UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Technické rezervy v neživotnom poistení

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2012

Bc. JAROSLAVA GATIALOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

TECHNICKÉ REZERVY V NEŽIVOTNOM POISTENÍ

Diplomová práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: RNDr. Andrej Náther, Csc.

Kód ŠÚ SR: 1114

BRATISLAVA 2012

Bc. Jaroslava Gatialová

27073324

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jaroslava Gatialová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Technické rezervy v neživotnom poistení

Cieľ: Cieľom diplomovej práce je popísať metódy výpočtu rezerv v neživotnom poistení. Študentka sa bude snažiť nadviazať na svoju bakalársku prácu: Rezervy – ich výpočet a význam v životnom a neživotnom poistení, nakoľko metódy výpočtu sa stále vyvíjajú a zdokonaľujú. Okrem deterministického prístupu sa bude venovať hlavne stochastickému spôsobu výpočtu rezerv. Taktiež aplikuje popísané postupy na konkrétny príklad a uvedené postupy porovná.

Vedúci: RNDr. Andrej Náther, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum zadania: 13.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Vyhlasujem na svoju česť, že som diplomovú prácu Technické rezervy v neživotnom poistení napísala samostatne a výhradne s použitím uvedenej literatúry a ďalších informačných zdrojov.

V Bratislave dňa 16. apríla 2012 ....

Bc. Jaroslava Gatialová

Poďakovanie:

Rada by som poďakovala RNDr. Andrejovi Nátherovi, Csc. za vedenie diplomovej práce, za cenné pripomienky a odborné rady, ktoré mi poskytol a čas strávený pri konzultáciách.

Abstrakt

Názov práce: Technické rezervy v neživotnom poistení

Pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, FMFI UK v Bratislave

Autor: Bc. Jaroslava Gatialová

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Andrej Náther, Csc.

Stupeň odbornej kvalifikácie: Magister. Bratislava: FMFI UK. 2012

Kľúčové slová: rezerva, poistné plnenie, neživotná poisťovňa, reťazovo-rebríková metóda, separačná metóda, metóda Bornhuetter - Ferguson, Poissonov model, Mackov model.

Témou diplomovej práce je odhad technických rezerv v neživotnom poistení. Práca je rozdelená na 8 častí. V prvej kapitole sme sa venovali významu a potrebe vytvárania technickej rezervy. V druhej kapitole sme porovnali výhody a nevýhody stochastického a deterministického prístupu odhadu. V ďalšej kapitole sme uviedli označenia, ktoré sú použité v celej práci. V nasledujúcej kapitole sme popísali postup odhadu rezerv deterministickým postupom. Najdôležitejšia piata kapitola je venovaná stochastickému prístupu odhadu rezerv, ktoré dávajú rovnaké výsledky ako reťazovo - rebríková metóda. Pri každom modeli sme uviedli predpoklady, za ktorých je možné model použiť. Ak majú poistné plnenia aj zápornú hodnotu, tak môžeme použiť niektoré z popísaných metód v šiestej kapitole. Rozdiel medzi odhadovanou a skutočnou hodnotou poistného plnenia určuje chyba odhadu, ktorej sme sa venovali v siedmej kapitole. V poslednej, ôsmej, kapitole boli aplikované popísané postupy odhadu rezerv na dáta dvoch poisťovní.

Abstract

Thesis title: The technical reserves in non-life insurance

Department: Department of Applied Mathematics and Statistics, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University in Bratislava

Author: Bc. Jaroslava Gatialová

Supervisor: RNDr. Andrej Náther, Csc.

Level of professional qualification: Master. Bratislava: FMFI UK. 2012

Keywords: reserve, claim, non-life insurance company, Chain - Ladder method, Separation method, Bornhuetter - Ferguson method, Poisson model, Mack's model.

The theme of this thesis is the estimation of technical reserves in non-life insurance. The thesis is divided into 8 parts. In the first chapter, we discuss the importance and necessity establishment of technical reserves. We compared the advantages and disadvantages of stochastic and deterministic approach of estimation in the second chapter. In the next chapter we introduced the designations used throughout the work. Then we described the process of estimating of reserves by the deterministic approach. The most important chapter,which is the fifth in order, is devoted to stochastic approach of estimating reserves, which give the same results as a chain - ladder method. For each model we introduced conditions under which it is possible model to use. If claims have also a negative value, so we can use some of the methods described in chapter six. The difference between actual and estimated values of claims is determined by estimation error, which we interested in the seventh chapter. In the last eighth chapter, were applied described methods for estimating reserves on data from two insurance companies.

Predhovor

Diplomová práca s názvom Technické rezervy v neživotnom poistení nadväzuje na bakalársku prácu Rezervy - ich výpočet a význam v životnom a neživotnom poistení. V bakalárskej práci nebolo dostatok priestoru pre podrobnejší popis postupu odhadu rezerv v neživotnom poistení, tak sme sa rozhodli tejto téme venovať v celej diplomovej práci.

Hlavnou témou je popis metód na odhad rezerv a aplikácia postupov na dátach poisťovne. Deterministické postupy aplikujeme na dáta známe z bakalárskej práce. Postup reťazovo-rebríkovej metódy, Poissonovho a Mackovho modelu použijeme na dáta nemeckej spoločnosti. Cieľom práce je

- poskytnúť čitateľovi prehľad o postupoch odhadu rezerv používaných poisťovňami
- zistiť, či je vhodnejšie používať deterministický alebo stochastický prístup
- dokázať, že vybranými stochastickými postupmi dostaneme rovnaké výsledky ako v prípade reťazovo - rebríkovej metódy

V práci sa venujeme deterministickému prístupu odhadu rezerv, popíšeme ho viacerými metódami. Najdôležitejšia časť práce je venovaná stochastickému prístupu, ktorého postupy sú efektívnejšie, no napriek tomu sa v praxi nevyužíva v takej miere ako deterministický prístup. Uvedieme teoretické postupy na odhad rezerv, ktoré následne aplikujeme na dáta. Venujeme sa iba tým stochastickým postupom, ktoré dávajú rovnaké výsledky ako pri deterministickom prístupe reťazovo - rebríkovej metódy.

Najväčším prínosom práce je popis metód na odhad rezerv stochastickým prístupom, ktorý sa v slovenskej literatúre buď nenachádza, alebo je veľmi stručne popísaný, ako aj aplikácia postupov v praxi. Postupy deterministických metód boli aplikované na dáta v softvére Excel a postupy stochastických metód v programe R.

Obsah

Zoznam tabuliek

Úvod

Technické rezervy sa v neživotnom poistení nepočítajú, ale odhadujú, nakoľko zistenie skutočnej výšky škôd môže trvať veľmi dlhé časové obdobie. Správny odhad technických rezerv je z hľadiska efektívneho fungovania poisťovne veľmi dôležitý. Poistné zmluvy sú zvyčajne uzatvárané na krátke časové obdobie. To však neznamená, že po ukončení a nepredĺžení zmluvy povinnosti poisťovne končia. Naopak, mohlo sa stať, že z nejakého dôvodu škodová udalosť nebola nahlásená, napriek tomu, že sa stala v období na ktoré bola zmluva uzavretá. Alebo udalosť bola nahlásená, ale nebola v tomto období vybavená. Tieto dve rezervy sú vytvárané v najdôležitejšej rezerve neživotného poistenia, a to v rezerve na poistné plnenia. Neživotná poisťovňa okrem tejto rezervy vytvára ešte niekoľko druhov rezerv. Najmä pri spomenutej technickej rezerve na poistné plnenia sa môže stať, že pri opakovanom nesprávnom stanovení rezerv sa poisťovňa dostane do finančných problémov.

Rezervy je možné odhadovať rôznymi metódami. Na niektoré stačí základná znalosť matematiky a podľa postupu metódy dokáže čitateľ určiť rezervu. Všetky tieto postupy patria medzi metódy deterministického prístupu. Sú veľmi využívané v praxi, ako aj popisované vo viacerých literatúrach kvôli svojej jednoduchosti. Pri týchto metódach nie je potrebná znalosť predpokladov použitia metódy. Naopak výhodou deterministického prístupu je zohľadnenie vonkajších vplyvov, ako sú napríklad zaslúžené poistné a inflácia. Medzi najznámejšie metódy patria reťazovo - rebríková metóda, separačná metóda, metóda Bornhuetter - Ferguson a Cape Code metóda.

Ďalší spôsob odhadu rezerv je pomocou stochastického prístupu. Pri každom modeli je uvedených niekoľko predpokladov, ktoré musia byť splnené pre správny odhad rezerv. Lepšie sa dá teda určiť, či sú dáta vhodné pre daný model odhadu rezerv. V práci sme sa venovali len modelom, ktoré dávajú rovnaké výsledky ako reťazovo - rebríková metóda deterministického prístupu. Môže sa zdať zbytočné, komplikovať si prácu chápaním predpokladov, keď deterministický prístup je jednoduchý. Stochastické modely sú veľkým prínosom pre odhad rezerv a majú mnoho výhod oproti deterministickému prístupu. Veľkou výhodou stochastických modelov je, že dávajú lepšie informácie o výsledkoch. Môžu slúžiť na takzvanú skúšku správnosti, či je reťazovo - rebríková metóda vhodná pre daný súbor dát. Medzi stochastické modely, ktoré dávajú rovnaké výsledky ako reťazovo - rebríková metóda patria multiplikatívny model, Poissonov model a Mackov model.

Kapitola 1

Technické rezervy v neživotnom poistení

V tejto kapitole sme pracovali s literatúrou [2, 3, 16].

Technické rezervy vytvára poisťovateľ ako náklady, aby bolo možné plniť záväzky plynúce z poisťovacej činnosti, ktorých vznik je pravdepodobný, ba až istý, ale nie je istý čas vzniku alebo jeho veľkosť. Komerčná poisťovňa musí vytvárať technické rezervy k financovaniu svojich záväzkov, nakoľko je to dané zákonom o poisťovníctve. Výkaz o tvorbe a výške technických rezerv musí poisťovňa predložiť ministerstvu vždy k dátumom 31.3., 30.6., 30.9. a 31.12. bežného roku, a to v lehote do 30 dní po uvedených dátumoch.

Každá neživotná poisťovňa má portfólio poistiek. Niektoré z nich prepadnú bez toho, aby si poistenec uplatnil nárok, niektorí poistenci si uplatnia nárok aj viac ako raz. V neživotnom poistení je doba poistenia zvyčajne jeden rok. Po tomto roku poistenec buď zmluvu predĺži alebo zruší. Ak sa poistenec rozhodne zmluvu zrušiť, nutne to neznamená, že poisťovňa už nemá voči poistencovi záväzky. Všetky záväzky, ktoré vznikli v poistnej dobe, ale z nejakého dôvodu neboli nahlásené, musí poisťovna dodržať. Na záväzky poisťovne voči poisteným, si musí poisťovňa odkladať časť poistného. Táto časť sa nazýva rezerva poitsťovne.

1.1 Rozdelenie technických rezerv v neživotnom poistení

Ak je poskytovaná poistná činnosť v jednom alebo viacerých poistných odvetviach, podľa zákona musí poisťovňa vytvárať rezervy:

- rezerva na poistné plnenia
- rezerva na nezaslúžené poistné
- rezerva na prémie a zľavy na poistnom
- vyrovnávacia rezerva
- rezerva poistného neživotných poistení
- iné rezervy

Pod pojmom iné rezervy treba rozumieť možnosť poisťovní žiadať o súhlas vlády na tvorbu iných, vyššie neuvedených rezerv.

Podrobný popis rezerv sa nachádza v bakalárskej práci [13]. My sa tu budeme venovať vyrovnávacej rezerve v kapitole 1.2 a najdôležitejšej rezerve v neživotnom poistení: technickej rezerve na poistné plnenia v kapitole 1.3.

1.2 Technická rezerva na vyrovnávanie mimoriadnych rizík

V zbierke zákonov č. 95/2002 o poisťovníctve: o zmene a doplnení niektorých zákonov, ktorú je možné si prečítať v [16], je definovaná tvorba a výpočet *technickej rezervy na vyrovnávanie mimoriadnych rizík* tiež nazývanej *vyrovnávacia rezerva*. Táto rezerva je určená na vyrovnávanie výkyvov vo výplatách poistných plnení budúcich rokov a na momentálne vyrovnávanie zvýšených nákladov v poisťovacej činnosti, ktoré vzniknú kolísaním škodového pomeru, ktoré poisťovateľ nedokáže ovplyvniť. *Škodový pomer* je pomer medzi čistým poistným plnením a čistým zaslúženým poistným počas sledovaného obdobia. Výkyvom v poisťovacej činnosti sa rozumie stav, keď škodový pomer prekročí za sledované obdobie hornú hranicu stanovenú vyhláškou. Kolísanie priebehu nemusí byť len náhodné, ale môže byť aj predpovedateľné, ako napríklad: ekonomické cykly, klimatické zmeny, atď. Rezerva sa vytvára z prijatého poistného.

Vyrovnávacia rezerva sa určuje *metódou kvalifikovaného odhadu*, t.j. podľa objemu poistného a poistného rizika vyplývajúceho z uzavretých poistných zmlúv a spôsobu ich zaistenia.

1.3 Technická rezerva na poistné plnenia

Je najdôležitejšia rezerva v neživotnom poistení, nakoľko od jej správneho určenia závisí ziskovosť poisťovne. Podcenenie odhadu rezerv vedie k jej veľkým finančným problémom. Výška rezervy musí zahŕňať aj náklady spojené s vybavením poistnej udalosti.

Odhad rezervy na poistné plnenia sa podľa zákona uskutočňuje dvoma spôsobmi. Pri prvom spôsobe sa výška technickej rezervy na poistné plnenie v neživotnom poistení určuje ako súhrn technických rezerv na poistné plnenia pre jednotlivé poistné udalosti. Ak sa výška rezervy nedá stanoviť predchádzajúcim postupom, tak sa použijú matematickoštatistické metódy.

V neživotnom poistení to nefunguje tak, že hneď ako vznikne poistný nárok, tak je poistencovi vyplatená poistná suma. Pri poistných udalostiach môže zistenie skutočnej výšky škody trvať aj niekoľko rokov. Vzniknuté, ale dosiaľ nevybavené poistné udalosti, tzv. *IBNS* škody tvoria značný podiel celkového objemu škôd a delíme ich:

- *IBNR škody* (z anglického Incurred But Not Reported) - vzniknuté poistné udalosti, ale ešte nenahlásené
- *RBNS škody* (z anglického Reported But Not Settled) - hlásené škody, ale zatiaľ nezlikvidované

Odhad IBNR a IBNS rezerv sa uskutočňuje pomocou matematickoštatistických metód popísaných v nasledujúcich dvoch kapitolách. Ak to nie je možné z objektívneho dôvodu, napríklad poisťovňa vykonáva činnosť menej ako 5 rokov a nemá teda dostatok údajov na odhad rezerv matematickoštatistickými metódami, použije metódu kvalifikovaného odhadu.

Rezerva RBNS sa väčšinou tvorí z hodnôt jednotlivých pu, keď likvidátor buď na základe svojho odhadu alebo zaužívanej praxe v poisťovni ocení predpokladanú výšku budúceho pp a postupom času svoje odhady spresňuje.

Kapitola 2

Úvod k deterministickému a stochastickému odhadu rezerv

V tejto kapitole sme čerpali z literatúry [5].

Stochastické modely robia predpoklady o očakávanej hodnote budúcich poistných plnení (ďalej označené ako pp) a o variancii budúcich pp. Deterministické modely sú často používané bez veľkej znalosti predpokladov. Preto veľkou výhodou pri stochastických modeloch je, že najprv musia byť vyslovené predpoklady, než sa začne so samotným odhadom.

Stochastické modely dovoľujú testovanie rôznymi technikami. Pri deterministickom prístupe sa robí bodový odhad budúcich pp v danej perióde. Aktuálne pp môžu byť odlišné od očakávaných pp a pri odhade rezerv deterministickým prístupom sa tomuto faktu neprikladá žiadny význam. Stochastické modely umožňujú poistnému matematikovi skúmať, že budúce pp klesajú s určitou mierou spoľahlivosti a môžu byť považované za indikátor toho, či je model pre dané dáta vhodný.

Nevýhodou stochastických modelov je, že ich výsledky bývajú predmetom kritiky, ak sú predpoklady príliš jednoduché a teda nereálne. Ďalšou nevýhodou je, že poskytujú malý priestor pre začlenenie vonkajších faktorov do odhadu rezerv. Táto nevýhoda je veľkou výhodou pri deterministickom prístupe, nakoľko každá metóda tohto prístupu má svoje špecifiká a zohľadňuje napríklad škodový pomer, infláciu, zaslúžené poistné a iné.

Odhad rezerv pomocou stochastických modelov môže byť vykonaný veľmi rýchlo, ale vyžaduje sa istá znalosť štatistiky a počítačových softvérov. Výsledky získané stochastickým prístupom sú zložitejšie na interpretáciu a pochopenie, keď to porovnáme s niektorými jednoduchými metódami deterministického prístupu.

Dobrý stochastický model je ten, ktorý má dostatok parametrov na popis charakteristík dát, ale nie zas až tak veľa, aby sa model stal zložitým, neprehľadným a ťažko pochopiteľným. Počet parametrov stúpa s klesajúcou silou odhadu. Dobrý model udržiava dáta neupravené, lebo malá zmena v dátach môže viesť k veľkým zmenám v parametroch modelu, čo môže viesť k nepresnému odhadu rezerv. Dobrý stochastický model by mal byť schopný testovať predpoklady. Testovanie predpokladov by malo umožniť poistnému matematikovi väčšie pochopenie charakteristiky dát a väčšiu kontrolu nad hodnotami.

Klasická reťazovo - rebríková metóda bola vyvinutá ako nestochastická. Bolo ale dokázané, že je čím ďalej, tým viac založená na stochastickom modeli a už sa menej využíva vo svojej pôvodnej podobe. Stochastický model totiž umožňuje reťazovo - rebríkovej metóde širší rámec modelovania dát. Tieto modely poskytujú riešenia aj v tých prípadoch, keď deterministický prístup zlyhá.

Užitočnosť stochastických modelov je nezanedbateľná, poskytujú viac informácií, ktoré môžu byť užitočné pri odhade rezerv ako aj celkového manažmentu poisťovní. Hlavnou výhodou pri stochastických modeloch je schopnosť presnejšie odhadnúť rezervy a veľká pozornosť sa kladie aj na chyby odhadu. Hlavnou výhodou pri deterministickom prístupe je jednoduchosť modelov, ako aj postup odhadovania rezerv.

Kapitola 3

Označenie pre deterministické a stochastické odhady

V tejto kapitole sme pracovali s literatúrou [6].

V deterministickom prístupe odhadu budú hodnoty značené malými písmenami. Kumulované pp označujeme $c_{i,j}$ a nekumulované $p_{i,j}$. Ak budú známe, tak sa budú označovať bez striešky. Ak ich postupne vypočítame, budú značené strieškou nad malým písmenom.

V stochastickom prístupe budeme používať veľké písmená, ak sa jedná o náhodné premenné a malé písmená pri známych údajoch. Odhady označíme veľkými písmenami a strieškou.

Kapitola 4

Deterministické metódy na odhad rezerv

V tejto kapitole sme čerpali z literatúry [1, 2, 3, 4, 13, 14].

Každá neživotná poisťovňa má niekoľko produktov. Správne by mala odhadnúť rezervu pre každé odvetvie zvlášť a nakoniec tieto rezervy spočítať.

Správne odhadnutie rezerv je veľkým problémom, nakoľko je potrebné brať do úvahy faktory, ktoré ovplyvňujú poisťovňu. Napríklad ochota preplácať poistné plnenia, momentálna politika neživotnej poisťovne a administratívne postupy patria medzi *vnútorné faktory*. Medzi *vonkajšie faktory* patria očakávané ekonomické zmeny, zmeny vyhlášok, zmeny predpisov a inflácia.

Medzi najznámejšie postupy odhadu rezerv patria:

- ***Reťazovo - rebríková metóda***
- ***Separačná metóda***
- ***Metóda Bornhuetter - Ferguson***
- ***Metóda Cape Cod***

Tieto metódy vychádzajú z tzv. *trojuholníkovej schémy.* Predpokladáme, že pri našom nedefinovanom type poistenia je potrebných n rokov na úplnú úhradu škôd. Roky vzniku poistnej udalosti i budú riadky v našej tabuľke a vývojové roky j (koľko rokov uplynulo od vzniku škody po jej vyplatenie) budú stĺpce, pričom $i, j = 1, \ldots, n$. V ľavom hornom trojuholníku sú doteraz vyplatené pp $c_{i,j}$ za poistné udalosti (ďalej označované ako pu) vzniknuté v roku i a vyplatené do konca roku j. Na hlavnej diagonále je uvedený aktuálny stav vyplatených poistných plnení ku koncu roku n. Škody, ktoré vznikli v roku 1 sa do roku n zlikvidujú samé, preto nie je potrebná tvorba rezervy. Našou úlohou je odhadnúť dolný trojuholník, respektíve posledný stĺpec tabuľky a pomocou neho dopočítať rezervy pre každý rok vzniku poistnej udalosti. Všetky horepopísané údaje sa nachádzajú v tabuľke 4.1.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok j**						
i	1	2	...	j	...	$n-1$	n
1	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	...	$c_{1,j}$	...	$c_{1,n-1}$	$c_{1,n}$
2	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	...	$c_{2,j}$	...	$c_{2,n-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
i	$c_{i,1}$	$c_{i,2}$	...	$c_{i,j}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$n-1$	$c_{n-1,1}$	$c_{n-1,2}$					
n	$c_{n,1}$						

Tabuľka 4.1: Horný vývojový trojuholník s doteraz vyplatenými pp

Každá metóda na odhad rezerv by mala obsahovať časť, keď sa vynechajú nejaké údaje, napríklad sa vynechá posledný rok a spraví sa celý postup na týchto zredukovaných dátach. Nakoniec sa porovnajú výsledky so skutočným neredukovaným stavom. Týmto si overíme, či sme zvolili spávnu metódu na odhad rezerv.

4.1 Separačná metóda

V polovici sedemdesiatych rokov 20. storočia inflácia nadobudla svoje maximá a metódy reťazovo - rebríková metóda bez zohľadnenia inflácie a reťazovo - rebríková metóda so zohľadnenou infláciou sa stali nevýhodnými, pretože bolo čoraz ťažšie odhadnúť priebeh budúcej inflácie. Austrálsky aktuár G. Taylor uverejnil postup separačnej metódy v roku 1975. Oproti reťazovo - rebríkovým metódam mala výhodu, že jej súčasťou bol odhad miery inflácie.

Vysvetlíme dva spôsoby odhadu rezerv pomocou separačnej metódy:

- prístup, keď poznáme počet škôd, výšku skutočnej priemernej individuálnej škody a vyplatený konštantný podiel

- prístup, keď sa aplikuje reťazovo - rebríková metóda na diagonály usporiadané do riadkov

Druhý prístup podrobne vysvetlíme v kapitole 4.2, Bornhuetter - Fergusonova metóda, nakoľko budeme využívať tabuľky B-F metódy v postupe odhadu rezerv separačnou metódou.

4.1.1 Prvý prístup odhadu rezerv separačnou metódou

Predpokladáme, že ak by neexistovala inflácia, tak v každom vývojom roku j bez ohľadu na rok vzniku pu i by bola z celkovej škody vyplatená konštantná časť r_j. Túto časť nazývame ***konštantný podiel škody***. Za predchádzajúceho predpokladu by sa nemenila ***priemerná výška individuálnej škody*** c v celom pozorovanom období.

Skutočnú výšku priemernej individuálnej škody v roku $i+j$, kde i je rok vzniku PU a j počet rokov, ktoré uplynuli od vzniku prislúchajúcej pu, označíme λ_{i+j}. Hodnoty individuálnej škody sú v konštantnej výške pre každý kalendárny rok, t.j. hodnoty sú konštantné pre všetky kombinácie i, j vtedy, ak je súčet $i+j$ konštantný. Z tohto nám vyplýva, že hodnoty λ_{i+j} sú konštantné na každej diagonále vývojového trojuholníka. Rozdiel hodnôt výšky priemernej individuálnej škody v rôznych kalendárnych rokoch je spôsobený zmenou mier inflácie.

Zadanie:

- nekumulovaný vývojový trojuholník s doteraz vyplatenými poistnými plneniami

- odhad robíme pre roky vzniku poistnej udalosti $i = 1, \dots, n$ a vývojové roky $j = 1, \dots, n$.

- počet škôd n_i, ktoré boli zaznamenané v každom roku vzniku PU i

Postup odhadu:

1. Ak máme zadaný kumulovaný vývojový trojuholník s pp $c_{i,j}$, kde $i, j = 1, \dots, n$, musíme ho najprv odkumulovať. Nekumulovaný vývojový trojuholník

$p_{i,j}$, kde $i, j = 1, \ldots, n$ dostaneme aplikáciou vzorcov

$$p_{i,1} = c_{i,1} \tag{4.1}$$

$$p_{i,j} = c_{i,j} - c_{i,j-1} \qquad pre \quad j \geq i \tag{4.2}$$

na všetky hodnoty v kumulovanom trojuholníku a zapíšeme výsledky do tabuľky 4.2.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok *j***						
i	1	2	$\ldots$	j	$\ldots$	$n-1$	n
1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\ldots$	$p_{1,j}$	$\ldots$	$p_{1,n-1}$	$p_{1,n}$
2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$\ldots$	$p_{2,j}$	$\ldots$	$p_{2,n-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
i	$p_{i,1}$	$p_{i,2}$	$\ldots$	$p_{i,j}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$n-1$	$p_{n-1,1}$	$p_{n-1,2}$					
n	$p_{n,1}$						

Tabuľka 4.2: Nekumulovaný vývojový trojuholník s doteraz vyplatenými pp

2. Pre trojuholník poistných plnení $p_{i,j}$ zrejme platí

$$p_{i,j} = n_i \cdot r_j \cdot \lambda_{i+j} \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Pre lepšiu ilustráciu uvedieme zápis poistných plnení $p_{i,j}$ v tabuľke 4.3.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok *j***						
i	1	2	$\ldots$	j	$\ldots$	$n-1$	n
1	$n_1 \cdot r_1 \cdot \lambda_2$	$n_1 \cdot r_2 \cdot \lambda_3$	$\ldots$	$n_1 \cdot r_j \cdot \lambda_{j+1}$	$\ldots$	$n_1 \cdot r_{n-1} \cdot \lambda_n$	$n_1 \cdot r_n \cdot \lambda_{n+1}$
2	$n_2 \cdot r_1 \cdot \lambda_3$	$n_2 \cdot r_2 \cdot \lambda_4$	$\ldots$	$n_2 \cdot r_j \cdot \lambda_{j+2}$	$\ldots$	$n_2 \cdot r_{n-1} \cdot \lambda_{n+1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
i	$n_i \cdot r_1 \cdot \lambda_{i+1}$	$n_i \cdot r_2 \cdot \lambda_{i+2}$	$\ldots$	$n_i \cdot r_j \cdot \lambda_{i+j}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$n-1$	$n_{n-1} \cdot r_1 \cdot \lambda_n$	$n_{n-1} \cdot r_2 \cdot \lambda_{n+1}$					
n	$n_n \cdot r_1 \cdot \lambda_{n+1}$						

Tabuľka 4.3: Plnenia $p_{i,j}$ vyjadrené ako súčin počtu škôd, konštantného vyplateného podielu škody a výšky priemernej individuálnej škody

3. Odstránenie vplyvu počtu škôd n_i na výšku vyplatených pp dosiahneme analýzou *matice štandardizovaných hodnôt* $s_{i,j}$, pre ktorú platí:

$$s_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{n_i} = \frac{n_i \cdot r_j \cdot \lambda_{i+j}}{n_i} = r_j \cdot \lambda_{i+j} \qquad pre \quad i, j \geq 1, i + j \leq n + 1$$

Hodnoty $s_{i,j}$ zapíšeme do tabuľky 4.4.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok j**						
i	1	2	...	j	...	$n-1$	n
1	$r_1 \cdot \lambda_2$	$r_2 \cdot \lambda_3$	...	$r_j \cdot \lambda_{j+1}$	...	$r_{n-1} \cdot \lambda_n$	$r_n \cdot \lambda_{n+1}$
2	$r_1 \cdot \lambda_3$	$r_2 \cdot \lambda_4$	...	$r_j \cdot \lambda_{j+2}$	...	$r_{n-1} \cdot \lambda_{n+1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
i	$r_1 \cdot \lambda_{i+1}$	$r_2 \cdot \lambda_{i+2}$	...	$r_j \cdot \lambda_{i+j}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$n-1$	$r_1 \cdot \lambda_n$	$r_2 \cdot \lambda_{n+1}$					
n	$r_1 \cdot \lambda_{n+1}$						

Tabuľka 4.4: Matica štandardizovaných hodnôt $s_{i,j}$

4. Dostali sme sa k odhadu hodnôt r_j pre $j = 1, 2, \ldots, n$ a odhadu hodnôt λ_{i+j} pre $2 \leq i + j \leq n + 1$. Keďže n je maximálny počet rokov na zlikvidovanie škody, tak zrejme platí $r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} + r_n = 1$. Všetky *súčty na i-tej diagonále* označíme d_i pre $i = 2, \ldots, n+1$. Potom platí

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= s_{n,1} + s_{n-1,2} + \cdots + s_{i,j} + \cdots + s_{2,n-1} + s_{1,n} \\ &= r_1 \cdot \lambda_{n+1} + r_2 \cdot \lambda_{n+1} + \cdots + r_n \cdot \lambda_{n+1} \\ &= \lambda_{n+1} \cdot (r_1 + \cdots + r_n) \\ &= \lambda_{n+1} \end{aligned}$$

Odhad λ_{n+1} sa rovná vstupu na $(n+1)$-tej diagonále:

$$\hat{\lambda}_{n+1} = d_{n+1} \tag{4.3}$$

Jediný prvok trojuholníka obsahujúci r_n v tabuľke 4.4 je $s_{1,n} = r_n \cdot \lambda_{n+1}$. Z predchádzajúceho vzťahu vyjadríme odhad $\hat{r}_n$:

$$\hat{r}_n = \frac{s_{1,n}}{\hat{\lambda}_{n+1}} \tag{4.4}$$

Postup opakujeme pre súčet na n-tej diagonále:

$$\begin{aligned} d_n &= s_{n-1,1} + s_{n-2,2} + \cdots + s_{1,n-1} \\ &= r_1 \cdot \lambda_n + r_2 \cdot \lambda_n + \cdots + r_{n-1} \cdot \lambda_n \\ &= \lambda_n \cdot (r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1}) \\ &= \lambda_n \cdot (1 - r_n) \\ &\Downarrow \\ \hat{\lambda}_n &= \frac{d_n}{1 - \hat{r}_n} \end{aligned}$$

V tabuľke 4.4 máme dva prvky $(s_{1,n-1}, s_{2,n-1})$, ktoré obsahujú r_{n-1}. Odhad $\hat{r}_{n-1}$ dostaneme z rovnice:

$$\begin{aligned} s_{1,n-1} + s_{2,n-1} &= r_{n-1} \cdot \lambda_n + r_{n-1} \cdot \lambda_{n+1} \\ &= r_{n-1} \cdot (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \\ &\Downarrow \\ \hat{r}_{n-1} &= \frac{s_{1,n-1} + s_{2,n-1}}{\hat{\lambda}_n + \hat{\lambda}_{n+1}} \end{aligned}$$

Analogickým postupom získame prvky $\hat{\lambda}_{n-1}$ a $\hat{r}_{n-2}$:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{n-1} &= \frac{d_{n-1}}{1 - \hat{r}_n - \hat{r}_{n-1}} \\ \hat{r}_{n-2} &= \frac{s_{1,n-2} + s_{2,n-2} + s_{3,n-2}}{\hat{\lambda}_{n-1} + \hat{\lambda}_n + \hat{\lambda}_{n+1}} \end{aligned}$$

Ďalej nám už len stačí dopočítať prvky $\hat{\lambda}_{n-2}, \hat{\lambda}_{n-3}, \ldots, \hat{\lambda}_2$ a $\hat{r}_{n-3}, \ldots, \hat{r}_1$ rovnakým postupom.

5. Predpokladáme, že v ďalších rokoch bude inflácia rovnaká a teda pre priemernú výšku skutočnej škody pre $n + 1 < i + n \leq 2n$ platí:

$$\hat{\lambda}_{i+(n+1)} = \hat{\lambda}_{(n+1)} \cdot (1 + \text{ročná miera inflácie})^i$$

6. Dopočítame dolný trojuholník matice štandardizovaných hodnôt pre
$n + 1 < i + j \leq 2n$:

$$\hat{s}_{i,j} = \hat{r}_j \cdot \hat{\lambda}_{i+j}$$

7. Pomocou súčinu prvkov matice štandardizovaných hodnôt a počtu škôd vypočítame nekumulované poistné plnenia pre $i = 2, \ldots, n$ a $j \geq n - i + 2$:

$$\hat{p}_{i,j} = \hat{s}_{i,j} \cdot n_i$$

8. Celkovú výšku rezerv dostaneme ako súčet práve vypočítaných nekumulovaných poistných plnení:

$$R = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=n-i+2}^{n} \hat{p}_{i,j}$$

4.2 Metóda Bornhuetter - Ferguson

Slovník:

Škodový pomer je pomer medzi čistým poistným plnením a čistým zaslúženým poistným počas sledovaného obdobia.

Predpísané poistné je hrubé poistné predpísané v poistnej zmluve, ktoré nie je znížené o zľavy a prirážky na poistnom.

Prijaté poistné je inkasované poistné, ktoré poisťovňa reálne dostala po zľavách a prirážkach na poistnom. Zväčša je nižšie ako prepísané poistné a delí sa na zaslúžené poistné a nezaslúžené poistné.

Zaslúžené poistné je poistné, ktoré časovo súvisí s prebiehajúcim účtovným obdobím.

Nezaslúžené poistné je poistné zaplatené v prebiehajúcom účtovnom období, ale prislúcha budúcemu obdobiu ako účtovnému obdobiu.

Bornhuetter - Ferguson metóda zohľadňuje skutočnosť, že sa určite bude meniť škodový pomer z roku na rok vo vývojovom trojuholníku za dlhšie časové obdobie. Presnosť metódy spočíva v stanovení správnych škodových pomerov.

Zadanie:

- kumulovaný vývojový trojuholník s doteraz vyplatenými pp
- odhad robíme pre roky vzniku poistnej udalosti $i = 1, \ldots, n$ a vývojové roky $j = 1, \ldots, n$.
- výška zaslúženého poistného pre roky $1, \ldots, n$, pričom výška ZP nemusí byť pre všetky roky rovnaká.

Postup odhadu:

1. Ak máme zadaný nekumulovaný trojuholník, tak ho musíme najprv zkumulovať. Všeobecný zápis pre kumulovanie prvkov z nekumulovných poistných plnení $p_{i,j}$ je

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} p_{i,k} \tag{4.5}$$

2. Zistíme odhady koeficientov vývoja $\hat{m}_j$ pre $j = 2, \ldots, n$:

$$\hat{m}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1}} \tag{4.6}$$

3. Pomocou odhadov koeficientov vývoja dopočítame *kumulatívne koeficienty* $\hat{k}_j$, kde $j = 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} \hat{k}_2 &= \hat{m}_2 \\ \hat{k}_3 &= \hat{m}_2 \cdot \hat{m}_3 \\ &\vdots \\ \hat{k}_{n-1} &= \hat{m}_2 \cdot \hat{m}_3 \cdot \dots \cdot \hat{m}_{n-1} \\ \hat{k}_n &= \hat{m}_2 \cdot \hat{m}_3 \cdot \dots \cdot \hat{m}_{n-1} \cdot \hat{m}_n \end{aligned}$$

4. Vypočítame *inverzné koeficienty* $\hat{i}_j$, kde $j = 2, \ldots, n$:

$$\hat{i}_j = \frac{1}{\hat{k}_j}$$

5. Od 1 odpočítame inverzné koeficienty a dostaneme doplnky inverzných koeficientov $\hat{i}_j^D$, kde $j = 2, \ldots, n$:

$$\hat{i}_j^D = 1 - \hat{i}_j$$

Inverzný koeficient pre prvý rok 1 je 1.00, teda t.j. $\hat{i}_1 = 1$, a doplnok inverzného koeficientu pre rok 1 je 0, t.j. $\hat{i}_1^D = 0$.

6. Zadaný kumulovaný vývojový trojuholník s pp prepočítame pomocou vzorcov (4.1) a (4.2) na nekumulovaný vývojový trojuholník. Výsledok tohto kroku sa nachádza v tabuľke 4.2.

7. Zaslúžené poistné označíme ako z_i. Horný nekumulovaný trojuholník predelíme zaslúženým poistným pre prislúchajúci rok vzniku PU a dostaneme nekumulované škodové pomery, ktoré sa nachádzajú v tabuľke 4.5.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok j**						
i	1	2	$\dots$	j	$\dots$	$n-1$	n
1	$\frac{p_{1,1}}{z_1}$	$\frac{p_{1,2}}{z_1}$	$\dots$	$\frac{p_{1,j}}{z_1}$	$\dots$	$\frac{p_{1,n-1}}{z_1}$	$\frac{p_{1,n}}{z_1}$
2	$\frac{p_{2,1}}{zp_2}$	$\frac{p_{2,2}}{zp_2}$	$\dots$	$\frac{p_{2,j}}{z_2}$	$\dots$	$\frac{p_{2,n-1}}{z_2}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
i	$\frac{p_{i,1}}{z_i}$	$\frac{p_{i,1}}{z_i}$	$\dots$	$\frac{p_{i,j}}{z_i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$n-1$	$\frac{p_{n-1,1}}{z_{n-1}}$	$\frac{p_{n-1,1}}{z_{n-1}}$					
n	$\frac{p_{n,1}}{z_n}$						

Tabuľka 4.5: Nekumulovaný vývojový trojuholník predelený príslušným zaslúženým poistným z_i

8. Dolný trojuholník dostaneme extrapoláciou nekumulovaných škodových pomerov v jednotlivých stĺpcoch z kroku **7**.

Napríklad pre stĺpec i odhadneme budúci škodový pomer priemerom vypočítaných škodových pomerov vývojového roku i, ktoré sme dostali v predchádzajúcom kroku (všetky prázdne polia v stĺpci budú mať túto hodnotu). To, či vezmeme všetky vypočítané hodnoty závisí od ich veľkosti.

Ak majú všetky hodnoty škodných pomerov v stĺpci porovnateľnú veľkosť, tak urobíme aritmetický priemer všetkých hodnôt stĺpca.

Ak najvyššou doposiaľ vypočítanou hodnotou je hodnota posledného vypočítaného škodového pomeru (pre vývojový rok $j = 2$ je to rok vzniku pu $i = (n-1)$), a pred ním sa nachádzajú veľkosťou porovnateľné hodnoty škodového pomeru, tak spravíme aritmetický priemer iba týchto porovnateľných hodnôt.

Ak najvyššou doposiaľ vypočítanou hodnotou je hodnota posledného vypočítaného škodového pomeru, a pred ním sa nenachádzajú veľkosťou porovnateľné hodnoty škodového pomeru, tak všetky nedopočítané škodové pomery v stĺpci sú rovnaké ako najvyšší škodný pomer.

9. V každom riadku sa spočíta škodový pomer $\hat{sp}_i$, kde $i = 1, \dots, n$. Teda spočítajú sa hodnoty všetkých vývojových rokov pre každý rok vzniku PU.

10. Výšku rezerv pre jednotlivé roky vzniku PU dostaneme vynásobením zaslúženého poistného z_i, škodového pomeru $\hat{sp}_i$ a doplnku inverzného koeficientu:

$$Rezerva_i = z_i \cdot \hat{sp}_i \cdot \hat{i}_j^D \tag{4.7}$$

11. Celkovú výšku rezervy R zistíme spočítaním rezerv pre jednotlivé roky:

$$R = \sum_{i=1}^{n} Rezerva_i$$

4.2.1 Druhý prístup odhadu rezerv separačnou metódou

Zadanie:

- nekumulovaný vývojový trojuholník s doteraz vyplatenými pp

- odhad robíme pre roky vzniku poistnej udalosti $i = 1, \ldots, n$ a vývojové roky $j = 1, \ldots, n$.

- výška zaslúženého poistného pre roky $1, \ldots, n$, pričom výška ZP nemusí byť pre všetky roky rovnaká.

Postup odhadu:

1. Ak máme zadaný kumulovaný vývojový trojuholník s poistnými plneniami, odkumulujeme ho pomocou vzorcov (4.1) a (4.2) a výsledok tohto kroku sa nachádza v tabuľke 4.2.

2. Všetky nekumulované poistné plnenia predelíme zaslúženým poistným pre prislúchajúci rok. Výsledky tohto kroku sa nachádzajú v tabuľke 4.5.

3. Tabuľku s normovanými pp z predchádzajúceho kroku prerovnáme tak, že vymeníme riadky s diagonálami, ako je vidno v tabuľke 4.6.

4. Tabuľku 4.6 zkumulujeme postupným sčitovaním prvkov v riadkoch pomocou vzťahu (4.5).

5. Vypočítame odhady koeficientov vývoja $\hat{m}_2, \hat{m}_3, \ldots, \hat{m}_n$ podľa vzťahu (4.6).

Rok vzniku PU	Vývojový rok j						
i	1	2	3	$\dots$	$n-2$	$n-1$	n
n	$\frac{p_{n,1}}{z_n}$	$\frac{p_{n-1,2}}{z_{n-1}}$	$\frac{p_{n-2,3}}{z_{n-2}}$	$\dots$	$\frac{p_{3,n-2}}{z_3}$	$\frac{p_{2,n-1}}{z_2}$	$\frac{p_{1,n}}{z_1}$
$n-1$	$\frac{p_{n-1,1}}{z_{n-1}}$	$\frac{p_{n-2,2}}{z_{n-2}}$	$\frac{p_{n-3,3}}{z_{n-3}}$	$\dots$	$\frac{p_{2,n-2}}{z_2}$	$\frac{p_{1,n-1}}{z_1}$	
$n-2$	$\frac{p_{n-2,1}}{z_{n-2}}$	$\frac{p_{n-3,2}}{z_{n-3}}$	$\frac{p_{n-4,3}}{z_{n-4}}$	$\dots$	$\frac{p_{1,n-2}}{z_1}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
3	$\frac{p_{3,1}}{z_3}$	$\frac{p_{2,2}}{z_2}$	$\frac{p_{1,3}}{z_1}$				
2	$\frac{p_{2,1}}{z_2}$	$\frac{p_{1,2}}{z_1}$					
1	$\frac{p_{1,1}}{z_1}$						

Tabuľka 4.6: Nekumulovaný vývojový trojuholník predelený zp s vymenenými diagonálami za riadky

6. Následne vyrátame kumulatívne koeficienty a inverzné koeficienty (prevrátené hodnoty kumulatívnych koeficientov) ako v B-F metóde v kroku **3** a **4**. Návod na výpočet sa nachádza v tabuľke 4.7.

Rok vzniku PU	**Odhady koeficientov vývoja**	**Kumulatívne koeficienty**	**Inverzné koeficienty**
n	1	1	1
$n-1$	$\hat{m}_n$	$\hat{k}_n = \hat{m}_n$	$\hat{i}_n = \frac{1}{\hat{k}_n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	$\hat{m}_3$	$\hat{k}_3 = \hat{m}_n \cdot \hat{m}_{n-1} \cdot \dots \cdot \hat{m}_3$	$\hat{i}_3 = \frac{1}{\hat{k}_3}$
1	$\hat{m}_2$	$\hat{k}_2 = \hat{m}_n \cdot \hat{m}_{n-1} \cdot \dots \cdot \hat{m}_2$	$\hat{i}_2 = \frac{1}{\hat{k}_2}$

Tabuľka 4.7: Koeficienty

7. *Separačný index* $\hat{\lambda}_i$ má podobný význam ako výška priemernej individuálnej škody z kapitoly 4.1.1. Je to hodnota, ktorá vznikne v poslednom stĺpci tabuľky po doplnení na štvorec. Napríklad pre rok vzniku PU $i = 1$ získame $\hat{\lambda}_1$ vynásobením kumulovaného diagonálneho prvku v riadku $i = 1$ (ktorý nám vznikol po kroku **4**) a $\hat{k}_2$ z tabuľky 4.7. Rovnakým postupom získame separačné indexy pre roky $2, \dots, n$ a zapíšeme ich do tabuľky 4.8.

8. *Index oneskorenia* $\hat{r}_j$ predstavuje rozdelenie pp cez jednotlivé roky vývoja. Indexy sú vyrátané ako prírastky inverzných koeficientov z tabuľky 4.7. Napríklad pre rok vývoja $j = 2$ index oneskorenia vypočítame odčítaním inverzného koeficientu pre rok vzniku pu 1 od inverzného koeficientu pre rok vzniku pu 2. Rovnakým postupom získame index oneskorenia pre vývojové roky $1, 3, \dots, n$ a zapíšeme ich do tabuľky 4.9.

Rok vzniku PU	Separačné indexy
n	$\hat{\lambda}_n = c_{n,n} \cdot \hat{k}_n$
$n-1$	$\hat{\lambda}_{n-1} = c_{n-1,n-1} \cdot \hat{k}_{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$
2	$\hat{\lambda}_2 = c_{2,2} \cdot \hat{k}_3$
1	$\hat{\lambda}_1 = c_{1,1} \cdot \hat{k}_2$

Tabuľka 4.8: Separačné indexy

Rok vývoja PU	Index oneskorenia
n	$\hat{r}_n = \hat{i}_n - \hat{i}_{n-1}$
$n-1$	$\hat{r}_{n-1} = \hat{i}_{n-1} - \hat{i}_{n-2}$
$\vdots$	$\vdots$
2	$\hat{r}_2 = \hat{i}_3 - \hat{i}_2$
1	$\hat{r}_1 = \hat{i}_2$

Tabuľka 4.9: Indexy oneskorenia

9. Aby sme videli súvislosť tohto postupu so separačnou metódou vysvetlíme si získanie separačných indexov a indexov oneskorenia pomocou známych vzorcov z kapitoly 4.1.1, kde je popísaný postup odhadu rezerv pomocou separačnej metódy prvým prístupom.

Hodnoty s prerovnanými diagonálami a riadkami z tabuľky 4.6 sú vlastne štandardizované hodnoty z tabuľky 4.4.

Kumulované hodnoty, ktoré nám vznikli v kroku **4** sú vlastne vstupy na diagonále $d_1, \ldots, d_{n+1}$ z kapitoly 4.1.1 z kroku **4**.

Podľa vzorcov (4.3) a (4.4) najskôr vypočítame $\hat{\lambda}_{n+1}$ pomocou d_{n+1} a potom $\hat{r}_n$. Analogicky dopočítame separačné indexy pre všetky roky vzniku pu a indexy oneskorenia pre všetky vývojové roky.

10. Pre lepšie výsledky zohľadníme aj odhad budúcej ročnej inflácie $x\% = 0.0x$. Dopočítame dolný vývojový trojuholník, v ktorom bude zohľadnená inflácia a tabuľka je opäť usporiadaná do riadkov podľa rokov vzniku PU.

Postup doplnenia dolného trojuholníka: pre prvý rok vzniku pu a vývojový rok n

prenesieme hodnotu $\frac{p_{1,n}}{z_1}$ z tabuľky 4.5. Všetky ostatné prvky v dolnom trojuholníku vypočítame podľa vzorca

$$\hat{d}_{i,j} = \hat{r}_j \cdot (1,0x)^b \tag{4.8}$$

kde

i = rok vzniku pu,

j = vývojový rok pre príslušný počítaný prvok,

b = koľký prvok od hlavnej diagonály chceme doplniť.

Na koniec tabuľky pridáme stĺpec, ktorý sa nazýva *výplatné rezíduá* a dostaneme ho sčítaním práve dopočítaných prvkov pre jednotlivé roky vzniku pu.

11. Odhad rezerv pre každý rok vzniku pu dostaneme súčinom zaslúženého poistného pre príslušný rok, posledného separačného indexu a výplatného rezídua rovnako, ako je v tabuľke 4.10.

Rok vzniku PU	**Zaslúžené poistné**	**Posledný separačný index**	**Výplatné rezíduá**	**Odhadnutá rezerva**
1	z_1	$\hat{\lambda}_n$	$\hat{v}_1$	$R_1 = z_1 \cdot \hat{\lambda}_n \cdot \hat{v}_1$
2	z_2	$\hat{\lambda}_n$	$\hat{v}_2$	$R_2 = z_2 \cdot \hat{\lambda}_n \cdot \hat{v}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	z_{n-1}	$\hat{\lambda}_n$	$\hat{v}_{n-1}$	$R_{n-1} = z_{n-1} \cdot \hat{\lambda}_n \cdot \hat{v}_{n-1}$
n	z_n	$\hat{\lambda}_n$	$\hat{v}_n$	$R_n = z_n \cdot \hat{\lambda}_n \cdot \hat{v}_n$

Tabuľka 4.10: Odhadnutá rezerva vypočítaná separačnou metódou

12. Celkovú rezervu R vypočítame sčítaním odhadnutých rezerv pre príslušné roky:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

4.3 Cape Cod metóda

Tejto metóde sme sa venovali v bakalárskej práci [13], takže uvedieme len skrátený postup. Pojmy použité v tejto časti sú vysvetlené v slovníku v časti 4.2.

Špecifiká tejto metódy sú v použití škodového pomeru. Ak sú riadky vývojového trojuholníku zoradené podľa roku vzniku pu, tak použijeme zaslúžené poistné na výpočet škodového pomeru. Ak vezmeme do úvahy časové obdobie, na ktoré bol obchod uzavretý, tak budeme potrebovať hodnoty *predpísaného poistného* na stanovenie škodového pomeru.

Zadanie:

- nekumulovaný vývojový trojuholník s doteraz vyplatenými pp.
- odhad robíme pre roky vzniku poistnej udalosti $i = 1, \ldots, n$ a vývojové roky $j = 1, \ldots, n$.
- konštantná výška zaslúženého poistného pre roky $1, \ldots, n$.

Postup odhadu:

1. Vypočítame si odhady koeficientov vývoja, kumulatívne koeficienty a inverzné koeficienty ako v metóde Bornhuetter - Ferguson v časti 4.2 v krokoch **3** a **4**.

2. Pre každý rok vzniku pu vynásobíme zaslúžené poistné a inverzný koeficient a dostaneme upravené zaslúžené poistné.

3. Sčítame diagonálne prvky v kumulovanom vývojovom trojuholníku a dostaneme celkové poistné plnenie.

4. Škodový pomer dostaneme ako podiel celkového poistného plnenia z kroku **3** a upraveného zaslúženého poistného z kroku **2**.

5. Rezervy pre jednotlivé roky vzniku pu získame vynásobením zaslúženého poistného, škodového pomeru a doplnku príslušného inverzného koeficientu.

6. Celkovú rezervu získame sčítaním rezerv pre jednotlivé roky vzniku pu.

4.4 Reťazovo - rebríková metóda

Reťazovo - rebríková metóda patrí medzi najznámejšie a najpoužívanejšie metódy na odhad rezerv. Je to hlavne kvôli jej jednoduchosti a logickému postupu.

V praxi sa používa:

- reťazovo - rebríková metóda bez zohľadnenia inflácie
- reťazovo - rebríková metóda so zohľadnenou infláciou

Pri zohľadňovaní inflácie treba mať zadané hodnoty inflácie pre každý rok vzniku poistnej udalosti ako aj odhad budúcej hodnoty inflácie.

Predpoklady:

- stabilita vývoja vyplácaných súm poistných plnení pre každý rok vzniku pu
- stabilita inflácie pre vývojové roky $j = 1, \ldots, n$
- portfólium poistiek, ktoré obsahuje podobné poistky

V práci neuvedieme klasický výpočet reťazovo - rebríkovej metódy. Tento postup ako aj postup odhadu rezerv pomocou reťazovo - rebríkovej metódy s inflačným vyrovnaním je možné nájsť v bakalárskej práci [13]. Postup so zohľadnením váženého priemeru sme si vybrali pre nadväznosť so stochastickým prístupom odhadu rezerv.

Zadanie:

- kumulovaný vývojový trojuholník s doteraz vyplatenými poistnými plneniami $c_{i,j}$
- odhad robíme pre roky vzniku poistnej udalosti $i = 1, \ldots, n$ a vývojové roky $j = 1, \ldots, n$.

Postup odhadu:

1. Vypočítame si *individuálne odhady koeficientov vývoja* $m_{i,j}$:

$$m_{i,j} = \frac{c_{i,j}}{c_{i,j-1}} \qquad \text{pre} \quad j = 2, \ldots, n \qquad \text{a} \quad i = 1, \ldots, n-j+1$$

Pôvodná matica mala dimenziu $n \times n$ a matica s individuálnymi koeficientami vývoja má dimenziu $(n-1) \times (n-1)$. Prvý stĺpec si označíme m_2 a bude obsahovať všetky individuálne koeficienty $m_{i,2}$ pre $i = 1, \ldots, (n-1)$. Zvyšné stĺpce si označíme rovnakým spôsobom a posledný bude m_n. Matica individuálnych faktorov sa nachádza v tabuľke 4.11.

Rok vzniku PU	**Odhady koeficientu vývoja m_j**						
i		m_2	m_3	$\ldots$	m_j	$\ldots$	m_n
1		$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$\ldots$	$m_{1,j}$	$\ldots$	$m_{1,n}$
2		$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	$\ldots$	$m_{2,j}$		
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$				
i		$m_{i,2}$	$m_{i,3}$				
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$				
$n-1$		$m_{n-1,2}$					
n							

Tabuľka 4.11: Matica individuálnych koeficientov vývoja

2. Pre každý vývojový rok vypočítame *vážený priemer* w_j, ktorý priraďuje najväčšiu váhu tomu roku, kde bolo najväčšie pp:

$$w_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1} \cdot m_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1}} \qquad \text{pre} \quad j = 2, \ldots, n$$

3. Dolný vývojový trojuholník kumulovaných plnení dostaneme vynásobením diagonálneho prvku kumulovaného pp a váženého priemeru:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{2,n} &= c_{2,n-1} \cdot w_n \\ \hat{c}_{3,n-1} &= c_{3,n-2} \cdot w_{n-1} \\ \hat{c}_{3,n} &= c_{3,n-2} \cdot w_{n-1} \cdot w_n \\ &\vdots \\ \hat{c}_{n,n} &= c_{n,1} \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot \cdots \cdot w_n \end{aligned}$$

4. Ak chceme získať iba výšku konečných plnení $c_{i,n}$ pre každý rok vzniku i, tak odhadneme koeficienty vývoja pre $j = 2, \ldots, n$:

$$\hat{m}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1}}$$

a následne dopočítame posledný stĺpec plnení:

$$\hat{c}_{i,n} = c_{i,n-i+1} \cdot \prod_{j=n-i+2}^{n} \hat{m}_j. \tag{4.9}$$

V odhade konečných plnení sa využíva iba diagonálny prvok zo všetkých plnení. Prvky zo skorších vývojových rokov nám nedávajú žiadnu novú informáciu, nakoľko sú obsiahnuté v diagonálnom prvku.

5. Hodnotu rezervy pre jednotlivé roky vzniku pu získame odčítaním diagonálnych hodnôt pre roky vzniku pu i od hodnôt $\hat{c}_{i,n}$, kde $i = 1, \ldots, n$. Celkovú rezervu získame sčítaním týchto rezerv pre jednotlivé roky.

$$R = \sum_{i=1}^{n} (\hat{c}_{i,n} - c_{i,n-i+1}) \tag{4.10}$$

Kapitola 5

Stochastický prístup výpočtu rezerv

V tejto kapitole sme pracovali s literatúrou [6, 7, 8, 9].

Reťazovo - rebríková metóda má ale aj svoje slabé stránky. Najdôležitejšou je, že neposkytuje údaje, ktoré by sa týkali variability výsledkov. Metóda bola vylepšená vývojom stochastických modelov, ktoré zohľadňujú postup reťazovo - rebríkovej metódy a odstraňujú jej hlavný nedostatok. Takisto modely stochastického prístupu môžu byť využité na posúdenie, či je reťazovo - rebríková metóda vhodná pre daný súbor dát.

Stochastický prístup je dôležitejší z hľadiska odhadu a deterministický odhad by sa mal používať, iba ak v dosahu nie je výpočtová technika. Ale v praxi sa využíva menej z dôvodu, že je zložitejší na pochopenie.

Každý model je založený na vlastných ako aj niektorých spoločných predpokladoch, ktoré musia byť splnené, aby sme vedeli určiť, ktorý model je najvhodnejší.

Uvedieme iba stochastické metódy, ktoré dosahujú rovnaké výsledky ako pri deterministickom odhade. Ide o ***multiplikatívny model***, ***Poissonov model*** a ***Mackov model***. Jedným z našich cieľov je ukázať, že uvedené modely dávajú skutočne rovnaké odhady ako v prípade deterministického prístupu.

Veľké množstvo autorov odporúča Poissonov model ako najvhodnejší. Pri Poissonovom modeli musíme poznať hustotu, kým v multiplikatívnom nám stačí poznať prvý moment a v Mackovom prvé dva momenty.

5.1 Jednoduchý stochastický model

Odvodíme si jednoduchý stochastický model, ktorý je úzko spätý s deterministickým modelom reťazovo - rebríkovej metódy a dáva základ pre stochastické modely v ďalších sekciách.

$m_{i,j}$ považujeme za neznámy parameter. Predpokladáme, že $C_{i,j}$, kde $i = 1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, n$ je stochastická premenná s realizáciami $c_{i,j}$. Rozdelením premennej $C_{i,j}$ sa budeme zaoberať neskôr. Predpoklad rozdelenia bude základným rozlíšením pre stochastické modely. Nasledujúca tabuľka 5.1 zobrazuje kumulovaný horný vývojový trojuholník so stochastickými premennými.

Rok vzniku PU	**Vývojvý rok j**						
i	1	2	3	$\ldots$	j	$\ldots$	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$\ldots$	$C_{1,j}$	$\ldots$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	$\ldots$	$C_{2,j}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
i	$C_{i,1}$	$C_{i,2}$	$C_{i,3}$		$C_{i,j}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$					
n	$C_{n,n}$						

Tabuľka 5.1: Kumulovaný vývojový trojuhlník so stochastickými premennými

Predpokladáme medzi vývojovými rokmi lineárny vzťah:

$$C_{i,j} = C_{i,j-1} \cdot m_{i,j} \qquad \text{pre} \quad 2 \leq j \leq n \tag{5.1}$$

Očakávaná hodnota premenných vo vzorci (5.1) je:

$$E(C_{i,j}) = E(C_{i,j-1}) \cdot m_{i,j} \tag{5.2}$$

Na základe deterministického vzťahu (4.9) pre poistné plnenia vo vývojovom roku n si vyjadríme ich očakávanú hodnotu:

$$E(C_{i,n}) = E(C_{i,n-i+1}) \cdot \prod_{j=n-i+2}^{n} m_{i,j} \tag{5.3}$$

Z predchádzajúceho vzťahu (5.3) vyplýva, že očkávania minulých pp môžeme použiť na predpoveď budúcej hodoty pp. Lenže, ak sa pozrieme na vzťah (4.9) v deterministickej reťazovo - rebríkovej metóde, tak tam sa neráta s očakávaním, ale s presnou hodnotou kumulovaného plnenia $C_{i,n-i+1}$. Pri reťazovo - rebríkovej metóde je predpoklad, že hodnota kumulovaného pp je viac relevantná ako jej očakávanie. Na základe tohto predpokladu si prepíšeme vzťah (5.2):

$$E(C_{i,j}|c_{i,j-1}) = c_{i,j-1} \cdot m_{i,j} \tag{5.4}$$

Model podmienených očakávaní vo vzťahu (5.4) je ***jednoduchý stochastický model reťazovo - rebríkového algoritmu***.

Po nájdení stochastického modelu by sme mali urobiť predpoklady o poistných plneniach. Podstatnou "vlastnosťou" plnení je ich výška. Ich počet samozrejme tiež berieme do úvahy. Zatiaľ sme si neuviedli, čo nám vyjadrujú nekumulované pp $P_{i,j}$ a kumulované pp $C_{i,j}$. Môžu reprezentovať výšku, rovnako ako v deterministickom prístupe, alebo počet.

Nech $N(t)$ je počet poistných plnení na intervale $(0, t\rangle$. Je to premenná s Poissonovým rozdelením a je neklesajúcou funkciou spojitého času t.

Nech Y_k je výška plnenia s poradovým číslom k. Logicky, celková výška nárokov $X(t)$ je funkciou počtu nárokov $N(t)$ do času t a definujeme ju:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

Ak Y_k sú nezávislé a rovnako rozdelené, tak $X(t)$ má zložené Poissonovo rozdelenie.

Strednú hodnotu a varianciu určíme cez zloženú strednú hodnotu a zloženú varianciu:

$$\begin{aligned} E_X[X(t)] &= E_N E_X[X(t)|N(t)] = E_N E_X\Big[\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k|N(t)\Big] \\ &= E_N[N(t)E_Y(Y_k)] \\ &= E_N[N(t)]E_Y(Y_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var_X[X(t)] &= E_N[Var_X[X(t)|N(t)]] + Var_N[E_X[X(t)|N(t)]] \\ &= E_N\Big[Var_X\Big[\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k|N(t)\Big]\Big] + Var_N\Big[E_X\Big[\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k|N(t)\Big]\Big] \\ &= E_N[N(t)Var_Y(Y_k)] + Var_N[N(t)E_Y(Y_k)] \\ &= E_N[N(t)]Var_Y(Y_k) + [E_Y(Y_k)]^2 Var_N[N(t)] \end{aligned}$$

5.2 Multiplikatívny model

Multiplikatívny model uvádzame ako prvý, nakoľko ho môžeme považovať za základ Poissonovho a Mackovho modelu.

V tejto časti budeme používať neznáme parametre multiplikatívneho modelu x_i a y_j. Poznamenajme, že sa nejedná o realizácie premenných $X(t)$ a Y_k z predchádzajúcej sekcie 5.1. $P_{i,j}$ je stochastická premenná. Predpokladáme, že $y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_n = 1$. Prvý moment nekumulovaných pp pre $1 \leq i$ a $j \leq n$ je:

$$E(P_{i,j}) = x_i \cdot y_j \tag{5.5}$$

Vzťah (5.5) nám hovorí, že očakávania nekumulovaných pp môžeme napísať ako súčin parametra x_i závislého na roku vzniku pu a parametra y_j závislého na vývojovom roku. Vieme, že suma y_j sa rovná jednej a teda:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} E(P_{i,j}) &= x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j \\ E(C_{i,n}) &= x_i \end{aligned} \tag{5.6}$$

Zo vzťahu (5.6) vyplýva, že x_i sú hodnoty očakávaných kumulovaných poistných plnení pre vývojový rok n. Ak by $P_{i,j}$ vyjadroval počet pp, tak x_i by nám reprezentovalo očakávaný počet pp pre každý rok $1, \ldots, n$ a y_j by nám vyjadrovalo pravdepodobnosť, že nároky vzniknuté v roku i budú hlásené v roku j. Pri vyjadrení y_j ako pravdepodobnosti, nám vzniká obmedzenie: $0 \leq y_j$ pre $j = 1, \ldots, n$.

Ak máme vývojový trojuholník kumulovaných pp, tak ho odkumulujeme podľa vzťahu $P_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$. Použitím vzťahu (5.3) z jednoduchého stochastického modelu a predchádzajúceho vzorca pre nekumulované pp, vieme vyjadriť očakávanie nekumulovaného pp $P_{i,j}$:

$$\begin{aligned} E[P_{i,j}] &= E[C_{i,j}] - E[C_{i,j-1}] \\ &= (m_{i,j+1} \cdot \cdots \cdot m_{i,n})^{-1} \cdot E[C_{i,n}] - (m_{i,j} \cdot \cdots \cdot m_{i,n})^{-1} \cdot E[C_{i,n}] \\ &= E[C_{i,n}] \cdot [(m_{i,j+1} \cdot \cdots \cdot m_{i,n})^{-1} - (m_{i,j} \cdot \cdots \cdot m_{i,n})^{-1}] \end{aligned}$$

Mack preukázal nájdením vhodných kandidátov pre x_i a y_j, že vzťah (5.2) z jednoduchého stochastického modelu je ekvivalentný multiplikatívnemu modelu. Vďaka tejto ekvivalencii a vzťahu $E(C_{i,n}) = x_i$ vieme, že hodnota parametra y_j je

$$(m_{i,j+1} \cdot m_{i,j+2} \cdot \cdots \cdot m_{i,n})^{-1} - (m_{i,j} \cdot m_{i,j+1} \cdot \cdots \cdot m_{i,n})^{-1}$$

.
Pre vývojový rok $2 \leq j < n$ parameter y_j nadobúda hodnoty:

$$\begin{aligned} y_1 &= (m_{i,2} \cdot m_{i,3} \cdot \dots \cdot m_{i,n})^{-1} \\ y_j &= (m_{i,j+1} \cdot \dots \cdot m_{i,n})^{-1} - (m_{i,j} \cdot \dots \cdot m_{i,n})^{-1} \\ y_n &= 1 - (m_{i,n})^{-1} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Nesmieme zabudnúť, že y_j nám musí spĺňať obmedzenia $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ a $0 \leq y_j$ pre $j = 1, \dots, n$, aby sme mohli prijať hodnoty parametra y_j. Ak $m_{i,j} \geq 1$, tak $0 \leq y_j$ pre $j = 1, \dots, n$. Sčítaním vzťahov y_j pre všetky možné hodnoty j dostaneme vlastne čiastočné súčty, ktoré na konci dávajú pevnú hodnotu, 1. Týmto sme potvrdili vlastnosť, že suma y_j je rovná jednej. Takže vzťah (5.7) je správnou voľbou pre parameter y_j, kde $j = 1, \dots, n$.

Pomocou vlastnosti $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ a vzťahov (5.5), (5.6) si vyjadríme očakávania výšky pp vo vývojovom roku n pre $i = 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} E[C_{i,n}] &= x_i \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = x_i \cdot y_1 + x_i \cdot y_2 + \dots + x_i \cdot y_n \\ &= E[P_{i,1}] + E[P_{i,2}] + \dots + E[P_{i,n}] \end{aligned}$$

Vhodným výberom parametrov x_i a y_j je ukázaná ekvivalencia medzi jednoduchým stochastickým modelom a multiplikatívnym modelom.

Ešte nám ostáva vyjadriť odhad koeficientov vývoja. Vďaka ekvivalencii medzi jednoduchým stochastickým modelom a multiplikatívnym modelom môžeme na to využiť vzťah (5.2), a vyjadríme si z neho koeficient $m_{i,j}$ pre $2 \leq j \leq n$:

$$\begin{aligned} m_{i,j} = \frac{E[C_{i,n}]}{E[C_{i,i-1}]} &= \frac{x_i \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_j)}{x_i \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_{j-1})} \\ &= \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_j}{y_1 + y_2 + \dots + y_{j-1}} \end{aligned}$$

Odhad koeficientu vývoja nemá rovnaký vzhľad ako v prípade vývojového koeficientu deterministického prístupu, ale jedná sa o rovnaký koeficient a dáva rovnaké výsledky.

5.3 Poissonov model

Už sme spomínali, že multiplikatívny model je základom Poissonovho modelu. Konkrétne, majú rovnaký prvý moment, ale Poissonov model navyše predpokladá hustotu nekumulovaných pp $P_{i,j}$. Verral tvrdil, že pri použití *odhadu maximálnej vierohodnosti (MVO)* dostaneme Poissonovým modelom rovnaké výsledky ako v prípade deterministického prístupu reťazovo - rebríkovej metódy.

Rovnaké predpoklady a výsledky ako v multiplikatívnom modeli:

- nekumulované pp $P_{i,j}$ sú nezávislé premenné s Poissonovým rozdelením a strednou hodnotou $E(P_{i,j}) = x_i \cdot y_j$
- $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ a y_j môžeme interpretovať ako pomer nároku vo vývojovom roku j k nárokom vo vývojovom roku n
- $x_i = E(C_{i,n})$ je očakávaná hodnota kumulovaných pp do vývojového roku n

Použitím vyšššie uvedených vlastností a vzťahov dostaneme nový vzťah pre prvý moment, ktorý parametrizujeme:

$$E(P_{i,j}) = x_i \cdot y_j = E(C_{i,n}) \cdot y_j = \frac{E(C_{i,n-i+1}) \cdot y_j}{\sum_{j=1}^{n-i+1} y_j} = \frac{z_i \cdot y_j}{s_{n-i+1}} \tag{5.8}$$

$$\text{kde} \qquad z_i = E(C_{i,n-i+1}) \quad \text{a} \quad s_k = \sum_{j=1}^{k} y_j$$

Rovnicu (5.8) môžeme využiť na odhad očakávaných kumulovaných pp vo vývojovom roku n, teda $E(C_{i,n})$. Aproximáciou $E(C_{i,n})$ odhadom $\hat{C}_{i,n}$ dostaneme:

$$\hat{C}_{i,n} = E(C_{i,n}) = x_i = \frac{z_i}{\sum_{k=1}^{n-i+1} y_k} = \frac{z_i}{1 - \sum_{k=n-i+2}^{n} y_k} \tag{5.9}$$

Verral tvrdí, že predchádzajúca rovnica (5.9) je ekvivalentná odhadu koeficientu vývoja $\hat{m}_j$. Uvedieme vzťah (4.9) z deterministického prístupu reťazovo - rebríkovej metódy:

$$\hat{C}_{n-j+1,n} = c_{n-j+1,j} \cdot \hat{m}_{j+1} \cdot \hat{m}_{j+2} \cdot \dots \cdot \hat{m}_n \tag{5.10}$$

kde

$$\hat{m}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1}}$$

Na porovnanie ekvivalencie vzťahu (5.9) a vzťahu (5.10) je potrebné najprv zistiť neznáme parametre zo vzťahu (5.9). Pomocou odhadu maximálnej vierohodnosti nájdeme odhady parametrov. Pozorovania $p_{i,j}$ sú považované za známe, a parametre sú považované za premenné. Všeobecný zápis funkcie vierohodnosti pre diskrétne rozdelenia, medzi ktoré patrí aj Poissonovo je:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$$

Náhodná premenná X s realizáciami $(x_1, \ldots, x_n)$ má Poissonovo rozdelenie s parametrom $\frac{z_i \cdot y_j}{s_{n-i+1}}$. Pravdepodobnostná funkcia má tvar $p(x_i, \theta)$. Za odhad parametrov θ sa volia hodnoty $\hat{\theta}$, ktoré pri daných x_i maximalizujú funkciu $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)$.

Našu ***funkciu maximálnej vierohodnosti*** môžeme zaspísať ako:

$$L = \prod_{i=0}^{n} \prod_{j=1}^{n-i+1} \left[\frac{\left(\frac{z_i \cdot y_j}{s_{n-i+1}}\right)^{p_{i,j}} \cdot e^{-\frac{z_i \cdot y_j}{s_{n-i+1}}}}{p_{i,j}!} \right] \tag{5.11}$$

Funkciu vynásobíme $\frac{c_{i,n-i+1}}{c_{i,n-i+1}} = 1$ a využijeme vzťah $s_{n-i+1} = \sum_{j=1}^{n-i+1} y_j$. Po zámene poradia násobenia vo výraze (5.11) dostávame dve funkcie maximálnej vierohodnosti:

$$L = \prod_{i=0}^{n} \left[\frac{z_i^{c_{i,n-i+1}} \cdot e^{-z_i}}{c_{i,n-i+1}!} \cdot \left[\frac{c_{i,n-i+1}!}{\prod_{j=1}^{n-i+1} p_{i,j}!} \left(\prod_{j=1}^{n-i+1} \left(\frac{y_j}{s_{n-i+1}} \right)^{p_{i,j}} \right) \right] \right] \tag{5.12}$$

$$L = L_c \cdot L_d$$

$$\text{kde} \qquad L_c = \prod_{i=0}^{n} \left[\frac{c_{i,n-i+1}!}{\prod_{j=1}^{n-i+1} p_{i,j}!} \left(\prod_{j=1}^{n-i+1} \left(\frac{y_j}{s_{n-i+1}} \right)^{p_{i,j}} \right) \right]$$

$$L_d = \prod_{i=0}^{n} \left[\frac{z_i^{c_{i,n-i+1}} \cdot e^{-z_i}}{c_{i,n-i+1}!} \right]$$

L_d je funkcia maximálnej vierohodnosti, $C_{i,n-i+1}$ má Poissonovo rozdelenie so strednou hodnotou z_i. Po zderivovaní funkcie L_d podľa z_i dostávame:

$$\frac{\partial L_d}{\partial z_i} = \frac{\left[\frac{\hat{z}_i^{c_{i,n-i+1}} \cdot e^{-\hat{z}_i}}{c_{i,n-i+1}!} \right]}{\partial \hat{z}_i} = 0$$

$$\frac{\partial L_d}{\partial z_i} = \frac{\left[\frac{\hat{z}_i^{c_{i,n-i+1}} \cdot e^{-\hat{z}_i}}{c_{i,n-i+1}!} \right]}{\partial \hat{z}_i} = \frac{1}{c_{i,n-i+1}!} \left[c_{i,n-i+1} \cdot \hat{z}_i^{c_{i,n-i+1}-1} \cdot e^{-\hat{z}_i} + \hat{z}_i^{c_{i,n-i+1}} \cdot e^{-\hat{z}_i} \cdot (-1) \right] = 0$$

$$\frac{\hat{z}_i^{c_{i,n-i+1}} \cdot e^{-\hat{z}_i}}{c_{i,n-i+1}!} \cdot \left[c_{i,n-i+1} \cdot \frac{1}{\hat{z}_i} - 1 \right] = 0$$

$$\hat{z}_i = c_{i,n-i+1}$$

Maximálne vierohodným odhadom z_i je $c_{i,n-i+1}$, pokiaľ $C_{i,n-i+1}$ má Poissonovo rozdelenie.

Pravdepodobnostná funkcia multinomického rozdelenia má tvar:

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{N!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \cdots \cdot x_n!} \left[p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \cdots \cdot p_n^{x_n} \right] \\ &= \frac{N!}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \left[p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \cdots \cdot p_n^{x_n} \right] \\ \text{kde} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k &= N \end{aligned}$$

Vidíme spojitosť medzi multinomickým rozdelením a našou funkciou L_c. L_c je podmienená funkcia maximálnej vierohodnosti, kde $P_{i,j}$ podmienené $c_{i,n-i+1}$ má multinomické rozdelenie s pravdepodobnosťami $\frac{y_j}{s_{n-i+1}}$. Multinomické rozdelenie reprezentuje pravdepodobnosť pu $P_{i,j}$, ktoré vznikli v roku i, ale nahlásené boli vo vývojovom roku j.

Dosadíme odhad parametra z_i funkcie L_d do vzťahu (5.9):

$$\hat{C}_{i,n} = \frac{c_{i,n-i+1}}{1 - \sum_{k=n-i+2}^{n} y_k} \tag{5.13}$$

Posunieme rok vzniku pu na $(n - j + 1)$ a prepíšeme predchádzajúci vzťah (5.13):

$$\hat{C}_{n-j+1,n} = \frac{c_{n-j+1,j}}{1 - \sum_{k=j+1}^{n} y_k} \tag{5.14}$$

Parameter y_k je jediný neznámy vo výraze (5.13). Odhad y_k získame pomocou vierohodnostnej funkcie L_c, konkrétne jej logaritmu:

$$\begin{aligned} l_c &= ln(L_c) \propto \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-i+1} p_{i,j} \log \left(\frac{y_j}{\sum_{k=1}^{n-i+1} y_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-i+1} p_{i,j} \cdot \left(\log y_j - \log \left(\sum_{k=1}^{n-i+1} y_k \right) \right) \end{aligned}$$

Odhady y_k dostaneme deriváciou funkcie l_c podľa y_k. Odhad $\hat{y}_k$, kde $k = 1, \ldots, n$ získame rekurzívne.

Najprv získame $\hat{y}_n$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l_c}{\partial y_n} &= \frac{p_{1,n}}{\hat{y}_n} - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{p_{1,j}}{\sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k} \right) = \frac{p_{1,n}}{\hat{y}_n} - \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{1,j}}{1} = 0 \\
\hat{y}_n &= \frac{p_{1,n}}{\sum_{j=1}^{n} p_{1,j}} = \frac{p_{1,n}}{c_{1,n}} \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

Potom $\hat{y}_{n-1}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l_c}{\partial y_{n-1}} &= \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{p_{i,n-1}}{\hat{y}_{n-1}} - \frac{\sum_{j=1}^{n-i+1} p_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n-i+1} \hat{y}_k} \right) = 0 \\
\frac{p_{1,n-1} + p_{2,n-1}}{\hat{y}_{n-1}} &= \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{1,j} + \sum_{j=1}^{n-1} p_{2,j}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \hat{y}_k + \sum_{k=1}^{n-1} \hat{y}_k} \\
\hat{y}_{n-1} &= \frac{p_{1,n-1} + p_{2,n-1}}{c_{1,n} + \frac{c_{2,n-1}}{1-\hat{y}_n}}
\end{aligned}
$$

Týmto spôsobom by sme pokračovali v odhadoch $\hat{y}_{n-2}$, $\hat{y}_{n-3}$ až po $\hat{y}_1$.

Všeobecný zápis pre odhad y_j:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l_c}{\partial y_j} &= \sum_{i=1}^{n-j+1} \left(\frac{p_{i,j}}{\hat{y}_j} - \sum_{j=1}^{n-i+1} \left(\frac{p_{i,j}}{\sum_{k=1}^{(n-i+1)} \hat{y}_k} \right) \right) = 0 \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-j+1} p_{i,j}}{\hat{y}_j} - \sum_{i=1}^{n-j+1} \left(\frac{c_{i,n-i+1}}{\sum_{k=1}^{n-i+1} \hat{y}_k} \right) = 0 \\
&\Downarrow \\
\hat{y}_j &= \frac{p_{1,j} + \cdots + p_{n-j+1,j}}{c_{1,n} + \frac{c_{2,n-1}}{1-\hat{y}_n} + \cdots + \frac{c_{n-j+1,j}}{1-\hat{y}_{j+1}-\cdots-\hat{y}_n}} \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

Použitím maximálne vierohodného odhadu $\hat{y}_j$ z výrazu (5.16) chceme získať odhad koeficientu vývoja $\hat{m}_j$. Najprv si vyjadríme odhady koeficientu vývoja zo vzťahu (5.10) a dosadíme vzťah (5.14) za $C_{n-j+1,n}$:

$$
\begin{aligned}
\hat{m}_{j+1} \cdot \hat{m}_{j+2} \cdot \cdots \cdot \hat{m}_n &= \frac{\hat{C}_{n-j+1,n}}{c_{n-j+1,j}} \\
&= \frac{c_{n-j+1,j}}{c_{n-j+1,j} \cdot (1 - \hat{y}_{j+1} - \hat{y}_{j+2} - \cdots - \hat{y}_n)} \\
&= \frac{1}{(1 - \hat{y}_{j+1} - \hat{y}_{j+2} - \cdots - \hat{y}_n)} \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

Posunieme predchádzajúci vzťah (5.17) o jeden vývojový rok dozadu:

$$\hat{m}_j \cdot \hat{m}_{j+1} \cdot \hat{m}_{j+2} \cdot \dots \cdot \hat{m}_n = \frac{1}{1 - \hat{y}_j - \hat{y}_{j+1} - \hat{y}_{j+2} - \dots - \hat{y}_n} \tag{5.18}$$

Zo vzťahu (5.17) vyjadríme výraz $1 - \hat{y}_{j+1} - \hat{y}_{j+2} - \dots - \hat{y}_n$ a dosadíme ho do vzťahu (5.18). Dostaneme:

$$\hat{m}_j \cdot \hat{m}_{j+1} \cdot \hat{m}_{j+2} \cdot \dots \cdot \hat{m}_n = \frac{1}{\frac{1}{\hat{m}_{j+1} \cdot \hat{m}_{j+2} \cdot \dots \cdot \hat{m}_n} - \hat{y}_j}$$

Odhad koeficientu vývoja $\hat{m}_j$ je

$$\hat{m}_j = \frac{1}{1 - \hat{y}_j \cdot [\hat{m}_{j+1} \cdot \hat{m}_{j+2} \cdot \dots \cdot \hat{m}_n]} \tag{5.19}$$

Dosadením vzťahu (5.15) do predchádzajúceho vzťahu (5.19), kde $j = n$ dostaneme maximálne vierohodný odhad koeficientu vývoja $\hat{m}_n$:

$$\hat{m}_n = \frac{1}{1 - \hat{y}_n} = \frac{1}{1 - \frac{p_{1,n}}{c_{1,n}}} = \frac{c_{1,n}}{c_{1,n} - p_{1,n}} = \frac{c_{1,n}}{c_{1,n-1}} \tag{5.20}$$

Dostali sme úplne rovnaký vzťah pre odhad koeficientu vývoja ako v deterministickom prístupe reťazovo - rebríkovej metódy. Predpoklad, že aj ostatné vierohodné odhady koeficientu vývoja v Poissonovom modeli sú rovnaké ako pri deterministickom prístupe dokážeme indukciou. Prvý krok indukcie je dokázanie rovnosti vzťahov odhadu koeficientu vývoja pre $j = n$. Zo vzťahu (5.20) vidíme, že prvá časť indukcie je splnená. Ďalej musíme nájsť všeobecnú formulu pre $\hat{m}_j$. Na to využijeme všeobecný vzťah (5.16) pre y_j. Do menovateľa tohto vzťahu dosadíme vzťahy (5.17), (5.18) a rovnakým spôsobom upravené vzťahy pre iné vývojové roky odhadov koeficientov vývoja:

$$\hat{y}_j = \frac{p_{1,j} + \dots + p_{n-j+1,j}}{c_{1,n} + c_{2,n-1} \cdot \hat{m}_n + \dots + c_{n-j+1,j} \cdot \hat{m}_{j+1} \cdot \hat{m}_{j+2} \cdot \dots \cdot \hat{m}_n} \tag{5.21}$$

V čitateli predchádzajúceho vzťahu (5.21) sa nachádza súčet nekumulovaných pp pre všetky roky vzniku pu a v menovateli celkové kumulované pp pre každý rok vzniku pu, ktoré tvoria posledný stĺpec matice. Vzťah (5.21) dosadíme do vzťahu (5.19):

$$\hat{m}_j = \frac{1}{1 - \left[\frac{p_{1,j} + \dots + p_{n-j+1,j}}{c_{1,n} + c_{2,n-1} \cdot \hat{m}_n + \dots + c_{n-j+1,j} \cdot \hat{m}_{j+1} \cdot \hat{m}_{j+2} \cdot \dots \cdot \hat{m}_n} \cdot \left(\hat{m}_{j+1} \cdot \hat{m}_{j+2} \cdot \dots \cdot \hat{m}_n\right)\right]} \tag{5.22}$$

Pri dôkaze indukciou môžeme predpokladať že pre vývojové roky $k = (j+1), (j+2), \dots, n$ sa vierohodný odhad rovná odhadu koeficientov vývoja v deterministickom prístupe. Stále nám ostáva ukázať že pre $k = j$ sa vierohodný odhad rovná odhadu koeficientov vývoja v deterministickom prístupe.

Upravíme si menovateľ vzťahu (5.22):

$$c_{1,n}+c_{2,n-1}\cdot\hat{m}_n+\cdots+c_{n-j+1,j}\cdot\hat{m}_{j+1}\cdot\hat{m}_{j+2}\cdots\cdot\hat{m}_n = [\hat{m}_{j+1}\cdot\hat{m}_{j+2}\cdots\cdot\hat{m}_n]\cdot\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j} \quad (5.23)$$

Ak $j = n-1$, tak do ľavej strany rovnice (5.23) dosadíme za j rok $(n-1)$ a uvidíme či sa bude rovnať pravej strane podľa vzťahu (5.23). Pri prvom znamienku rovnosti sme využili vzťah (5.20):

$$\begin{aligned} c_{1,n} + c_{2,n-1}\cdot\hat{m}_n &= c_{1,n} + c_{2,n-1}\cdot\left[\frac{c_{1,n}}{c_{1,n-1}}\right] \\ &= \frac{c_{1,n}}{c_{1,n-1}}\cdot\left[c_{1,n-1} - c_{2,n-1}\right] \\ &= \hat{m}_n\cdot\left[c_{1,n-1} - c_{2,n-1}\right] \end{aligned}$$

Vzťah (5.23) pre $j = n-1$ platí. Ďalej overíme, či platí vzťah (5.23) pre $j = n-2$. Využijeme pritom násobenie $1 = \frac{c_{1,n-2}+c_{2,n-2}}{c_{1,n-2}+c_{2,n-2}}$ a vzťah pre $\hat{m}_{n-1} = \frac{c_{1,n-1}+c_{2,n-1}}{c_{1,n-2}+c_{2,n-2}}$:

$$\begin{aligned} c_{1,n} + c_{2,n-1}\cdot\hat{m}_n + c_{3,n-2}\cdot\hat{m}_{n-1}\hat{m}_n &= \hat{m}_n(c_{1,n-1} + c_{2,n-1} + c_{3,n-2}\cdot\hat{m}_{n-1}) \\ &= \hat{m}_n\left[(c_{1,n-2} + c_{2,n-2})\cdot\frac{c_{1,n-1} + c_{2,n-1}}{c_{1,n-2} + c_{2,n-2}}\right] \\ &+ \hat{m}_n\cdot[c_{3,n-2}\cdot\hat{m}_{n-1}] \\ &= \hat{m}_{n-1}\hat{m}_n\cdot(c_{1,n-2} + c_{2,n-2} + c_{3,n-2}) \end{aligned}$$

Keby sme pokračovali ďalej, tak pri každom vývojovom roku sa nám potvrdí vzťah (5.23). To znamená, že isto platí aj pre prípad keď $k = j$, takže ho vložíme do vzťahu (5.22):

$$\hat{m}_j = \frac{1}{1-\left[\frac{p_{1,j}+\cdots+p_{n-j+1,j}}{[\hat{m}_{j+1}\cdot\hat{m}_{j+2}\cdots\cdot\hat{m}_n]\cdot\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j}}\cdot\left(\hat{m}_{j+1}\cdot\hat{m}_{j+2}\cdot\cdots\cdot\hat{m}_n\right)\right]}$$

$$\hat{m}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j} - \sum_{i=1}^{n-j+1} p_{i,j}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1}} \quad (5.24)$$

Dôkaz indukciou je ukončený, ak maximálne vierohodný odhad koeficientu vývoja $\hat{m}_j$ je ekvivalentný odhadu koeficientu vývoja pre deterministický prístup reťazovo - rebríkovej metódy. To vidíme, že je splnené. Takže výsledky získané Poissonovým modelom sú rovnaké ako výsledky získné deterministickým prístupom reťazovo - rebríkovej metódy.

Model je možné použiť aj v prípade, keď sa vo vývojovom trojuholníku nachádzajú záporné hodnoty pp. V tom prípade stačí použiť miesto metódy maximálnej vierohodnosti *kvázi - lognormálnu funkciu.* Viac informácií o tomto prístupe sa nachádza v kapitole 6.

5.4 Mackov model

Mackov model predstavuje jeden z prvých pokusov o stanovenie odhadu rezerv stochastickým prístupom.

Stále platí, že $P_{i,j}$ reprezentuje nekumulované pp a $C_{i,j}$ kumulované pp, kde pu vznikli v roku i, ale nahlásené boli v roku j. Predpokladáme, že pre prvý rok vzniku pu nemusíme tvoriť rezervy, nakoľko sa do roku n zlikvidujú samé.

Definujeme si tri premenné K, K_j a $K_{i,j}$ na ľahšie nájdenie podmienených očakávaní.

- Nech $k = \{c_{i,j}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n - i + 1\}$ je realizácia stochastickej premennej K. K nám dáva informáciu o kumulovaných pp v hornom vývojovom trojuholníku.
- Nech $k_j = \{c_{i,1}, \ldots, c_{i,j}, i = 1, \ldots, n\}$ je realizáciou premennej K_j.
- Nech $k_{i,j} = \{c_{i,1}, \ldots, c_{i,j}\}$, kde $i = 1, \ldots, n$ je realizáciou $K_{i,j}$.

Mack stanovil tri predpoklady, ktoré definujú Mackov model:

- V modeli existujú konštanty $m_2, \ldots, m_n$ také, že
  $E(C_{i,j}|K_{i,j-1} = k_{i,j-1}) = m_j \cdot c_{i,j-1}$ pre $j = 2, \ldots, n$
- V modeli existujú konštanty $g_2, \ldots, g_n$ také, že
  $Var(C_{i,j}|K_{i,j-1} = k_{i,j-1}) = g_j \cdot c_{i,j-1}$ pre $j = 2, \ldots, n$
- $K_{i,n}$ a $K_{k,n}$ sú stochasticky nezávislé pre $i \neq k$

Odhad koeficientov vývoja $\hat{m}_j$ v Mackovom modeli, dáva rovnaké výsledky ako v deterministickom prístupe reťazovo - rebríkovej metódy. Predpoklad o nezávislosti medzi rokmi vzniku pu sme urobili z dôvodu, že odhad $\hat{m}_j$ je rovnaký pre všetky roky vzniku pu príslušného vývojového roku j:

$$\hat{m}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}}$$

Odhadneme parameter g_j:

$$\hat{g}_j = \frac{1}{n-j}\left[\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1}\cdot\left(\frac{c_{i,j}}{c_{i,j-1}} - \hat{m}_j\right)^2\right] \tag{5.25}$$

Odhad koeficientov vývoja $\hat{m}_j$ je nevychýleným odhadom m_j. Použitím zloženej strednej hodnoty a prvého predpokladu dostávame:

$$\begin{aligned}
E(\hat{m}_j) = E[E(\hat{m}_j|K_{j-1})] &= E\left[E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,(j-1)}}\middle| K_{j-1}\right)\right] \\
&= E\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}}\left(\sum_{i=1}^{n-j+1} E(C_{i,j}|K_{j-1})\right)\right] \\
&= E\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}}\left(\sum_{i=1}^{n-j+1} m_j\cdot C_{i,j-1}\right)\right] \\
&= m_j
\end{aligned}$$

Dokázali sme, že odhad $\hat{m}_j$ je nevychýlený. Individuálne odhady koeficientov vývoja sú nekorelované. Dokážeme to potvrdením vzťahu:

$$E\left[\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}\right] = E\left[\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\right]E\left[\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}\right]$$

Ak $j \leq k$:

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,j}}\right] &= E\left[E\left(\frac{C_{i,(k+1)}}{C_{i,j}}\middle| C_{i,1},\ldots,C_{i,k}\right)\right] \\
&= E\left[\frac{1}{C_{i,j}}E\big(C_{i,k+1}|C_{i,1},\ldots,C_{i,k}\big)\right] \\
&= E\left[\frac{1}{C_{i,j}}\cdot C_{i,k}\cdot m_{k+1}\right] \\
&= m_{k+1}E\left[\frac{C_{i,k}}{C_{i,j}}\right] \qquad (5.26)
\end{aligned}$$

Ak $j = k$, rovnica (5.26) bude mať tvar:

$$E\left[\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\right] = m_{k+1}E\left[\frac{C_{i,k}}{C_{i,k}}\right] = m_{k+1}$$

Ak $j = k-1$, rovnica (5.26) bude mať tvar:

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k-1}}\right] &= E\left[\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}\right] \\
&= m_{k+1}E\left[\frac{C_{i,k}}{C_{i,(k-1)}}\right] \\
&= E\left[\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\right]E\left[\frac{C_{i,k}}{C_{i,k-1}}\right] \qquad (5.27)
\end{aligned}$$

Individuálne koeficienty vývoja sú nekorelované, nezávislé a nevychýlené. Preto môžeme predpokladať, že po vývojovom roku s vysokými vyplatenými pp môže prísť rok s veľmi nízkymi pp.

Dôležitým faktorom pre objektívny odhad rezerv je malá disperzia. Mackov tretí predpoklad určuje druhý moment, teda disperziu.

Doteraz, ako aj naďalej bude označovať $C_{i,j}$ stochastickú premennú pre $i = 1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, n - i + 1$. Odhad koeficientov vývoja so vzťahom,

$$\hat{m}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}}$$

pre $j = 2, \ldots, n - i + 1$, je tiež stochastická premenná. Individuálne vývojové faktory budú zapísané ako $M_{i,j}$, keď budú považované za stochastické premenné.

V deterministickom prístupe reťazovo - rebríkovej metódy sme si ukázali, že odhad koeficientov vývoja je váženým priemerom $W_{i,j}$ individuálnych koeficientov:

$$\hat{m}_j = \sum_{i=1}^{n-j+1} W_{i,j} \cdot M_{i,j} \qquad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{n-j+1} W_{i,j} = 1 \tag{5.28}$$

Už sme dokázali, že individuálne odhady koeficientov vývoja sú nekorelované pre $1 \leq i \leq n$. Variancia $\hat{m}_j$ podmienená realizáciami k_{j-1}:

$$Var[\hat{m}_j|k_{j-1}] = Var\left[\sum_{i=1}^{n-j+1} W_{i,j} \cdot M_{i,j}|k_{j-1}\right] = \sum_{i=1}^{n-j+1} w_{i,j}^2 Var[M_{i,j}|k_{j-1}] \tag{5.29}$$

Budeme sa snažiť získať čo najmenšiu disperziu a teda minimalizujeme rovnicu (5.29) vzhľadom na $W_{i,j}$, kde $j = 1, \ldots, n$. Index i zanedbávame, nakoľko variancia je rovnaká pre všetky roky vzniku pu. Okrem minimalizácie funkcie, nesmieme zabudnúť na obmedzenie pre $W_{i,j}$ z rovnice (5.28). Pri týchto podmienkach sa nám najviac hodí na minimalizáciu *Lagrangeova metóda multiplikátorov.*

Lagrangeova funkcia je definovaná:

$$L(x, \lambda) = k(x) + \lambda g(x)\,,$$

kde $k(x)$ je funkcia, ktorá má byť minimalizovaná s ohľadom na x (v našom prípade vzťah (5.29) s ohľadom na $W_{i,j}$) a $g(x)$ je obmedzenie (v našom prípade obmedzenie z (5.28)) a λ je *Lagrangeov multiplikátor.*

Minimum funkcie (5.29) je:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_{i,j}}\left[\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{i,j}^2 Var[M_{i,j}|k_{j-1}] + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n-j+1} W_{i,j}\right)\right] &= 0 \\
2 \cdot w_{i,j} \cdot Var[M_{i,j}|k_{j-1}] - \lambda &= 0 \\
w_{i,j} &= \frac{\lambda}{2 \cdot Var[M_{i,j}|k_{j-1}]}
\end{aligned}$$

Minimum funkcie nastáva, ak sú váhy nepriamo úmerné disperzii $M_{i,j}$. Inými slovami, disperzia individuálnych koeficientov vývoja by mala byť nepriamo úmerná ich váham. Váha odhadu koeficientov vývoja je

$$\frac{c_{i,j-1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1}}.$$

Teda disperzia individuálnych koeficientov vývoja je nepriamo úmerná $c_{i,j-1}$. Menovateľ vyššie uvedeného zlomku pre váhy môže byť nahradený úmernou konštantou g_j. Mackov druhý predpoklad môže byť prepísaný tak, že reťazovo - rebríkový vývojový faktor je odhad s minimálnou varianciou:

$$Var\left[\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}\middle| k_{j-1}\right] = \frac{g_j}{c_{i,j-1}} \tag{5.30}$$

Potrebujeme odhadnúť parameter g_j. Na začiatku sekcie sme navrhli odhad $\hat{g}_j$ pre $j = 2, \ldots, n$, ktorý sa nachádza vo vzťahu (5.25). Odhad je nevychýlený ak dokážeme, že $E(\hat{g}_j) = g_j$.

Najprv vypočítame $(n-j)E(\hat{g}_j|k_{j-1})$ pomocou prirátania a odrátania konštanty m_j a tento výpočet použijeme pri dôkaze $E(\hat{g}_j) = E[E(\hat{g}_j|k_{j-1})] = g_j$.

$$\begin{aligned}
(n-j)E(\hat{g}_j|k_{j-1}) &= \sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1} E\left[\left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} - m_j + m_j - \hat{m}_j\right)^2 \middle| k_{j-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1} E\left[\left(M_{i,j} - m_j\right)^2 \middle| k_{j-1}\right] - \\
&- 2\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1} E\left[\left(M_{i,j} - m_j\right)\left(\hat{m}_j + m_j\right) \middle| k_{j-1}\right] + \\
&+ \sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1} E\left[\left(\hat{m}_j + m_j\right)^2 \middle| k_{j-1}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(n-j)E(\hat{g}_j|k_{j-1}) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1}Var[M_{i,j}\big|k_{j-1}] - 2\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1}Cov(M_{i,j},\hat{m}_j|k_{j-1}) + \\
+ \quad & \sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1}Var[\hat{m}_j|k_{j-1}] \qquad (5.31)
\end{aligned}
$$

Ako už bolo spomenuté, odhad koeficientov vývoja je vážený priemer individuálnych vývojových faktorov. Tretí Mackov predpoklad nám hovorí, že $Cov(M_{k,j}, M_{l,j}) = 0$ pre $k \neq n$. Pomocou tohto predpokladu upravíme druhý člen vzťahu (5.31):

$$
\begin{aligned}
Cov(M_{i,j},\hat{m}_j|k_{j-1}) \quad &= \quad Cov\big(M_{i,j}, w_{i,j}\cdot M_{i,j}|k_{j-1}\big) \\
&= \quad Cov\left(M_{i,j}, \frac{C_{i,j-1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}}\cdot M_{i,j}|k_{j-1}\right) \\
&= \quad \left(\frac{c_{i,j-1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{i,j-1}}\right) Var[M_{i,j}|k_{j-1}]
\end{aligned}
$$

Vložením predchádzajúceho vzťahu do (5.31) a použitím vzťahu (5.30) môžeme prepísať vzťah (5.31):

$$
(n-j)E(\hat{g}_j|k_{j-1}) = \left(\sum_{i=1}^{n-j+1} g_j\right) - 2\cdot g_j + g_j = (n-j)g_j
$$

Pomocou zloženej strednej hodnoty vyjadríme $E(\hat{g}_j)$:

$$
E(\hat{g}_j) = E[E(\hat{g}_j)|k_{j-1}] = E(g_j) = g_j
$$

Skutočne, odhad $\hat{g}_j$ je nevychýleným odhadom g_j, takže najvhodnejším vzťahom pre $\hat{g}_j$ je (5.25).

Kapitola 6

Záporné poistné nároky

V tejto kapitole sme čerpali z literatúry [6, 10, 11, 15].

Záporné poistné nároky sú záporné hodnoty v hornom vývojovom trojuholníku a sú dôsledkom hlásených nárokov, ktoré boli pre nejaký dôvod zmenšené. Jedná sa o nekumulovaný vývojový trojuholník. V kumulovanom trojuholníku sa negatívne poistné nároky nevyskytujú. Záporné hodnoty sa zvyčajne vyskytujú v týchto prípadoch:

- platby prijaté poisťovňou od tretej strany
- úplné alebo čiastočné zrušenie nevyplatených pohľadávok, ktoré vzniknú nadhodnotením škody alebo pozitívnym výsledkom v prospech poisťovne v súdnom spore
- chyby

England a Verall argumentujú, že vo vývojovom trojuholníku je lepšie uvádzať vyplatené nároky, ako vzniknuté nároky. Pri vyplatených nárokoch je menšia pravdepodobnosť, že sa vyskytnú záporné hodnoty. To preto, že pri odhade rezerv sú zohľadnené aj preferencie metódy poistného matematika a istá konzervatívnosť, čo znamená, že zvyčajne býva nadhodnotená výška rezervy, čo vedie k výskytu záporných hodnôt.

V mnohých metódach nastávajú problémy pri výskyte väčšieho počtu alebo výšky záporných pp ak nie sú splnené určité obmedzenia.

V ideálnom prípade by mal poistný matematik pred aplikáciou niektorej z metód na odhad rezerv opraviť dáta tak, aby eliminoval záporné hodnoty. Pre tento prípad de Alba a Bonilla poskytli zoznam úprav používaných v praxi. Aj po tejto úprave sa môžu vyskytnúť v trojuholníku záporné hodnoty. Preto je potrebné, aby mal poistný matematik k dispozícii metódy na odhad, ktoré správne odhadnú hodnotu rezervy aj v prípade záporných nárokov.

Niektoré metódy, medzi nimi aj reťazovo - rebríková metóda odhadne rezervu aj v prípade záporných hodnôt v trojuholníku. Mackov model nemá problém so zápornými hodnotami, ale jeho obmedzením je, že sa zameriava na reprodukciu odhadu rezerv reťazovo - rebríkovej metódy. Takisto ráta iba s prvým a druhým momentom a nie s celým rozdelením.

Medzi modely, ktoré podľa Englanda a Veralla zvládnu prácu so zápornými hodnotami patria: ***Poissonov model, negatívno binomický model a aproximácia normálneho rozdelenia na negatívno binomické***. Poissonov model nie je vhodný iba pre pozitívne hodnoty dát. Pri použití prístupu *kvázi maximálnej vierohodnosti* je možné postup aplikovať aj na pozitívne, aj na negatívne dáta. Metóda, ktorá zvládne aj veľa záporných pp alebo sú veľmi veľké ich čiastky je ***Bayesov model*** založený na troch parametroch log-normálneho rozdelenia. Bayesova metóda analyzuje dáta rekurzívne použitím ***Kalmanovho filtra***. Viac informácií o tomto modeli je možné nájsť v [10].

Ďalší spôsob ako pracovať so zápornými nárokmi sú lognormálne modely. Štandardný spôsobom vysporiadania sa so zápornými hodnotami v trojuhlníku pri týchto modeloch je, že sa doplní dostatočne veľká konštanta (pred použitím logaritmov) a po výpočte sa táto konštanta odráta. Voľba konštanty nie je náhodná, ale určuje sa metódou maximálnej vierohodnosti. Technika dáva „lepšie“ riešenie ako spoliehanie sa na úpravu dát. Na druhej strane výsledky tejto metódy závisia od pridanej konštanty, čo nemôžeme považovať za najlepšie riešenie. Viac o týchto modeloch je možné nájsť v [11].

Dokument od Reida, ktorý je možné nájsť v [12], rieši problém s relatívne rýchlou zmenou vo veľkosti nárokov v portfóliách poisťovní. Väčšina modelov predpokladá, že faktory sa menia relatívne pomaly a trend na vývoj nárokov nie je významný. Táto práca modeluje vplyv faktora explicitne. Prístup modelu môže byť použitý k rozvoju poistných sadzieb, ako aj k odhadu rezerv.

Kapitola 7

Chyby odhadu

V tejto kapitole sme pracovali s literatúrou [6].

Dolný vývojový trojuholník je vyplnený odhadmi $\hat{C}_{i,j}$, kde $i = 2, \ldots, n$ a $j \geq n - i + 2$. V poslednom vývojovom roku sú kumulované pp, ktoré reprezentujú konečnú výšku nárokov $\hat{C}_{i,n}$, kde $i = 2, \ldots, n$. Je potrebné nájsť hodnotu rozptylu bodových odhadov.

Stredná kvadratická chyba (MSE) je jedným z mnohých spôsobov ako vyčísliť rozdiel medzi odhadom a skutočnou hodnotou, z ktorej sa odhad stanovil. ***Odmocnina strednej kvadratickej chyby (RMSE)*** je odmocnina strednej štvorcovej chyby:

$$RMSE(\hat{C}_{i,n}) = \sqrt{MSE(\hat{C}_{i,n})}$$

MSE je vhodným meradlom chyby odhadu.

Máme zadané pozorované hodnoty v hornom vývojovom trojuholníku. MSE je podmienené týmito hodnotami, ktoré sme si označili v časti 5.1 ako $k = \{c_{i,j}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n\}$. Stredná štvorcová chyba konečnej výšky pp $\hat{C}_{i,n}$ je

$$\begin{aligned} MSE(\hat{C}_{i,n}) &= E((C_{i,n} - \hat{C}_{i,n})^2|k) = E((C_{i,n} - E(C_{i,n}) + E(C_{i,n}) - \hat{C}_{i,n})^2|k) \\ &= Var(C_{i,n}|k) + E(E(C_{i,n}|k) - \hat{C}_{i,n})^2 \\ &= Var(C_{i,n}|k) + (E(C_{i,n}|k) - \hat{C}_{i,n})^2 \qquad (7.1) \end{aligned}$$

Po druhom znamienku rovná sa vidíme, že podmienka ostala iba pri premennej $C_{i,n}$. Je to preto, lebo iba premenná $C_{i,n}$ je nevyhnutne podmienená k. Keďže $E(C_{i,n}|k)$ a $\hat{C}_{i,n}$ sú skaláre, v poslednom kroku sme odstránili vonkajšie očakávania. Prvá časť vzťahu (7.1) nám udáva rozptyl okolo skutočnej hodnoty $C_{i,n}$. Druhá časť vzťahu (7.1) je označovaná ako odhad variancie a meria ako veľmi sa odchyľuje odhad $\hat{C}_{i,n}$ od $E(C_{i,n}|k)$. Viac o chybe odhadu je možné nájsť v [5].

Kapitola 8

Aplikácia

V tejto kapitole sme pracovali s literatúrou [13, 17].

Vzhľadom na nadväznosť k bakalárskej práci sme sa rozhodli, že deterministické postupy aplikujeme na dáta nemenovanej slovenskej poisťovne. Dáta poznáme z bakalárskej práce [13]. Urobili sme tak preto, aby sme mohli porovnať výsledky známych metód popísaných v bakalárskej ako aj v diplomovej práci.

Na reťazovo - rebríkovú metódu zohľadňujúcu vážený priemer a na stochastické modely sme využili nové dáta získané z nemeckej spoločnosti. Mohli sme tak porovnať, či sme dostali rovnaké výsledky stochastickými modelmi a reťazovo - rebríkovou metódou.

8.1 Deterministický prístup

Postupy deterministických metód sme aplikovali na dáta nemenovanej slovenskej poisťovne, ktoré sme používali v bakalárskej práci [13]. Všetky výpočty sme robili v softvére MS Excel 2007 a je možné ich nájsť na priloženom cd v Prílohe 1.

Rok vzniku poistných udalostí je od roku 2004 do roku 2008. Vývojové roky, ktoré uplynuli od vzniku pu po jej vyplatenie sú od roku 1 do roku 5, pričom vývojový rok 1 vyjadruje vyplatené pp v tom istom roku ako vznikla pu a vývojový rok 5 sú štyri roky od vzniku pu po vyplatenie pp poistencom. Hodnoty v hornom vývojovom trojuholníku vyjadrujú vyplatené pp za udalosti, ktoré vznikli v roku i a boli vyplatené j rokov od vzniku pu. Pre rok 2004 nemusíme vytvárať rezervu, nakoľko sa do vývojového roku 5 zlikvidujú samé.

Väčšina metód začína pracovať s nekumulovaným vývojovým trojuholníkom. Trojuholník s nekumulovanými pp sa nachádza v tabuľke 8.1.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok**				
	1	2	3	4	5
2004	27 595 371	16 541 317	955 064	221 151	253 000
2005	30 177 361	15 888 572	2 654 823	5 200	
2006	27 421 072	13 715 687	4 783 474		
2007	22 757 188	12 915 963			
2008	37 314 432				

Tabuľka 8.1: Nekumulovaný vývojový trojuholník s poistnými plneniami, zdroj: [13], upravené

Tabuľku 8.1 sme zkumulovali postupným pričitovaním prvkov pomocou vzťahu (4.5) a dostali sme tabuľku 8.2.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok**				
	1	2	3	4	5
2004	27 595 371	44 136 688	45 091 752	45 312 903	45 565 903
2005	30 177 361	46 065 933	48 720 756	48 725 956	
2006	27 421 072	41 136 759	45 920 233		
2007	22 757 188	35 673 151			
2008	37 314 432				

Tabuľka 8.2: Kumulovaný vývojový trojuholník s poistnými plneniami, zdroj: [13], upravené

Pri deterministickom prístupe zohľadňujeme vnútorné aj vonkajšie faktory. V postupoch popísaným metód sú to vonkajšie faktory: *odhad budúcej inflácie* vo výške 5%, *zaslúžené poistné*, *počet škôd*, ktoré sa nachádzajú v tabuľke 8.3.

Rok vzniku PU	**Zaslúžené poistné**	**Počet škôd**
2004	60 354 250	40 938
2005	61 750 642	39 228
2006	64 442 067	38 020
2007	65 724 827	37 090
2008	65 994 110	36 598

Tabuľka 8.3: Zaslúžené poistné a počet škôd, zdroj: [13], upravené

8.1.1 Prvý prístup separačnej metódy

Vychádzali sme z nekumulovaného trojuholníka, ktorý sa nachádza v tabuľke 8.1. Trojuholník sme predelili počtom škôd a dostali sme maticu štandardizovaných hodnôt. Matica je uvedená v tabuľke 8.4.

Rok vzniku	**Vývojový rok**				
PU	1	2	3	4	5
2004	$674,077$	$404,058$	$23,330$	$5,402$	$6,180$
2005	$769,281$	$405,031$	$67,677$	$0,133$	
2006	$721,228$	$360,749$	$125,815$		
2007	$613,567$	$348,233$			
2008	$1\,019,576$				

Tabuľka 8.4: Matica štandardizovaných hodnôt

Vstupy na diagonále, skutočná výška priemernej individuálnej škody a konštantný podiel škody sa vyskytujú v tabuľke 8.5.

Vstupy		**Skutočná priemerná škoda**		**Podiel škody**	
d_6	$1\,499,936$	λ_6	$1\,499,936$	r_5	$0,004$
d_5	$1\,047,395$	λ_5	$1\,051,728$	r_4	$0,002$
d_4	$1\,149,588$	λ_4	$1\,156,864$	r_3	$0,058$
d_3	$1\,173,339$	λ_3	$1\,254,579$	r_2	$0,306$
d_2	$674,077$	λ_2	$1\,071,028$	r_1	$0,629$

Tabuľka 8.5: Vstupy na diagonále, priemerná škoda a podiel škody

Konštantný podiel škody je skutočne rovný jednej:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_5 = 0,004 + 0,002 + \ldots + 0,629 = 1$$

Odhad dolného štandardizovaného trojuholníka sa nachádza v tabuľke 8.6.

Rok vzniku	**Vývojový rok**				
PU	1	2	3	4	5
2004					
2005					$6,489$
2006				$3,587$	$6,814$
2007			$101,517$	$3,766$	$7,154$
2008		$557,659$	$106,593$	$3,955$	$7,512$

Tabuľka 8.6: Dolná odhadnutá štandardizovaná matica

Štandardizovanú maticu z tabuľky 8.6 sme vynásobili počtom škôd, spočítali sme výšku rezervy a tieto kroky sme uviedli v tabuľke 8.7.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok**					**Rezerva**
	1	2	3	4	5	
2004						
2005					254 553, 7	254 553, 7
2006				136 373, 6	259 050, 6	395 424, 2
2007			3 765 278	139 689, 7	265 349, 7	4 170 318
2008		20 409 193	3 901 098	144 728, 6	274 921, 3	24 729 942
CELKOM						29 550 237

Tabuľka 8.7: Odhad rezervy pomocou prvého prístupu separačnej metódy

8.1.2 Bornhuetter - Ferguson metóda

Z kumulovaného trojuholníka sme určili odhady koeficientov vývoja, kumulatívne koeficienty, inverzné koeficienty a doplnky inverzných koeficientov a hodnoty týchto koeficientov sa nachádzajú v tabuľke 8.8.

Rok vzniku PU	**Odhady koeficientov vývoja**	**Kumulatívne koeficienty**	**Inverzné koeficienty**	**Doplnky inv. koeficientov**
2004	1	1	1	0
2005	1, 006	1, 006	0, 994	0, 006
2006	1, 002	1, 008	0, 992	0, 008
2007	1, 064	1, 073	0, 932	0, 068
2008	1, 547	1, 659	0, 603	0, 397

Tabuľka 8.8: Koeficienty pre odhad rezervy

Nekumulovaný trojuholník sme vydelili zaslúženým poistným. Potom sme extrapoláciou nekumulovaných škodových pomerov doplnili dolný trojuholník, ktorý je odlíšený kurzívou a tučným písmom. V každom riadku sme spočítali škodový pomer a rezervu. Výsledky týchto krokov je možné nájsť v tabuľke 8.9.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok**					**Škodový pomer**	**Rezerva**
	1	2	3	4	5		
2004	0, 45722	0, 27407	0, 01582	0, 00366	0, 00419	0, 75497	0
2005	0, 48870	0, 25730	0, 04299	0, 00008	***0,00419***	0, 79327	271 983, 13
2006	0, 42552	0, 21283	0, 07423	***0,00008***	***0,00419***	0, 71686	367 073, 04
2007	0, 34625	0, 19651	***0,07423***	***0,00008***	***0,00419***	0, 62127	2 757 689, 20
2008	0, 56542	***0,23518***	***0,07423***	***0,00008***	***0,00419***	0, 87911	23 049 035, 90
CELKOM							26 445 781, 27

Tabuľka 8.9: Odhad rezervy pomocou metódy Bornhuetter - Ferguson

8.1.3 Druhý prístup separačnej metódy

Máme zadaný nekumulovaný vývojový trojuholník. Najprv sme trojuholník predelili zaslúženým poistným. Jedná sa o horný trojuholník v tabuľke 8.9. Potom sme prerovnali riadky s diagonálami. Tento krok sa vyskytuje v tabuľke 8.10.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok**				
	1	2	3	4	5
2008	0,56542	0,19652	0,07423	0,00008	0,00419
2007	0,34625	0,21284	0,04299	0,00366	
2006	0,42552	0,25730	0,01582		
2005	0,48870	0,27407			
2004	0,45722				

Tabuľka 8.10: Prehodené riadky s diagonálami

Tabuľku 8.10 sme postupným pričitovaním zkumulovali a dostali sme tabuľku 8.11.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok**				
	1	2	3	4	5
2008	0,5654	0,7619	0,8362	0,8362	0,8404
2007	0,3463	0,5591	0,6021	0,6057	
2006	0,4255	0,6828	0,6986		
2005	0,4887	0,7628			
2004	0,4572				

Tabuľka 8.11: Zkumulovaný trojuholník s prehodenými riadkami a diagonálami

Z kumulovanej tabuľky 8.11 sme odhadli koeficienty vývoja, kumulatívne koeficienty a inverzné koeficienty pomocou **2**., **3**. a **4**. kroku z Bornhuetter - Ferguson metódy v kapitole 4.2. Zapísali sme ich do tabuľky 8.12.

Rok vzniku PU	**Odhady koeficientov vývoja**	**Kumulatívne koeficienty**	**Inverzné koeficienty**
2008	1	1	1
2007	1,0050	1,0050	0,9950
2006	1,0026	1,0076	0,9924
2005	1,0664	1,0745	0,9306
2004	1,5152	1,6282	0,6142

Tabuľka 8.12: Koeficienty separačnej metódy

Vzorce v tabuľkách 4.8 a 4.9 sme využili na odhad *separačných indexov* a *indexov oneskorenia*. Odhad indexov je v tabuľkách 8.13 a 8.14.

Rok vzniku PU	**Separačný index**
2008	0, 8404
2007	0, 6088
2006	0, 7040
2005	0, 8196
2004	0, 7444

Tabuľka 8.13: Separačné indexy pre roky vzniku pu $2\,008 - 2\,004$

Rok vývoja PU	**Index oneskorenia**
5	0, 0050
4	0, 0026
3	0, 0618
2	0, 3164
1	0, 6142

Tabuľka 8.14: Indexy oneskorenia pre roky vzniku pu $2\,008 - 2\,004$

Pomocou zadaného odhadu miery inflácie sme dopočítali dolný trojuholník. Postup sa nachádza v kroku **10** v časti 4.2.1. Využívali sme konkrétne vzťah 4.8. *Výplatné rezíduá* sme získali sčítaním prvkov dolného trouholníka pre jednotlivé roky vzniku pu. Tieto kroky sa nachádzajú v tabuľke 8.15.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok**					**Výplatné rezíduá**
	1	2	3	4	5	
2004						0
2005					0, 0052	0, 0052
2006				0, 0027	0, 0055	0, 0082
2007			0, 0649	0, 0029	0, 0058	0, 0735
2008		0, 3323	0, 0681	0, 0030	0, 0061	0, 4094

Tabuľka 8.15: Odhadnutý dolný trojuholník s výplatnými rezíduami

Rezervu pre jednotlivé roky vzniku pu sme dostali vynásobením posledného separačného indexu pre rok 2008, zaslúženého poistného a výplatného rezídua. Výsledky tohto kroku sú v tabuľke 8.16.

Rok vzniku PU	Separačný index	Zaslúžené poistné	Výplatné reziduá	Rezerva
2004	$0,8404$	60 354 250	0	0
2005	$0,8404$	61 750 642	$0,0052$	271 796
2006	$0,8404$	64 442 067	$0,0082$	444 914
2007	$0,8404$	65 724 827	$0,0735$	4 060 266
2008	$0,8404$	65 994 110	$0,4094$	22 709 549
Celkom				27 486 525

Tabuľka 8.16: Odhadnutá rezerva pomocou druhého prístupu separačnej metódy

8.1.4 Cape Code metóda

Postup tejto metódy sa nachádza v bakalárskej práci [13].

Uvedieme hodnotu *škodového pomeru*, ktorý je podiel doterajšieho poistného plnenia a upraveného zaslúženého poistného:

$$\frac{213\,199\,675}{286\,753\,499} = 0,743$$

a tabuľku s výslednou hodnotou rezervy 8.17:

Rok vzniku PU	Zaslúžené poistné	Doterajšie plnenie	Inverzný koeficient	Upravené zaslúžené poistné	(1−inverzný koeficient)	ODHADNUTÁ REZERVA
2004	60 354 250	45 565 903	$1,000$	60 354 250	$0,000$	0
2005	61 750 642	48 725 956	$0,994$	61 407 778	$0,006$	$254\,917,60$
2006	64 442 067	45 920 233	$0,992$	63 930 009	$0,008$	$380\,712,66$
2007	65 724 827	35 673 151	$0,932$	61 286 037	$0,068$	$3\,300\,216,68$
2008	65 994 110	37 314 432	$0,603$	39 775 426	$0,397$	$19\,493\,449,63$
CELKOM		213 199 675		286 753 499		$23\,429\,296,57$

Tabuľka 8.17: Odhad rezervy pomocou metódy Cape Cod, zdroj: [13], upravené

8.1.5 Reťazovo - rebríková metóda

Postup tejto metódy sa nachádza v bakalárskej práci [13].

Uvedieme tabuľku s dolným vývojovým trojuholníkom získaným pomocou odhadov koeficientov vývoja. Ďalej sa v tabuľke 8.18 nachádza odhadnutá rezerva, ktorú sme dostali pomocou vzťahu (4.10) v kapitole 4.4.

Rok vzniku PU	Vývojový rok				Rezerva
	2	3	4	5	
2004					0
2005				48 998 012	272 056
2006			46 031 029	46 288 039	367 806
2007		37 952 876	38 044 449	38 256 866	2 583 715
2008	57 729 694	61 418 962	61 567 154	61 910 908	24 596 476
Celková rezerva					27 820 053

Tabuľka 8.18: Dopočítaný dolný vývojový trojuholník r - r metódou, zdroj: [13], upravené

8.1.6 Zhrnutie výsledkov

Aplikovaním postupov deterministických prístupov na dáta slovenskej poisťovne sme dostali výsledky:

- Prvý prístup separačnej metódy - 29 550 237
- Bornhuetter - Ferguson metóda - 26 445 781, 27
- Druhý prístup separačnej metódy - 27 486 525
- Cape Code metóda - 23 429 296, 57
- Reťazovo - rebríková metóda - 27 820 053
- Reťazovo - rebríková metóda so zohľadnenou infláciou - 29 361 364

Postup reťazovo - rebríkovej metódy so zohľadnenou infláciou sa v postupoch diplomovej práce nenachádza, výsledok sme uviedli len na porovnanie. Postup metódy, ako aj aplikáciu na dátach je možné nájsť v [13].

Rezervy sa pohybujú v rozmedzí $26 - 29,6$ miliónov slovenských korún až na metódu Cape Code, ktorá je o dosť nižšia. Vzhľadom nato, že okrem Cape Code zaslúžené poistné zohľadňujú aj Bornhuetter - Ferguson metóda a druhý prístup separačnej metódy, tak by som brala do úvahy skôr výsledky týchto dvoch metód ako Cape Code. Pri prvom prístupe separačnej metódy a reťazovo - rebríkovej metóde so zohľadnenou infláciou sa pohybuje výška rezervy okolo 29, 4 milióna korún. Výšku týchto rezerv ovplyvňuje najviac výška inflácie.

Pri porovnaní výsledkov by som zvolila ako vhodnú výšku rezervy približne 27, 5 miliónov. Nemali sme k dispozícii skutočnú výšku rezervy, takže sme náš odhad nemohli porovnať.

8.2 Reťazovo - rebríková metóda a stochastický prístup

V tejto časti sme aplikovali postup reťazovo-rebríkovej metódy z kapitoly 4 a stochastických metód z kapitoly 5 na dáta nemeckej poisťovne Munich RE. Tieto dáta je možné nájsť vo výročnej správe poisťovne z roku 2010, ktorá je dostupná v [17] na strane 217. Údaje sú v miliónoch eur. Hodnoty dát sme posunuli o tri desatinné miesta doprava. V popise tabuľky nemeckej poisťovne sa nachádza za popisom tabuľky , NEM. Týmto sme odlíšili tabuľky slovenskej poisťovne od tabuliek nemeckej poisťovne.

Rok vzniku poistných udalostí je od roku 2000 do roku 2010. Vývojové roky, ktoré uplynuli od vzniku pu po jej vyplatenie sú od roku 1 do roku 11, pričom vývojový rok 1 vyjadruje vyplatené pp v tom istom roku ako vznikla pu a vývojový rok 11 je desať rokov od vzniku pu po vyplatenie pp poistencom. Hodnoty v hornom vývojovom trojuholníku vyjadrujú vyplatené pp za udalosti, ktoré vznikli v roku i a boli vyplatené j rokov od vzniku pu. Údaje sa nachádzajú sa v tabuľke 8.19.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok j**										
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2000	9 380	5 891	3 755	2 242	2 300	1 427	1 126	1 030	1 154	933	608
2001	3 426	3 102	1 586	873	612	464	453	364	171	225	
2002	3 893	2 906	1 245	671	372	258	308	329	160		
2003	4 066	2 173	906	416	404	312	231	248			
2004	3 648	2 890	916	406	414	238	243				
2005	3 503	3 579	1615	523	479	250					
2006	3 389	2 468	1 336	542	423						
2007	4 199	2 808	1 224	824							
2008	4 252	3 185	1 599								
2009	4 406	3 148									
2010	4 921										

Tabuľka 8.19: Nekumulované dáta, NEM

Tabuľku 8.19 sme zkumulovali postupným pričitovaním hodnôt v riadkoch a výsledok zapísali do tabuľky 8.20.

Rok vzniku PU i	Vývojový rok j										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2000	9 380	15 271	19 026	21 268	23 568	24 995	26 121	27 151	28 305	29 238	29 846
2001	3 426	6 528	8 114	8 987	9 599	10 063	10 516	10 880	11 051	11 276	
2002	3 893	6 799	8 044	8 715	9 087	9 345	9 653	9 982	10 142		
2003	4 066	6 239	7 145	7 561	7 965	8 277	8 508	8 756			
2004	3 648	6 538	7 454	7 860	8 274	8 512	8 755				
2005	3 503	7 082	8 697	9 220	9 699	9 949					
2006	3 389	5 857	7 193	7 735	8 158						
2007	4 199	7 007	8 231	9 055							
2008	4 252	7 437	9 036								
2009	4 406	7 554									
2010	4 921										

Tabuľka 8.20: Kumulované dáta upravené, NEM

8.2.1 Reťazovo-rebríková metóda so zohľadneným váženým priemerom

Vychádzali sme z tabuľky 8.20. Najprv sme vypočítali individuálne odhady koeficientov vývoja a následne vážené priemery pre každý vývojový rok. Výsledky tohto kroku sa nachádzajú v tabuľke 8.21.

Rok vzniku PU i	Vývojový rok j									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}
2000	$1,6280$	$1,2459$	$1,1178$	$1,1081$	$1,0605$	$1,0450$	$1,0394$	$1,0425$	$1,0330$	$1,0208$
2001	$1,9054$	$1,2430$	$1,1076$	$1,0681$	$1,0483$	$1,0450$	$1,0346$	$1,0157$	$1,0204$	
2002	$1,7465$	$1,1831$	$1,0834$	$1,0427$	$1,0284$	$1,0330$	$1,0341$	$1,0160$		
2003	$1,5344$	$1,1452$	$1,0582$	$1,0534$	$1,0392$	$1,0279$	$1,0291$			
2004	$1,7922$	$1,1401$	$1,0545$	$1,0527$	$1,0288$	$1,0285$				
2005	$2,0217$	$1,2280$	$1,0601$	$1,0520$	$1,0258$					
2006	$1,7282$	$1,2281$	$1,0754$	$1,0547$						
2007	$1,6687$	$1,1747$	$1,1001$							
2008	$1,7491$	$1,2150$								
2009	$1,7145$									
2010										
Vážený priemer w_j	$1,7280$	$1,2063$	$1,0879$	$1,0701$	$1,0432$	$1,0386$	$1,0360$	$1,0309$	$1,0294$	$1,0208$

Tabuľka 8.21: Individuálne odhady a vážený priemer, NEM

Následne sme pomocou váženého priemeru doplnili dolný trojuholník a odhadli rezervu.

Tento krok sa nachádza v tabuľke 8.22.

Rok vzniku PU	**Vývojový rok j**										**Rezerva**
i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
2000											0
2001										11 510, 48	234, 48
2002									10 440, 42	10 657, 52	515, 52
2003								9 026, 82	9 292, 42	9 485, 65	729, 65
2004							9 069, 90	9 350, 43	9 625, 55	9 825, 71	1 070, 71
2005						10 332, 87	10 704, 52	11 035, 61	11 360, 31	11 596, 55	1 647, 55
2006					8 510, 80	8 839, 17	9 157, 10	9 440, 33	9 718, 10	9 920, 18	1 762, 18
2007				9 690, 09	10 109, 14	10 499, 19	10 876, 83	11 213, 24	11 543, 18	11 783, 21	2 728, 21
2008			9 830, 37	10 519, 84	10 974, 78	11 398, 22	11 808, 20	12 173, 42	12 531, 60	12 792, 20	3 756, 20
2009		9 112, 09	9 913, 14	10 608, 42	11 067, 19	11 494, 20	11 907, 63	12 275, 92	12 637, 12	12 899, 91	5 345, 91
2010	8 503, 50	10 257, 42	11 159, 17	11 941, 84	12 458, 27	12 938, 95	13 404, 35	13 818, 93	14 22, 54	14 521, 35	9 600, 35
Celková rezerva											27 390, 78

Tabuľka 8.22: Doplnený dolný trojuholník s rezervou pomocou reťazovo - rebríkovej metódy, NEM

8.2.2 Mackova metóda

Teraz prejdeme k stochastickému prístupu. Odhad rezerv sme robili pomocou programu R, ktorý je možné stiahnuť na stránke

http://cran.r-project.org/bin/windows/base/.

Vychádzali sme z kumulovaného vývojového trojuholníka. Prepísali sme ho do súboru formátu .txt. Údaje musia mať tvar matice, takže na prázdne miesta v dolnom vývojovom trojuholníku treba napísať NA. Kód na odhad rezerv sa nachádza v prílohe 2. Tu uvedieme len niektoré výstupy z programu, ktoré nám dokážu, že Mackovou metódou dosiahneme rovnaké výsledky ako v prípade reťazovo rebríkovej metódy.

Rok vzniku PU	**Odhady koeficientov vývoja**	**Celkové pp vo vývojovom roku 11**	**IBNR rezerva**
2000		29 846	0
2001	1, 7280	11 510	234
2002	1, 2062	10 658	516
2003	1, 0879	9 486	730
2004	1, 0701	9 826	1 071
2005	1, 0432	11 597	1 648
2006	1, 0386	9 920	1 762
2007	1, 0360	11 783	2 728
2008	1, 0309	12 792	3 756
2009	1, 0294	12 900	5 346
2010	1, 0208	14 521	9 600
Celkom		144 839	27 391

Tabuľka 8.23: Odhad rezerv pomocou Mackovej metódy, NEM

Rok vzniku PU	**Vývojový rok j**										**Rezerva**
i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
2000											0
2001										11 510, 48	234, 48
2002									10 440, 42	10 657, 52	515, 52
2003								9 026, 82	9 292, 42	9 485, 65	729, 65
2004							9 069, 90	9 350, 43	9 625, 55	9 825, 71	1 070, 71
2005						10 332, 87	10 704, 52	11 035, 61	11 360, 31	11 596, 55	1 647, 55
2006					8 510, 80	8 839, 17	9 157, 10	9 440, 33	9 718, 10	9 920, 18	1 762, 18
2007				9 690, 09	10 109, 14	10 499, 19	10 876, 83	11 213, 24	11 543, 18	11 783, 21	2 728, 21
2008			9 830, 37	10 519, 84	10 974, 78	11 398, 22	11 808, 20	12 173, 42	12 531, 60	12 792, 20	3 756, 20
2009		9 112, 09	9 913, 14	10 608, 42	11 067, 19	11 494, 20	11 907, 63	12 275, 92	12 637, 12	12 899, 91	5 345, 91
2010	8 503, 50	10 257, 42	11 159, 17	11 941, 84	12 458, 27	12 938, 95	13 404, 35	13 818, 93	14 22, 54	14 521, 35	9 600, 35
Celková rezerva											27 390, 78

Tabuľka 8.24: Doplnený dolný vývojový trojuholník pomocou Mackovej metódy, NEM

8.2.3 Poissonov model

Rovnako ako v prípade Mackovho modelu, sme využili naprogramovanú knižnicu ChainLadder. Kód pre odhad rezerv sa nachádza v prílohe 2. Vo výstupe programu R dostaneme rovnaké výsledky ako pomocou Mackovej metódy. Jediným rozdielom je, že pri Poissonovom modeli sa uvádzajú zaokrúhlené výsledky bez desatinnej čiarky v tabuľke 8.24. Takže sme sa neopakovali, a neuviedli rovnaké tabuľky ako v sekcii 8.2.2. Opäť sme ukázali, že pomocou stochastického prístupu získame rovnaké výsledky ako v prípade reťazovo - rebríkovej metódy.

Záver

Správny odhad rezerv neodškriepiteľne patrí medzi najdôležitejšie úlohy neživotnej poisťovne. Nie každá poisťovňa odhaduje rovnakými metódami. Medzi faktory ovplyvňujúce výšku rezervy patrí aj preferencia poistného matematika poisťovne.

Najpoužívanejšou metódou na odhad rezerv je reťazovo - rebríková metóda. Je to jednoznačne vďaka jej jednoduchosti. Má ale svoje nevýhody, a to, že neposkytuje informácie, ktoré by sa týkali variability výsledkov. Tento nedostatok bol odstránený vynájdením stochastických modelov. V práci sme sa venovali len tým stochastickým modelom, ktoré dávajú rovnaké výsledky ako reťazovo - rebríková metóda. Pre odhad najprv museli byť vyslovené predpoklady, za ktorých je možný odhad. Tieto modely slúžia aj na overenie správnosti výsledkov dosiahnutých reťazovo - rebríkovou metódou.

V prvej kapitole sme sa venovali pojmu technická rezerva. Uviedli sme si delenie rezerv ako aj popis dôležitých rezerv: vyrovnávacej rezervy a rezervy na poistné plnenia. Veľmi stručne sme sa snažili uviesť čitateľa do problematiky.

V ďalšej časti sme objasnili rozdiel medzi deterministickým a stochastickým odhadom rezerv. Ako sme už spomínali, stochastický spôsob má veľa výhod. Napriek komplikovanejšiemu postupu, samotný odhad trvá krátko. Je to vďaka počítačovým softvérom, ktorým stačí zadať kumulovaný trojuholník s poistnými plneniami a predprogramovaná knižnica odhadne výšku rezervy. Pre správny výber metódy sa treba hlavne venovať predpokladom použitia modelu.

Zavedenie označenia pre deterministický a stochastický odhad sa nachádza v tretej kapitole.

Štvrtá a piata kapitola sú najdôležitejšie časti práce. V štvrtej kapitole sme sa venovali teoretickému postupu odhadu rezerv deterministickým prístupom. Základným vstupom pre každú metódu je nekumulovaný alebo kumulovaný vývojový trojuholník s doteraz vyplatenými poistnými plneniami. Pri niektorých metódach sme zohľadňovali výšku zaslúženého poistného, počet škôd alebo infláciu. Venovali sme sa hlavne separačnej metóde, kde sme uviedli dva prístupy odhadu.

Postup odhadu stochastickým prístupom sme uviedli v piatej kapitole. Pri každej metóde predpokladáme, že v nekumulovanom trojuholníku sa nachádzajú kladné hodnoty poistných plnení. Naším cieľom bolo podrobne opísať postup odhadu rezerv, nakoľko je to budúcnosť v odhade a deterministický prístup sa bude využívať čoraz menej. Väčšina metód má svoj stochastický ekvivalent.

Našimi cieľmi bolo popísanie metód odhadu rezerv a zistenie, či je vhodnejšie používať deterministický alebo stochastický prístup. Snažili sme sa podrobne popísať postup odhadu tak, aby čitateľovi nerobilo problém odhadnúť rezervu pomocou akejkoľvek popísanej metódy. Každá z prístupov má svoje výhody, ale aj nevýhody. Po ich vypísaní sme prišli k záveru, že je vhodnejšie používať stochastický prístup, ak má odhadca základné matematické a štatistické vedomosti, v opačnom prípade deterministický.

O výskyte záporných hodnôt vo vývojovom trojuholníku je celá kapitola šesť. Záporná hodnota vzniká, ak sú nároky z nejakého dôvodu zmenšené. Týmto dôvodom môžu byť chyby vykonané pri vyhodnocovaní škodovej udalosti, pozitívny výsledok v súdnom spore ako aj veľa ďalších. Naše popísané stochastické postupy je možné aplikovať na takéto dáta. Mackov model je možné využiť bez zmeny predpokladov a Poissonov model s menšou úpravou na kvázi maximálnu vierohodnosť tiež. V skratke sme popísali ďalšie postupy, ktoré je možné použiť na dáta so zápornými hodnotami.

Na porovnanie rozdielu medzi skutočnou a odhadovanou hodnotou rezervy slúži chyba odhadu, ktorá je popísaná v kapitole sedem.

Posledná kapitola je venovaná aplikácii teoretických postupov deterministického a stochastického prístupu na dáta. Pre nadväznosť s bakalárskou prácou sme sa rozhodli, že deterministické prístupy aplikujeme na dáta jednej zo slovenských poisťovní, ktoré sme využívali v bakalárskej práci. V podsekcii Zhrnutie sme zhrnuli a porovnali výsledky odhadnutých rezerv a vybrali podľa nás vhodný výsledok odhadu rezervy. Postupy reťazovo - rebríkovej metódy s ohľadom na vážený priemer, Poissonovho a Mackovho modelu boli použité na dáta nemeckej spoločnosti Muncher RE. Jedným z našich cieľov bolo dokázať, že stochastickými postupmi dosiahneme rovnaké výsledky ako pri reťazovo - rebríkovej metóde. Tento cieľ sa nám podarilo splniť.

Literatúra

[1] Pacáková, V. 2004. Aplikovaná poistná štatistika. Bratislava: Iura edition, 2004. 261 s. ISBN 80-8078-004-8.

[2] Cipra, T. 2006. Pojistná matematika - teorie a praxe. Vydání II. Bratislava: Ekopress, s.r.o., 2006. 411 s. ISBN 80-86929-11-6.

[3] Čejková, V., Nečas, S., Řezáč, F. 2005. Pojistná ekonomika II. Vydání I. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2005. 56 s. ISBN 80-210-3662-1.

[4] Čámský, F. 2004. Pojistná matematika v životním a neživotním pojištění. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2004. 115 s. ISBN 80-210-3385-1.

[5] Pantzopoulou, E. 2003. The concept of reserving and reserving methodologies in general insurance. London: City University in London.

[6] Goul, I. 2008. Stochastic chain-ladder models in nonlife insurance. [online]. cit. 27.1.2012. <https://bora.uib.no/bitstream/1956/3370/1/Masterthesis_Gould.pdf>

[7] Verral, R. J. 1999. An investigation into stochastic claims reserving models and the chain-ladder technique. [online]. cit. 30.1.2012. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167668799000384>

[8] Verral, R. J., England, P.D. 2002. Stochastic claims reserving in general insurance. [online]. cit. 29.1.2012. <http://www.actuaries.org.uk/research-and-resources/documents/stochastic-claims-reserving-general-insurance>

[9] Mack, T. 1993. Measuring the variability of Chain Ladder reserve estimates. [online]. cit. 29.1.2012. <http://www.pszaf.hu/data/cms1624549/szkonz031mack.pdf>

[10] Alba, E. 2006. Claims reserving when there are negative values in the runoff triangle: Bayesian analysis using the three-parameter log-normal distribution.

[online]. cit. 7.2.2012.
<http://www.soa.org/library/journals/north-american-actuarial-journal/2006/july/naaj0603_6.pdf>

[11] Verrall, R.J., Li, Z. 1993. Negative incremental claims: Chain Ladder and linear models. [online]. cit. 7.2.2012.
<http://www.actuaries.org.uk/research-and-resources/documents/negative-incremental-claims-chain-ladder-and-linear-models>

[12] Reid, D. H. 1997. Reid's method. [online]. cit. 7.2.2012.
<http://www.actuaries.org.uk/research-and-resources/documents/claims-reserving-manual-vol2-section-d4-reids-method>

[13] Gatialová, J. 2010. Rezervy - ich výpočet a význam v životnom a neživotnom poistení. [online]. cit. 3.1.2012.
<https://stella.uniba.sk/zkp-storage/dzb/dostupne/FM/2010/2010-FM-AKxFvU/2010-FM-AKxFvU.pdf>

[14] Špačková, L. 2009. Metody stanovení technických rezerv neživotní pojišťovny. [online]. cit. 24.1.2012.
<http://dspace.upce.cz/bitstream/10195/34832/7/ SpackovaL_Metody%20 stanoveni_VP_2009.pdf>

[15] Faculty and Institute of Actuaries Claims Reserving Manual v.2 .1997 . Précis of other actuarial papers. [online]. cit. 7.2.2012.
<http://www.actuaries.org.uk/research-and-resources/documents/claims-reserving-manual-vol2-section-e-precis-other-actuarial-paper2>

[16] [online]. cit. 3.1.2012.
<http://www.zbierka.sk/zz/predpisy/default.aspx?PredpisID=16288&FileName=02-z095&Rocnik=2002>

[17] Munich re group annual report. 2010. [online]. cit. 3.3.2012.
<http://www.munichre.com/publications/302-06773_en.pdf>

Príloha 1

Priložené CD s aplikovanými deterministickými postupmi na dáta slovenskej poisťovne v MS Excel 2007.

Príloha 2

Kód pre odhad rezerv pomocou stochastickej Mackovej metódy. Poznámky sú písané za znakom %:

```
> install.packages("ChainLadder")
```

% nainštalovanie balíka

```
> library(ChainLadder)
```

% načítanie balíka

```
> z <- read.table("C://Users//JARUSKA//dip.txt", header=TRUE)
```

% do premennej z uložíme horný vývojový trojuholník kumulovaných dát. Samozrejme cestu v úvodzovkách zmeníme podľa toho, kde máme dáta uložené v .txt súbore. Názov dip.txt treba zmeniť podľa toho, ako sa volá súbor .txt.

```
> M <- MackChainLadder(Triangle = z, weights=1, alpha=1,
 est.sigma = "Mack", tail=FALSE, tail.se=NULL, tail.sigma=NULL)
```

% odhadneme hodnotu IBNR rezervy

```
> M$f
```

% vypíše nám odhady koeficientov vývoja

```
> M$f.se
```

% vypíše nám chyby odhadov koeficientov vývoja

```
> M$FullTriangle
```

% dáme vypísať dolný vývojový trojuholník

Kód pre odhad rezerv pomocou Poissonovej metódy. Poznámky sú písané za znakom %:

```
> library(ChainLadder)
```

% načítanie balíka

```
> z <- read.table("C://Users//JARUSKA//dip.txt", header=TRUE)
```

% do premennej z uložíme horný vývojový trojuholník kumulovaných dát. Samozrejme cestu v úvodzovkách zmeníme podľa toho, kde máme dáta uložené v .txt súbore. Názov dip.txt treba zmeniť podľa toho, ako sa volá súbor .txt.

```
> z<-as.triangle(z)
```

% matica musí mať formát trojuholník

```
> dimnames(z)$dev=1:11
```

% musíme odstrániť z názvov stĺpcov X

```
> g<- glmReserve(triangle= z , var.power = 1, link.power = 0,
 cum = TRUE, mse.method = "formula", nsim = 1000)
```

% odhad koeficientov pomocou Poissonovho modelu

```
> fit1 <- glmReserve(z)
```

```
> fit1$summary
```

% výstup, ktorý nám dáva hodnotu IBNR rezervy, posledný stĺpec pp

```
> g$FullTriangle
```

% dáme vypísať dolný vývojový trojuholník