

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Matematické modelovanie popálenín kože

Diplomová práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Matematické modelovanie popálenín kože

Diplomová práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: Mgr. Richard Kollár, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Róbert Brestenský
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Matematické modelovanie popálenín kože

Cieľ: Diplomová práca sa pokúsi zodpovedať jednoduchú otázku: Ako veľmi sa človek popáli, ak sa dotkne horúcej platne? Úlohou je zostrojiť matematický model vzniku popálenín. Model bude multiškálový - bude spájať biochemické udalosti vo vnútri buniek s biofyzikálnymi procesmi na úrovni tkanív. Charakter práce: Numerické riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc, modelovanie v matematickej biológii, práca s anglickou literatúrou. Požadované schopnosti: Programovanie v MATLABe, záujem o matematické modelovanie a o pochopenie biologických procesov, práca s odbornou literatúrou v anglickom jazyku.

Vedúci: Mgr. Richard Kollár, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Dátum zadania: 14.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie:

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu s názvom *Matematické modelovanie popálenín kože* vypracoval samostatne pod vedením školiteľa a s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 26. 4. 2012

.....

PodĎakovanie:

Touto cestou by som sa chcel poďakovať vedúcemu diplomovej práce Mgr. Richardovi Kollárovi, PhD. za odbornú pomoc pri vypracovaní diplomovej práce, za ochotu, trpezlivosť, pripomienky a rady pri písaní práce.

BRESTENSKÝ, Róbert: *Matematické modelovanie popálenín kože* [Diplomová práca].

Univerzita Komenského v Bratislave, Mlynská dolina, 84248 Bratislava, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Vedúci práce: Mgr. Richard Kollár, PhD

Bratislava, 2012 /52 s./

Abstrakt

Cieľom tejto práce je zostrojiť model, ktorý opisuje šírenie popálenín v koži, a to najmä popálenín prvého stupňa. Model vychádza z rovnice vedenia tepla a tečenia tekutín v poróznom prostredí a má tvar systému troch zviazaných parciálnych diferenciálnych rovníc. Množstvo krvi v koži je v modeli určené rovnovážnym stavom v závislosti od veľkosti tokov z tepny a do žily, ktoré sú určené teplotou príslušnej vrstvy kože, a od rýchlosti prúdenia krvi v prostredí, ktorá tiež závisí od veľkosti týchto tokov. Model obsahuje množstvo parametrov. Niektoré z nich určíme za pomoci literatúry. Zvyšné, ktoré je ťažké experimentálne určiť, odhadneme tak, aby výsledky modelu čo najviac zodpovedali experimentálnym dátam.

Kľúčové slová : rovnica vedenia tepla, popálenina, porózne prostredie, objemový priemer

BRESTENSKÝ, Róbert: *Mathematical modeling of skin burns* [Master`s thesis].

Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics,
Department of Applied Mathematics and Statistics

Supervisor: Mgr. Richard Kollár, PhD

Bratislava 2012 /52 p./

Abstract

The aim of this work is to construct model, which describe the spread of skin burns, especially first degree burns. The model is based on the heat equation and fluid flow in porous medium and has form of three dependent partial differential equations. In model the amount of blood in skin is definite with steady state depend on size of the flows from arteries and into veins, intended temperature of layer of the skin and the speed of blood flow in medium, which also depend from size of these flows. The model contains many of parameters. We set some of them using literature. Those are difficult to determine experimentally, we estimate to match experimental data by model results.

Keywords: heat equation, burns, porous medium, volume average

Obsah

Úvod	1
Fyziológia kože	2
Fyziologické hľadisko popálenín	5
Predchádzajúce práce	7
Naša práca	8
1 Odvodenie modelu.....	9
1.1 Odvodenie rovnice vedenia tepla	9
1.2 Odvodenie rovnice toku krvi	14
1.3 Odvodenie rovníc popisujúcich objem krvi	17
1.3.1 Rovnovážny stav	19
1.4 Odvodenie rovníc popisujúcich šírenie tepla v koži.....	25
1.4.1 Objemový priemer v poróznom prostredí	25
1.4.2 Použitie objemového priemeru	27
1.4.3 Okrajové podmienky.....	32
1.5 Konečná forma matematického modelu	34
2 Implementácia	37
2.1 Iteračná matica	37
2.2 Rovnovážny stav systému.....	39
2.3 Parametre systému	40
3 Pozorovania	42
3.1 Stanovenie kritického množstva krvi pre popáleniny prvého stupňa	43
3.2 Výsledky pozorovania s odobratím tepelného zdroja	48

Záver	49
Literatúra	51

Úvod

Medzi najviac rozšírené obyčajné úrazy patrí aj popálenina. Priemerný počet popálenín, ktoré sú zaznamenané v USA, je ročne viac ako 2 000 000 [1]. Okolo 50% z nich sú natoľko závažné, že si vyžadujú lekársku pomoc a obmedzenie fyzickej aktivity. Popáleniny spôsobené požiarimi a výbuchmi sú najčastejšími príčinami smrteľných nehôd u detí a starších ľudí. Nehody vyskytujúce sa doma sú zodpovedné za viac ako tri štvrtiny týchto úmrtí.

Popáleniny sú štandardne spôsobené jedným z mnohých druhov pôsobenia zdroja vysokého tepla, ako napríklad vystavenie sa plameňom, kontakt s tuhú alebo tekutou látkou, vdýchnutie horúcich výparov alebo elektrinou. My sa budeme zaoberať iba vonkajšími zdrojmi pôsobiacimi na pokožku a vrstvy pod ňou.

Rozsah popáleniny môže byť od menších rán prvého stupňa až po najzávažnejšiu formu zranenia, ktorému človek podľahne. Počas zohrievania pokožky sa udeje nespočetné množstvo fyziologických zmien, týkajúcich sa lokálnej a celkovej reakcie. Na rozdiel od iných rán, ktoré sa môžu uzatvoriť v priebehu niekoľkých hodín alebo dní, vážna popálenina si vyžaduje dlhší čas na odstránenie mŕtvej časti pokožky, kým bude môcť byť uzatvorená. Trvalá prítomnosť nekrotického tkaniva produkuje ďalšie zranenia a vyvoláva dodatočné komplikácie. Komplexný proces zranenia predstavuje obrovskú výzvu v pochopení mechanizmu hojenia a v rozvíjaní efektívneho liečebného postupu.

Naším cieľom je zostavenie matematického modelu, ktorý bude schopný v závislosti od výšky teploty zdroja a dĺžky jeho pôsobenia určiť vznik popálenín prvého stupňa. Ich vznik bude určovať množstvo krvi prítomnej v oblasti pôsobenia zdroja tepla. Keďže pri vysokých teplotách dochádza k nekróze buniek, budeme sa zaoberať iba teplotami do 60°C.

Fyziológia kože

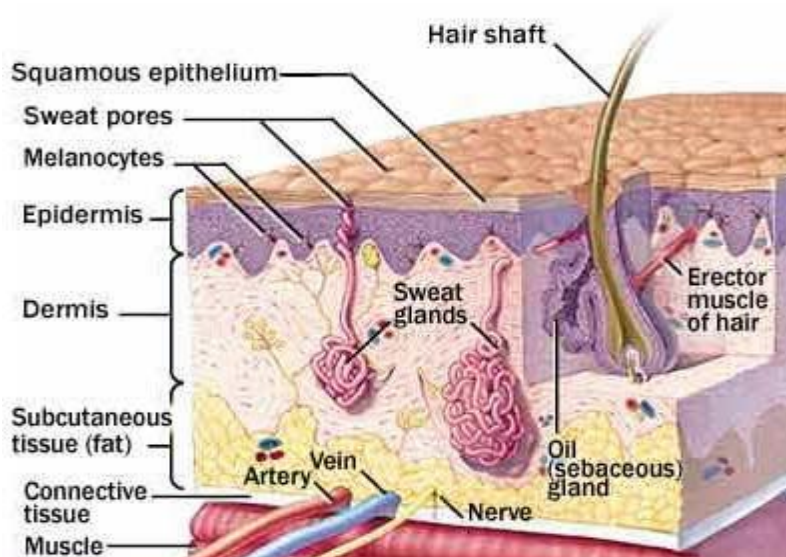
Kapitola je vytvorená na základe práce [1].

Pre správny popis procesu tvorenia rany je potrebné pochopiť základnú fyziológiu tkaniva. Koža tvorí najväčší orgán ľudského tela, čo sa týka rozmerov a hmotnosti. Povrch kože priemerného dospelého človeka je okolo $1,7 \text{ m}^2$ a váha predstavuje približne 15% celkovej hmotnosti. Funkcie kože sú životne dôležité. Sú to:

- Ochrana tkaniva pred fyzickým, chemickým a tepelným zranením
- Tepelná regulácia potením, izolácia, kontrolovanie prúdenia krvi
- Obojsmerná nepriepustnosť (telové tekutiny, okolité chemikálie)
- Zmyslové vnímanie tlaku, bolesti a teploty

Ako ďalšie, koža je orgán, ktorým sa prezentujeme svetu. Koža je pôvod vonkajšej krásy. Keď je zjazvená a zdeformovaná popáleninou, môže sa stať psychickým a spoločenským hendikepom.

Koža anatomicky pozostáva z vrstevnatej štruktúry s troma paralelnými vrstvami. Vonkajšia tenká vrstva sa volá epidermis (pokožka), v strede sa nachádza dermis (zamša) a nakoniec podkožná tuková vrstva tiež nazývané podkožie.



Obrázok 1.: Vrstvy kože [14]

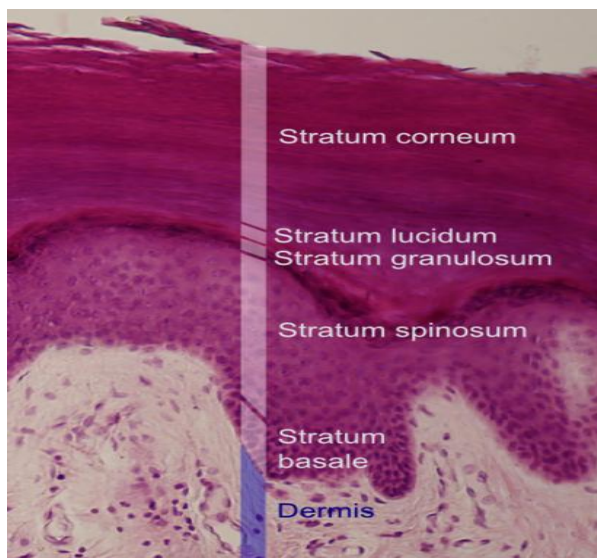
Koža je jediný orgán, ktorý sa fyziologicky a anatomicky veľmi líši podľa miesta na tele. Táto rozličná štruktúra má za následok rozličnú citlivosť na tepelné zmeny a náchylnosť k ťažkým zraneniam popálením.

I keď sa anatómia kože v rozličných oblastiach rozlišuje, všeobecné štrukturálne prvky sú konštantné. Stručný prehľad anatomického usporiadania kože bude užitočný vzhľadom ku neskoršej diskusii o fyziologickej reakcii na tepelný úraz.

Epidermis tvorí membránu s množstvom buniek. Jeho hrúbka je 0,06-0,8 mm. Kontakt medzi epidermou a dermou je tvorený trojrozmernou sieťou nepravidelných výbežkov, čo spôsobuje veľkú plochu medzi nimi a poskytuje odolnosť kože voči namáhaniu. Keďže epidermis nemá cievy, lymfy a spojivé tkanivo, tak parazituje na dermise pod ním, ktorý dokáže poskytnúť živiny zo svojho hojného počtu vlások.

Najvnútornejšia vrstva epidermy je základná vrstva, cez ktorú idú neurovaskulárne zásoby. V tejto vrstve sa tvoria bunky, a potom sa postupne šíria smerom k povrchu kože. Formujú ochrannú vrstvu, ktorá pomáha koži odolať tlaku. Ďalšia vrstva je stratum granulosum, ktorá sa podieľa na zadržiavaní vody a tepelnej regulácii. Keď bunky v tejto vrstve umrú, formujú poslednú vrstvu (stratum corneum), ktorá neprepúšťa vodu a je z vláknitej bielkoviny keratín. Keratín normálne obsahuje iba 15% vody. Ponorenie do vody zvyšuje toto percento a spôsobuje mäknutie a zvráskavenie, zatiaľ čo sušenie spôsobuje popraskanie a stvrdnutie kože.

Dermis je 20 až 30-krát hrubšia ako epidermis a obsahuje krvný, nervový a lymfatický



Obrázok 2.: Rozdelenie epidermy [15]

systém a nosnú konštrukciu kože. Skladá sa z troch základných zložiek: bunky, medzibunková hmota a tkanivo. Kolagén je prevládajúcim prvkom v tkanivách. Dôležitým typom buniek v dermise sú mastocyty, ktoré obsahujú značné množstvo histamínu a heparínu, a ktoré tiež produkujú látky tvoriace medzibunkovú hmotu. Poškodenie týchto buniek spôsobuje zápalovú reakciu.

Vrstva výbežkov je vrchná časť coria susediaca s epidermom. Pozostáva z množstva malých prekrvovaných a veľmi citlivých výbežkov. Tie sú nepatrne kužeľovité a tupo zakončené a zapadajú do príslušných jamiek v epidermise.

Dodávanie krvi pre kožu zodpovedajú za vyživovanie, bunkovú ochranu a hlavnú časť regulácie tepla. Cievny systém je zdôraznený prítomnosťou bohatej siete rozvetvených tepien a žíl, ktoré sú pravidelne pospájané. Malá cievka v tejto vrstve má polomer okolo 50µm.

Dôležitý a neobyčajný aspekt cirkulácie v koži je prítomnosť veľkého počtu priamych prechodov z tepien do žíl. Ich pôsobenie dokáže skoro celý tok krvi odkloniť cez kapiláry kvôli zvýšeniu účinku tepelnej izolácie medzi podkožným tkanivom a okolím.

Podkožie tvorí ďalšiu vrstvu spojivového tkaniva, ktoré sa špecializuje na produkovanie tuku. Individuálne a anatomické rozdiely v ukladaní tuku sú veľmi veľké a môžu hrať dôležitú rolu v určení stupňa zranenia v rozličných prípadoch.

Fyziologické hľadisko popálenín

Spracovanie tejto kapitoly je podľa práce [1].

Popálenie nastane ako dôsledok prekročenia kritickej hodnoty pre určitú dobu teploty v tkanive. Hodnoty teploty a času pôsobenia sú rozhodujúce pre určenie rozsahu zranenia. Teplota a čas nie sú nezávislé parametre pri uskutočnení popálenia. Klinické dáta naznačujú, že existuje nelineárne párovanie, ktoré stanovuje závažnosť poranenia. Vo všeobecnosti prechodná teplota tkaniva po dobu vystavenia sa musí brať do úvahy pri vytváraní tepelného zranenia. Čím je väčšia hodnota vytvoreného dvojice (teplota a čas), tým väčšie môže byť zranenie.

Najčastejší dôvod popálenia kože je použitie tepelného zdroja na povrchu, či už prúdenie, vedenie alebo radiácia, alebo ich kombinácia. V prípade radiácie by zdroj mal mať nejakú absorpčnú distribučnú funkciu v rámci tkaniva. Keďže prenos tepla z povrchu do vnútorných miest je obmedzený tepelným odporom tkaniva, môžeme vytvoriť trojdimenzionálne tepelné pole, v ktorom môže existovať signifikantný gradient. Tepelný priebeh v zasiahnutej oblasti nie je rovnomerný a oblasti odstupňované podľa zranenia sa vyvíjajú s najväčšou akútnosťou smerom k zdroju tepla.

Mikroskopická fyziologická reakcia na tepelné zranenie môže byť predovšetkým meraná ako zranenie mikrovaskulárneho riečiska. Počiatočné reakcie na zranenie sú charakteristické úplnými zmenami v prúde krvi, čo spôsobilo začiatok procesu zrážania sa. Zvýšenie cievnej priepustnosti je jedna z najdôležitejších vlastností pri tejto reakcii, keďže vedie k významnej strate tekutín, čo vedie k rozšíreniu patofyziologickým zmenám. Fyziologická zmena v mikrocirkulácii kvôli zvýšenej teplote je mimoriadne významná v rámci celkového zranenia popálením.

V prípade popálenín prvého stupňa rozšírenie ciev je jedinou hlavnou zmenou, ku ktorej dochádza. To zapríčiňuje začervenanie tkaniva. Popáleniny druhého stupňa sú charakterizované poškodením kapilár, čo spôsobuje opuch a tvorenie pľuzgierov. Zvýšením

priepustnosti ciev môže dôjsť zväčšením medzier medzi bunkami v stene ciev alebo v závažnejších prípadoch zničením týchto buniek. Bunky sa môžu zdúriť s mnoho veľkými vakuolami súčasne alebo so stratou vnútornej štruktúry a zdeformované bunky môžu zasahovať do vnútra ciev a čiastočne blokovať cievy. Priepustnosť ciev na spálenom mieste rapídne stúpa. Táto cievna reakcia na zranenie môže byť výsledkom priameho tepelného poškodenia a chemických mediátorov. Tento jav, preriedenie, má za následok premiestnenie plazmatických bielkovín do mimocievneho a mimobunkového priestoru, kde sa pomocou osmózy zväčšuje vodnatý opuch. Koncentrácia vody a albuminu (bielkovina) v postihnutej oblasti dosiahne vrchol počas tridsiatich minút po zranení. Zmena povrchu ciev umožňuje veľkú stratu tekutín a zníženie objemu plazmy. Zvýšenie objemu plazmy je hlavný dôvod spôsobujúci šok neliečenému popálenému pacientovi.

Popálenina tretieho stupňa zapríčiňuje zastavenie toku krvi v mikrocirkulácii a vedie k prípadnej nekróze tkaniva. Pri vážnych popáleninách, kde dôjde k zmenám funkčnosti cirkulácie hlboko v tkanive, sa môže veľké množstvo mimocievnej tekutiny hromadiť pod ranou pred tým, ako sa opuch stane na povrchu viditeľným. Rozsiahla strata tekutín spojená s popáleninou tretieho stupňa má za následok zranenia tkaniva pod a okolo miesta zničenej kože.

Zmeny vlastností toku krvi sú zaznamenané neustále aj počas doby po popálení. Viskozita krvi významne rastie a ostáva zvýšená počas niekoľkých dní. Zvýšenie krvných doštičiek je možné si všimnúť okamžite v mieste poranenia. S mikroskopickými pozorovaniami ich je možné jasne vidieť prilepené na steny ciev. Zvýšený počet doštičiek je možné pozorovať až tri týždne.

Iné faktory, ktoré sa menia v mikroskopickom rozsahu, môžu ovplyvniť reakciu tkaniva na danú teplotu. Medzi ne patrí obsah vody v koži, pigmentácia, fyziologický rozdiel miest na tele, prítomnosť vlasov, telový maz ako aj okamžitý stav cievneho prietoku krvi v danej lokalite.

Predchádzajúce práce

Danou témou t.j. popáleniny kože z matematického hľadiska sa zaoberalo množstvo vedcov. Prvotiny mali množstvo nedostatkov a zjednodušení. Hlavné zjednodušenie spočívalo v zaoberaní sa iba jednorozmerný problémov [1]. To znamená, že nepozorovali rozširovanie sa popáleniny, ale iba ako sa zahrieva koža v jednom bode. Následné určenie vážnosti popáleniny bolo na základe funkcie poškodenia, ktorá je závislá od teploty. Tieto modely vôbec neobsahovali vplyv cirkulácie krvi ani zvyšovanie jej množstva v mieste popáleniny. Neskoršej dobe sa modely rozšírili do viacerých rozmerov a zároveň sa pridal vplyv prítomnosti krvi. Tá najskôr nebola rozširovaná na okysličenú a neokysličenú, takýto vplyv sa neskôr pridal. Problém je v tom, že vo všetkých modeloch bolo množstvo okysličenej aj odkysličenej krvi brané ako konštantné a nijakým spôsobom sa nemenilo v závislosti od zmeny teploty. Mnohé tieto modely sú popísané v [4]. Ďalšia zaujímavosť je, že väčšina moderných modelov, sa zaoberá iba rovnovážnym stavom teploty v krvi v závislosti od vonkajších bežných teplôt.

Naša práca

Nasledujúcich častiach tejto práce sa budeme snažiť čo najlepšie popísať tvorbu popálenín prvého stupňa v koži. Pokúsime sa pochopiť a následne vylepšiť doteraz prezentované matematické modely zaoberajúce sa touto problematikou. Naše vylepšenia budú spočívať v braní do úvahy zmeny množstva krvi v závislosti od zmeny teploty. Kvôli takémuto vylepšeniu sa budeme musieť zaoberať tokom krvi v koži v závislosti od zmeny teploty. Zostrojíme rovnice, ktoré tento jav popisujú. Ak budeme vedieť množstvo krvi tečúcej do koži a odtekajúcej z koži, vieme určiť množstvo krvi v koži. Ďalšie nami odvodené rovnice budú popisovať množstvo krvi v koži v závislosti od veľkosti toku krvi z tepien a veľkosti toku krvi do žíl. Z tohto dôvodu budeme rozlišovať tepnovú a žilovú krv. Ako posledné odvodíme model, ktorý bude popisovať šírenie tepla v koži. V koži rozlišujeme tri zložky, v ktorých sa teplo šíri, a to tkanivo, tepnová krv a žilová krv. Po zostavení matematického modelu sa pokúsime určiť kritickú hodnotu, pri ktorej vzniká popálenina prvého stupňa.

1 Odvodenie modelu

1.1 Odvodenie rovnice vedenia tepla

Podklady ku vytvoreniu tejto kapitoly tvorila práca [11].

Dva základne procesy sú brané do úvahy v prípade pohybu tepelnej energie, vedenie a prúdenie. Vedenie je dôsledkom kolízií susediacich molekúl, pri čom kinetická energia vibrácií jednej molekule je prevedená na najbližšiu molekulu. Preto sa tepelná energia šíri aj keď sa molekuly znateľne nehýbu. Keď sa vibrujúca molekula hýbe z jedného miesta na druhé, tak si berie svoju tepelnú energiu so sebou. Tento druh pohybu tepelnej energie sa vola prúdenie.

Uvažujme tyč s konštantným prierezom s obsahom A orientovanú v smere x (od $x = 0$ po $x = L$). Zavedieme množstvo tepelnej energie za jednotku objemu ako neznámu premennú a budeme ju nazývať hustota tepelnej energie, $e(x, t)$. Predpokladáme, že všetky tepelné veličiny sú konštantné a tyč je jednorozmerná. Najjednoduchšia možnosť ako splniť tento predpoklad je izolovať povrch tyče. Potom energia nemôže uniknúť cez povrch. Závislosť od x a t zodpovedá situácii, že tyč je nerovnomerne zohrievaná. Hustota tepelnej energie sa líši od jedného prierezu k druhému.

Zoberme do úvahy tenkú časť tyče medzi x a $x + \Delta x$. Ak je hustota tepelnej vodivosti konštantná v celom objeme, potom celková energia v časti je súčin hustoty tepelnej energie a objemu. Všeobecne hustota tepelnej energie nie je konštantná, ale keď Δx je dostatočne malé, potom $e(x, t)$ môže byť považované za konštantu v celom objeme, takže

$$\text{tepelná energia} = e(x, t) A \Delta x,$$

keďže objem danej časti je $A \Delta x$.

Tepelná energia medzi x a $x + \Delta x$ sa mení iba z dôvodu tečenia tepelnej energie cez okraje (x a $x + \Delta x$) a generovania tepelnej energie vo vnútri (kladný alebo záporný zdroj.

Žiadna zmena tepelnej energie nie je spôsobená tečením cez povrch, keďže sme predpokladali že povrch je izolovaný. Základný proces tečenia tepla môžeme opísať slovnou rovnicou ako

$$\begin{aligned} & \text{hodnota zmeny} \\ & \text{tepelnej energie v čase} \\ & = \frac{\text{tepelná energia tečúca}}{\text{cez okraje za jednotku času}} + \frac{\text{tepelná energia produkovaná}}{\text{vo vnútri za jednotku času}} \end{aligned}$$

Nazýva sa to zachovanie tepelnej energie. Pre malú časť hodnota zmeny tepelnej energie je

$$\frac{\partial}{\partial t} e(x, t) A \Delta x.$$

Pri tepelnom toku $\phi(x, t)$ budeme hovoriť o množstve tepelnej energie za jednotku času tečúcej doprava za jednotku plochy prierezu. Ak $\phi(x, t) < 0$, tak tepelná energia tečie doľava. Tepelná energia tečúca za jednotku času cez okraje časti je $\phi(x, t)A - \phi(x + \Delta x, t)A$.

Ak $\phi(x, t) > 0$ a $\phi(x + \Delta x, t) > 0$, tak tepelná energia tečúca za jednotku času v x spôsobuje zvýšenie tepelnej energie v danej časti, zatiaľ čo tepelný tok v $x + \Delta x$ znižuje tepelnú energiu.

Označme $Q(x, t)$ tepelnú energiu za jednotku objemu produkovanú za jednotku času. Môže byť spôsobená chemickou reakciou alebo elektrickým zahrievaním. $Q(x, t)$ je približne konštantné v priestore danej tenkej časti, a preto celková tepelná energia produkovaná za jednotku času je približne $Q(x, t) A \Delta x$.

Všetky uvedené funkcie dáme dokopy podľa vzoru rovnice o zachovaní tepelnej energie.

(1.1.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} e(x, t) A \Delta x \approx \phi(x, t)A - \phi(x + \Delta x, t)A + Q(x, t) A \Delta x.$$

Táto rovnica nie je presná, pretože rozličné veličiny boli považované za konštantné v danej malej časti. Môžeme tvrdiť, že rovnica (1.1.1) rastie na presnosti ak $\Delta x \rightarrow 0$, čiže

$$\frac{\partial}{\partial t} e(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x, t) - \phi(x + \Delta x, t)}{\Delta x} + Q(x, t). \quad (1.1.2)$$

Táto rovnica je už presná bez odchýlok, preto môžeme $\approx$ nahradiť $=$. V rovnici (1.1.2) je čas pevný, preto ju môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q. \quad (1.1.3)$$

Väčšinou popisujeme materiály ich teplotou $T(x, t)$ a nie ich hustotou tepelnej energie. Rozlíšiť teplotu a tepelnú energiu nie je triviálna úloha. Iba v polovici 18. storočia existencia presného experimentálneho aparátu umožnila fyzikom rozlíšiť, že na zvýšenie teploty dvoch rozličných materiálov je treba rozličné množstvo tepelnej energie. To si vyžadovalo zavedenie mernej tepelnej kapacity c . Vo všeobecnosti merná tepelná kapacita c závisí od teploty T . Napríklad tepelná energia potrebná na zvýšenie jednotky hmotnosti z 0°C na 1°C môže byť iná ako pri zvýšení z 72°C na 73°C pre rovnakú latku. Úloha tepelného toku s mernou tepelnou kapacitou závislou od teploty je matematicky pomerne náročná. Väčšinou pre ohraničený teplotný interval je merná tepelná kapacita približne nezávislá od teploty. Experimenty ukázali, že rozličné materiály potrebujú rozličné množstvo tepelnej energie na zohriatie. Keďže chceme odvodiť presnú rovnicu aj keď zloženie našej jednorozmernej tyče závisí od pozície, merná tepelná kapacita bude závislá od x , $c = c(x)$. V mnohých prípadoch je tyč vyrobená z jedného materiálu (rovnomerná tyč), vtedy necháme mernú tepelnú kapacitu c konštantnú.

Tepelná energia je tiež definovaná ako energia potrebná na zvýšenie teploty z referenčnej teploty 0° na aktuálnu tepotu $T(x, t)$. Keďže merná tepelná kapacita je nezávislá od teploty, tepelná energia za jednotku množstva je $c(x)T(x, t)$. Potrebujeme zaviesť hustotu $\rho(x)$. Celkové množstvo danej časti je $\rho A \Delta x$. Celková tepelná energia v danej časti je teda

$$e(x, t) A \Delta x = c(x) T(x, t) \rho A \Delta x,$$

čiže vzťah medzi tepelnou energiou a teplotou je

$$e(x, t) = c(x) \rho(x) T(x, t) .$$

Teraz môžeme prepísať rovnicu (1.1.3) do tvaru

$$c(x) \rho(x) \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q. \quad (1.1.4)$$

Fourierov zákon

Potrebuje výraz na závislosť toku tepelnej energie na tepelnej oblasti. Najskôr si zhrňme niektoré vlastnosti tepelného toku

- Keď je konštantná teplota v oblasti, tak netečie žiadna tepelná energia
- Keď sú teplotné rozdiely, tak tepelná energia tečie z teplejšej oblasti do studenšej
- Čím väčší je teplotný rozdiel (pre rovnaký materiál), tým väčší je tok tepelnej energie
- Tok tepelnej energie sa bude líšiť v rozličných materiáloch

Fourier skúmal vlastnosti 1 až 4 a zhrnul ich do vzorca

$$\phi = -K \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1.1.5)$$

nazývaný Fourierov zákon. Hovorí o tom, že tepelný tok je úmerný teplotným diferenciám za jednotku dĺžky. Keď je teplota T vyššia ako je väčšie x (t.j. teplota je vyššia v pravo, $\frac{\partial T}{\partial x} > 0$), potom vieme z vlastností, že tepelná energia tečie doľava, to vysvetľuje znamienko mínus. Koeficient K určuje schopnosť materiálu viesť teplo a volá sa tepelná vodivosť. Experimenty ukázali, že rozličné materiály vedú teplo rozlične. Čím je K väčšie, tým väčší je tok tepelnej energie s rovnakými teplotnými diferenciami. Materiál s nízkou hodnotou K by bol zlý vodič tepelnej energie, čiže by bol dobrý na tepelnú izoláciu. Pre tyč zloženú z rozličných materiálov, K by bola funkcia od x . Pre väčšinu materiálov je schopnosť viesť teplo rozličná

pri rozličných teplotách, čiže $K(x, T)$. Ako v prípade s mernou tepelnou kapacitou c , závislosť od teploty nie je často významná v konkrétnych prípadoch.

Keď Fourierov zákon (1.1.5) použijeme na rovnicu tepelnej energie (1.1.4), dostaneme parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$c(x) \rho(x) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Q. \quad (1.1.6)$$

Zdroj tepla Q máme daný, čiže jediná neznáma je teplota $T(x, t)$. Koeficienty c , ρ , K sú všetky závislé od materiálu, a preto môžu byť funkciami od x . V prípade rovnomernej tyče sú c , ρ , K konštanty a keď je zdroj nulový, tak rovnicu (6) môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1.1.7)$$

kde

$$k = \frac{K}{c\rho}$$

sa nazýva tepelná difúzia. Rovnica (1.1.7) sa nazýva rovnica vedenia tepla, zodpovedá nulovému zdroju a konštantným tepelným vlastnostiam. Ak je na začiatku tepelná energia koncentrovaná na jednom mieste, (1.1.7) popíše ako sa tepelná energia rozšíri, je to fyzikálny jav známi ako difúzia. Iné fyzikálne veličiny sa podobne ako teplota vyrovnávajú skoro rovnakým spôsobom, vyhovujú rovnakej parciálnej diferenciálnej rovnici (1.1.7). Preto sa rovnica (1.1.7) tiež nazýva difúzna rovnica.

Ak zoberieme do úvahy aj prúdenie tepla rýchlosťou u v smere x , tak sa výsledná rovnica vedenia tepla (1.1.6) zmení na tvar

$$c(x) \rho(x) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Q. \quad (1.1.8)$$

1.2 Odvodenie rovnice toku krvi

Tok je určený ako veľkosť objemu, ktorý prejde za čas alebo ako plocha pohybujúca sa rýchlosťou. Teda naša základná rovnica má tvar

$$\phi = A v, \quad (1.2.1)$$

kde A určuje plochu a v rýchlosť. Z Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \Delta p = 0$$

vieme rýchlosť vyjadriť ako

$$v = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

V rovnici (1.2.1) koeficient A hovorí o veľkosti plochy, cez ktorú prúdi krv, čo v našom prípade je plocha časti cievy. Tá má približne tvar valca, čiže

$$A = \Delta y \, 2 \pi R,$$

pričom Δy hovorí o dĺžke danej časti tepny a R je polomer cievy. Ak by A malo takúto hodnotu, znamenalo by to, že tok prechádza cez celú plochu cievy, preto musíme zohľadniť faktor priepustnosti. Označme ho ako k_{priep} . Upravená rovnica (1.2.1) sa zmení na tvar

$$\phi = \Delta y \, 2 \pi R \, k_{priep} \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}. \quad (1.2.2)$$

Niektoré z parametrov sú závislé od zmeny teploty. Čím je väčšia teplota, tým je väčší polomer a tým je aj väčšia priepustnosť. Tieto parametre môžeme namodelovať jednoduchými rovnicami. Pre polomer zvolíme jednoduchú rovnicu

$$R(\Delta T) = R_0 + \beta \Delta T,$$

kde R_0 je polomer pri rovnovážnej teplote, ΔT je rozdiel aktuálnej teploty od rovnovážnej teploty a β je koeficient, ktorý určuje vplyv zmeny teploty. Pre faktor priepustnosti bude rovnica zložitejšia. Musí spĺňať dve podmienky, a to pri nulovom rozdielu teplôt má byť koeficient k_{priep}^0 a pri nekonečne veľkom rozdieli má byť hodnota 1. Tieto podmienky spĺňa rovnica

$$k_{priep}(\Delta T) = k_{priep}^0 + (1 - k_{priep}^0) \frac{\Delta T}{\gamma + \Delta T}. \quad (1.2.3)$$

Ako s posledným sa v rovnici (1.2.2) budeme zaoberať Δp . Tento parameter hovorí o rozdieli tlakov. V prípade, že hovoríme o toku z tepny ide o tlak v tepne a tlak v tkanive.

$$\Delta p = p_a - p_t$$

Tlak v tepne sa dá vyjadriť ako sila pôsobiaca na plochu tepny,

$$p_a = \frac{F_{a0}}{\pi R_a (\Delta T)^2} = \frac{F_{a0}}{\pi R_{a0}^2} \frac{R_{a0}^2}{R_a (\Delta T)^2} = p_{a0} \frac{R_{a0}^2}{R_a (\Delta T)^2}. \quad (1.2.4)$$

Tlak v tkanive p_t závisí od množstva hmoty, ktorá sa v ňom nachádza. Toto množstvo popisujeme parametrami ε^s , ε^a a ε^v . Jednoduchú rovnicu pre tlak v tkanive zvolíme ako

$$p_t = \delta(\varepsilon^s + \varepsilon^a + \varepsilon^v - 1) + p_{t0}, \quad (1.2.5)$$

pričom hodnoty ε^s , ε^a a ε^v sú iba z okolia tepny resp. žily a δ hovorí o vplyve zmeny množstva hmoty. Ak odvodené rovnice (1.2.3), (1.2.4) a (1.2.5) použijeme v rovnici (1.1.2), výsledná rovnica pre tok z tepny bude mať tvar

$$\begin{aligned} \phi_a(\Delta T) = \Delta y \, 2 \, \pi \, (R_{a0} + \beta_a \Delta T) & \left(k_{priep}^{a0} \right. \\ & \left. + (1 - k_{priep}^{a0}) \frac{\Delta T}{\gamma_a + \Delta T} \right) \sqrt{\frac{2 \left(p_{a0} \frac{R_{a0}^2}{(R_{a0} + \beta_a \Delta T)^2} - p_t \right)}{\rho_a}}. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

V prípade, že chceme určiť tok do žily, rovnica sa zmení iba v člene Δp , konkrétne

$$\Delta p = p_t - p_v,$$

pretože tlak v žilách je menší ako v tkanive. Vyjadrenie tlaku p_v sa od tlaku v tepne (1.2.4) nijako nelíši a má tvar

$$p_v = \frac{F_{v0}}{\pi R_v (\Delta T)^2} = \frac{F_{v0}}{\pi R_{v0}^2} \frac{R_{v0}^2}{R_v (\Delta T)^2} = p_{v0} \frac{R_{v0}^2}{R_v (\Delta T)^2}.$$

Tok do žili môžeme teda vypočítať podobne ako v prípade tok z tepny

$$\begin{aligned} \phi_v(\Delta T) = \Delta y \, 2 \, \pi \, (R_{v0} + \beta_v \Delta T) \left(k_{priep}^{v0} \right. \\ \left. + (1 - k_{priep}^{v0}) \frac{\Delta T}{\gamma_v + \Delta T} \right) \sqrt{\frac{2 \left(p_t - p_{v0} \frac{R_{v0}^2}{(R_{v0} + \beta_v \Delta T)^2} \right)}{\rho_v}} \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

1.3 Odvodenie rovníc popisujúcich objem krvi

Hodnoty ε^a a ε^v opisujú množstvo krvi v tkanive. To však nie je konštantné. Čím sme bližšie k pokožke, tým je okysličenej (tepnovej) krvi menej, v prípade odkysličenej (žilovej) krvi to je naopak. Čím sme bližšie k pokožke, tým je odkysličenej (žilovej) krvi viac. Zároveň by sme chceli zachytiť fakt, že okysličená krv sa premieňa na neokysličenú. Označme objem žilovej krvi ako

$$V_a = \int_x^{x+\Delta x} \varepsilon^a(x, t) dx.$$

Zaujímá nás zmena objemu v čase, čiže

$$\frac{\partial V_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} \varepsilon^a(x, t) dx.$$

Táto zmena je spôsobená rozdielom pritečenej a odtčenej krvi v oblasti od x po $x + \Delta x$, čo je vlastne rozdiel tokov na hraniciach a spomínanou premenou krvi. Teda

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} \varepsilon^a(x, t) dx = \phi_a(x, t) - \phi_a(x + \Delta x, t) - \alpha V_a$$

$$\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^a(x, t) dx = \int_x^{x+\Delta x} -\frac{\partial}{\partial x} \phi_a(x, t) dx - \int_x^{x+\Delta x} \frac{\alpha V_a}{\Delta x} dx.$$

$$\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^a(x, t) dx + \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} \phi_a(x, t) dx + \int_x^{x+\Delta x} \frac{\alpha V_a}{\Delta x} dx = 0$$

$$\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^a(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_a(x, t) + \frac{\alpha V_a}{\Delta x} dx = 0$$

Integrál je rovný nule práve vtedy, keď integrovaná funkcia je rovná nule, čo znamená, že

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^a(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \phi_a(x, t) + \frac{\alpha V_a}{\Delta x} = 0.$$

Premenu krvi vieme aproximovať

$$\frac{V_a}{\Delta x} \approx \frac{\partial V_a}{\partial x} = \varepsilon^a(x, t).$$

Na tok $\phi_a(x, t)$ použijeme Fickovým a Fourierovým zákonom. Potom bude tok vyzeráť ako

$$\phi_a(x, t) = u^a \varepsilon^a(x, t) - k_a \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^a(x, t)$$

Konečná rovnica pre zmenu objemu okysličenej krvi má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^a + u^a \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^a = k_a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon^a - \alpha \varepsilon^a. \quad (1.3.1)$$

Pre jednoznačnosť rovnice potrebujeme dve okrajové podmienky. Podmienky určíme ako zmeny ε^a na okrajoch. Na okraji pri pokožke tepnová krv nikam neuniká, čo znamená, že podmienka má tvar

$$\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^a(Z) = 0. \quad (1.3.2)$$

Na druhom okraji zase priteká tepnová krv z tepny, preto bude mať podmienka tvar

$$\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^a(0) = -\frac{1}{k_a} \phi_a. \quad (1.3.3)$$

Rovnakým spôsobom vieme odvodiť rovnicu pre žilovú krv. Pri žilovej krvi sú dva rozdiely, a to krv tečie opačným smerom a jej objem sa zväčšuje o premenenú krv. Tvar výslednej rovnice je

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^v - u^v \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^v = k_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon^v + \alpha \varepsilon^v. \quad (1.3.4)$$

Okrajové podmienky pre žilovú krv (1.3.4) sú veľmi podobné ako pre tepnovú krv (1.3.1), ktorú opisujú rovnice (1.3.2) a (1.3.3). Cez pokožku žiadna žilová krv neuniká. Rozdiel je v tom, že žilová krv nepriteká, ale odteká. Okrajové podmienky potom budú vyzeráť

$$\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^v(Z) = 0 \quad (1.3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^v(0) = \frac{1}{k_v} \phi_v \quad (1.3.6)$$

1.3.1 Rovnovážny stav

V našom prípade nás vždy bude zaujímať rovnovážny stav objemov oboch typov krvi. Rovnovážny stav nastáva práve vtedy, keď zmena objemu v čase je nulová $\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon = 0$. Naše rovnice (1.3.1) a (1.3.4) sa zmenia na sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc

$$k_v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon^v + \alpha \varepsilon^a + u^v \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^v = 0 \quad (1.3.7)$$

$$k_a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon^a - \alpha \varepsilon^a - u^a \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^a = 0, \quad (1.3.8)$$

s okrajovými podmienkami

$$\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^v(Z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^v(0) = \frac{1}{k_v} \phi_v$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^a(Z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon^a(0) = -\frac{1}{k_a} \phi_a.$$

Budeme predpokladať, že rýchlosť tečenia v prípade tepnovej a žilovej krvi bude rovnaká, čiže

$$u^a = u^v = u$$

Ideme hľadať riešenie tejto sústavy. Najskôr si ju prepíšeme do maticového tvaru

$$\vec{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} \varepsilon^v \\ \varepsilon^{v'} \\ \varepsilon^a \\ \varepsilon^{a'} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{u}{k_v} & -\frac{\alpha}{k_v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{k_a} & \frac{u}{k_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^v \\ \varepsilon^{v'} \\ \varepsilon^a \\ \varepsilon^{a'} \end{pmatrix}. \quad (1.3.9)$$

Potrebuje nájsť vlastné hodnoty a vlastné vektory pre systém (1.3.9). Čiže musíme vyriešiť

$$\det|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{u}{k_v} - \lambda & -\frac{\alpha}{k_v} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{k_a} & \frac{u}{k_a} - \lambda \end{vmatrix} &= -\lambda \det \begin{vmatrix} -\frac{u}{k_v} - \lambda & -\frac{\alpha}{k_v} & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{\alpha}{k_a} & \frac{u}{k_a} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \left(-\lambda - \frac{u}{k_v} \right) \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{\alpha}{k_a} & \frac{u}{k_a} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left(-\lambda - \frac{u}{k_v} \right) \left(\lambda^2 - \lambda \frac{u}{k_a} - \frac{\alpha}{k_a} \right) = 0 \end{aligned}$$

Vlastné čísla potom sú

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{u}{k_v}$$

$$\lambda_{3,4} = \begin{cases} \frac{1}{2k_a} \left(u + \sqrt{u^2 + 4\alpha k_a} \right) \\ \frac{1}{2k_a} \left(u - \sqrt{u^2 + 4\alpha k_a} \right) \end{cases}$$

Vypočítať vlastné vektory k prvým dvom vlastným číslam je triviálne

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{u}{k_v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pri ďalších dvoch vlastných vektoroch nebudeme používať presné hodnoty vlastných čísel, ale iba označenie λ_3 resp. λ_4 .

$$\begin{pmatrix} -\lambda_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 - \frac{u}{k_v} & -\frac{\alpha}{k_v} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{k_a} & \frac{u}{k_a} - \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \lambda_3 x_1 \quad (1.3.10)$$

$$x_4 = \lambda_3 x_3 \quad (1.3.11)$$

$$\left(-\lambda_3 - \frac{u}{k_v}\right) \lambda_3 x_1 - \frac{\alpha}{k_v} x_3 = 0 \quad /k_v$$

$$\frac{\alpha}{k_a} x_3 + \left(\frac{u}{k_a} - \lambda_3\right) \lambda_3 x_3 = 0 \quad /k_a$$

$$(-\lambda_3 k_v - u) \lambda_3 x_1 - \alpha x_3 = 0 \quad (1.3.12)$$

$$\alpha x_3 + (u - \lambda_3 k_a) \lambda_3 x_3 = 0 \Rightarrow x_3 (\alpha + u \lambda_3 - \lambda_3^2 k_a) = 0$$

Výraz v zátvorke je rovný nule, pretože $\lambda_3 = \frac{1}{2k_a} (u + \sqrt{u^2 + 4\alpha k_a})$, čiže x_3 môže byť ľubovoľne číslo, zvolíme $x_3 = 1$, potom z (1.3.10), (1.3.11) a (1.3.12) dostanem

$$x_1 = -\frac{\alpha}{\lambda_3(u + k_v \lambda_3)}$$

$$x_2 = -\frac{\alpha}{(u + k_v \lambda_3)}$$

$$x_4 = \lambda_3.$$

Vlastné vektory pre vlastné čísla λ_3 a λ_4 majú tvar

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\lambda_3(u + k_v\lambda_3)} \\ \frac{\alpha}{(u + k_v\lambda_3)} \\ 1 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\lambda_4(u + k_v\lambda_4)} \\ \frac{\alpha}{(u + k_v\lambda_4)} \\ 1 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Teraz vieme napísať riešenie pre $\vec{\varepsilon}(x)$, to má tvar

$$\vec{\varepsilon}(x) = Av_1e^{\lambda_1x} + Bv_2e^{\lambda_2x} + Cv_3e^{\lambda_3x} + Dv_4e^{\lambda_4x}.$$

Na vypočítanie koeficientov A, B, C a D použijeme okrajové podmienky (1.3.2), (1.3.3), (1.3.5) a (1.3.6). Tie majú teraz tvar

$$\vec{\varepsilon}(0) = \begin{pmatrix} N_1 \\ \frac{1}{k_v}\phi_v \\ N_2 \\ -\frac{1}{k_a}\phi_a \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon}(Z) = \begin{pmatrix} N_3 \\ 0 \\ N_4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pričom hodnoty N_i sú pre nás neznáme.

Dostávame štyri rovnice o troch neznámých

$$B\frac{u}{k_v} - C\frac{\alpha}{(u + k_v\lambda_3)} - D\frac{\alpha}{(u + k_v\lambda_4)} = \frac{1}{k_v}\phi_v \quad (1.3.13)$$

$$C\lambda_3 + D\lambda_4 = -\frac{1}{k_a}\phi_a \quad (1.3.14)$$

$$B\frac{u}{k_v}e^{-\frac{u}{k_v}Z} - C\frac{\alpha}{(u + k_v\lambda_3)}e^{\lambda_3Z} - D\frac{\alpha}{(u + k_v\lambda_4)}e^{\lambda_4Z} = 0 \quad (1.3.15)$$

$$C\lambda_3 e^{\lambda_3 Z} + D\lambda_4 e^{\lambda_4 Z} = 0 \quad (1.3.16)$$

Z rovnice (1.3.16) dostávame, že

$$C = -D \frac{\lambda_4}{\lambda_3} e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}.$$

Použitím rovnice (1.3.14) nám vyjde, že

$$D = -\frac{1}{k_a \lambda_4} \frac{1}{1 - e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}} \phi_a \quad (1.3.17)$$

$$C = \frac{1}{k_a \lambda_3} \frac{e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}}{1 - e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}} \phi_a \quad (1.3.18)$$

Koeficient B dopočítame z rovnice (1.3.15)

$$B = \frac{k_v}{u} e^{\frac{u}{k_v} Z} \left(C \frac{\alpha}{(u + k_v \lambda_3)} e^{\lambda_3 Z} + D \frac{\alpha}{(u + k_v \lambda_4)} e^{\lambda_4 Z} \right),$$

do ktorej dosadíme vypočítané koeficienty (1.3.18) a (1.3.19). Po úpravách dostaneme

$$B = \frac{k_v}{k_a} \left(\frac{k_v + k_a}{u^2(k_v + k_a) - \alpha k_v^2} \right) \sqrt{u^2 + 4\alpha k_a} \frac{e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}}{1 - e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}} \phi_a.$$

Z poslednej rovnice (1.3.13) dostaneme podmienku na rýchlosť toku krvi, aby bol splnený rovnovážny stav.

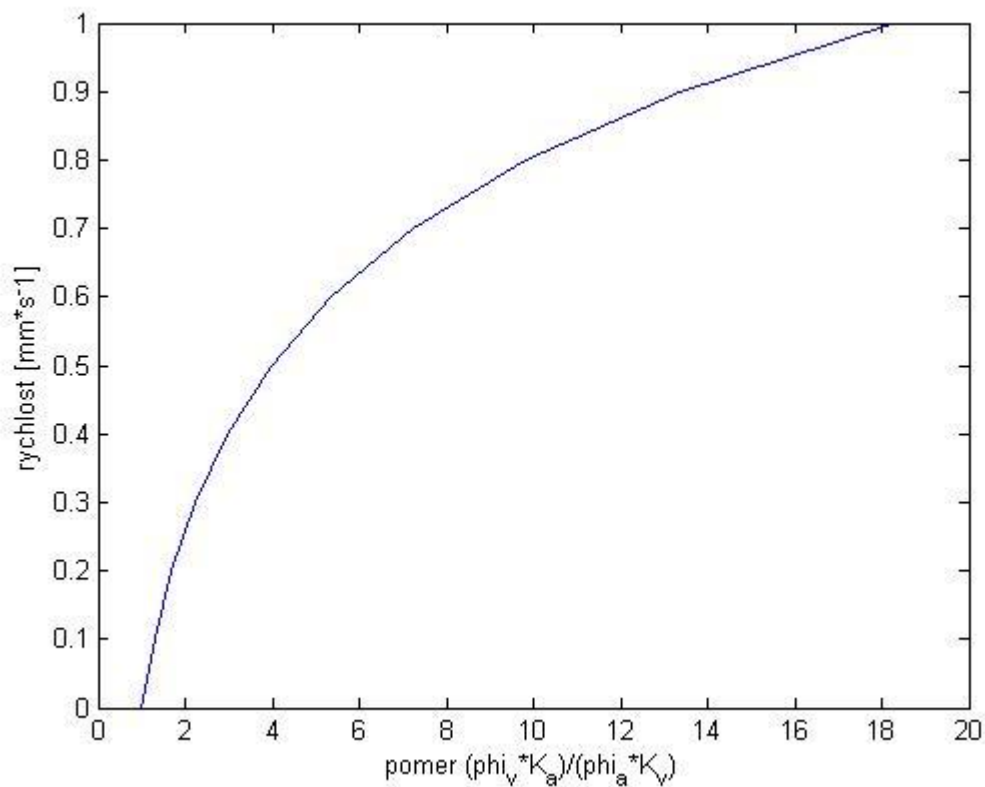
$$\begin{aligned} & \frac{u}{k_v} \frac{k_v}{k_a} \left(\frac{k_v + k_a}{u^2(k_v + k_a) - \alpha k_v^2} \right) \sqrt{u^2 + 4\alpha k_a} \frac{e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}}{1 - e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}} \phi_a \\ & - \frac{\alpha}{(u + k_v \lambda_3)} \frac{1}{k_a \lambda_3} \frac{e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}}{1 - e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}} \phi_a + \frac{\alpha}{(u + k_v \lambda_4)} \frac{1}{k_a \lambda_4} \frac{1}{1 - e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}} \phi_a \\ & = \frac{1}{k_v} \phi_v \end{aligned}$$

$$u \left(\frac{k_v + k_a}{u^2(k_v + k_a) - \alpha k_v^2} \right) \sqrt{u^2 + 4\alpha k_a} \frac{e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}}{1 - e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}} - \frac{\alpha}{(u + k_v \lambda_3)} \frac{1}{\lambda_3} \frac{e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}}{1 - e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}} + \frac{\alpha}{(u + k_v \lambda_4)} \frac{1}{\lambda_4} \frac{1}{1 - e^{(\lambda_4 - \lambda_3)Z}} = \frac{k_a}{k_v} \frac{\phi_v}{\phi_a}$$

Dostali sme $f(u) = \frac{k_a}{k_v} \frac{\phi_v}{\phi_a}$. Hodnotu $\frac{k_a}{k_v} \frac{\phi_v}{\phi_a}$ je pre nás známa. Potom môžeme rýchlosť vypočítať ako

$$u = f^{-1} \left(\frac{k_a}{k_v} \frac{\phi_v}{\phi_a} \right).$$

Funkcia $f^{-1} \left(\frac{k_a}{k_v} \frac{\phi_v}{\phi_a} \right)$ má nasledujúci graf



Graf funkcie f^{-1}

1.4 Odvodenie rovníc popisujúcich šírenie tepla v koži

Podklady na celú kapitolu spolu s podkapitolami boli čerpané z prác [2], [3],[4], [5], [16].

Z anatomického hľadiska sa tkanivá skladajú z troch častí. Konkrétne bunky, cievy a interstícium (vmedzerené tkanivo, riedke spojivo tkanív a orgánov, v ktorom prebiehajú nervy a cievy). Interstícium sa ďalej rozdeľuje na medzibunkovú hmotu a tkanivový mok. Kvôli zjednodušeniu budeme rozlišovať iba dve charakteristické oblasti, a to cievnu oblasť a mimocievnu oblasť (bunky a interstícium). Zároveň budeme považovať celú anatomickú konštrukciu za tekutinou nasýtené porózne prostredie, cez ktoré preniká krv. Mimocievna oblasť je považovaná za pevné tkanivo (aj keď obsahuje tkanivový mok) a budeme o nej hovoriť ako o *tkanive*, o druhej budeme hovoriť ako o *krvi*, tú rozdelíme na dve časti, okysličenú a odkysličenú krv.

1.4.1 Objemový priemer v poróznom prostredí

Použijeme princíp tečenia tepla a kvapaliny v tekutinou nasýtenom poróznom prostredí na odvodenie rovníc so objemovým priemerom pre prenos tepla a tok krvi. Uvažujeme pomocný objem V v danom prostredí, ktorého objem je z makroskopického pohľadu veľmi malý a súčasne z mikroskopického pohľadu dosť veľký. Potom môžeme stredný objem premennej ϕ zadefinovať ako

$$\langle \phi \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \phi dV.$$

Zadefinujme aj vnútorný priemer

$$\langle \phi \rangle^a \equiv \frac{1}{V_a} \int_{V_a} \phi dV,$$

kde V_a je objem, ktorý zaberá okysličená krv. Vzťah medzi týmito objemmi určuje lokálna porozita ε_a

$$\langle \phi \rangle = \varepsilon^a \langle \phi \rangle^a,$$

pričom

$$\varepsilon^a(x) = \frac{1}{V} \int_V a(x) dV = \frac{V_a}{V},$$

kde $a(x)$ je

$$a(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ je v odkysličenej krvi} \\ 0 & x \text{ je v tkanive} \end{cases}.$$

Rovnaký vnútorný priemer platí aj pre odkysličenú krv a tkanivo.

Premennú ϕ môžeme rozložiť na dve zložky, jej priemer a odchylku $\tilde{\phi}$ od priemeru v bode x

$$\phi = \langle \phi \rangle + \tilde{\phi}.$$

Je zrejmé, že

$$\langle \tilde{\phi} \rangle = 0.$$

Neskôr využijeme nasledujúce vzťahy

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \phi_2 \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \phi_1 \phi_2 dV = \frac{1}{V} \int_V (\langle \phi_1 \rangle + \tilde{\phi}_1)(\langle \phi_2 \rangle + \tilde{\phi}_2) dV \\ &= \frac{1}{V} \int_V \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle + \langle \phi_1 \rangle \tilde{\phi}_2 + \langle \phi_2 \rangle \tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2 dV = \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle + \langle \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2 \rangle, \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle + \langle \tilde{\phi}_1 \tilde{\phi}_2 \rangle, \quad (1.4.2)$$

$$\langle \nabla \phi \rangle = \nabla \langle \phi \rangle + \frac{1}{V} \int_A \phi \mathbf{n} dA, \quad (1.4.3)$$

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial t}, \quad (1.4.4)$$

kde A je lokálne rozhranie medzi krvou a tkanivom a $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor kolmý na A .

1.4.2 Použitie objemového priemeru

Na popis šírenia sa tepla v koži budeme potrebovať parciálne diferenciálne rovnice podobné tým, ktoré sme odvodili (1.1.7) a (1.1.8)

$$c^s(z) \rho^s(z) \frac{\partial T^s}{\partial t} = \nabla(K^s(z) \nabla T^s) + Q, \quad (1.4.5)$$

$$c^a \rho^a \left(\frac{\partial T^a}{\partial t} + u^a \frac{\partial T^a}{\partial z} \right) = \nabla(K^a \nabla T^a), \quad (1.4.6)$$

$$c^v \rho^v \left(\frac{\partial T^v}{\partial t} - u^v \frac{\partial T^v}{\partial z} \right) = \nabla(K^v \nabla T^v). \quad (1.4.7)$$

Prvá rovnica popisuje šírenie tepla v tkanive. koža sa skladá z rozličných vrstiev, preto sú koeficienty c , ρ , K funkcie závislé od x . Bunky pri spracovaní živín produkujú energiu, preto je zdroj tepla Q nenulový. Ďalšie dve rovnice popisujú šírenie tepla v krvi. Prvá z nich opisuje okysličenú (tepnová) krv, druhá odkysličenú (žilovú) krv. Rýchlosť u sa šíri iba v smere z .

Na tieto rovnice (1.4.5), (1.4.6) a (1.4.7) aplikujeme stredný objem. Dostaneme:

$$\frac{1}{V} \int_V c^s(x) \rho^s(x) \frac{\partial T^s}{\partial t} dV = \frac{1}{V} \int_V \nabla(K^s(z) \nabla T^s) + Q dV \quad (1.4.8)$$

$$\frac{1}{V} \int_V c^a \rho^a \left(\frac{\partial T^a}{\partial t} + u^a \nabla T^a \right) dV = \frac{1}{V} \int_V \nabla(K^a \nabla T^a) dV \quad (1.4.9)$$

$$\frac{1}{V} \int_V c^v \rho^v \left(\frac{\partial T^v}{\partial t} - u^v \nabla T^v \right) dV = \frac{1}{V} \int_V \nabla(K^v \nabla T^v) dV \quad (1.4.10)$$

Použitím vzťahov (1.4.1) až (1.4.4) upravíme postupne rovnicu (1.4.8). Začneme s ľavou stranou.

$$\frac{1}{V} \int_V c^s(z) \rho^s(z) \frac{\partial T^s}{\partial t} dV = c^s(z) \rho^s(z) \frac{\partial \langle T^s \rangle}{\partial t} = \varepsilon^s c^s(z) \rho^s(z) \frac{\partial \langle T^s \rangle^s}{\partial t}$$

Pravá strana bude komplikovanejšia.

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_V \nabla(K^s(z) \nabla T^s) dV &= \nabla \langle K^s(z) \nabla T^s \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_s} K^s(z) \nabla T^s \mathbf{n} dA_s \\ &= \nabla \left(K^s(z) \nabla \langle T^s \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_s} K^s(z) T^s \mathbf{n} dA_s \right) + \frac{1}{V} \int_{A_s} K^s(z) \nabla T^s \mathbf{n} dA_s \\ &= \nabla \left(\varepsilon^s K^s(z) \nabla \langle T^s \rangle^s + \frac{1}{V} \int_{A_s} K^s(z) T^s \mathbf{n} dA_s \right) + \frac{1}{V} \int_{A_s} K^s(z) \nabla T^s \mathbf{n} dA_s \end{aligned}$$

Tepelný zdroj sa zmení iba na tvar

$$\frac{1}{V} \int_V Q dV = \varepsilon^s Q.$$

Celá upravená rovnica (1.4.8) bude teda vyzeráť nasledovne

$$\begin{aligned} \varepsilon^s c^s(z) \rho^s(z) \frac{\partial \langle T^s \rangle^s}{\partial t} \\ = \nabla \left(\varepsilon^s K^s(z) \nabla \langle T^s \rangle^s + \frac{1}{V} \int_{A_s} K^s(z) T^s \mathbf{n} dA \right) + \frac{1}{V} \int_{A_s} K^s(z) \nabla T^s \mathbf{n} dA + \varepsilon^s Q. \end{aligned}$$

V ďalšom texte budeme označovať $\langle T^s \rangle^s$ iba ako $\langle T \rangle^s$.

Podme sa bližšie pozrieť na členy ktoré sa doteraz nevyskytovali v rovnici (1.4.8), konkrétne druhý a tretí člen. Prvý z dvojice možno považovať za difúzny tok tepla vyvolený miestnymi zmenami teploty krvi. Tento vplyv je minimálny, preto ho môžeme zakomponovať do tepelnej vodivosti K^s , podobne ako to spravili Xuan a Roetzel [2]. Druhý člen znázorňuje

výmenu tepla cez rozhranie medzi tkanivom a krvou. Keďže v našom prípade uvažujeme o dvoch typoch krvi musíme aj integrál rozdeliť na dva. V prvom interaguje tkanivo s tepnovou krvou cez ich spoločný povrch A_{sa} a v druhom so žilovou krvou cez ich spoločný povrch A_{sv} .

$$\frac{1}{V} \int_{A_s} K^s(z) \nabla T^s \mathbf{n} dA = \frac{1}{V} \int_{A_{sa}} K^s(z) \nabla T^s \mathbf{n} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{sv}} K^s(z) \nabla T^s \mathbf{n} dA$$

Z Newtonovho zákona o chladení ho vieme prepísať $K^s(z) \nabla T^s$ na $h_{sa}(\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^s)$ resp. $h_{sv}(\langle T \rangle^v - \langle T \rangle^s)$, kde koeficienty h_{sa} a h_{sv} určujú výmenu tepla cez rozhranie. Prvý integrál sa nám zmení na

$$\frac{1}{V} \int_{A_{sa}} K^s(z) \nabla T^s \mathbf{n} dA = h_{sa}(\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^s) \frac{1}{V} \int_{A_{sa}} \mathbf{n} dA = h_{sa}(\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^s) \frac{|A_{sa}|}{V}.$$

Rovnako sa zmení aj druhý integrál

$$\frac{1}{V} \int_{A_{sv}} K^s(z) \nabla T^s \mathbf{n} dA = h_{sv}(\langle T \rangle^v - \langle T \rangle^s) \frac{1}{V} \int_{A_{sv}} \mathbf{n} dA = h_{sv}(\langle T \rangle^v - \langle T \rangle^s) \frac{|A_{sv}|}{V}.$$

Hodnotu $\frac{|A_{sa}|}{V}$ resp. $\frac{|A_{sv}|}{V}$ si označíme ako a_a resp. a_v . Tieto koeficienty sa nazývajú špecifický povrch. V tejto práci budeme používať $a_a = \varepsilon^a \varepsilon^s$ resp. $a_v = \varepsilon^v \varepsilon^s$. Nakoniec môžeme výmenu tepla cez rozhranie napísať ako

$$\frac{1}{V} \int_{A_s} K^s(z) \nabla T^s \mathbf{n} dA = a_a h_{sa}(\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^s) + a_v h_{sv}(\langle T \rangle^v - \langle T \rangle^s).$$

Výsledná rovnica pre tkanivo má teda tvar

$$\varepsilon^s c^s(z) \rho^s(z) \frac{\partial \langle T \rangle^s}{\partial t} = \nabla \varepsilon^s K^s(z) \nabla \langle T \rangle^s + a_a h_{sa}(\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^s) + a_v h_{sv}(\langle T \rangle^v - \langle T \rangle^s) + \varepsilon^s Q \quad (1.4.11)$$

Rovnako upravíme rovnicu (1.4.9). Vidíme, že od rovnice (1.4.8) sa líši iba v člene $c^a \rho^a u^a \nabla T^a$, preto sa budem teraz zaoberať ním.

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_V c^a \rho^a u^a \nabla T^a dV &= c^a \rho^a \varepsilon^a \nabla \langle u^a T^a \rangle^a + \frac{1}{V} \int_{A_a} c^a \rho^a u^a T^a \mathbf{n} dA_a \\ &= c^a \rho^a \varepsilon^a \nabla \langle u^a \rangle^a \langle T^a \rangle^a + c^a \rho^a \varepsilon^a \nabla \langle \tilde{u}^a \tilde{T}^a \rangle^a + \frac{1}{V} \int_{A_a} c^a \rho^a u^a T^a \mathbf{n} dA_a \end{aligned}$$

Aj v tomto prípade budeme $\langle T^a \rangle^a$ označovať ako $\langle T \rangle^a$.

Opäť sa pozrieme bližšie na druhý a tretí člen. Prvý z nich $c^a \rho^a \varepsilon^a \langle \tilde{u} \tilde{T} \rangle^a$ určuje difúzny tok. Naň aplikujeme Prvý Fickov zákon (hypotéza difúzie gradientu). Potom dostaneme, že

$$-c^a \rho^a \varepsilon^a \langle \tilde{u} \tilde{T} \rangle^a = \varepsilon^a k_{dis_a} \nabla \langle T \rangle^a$$

V disperzii tepelnej vodivosti k_{dis} sú zahrnuté koeficienty c^a , ρ^a a difúzny koeficient. V konečnej rovnici bude koeficient k_{dis_a} zahrnutý v koeficiente K^a . Druhý člen opisuje výmenu kvapaliny medzi krvou a okolitým tkanivom. Straty kvapaliny v cievnej oblasti sú nahrádzané tokom tekutín z mimocievnej oblasti a lymfou z tkaniva. Je dobrý predpoklad, že tekutiny v mimocievnej oblasti a lymfa z tkaniva ma rovnakú teplotu ako samotné tkanivo. Potom predpokladáme, že táto výmena je vo výške $\omega \left[\frac{m^3}{s m^3} \right]$ a môžeme ju opísať ako

$$\frac{1}{V} \int_{A_a} c^a \rho^a u^a T^a \mathbf{n} dA_a = c^a \rho^a \omega (\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^s).$$

Teda výsledná rovnica má tvar

$$\begin{aligned} \varepsilon^a c^a \rho^a \left(\frac{\partial \langle T \rangle^a}{\partial t} + u^a \nabla \langle T \rangle^a \right) \\ = \nabla \varepsilon^a (K^a \nabla \langle T \rangle^a + k_{dis_a} \nabla \langle T \rangle^a) + a_a h_{as} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^a) \\ + c^a \rho^a \omega (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^a). \end{aligned}$$

Ako sme povedali vyššie k_{dis_a} zahrnieme do jedného K^a . Rovnako zahrnieme $c^a \rho^a \omega$ do $a_a h_{as}$. V tomto prípade dostávame rovnicu

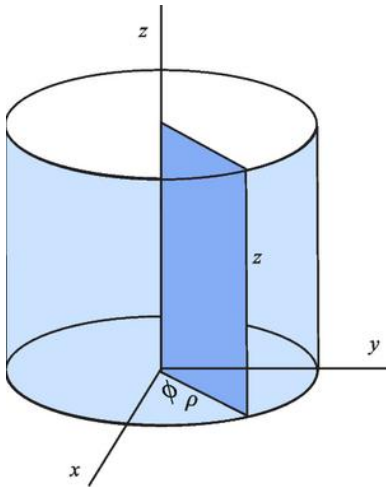
$$\varepsilon^a c^a \rho^a \left(\frac{\partial \langle T \rangle^a}{\partial t} + u^a \nabla \langle T \rangle^a \right) = \nabla \varepsilon^a K^a \nabla \langle T \rangle^a + a_a h_{as} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^a). \quad (1.4.12)$$

Rovnakým spôsobom sme schopný odvodiť rovnicu pre šírenie tepla v žilovej krvi (1.4.10) a dostali by sme

$$\varepsilon^v c^v \rho^v \left(\frac{\partial \langle T \rangle^v}{\partial t} - u^v \nabla \langle T \rangle^v \right) = \nabla \varepsilon^v K^v \nabla \langle T \rangle^v + a_v h_{vs} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^v). \quad (1.4.13)$$

Výsledná sústava parciálnych diferenciálnych rovníc má tvar

$$\begin{aligned} \varepsilon^s c^s(z) \rho^s(z) \frac{\partial \langle T \rangle^s}{\partial t} &= \nabla \varepsilon^s K^s(z) \nabla \langle T \rangle^s + a_a h_{sa} (\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^s) + a_v h_{sv} (\langle T \rangle^v - \langle T \rangle^s) + \varepsilon^s Q \\ \varepsilon^a c^a \rho^a \left(\frac{\partial \langle T \rangle^a}{\partial t} + u^a \nabla \langle T \rangle^a \right) &= \nabla \varepsilon^a K^a \nabla \langle T \rangle^a + a_a h_{as} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^a) \\ \varepsilon^v c^v \rho^v \left(\frac{\partial \langle T \rangle^v}{\partial t} - u^v \nabla \langle T \rangle^v \right) &= \nabla \varepsilon^v K^v \nabla \langle T \rangle^v + a_v h_{vs} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^v). \end{aligned} \quad (1.4.14)$$



Tento systém budeme riešiť v cylindrickej súradnicovej sústave s predpokladom radiálnej symetrie. To znamená, že v sústava (r, φ, z) je nezávislá od uhlu φ a stačí nám riešiť model v sústave (r, z) . Plocha, ktorá je na obrázku zobrazená tmavšou farbou, je doména, na ktorej budeme počítat šírenie tepla.

Obrázok 3.: Cylindrický súradnicový systém [17]

1.4.3 Okrajové podmienky

Aby sme dostali jednoznačné riešenie, potrebujeme pre každú z uvedených rovníc okrajové podmienky. Tie zvolíme jednoduché a pre náš model postačujúce. Tkanivo má na povrchu kože nemennú teplotu zodpovedajúcu teplote okolia, ktorá sa dá opísať Dirichletovou okrajovou podmienkou

$$\langle T \rangle^s(r, 0) = 33^\circ\text{C}.$$

Na druhom okraji má tok tepla veľkosť podľa toho, aký veľký je rozdiel medzi aktuálnou a rovnovážnou teplotou. Čím je rozdiel väčší, tým väčší je tok. Takáto podmienka sa nazýva Newtonov zákon chladenia a má tvar

$$\frac{\langle T \rangle^s(r, Z)}{\partial Z} = -\kappa_s(\langle T \rangle^s(r, Z) - \langle T \rangle_0^s).$$

V radiálnom smere sú podmienky jednoduchšie. Pre $r = 0$ sa zvykne používať podmienka

$$\frac{\langle T \rangle^s(0, z)}{\partial r} = 0.$$

Keďže veľkosť našej domény si môžeme zvoliť ľubovoľnú, zvolíme si ju dostatočne veľkú na to, aby sa teplo na jej kraji nemenilo. Potom okrajová podmienka bude konštantná

$$\langle T \rangle^s(R, z) = \langle T \rangle_0^s(z).$$

Tepnová a žilová krv majú podobné podmienky. Rozdiel nastáva pri z-tovej súradnici. Teplo krvi neuniká z kože a na opačnej strane prichádza stále rovnakej teploty v prípade tepnovej krvi., ale keď hovoríme o žilovej krvi okrajová podmienka má tiež tvar Newtonovho zákona chladenia.

$$\langle T \rangle^a(r, Z) = 37,5^\circ\text{C}$$

$$\frac{\langle T \rangle^v(r, Z)}{\partial Z} = -\kappa_v(\langle T \rangle^v(r, Z) - \langle T \rangle_0^v)$$

$$\frac{\langle T \rangle^a(r, 0)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\langle T \rangle^v(r, 0)}{\partial z} = 0$$

Pre radiálnu súradnicu sú potom podmienky rovnaké ako v prípade tkaniva

$$\frac{\langle T \rangle^a(0, z)}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\langle T \rangle^v(0, z)}{\partial r} = 0$$

$$\langle T \rangle^a(R, z) = \langle T \rangle_0^a(z)$$

$$\langle T \rangle^v(R, z) = \langle T \rangle_0^s(z)$$

1.5 Konečná forma matematického modelu

Odvodili sme vzťahy, ktoré popisujú správanie sa toku krvi a krvi samotnej v závislosti od zmeny teploty a teploty tkaniva a krvi. Celý model teda vyzerá nasledovne:

Rovnice popisujúce tok tepnovej a žilovej krvi

$$\phi_a(\Delta T) = \Delta y \, 2 \, \pi \, (R_{a0} + \beta_a \Delta T) \left(k_{priepr}^{a0} + (1 - k_{priepr}^{a0}) \frac{\Delta T}{\gamma_a + \Delta T} \right) \sqrt{\frac{2 \left(p_{a0} \frac{R_{a0}^2}{(R_{a0} + \beta_a \Delta T)^2} - p_t \right)}{\rho_a}}$$

$$\phi_v(\Delta T) = \Delta y \, 2 \, \pi \, (R_{v0} + \beta_v \Delta T) \left(k_{priepr}^{v0} + (1 - k_{priepr}^{v0}) \frac{\Delta T}{\gamma_v + \Delta T} \right) \sqrt{\frac{2 \left(p_t - p_{v0} \frac{R_{v0}^2}{(R_{v0} + \beta_v \Delta T)^2} \right)}{\rho_v}}$$

Určenie rýchlosti krvi

$$u = f^{-1} \left(\frac{k_a}{k_v} \frac{\phi_v}{\phi_a} \right)$$

Rovnice popisujúce objem krvi

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^a + u \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon^a = k_a \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon^a - \alpha \varepsilon^a$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^v - u \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon^v = k_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon^v + \alpha \varepsilon^a$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \varepsilon^v(Z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \varepsilon^v(0) = \frac{1}{k_v} \phi_v$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \varepsilon^a(Z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \varepsilon^a(0) = -\frac{1}{k_a} \phi_a$$

Rovnice popisujúce šírenie tepla v koži

$$\varepsilon^s c^s(z) \rho^s(z) \frac{\partial \langle T \rangle^s}{\partial t} = \nabla \varepsilon^s K^s(z) \nabla \langle T \rangle^s + a_a h_{sa} (\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^s) + a_v h_{sv} (\langle T \rangle^v - \langle T \rangle^s) + \varepsilon^s Q$$

$$\varepsilon^a c^a \rho^a \left(\frac{\partial \langle T \rangle^a}{\partial t} + u^a \nabla \langle T \rangle^a \right) = \nabla \varepsilon^a K^a \nabla \langle T \rangle^a + a_a h_{as} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^a)$$

$$\varepsilon^v c^v \rho^v \left(\frac{\partial \langle T \rangle^v}{\partial t} - u^v \nabla \langle T \rangle^v \right) = \nabla \varepsilon^v K^v \nabla \langle T \rangle^v + a_v h_{vs} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^v)$$

$$\langle T \rangle^s(p, 0) = 33^\circ\text{C} \quad \frac{\langle T \rangle^s(p, Z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\langle T \rangle^s(0, z)}{\partial p} = 0 \quad \langle T \rangle^s(P, z) = \langle T \rangle_0^s(z)$$

$$\frac{\langle T \rangle^a(p, 0)}{\partial z} = 0 \quad \langle T \rangle^a(p, Z) = 37,5^\circ\text{C}$$

$$\frac{\langle T \rangle^a(0, z)}{\partial p} = 0 \quad \langle T \rangle^a(P, z) = \langle T \rangle_0^a(z)$$

$$\frac{\langle T \rangle^v(p, 0)}{\partial z} = 0 \quad \langle T \rangle^v(p, Z) = 37,5^\circ\text{C}$$

$$\frac{\langle T \rangle^v(0, z)}{\partial p} = 0 \quad \langle T \rangle^v(P, z) = \langle T \rangle_0^v(z)$$

V nasledujúcej tabuľke pomenujeme všetky premenné a parametre, ktoré vystupujú v týchto rovniciach

ϕ	tok krvi	α	parameter premeny krvi
R	polomer cievy	c	merná tepelná kapacita
β	parameter rozťažnosti ciev	ρ	hustota
k_{priep}	priepustnosť ciev	$\langle T \rangle$	lokálna teplota objemového priemeru
γ	parameter priepustnosti ciev	K	tepelná vodivosť
p	tlak	a	špecifický povrch
u	rýchlosť	h	koeficient výmeny tepla
k	difúzny koeficient	Q	teplo produkované bunkami

Zoznam fyzikálnych premenných a parametrov

α	tepnová krv	s	tkanivo
v	žilová krv	0	rovnovážny stav

Zoznam použitých indexov

2 Implementácia

2.1 Iteračná matica

Na rátanie nami odvodených parciálnych diferenciálnych rovníc (1.4.14) budeme používať metódu konečných diferencii na nerovnomernej sieti. Nerovnomerná sieť znamená, že diskretizačný krok nie je všade rovnaký. Ovplyvní nás to tak, že diskretizačný krok musí byť vypočítaný pre každý bod siete. Numerická aproximácia derivácie potom má nasledovný tvar

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} \approx \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{z_{i+1} - z_{i-1}}. \quad (2.1.1)$$

Druhá derivácia aproximujeme výrazom

$$\frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial z^2} \approx \frac{2}{z_{i+1} - z_{i-1}} \left(\frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k}{z_{i+1} - z_i} - \frac{T_{i,j}^k - T_{i-1,j}^k}{z_i - z_{i-1}} \right). \quad (2.1.2)$$

Rovnako vyzerajú derivácie v radiálnom smere

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} \approx \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k}{r_{i+1} - r_{i-1}},$$
$$\frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial r^2} \approx \frac{2}{r_{i+1} - r_{i-1}} \left(\frac{T_{i,j-1}^k - T_{i,j}^k}{r_{i+1} - r_i} - \frac{T_{i,j}^k - T_{i,j-1}^k}{r_i - r_{i-1}} \right)$$

Časová derivácia sa nahradí doprednou diferenciou

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} \approx \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\tau}.$$

Explicitná schéma, ktorú budeme používať bude mať tvar

$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^k + (a_{ij}^1 T_{i+1,j}^k + a_{ij}^2 T_{i,j+1}^k + a_{ij}^3 T_{i,j}^k + a_{ij}^4 T_{i-1,j}^k + a_{ij}^5 T_{i,j-1}^k)$$

Parametre a^i vypočítame pre každý bod siete samostatne. To platí pre všetky tri teploty, tkaniva, tepnovej krvi a žilovej krvi. V skutočnosti si pole teplôt zmeníme na vektor veľkosti ij , kde i je počet bodov na sieti v z -ovom smere a j je počet bodov v radiálnom smere r . Potom iteračná matica $Iter_s$ s rozmermi $(ij) \times (ij)$ bude blokovo trojdiagonálna matica

$$Iter_s = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & & \\ C_1 & A_2 & B_1 & & \\ & C_2 & \ddots & & \\ & & & \ddots & B_{j-1} \\ & & & C_{j-1} & A_j \end{pmatrix},$$

Pričom matice A_j na diagonále sú trojdiagonálne matice a matice B_j a C_j na subdiagonálach sú diagonálne matice.

Keďže systém parciálnych diferenciálnych rovníc je previazaný, čo v našom prípade znamená, že teploty tkaniva a krvi sa navzájom ovplyvňujú, aby sme všetky tri teploty vypočítali naraz, spojíme všetky tri iteračné matice $Iter_s$, $Iter_a$ a $Iter_v$ do jednej hlavnej iteračnej matice $Iter$, ktorá bude mať rozmery $(3ij) \times (3ij)$. V tejto matici $Iter$ vieme zaznačiť vzájomné ovplyvňovanie teplôt. Matica $Iter$ bude mať potom tvar

$$Iter = \begin{pmatrix} Iter_s & A & B \\ C & Iter_a & 0 \\ D & 0 & Iter_v \end{pmatrix}.$$

Matice A, B, C a D sú diagonálne matice, ktoré viem jednoducho vypočítať. Aby sme mohli použiť hlavnú iteračnú maticu $Iter$ musíme tri vektory teplôt spojiť do jedného, ktorý bude dlhý $3ij$.

Používaná explicitná schéma potom bude mať tvar

$$T^{k+1} = Iter \cdot T^k. \quad (2.1.3)$$

Každý časový krok, sa nám môžu meniť niektoré parametre, preto je potreba po každom časovom kroku prepočítať niektoré koeficienty matice $Iter$.

2.2 Rovnovážny stav systému

Pred tým ako sa pustíme do používania explicitnej schémy (2.1.3), potrebujeme určiť počiatočné podmienky teplôt. Na jej určenie potrebujeme najskôr zvoliť toky krvi v rovnovážnom stave. To znamená že $\Delta T = 0$. Následne môžeme vypočítať rýchlosť krvi v rovnovážnom stave. Pomocou rýchlosti a tokov vypočítame rovnovážny stav objemu krvi ε^a a ε^v . Keď máme vypočítané všetky tieto premenné pre rovnovážny stav, môžeme vypočítať rovnovážny stav teplôt. Ten vypočítame upravením rovníc (1.4.14) a to tak, že časovú deriváciu $\frac{\partial}{\partial t}$ položíme rovnú nule, rovnako aj deriváciu v radiálnom smere $\frac{\partial}{\partial r}$ položíme rovnú nule, pretože predpokladáme rovnaké rozloženie teploty v koži nezávisle od radiálneho smeru. Budeme teda hľadať riešenie sústavy obyčajných diferenciálnych rovníc

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon^s K^s(z) \frac{\partial}{\partial z} \langle T \rangle^s + a_a h_{sa} (\langle T \rangle^a - \langle T \rangle^s) + a_v h_{sv} (\langle T \rangle^v - \langle T \rangle^s) + \varepsilon^s Q$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon^a K^a \frac{\partial}{\partial z} \langle T \rangle^a - \varepsilon^a c^a \rho^a u^a \frac{\partial}{\partial z} \langle T \rangle^a + a_a h_{as} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^a)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon^v K^v \frac{\partial}{\partial z} \langle T \rangle^v + \varepsilon^v c^v \rho^v u^v \frac{\partial}{\partial z} \langle T \rangle^v + a_v h_{vs} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^v).$$

Tieto rovnice zdiskretizujeme ako bolo uvádzané v (2.1.1) a (2.1.2) a dostaneme systém $(3 * i)$ rovníc o $(3 * i)$ neznámych. Musíme myslieť na to, že premenné $K^s(z)$, ε^s a ε^a sú závislé od smeru z , čiže aj na ne musíme použiť diskretizáciu. Vypočítaný rovnovážny stav nebude určovať iba počiatočné podmienky, ale aj okrajové podmienky v okrajových bodoch $r = R$. Máme na mysli hodnoty $\langle T \rangle_0^s(z)$, $\langle T \rangle_0^a(z)$ a $\langle T \rangle_0^v(z)$.

2.3 Parametre systému

Pred tým ako sa môžeme pustiť do pozorovaní ostáva nám ako posledné určiť niektoré parametre. Niektoré biofyzikálne parametre sme určili za pomoci literatúry. Konkrétne parametre sú uvedené v nasledujúcej tabuľke

Parameter	Hodnota	Zdroj	Parameter	Hodnota	Zdroj
R_{a0}	0.03 mm	[6]	R_{v0}	0.02 mm	[6]
c^a	$3.85 \frac{J}{g \text{ } ^\circ C}$	[2]	c^v	$3.85 \frac{J}{g \text{ } ^\circ C}$	[2]
ρ^a	$0.00106 \frac{g}{mm^3}$	[2]	ρ^v	$0.00106 \frac{g}{mm^3}$	[2]
K^a	$0.0005 \frac{W}{mm \text{ } ^\circ C}$	[2]	K^v	$0.0005 \frac{W}{mm \text{ } ^\circ C}$	[2]
k^a	~ 1	[7]	k^a	~ 1	[7]
p_{a0}	35 mmHg	[6]	p_{v0}	15 mmHg	[6]
p_{t0}	25 mmHg	[6]	$c^{epidermis}$	$3.6 \frac{J}{g \text{ } ^\circ C}$	[10]
c^{dermis}	$3.8 \frac{J}{g \text{ } ^\circ C}$	[10]	c^{tuk}	$2.3 \frac{J}{g \text{ } ^\circ C}$	[10]
$\rho^{epidermis}$	$0.0012 \frac{g}{mm^3}$	[10]	ρ^{dermis}	$0.0012 \frac{g}{mm^3}$	[10]
ρ^{tuk}	$0.00085 \frac{g}{mm^3}$	[10]	$K^{epidermis}$	$0.00021 \frac{W}{mm \text{ } ^\circ C}$	[10]
K^{dermis}	$0.00053 \frac{W}{mm \text{ } ^\circ C}$	[10]	K^{tuk}	$0.00016 \frac{W}{mm \text{ } ^\circ C}$	[10]
Q	$370 * 10^{-9} \frac{W}{mm^3}$	[2]	h	$0.03 \frac{W}{mm^3 \text{ } ^\circ C}$	[2]
ε^s	0,7	[2]			

Parametre určené z literatúry

Niektoré parametre si určíme sami. Jedná sa najmä o parametre domény a časový krok. Sieť sa bude zhusťovať smerom k $r = 0$ v radiálnom smere. V prípade z-tovej súradnice bude sieť najredšia v strede domény a bude sa zhusťovať smerom ku hraniciam $z = 0$

a $z = 3$. Sieť, na ktorej budeme robiť pozorovania bude mať rozmery $3mm \times 30mm$. Časový krok τ určíme z podmienky stability explicitnej schémy

$$\tau \leq \frac{\rho c H_z H_r}{4K}, \quad (2.3.1)$$

kde H_z je najmenší diskretizačný krok v z-tovom smere a H_r je najmenší diskretizačný krok v radiálnom smere. Obe hodnoty sme zvolili ako $0.1mm$. Určíme dostatočne malé τ , aby nerovnosť (2.3.1) platila pre všetky koeficienty ρ , c a K . Pre $\tau = 0.004s$ je nerovnosť (2.3.1) splnená.

Náš model obsahuje aj parametre, ktorými sa doposiaľ v literatúre nik nezaoberal. Tieto parametre majú skôr biologický charakter, preto je veľmi náročné ich určiť deterministicky. Vďaka dostupným dátam o vzniku popáleninách [13], ktoré boli robené na prasatách, ktoré majú veľmi podobnú štruktúru kože ako človek, sa dajú nastaviť parametre tak, aby sme sa čo najviac priblížili ich dosiahnutým výsledkom. Nami zvolené hodnoty parametre uvádzame v tabuľke nižšie.

$k_{prie p}^{a0}$	0.008	$k_{prie p}^{v0}$	0.013
γ_a	$1000^{\circ}C$	γ_v	$1000^{\circ}C$
β_a	$0.0001 \frac{mm}{^{\circ}C}$	β_v	$0.00008 \frac{mm}{^{\circ}C}$
δ	$100Pa$	α	0.3

Fitované parametre

3 Pozorovania

Naše pozorovania budú trvať 60 sekúnd a budú sa v nich meniť teploty zdroja, ktorý bude pôsobiť priamo na pokožku a bude izolovaný od okolia. Polomer plochy, na ktorú zdroj pôsobí sme určili ako $r = 4\text{mm}$. Za výsledok budeme považovať priemernú hodnotu z integrálu množstva krvi do hĺbky 0.3mm . Tieto výsledky budeme interpretovať porovnávaním s výsledkami, ktoré dosiahli Moritz A. R. a Henriques F. C. v [13]. Ich pozorovania boli robené fyzicky a výsledky boli zhodnotené podľa spôsobeného zranenia. Z ich práce sú aj následné odseky.

„Je zdanlivé, že zmeny v teplote epidermu spôsobené vystavením pokožky nadmernému teplu sa skladá z dvoch fáz. Prvú z nich predstavuje čas potrebný na dosiahnutie teplotných kapacít epidermu alebo presun dostatočného množstva tepelnej energie na ustálenie epidermálneho gradientu teploty. 30 sekúnd bolo bežne dostatok času na dosiahnutie stabilného stavu, pri ktorom teplota bazálnej vrstvy bola iba o trochu menšia ako tá na povrchu. Druhá fáza predstavuje tú časť hypertermie, v ktorej gradient teploty epidermu bol stabilný.

V prípade že povrchová teplota bola menej ako 51°C , tak čas potrebný na dosiahnutie stabilného stavu teploty v bazálnej vrstve bol zanedbateľný v porovnaní s časom potrebným na spôsobenie nezvratného zranenia. Celkový čas potrebný na vznik popáleniny pri takýchto povrchových teplotách bol teda totožný s celkovým trvaním ustáleného teplotného stavu v rámci epidermu. V prípade týchto okolností nastala lineárna závislosť medzi časom a povrchovou teplotou pre vznik popáleniny pri teplotách 44° až 51°C

Dôvod prečo pri teplote nižšej ako 44°C nebol pozorovaný takýto vzťah, bol pravdepodobne zvýšenie efekt bunkového zotavovania sa pri úrovni zahrievania, ktoré bolo blízke prirodzeným teplotám tkaniva.

Ako sa povrchová teplota zdvihla nad 51°C a celkový čas vystaveniu sa skrátil, tak 30 sekúnd potrebných na stabilizovanie teploty epidermu predstavuje veľkú časť celej hypertemickej doby. Už neplatil vzťah medzi povrchovou teplotou a časom vystaveniu pre bazálnu vrstvu. Vznikla progresívna odchýlka od lineárneho vzťahu medzi povrchovou teplotou a časom, ktorý charakterizoval krivku zranenia medzi 44°C a 51°C .“

Niektoré ich pokusy pri nízkych teplotách trvali pomerne dlhú dobu (rádovo niekoľko minút), po ktorej sa prejavilo zranenie. V našom modeli sa však zaoberáme ustáleným stavom, ktorý nastáva, ako písali, približne po 30 sekundách. Teda sme neboli schopní sa priblížiť výsledkom pokusov, ktoré trvali tak dlhú dobu. Dôvod nastania tohto javu je podľa nás množstvo zložitých biologických procesov, ktoré sme v našom modeli nezohľadňovali. K týmto procesom patrí napríklad receptory tepla, receptory bolesti a iné. Na druhej strane, pre teploty vyššie ako 51 stupňov Celzia a časy kratšie ako 100 sekúnd sa výsledky nášho modelu zhodujú s experimentálnymi dátami.

Nasledujúce dva odseky sú tiež z práce [13].

„Koža počas vystaveniu tepla môže meniť farbu povrchu ako výsledok popáleniny bez ovplyvnenia jej závažnosti. V určitých rozpätiach povrchovej teploty môžu nastať dva javy, ischemia alebo hyperémia. Za takýchto okolností rozličnosť farby neurčuje hĺbku zranenia.

Farba popáleniny na povrchu je určená z časti rýchlosťou a stupňom počiatočného rastu teploty dermisu a z časti trvaním vystavenia. Povrchová farba popáleniny nie je užitočné kritérium odhadnutia závažnosti zranenia alebo množstva krvi ktorá môže by akumulovaná v spodnejších vrstvách. Keď sa teplota dermisu pomaly zvyšuje, cievy sa rozširujú a zanechávajú krv v tkanive, aj keď neskôr v ňom nastáva zrážanie spôsobené zvýšenou hyperémiou. Ak počiatočné zvyšovanie v kožnej teplote je prudké a vysoké, cievy sa stiahnu tak rýchlo, že nie je žiadna šanca, aby nastala hyperémia. Takéto popáleniny sú povrchne ischemické, ale hlbšie cievy spôsobujú hyperémiu v hlbších vrstvách. “

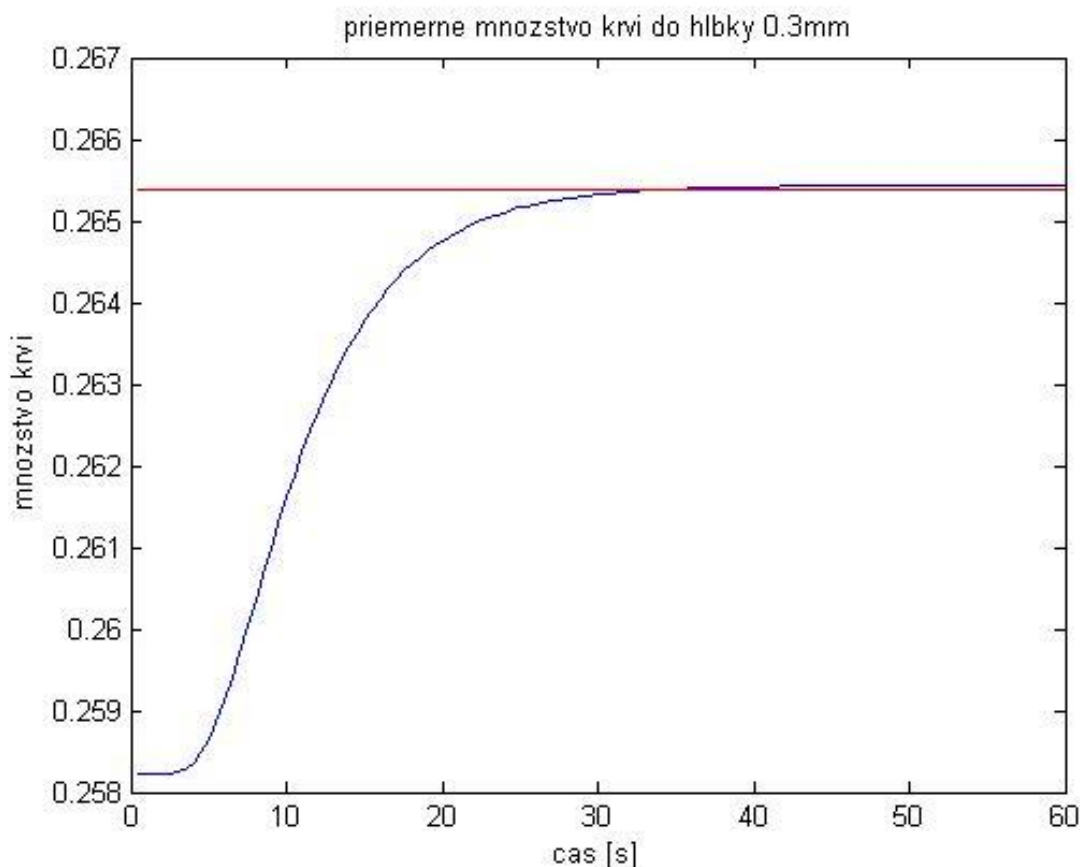
Keďže sa budeme zaoberať iba nižšími teplotami, ischemický jav nenastane. Preto na základe výsledkov našej práce tvrdíme, že farba sčervenania (množstvo krvi tesne pod povrchom) môže byť dobrý indikátor popáleniny prvého stupňa.

3.1 Stanovenie kritického množstva krvi pre popáleniny prvého stupňa

Hlavným výsledkom tejto sekcie je stanovenie kritickej hodnoty množstva krvi tesne pod povrchom, pri ktorej vznikajú popáleniny prvého stupňa. Túto hodnotou určíme na základe

porovnania výsledkov nášho modelu s výsledkami z práce [13], ktoré dosiali pri teplotách od 51°C do 55°C.

Najvhodnejšie pozorovanie na porovnanie je pri teplote $T_{zdroj} = 52^{\circ}\text{C}$. Pri tejto teplote nastáva zmena zo stavu bez zranenia na stav sčervenania (popálenina prvého stupňa) medzi 30 a 45 sekundou. Po 30 sekundách sa teplota tkaniva začína stabilizovať a rastie pomaly. Preto sme schopní určiť kritickú hodnotu pomerne presne. Výsledok nášho modelu pri takejto teplote zdroja zobrazíme na grafe nižšie.



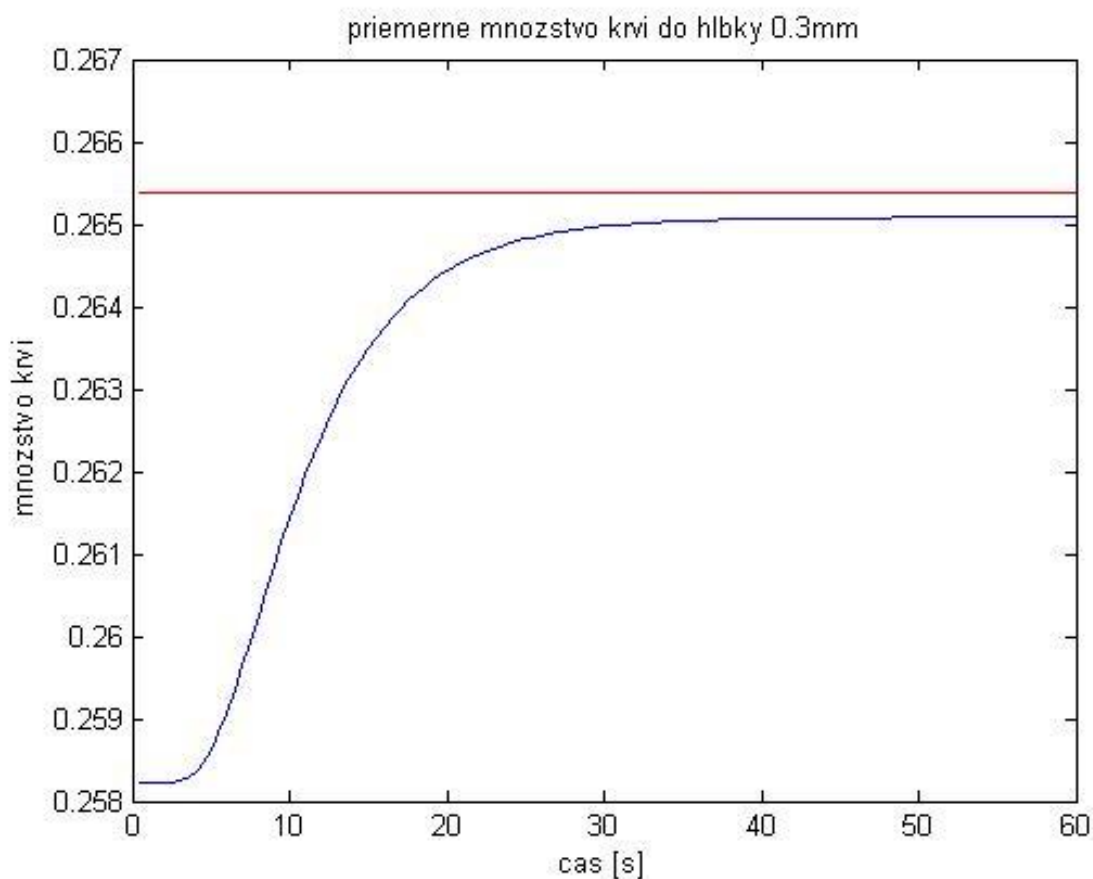
Množstvo krvi do hĺbky 0.3mm pri teplote zdroja 52°C

Na grafe je vidieť, že kritická hodnota pre sčervenanie krvi v našom modeli môže byť približne

$$\varepsilon_{crit} = 0.26538$$

Pozrieme sa, ako sa množstvo krvi zmení v prípade iných teplôt zdrojov a či naša kritická hodnota popáleniny prvého stupňa platí aj pre ne v porovnaní s pokusmi vykonanými v práci [13].

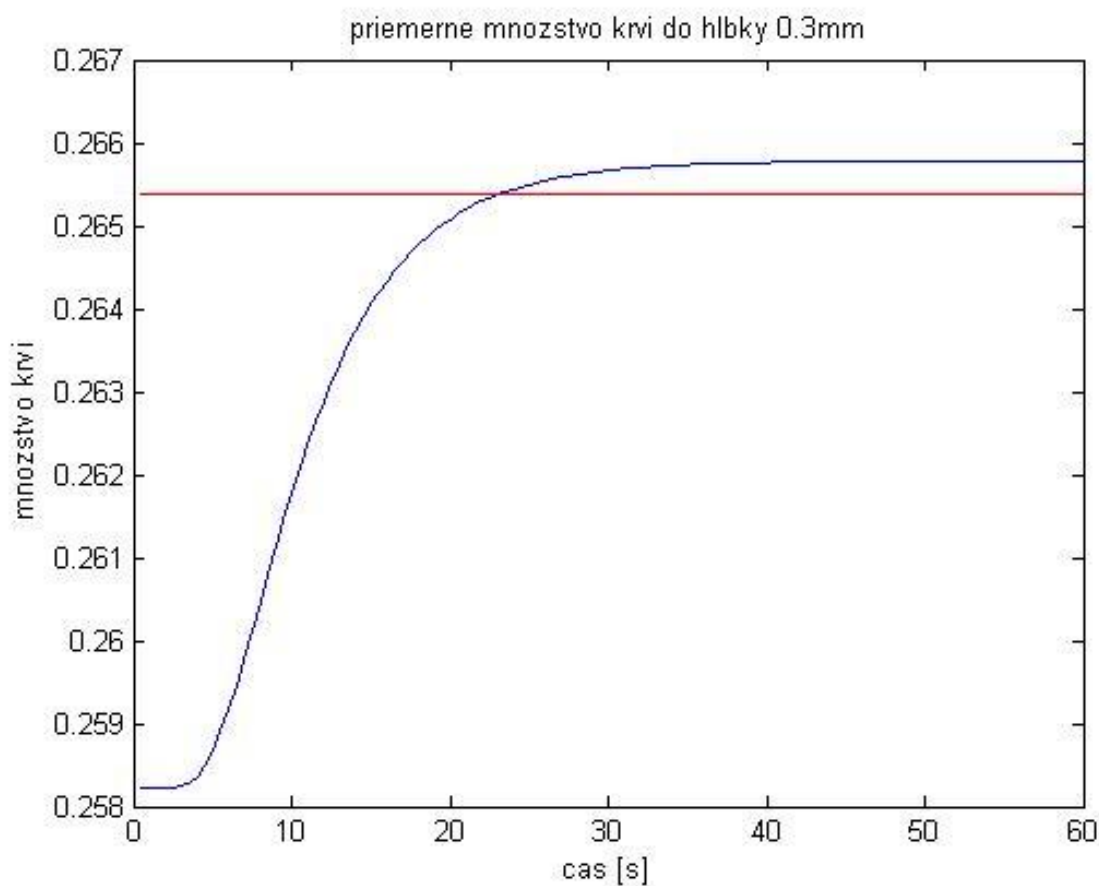
V prípade, že zdroj má teplotu $T_{zdroj} = 51^{\circ}\text{C}$, tak po dobu 1 minúty sčervenanie podľa pokus v práci [13] nenastalo.



Množstvo krvi do hĺbky 0.3mm pri teplote zdroja 51°C

Môžeme si všimnúť, že množstvo krvi nedosiahlo našu kritickú hodnotu $\varepsilon_{crit} = 0.26538$. Tento výsledok sa nám teda zhoduje s výsledkom v práci [13].

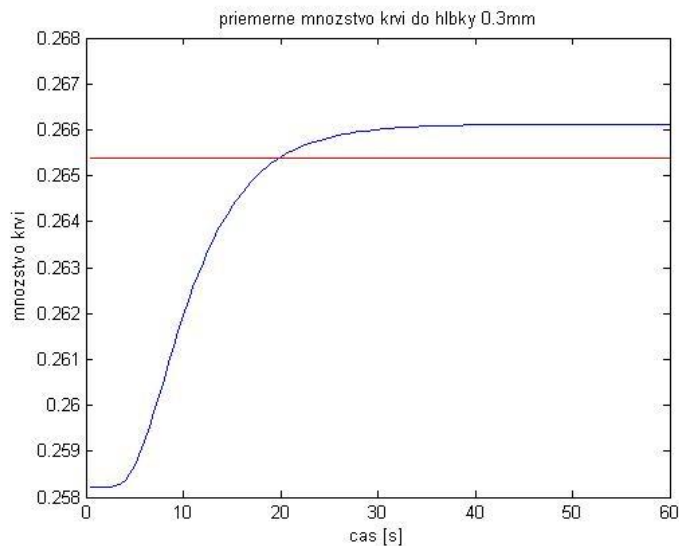
Ďalšia teplota zdroja, pri ktorej budeme robiť pozorovanie, je $T_{zdroj} = 53^{\circ}\text{C}$. Podľa pozorovania v práci [13] nastalo sčervenanie medzi 20. a 30. sekundou.



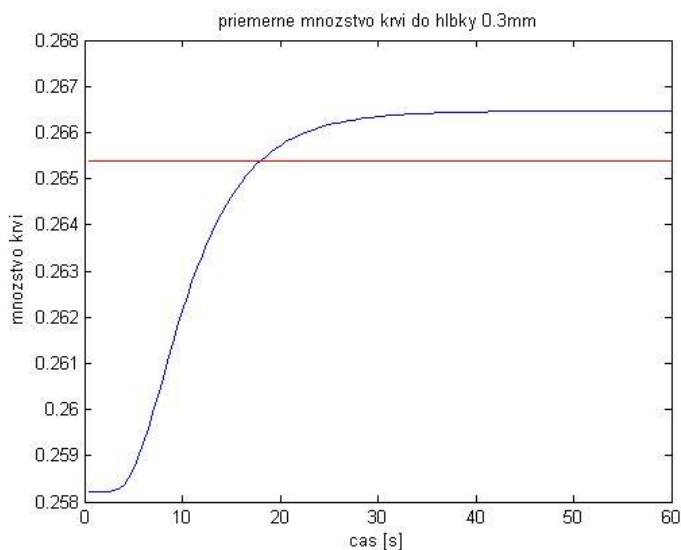
Množstvo krvi do hĺbky 0.3mm pri teplote zdroja 53°C

Kritická hodnota $\epsilon_{crit} = 0.26538$ je v našom modeli prekonaná medzi 20. a 30. sekundou. Tento výsledok je teda totožný s výsledkom, ktorý bol dosiahnutý v práci [13].

Posledné teploty zdroja, ktorými sa budeme zaoberať, sú 54 a 55°C. Pri prvej teplote zdroja sčervenanie nastalo medzi 15. a 25. sekundou. V prípade druhej teploty nebola zaznamenaná popálenina prvého stupňa, ale po 20 sekundách vznikla už popálenina druhého stupňa.



Množstvo krvi do hĺbky 0.3mm pri teplote zdroja 54°C

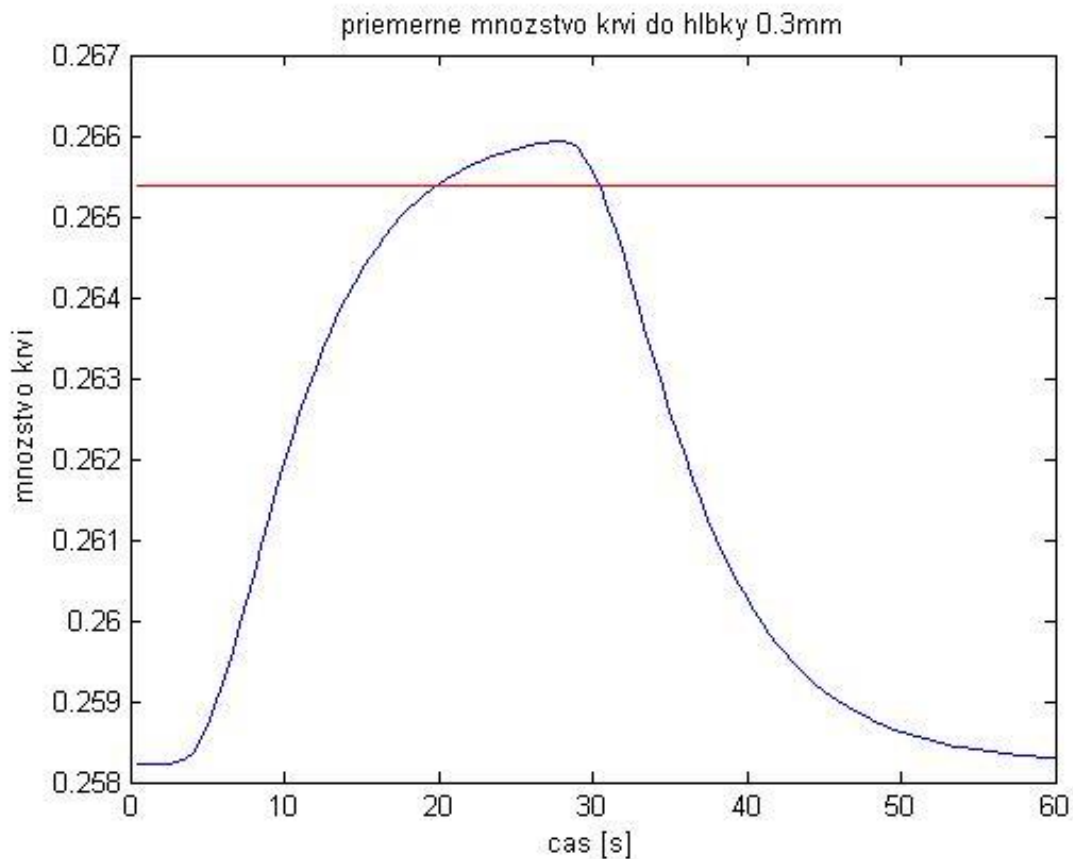


Množstvo krvi do hĺbky 0.3mm pri teplote zdroja 55°C

V prípade prvej teploty zdroja $T_{zdroj} = 54^{\circ}\text{C}$ popálenina prvého stupňa vznikla rovnako ako podľa práci [13] v čase medzi 15. a 25. sekundou. Pri druhej teplote podľa nášho modelu by nastala popálenina prvého stupňa približne v čase 18 sekúnd, čo je skorej ako nastanie popáleniny druhého stupňa, ktoré podľa práci [13] nastal po 20 sekundách.

3.2 Výsledky pozorovania s odobratím tepelného zdroja

Zaujímavým pozorovaním je, čo sa stane s popáleninou prvého stupňa (množstvom krvi), keď tepelný zdroj prestane pôsobiť. Náš pokus bude vychádzať z pozorovania pri $T_{zdroj} = 54^{\circ}\text{C}$. Zdroj odoberieme v 25 sekunde. V tom čase je už vytvorená popálenina prvého stupňa.



Množstvo krvi do hĺbky 0.3mm pri teplote zdroja 54°C , ktorý sme po 25 sekundách odobrali

Výsledok je pozoruhodný. Aj keď sme zdroj odobrali po 25 sekundách množstvo krvi stúpalo ešte nejakú dobu. Približne po 29 sekundách nastáva klesanie, ktoré nie je také strmé ako pri vzniku popáleniny prvého stupňa. Môžeme si všimnúť, že popálenina nezmizne hneď po odobratí zdroja, ale udržiava sa ďalších približne 6 sekúnd. Po uplynutí minúty sa krv dostala skoro do pôvodného stavu.

Záver

V tejto práci sme zostavili matematický model, ktorý verne popisuje šírenie popálenín prvého stupňa kože. V tomto modeli sme sa snažili použiť čo najpresnejšie fyzikálne parametre, ktoré boli väčšinou určené empiricky. Všetky parametre uvádzame aj s odkazom na literatúru, kde boli zverejnené spolu s hodnotou. Z veľkého množstva použitých parametrov sme museli fitovať iba 8 z nich.

V modeli sme použili iba pár zjednodušení. Medzi najväčšie z nich patrí používanie rovnovážneho stavu rovníc popisujúcich množstvo tepnovej a žilovej krvi v závislosti od teploty. Druhé zjednodušenie bolo, keď sme v týchto rovniciach predpokladali, že rýchlosť prúdenia tepnovej a žilovej krvi je rovnaká.

Výsledky nášho modelu sme porovnávali s prácou [13], v ktorej boli výsledky pokusov s popáleninami. Vďaka týmto porovnaniam sme boli schopní určiť kritickú hodnotu vzniku popáleniny prvého stupňa, tak aby náš model popisoval všetky pokusy z práce [13] správne. Naša kritická hodnota je $\varepsilon_{crit} = 0.26538$. Táto hodnota vyjadruje pomer objemu krvi k celkovému objemu, t.j. krv spolu s tkanivom.

Táto kritická hodnota spolu s našim modelom dokáže určiť, za akých podmienok vzniká popálenina prvého stupňa in silico. V literatúre sa neuvádza presný spôsob určenia popáleniny prvého stupňa, nakoľko nenastáva žiadne poškodenie tkaniva, ktoré by sa dalo pozorovať. Výhoda je teda v tom, že nemusia byť spravené žiadne pokusy na ľuďoch alebo zvieratách, aby sa pre rôzne scenáre určilo, či vznikne popálenina prvého stupňa.

Model dokáže popísať aj čo sa stane, keď na kožu prestane pôsobiť zdroj tepla. To znamená, ako dlho bude trvať, kým zmizne popálenina prvého stupňa. Podobný problém, ktorý model zvláda vyriešiť, je dodávanie tepla pulzujúcim zdrojom.

Model má potenciál rozširovania. Mohlo by sa vďaka nemu určiť aká je minimálna hrúbka ochranného materiálu, ktorého fyzikálne vlastnosti poznáme, aby ochránil pracovníkov pred vznikom popáleniny prvého stupňa, keď vieme s akými teplotami sa pracovníci dostávajú do kontaktu. Mohlo by sa jednať o požiarnikov, alebo miesta kde sa

pracuje s vysokými pecami. Takáto informácia môže byť v čase krízy dôležitá pre výrobcov ochranných odevov.

Literatúra

1. Diller K. R., Analysis of Skin Burns., Heat Transfer in Medicine and Biology: Analysis and Applications, Vol. 2, 1985
2. Xuang Y., Roetzel W., Bioheat equation of the human thermal system. Journal of Biomechanical Engineering, str. 268-276, 1997
3. Xuang Y., Roetzel W., Transient response of the human limb to an external stimulus., International Journal of Heat and Mass Transfer. Vol. 41, str. 229-239, 1998
4. Vafai K., Porous Media, Applications in Biological Systems and Biotechnology, CRC Press, 2011
5. Khaled A.-R.A., Vafai K., The role of porous media on modeling flow and heat transfer in biological tissues, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 46, str. 4989-5003, 2003
6. Silverthorn D. U., Human Physiology: An Integrated Approach, 5th Edition, Benjamin Cummings, 2009
7. Sejrsen P., Blood Flow in Cutaneous Tissue in Man Studied by Washout of Radioactive Xenon, Circulation Research, str. 215-229, 1969
8. Michel C. C., Curry F. E., Microvascular Permeability, Physiological Reviews, str. 703-761, 1999
9. Michel C. C., Kendall S., Differing effects of histamine and serotonin on microvascular permeability in anaesthetized rats, Journal of Physiology, str. 657-662, 1997
10. Zhmakin A. I., Fundamentals of Cryobiology Physical Phenomena and Mathematical Models, Springer, 2009
11. Haberman R., Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems, 2nd Edition, Prentice Hall, 1987
12. Subramania B., Chato J. C., Safe Touch Temperatures for Hot Plates, Journal of Biomechanical Engineering, str. 727-736, 1998

13. Moritz A. R., Henriques F. C., Studies of Thermal Injury (II), The Relative Importance of Time and Source Temperature in the Causation of Cutaneous Burns, American Journal of Pathology, 1947
14. <http://www.mayoclinic.com/health/medical/IM00941>, 1.4.2012
15. http://en.wikipedia.org/wiki/Epidermis_%28skin%29, 1.4.2012
16. Nakayama A., Fuwahara F., A General Bioheat Transfer Model Based on Theory of Porous Media., International Journal of Heat Mass Transfer, str. 3190-3199, 2007
17. http://202.141.40.218/wiki/index.php/Three_Dimensional_Motion, 22.4.2012