$\frac{2}{12}$	4.2260	3.4461	0.7799
$\frac{3}{12}$	4.2860	3.5891	0.6969
$\frac{6}{12}$	4.3450	3.9604	0.3846
$\frac{9}{12}$	4.3810	4.2327	0.1483
$\frac{12}{12}$	4.4120	4.4065	0.0055

Mat. [rok]	Presná výnos [%]	Aproxim. výnos [%]	Rozdiel [%]
$\frac{1}{12}$	3.0100	2.9174	0.0926
$\frac{2}{12}$	3.1200	3.1490	-0.0290
$\frac{3}{12}$	3.3200	3.3336	-0.0136
$\frac{6}{12}$	3.9100	3.7805	0.1295
$\frac{9}{12}$	4.2100	4.1358	0.0742
$\frac{12}{12}$	4.2900	4.3957	-0.1057

Tabuľka 6.3: Presnosť európskych (vľavo) a domácich (vpravo) výnosových kriviek

Pri reálnych dátach sme nezaznamenali takú prenosť odhadov, ako pri simulovaných dátach, čo sa dalo aj očakávať. Menšiu presnosť pozorujeme už pri európskych chybách, čiže riešením by bolo zlepšiť európsky odhad parametrov. Tie sú vstupným bodom pri hľadaní odhadu domácich parametrov. Čiže tým, že by sme zvolili iný model pre európske úrokové miery, možno by sa zlepšil aj odhad domácich výnosových kriviek.

Záver

Práca pojednáva o konvergenčných modeloch krátkodobých úrokových mier. Konvergenčný model vysvetľuje vývoj úrokovej miery v závislosti od vstupu krajiny do menovej únie. Prvý z takýchto modelov bol navrhnutý v roku 2000 autormi Corzo a Schwartz. Volatility domácej a európskej krátkodobej úrokovej miery sú konštantné. Analogickým modelom CIR typu sa zaoberá V. Lacko vo svojej diplomovej práci z roku 2010. V našej práci sa zaoberáme dvojfaktorovým konvergenčným modelom Chan-Karolyi-Longstaff-Sandersovho typu (CKLS), kde predpokladáme nekonštantné volatility, v tvare mocnín úrokových mier, s analógiou v jednofaktorovom CKLS modeli. Dynamika systému je popísaná dvoma stochastickými diferenciálnymi rovnicami. Pre Vašíčkov model a pre špeciálny prípad Cox-Ingersoll-Rossovho modelu je známe explicitné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice, podľa ktorej sa správa cena dlhopisu. Ak do riešenia Vašíčkovho modelu dosadíme za konštantné volatility členy $\sigma_d r_d^{\gamma_d}$ a $\sigma_e r_e^{\gamma_e}$, získame aproximáciu riešenia pre CKLS model. Vypočítame presnosť tejto aproximácie a ukážeme, že existuje možnosť jej spresnenia.

Zaoberali sme sa návrhom a analytickým odvodením aproximácie ceny dlhopisu v konvergenčnom modeli CKLS typu na základe riešenia Vašíčkovho modelu. Navrhnutú aproximáciu sme otestovali na CIR modeli s nulovou koreláciou, pre ktorý poznáme aj presné riešenie, čiže bolo možné zistiť jej presnosť. Zároveň sme odvodili aproximáciu a jej presnosť pre všeobecnejší CKLS model. Zistili sme, že rozdiel logaritmov presného riešenia a navrhutej aproximácie je rádu $O(\tau^4)$. Túto získanú aproximáciu sme spresnili ešte o dva rády.

Jedným z dôležitých cieľov našej diplomovej práce bolo navrhnuť postup kalibrácie modelu použitím získanej aproximačnej formuly. Navrhnutý algoritmus sme testovali najskôr na simulovaných dátach pre CIR model s nulovou koreláciou. Pre tento model poznáme aj presné riešenie cien dlhopisov, takže bolo jednoduché pozorovať jednotlivé kroky algoritmu a zaznamenávať presnosť výnosových kriviek. Získali sme uspokojujúcu presnosť domácich výnosových kriviek, kde rozdiel presnej a odhadnutej výnosovej krivky (v percentách) bol rádu 10^{-6} až 10^{-7} . Zrealizovali sme tisíc simulácií odhadov parametrov s inými vygenerovanými dátami pri rovnakých podmienkach. Výsledky jednotlivých odhadov zaznamenávame v histogramoch.

Nakoniec sme túto navrhnutú metódu kalibrácie testovali na reálnych dátach. Použili sme Bribor, za posledné tri mesiace pred vstupom Slovenska do Eurozóny (t. j. 1. 10. 2008 - 31. 12. 2008).

Resume

The first part of our thesis is theoretical, in which we describe general terms such as bond, term structure, short rate, one and multi factor convergence models of the interest rates. Our diploma thesis primarily deals with the convergence model of interest rates, which belongs among the group of two - factor models, where we study two different factors and their mutual dependency. The convergence model explains the evolution of interest rate in connection with the adoption of the Euro currency. Term structure models explain the relation between the time to maturity of a discount bond and its present price. The first model of this kind was proposed in 2000 by Corzo and Schwartz. The volatilities of both the domestic and European short rates are constant. V. Lacko dealt with the convergence model of CIR type in his diploma thesis from the year 2010. In our article we deal with two-factor convergence model of the interest rates of Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders type (CKLS model), where we assume the volatilities proportional to the power of the short rates, the analogy of one-factor models. Two-factor model for the domestic short rate r_d and European short rate r_e under the risk-neutral measure is given by

$$\begin{aligned}dr_d &= (a_1 + a_2r_d + a_3r_e)dt + \sigma_d r_d^{\gamma_d} dW_d, \\dr_e &= (b_1 + b_2r_e)dt + \sigma_e r_e^{\gamma_e} dW_e, \\Cov[dW_d, dW_e] &= \rho dt.\end{aligned}$$

The bond price $P(r_d, r_e, \tau)$ with maturity τ satisfies the partial differential equation

$$\begin{aligned}-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (a_1 + a_2r_d + a_3r_e)\frac{\partial P}{\partial r_d} + (b_1 + b_2r_e)\frac{\partial P}{\partial r_e} + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} \\+ \frac{\sigma_e^2 r_e^{2\gamma_e}}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} + \rho\sigma_d r_d^{\gamma_d}\sigma_e r_e^{\gamma_e}\frac{\partial^2 P}{\partial r_d\partial r_e} - r_d P = 0,\end{aligned}$$

which holds for $r_d, r_e > 0, \tau \in (0, T)$, and the initial condition $P(r_d, r_e, 0) = 1$ for $r_d, r_e > 0$. For Vasicek ($\gamma_d = \gamma_e = 0$) and Cox-Ingersoll-Ross ($\gamma_d = \gamma_e = \frac{1}{2}$) type model with $\rho = 0$ closed form solutions are known. The price of the discount domestic bond is given by a formula in a separate form: $P(r_d, r_e, \tau) = e^{A(\tau) - D(\tau)r_d - U(\tau)r_e}$. In the case of the Vasicek model, functions $A(\tau), D(\tau), U(\tau)$ are given by the explicit form and in the case of the CIR model, functions $A(\tau), D(\tau), U(\tau)$ are given by the system of ordinary differential equations, which we can solve by numerical methods.

In the second part of our thesis, which introduces the analytic core of our diploma thesis, we have dealt with the proposal and analytic derivation of an approximation of the bond price in convergence model of the CKLS type on the basis of the solution of the Vasicek model. We have tested a proposed approximation on the CIR model with a zero correlation, for which the exact solution is known, so it was possible to determine its accuracy. At the same time we have derived the approximation and its accuracy for the more general CKLS model. Taking the solution for Vasicek model corresponding to same drift functions and correlation and substituting its constant volatilities by instantaneous volatilities $\sigma_e r_e^{\gamma_e}$ and $\sigma_d r_d^{\gamma_d}$ we have obtained an approximation of the solution for the CKLS model.

Theorem *Let $P^{ex}(r_d, r_e, \tau)$ be the price of the domestic bond in two-factor convergence model of CKLS type, let P^{ap} be the approximation of this price, then*

$$\ln P^{ap}(r_d, r_e, \tau) - \ln P^{ex}(r_d, r_e, \tau) = c_4(r_d, r_e)\tau^4 + o(\tau^4),$$

where the coefficient c_4 is given by the explicit formula

$$c_4(r_d, r_e) = -\frac{1}{24}\sigma_d^2\gamma_d r_d^{2\gamma_d-2} \left(2a_1 r_d + 2a_2 r_d^2 + 2a_3 r_d r_e - r_d^{2\gamma_d}\sigma_d^2 + 2\gamma_d r_d^{2\gamma_d}\sigma_d^2 \right). \quad (6.1)$$

We have found, that the difference in logarithms of the exact solution and proposed approximation is on the order $O(\tau^4)$. We have computed the order of accuracy for this approximation. Finally, we have showed the possibility of computing an extra term in the Taylor expansion to the original approximation, which leads to an approximation of higher accuracy. The new accurate approximation is on the order $O(\tau^6)$.

In the last part our diploma thesis we have suggested an algorithm for calibrating the model using our approximation formula. We have tested our proposed algorithm on the simulated data for the CIR model with zero correlation, where the exact solution is known. In this case we can follow single steps in suggested method. Firstly, we estimated parameters in the european one factor model of the Vasicek type. We count risk neutral drift in the Vasicek and CIR model and we have found out they are very similar. Secondly, we estimate parameters in the domestic two factor convergence model of CIR type, using estimated parameters from the european one factor Vasicek model. We realized 1000 simulations of the estimation of all seven parameters in the CIR model with zero correlation and we noted the results in the form of a histogram for each parameter. We have calculated the difference between the exact and theoretical term structure for the domestic and the european data. The results are satisfying, the accuracy for the domestic term structure in the percent point is 10^{-6} till 10^{-7} .

Finally we have implemented this method using real market data. We have used the Bribor (Bratislava Interbank Offered Rate) from the last monitored three month period (1. 10. 2008 - 31. 12. 2008), just before entering the monetary union.

Literatúra

- [1] Brigo, D., Mercurio, F.: 2006, *Interest Rate Models-Theory and Practice, With Smile, Inflation and Credit*, Springer Finance, Second Edition
- [2] Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. and Sanders, A.: 1992, *The volatility of short-term interest rates: an empirical comparison of alternative models of the term structures of interest rates*, Journal of Finance 47, 1209–1227
- [3] Choi, Y., Wirjanto, T. S.: 2007, *An analytic approximation formula for pricing zero-coupon bonds*, Finance Research Letters 4(2), 116–126
- [4] Corzo, T., Schwartz, E. S.: 2000, *Convergence within the European Union: Evidence from Interest Rates*, Economic Notes 29, pp. 243–268
- [5] Kwok, Y.K.: 2008, *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer, Second Edition
- [6] Lacko, V.: 2010, *Two-Factor Convergence Model Of Cox-Ingersoll-Ross Type*, Master's Thesis
- [7] Lacko, V., Stehlíková, B.: *Two-Factor Convergence Model Of Cox-Ingersoll-Ross Type*, preprint
- [8] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V.: 2005, *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos
- [9] Privault, N.: *An elementary introduction to stochastic interest rate modeling*, World Scientific, Second Edition
- [10] Stehlíková, B.: *Approximate formula for the bond price based on the Vasicek model*, preprint
- [11] Stehlíková, B., Ševčovič: 2009, *Approximate formula for pricing zero-coupon bonds and their asymptotic analysis*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling 6(2), 274–283
- [12] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K.: 2009, *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU
- [13] Ševčovič D., Urbánová Csajková A.: 2005, *On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model*, Central European J. of Operation Research, 13, 169–188 p.

- [14] www.bank.lv
- [15] www.bankofgreece.gr
- [16] www.bloomberg.com
- [17] www.cnb.cz
- [18] www.eestipank.ee
- [19] www.euribor.org
- [20] www.nbs.sk
- [21] <http://ec.europa.eu/>
- [22] <http://fin.seb.lt>