

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

**Modelovanie a prognózovanie
špecifických mier v demografii**

Diplomová práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



**Modelovanie a prognózovanie
špecifických mier v demografii**

Diplomová práca

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	Doc. RNDr. Karol Pastor, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Zdenka Hermanová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Modelovanie a prognózovanie vývoja špecifických mier v demografii

Cieľ: Téma nadväzuje na bakalársku prácu, zameria sa najmä na modely plodnosti. Na fitovanie reálnych dát sa použije širšia trieda funkcií a ich kombinácií. Cieľom je modelovať demografické zmeny pomocou zmien vybraných parametrov.

Vedúci: doc. RNDr. Karol Pastor, CSc.

Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum zadania: 13.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že diplomovú prácu s názvom *Modelovanie a prognózovanie špecifických mier v demografii* som vypracovala samostatne, za pomoci a pokynov vedúceho bakalárskej práce a s použitím odbornej literatúry uvedenej v záverečnej časti.

V Bratislave, apríl 2012

.....

Pod'akovanie

Touto cestou by som sa chcela poďakovať vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Karolovi Pastorovi, CSc., za čas, ktorý mi venoval, za pripomienky a cenné rady, ktoré mi pri tvorbe tejto práce poskytol.

Ďakujem aj priateľom a svojej rodine za ich podporu počas celého štúdia.

Abstrakt

Názov práce: Modelovanie a prognózovanie špecifických mier v demografii

Pracovisko: Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Autor: Bc. Zdenka Hermanová

Vedúci práce: doc. RNDr. Karol Pastor, CSc.

Druh práce: diplomová práca

Počet strán: 77

V práci sa pokúsime nájsť vhodný model na fitovanie a prognózovanie špecifických mier plodnosti pre Slovenskú republiku. Vychádzame zo skúmaného obdobia v rozmedzí rokov 1980 – 2010 a prognózy vykonávame pre roky 2015, 2020 a 2025. Pri fitovaní reálnych dát sa zaoberáme štyrmi modelmi: Jastremského modelom, lognormálnym modelom, gama modelom a Hadwigerovým modelom. Z týchto modelov získavame prvotné odhady, ktoré následne vylepšujeme minimalizáciou štvorcov odchýlok pre vytvorenie prognózy. Pre prognózovanie využívame štyri typy trendov: lineárny trend, logaritmickej trend, polynomickej trend a exponenciálny trend. Prognózovanie realizujeme za pomoci regresnej analýzy. Získané prognózy porovnáваме s prognózami uverejnenými Štatistickým úradom Slovenskej republiky.

Kľúčové slová: špecifické miery plodnosti, prognózovanie, Jastremského model, lognormálny model, gama model a Hadwigerov model.

Abstract

Thesis title: Modeling fertility and forecasting of specific rates in demography

Department: Comenius University in Bratislava
Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Department of Applied Mathematics and Statistics

Author: Bc. Zdenka Hermanová

Tutor: doc. RNDr. Karol Pastor, CSc.

Type of work: Master's Thesis

Number of pages: 77

In this thesis we try to find an appropriate model for fitting and prognosing of specific rate of fertility for Slovak republic. We perform our prognosis for years 2015, 2020 and 2025 on the basis of studied period 1980-2010. Four models - Jastremski model, lognormal model, Gamma model and Hadwiger model - are used for fitting of real data. From these patterns we get the initial estimates which we later improve by minimalization of squared residuals to create a prediction. For making the predictions We use four types of trends: lineartrend, logarithmic trend, polynomial trend and exponential trend. We pursue the creating of the prediction by use of the regression analysis. We compare the acquired predictions with the predictions published by the Statistical Office of the Slovak Republic.

Key words: specific parameters of fertility, prognosing, Jastremski model, lognormal model, Gamma model and Hadwiger model

Obsah

Úvod.....	11
1. Vývoj pôrodnosti a plodnosti v Slovenskej republike	13
1.1. Druhá demografická revolúcia	13
1.2. Dôsledky súčasného populačného vývoja	15
1.3. Pôrodnosť a plodnosť	15
1.4. Číselné charakteristiky	16
1.5. Použité dáta	17
2. Modely plodnosti	19
2.1. Jastremského model.....	19
2.2. Lognormálny model.....	20
2.3. Gama model.....	22
2.4. Hadwigerov model.....	23
3. Identifikácia parametrov v jednotlivých modeloch	27
3.1. Použitie aplikácie Solver	28
3.2. Jastremského model.....	28
3.3. Lognormálny model.....	30
3.4. Gama model.....	32
3.5. Hadwigerov model.....	34
4. Prognózy	37
4.1. Prognózovanie na modeloch.....	37
4.2. Jastremského model.....	38
4.3. Lognormálny model.....	42
4.4. Gama model.....	46
4.5. Hadwigerov model.....	50
4.6. Zhodnotenie	55

Záver	59
Prílohy.....	61
Zoznam použitej literatúry:.....	76

Zoznam grafov

Graf č.1: Predpokladané rozloženie plodnosti podľa veku.....	12
Graf č.2: Vývoj špecifických mier plodnosti Slovenskej republiky počas skúmaného 30 ročného obdobia rokov 1980 - 2010	17
Graf č.3: Porovnanie kriviek Jastremského modelu	29
Graf č.4: Porovnanie kriviek lognormálneho modelu	31
Graf č.5: Porovnanie kriviek gama modelu	31
Graf č.6: Porovnanie kriviek Hadwigerovho modelu	36
Graf č.7: Vývoj trendu pre parameter <i>suma</i> Jastremského modelu	39
Graf č.8: Vývoj trendu pre parametre <i>modálny vek</i> a <i>maximum</i> Jastremského modelu	39
Graf č.9: Vývoj trendu plodnosti na základe polynomickeho trendu a Jastremského modelu	41
Graf č.10: Vývoj trendu pre parameter σ^2 lognormálneho modelu	43
Graf č.11: Vývoj trendu pre parametre μ a <i>suma</i> lognormálneho modelu	43
Graf č.12: Vývoj trendu plodnosti na základe polynomickeho trendu a lognormálneho modelu.....	45
Graf č.13: Vývoj trendu pre parametre alfa a beta gama modelu	47
Graf č.14: Vývoj trendu pre parameter <i>suma</i> gama modelu	47
Graf č.15: Vývoj trendu plodnosti na základe kombinovaného trendu a gama modelu.....	50
Graf č.16: Vývoj trendových čiar pre <i>suma</i> a <i>maximum</i> Hadwigerovho modelu.....	51
Graf č.17: Vývoj trendových čiar pre <i>priemerný vek</i> a <i>parameter b</i> Hadwigerovho modelu .	52
Graf č.18: Trend plodnosti na základe polynomickeho modelu a Hadwigerovho modelu .	54
Graf č.19: Porovnanie prognózy ŠÚ SR a reálnych dát Slovenskej republiky pre rok 2010.	55
Graf č.20: Porovnanie prognózy ŠÚ SR a prognózy založenej na Jastremského modeli ...	56
Graf č.21: Porovnanie prognózy ŠÚ SR a prognózy založenej na lognormálnom modeli .	57
Graf č.22: Porovnanie prognózy ŠÚ SR a prognózy založenej na gama modeli	57
Graf č.23: Porovnanie prognózy ŠÚ SR a prognózy založenej na Hadwigerovom modeli	58

Zoznam tabuliek

Tabuľka č.1: Prehľad hodnôt prvotných odhadov Jastremského modelu.....	28
Tabuľka č.2: Prehľad hodnôt vylepšených odhadov Jastremského modelu.....	29
Tabuľka č.3: Prehľad hodnôt prvotných odhadov lognormálneho modelu.....	30
Tabuľka č.4: Prehľad hodnôt vylepšených odhadov lognormálneho modelu.....	31
Tabuľka č.5: Prehľad hodnôt prvotných odhadov gama modelu.....	33
Tabuľka č.6: Prehľad hodnôt vylepšených odhadov gama modelu.....	33
Tabuľka č.7: Prehľad hodnôt prvotných odhadov Hadwigerovho modelu.....	35
Tabuľka č.8: Prehľad hodnôt vylepšených odhadov Hadwigerovho modelu.....	35
Tabuľka č.9: Prehľad hodnôt <i>suma</i> v jednotlivých modeloch po vylepšovaní prvotných odhadov.....	37
Tabuľka č.10: Súpis predpisov a koeficientov determinácie R^2 trendových čiar Jastremského modelu.....	40
Tabuľka č.11: Prognózované hodnoty pre roky 2015, 2020 a 2025 na základe Jastremského modelu.....	441
Tabuľka č.12: Súpis predpisov a koeficientov determinácie R^2 trendových čiar lognormálneho modelu.....	44
Tabuľka č.13: Prognózované hodnoty pre roky 2015, 2020 a 2025 na základe lognormálneho modelu.....	45
Tabuľka č.14: Súpis predpisov a koeficientov determinácie R^2 trendových čiar gama modelu.....	48
Tabuľka č.15: Prognózované hodnoty pre roky 2015, 2020 a 2025 na základe gama modelu	49
Tabuľka č.16: Súpis predpisov a koeficientov determinácie R^2 trendových čiar Hadwigerovho modelu.....	53
Tabuľka č.17: Prognózované hodnoty pre roky 2015, 2020 a 2025 na základe Hadwigerovho modelu.....	54

Úvod

Prognózy týkajúce sa populácie zaujímajú popredných ekonómov a politikov v každej krajine. Pri prognózovaní ďalšieho prosperovania tej ktorej krajiny sa často opierajú o výsledky štúdií demografov, ktorí sa zameriavajú hlavne na modelovanie kriviek plodnosti. S cieľom popísať vekovú špecifickosť plodnostného modelu boli navrhnuté rôzne matematické modely. Niektoré z týchto modelov preukázali, že poskytujú reálne výsledky pri výpočte špecifickej plodnosti ľudskej populácie.

V posledných rokoch sú značné rozdiely v štruktúre plodnosti pozorovaných dát. Táto zmena súvisí s tvarom plodnostnej krivky. Dochádza k zmiešaniu dvoch plodnostných modelov, čím sa presnosť prognózovania zhoršuje a existujúce modely nevedia zachytiť moderný vzor plodnosti.

V tejto práci čiastočne nadväzujeme na bakalársku prácu *Modelovanie špecifických mier a ich zmien v čase*. (Hermanová, 2010).

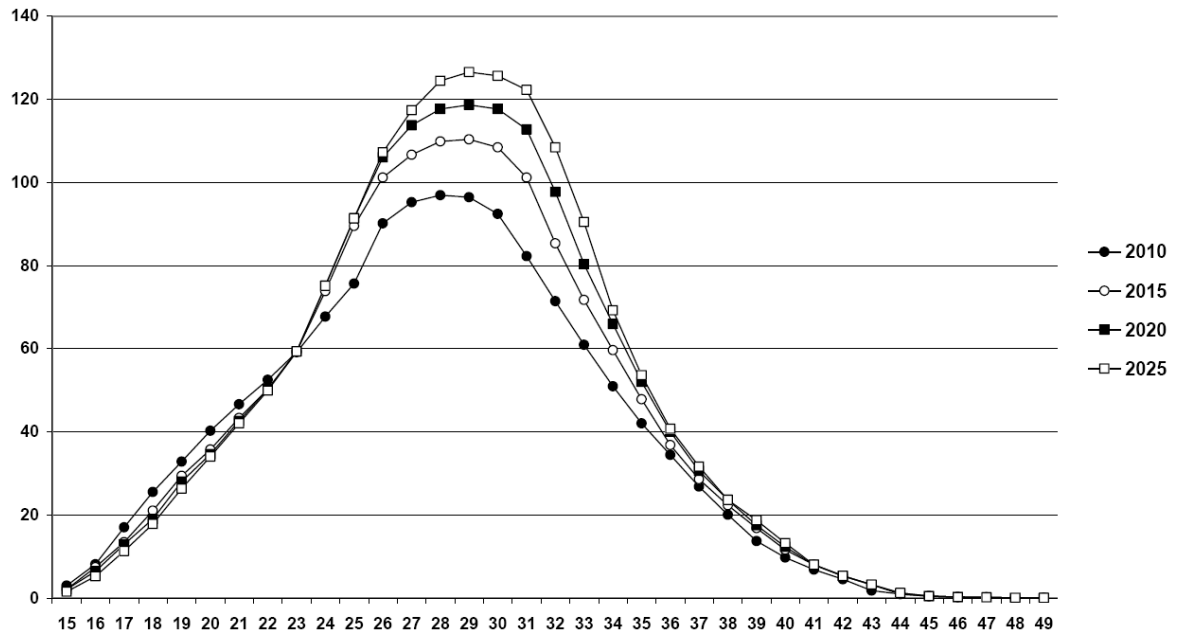
Na modelovanie a prognózovanie špecifických mier pôrodnosti sa pozrieme z demografického hľadiska, čo predchádzalo daným zmenám, aký bol doposiaľ populačný vývoj. Priblížime zaužívaný pojem druhá demografická revolúcia a základné charakteristiky pre pôrodnosť a plodnosť.

Podrobnejšie spracujeme štyri typy modelov. Budeme skúmať, aký majú tvar, aké sú ich základné vlastnosti a aké sú niektoré tvary ich derivácií, integrálov a limit. Získame prvotné odhady, ktoré sú potrebné pre následné prognózy. Pre lepšiu vierohodnosť ich vylepšíme na základe minimalizácie súčtu štvorcov odchýlok. Vylepšené hodnoty parametrov zaznamenáme. V ďalšom kroku objasníme čo sú to prognózy a s akými typmi sa budeme zaoberať. Opíšeme postup výpočtu prognóz pre jednotlivé modely, ich aplikáciu na dáta a výsledky zosumarizujeme do prehľadných tabuliek a grafov. Slovné zhodnotíme výsledný vývoj pôrodnosti, ako dobre opisujú dáta a následne aká je ich schopnosť prognózovania.

Hlavnou motiváciou pre túto prácu bolo široké spektrum nadväznosti na už vykonanú bakalársku prácu a okrem iného aj prognóza pre rok 2025, vydaná Štatistickým úradom Slovenskej republiky (Bleha - Vaňo, 2007). Táto prognóza predpovedá ďalší posun a neskôr ustálenie veku matky smerom k vyšším hodnotám.

Predpoveď prognózy pre rok 2025, vydanéj Štatistickým úradom Slovenskej republiky, je graficky znázornená na grafe č 1.

Na záver naše prognózy vyhodnotíme a porovnáme s prognózami Štatistického úradu Slovenskej republiky.



Graf č.1: Predpokladané rozloženie plodnosti podľa veku (Bleha – Vaňo, 2007, str.8, Graf 2)

1. Vývoj pôrodnosti a plodnosti v Slovenskej republike

Na rast populácie vplýva veľa faktorov, ktoré ovplyvňujú rovnováhu medzi pôrodnosťou a úmrtnosťou. Predĺžila sa priemerná dĺžka života a prežívania, lepšie sú využité zdroje prírodného bohatstva, vedeckých poznatkov, technické objavy či ekonomický rozvoj a v určitých zaľudnených oblastiach je trvale pomerne vysoká pôrodnosť. Až polovica obyvateľstva Zeme je mladšia ako 25 rokov. Znamená to, že títo ľudia založia v najbližších desaťročiach svoje rodiny a svetová populácia vzrastie o niekoľko miliárd. Na druhej strane registrujeme faktory, ktoré rast populácie spomaľujú. Sú to epidémie, vojny, hladomory, rasové a národnostné prenasledovanie, prírodné katastrofy, zlá sociálna a hospodárska situácia rozvojových krajín. V krajinách tretieho sveta často prevláda názor, že viac detí ľahšie užijú svojich rodičov.

V druhej polovici 20. storočia sa počet obyvateľov Zeme viac ako zdvojnásobil. Rozvojové krajiny dokončujú proces prechodu na nový reprodukčný model správania sa. Mladšie ročníky vo vysokom zastúpení zabezpečia rast populácie aj napriek klesajúcej pôrodnosti. Vyspelé krajiny sa nachádzajú vo fáze demografického prechodu a pozitívny populačný prírastok udržiavajú len vďaka imigrácii.

Slovenská republika v poslednom desaťročí prežíva významné demografické zmeny, ktoré sú s odstupom niekoľkých desiatok rokov za najvyspelejšími krajinami a s náskokom niekoľkých desiatok rokov pred rozvojovými krajinami. Prechod na nový model reprodukčného správania sa obyvateľstva je charakteristické pre toto obdobie. Súčasné demografické trendy sú v zásade také isté ako v celej Európe. Každá krajina a každý región má ale svoje špecifiká. Typickou črtou tohto procesu je skrátenie intervalu zmien v dôsledku vysokého tempa a rozsahu zmien v transformujúcej sa ekonomike.

1.1. Druhá demografická revolúcia

Prechod z jedného rovnovážneho stavu do druhého sa nazýva demografická revolúcia alebo demografický prechod. Populačný vývoj v Európe si vyslúžil osobitné pomenovanie, nakoľko znamená ozajstnú revolúciu modelov demografického správania sa. Holandský demograf van de Kaa takýto vývoj nazval *druhá demografická revolúcia*.

Pod druhou demografickou revolúciou sa rozumie komplex zmien v správaní sa a v hodnotovom systéme populácie. Nadhodnocovanie individualizmu a osobnej slobody, oslabujú funkciu manželstva a rodiny a redukujú pôrodnosť na úroveň nezaručujúcu sebareprodukciju populácie.

Na začiatku demografickej revolúcie je hrubá miera úmrtnosti i pôrodnosti vyššia ako na konci, ale na prirodzenú reprodukciu obyvateľstva stačí nižšia pôrodnosť. Prvá demografická revolúcia v Európe prebehla paralelne s priemyselnou revolúciou a jej dynamiku určuje klesajúca úmrtnosť. Kým sa pôrodnosť prispôsobí úmrtnosti, ich rozdiel tvorí prirodzený prírastok a ten vyvoláva rýchly rast obyvateľstva. Súčasný dlhodobý pokles pôrodnosti v celej Európe pod vyrovnanú reprodukčnú úroveň sa nedá vysvetliť pomocou klasickej teórie. Nevedie k nastoleniu rovnováhy, ale narušuje ju.

Aby sa mohla uskutočniť spoločenská zmena, sú potrebné tri veci: *kultúrne prostredie*, *prostriedky* na dosiahnutie zmeny, *impulz*, ktorý pomôže prekonať zotrvačnosť v správaní sa a odštartovať túto zmenu.

Kultúrne prostredie pre druhú demografickú revolúciu pociťuje danú zmenu ako pozitívnu a usmerňuje ju. Bolo ovplyvňované doznievajúcou povojnovou zvýšenou pôrodnosťou. Európy sa síce zvýšená pôrodnosť netýka, ale vďaka nesprávne interpretovaným ekologickým iniciatívam sa i v Európe za zodpovedný postoj začalo považovať obmedzovanie plodnosti. Súčasne sa začali prejavovať protipopulačne pôsobiace ideové zmeny. V povojnovej Európe nastáva väčšia emancipácia žien, zdôrazňovanie individuálnych ľudských práv a na základe technického pokroku aj možnosť zvyšovania životného štandardu.

Prostriedkom na uskutočnenie druhej demografickej revolúcie sa stala predovšetkým účinná hormonálna antikoncepcia. Pôvodne mala pomôcť mnohým rodinám, ale veľmi rýchlo sa však ukázalo, že umožňuje nové reprodukčné správanie. Nové vzory správania sa rýchlo rozšírili spôsobom, ktorý sa na základe analógie s fyzikou nazýva difúzia inovácií. Nové masovokomunikačné prostriedky, v tom čase najmä televízia, významne urýchlili šírenie týchto vzorov správania.

Impulzom na odštartovanie týchto zmien bola v polovici 60. rokov 20. storočia sexuálna revolúcia. Dochádza k poklesu plodnosti hlboko pod zachovávajúcu úroveň z dôvodu prudkého poklesu manželstiev a nárastu kohabitácií a rozvodov. Postupne vzrástol podiel detí narodených mimo manželstva a dokonca i počet dovtedy ilegálnych umelých potratov. V podmienkach Slovenskej republiky medzi priame impulzy zníženia sobášnosti

a pôrodnosti bezpochyby patria ekonomické opatrenia, ako je liberalizácia cien spotrebného tovaru, zrušenie mladomanželských pôžičiek a prakticky zastavenie hromadnej bytovej výstavby. (Pastor, 1998)

1.2. Dôsledky súčasného populačného vývoja

Dôsledkom krátkodobého poklesu pôrodnosti je nepravidelná veková štruktúra. Dlhodobý pokles má za následok tzv. starnutie populácie a úbytok obyvateľstva. Pravda v regiónoch s „nadpočetnou“ strednou generáciou sa depopulácia dostaví až o niekoľko rokov neskôr. V ďalšej generácii vzrastie nápor na verejné výdavky štátu. Bude potrebné znížiť dôchodky alebo zvýšiť dane, alebo posunúť dôchodkový vek smerom nahor. Pravdepodobne vzrastie počet prisťahovalcov.

Druhá demografická revolúcia priniesla najviac zmien v oblasti formovania rodiny. Dodala viac priestoru pre sebarealizáciu jednotlivca a osobnú slobodu. Umožňuje zvýšenie životnej úrovne a sexuálnu voľnosť. Na druhej strane konzumný spôsob života, ktorý zodpovedá druhej demografickej revolúcii, je v rozpore s koncepciou *trvalo udržateľného života*. Populačný vývoj, ktorý vedie k seba zničeniu, možno označiť za deviáciu (Pastor, 1998).

1.3. Pôrodnosť a plodnosť

Pôrodnosť je demografický proces, ktorý sleduje narodenia ako hromadný jav a vzťahuje sa k určitej populácii. Spolu s úmrtnosťou je pôrodnosť najdôležitejšou zložkou demografickej reprodukcie. Populačný vývoj určitého územného celku či populácie je ovplyvňovaný predovšetkým pôrodnosťou. Jej výsledným efektom, ktorý je vyjadrený počtom narodených detí, je plodnosť, alebo fertilita. Plodnosť je schopnosť človeka mať deti. Počet detí, ktoré sa narodia určitému páru, závisí nielen na reprodukčnom správaní sa, ale aj na plodivosti. Úroveň pôrodnosti je taktiež ovplyvnená vonkajšími "nebiologickými" faktormi, ako napríklad populačná politika štátu, bytová situácia partnerov, uplatnenie sa na trhu práce, hodnotový systém partnerov, náboženské vyznanie a podobne (Kalibová - Pavlík - Vodáková, 1993).

1.4. Číselné charakteristiky

V tejto časti uvedieme niektoré najčastejšie používané číselné charakteristiky pre pôrodnosť a plodnosť medzi ktoré patria rôzne miery. Definície sú prevzaté z Vaňo - Jurčova – Mészáros (2003). Najjednoduchšou charakteristikou pôrodnosti je *hrubá miera pôrodnosti* n , ktorá udáva pomer počtu živonarodených $N^{živo}$ k strednému stavu obyvateľov \bar{P} a vyjadruje sa v promile ‰. Ide teda o počet všetkých narodených detí počas kalendárneho roku na 1000 obyvateľov:

$$n = \frac{N^{živo}}{\bar{P}}$$

Je vhodné skúmať plodnosť diferencovane podľa veku matky. Na tento účel slúži charakteristika *miera plodnosti podľa veku* f_x , nazývaná aj *špecifická miera plodnosti*. Vyjadruje počet živonarodených detí na 1000 žien v dovŕšenom veku $N_x^{živo}$ k počtu žien stredného stavu $\overline{P_x^{ženy}}$ v tom istom veku:

$$f_x = \frac{N_x^{živo}}{\overline{P_x^{ženy}}}$$

Jedná sa o ženy z intervalu $(x, x + 1)$.

Ďalšou charakteristikou plodnosti je *úhrnná plodnosť úp*.

$$úp = \sum_{x=15}^{49} f_x$$

Je to súčet mier plodnosti pre veky od 15 do 49 rokov. Interpretuje sa ako priemerný počet živonarodených detí, ktoré by sa narodili jednej žene počas jej celého reprodukčného obdobia pri neobmedzenej plodnosti a nulovej úmrtnosti.

Medzi ďalšie charakteristiky môžeme zaradiť *všeobecnú mieru plodnosti vf*:

$$vf = \frac{N^{živo}}{\overline{P_{15-49}^{ženy}}}$$

ktorú získame, ak v menovateli pre výpočet hrubej miery pôrodnosti n vymeníme stredný stav obyvateľstva za ženy v reprodukčnom veku $\overline{P_{15-49}^{ženy}}$, čiže ženy vo veku 15-49 rokov.

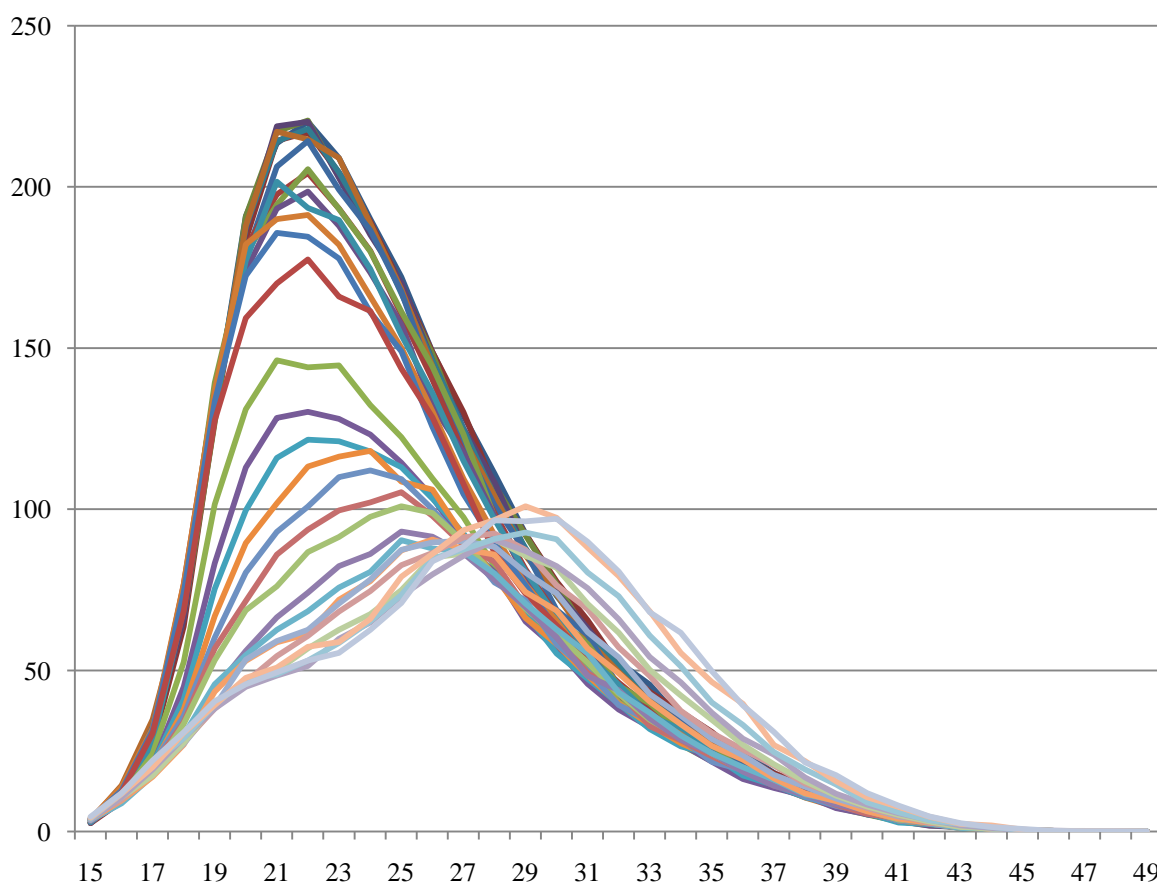
Hrubé miery a všeobecné miery sú ovplyvnené vekovou štruktúrou obyvateľstva.

1.5. Použité dáta

V práci vychádzame z údajov pre Slovenskú republiku, ktoré zverejnil ŠÚ SR na verejnom internetovom portáli s priamym prístupom cez adresu: <http://www.infostat.sk/slovakpopin/data/fertility.xls>.

V získanom súbore programu Excel sa nachádzajú nami zvolené dáta *Age specific fertility rates*, ktoré sa nachádzajú na riadkoch 469 – 507. Ich hodnoty sa nachádzajú v prílohách č.4a – č.4c.

Pre výpočty sme si zvolili roky 1980 - 2010 s päťročným rozstupom, konkrétne 1980, 1985, 1990, 1995, 2000, 2005 a 2010. Sumár zisťovaných údajov tvorí spolu 30 ročné obdobie. V každom zo zvolených časových dát sú dáta evidované v rozpätí 15 až 44 – 49 rokov. V skorších dátach, rokoch 1980 a 1985 je stanovená horná hranica rozpätia na 44 rokov, od roku 1986 máme k dispozícii dáta do 49 rokov. Graf č.2 znázorňuje vývoj počas skúmaného 30 ročného obdobia.



Graf č.2: Vývoj špecifických mier plodnosti Slovenskej republiky počas skúmaného 30 ročného obdobia rokov 1980 - 2010

Na výpočty pre získanie prehľadu, aká krivka najlepšie opisuje reálnu plodnosť, sme zvolili program Excel. Dáta sme postupne aplikovali na jednotlivé modely. Konkrétne Jastremského model, model založený na lognormálnom rozdelení, na gama rozdelení a Hadwigerovom modeli. Jastremského model je najjednoduchší a umožňuje robiť prvotné odhady parametrov priamo z dát. Ďalšie tri modely patria do exponenciálnej triedy a chronologicky im patrí uvedené poradie. Aby sme vedeli jednotlivé modely porovnávať v zmysle ich vhodnosti a dobrej fitácie reálnych dát, za kritérium sme zvolili súčet štvorcov odchýlok. Samozrejme aj súčet štvorcov odchýlok má svoje nevýhody, ako napríklad prikladanie rovnakej váhy odchýlke v miestach s nízkym výskytom danej udalosti v porovnaní s odchýlkou v miestach s vysokým výskytom danej udalosti. Zohľadňovali sme veľkosť iba absolútnej, nie relatívnej odchýlky. To znamená, že nerozlišuje lokalizáciu výskytu odchýlky, ale všetky považuje za rovnocenné. Pre optimálnosť riešenia, sme na dáta využili aj nástroj Excelu Solver. Pomocou nástroja Excelu Solver je možné zistiť optimálnu hodnotu.

2. Modely plodnosti

2.1. Jastremského model

Matematické formulácie majú väčšinou obmedzený význam a vystihujú jediný určitý typ reprodukčného správania sa. Takýmto modelom je aj model B. S. Jastremského, prevzatý z práce Pavlík – Rychtaříková – Šubrtová (1986), vyjadrujúci špecifickú mieru plodnosti $f^J(x)$ podľa veku:

$$f^J(x) = f(a) \left(1 + \frac{x-a}{a-c}\right) \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{b-a}{a-c}}$$

Všeobecne premennou c označujeme vek vstupu do reprodukčného obdobia, premennou a označujeme vek maximálnej plodnosti a premennou b označujeme vek konca reprodukčného obdobia. Hodnota $f(a)$ predstavuje módus dát.

Získavame model, v ktorom sú všetky parametre kladné, a keďže $x \in (c, b)$ a exponent $\frac{b-a}{a-c}$ je tiež kladný a obvykle väčší ako 1, tým pádom je aj celá funkcia kladná.

Ak vek matky je rovný veku konca reprodukčného obdobia, $x = b$, alebo vek matky je rovný veku vstupu do reprodukčného obdobia, $x = c$, dostávame

$$f^J(b) = f(a) \left(1 + \frac{b-a}{a-c}\right) \left(1 - \frac{b-a}{b-a}\right)^{\frac{b-a}{a-c}} = 0$$

$$f^J(c) = f(a) \left(1 + \frac{c-a}{a-c}\right) \left(1 - \frac{c-a}{b-a}\right)^{\frac{b-a}{a-c}} = 0$$

V prípade, že vek matky je rovný veku maximálnej plodnosti, $x = a$, dostávame výraz

$$f^J(a) = f(a) \left(1 + \frac{a-a}{a-c}\right) \left(1 - \frac{a-a}{b-a}\right)^{\frac{b-a}{a-c}},$$

ktorého hodnota predstavuje $f^J(a) = f(a)$.

Derivácia Jastremského modelu má tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f^J(x) &= \frac{\partial}{\partial x} f(a) \left(1 + \frac{x-a}{a-c}\right) \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{b-a}{a-c}} \\ &= \frac{f(a)(a-x)(b-c) \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\frac{b-a}{a-c}}}{(a-c)^2(b-x)} \end{aligned}$$

Prvá derivácia je rovná nule v bodoch a a b , pričom a je lokálne maximum a b lokálne minimum.

Druhá derivácia Jastremského modelu má tvar

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f^J(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a) \left(1 + \frac{x-a}{a-c}\right) \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{b-a}{a-c}} \\ &= \frac{f(a)(a-b)(b-c)(2a-c-x) \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\frac{b-a}{a-c}}}{(a-c)^3(b-x)^2}\end{aligned}$$

Jastremského funkcia má v bode a a b lokálne extrémny a bod $2a - c$ je inflexný bod.

Integrál má tvar

$$\begin{aligned}\int f^J(x) dx &= f(a) \left(1 + \frac{x-a}{a-c}\right) \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{b-a}{a-c}} dx = \\ &= - \frac{f(a)(b-x)(a-2c+x) \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\frac{b-a}{a-c}}}{a+b-2c} + constant\end{aligned}$$

Potom

$$\int_c^b f^J(x) dx = F(b) - F(c) = f(a) \frac{(a-c) \cdot (b-c)}{a+b-2c} \cdot \left(\frac{b-c}{b-a}\right)^{\frac{b-a}{a-c}}$$

predstavuje *úhrnnú plodnosť* Jastremského modelu.

2.2. Lognormálny model

Lognormálny model založený na lognormálnom rozdelení (Lamoš, 1979, s. 125) sa používa pre modelovanie asymetricky rozdelených premenných.

Nech X je taká spojité premenná, ktorá nadobúda hodnoty $x > 0$ a jej logaritmus, t.j. premenná $Y = \ln X$ má normálne rozdelenie. Lognormálne rozdelenie je asymetrické rozdelenie s kladným koeficientom asymetrie, ináč povedané, má kladné zošikmenie.

Náhodná premenná X má lognormálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami $\mu \in R$, $\sigma > 0$ a $x \in 0, \infty$ a je z lognormálneho modelu tvaru

$$f^{LN}(x) = \varphi^{LN} * \acute{u}p$$

kde $\varphi^{LN}(x)$ je hustota pravdepodobnosti lognormálneho rozdelenia

$$\varphi^{LN}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2 \sigma^2}\right)$$

pre $x > 0$, ináč

$$\varphi^{LN}(x) = 0$$

a $\acute{u}p$ predstavuje *úhrnnú plodnosť*

Derivácia funkcie hustoty lognormálneho rozdelenia $\varphi^{LN}(x)$ podľa x má tvar

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \varphi^{LN}(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= -\frac{\exp\left(-\frac{(\mu - \ln x)^2}{2\sigma^2}\right) (-\mu + \sigma^2 + \ln x)}{\sqrt{2\pi} \sigma^3 x^2}\end{aligned}$$

a druhá derivácia

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi^{LN}(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{(\mu - \ln x)^2}{2\sigma^2}\right) (\mu^2 - (3\mu + 1)\sigma^2 + (\ln x)(-2\mu + 3\sigma^2 + \ln x) + 2\sigma^4)}{\sqrt{2\pi} \sigma^5 x^3}\end{aligned}$$

Lognormálne rozdelenie nadobúda inflexný bod v bode $\exp(\mu - \sigma^2)$.

Z vytvárajúcej momentovej funkcie

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \exp\left\{n\mu + \frac{n^2\sigma^2}{2}\right\}$$

sme získali počiatkové momenty lognormálneho rozdelenia:

$$v_1 = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$v_2 = \exp(2\mu + 2\sigma^2)$$

Potom stredná hodnota $E(X) = v_1$ má tvar

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

rozptyl $D(X) = v_2 - v_1^2$ má upravený tvar

$$D(X) = \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot (\exp(\sigma^2) - 1)$$

Módus, čiže hodnotu, v ktorej funkcia hustoty nadobúda maximum, sme získali z derivácie a predstavuje ho

$$\text{mod}(X) = \exp(\mu - \sigma^2)$$

a medián má tvar

$$\text{med}(X) = \exp(\mu).$$

2.3. Gama model

Gama model založený na gama rozdelení (Lamoš, 1979, s. 126) má v matematickej štatistike veľký význam najmä z teoretického hľadiska. Niektoré jeho špeciálne prípady majú však význam z hľadiska praktických aplikácií. Rozdelenie gama je asymetrické rozdelenie s kladným koeficientom asymetrie. Inak povedané má kladné zošikmenie.

Gama rozdelenie patrí do skupiny dvojparametrických rozdelení s parametrami α a β , kde parameter $\alpha > 0$, $\beta > 0$ a $x \in \langle 0, \infty \rangle$.

Náhodná veličina X je z gama modelu

$$f^G(x) = \varphi^G(x) * \acute{u}p$$

kde $\varphi^G(x)$ je funkcia hustoty gama rozdelenia

$$\varphi^G(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$$

pre $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, ináč

$$\varphi^G(x) = 0$$

a $\acute{u}p$ predstavuje úhrnnú plodnosť.

Označenie $\Gamma(\alpha)$ predstavuje gama funkciu, definovanú Eulerovým integrálom 2.druhu ako

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x) dx, \text{ pre } \alpha > 0.$$

Premenná x predstavuje vek, parametre α a β určujú tvar krivky.

Derivácia funkcie hustoty gama rozdelenia podľa x má tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varphi^G(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \right) \\ &= \frac{\beta^{-\alpha-1} x^{\alpha-2} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) ((\alpha-1)\beta - x)}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

a druhá derivácia

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi^G(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \right) \\ &= \frac{\beta^{-\alpha-2} x^{\alpha-3} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) ((\alpha^2 - 3\alpha + 2)\beta^2 - 2(\alpha-1)bx + x^2)}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

Z vytvárajúcej momentovej funkcie

$$\varphi(t) = \frac{\beta^t}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha + t)$$

Získavame strednú hodnotu $E(X)$, a rozptyl $D(X)$, ktoré majú tvar

$$E(X) = \alpha\beta$$

$$D(X) = \alpha\beta^2$$

a módus predstavuje predpis

$$\text{mod}(X) = (\alpha - 1) \cdot \beta$$

2.4. Hadwigerov model

Hadwigerovú funkciu prvý krát publikoval Hugo Hadwiger, ktorého stručný životopis a podobizeň nájdete v prílohe č.1, v časopisej publikácii “Eine analytische reproduktions-funktion für biologische Gesamtheiten.”, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, v roku 1940 (podľa Peristera – Kostaki, 2007).

S Hadwigerovou funkciou sa stretávame v dvoch tvaroch (Peristera - Kostaki, 2007; Petrioli, 2000):

- $f_n^H(x)dx = \frac{na}{\sqrt{\pi x^3}} \exp\left\{nac - \left(\frac{n^2 a^2}{x} + bx\right)\right\} dx$

kde a , b , c sú tri parametre, zatiaľ čo n predstavuje počet potomkov v n .tej generácii

$$\int_0^\infty f_n^H(x)dx = \text{sgn}(a)\exp\{na(c - 2\sqrt{b})\}, \text{ výpočet sa nachádza v prílohe č.3.}$$

v ďalšej časti sa venujeme iba prípadu $n = 1$, takže budeme písať

$$f^H(x)dx = \frac{A}{\sqrt{\pi x^3}} \exp\left\{AC - \left(\frac{A^2}{x} + Bx\right)\right\} dx$$

pre $A, B, C > 0$.

- $f^H(x) = \frac{ab}{c} \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\}$

kde x je vek matky pri pôrode, parametre a , b , c sú tri parametre, ktoré budú odhadnuté. Parametre majú nasledovné demografické interpretácie:

- parameter a je úmerný úhrnej plodnosti, $\acute{u}p = a\sqrt{\pi}$
- parameter b je nepriamo úmerný disperzii, $D(X) = \frac{c^2}{2b^2}$
- parameter c je rovný strednej hodnote veku matky
- výraz $\frac{ab}{c}$ sa rovná hodnote Hadwigerovej funkcie v bode c , čiže hodnote Hadwigerovej funkcie v strednej hodnote veku matky.

Ukážeme si, aký je vzťah medzi parametrami týchto dvoch zápisov Hadwigerovej funkcie:

$$f^H(x) = \frac{ab}{c} \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\}$$

$$f_n^H(x) dx = \frac{na}{\sqrt{\pi x^3}} \exp\left\{nac - \left(\frac{n^2 a^2}{x} + bx\right)\right\} dx$$

$$f^H(x) = \frac{ab}{c} c^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\}$$

$$f_1^H(x) dx = \frac{A}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{AC - \left(\frac{A^2}{x} + Bx\right)\right\} dx$$

$$f^H(x) = ab\sqrt{c} \exp(2b^2) x^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \frac{c}{x} - b^2 \frac{x}{c}\right\}$$

$$f_1^H(x) dx = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \exp(AC) x^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{A^2}{x} - Bx\right\} dx$$

$$-b^2 c = -A^2$$

$$-b^2 c = -B$$

$$ab\sqrt{c} \exp(2b^2) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \exp(AC)$$

Platí teda:

$$A = b\sqrt{c}$$

$$B = b^2 c$$

$$C = \frac{1}{A} \ln(a\sqrt{\pi}) + 2\sqrt{\pi}$$

$$C = \frac{1}{b\sqrt{c}} \ln(a\sqrt{\pi}) + 2\sqrt{\pi}$$

V našich ďalších výpočtoch sa zaoberáme iba prvým uvedeným tvarom Hadwigerovej funkcie

$$f^H(x) = \frac{ab}{c} \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\}.$$

Hadwigerova funkcia je funkcia definovaná pre $x > 0$ a o parametroch a, b, c taktiež predpokladáme ich kladnosť. Z toho nám vyplýva, že Hadwigerova funkcia vždy nadobúda kladné hodnoty.

Derivácia Hadwigerovej funkcie podľa x má tvar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f^H(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{ab}{c} \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2\left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{ab \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-(b^2)\left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\}}{c} \right\} \\ &= \frac{ab \exp\left\{-b^2\left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\} (2b^2(c^2 - x^2) - 3cx)}{2x^4 \sqrt{\frac{c}{x}}}\end{aligned}$$

Maximum funkcie nájdeme položením prvej derivácie rovnej 0. Hadwigerova funkcia nadobúda svoj extrém pre hodnotu

$$b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad x = \frac{\pm\sqrt{16b^4 + 9c} - 3c}{4b^2}$$

Nakoľko predpokladáme kladnosť všetkých parametrov a $x > 0$, pohybujeme sa v reálnych hodnotách, berieme do úvahy iba prípad, keď

$$x = \frac{\sqrt{16b^4 + 9c} - 3c}{4b^2}$$

čo je modus.

Na základe druhej derivácie v hodnote extrému sme overili, či sa naozaj jedná o maximum.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f^H(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{ab}{c} \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2\left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\} \\ &= \frac{ab \exp\left\{-b^2\left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\} (4b^4(c^2 - x^2) - 4b^2cx(5c^2 - 3x^2) + 15c^2x^2)}{4x^7 \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x} f^H(x) < 0$$

Výraz je záporný, jedná sa o konkávnou funkciu, tým pádom sa jedná o maximum.

Integrál z danej funkcie má tvar

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f^H(x) dx &= \int_0^\infty \frac{ab}{c} \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2\left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\} dx \\ &= a \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Výpočet integrálu nebol triviálny, celý postup sa nachádza v prílohe č.3.

Limity funkcie pre $x \rightarrow 0$ a $x \rightarrow \infty$ majú hodnotu nula, to preto, že $\exp\left\{-b^2\left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\}$ nám exponent konverguje do mínus nekonečna, čiže exponenciálna časť nám konverguje

do nuly. Ak $x \rightarrow \infty$, tak aj $\frac{1}{x}$ konverguje do nuly, čiže výslednou hodnotou je nula. Ak $x \rightarrow 0$ sprava, tak $\frac{1}{x}$ konverguje síce do nekonečna, ale exponenciálna funkcia konverguje do nuly rozhodne rýchlejšie, preto získavame opäť hodnotu nula.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^H(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ab}{c} \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f^H(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ab}{c} \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\} = 0$$

3. Identifikácia parametrov v jednotlivých modeloch

V tejto časti budeme odhadovať parametre modelov z empirických dát pre Slovenskú republiku v skúmaných rokoch 1980, 1985, 1990, 1995, 2000, 2005 a 2010. Príslušne dáta budeme fitovať štyrmi modelmi, budeme sledovať vývoj ich parametrov a hľadať najlepší model. Ako sme už spomínali v predošlej kapitole, pôvod dát je zo ŠUSR. *Vek* predstavuje dovŕšený vek matky v čase pôrodu. K príslušným vekom sme priradili hodnoty *Fer_rok*, ktoré predstavujú počet detí na 1000 žien v danom veku. Súčet plodností v príslušnom roku predstavuje *úhrnnú plodnosť*. Pre každý model a každému prislúchajúcemu roku s označením *Fer_rok*, sme vypočítali hodnoty výberových charakteristík:

$$\bar{u}p = \text{úhrnná plodnosť} = \sum_x Fer_rok$$

$$\bar{x} = \text{priemerný vek} = \frac{\sum_x (x \cdot Fer_rok)}{\text{úhrnná plodnosť}} = u'_1$$

$$s^2 = \text{výberový rozptyl} = \frac{\sum_x (x^2 \cdot Fer_rok)}{\text{úhrnná plodnosť}} = u'_2 - u'^2_1$$

kde u'_1 a u'_2 sú počiatkové momenty z empirických dát. Prvotné odhady budeme počítať z týchto charakteristík. Postup ďalšieho výpočtu sa odlišuje podľa jednotlivých modelov.

Pri každom modeli uvádzame tabuľky s prvotnými odhadmi a aj s vylepšenými odhadmi. Používame rôzne podfarbenie a farbu písma. Každý model má vlastnú farbu pre lepšiu prehľadnosť a orientáciu. Oranžovým podfarbením udávame Jastremského model, zeleným lognormálny model, modrým gama model a ružovým Hadwigerov model. V tabuľkách s odhadmi používame príslušné podfarbenie modelu, no vyskytne sa aj sivé, ktoré značí, že udávame aj hodnoty, ktoré neboli vylepšované, no ich hodnota sa zmenou parametrov zmenila, alebo predstavuje hodnoty, ktoré slúžia k výpočtu parametrov.

V grafickom znázornení priebehu jednotlivých kriviek dodržiavame jednotné označenie. Krivka *Fer_rok* opisuje trajektoriu empirických dát, krivka *model_Fer_rok* vznikla aplikáciou prvotných odhadov parametrov na model, *S_Fer_rok* predstavuje krivku, ktorá vznikla na základe vylepšovaných odhadov parametrov pre daný model.

Pod pojmom *suma* rozumieme celkovú úhrnnu plodnosť (označenie používané v celej výpočtovej časti práce, najmä v tabuľkách a grafoch).

3.1. Použitie aplikácie Solver

Na vylepšenie prvotných odhadov sme použili excelovskú aplikáciu Solver. Za pomoci Solveru sme minimalizovali súčet štvorcov odchýlok, ktorý sme považovali za ukazovateľ vhodnosti metódy. Súčet štvorcov odchýlok, v práci označovaný ako SŠO, sme vypočítali ako súčet rozdielov reálnych hodnôt a modelom získaných hodnôt umocnený na druhú.

$$\text{súčet štvorcov odchýlok SŠO} = \sum_{x=15}^{49} (Fer_{x_rok} - funkcia_Fer_{x_rok})^2$$

Ako kritérium pre ukončenie iterácií Solverom sme považovali zmenu v hodnote SŠO. Za postačujúci výsledok sme považovali hodnotu SŠO, ak sa jej hodnota pri dvoch postupných iteráciách cez všetky parametre na štvrtom desatinnom mieste už nemenila.

3.2. Jastremského model

Model B. S. Jastremského vyjadrujúci mieru plodnosti $f^J(x)$ podľa veku má tvar:

$$f^J(x) = f(a) \left(1 + \frac{x-a}{a-c}\right) \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{b-a}{a-c}}$$

Premennou c sme označili vek vstupu do reprodukčného obdobia, 15 rokov, premennou a vek maximálnej plodnosti, modálny vek, a premennou b vek konca reprodukčného obdobia, 44 alebo 49 rokov, podľa príslušného roku a dostupnosti dát.

V tabuľke č.1 uvádzame prvotné odhady.

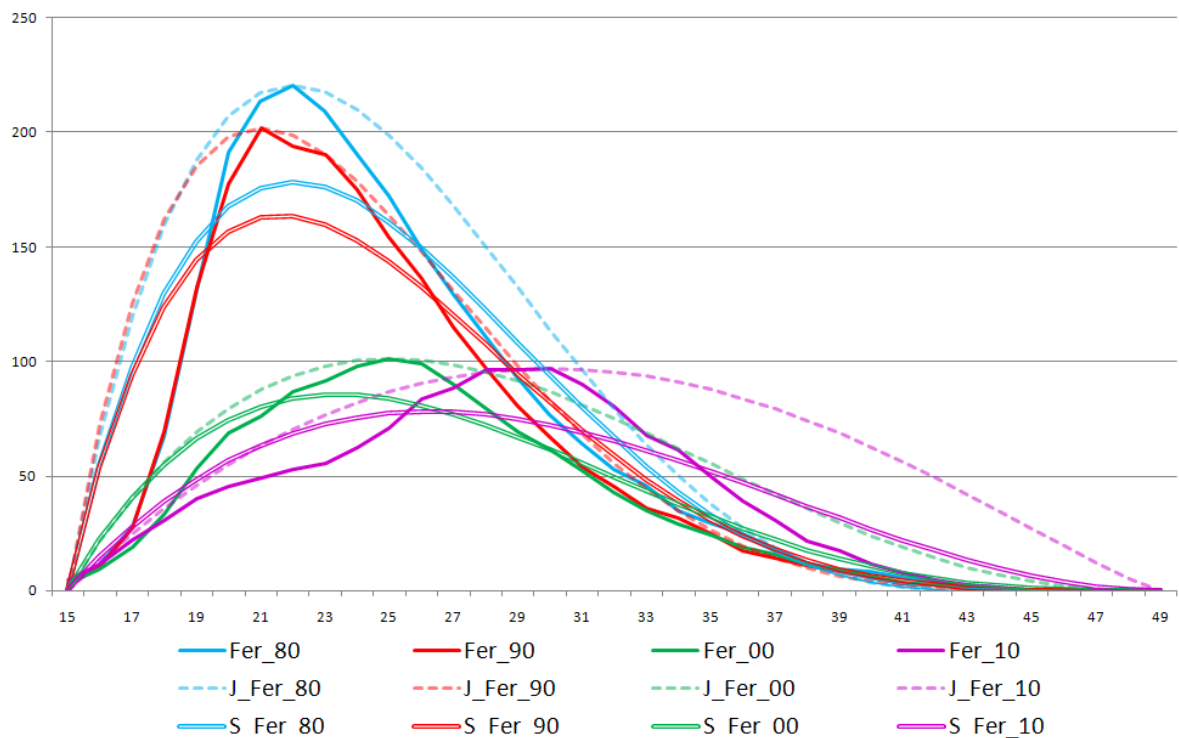
Prvotné odhady	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
maximum	220,257981	217,096879	201,645863	130,267385	100,922433	92,458689	97,068249
modálny vek	22	21	21	22	25	28	30
vstupný vek	15	15	15	15	15	15	15
výstupný vek	45	45	49	49	49	49	49
Suma	2953,065325	2617,115283	2537,894149	1836,098995	1797,165761	1892,359313	2110,021232
SŠO	34612,7985	30624,0912	27123,4449	8732,7616	11612,0425	19380,9396	25731,2991

Tabuľka č.1: Prehľad hodnôt prvotných odhadov Jastremského modelu

Pri vylepšovaní dát sme sa zaoberali hodnotami *modálneho veku* a hodnotou *maximum f(a)*.

Vylepšené odhady	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
maximum	178,057390	177,079055	163,586291	112,102956	85,834887	75,505226	78,064675
modálny vek	22,008566	21,833953	21,629921	22,166285	23,380947	24,905363	26,249602
vstupný vek	15	15	15	15	15	15	15
výstupný vek	45	45	49	49	49	49	49
Suma	2416,433038	2362,111399	2217,166077	1606,630167	1368,845361	1336,999565	1485,768821
SŠO	17771,80599	16609,02197	15090,23364	5581,71435	2847,06278	3509,30040	5004,27871

Tabuľka č.2: Prehľad hodnôt vylepšených odhadov Jastremského modelu



Graf č.3: Porovnanie kriviek Jastremského modelu

Na grafe č. 3 si môžeme všimnúť, že priebeh krivky s vylepšenými hodnotami parametrov $S_{Fer_{rok}}$ a krivky s empirickými dátami Fer_{rok} je relatívne odlišný. Najvýraznejší odklon vidno v roku 1980, čím sa preukazuje vlastnosť rýchleho stúpania Jastremského modelu. Tento model nevie dôsledne zachytiť priebeh empirických dát. Výrazne ich podhodnocuje alebo nadhodnocuje podľa úseku a jeho krivka je omnoho oblejšia a preto nedokáže zachytiť lomenejší tvar krivky.

3.3. Lognormálny model

Model založený na lognormálnom rozdelení má tvar

$$f^{LN}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} * \text{úp}$$

Už z predpisu vidíme, že budeme potrebovať parametre μ a σ^2 . K parametrom ako premennú pridružíme aj *úhrnnú plodnosť*. V skutočnosti využijeme viacero premenných, nakoľko sa využívajú vo výpočte. Niektoré sa využívajú k výpočtu parametrov, iné zas predstavujú svoju konečnú hodnotu. Počiatočné momenty sme získali z empirických dát a výpočet jednotlivých parametrov sme realizovali nasledovne:

$$v_1' = \bar{x}$$

$$v_2' = s^2 + \bar{x}^2.$$

Keďže

$$\sigma^2 = \ln v_2 - 2 \ln v_1$$

$$\mu = \ln v_1 - \frac{\sigma^2}{2},$$

položili sme

$$\hat{v}_1 = v_1'$$

$$\hat{v}_2 = v_2',$$

a následne získali

$$\widehat{\sigma^2} = \ln(s^2 + \bar{x}^2) - 2 \ln \bar{x}$$

$$\hat{\mu} = \ln \bar{x} - \frac{\widehat{\sigma^2}}{2}.$$

Získané parametre sme následne využili pri aplikácii na lognormálny model.

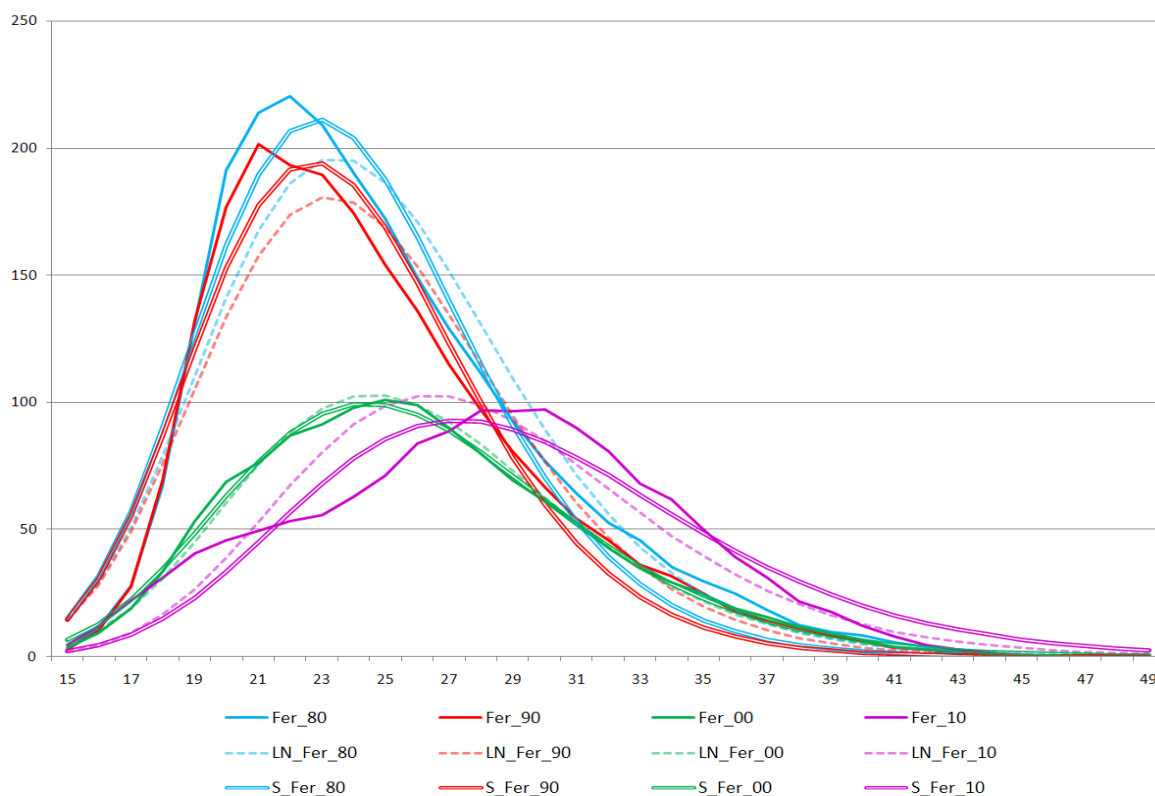
Prvotné odhady	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
v_1	24,851398	24,626744	24,610525	25,134387	26,093043	27,204249	28,138669
v_2	641,794625	629,766805	628,926159	657,338848	708,480512	769,533416	824,510053
$\hat{\sigma}^2$	0,038440	0,037684	0,037665	0,039726	0,039785	0,039038	0,040500
$\hat{\mu}$	3,193694	3,184991	3,184341	3,204374	3,241776	3,283854	3,316895
Suma	2294,416168	2227,013332	2062,470394	1507,232683	1456,726622	1415,544350	1363,700124
SŠO	9858,883791	8538,184245	7674,199623	2356,061287	290,573017	1405,089102	4782,100797

Tabuľka č.3: Prehľad hodnôt prvotných odhadov lognormálneho modelu

Následne sme prvotné odhady $\hat{\sigma}^2$ a $\hat{\mu}$. vylepšovali. Získané hodnoty, ktoré priamo či nepriamo vstupujú do výpočtu, sme sumárne spísali do prehľadnej tabuľky.

Vylepšené odhady	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
v_1	24,851398	24,626744	24,610525	25,134387	26,093043	27,204249	28,138669
v_2	641,794625	629,766805	628,926159	657,338848	708,480512	769,533416	824,510053
$\hat{\sigma}^2$	0,033526	0,032718	0,033084	0,038305	0,043791	0,045229	0,047473
$\hat{\mu}$	3,163231	3,156036	3,155124	3,182259	3,239486	3,303796	3,354783
Suma	2247,529871	2178,204522	2022,817633	1494,195569	1294,508307	1264,155606	1404,916721
SŠO	6033,081372	5052,134019	4642,048388	1556,983990	148,575588	754,652657	2687,338218

Tabuľka č.4: Prehľad hodnôt vylepšených odhadov lognormálneho modelu



Graf č.4: Porovnanie kriviek lognormálneho modelu

Na grafe č. 4 vidíme, že lognormálny model nedokáže úplne dôkladne zachytiť obdobie vstupu do reprodukčného obdobia. Prvotné odhady v rokoch 1980 a 1990 udávali priemerný vek vyšší, ako bol reálny. V roku 2000 sú hodnoty na približne rovnakej úrovni a pre rok 2010 je priemerný vek o niečo nižší ako reálny priemerný vek. Z globálneho hľadiska sa nám lognormálny model javí ako relatívne dobrý model.

3.4. Gama model

Gama model založený na gama rozdelení pravdepodobností má funkciu hustoty danú tvarom:

$$f^G(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) * \text{úp}$$

Gama rozdelenie patrí k dvojparametrickým rozdeleniam. Z toho vyplýva, že sú dva parametre vstupujúce do funkcie, konkrétne α a β . Na to, aby sme vedeli získať hodnoty na základe gama rozdelenia, je potrebné poznať hodnoty strednej hodnoty $E(X)$, rozptylu $D(X)$ a parametrov α a β .

Keďže vieme, že

$$E(X) = \alpha\beta$$

$$D(X) = \alpha\beta^2$$

ľahko si odvodíme, aký tvar majú parametre α a β

$$\alpha = \frac{E(X)}{\beta}$$

$$\beta = \frac{D(X)}{E(X)}$$

potom ich odhady sú

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x}^2}{s^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{s^2}{\bar{x}}$$

Následne sme výpočet realizovali za pomoci preddefinovanej excelovskej funkcie pre gama rozdelenie GAMMADIST. Do funkcie GAMMADIST vstupujú 4 parametre. GAMMADIST (x , α , β , *cumulative*), kde x predstavuje hodnotu *vek*, α je hodnota parametra rozdelenia, β je hodnota parametra rozdelenia, ak $\beta = 1$, funkcia vráti štandardné gama rozdelenie a *cumulative* predstavuje logickú hodnotu, ktorá určuje tvar funkcie. Ak *cumulative* je *true*, čiže pravda, funkcia vráti hodnotu distribučnej funkcie, ak *cumulative* je *false*, čiže nepravda, funkcia vráti hodnotu hustoty pravdepodobnosti.

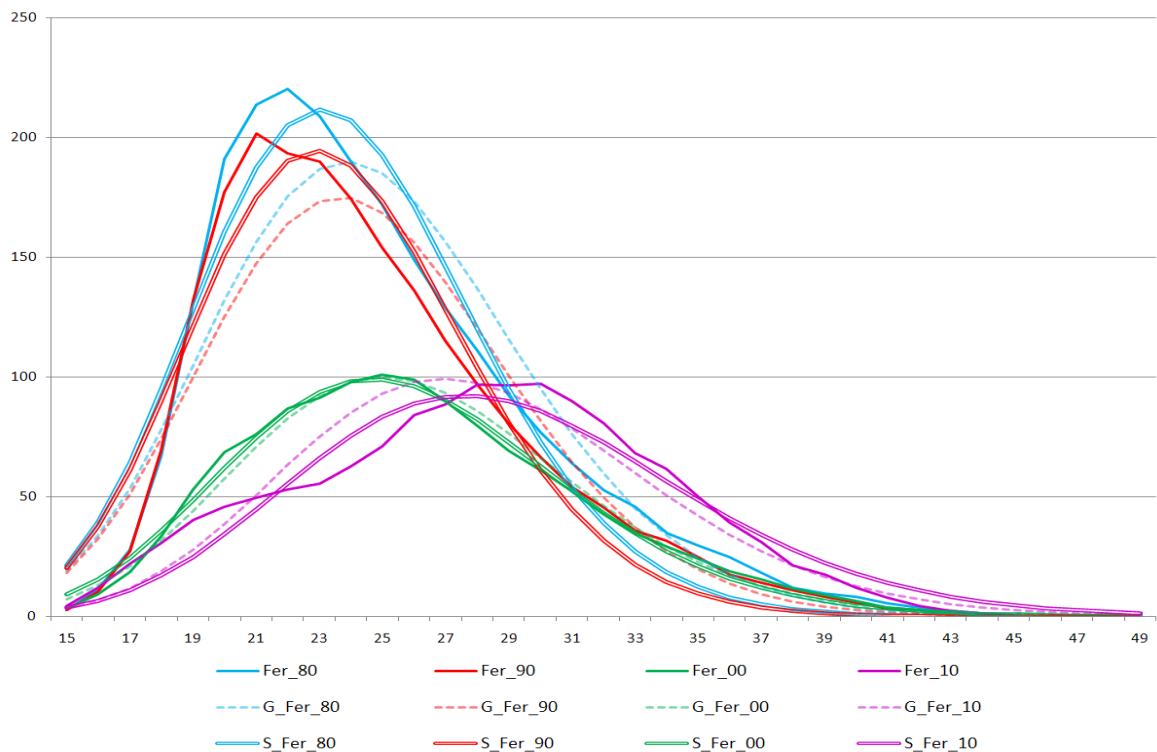
Prvotné odhady	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
$E[X]$	24,851398	24,626744	24,610525	25,134387	26,093043	27,204249	28,138669
$D[X]$	24,202646	23,290279	23,248206	25,601429	27,633627	29,462230	32,725338
α	25,517540	26,039900	26,052675	24,675866	24,638346	25,119320	24,194852
β	0,973895	0,945731	0,944645	1,018582	1,059042	1,083001	1,163002
Suma	2287,71937	2235,182996	2069,230689	1511,235574	1285,962587	1249,347489	1394,402836
sŠO	14935,39184	13283,58795	11740,93179	3957,22982	477,25481	640,00658	2976,05800

Tabuľka č.5: Prehľad hodnôt prvotných odhadov gama modelu

Parametre, ktoré sme vylepšovali, boli priamo parametre rozdelenia α a β vstupujúce priamo do predpisu gama rozdelenia, ktoré sme použili. Vylepšovaním získané hodnoty sme sumárne vpísali do tabuľky.

Vylepšené odhady	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
α	29,340461	29,999191	29,846711	26,279785	23,683511	23,150467	22,053495
β	0,814081	0,790257	0,793546	0,926494	1,088626	1,187652	1,312215
Suma	2288,819959	2236,340511	2069,388565	1509,500560	1283,882323	1248,066391	1392,141070
sŠO	8553,486085	7357,160184	6613,908757	2368,959475	277,3579024	428,0851897	1890,741873

Tabuľka č.6: Prehľad hodnôt vylepšených odhadov gama modelu



Graf č.5: Porovnanie kriviek gama modelu

Na grafe č.5 opäť vidíme, že priebeh krivky empirických dát a krivky, kde boli do predpisu gama rozdelenia aplikované prvotné odhady je pre obdobie do roku 2000 výraznejšie posunutý. Najvýraznejší odklon vidno v roku 1980 na priemernom veku matky pri pôrode a taktiež na celkovej výške získanej krivky. Z globálneho hľadiska však model považujeme za dobrý.

3.5. Hadwigerov model

Ako sme už spomínali, Hadwigerova funkcia, s ktorou sa zaoberáme, je funkcia daná tvarom

$$f^H(x) = \frac{ab}{c} \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\}$$

Urobili sme prvotné odhady daných parametrov. Nakoľko parameter a je úmerný úhrnnej plodnosti, úhrnná plodnosť sa vypočíta ako suma reálnych hodnôt pre všetky vekové kategórie daného obdobia, t.j.:

$$\text{úhrnná plodnosť } \hat{a} = \frac{\text{úhrnná plodnosť}}{\sqrt{\pi}}$$

Parameter c je rovný strednej hodnote veku matky. Jeho výpočet sme realizovali ako sumu vážených priemerov daného obdobia predelený úhrnnou plodnosťou, čiže parametrom a .

$$\text{priemerný vek } \hat{c} = \bar{x}$$

Keďže parameter b je nepriamo úmerný disperzii a termín $\frac{ab}{c}$ sa rovná hodnote Hadwigerovej funkcie v bode c , čiže hodnote Hadwigerovej funkcie v strednej hodnote veku matky, parameter b sme určili jednoduchým výpočtom, kde za maximálnu vekovú špecifickú mieru plodnosti sme položili maximálnu hodnotu Fer_{rok} daného roku. Keďže

$$D(x) = \frac{c^2}{2b^2}$$

potom

$$\hat{b} = \frac{\hat{c}}{\sqrt{2 s^2}}$$

Keď sme určili prvotné odhady parametrov a , b , c , aplikovali sme ich na predpis Hadwigerovho modelu. Aplikáciu sme vykonali pre všetky jednotlivé obdobia a veky sledovaného obdobia.

Následne sme všetky tri parametre vylepšovali, keďže všetky tri parametre vystupujú priamo v predpise Hadwigerovom modeli.

Maximum je odhad výrazu $\frac{ab}{c}$. Prvotným odhadom je maximum empirickej funkcie špecifických plodností. *Priemerný vek* je odhadom parametra c , prvotným odhadom je aritmetický priemer veku počítaný z triedených dát. *Parameter b* je potom odhadom parametra b . *Suma* je empirická úhrnná plodnosť, resp. súčet odhadnutých plodností. V tabuľke č.7 uvádzame hodnoty prvotných, nevylepšených, odhadov parametrov.

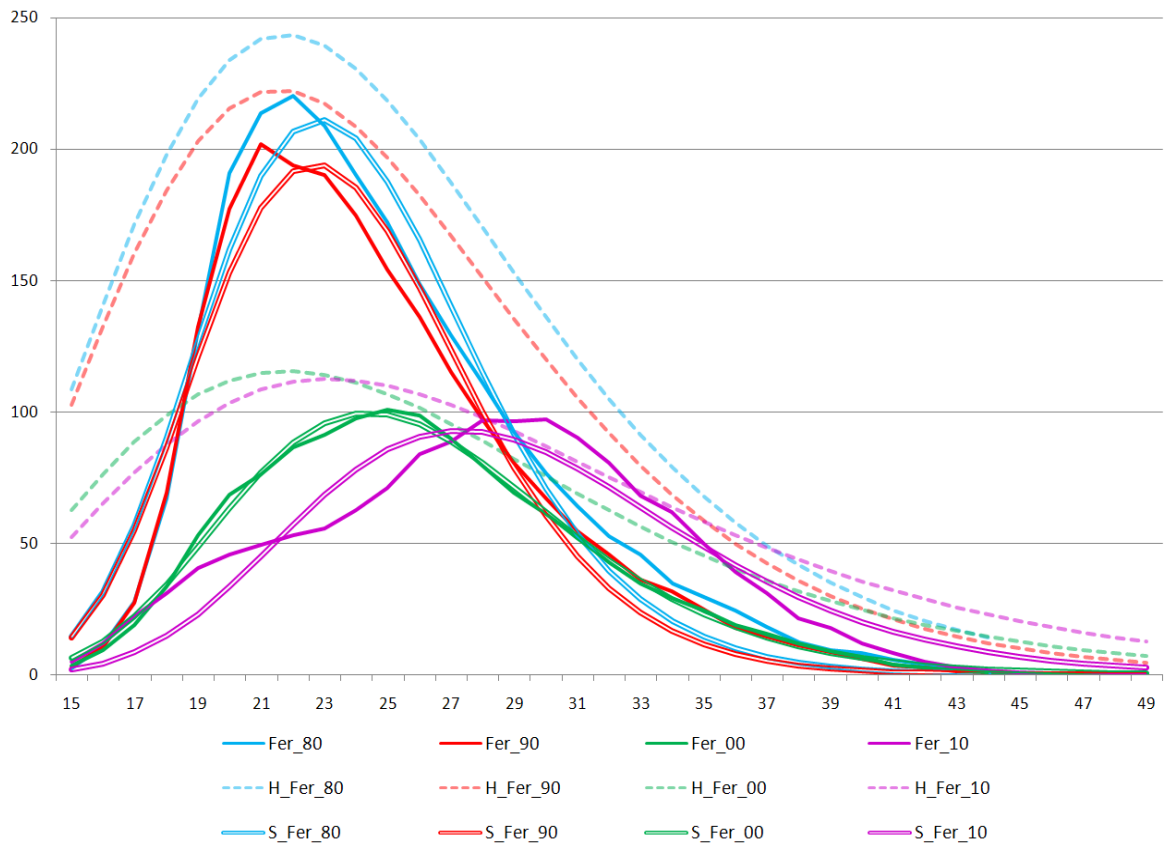
prvotné odhady	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
maximum	220,257981	217,096879	201,645863	130,267385	100,922433	92,458689	97,068249
priemerný vek	24,851398	24,626744	24,610525	25,134387	26,093043	27,204249	28,138669
parameter b	2,373879	2,372817	2,379736	2,150591	2,037790	2,007340	1,953155
suma	3843,408169	3747,937840	3505,099035	2507,831647	2114,839460	2055,558093	2280,017618
SŠO	114729,5318	110095,4014	94380,6603	45737,8929	30878,9639	30047,3838	30048,3838

Tabuľka č.7: Prehľad hodnôt prvotných odhadov Hadwigerovho modelu

Fitovaním a vylepšovaním získané hodnoty, ktoré nejakým spôsobom vstupujú do výpočtu, sme sumárne vpísali do prehľadnej tabuľky.

Vylepšené odhady	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
maximum	203,309729	202,398343	187,112543	124,683396	117,477251	111,780012	105,635034
priemerný vek	24,051282	23,868785	23,851271	24,571596	24,891374	25,214021	25,489046
parameter b	3,843604	3,891386	3,869703	3,593827	3,536162	3,512848	3,465390
suma	2305,811676	2253,182354	2085,361422	1522,460940	1469,885233	1427,091797	1373,775931
SŠO	5970,140162	5007,072152	4589,316519	1526,144875	910,512413	509,719671	271,818207

Tabuľka č.8: Prehľad hodnôt vylepšených odhadov Hadwigerovho modelu



Graf č.6: Porovnanie kriviek Hadwigerovho modelu

V prípade Hadwigerovho modelu môžeme na grafe č.6 vidieť, že prvotné odhady parametrov sú výrazne posunuté, najmä, čo sa týka špecifickej plodnosti a odhadu priemerného veku pri rokoch 2000 a 2010. V tomto prípade ide o výrazné podhodnotenie daného odhadu. Priebeh kriviek, založený na vylepšených odhadoch, aplikovaných na Hadwigerov model, považujeme za uspokojivý.

Na základe fitovania kriviek založených na Jastremského modeli, lognormálnom modeli, gama modeli a Hadwigerovom modeli, nám zatiaľ ako vhodné modely vychádzajú lognormálny model, gama model a Hadwigerov model. Či sa ich doterajšia poddajnosť voči modelovaniu zachová aj pri prognózovaní, to uvidíme v nasledujúcej kapitole *Prognózy*. Jastremského model nepovažujeme za najvhodnejší model práve pre už spomínanú výraznú oblasť modelu, čím nedokáže zachytiť rôzne zmeny a výkyvy.

4. Prognózy

V tejto časti práce sa budeme zaoberať predpoveďami špecifických mier plodnosti hľadáním prognózy parametrov v jednotlivých modeloch. Pomocou regresnej analýzy môžeme predpovedať budúce hodnoty. Pri prognózovaní trendovej čiary sme si vybrali štyri typy trendov a regresie, ktoré nám Excel ponúkal: lineárna trendová čiara, logaritmická trendová čiara, polynomičná trendová čiara a exponenciálna trendová čiara. Trendová čiara je najpresnejšia, keď sa jej hodnota, určujúca koľko percent rozptylu je z matematického modelu, rovná 1 alebo sa k 1 približuje. Nazýva sa koeficient determinácie a označuje sa R^2

4.1. Prognózovanie na modeloch

Prognózy sme vykonávali na vylepšovaných hodnotách parametrov pre daný typ modelu a celkovej úhrnej plodnosti *suma*. Prognózami sme sa snažili zachytiť nasledujúci priebeh parametrov na základe doterajšieho vývoja. Nakoľko aj celková úhrnná plodnosť *suma* vstupuje do viacerých modelov, prognózovali sme aj túto hodnotu. Mohlo by sa zdať, že v každom modeli bude *suma* nadobúdať rovnaké hodnoty, mať rovnaký priebeh, no nie je tomu tak. Každý model má svoje špecifiká či postupy výpočtu. *Suma* odráža celkový počet narodených detí. Tento počet sa mení na základe rôznorodosti modelov, ktoré sme využívali. Pre porovnanie uvádzame tabuľku s hodnotami celkovej úhrnej plodnosti *suma* pre jednotlivé modely po aplikácii aplikácie Solver.

Suma	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
reálne hodnoty	2305,811676	2253,182354	2085,361422	1522,460940	1292,269042	1253,035919	1398,440949
Jastremski	1922,888988	1879,476038	1761,914583	1278,392596	1089,957668	1065,796126	1186,626885
Lognormal	2247,529871	2178,204522	2022,817633	1494,195569	1294,508307	1264,155606	1404,916721
Gama	2288,819959	2236,340511	2069,388565	1509,500560	1283,882323	1248,066391	1392,141070
Hadwiger	2246,981125	2192,648701	2036,791308	1504,610656	1300,380504	1265,977755	1404,893583

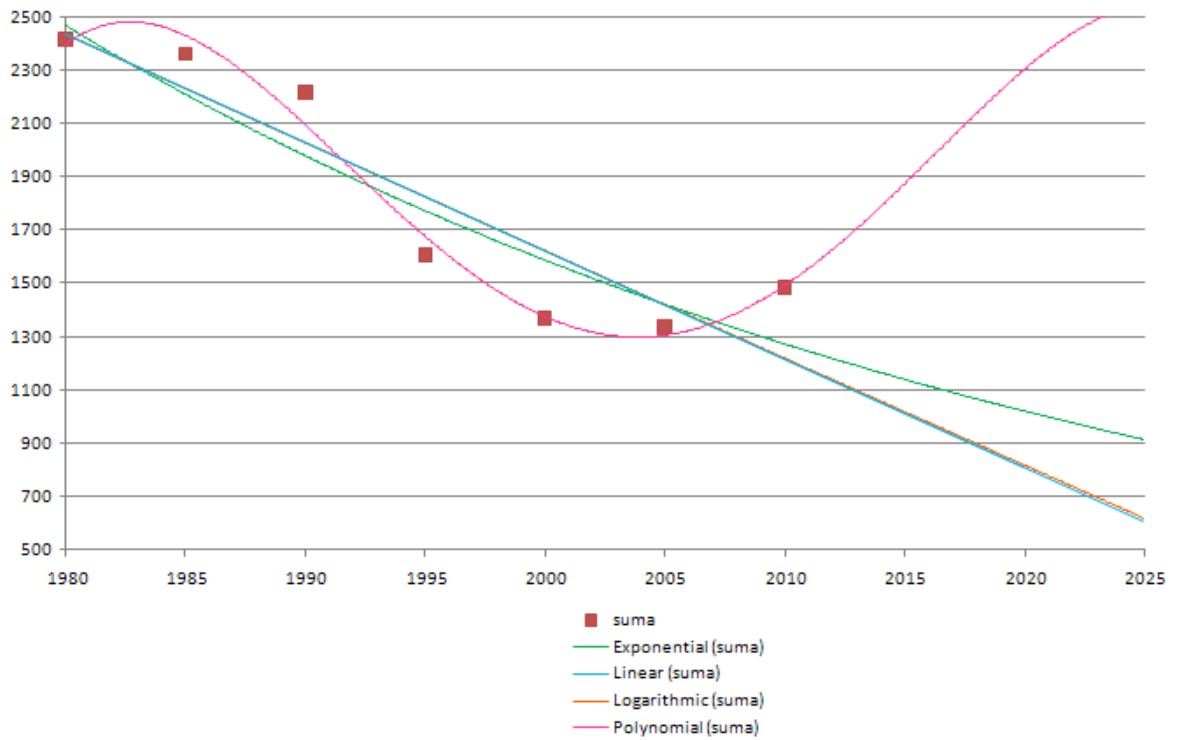
Tabuľka č.9: Prehľad hodnôt *suma* v jednotlivých modeloch po vylepšovaní prvotných odhadov

Ako v tabuľke č.9 vidíme, hodnoty naozaj nie sú identické. Z tohto dôvodu budeme prognózovať hodnotu *suma* pre každý model samostatne. V ďalšom postupe budeme používať príslušné parametre modelov a hodnotu celkovej úhrnej plodnosti *suma*. Celkovú úhrnnú plodnosť *suma* za parameter ako taký nepovažujeme, nakoľko priamo nevstupuje do výpočtových predpisov funkcií či rozdelení ako parameter danej funkcie alebo daného rozdelenia, s ktorými pracujeme, ale do finálneho predpisu modelu už vstupuje. To je dôvod, prečo túto hodnotu budeme v tabuľkách či grafoch uvádzať v spojitosti s parametrami. Budeme ju prognózovať rovnakým spôsobom, ako parametre modelov a taktiež na základe nej aj vytvárať celkovú prognózu trendu plodnosti pre roky 2015, 2020 a 2025.

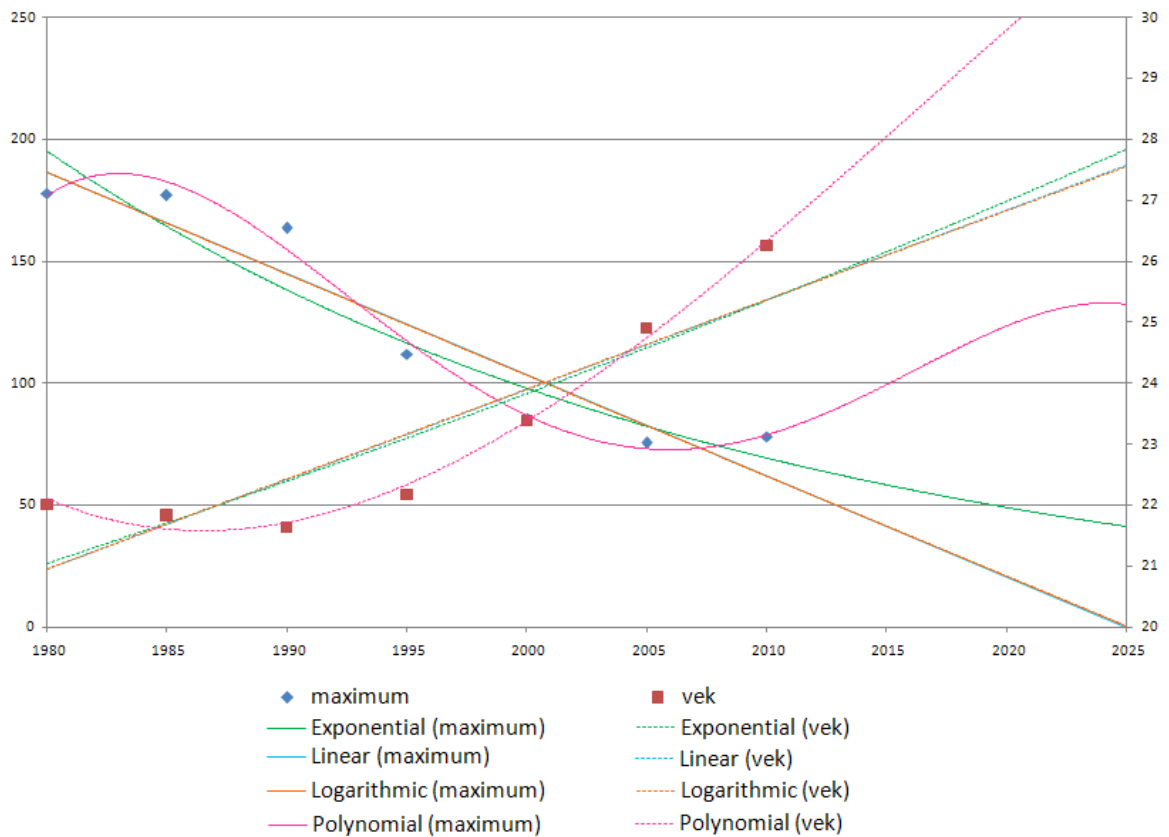
4.2. Jastremského model

V tabuľke č.2 na strane 30 vidno priebeh skúmaného parametra *modálny vek*. Odhadnutie trendu podľa doterajšieho vývoja sa javí na ďalšie stúpanie veku matiek pri pôrode. Taktiež zaznamenávame zmenu v smerovaní. Predpokladáme, že najvhodnejší model bude polynomický model. Za pomoci regresnej analýzy preskúmame vývoj parametrov a vykonáme aj ich prognózu pre roky 2015, 2020 a 2025. Prognózovali sme cez vyššie udané typy zvolených trendových čiar. Vhodnosť trendu sme určovali na základe koeficientu determinácie R^2 a taktiež aj na vizuálnej vlastnosti trendu. Vývoj pre Jastremskeho model môžeme vidieť na grafe č.7 a grafe č.8..

Následne uvádzame tabuľku č.10, ktorá predstavuje súpis predpisov a koeficientov determinácie R^2 pre zvolené modely a prognózovaný parameter *modálny vek*. Vyberali sme model s najvyšším koeficientom determinácie. Pre dobrú prispôsobivosť nám za najlepší model vyšiel polynomický model, ktorý pripúšťa aj zmenu smerovania trendu parametrov.



Graf č.7: Vývoj trendu pre parameter *suma* Jastremského modelu



Graf č.8: Vývoj trendu pre parametre *modálny vek* a *maximum* Jastremského modelu

Jastremski	Exponential	Linear	Logarithmic
maximum	$y = 82\,643\,748\,209\,952\,600\,000\,000\,000\,000\,000$ $e^{-0,0344529193149355x}$ $R^2 = 0,909427914407491$	$y = -4,1491229195712x$ $+ 8\,401,81886442827$ $R^2 = 0,901599381500352$	$y = -8\,278,82452844793\ln(x)$ $+ 63\,030,0293774667$ $R^2 = 0,901918582809685$
modálny vek	$y = 0,0000954985504192196$ $e^{0,00621388439072831x}$ $R^2 = 0,801978264216689$	$y = 0,147296525531439x$ $- 270,689088644277$ $R^2 = 0,79685236100144$	$y = 293,536611742561\ln(x)$ $- 2\,207,23722630197$ $R^2 = 0,795145103740991$
suma	$y = 20\,307\,036\,653\,857\,900\,000\,000$ $e^{-0,0219971320352514x}$ $R^2 = 0,814840395262418$	$y = -40,6466930904382x$ $+ 82\,917,8604908162$ $R^2 = 0,825481742223518$	$y = -81\,129,9569505532\ln(x)$ $+ 618\,284,499019987$ $R^2 = 0,826320454808042$

Jastremski	Polynomial	stupeň polynómu
maximum	$y = -0,000470817324086945x^4 + 3,77475169472837x^3 - 11\,348,5479422628x^2 + 15\,163\,321,1819055x - 7\,597\,386\,880,34686$ $R^2 = 0,989285392693949$	4
modálny vek	$y = -0,000129706447484334x^3 + 0,784670753038516x^2 - 1\,581,96159852333x + 1\,062\,915,13768465$ $R^2 = 0,9931618782444$	3
suma	$y = -0,00582653779029429x^4 + 46,7052756404715x^3 - 140\,389,976252682x^2 + 187\,545\,767,124544x - 93\,949\,228\,339,4078$ $R^2 = 0,981490834672972$	4

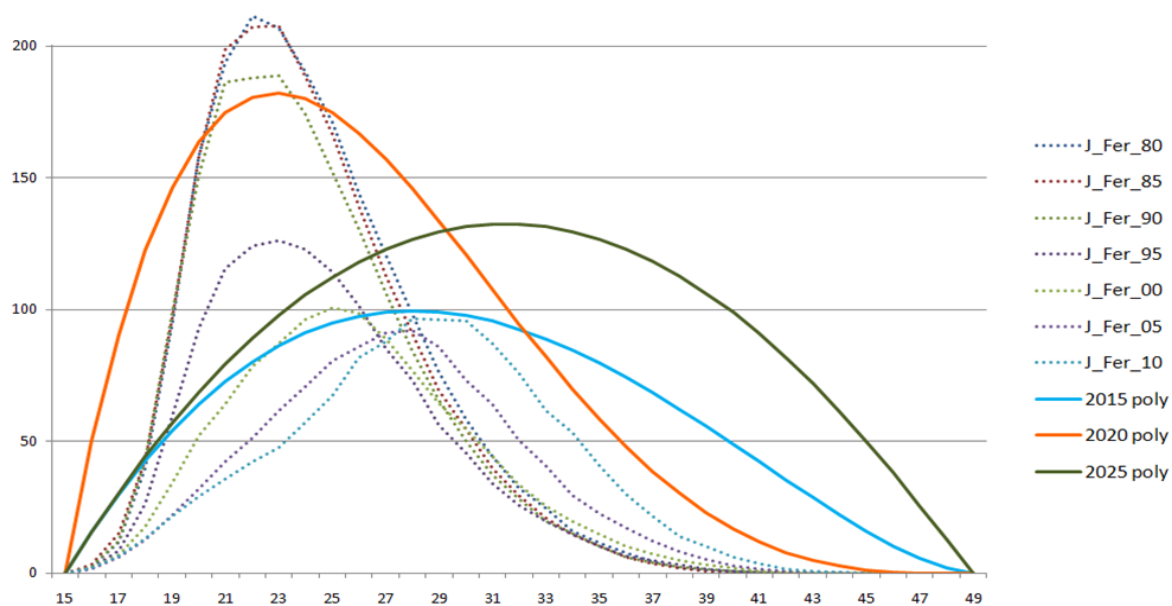
Tabuľka č.10: Súpis predpisov a koeficientov determinácie R^2 trendových čiar Jastremského modelu

Dosadením za $x = 2015$, $x = 2020$ a $x = 2025$ do jednotlivých predpisov sme vypočítali prognózované hodnoty. Tieto hodnoty uvádzame v tabuľke č.11.

Jastremski	Exponential	Linear	Logarithmic	Polynomial
maximum 2015	58,52532403	41,33618149	41,63215735	99,36586666
maximum 2020	49,26406710	20,59056689	21,11461394	123,37828350
maximum 2025	41,46834465	-0,15504770	0,64779380	132,26580715
modálny vek 2015	26,16905374	26,11341030	26,09923778	28,04303073
modálny vek 2020	26,99487356	26,84989293	26,82671426	29,78896943
modálny vek 2025	27,84675387	27,58637556	27,55239229	31,46739219
suma 2015	1142,56768171	1014,77391358	1017,40544979	1877,87307739
suma 2020	1023,56580881	811,54044813	816,33977822	2308,00631714
suma 2025	916,95834018	608,30698268	615,77117928	2549,12307739

Tabuľka č.11: Prognózované hodnoty pre roky 2015, 2020 a 2025 na základe Jastremského modelu

Následne, po získaní prognózovaných hodnôt pozorovaných parametrov sme ich aplikovali na predpis Jastremského modelu. V prípade Jastremského modelu nám v prípade oboch parametrov ako najlepší model vyšiel polynomický. V grafe č.9 uvádzame jeden z priebehov trendu plodnosti a to na základe najlepšieho, polynomického, modelu.



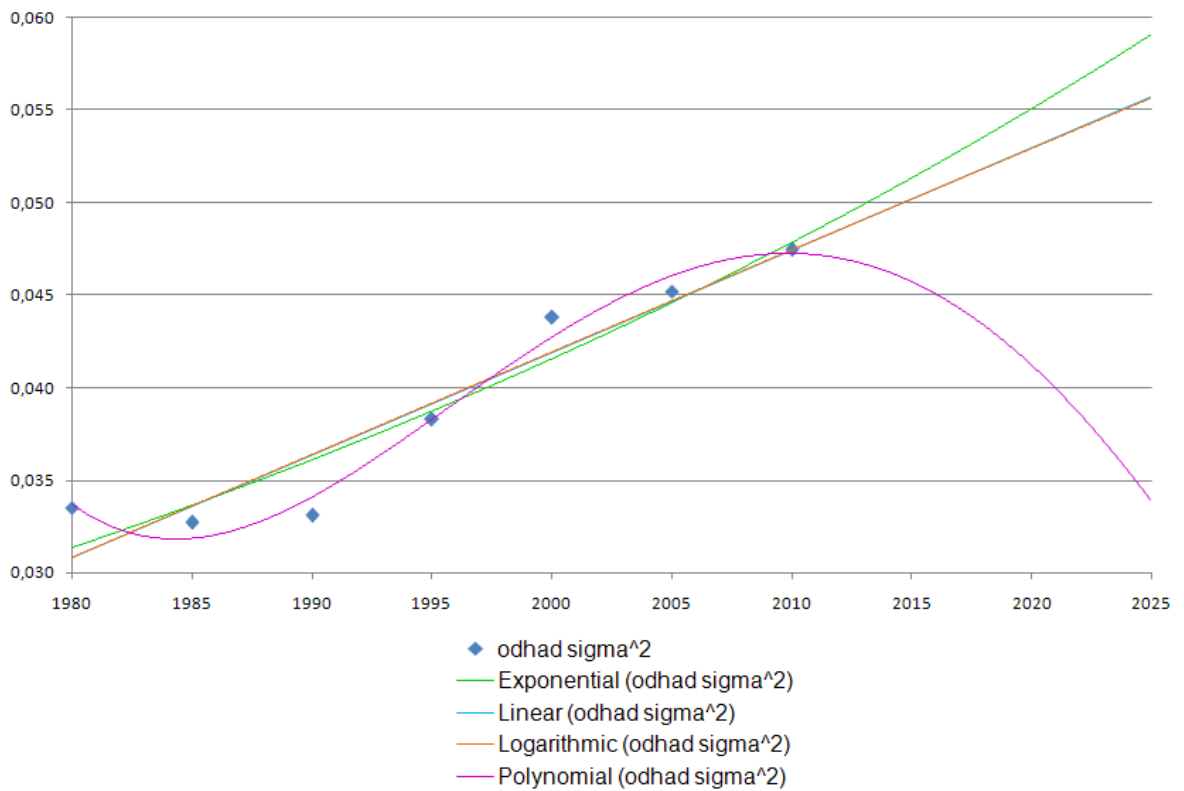
Graf č.9: Vývoj trendu plodnosti na základe polynomického trendu a Jastremského modelu

Prognóza vytvorená na základe Jastremského modelu má zjavne zaoblený tvar, ktorý by predstavoval väčšiu rovnomernosť vo veku matky pri pôrode. Podľa prognózy by modálny vek v prognózovaných rokoch bol až výrazne rôznorodý a nezachovávala by sa určitá postupnosť jeho zmeny. Prognózu na základe Jastremského modelu nepovažujeme za najlepšiu možnosť.

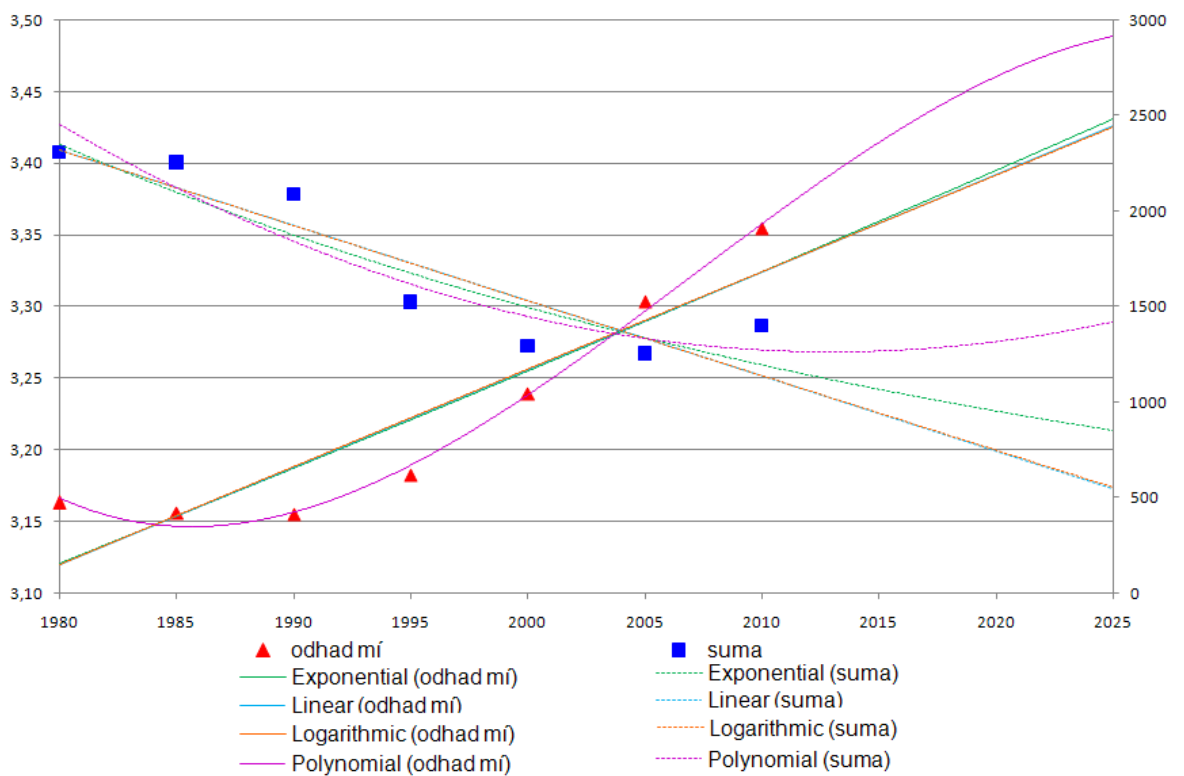
4.3. Lognormálny model

Pre lognormálny model sme prognózu robili na parametroch $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\mu}$ a celkovej úhrnej plodnosti *suma*. Vychádzame z hodnôt získaných fitovaním reálnych dát. V tabuľke č.3 na strane 31 sme uviedli hodnoty prvotných, nevylepšovaných, odhadov parametrov.

V tabuľke č.4 na strane 32 prehľadne vidíme vývoj hodnôt skúmaných parametrov. Na úvod odhadneme podľa doterajšieho vývoja, aký by mohol byť ďalší trend. Vidíme, že dvojica z hodnôt najskôr klesá a následne, po krátkom čase, začnú opäť stúpať, zatiaľ čo *suma* dlhšiu dobu najskôr klesá a až neskôr začne opäť stúpať. V prípade lognormálneho rozdelenia parametre menia svoju trajektóriu a opäť predpokladáme, že najvhodnejší model bude polynomický model. Zvolíme identický postup. Za pomoci regresnej analýzy preskúmame vývoj všetkých hodnôt a následne urobíme aj ich prognózu. Prognózy sme robili aj pre zvyšné typy zvolených trendových čiar, aby sme vhodnosť zvoleného trendu vedeli kvalitne zhodnotiť. Vhodnosť trendu sme určovali na základe kritérií a to koeficientu determinácie R^2 a menej odborného, no podstatného kritéria, vizuálnej vlastnosti trendu. Pri vizuálnej vlastnosti trendu nás zaujíma, či a ako dôsledne trendova čiara opisuje trakektóriu hodnôt. Vývoj parametrov poznačený zvolenými trendami pre lognormálne rozdelenie môžeme vidieť na grafe č.10 a grafe č.11. Následne uvádzame tabuľku č.12, ktorá predstavuje súpis predpisov a koeficientov determinácie R^2 pre zvolené trendy a prognózované parametre a celkovej úhrnej plodnosti *suma*. Na základe koeficientu determinácie R^2 z tabuľky č.12 vidíme, že za najvhodnejší model nám vyšiel polynomický model. Týmto sa aj náš intuitívny odhad vývoja potvrdil. Dosadením za $x = 2015$, $x = 2020$ a $x = 2025$ do jednotlivých predpisov sme vypočítali prognózované hodnoty. Tieto hodnoty uvádzame v tabuľke č.13..



Graf č.10: Vývoj trendu pre parameter $\hat{\sigma}^2$ lognormálneho modelu



Graf č.11: Vývoj trendu pre parametre $\hat{\mu}$ a *suma* lognormálneho modelu

Lognormal	Exponential	Linear	Logarithmic
$\hat{\sigma}^2$	$y = 0,0000000000002437556$ $e^{0,0140822273825998x}$ $R^2 = 0,896725872701031$	$y = 0,0005540690464524170x$ $- 1,06620678012667$ $R^2 = 0,901872697876674$	$y = 1,10496700077791\ln(x)$ $- 8,35680566837711$ $R^2 = 0,901249539957627$
$\hat{\mu}$	$y = 0,0486219251292383$ $e^{0,0021019812942417x}$ $R^2 = 0,84756519458021500000$	$y = 0,00681814127565149x$ $- 10,3800897059878$ $R^2 = 0,84556048333945500000$	$y = 13,589828317375\ln(x)$ $- 100,038669504265$ $R^2 = 0,84405277898999600000$
Suma	$y = 54\ 117\ 500\ 706\ 749\ 800\ 000\ 000$ $e^{-0,0225165378805285x}$ $R^2 = 0,822834134628317$	$y = -39,3964102281259x$ $+ 80\ 325,9187338198$ $R^2 = 0,83338271165225$	$y = -78\ 635,2024580797\ln(x)$ $+ 599\ 230,762052493$ $R^2 = 0,834246090741877$

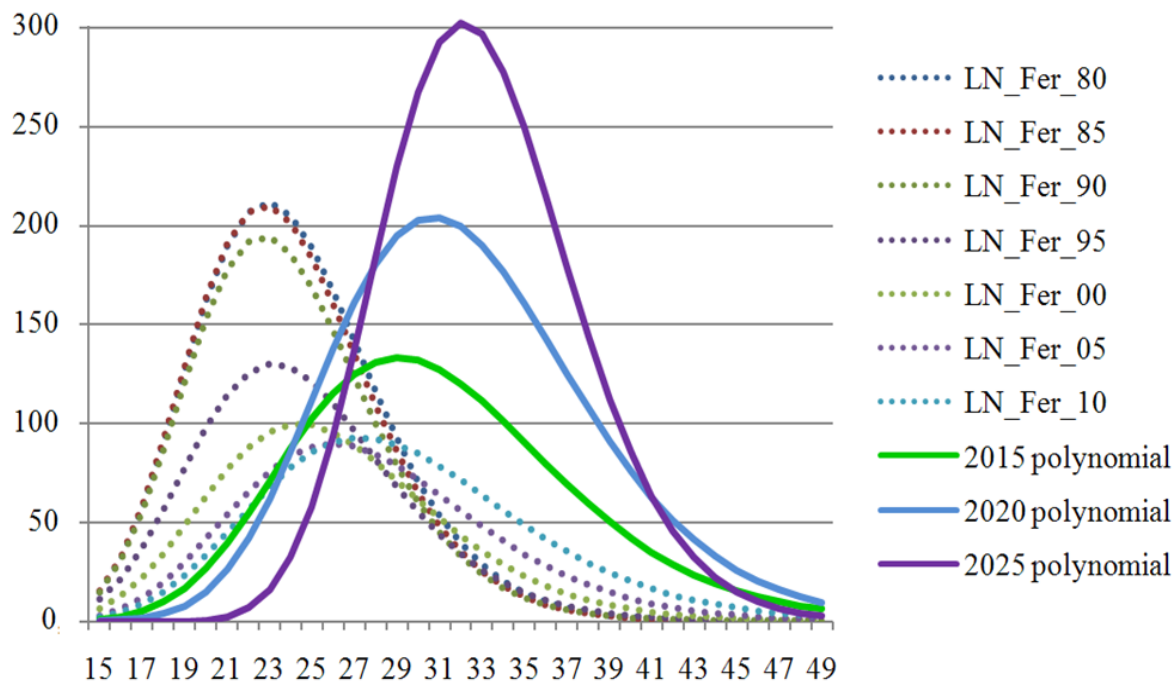
Lognormal	Polynomial	stupeň polynómu
$\hat{\sigma}^2$	$y = -0,00000206037011634295x^3 + 0,0123413865953666x^2 - 24,6402441648025x + 16\ 397,9456001137$ $R^2 = 0,984350890965216$	3
$\hat{\mu}$	$y = -0,00000901552506095058x^3 + 0,0542803943249212x^2 - 108,924332106145x + 72\ 854,5261689358$ $R^2 = 0,99455213534051800000$	3
Suma	$y = 0,196859574893271x^3 - 1\ 177,11001860477x^2 + 2\ 346\ 077,03870343x - 1\ 558\ 589\ 298,77064$ $R^2 = 0,98195534186778600000$	3

Tabuľka č.12: Súpis predpisov a koeficientov determinácie R^2 trendových čiar lognormálneho modelu

Lognormal	Exponential	Linear	Logarithmic	Polynomial
σ^2 2015	0,051328597	0,050242348	0,050197055	0,043992117
σ^2 2020	0,055072979	0,053012694	0,052935513	0,03512104
σ^2 2025	0,059090509	0,055783039	0,0556672	0,019027148
μ 2015	3,359565306	3,358464964	3,357833377	3,414638152
μ 2020	3,395060221	3,392555671	3,391513266	3,460431352
μ 2025	3,430930151	3,426646377	3,425109892	3,488540175
suma 2015	1069,151632	942,1521241	944,6948827	2156,381348
suma 2020	955,3120642	745,170073	749,8120011	3534,472281
suma 2025	853,5937401	548,1880219	555,4109072	5705,513478

Tabuľka č.13: Prognózované hodnoty pre roky 2015, 2020 a 2025 na základe lognormálneho modelu

Následne, po získaní prognózovaných hodnôt pozorovaných parametrov, aplikovali sme ich na predpis lognormálneho rozdelenia, čím sme získali prognózu. V grafe č.12 uvádzame jeden z možných priebehov trendu plodnosti, na základe polynomickeho trendu.



Graf č.12: Vývoj trendu plodnosti na základe polynomickeho trendu a lognormálneho modelu

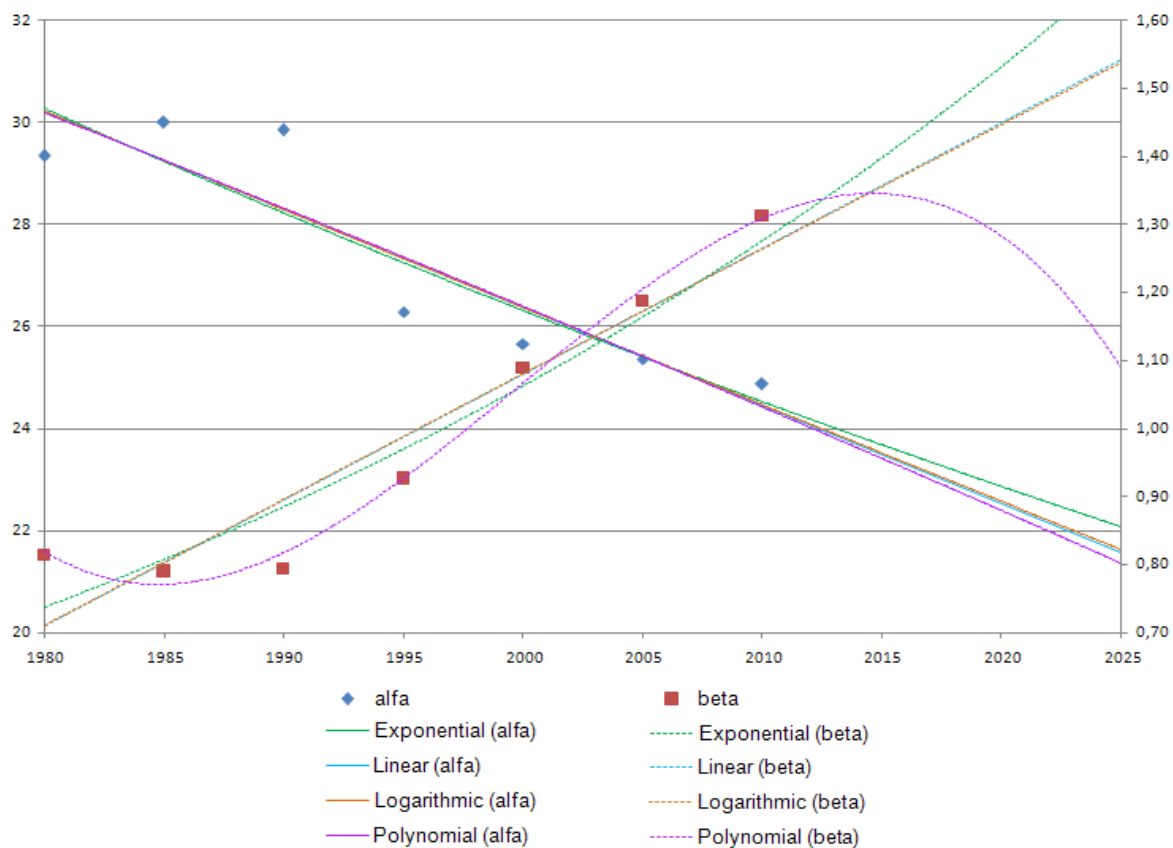
Prognóza vytvorená na základe lognormálneho modelu má zjavne prijateľný priebeh a pozitívnu predpoveď skôr pre bližšie obdobia. Prognóza pre rok 2025 sa nám zdá byť až veľmi nadsadená, nakoľko modálny vek je relatívne vysoký. Rozpätie plodnosti je posunuté v pravo k vyššiemu veku vstupnému, aj výstupnému. Maximum funkcie špecifických mier je až o polovicu vyššie ako v prípade funkcií špecifických mier v osemdesiatych rokoch minulého storočia, kedy bola plodnosť naozaj vysoká.

4.4. Gama model

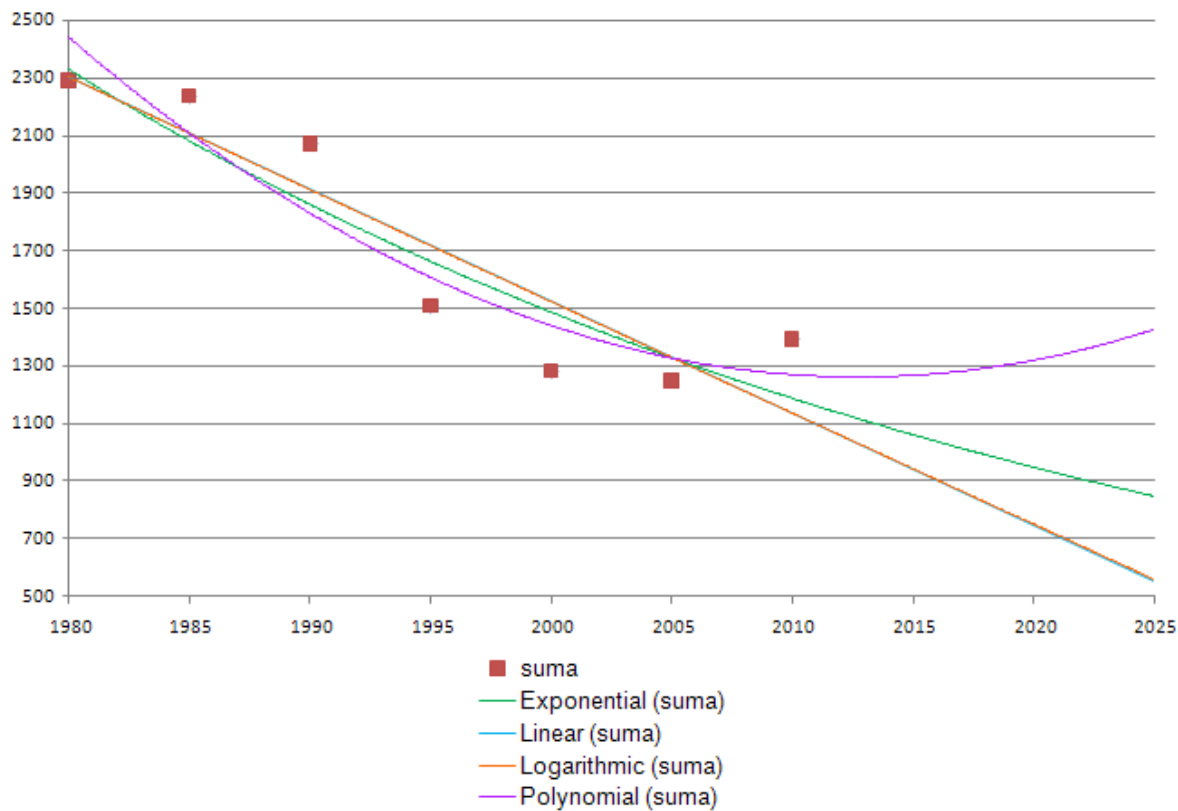
V prípade gama modelu sme prognózu realizovali na dvoch parametroch, α a β , a celkovej úhrnnej plodnosti *suma*. Ako aj v predchádzajúcich prípadoch, stále vychádzame z hodnôt získaných fitovaním reálnych dát

V tabuľke č.6 na strane 34 je zapísaný vývoj hodnôt skúmaných parametrov. Môžeme si všimnúť, že dvojica z hodnôt najskôr klesá a po krátkom čase, začne opäť stúpať, zatiaľ čo *suma* dlhšiu dobu najskôr klesá a až neskôr začne opäť stúpať. Opätovne budeme predpokladať, že najvhodnejší model bude polynomiálny model. Vhodnosť trendu sme určovali na základe kritérií a to koeficientu determinácie R^2 a kritéria vizuálnej vlastnosti trendu. Pri vizuálnej vlastnosti trendu nás zaujíma, či a ako dôsledne trendova čiara opisuje trakektóriu hodnôt a či prognózované smerovanie jednotlivých parametrov je z hľadiska biologického možné a či daná prognóza pokračuje v nadobudnutom smerovaní parametrov z predchádzajúcich rokov. Vývoj jednotlivých modelov pre gama rozdelenie môžeme vidieť na grafe č.13 a grafe č.14. Následne uvádzame tabuľku č.14, ktorá predstavuje globalizáciu predpisov a koeficientov determinácie R^2 pre zvolené modely a prognózované parametre a celkovej úhrnnej plodnosti *suma*.

Na základe koeficientu determinácie R^2 z tabuľky č.14 vidíme, že za najvhodnejší model nám vyšiel pre parameter α exponenciálny model, pre parameter β polynomiálny model a pre celkovú úhrnnú plodnosť *suma* opäť polynomiálny model. Tým pádom budeme vytvárať prognózu kombinovanú nie na základe jedného trendu, ako sme robili doposiaľ.



Graf č.13: Vývoj trendu pre parametre alfa a beta gama modelu



Graf č.14: Vývoj trendu pre parameter *suma* gama modelu

Gama	Exponential	Linear	Logarithmic
α	$y = 32\,885\,199,1840346 e^{-0,00701918417570922x}$ $R^2 = 0,832687519038762$	$y = -0,19191095145636x + 410,19908387094$ $R^2 = 0,823293911165976$	$y = -382,844231621026\ln(x) + 2\,936,33527882382$ $R^2 = 0,823244009179927$
β	$0,00000000000000013299 e^{0,0183081894487481x}$ $R^2 = 0,899930634392157$	$y = 0,0184590840291852x - 35,8383197035839$ $R^2 = 0,896523822099223$	$y = 36,8022856254912\ln(x) - 278,650447132148$ $R^2 = 0,895406206654101$
suma	$42\,268\,144\,104\,319\,400\,000\,000 e^{-0,0223959700333588x}$ $R^2 = 0,82061934718374$	$y = -38,9435081812353x + 79\,410,6044469715$ $R^2 = 0,831378098028782$	$y = -77\,731,8330531195\ln(x) + 592\,354,837217451$ $R^2 = 0,832252734628868$

Gama	Polynomial	stupeň polynómu
α	$y = -0,000264498583488382x^2 + 0,863438396662272x - 642,485441019032$ $R^2 = 0,82341120180488$	2
β	$y = -0,00004318679974583470x^3 + 0,259082038307198x^2 - 518,057688096487x + 345\,282,687491178$ $R^2 = 0,993381706029458$	3
suma	$y = 1,09856678283823x^2 - 4\,422,22497170576x + 4\,451\,624,0076344$ $R^2 = 0,880996483106957$	2

Tabuľka č.14: Súpis predpisov a koeficientov determinácie R^2 trendových čiar gama modelu

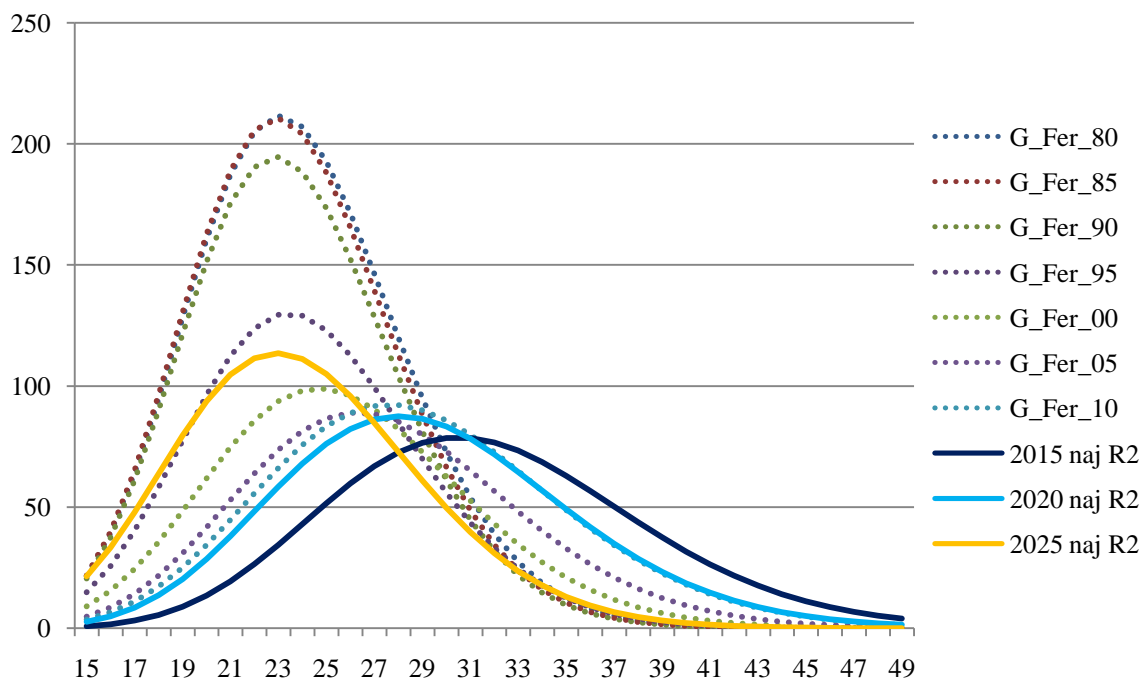
V tomto prípade si môžeme všimnúť, že aj polynomickeý model aj exponenciálny model parameter α popisuje dostatočne dobre. Celkovo, medzi koeficientmi determinácie jednotlivých trendov je veľmi malý rozdiel. V prípade polynomickeého modelu si musíme dávať pozor na fakt, že nižší stupeň modelu je nedostatočný a stupeň vyšší nám dáva, z hľadiska ekonomicko-sociálno-demografickeého, po prognózovaní pre roky 2015, 2020 a 2025 nereálne hodnoty parametra.

Dosadením za $x = 2015$, $x = 2020$ a $x = 2025$ do jednotlivých predpisov sme vypočítali prognózované hodnoty. Tieto hodnoty uvádzame v tabuľke č.15.

Gama	Exponential	Linear	Logarithmic	Polynomial
alfa 2015	23,68583352	23,49851669	23,51299929	23,41916711
alfa 2020	22,86897542	22,53896193	22,5641903	22,40010017
alfa 2025	22,08028847	21,57940717	21,61772695	21,36780831
beta 2015	1,397582562	1,356734615	1,35512342	1,345106566
beta 2020	1,53155713	1,449030035	1,446331114	1,282925499
beta 2025	1,678374721	1,541325456	1,537313325	1,089246025
suma 2015	1064,692223	939,4354618	941,9427693	1269,005497
suma 2020	951,9011481	744,7179209	749,2987226	1321,465482
suma 2025	851,0589037	550,00038	557,1309287	1428,853806

Tabuľka č.15: Prognózované hodnoty pre roky 2015, 2020 a 2025 na základe gama modelu

Na záver, po získaní prognózovaných hodnôt pozorovaných parametrov a celkovej úhrnej plodnosti *suma* sme ich aplikovali na predpis gama rozdelenia. V prípade gama rozdelenia sme pre najlepší model použili kombináciu polynomickeého a exponenciálneho modelu, podľa príslušného parametra. V grafe č.15 uvádzame jeden z možných priebehov trendu plodnosti a to na základe kombinácie týchto dvoch trendov.



Graf č.15: Vývoj trendu plodnosti na základe kombinovaného trendu a gama modelu

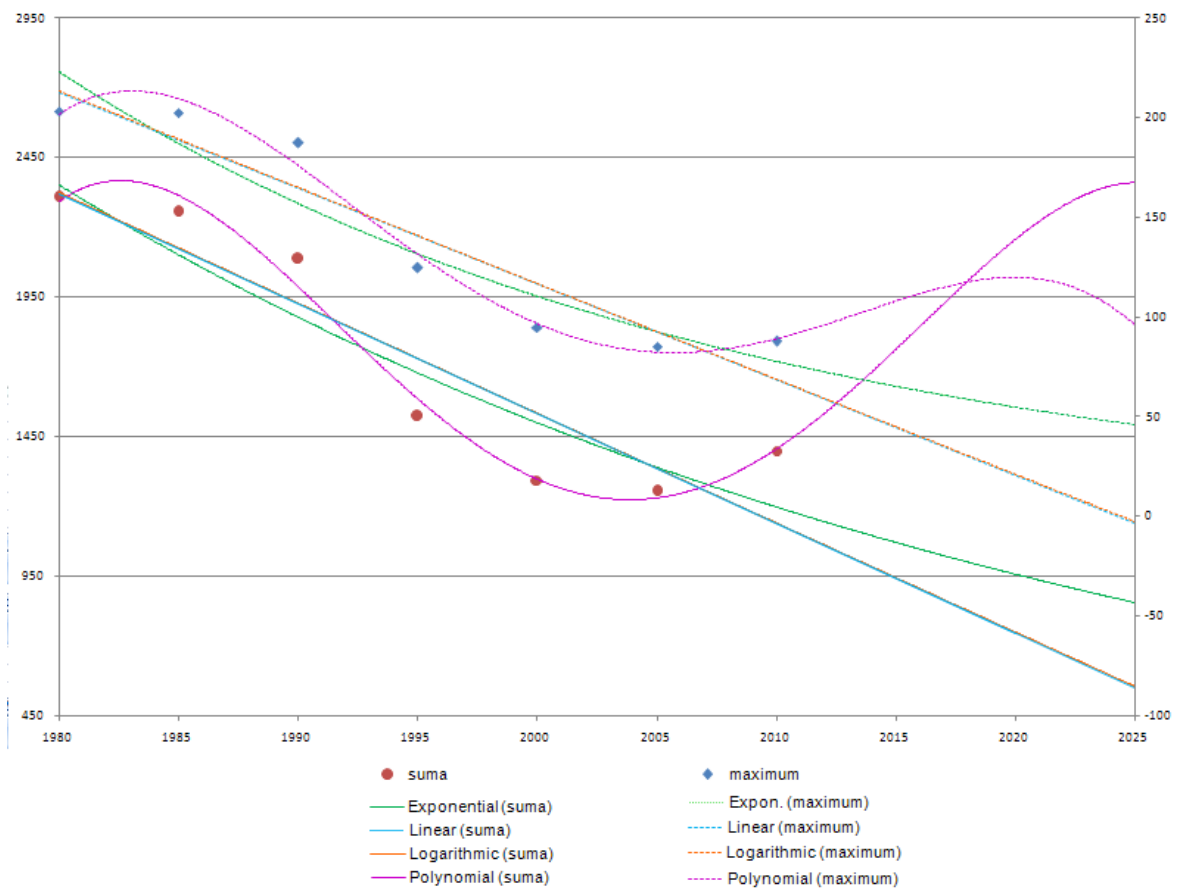
Prognóza založená na gama modeli udáva priebeh, o ktorom si myslíme, že by sa mohol naplniť. Modálny vek postupne nadobúda pomalý návrat k nižšiemu veku, čo by znamenalo, že model sa dostáva do štádia istého ustálenia plodnosti. Zároveň môžeme pozorovať aj navýšenie počtu narodených detí na 1000 žien v porovnaní s aktuálnym stavom. Prognózu na základe gama modelu považujeme za prognózu rozhodne priaznivú a vydarenú.

4.5. Hadwigerov model

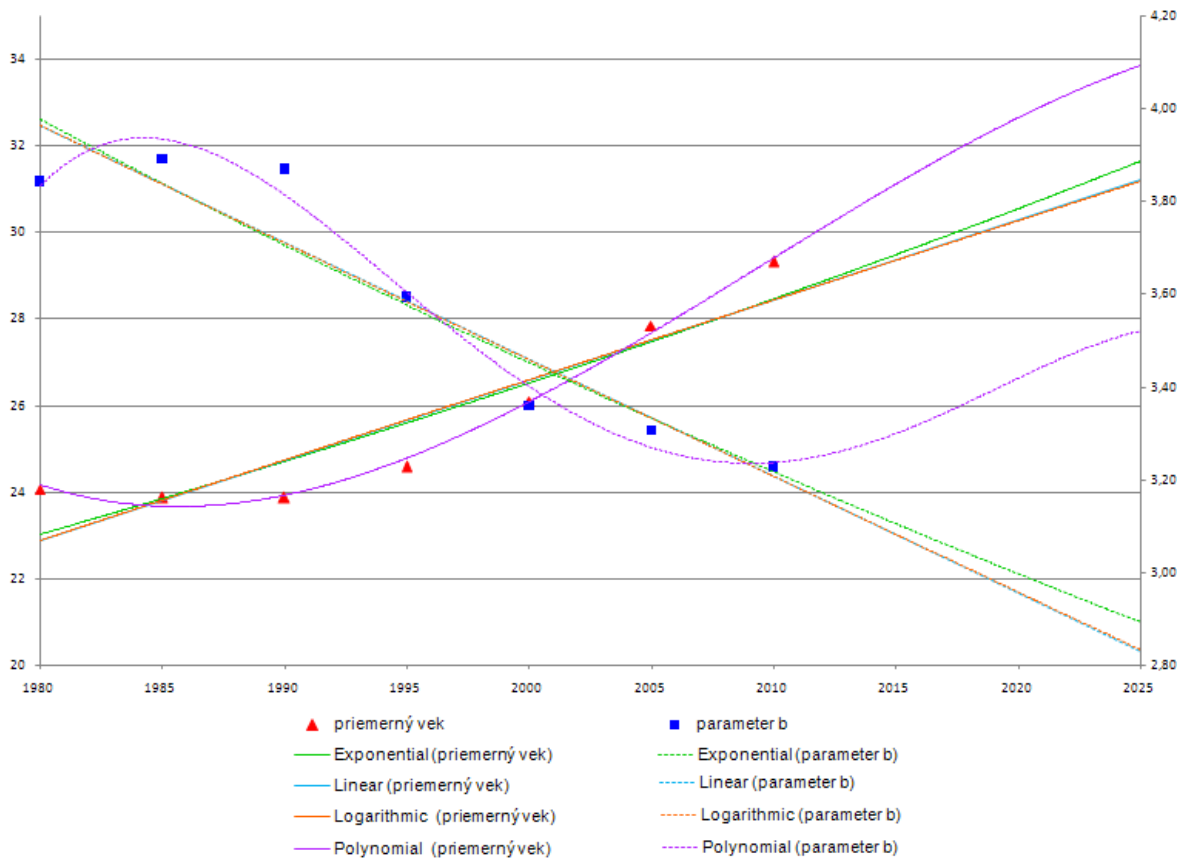
V prípade Hadwigerovho modelu sme prognózu robili na základe troch parametrov. *Maximum*, *priemerný vek*, *parameter b* a celkovej úhrnnej plodnosti *suma*. Vychádzame z hodnôt získaných fitovaním reálnych dát.

Na úvod skúsme vývoj parametrov odhadnúť intuitívne. Vidíme, že trojica hodnôt najskôr klesá, potom jedny stúpajú po určitý rok a následne začnú stúpať, resp. klesať. Nakoľko parametre menia svoju trajektóriu, nepredpokladáme, že najvhodnejším modelom bude lineárny alebo logaritmický model. Naopak. Predpokladáme, že najlepším modelom bude

model polynomický. Za pomoci regresnej analýzy sme preskúmali vývoj všetkých hodnôt a následne urobili ich prognózu. Prognózy sme vždy robili pre všetky štyri typy zvolených trendových čiar, aby sme vhodnosť zvoleného trendu vedeli kvalitatívne zhodnotiť. Vhodný trend sme volili na základe dvoch kritérií a to koeficientu determinácie R^2 a nezanedbávali sme ani vizuálnu vlastnosť trendu, či trendova čiara naozaj dôsledne opisuje trakektóriu hodnôt. Trendový vývoj všetkými štyrmi zvolenými modelmi pre Hadwigerov model môžeme vidieť na grafe č.16 a grafe č.17.



Graf č.16: Vývoj trendových čiar pre *suma* a *maximum* Hadwigerovho modelu



Graf č.17: Vývoj trendových čiar pre *priemerný vek* a *parameter b* Hadwigerovho modelu

Následne uvádzame tabuľku č.16, v ktorej máme súpis predpisov a koeficientov determinácie R^2 pre zvolené modely a prognózované parametre a celkovej úhrnnej plodnosti *suma*. Z tabuľky č.16 na základe koeficientu determinácie R^2 jasne vidíme, že za najvhodnejší model nám globálne vyšiel polynomiálny model. Týmto sa aj náš intuitívny odhad vývoja potvrdil. Dosadením za $x = 2015$, $x = 2020$ a $x = 2025$ do jednotlivých predpisov sme vypočítali prognózované hodnoty. Tieto hodnoty uvádzame v tabuľke č.17.

Hadwiger	Exponential	Linear	Logarithmic
maximum	$y = 432\,689\,692\,260\,045\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ $e^{-0,0352223120211271x}$ $R^2 = 0,902332455108019$	$y = -4,80987545783448x$ $+ 9\,736,448862887$ $R^2 = 0,893192301961984$	$y = -9\,597,48261110267\ln(x)$ $+ 73\,066,1321866251$ $R^2 = 0,893554309071753$
priemerný vek	$y = 0,000018818294595363$ $e^{0,00707890091760954x}$ $R^2 = 0,850815789732714$	$y = 0,185481040480748x$ $- 344,380111665353$ $R^2 = 0,843653988081834$	$y = 369,69253336288\ln(x)$ $- 2\,783,41228901535$ $R^2 = 0,842123239244994$
parameter b	$y = 4\,910\,944,05535487$ $e^{-0,0070843025912915x}$ $R^2 = 0,895880835751462$	$y = -0,0252154088610644x$ $+ 53,8891191878035$ $R^2 = 0,892354054962477$	$y = -50,2911010462033\ln(x)$ $+ 385,715615162741$ $R^2 = 0,891900561171372$
suma	$y = 54\,117\,500\,706\,749\,800\,000\,000$ $e^{-0,0225165378805285x}$ $R^2 = 0,822834134628317$	$y = -39,3964102281259x$ $+ 80\,325,9187338198$ $R^2 = 0,83338271165225$	$y = -78\,635,2024580797\ln(x)$ $+ 599\,230,762052493$ $R^2 = 0,834246090741877$

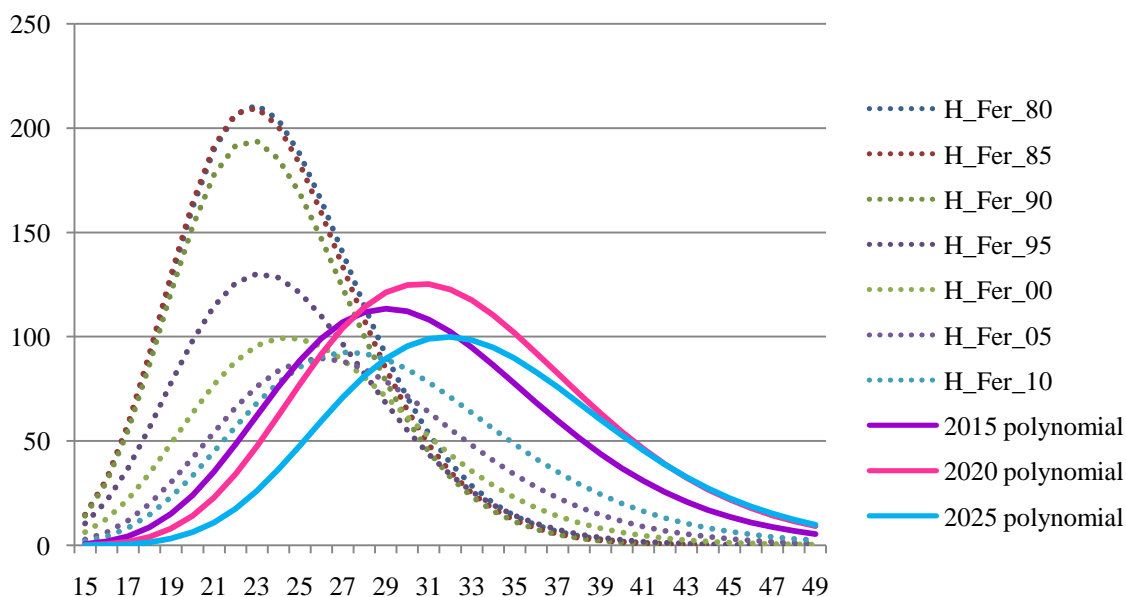
Hadwiger	Polynomial	stupeň polynómu
maximum	$y = -0,0055659026383045x^4 + 44,612762628563x^3 - 134\,090,368065722x^2 + 179\,117\,167,54434x - 89\,720\,520\,344,0221$ $R^2 = 0,986156330657474$	4
priemerný vek	$y = -0,000207352757079238x^3 + 1,24993452444924x^2 - 2\,511,20951379661x + 1\,681\,529,05429353$ $R^2 = 0,99534676792858$	3
parameter b	$y = -0,0000022664675532432x^4 + 0,0181932338755676x^3 - 54,762712717961x^2 + 73\,258,9711067494x - 36\,749\,478,0933902$ $R^2 = 0,983235562783281$	4
suma	$y = -0,0055659026383045x^4 + 44,612762628563x^3 - 134\,090,368065722x^2 + 179\,117\,167,54434x - 89\,720\,520\,344,0221$ $R^2 = 0,986156330657474$	4

Tabuľka č.16: Súpis predpisov a koeficientov determinácie R^2 trendových čiar Hadwigerovho modelu

Hadwiger	Exponential	Linear	Logarithmic	Polynomial
suma 2015	1069,151632	942,1521241	944,6948827	1762,794647
suma 2020	955,3120642	745,170073	749,8120011	2156,913528
suma 2025	853,5937401	548,1880219	555,4109072	2360,010605
maximum 2015	65,01479714	44,54981535	44,89047	107,6815472
maximum 2020	54,51649586	20,50043806	21,10487514	119,6045208
maximum 2025	45,71341374	-3,548939228	-2,62191719	95,51925087
priemerný vek 2015	29,4679816	29,3641849	29,34694519	31,1095795
priemerný vek 2020	30,52966424	30,29159011	30,26316012	32,64621509
priemerný vek 2025	31,62959755	31,21899531	31,17710999	33,85169151
parameter b 2015	3,102186023	3,080070333	3,082085674	3,299866647
parameter b 2020	2,994225256	2,953993288	2,957448433	3,418688744
parameter b 2025	2,890021686	2,827916244	2,833119319	3,520644844

Tabuľka č.17: Prognózované hodnoty pre roky 2015, 2020 a 2025 na základe Hadwigerovho modelu

Následne, po získaní prognózovaných hodnôt pozorovaných parametrov sme ich, aplikovali na predpis Hadwigerovho modelu, čím sme získali prognózu. Pri tomto type modelu nám ako najlepší vyšiel trend polynomický. V grafe č.18 uvádzame jeden z možných priebehov trendu plodnosti a to na základe polynomickeho trendu.

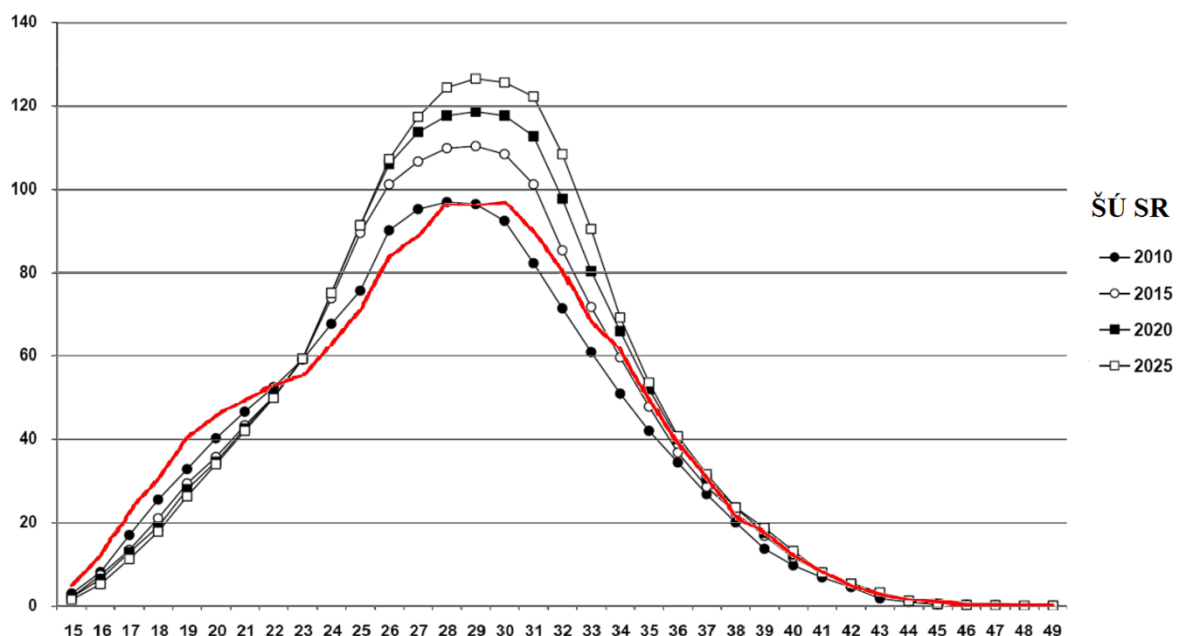


Graf č.18: Trend plodnosti na základe polynomickeho trendu a Hadwigerovho modelu

Prognóza z Hadwigerovho modelu nám predkladá priebeh, ktorý by sa mohol naplniť i keď nám predstavuje isté kolísanie. Prognózované krivky naďalej udržujú trend zvyšujúceho sa modálneho veku. Zároveň môžeme pozorovať aj kolísanie v počte narodených detí na 1000 žien, ktorý najskôr stúpa, no pri roku 2025 zaznamenávame opäť jeho klesanie. Hadwigerov model a na ňom založenú prognózu považujeme za prognózu, ktorej priebeh môžeme pokladať za naplniteľný.

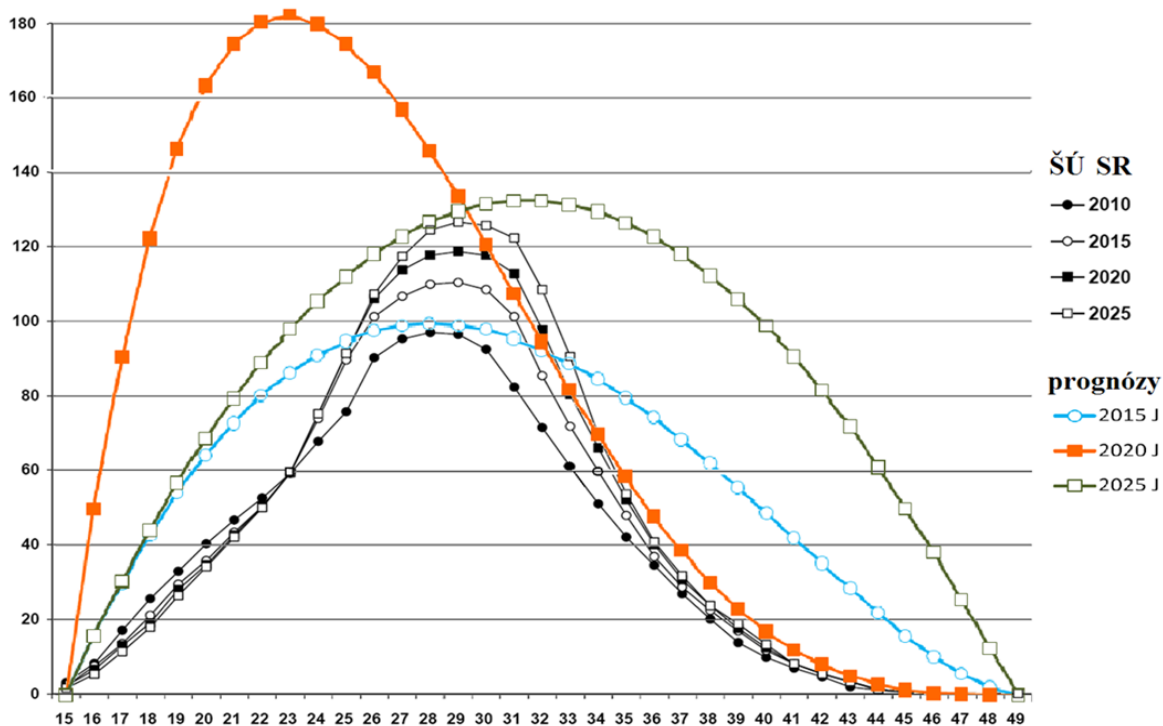
4.6. Zhodnotenie

Porovnáme si prognózu ŠÚ SR pre rok 2010 z grafu č.1, ktorý sme uviedli v úvode práce s reálnymi hodnotami pre daný rok. Toto porovnanie stváraťujeme na grafe č. 19. ŠÚ SR robil svoju prognózu v roku 2007. Teraz, s odstupom času a po získaní reálnych dát pre rok 2010 pre Slovenskú republiku, sme ich mohli porovnať, čím sme dostali obraz o presnosti prognózy ŠÚ SR. Zdá sa, že prognóza ŠÚ SR asi podhodnocuje modálny vek žien pri pôrode.



Graf č.19: Porovnanie prognózy ŠÚ SR a reálnych dát Slovenskej republiky pre rok 2010

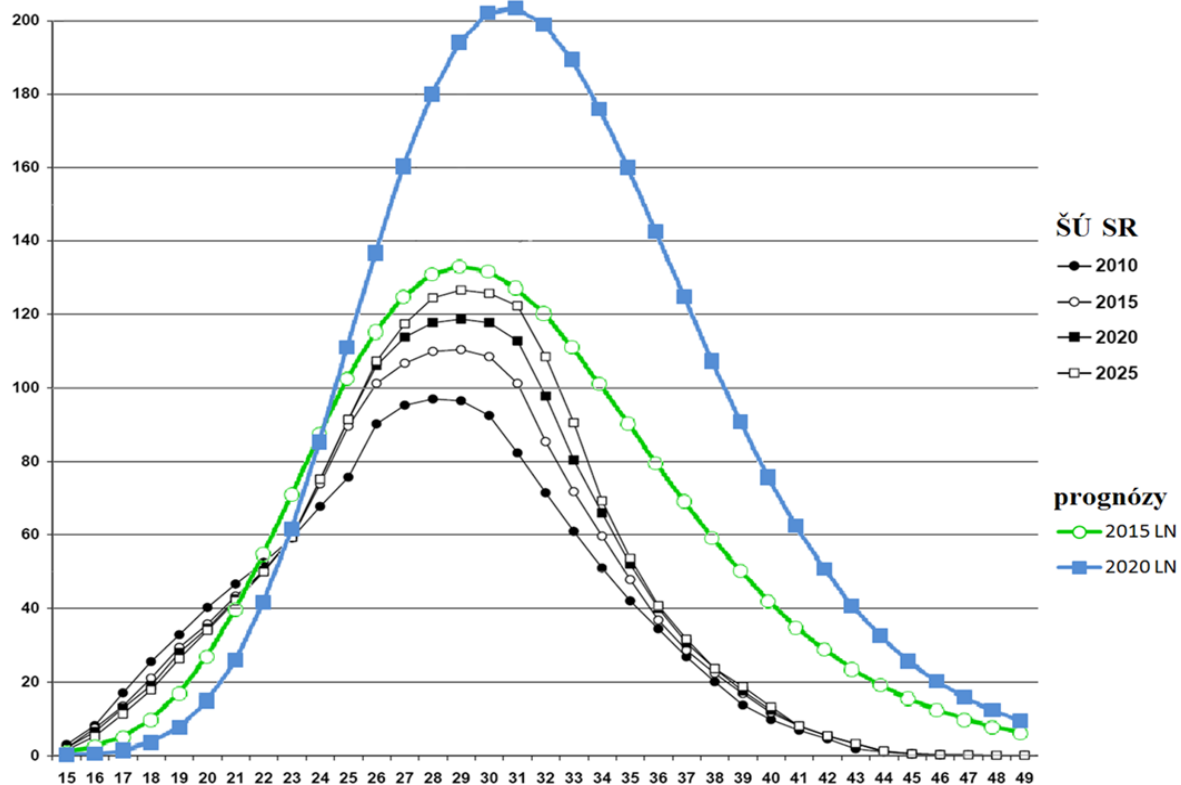
Porovnáme naše prognózy s prognózou ŠÚ SR a nami vytvorené prognózy.



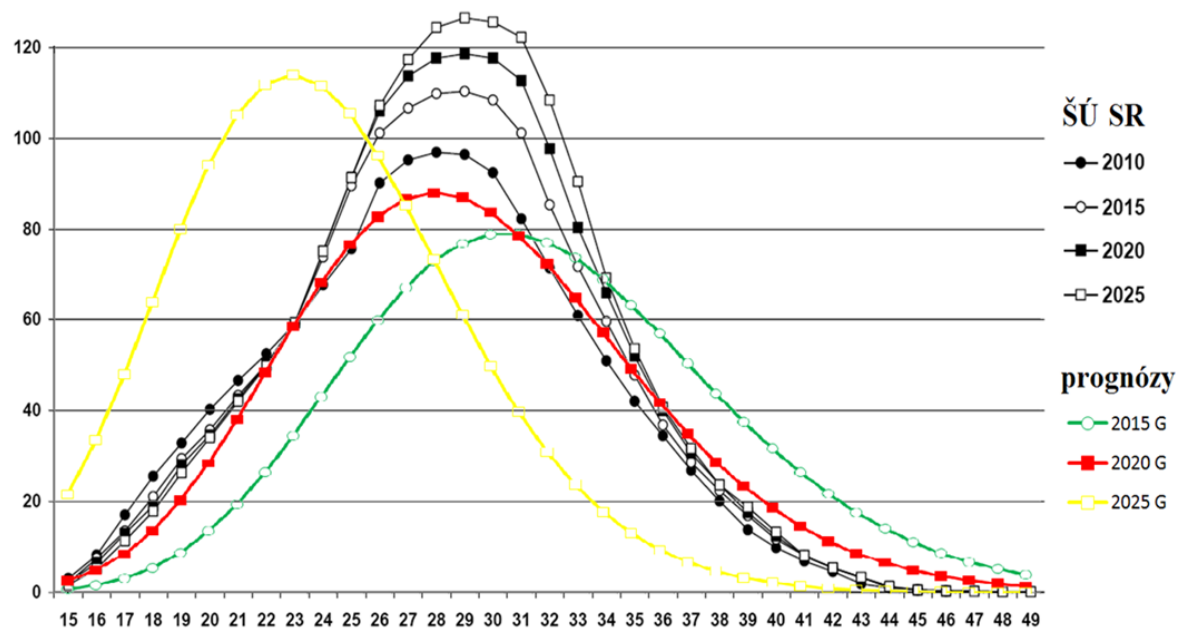
Graf č.20: Porovnanie prognózy ŠÚ SR a prognózy založenej na Jastremského modeli

Ako sme už spomenuli, Jastremského model má zaoblený tvar. Na grafe č.20 vidíme výrazné odlišnosti od prognózy ŠÚ SR. Táto odlišnosť je spôsobená samotným modelom. Jastremského model vznikol v skoršom období, kedy bol plodnostný model odlišný od dnešného. Jeho vlastnosti v tom období boli postačujúce, čím sa vysvetľuje aj jeho využiteľnosť. Prognózu na základe Jastremského modelu v súčasnej nepovažujeme za najvhodnejšiu, nakoľko dochádza k neustálym a ťažko predvídateľným zmenám.

V prípade lognormálneho modelu sme sa domnievali v jeho relatívne dobrú prognózovaciu vlastnosť. Posúdiť vhodnosť lognormálneho modelu na prognózovanie je náročné. Na grafe č.21 sme uviedli iba prognózu pre rok 2015 a 2020 z toho dôvodu, že prognóza pre rok 2025 je výrazne odlišná a jej hodnoty sú až privysoké. Celkovú prognózu však možno vidieť na grafe č.12 na strane 45. K lognormálnemu modelu prognózy by sme sa priklonili v prípade, kedy by sme predpokladali silne pozitívnu prognózu.

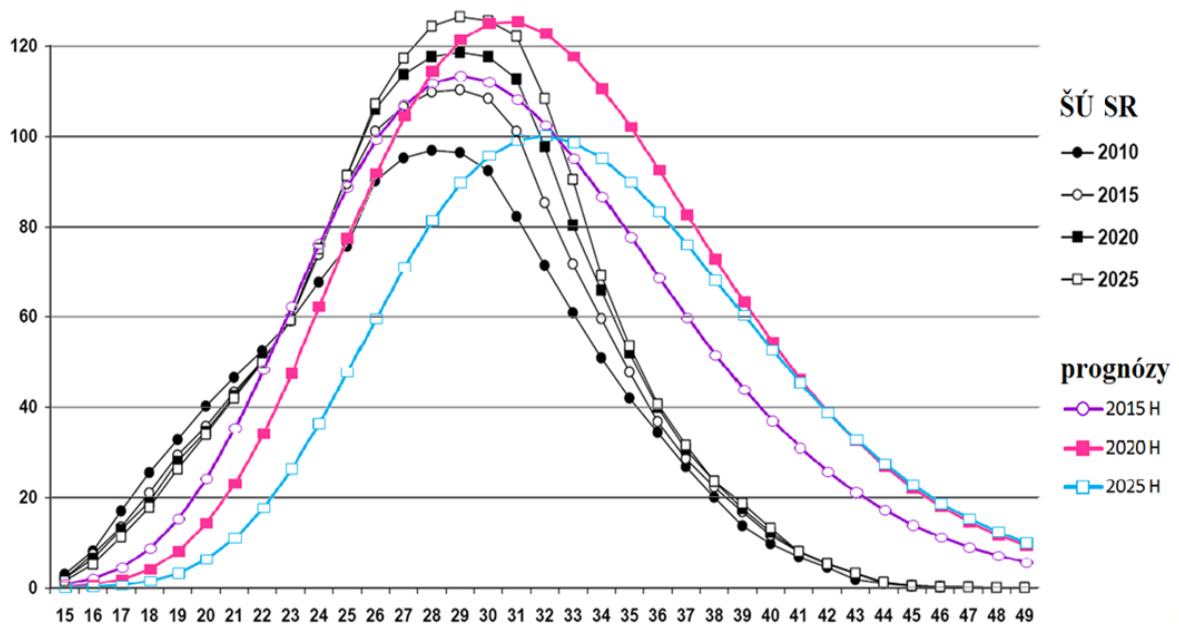


Graf č.21: Porovnanie prognózy ŠÚ SR a prognózy založenej na lognormálnom modeli



Graf č.22: Porovnanie prognózy ŠÚ SR a prognózy založenej na gama modeli

Prognóza na základe gama rozdelenia, graf č.22, vykazuje známky určitého návratu modálneho veku k nižším hodnotám, ako tomu bolo v minulosti a zároveň môžeme pozorovať aj navýšenie počtu narodených detí na 1000 žien v porovnaní s aktuálnym stavom. Takáto prognóza však závisí od viacerých faktorov. V prípade prognózy na základe gama rozdelenia môžeme hovoriť o podhodnocovaní v porovnaní s prognózami ŠÚ SR.



Graf č.23: Porovnanie prognózy ŠÚ SR a prognózy založenej na Hadwigerovom modeli

Najbližšiu prognózu k prognóze ŠÚ SR nám predkladá Hadwigerov model graf č.23. Prognózované krivky si z minulosti udržiujú nadobudnutý trend zvyšujúceho sa modálneho veku. Môžeme však pozorovať aj isté výkyvy v počte narodených detí na 1000 žien. Aj v prípade Hadwigerovho modelu zaznamenávame isté kolísanie.

Pri prognózovaní nám vo väčšine prípadov za najlepší trend vyšiel polynomický trend. Je jasné, že pre dlhodobé prognózy sa polynomický trend vývoja parametrov nehodí, treba udržiavať istú opatrnosť pri prognózovaní. Pre vzdialenejšiu budúcnosť často predpovedá naozaj odvážne hodnoty prognózovaných parametrov a tým pádom aj celú prognózu.. Dlhodobé predpovede teda slúžia len ako akási ilustrácia.

Záver

Ako sme na úvod spomenuli, cieľom práce bolo modelovanie a prognózovanie špecifických mier v demografii. Pracovali sme konkrétne na špecifickej miere plodnosti. Zamerali sme sa na dáta publikované ŠÚ SR pre Slovenskú republiku na tridsaťročné obdobie v rokoch 1980 – 2010 s prognózou pre roky 2015, 2020 a 2025.

Najskôr sme sa na danú problematiku pozreli z demografického hľadiska, čo nám uľahčilo lepšie pochopiť následné zmeny v plodnostnom modeli. Priblížili sme si pojem druhej demografickej revolúcie a jej priebeh. Pracovali sme so štyrmi modelmi – Jastremského model, model založený na lognormálnom rozdelení, model založený na gama rozdelení a Hadwigerov model. Aký je ich predpis, aký majú tvar a aké sú niektoré ich matematické vlastnosti. Toto boli pre nás potrebné a užitočné informácie. Získali sme prvotné odhady parametrov príslušných modelov. Popísali sme charakteristiku modelov, objasnili význam jednotlivých premenných vystupujúcich v modeloch a urobili základnú matematickú analýzu ich vlastností. Zaviedli sme jednotlivé predpisy pre prvotné odhady parametrov a následne sme odhadovali parametre modelov z empirických dát.

Z prvotných odhadov sme vylepšovaním získali nové a presnejšie odhady, ktoré sme neskôr použili pre následne prognózy. Prvotné odhady sme vylepšovali minimalizáciou súčtu štvorcov odchýlok. Vhodnosť použitého modelu sme zhodnocovali aj na základe hodnoty súčtu štvorcov odchýlok. Vylepšené odhady parametrov sme následne využili na prognózovanie ich trendu, ktoré sme robili cez regresnú analýzu. Na vylepšované odhady sme aplikovali štyri typy trendov – exponenciálny, lineárny, logaritmický a polynomický, čím sme získali štyri varianty prognózy. Ku každému trendu sme získali aj predpis funkcie trendu a koeficient determinácie R^2 , určujúci koľko percent rozptylu je z matematického modelu. Koeficient determinácie bol kritériom pre výber najvhodnejšieho modelu trendu. Na základe predpisu funkcie trendu sme zrealizovali predpoveď hodnôt skúmaných parametrov pre roky 2015, 2020 a 2025. Tieto predpovedané parametre sme využili na prognózy pri použití jednotlivých modelov. Priebeh jednotlivých trendov sme znázornili v grafoch. Pre porovnanie presnosti danej predpovede tieto uvádzame spolu s dátami z minulosti, z ktorých naše prognózy vychádzali.

Ako najvhodnejší model trendu sa nám preukázal polynomický trend. Jeho najväčšou výhodou v porovnaní s ostatnými trendami je, jeho schopnosť zachytiť zmenu smeru trajektórie dát. Pod pojmom trajektoria dát myslíme ich priebeh, ako sa vyvíjali v minulosti.

V prípade zhodnotenia vybraných modelov, s ktorými sme pracovali, sa nám za najmenej vhodný model preukázal Jastremského model. Model bol v minulosti populárny medzi demografmi, pre svoju jednoduchosť s jednoduchou interpretáciou parametrov. Vznikol z hľadiska vývoja spoločnosti už pomerne dávno a za iných ekonomicko-sociálno-demografických podmienok. Zo začiatku rýchlo rastie, takže má šancu zachytiť rýchly nárast špecifických mier v mladom veku, čo je typické pre populácie pred druhou demografickou revolúciou. V súčasnosti nedokázal dostatočne dobre fitovať reálne dáta. Ďalším z modelov, ktorému sme sa venovali bol lognormálny model. Svojím tvarom by bol síce vhodný, no pri prognózovaní došlo k výraznému nadhodnoteniu prognózovaných parametrov, v porovnaní s predpoveďami ŠÚ SR. Model samozrejme nezavrhuje. Prognózy sme realizovali aj za pomoci gama modelu a Hadwigerovho modelu. Oba tieto modely preukázali, že sú schopné dobre fitovať reálne dáta a aj prognózy založené na ich podklade sú prijateľné. Zaujímavé, že prognózy založené na gama modeli predpokladajú čiastočný návrat vývoja. Musíme brať do úvahy aj skutočnosť, že práca si nerobila aspiráciu na zohľadnenie všetkých skutočností ovplyvňujúcich budúci vývoj, preto predikciu plodnosti považujeme skôr za formálnu a zohľadňovali sme najmä matematickú stránku danej problematiky.

Nie je veľmi komplikované nájsť krivku, ktorá bude dobre fitovať hodnoty jedného roka, no pri väčších súboroch sa stretávame s problémom. Takýto problém nastal aj v našej práci, nakoľko v skúmanom období dochádza k zmenám v pôrodnostnom modeli. Populácia sa akoby rozdelila na dve skupiny. Prvá skupina udržiavala pôvodný trend, čiže privedenie potomka v mladšom veku a druhá skupina tento proces posúvala do vyššieho veku. Táto dvojtvárnosť spôsobila nerovnomernosť a určitú kostrbatosť modelu. Z týchto dôvodov nie je možné modelovanie jednoznačne uzavrieť a striktne predurčiť ďalší vývoj. Tento proces je otvorený, menný a prognostický stále sa meniaci v závislosti od vonkajších vplyvov spoločnosti.

Spôsob vytvárania prognóz, ktorým sme sa zaoberali, nie je jediný. Na spoľahlivosť predikcie je potrebné zvážiť použitie aj iných trendov a modelov. Napríklad modely „S-kriviek“. Takýmto funkciám sme sa nevenovali. Neprogramujú sa ľahko a z časového i obsahového hľadiska nebolo možné „S-krivky“ v rámci diplomovej práce realizovať.

PRÍLOHY

Zoznam príloh

Príloha č.1: Hugo Hadwiger, 23. 12. 1908 – 29. 10. 1981	63
Príloha č.2: Výpočet integrálu Hadwigerovej funkcie v tvare $\int_0^{\infty} \frac{na}{\sqrt{\pi x^3}} \cdot \exp \left\{ nac - \left(\frac{n^2 a^2}{x} + bx \right) \right\} dx$	64
Príloha č.3: Výpočet integrálu Hadwigerovej funkcie v tvare $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab}{c} \cdot \left(\frac{c}{x} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -b^2 \cdot \left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2 \right) \right\} dx$	68
Príloha č.4a: Hodnoty vekovo špecifických mier plodnosti pre roky 1980 – 1990.....	73
Príloha č.4b: Hodnoty vekovo špecifických mier plodnosti pre roky 1991 – 2000	74
Príloha č.4c: Hodnoty vekovo špecifických mier plodnosti pre roky 2001 – 2010.....	75

Príloha č.1: Hugo Hadwiger, 23. 12. 1908 – 29. 10. 1981

Autorom Hadwigerovej funkcie je Hugo Hadwiger, ktorý sa narodil 23. decembra 1908 v Karlsruhe, v Nemecku a zomrel 29. októbra 1981 v Berne, vo Švajčiarsku. Hugo Hadwiger bol švajčiarskym matematikom nemeckého pôvodu, známy pre jeho prácu v geometrii, kombinatorike a kryptografii. Bakalárske štúdium absolvoval na univerzite v Berne, kde sa špecializoval na matematiku, no študoval aj fyziku či poistnú matematiku. Doktorandské štúdium ostal robiť v Berne, pod dohľadom Willy Scherrer, kde získal v roku 1936 titul Ph.D. Od roku 1937 pôsobil na univerzite v Berne viac ako 40 rokov až do konca svojho života. Takisto pracoval v rámci projektu vývoja šifrovacieho stroja NEMA (NEue MAchine), ktorý vznikol v rokoch 1941–1943 v švajčiarskom armádnom šifrovacom centre ako vylepšená verzia známej Enigmy. Jeho práca v oblasti geometrie začala po roku 1935 po stretnutí s W. J. E. Blaschkem v Hamburgu. V roku 1957 publikoval knihu *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, ktorá sa stala základom pre Minkovského funkcionály používané v matematickej morfológii.



Príloha č.2: Výpočet integrálu hadwigerovej funkcie v tvare

$$\int_0^{\infty} \frac{na}{\sqrt{\pi x^3}} \cdot \exp\left\{nac - \left(\frac{n^2 a^2}{x} + bx\right)\right\} dx$$

Ukážeme, že

$$\int_0^{\infty} \frac{na}{\sqrt{\pi x^3}} \cdot \exp\left\{nac - \left(\frac{n^2 a^2}{x} + bx\right)\right\} dx = \operatorname{sgn}(a) \cdot \exp\{na(c - 2\sqrt{b})\}$$

$$f_n(x) dx = \frac{na}{\sqrt{\pi x^3}} \cdot \exp\left\{nac - \left(\frac{n^2 a^2}{x} + bx\right)\right\} dx$$

$$\int_0^{\infty} f_n(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{na}{\sqrt{\pi x^3}} \cdot \exp\left\{nac - \left(\frac{n^2 a^2}{x} + bx\right)\right\} dx$$

$$\text{substitúcia: } \left| \begin{array}{lll} \sqrt{x} = z & x: 0 & x: \infty \\ dx = 2\sqrt{x} dz & z: 0 & z: \infty \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2na}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \exp\left\{nac - \left(\frac{n^2 a^2}{z^2} + bz^2\right)\right\} dz$$

$$\text{substitúcia: } \left| \begin{array}{lll} \frac{1}{z} = u & z: 0 & z: \infty \\ dz = -z^2 du & u: \infty & u: 0 \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2na}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left\{nac - \left(n^2 a^2 u^2 + \frac{b}{u^2}\right)\right\} du$$

$$= \frac{2na}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\{nac\} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left(n^2 a^2 u^2 + \frac{b}{u^2}\right)\right\} du$$

$$= \frac{2na}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\{nac\} \int_0^{\infty} \exp\left\{-n^2 a^2 \left(u^2 + \frac{b}{n^2 a^2 u^2}\right)\right\} du$$

$$\left| \left(u^2 + \frac{b}{n^2 a^2 u^2}\right) = \left(u - \frac{\sqrt{b}}{nau}\right)^2 + \frac{2\sqrt{b}}{na} \right|$$

$$= \frac{2na}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\{nac\} \int_0^{\infty} \exp\left\{-n^2 a^2 \left[\left(u - \frac{\sqrt{b}}{nau}\right)^2 + \frac{2\sqrt{b}}{na}\right]\right\} du$$

$$= \frac{2na}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\{nac\} \cdot \exp\{-2\sqrt{b}na\} \int_0^{\infty} \exp\left\{-n^2 a^2 \left(u - \frac{\sqrt{b}}{nau}\right)^2\right\} du$$

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-\beta^2\left(u - \frac{\alpha}{u}\right)^2\right\} du$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\beta^2\left(u - \frac{\alpha}{u}\right)^2\right\} du + \int_0^{\infty} \exp\left\{-\beta^2\left(u - \frac{\alpha}{u}\right)^2\right\} du \right]$$

$$I := \int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\beta^2\left(u - \frac{\alpha}{u}\right)^2\right\} du$$

$$\text{substitúcia: } \left| \begin{array}{l} u - \frac{\alpha}{u} = t \\ \frac{u^2 + \alpha}{u} du = dt \\ u = \frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha} \end{array} \right|$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2}{\left[\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 + \alpha} \exp\{-\beta^2 t^2\} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^-(t) \exp\{-\beta^2 t^2\} dt$$

$$J := \int_0^{\infty} \exp\left\{-\beta^2\left(u - \frac{\alpha}{u}\right)^2\right\} du$$

$$\text{substitúcia: } \left| \begin{array}{l} u - \frac{\alpha}{u} = t \\ \frac{u^2 + \alpha}{u} du = dt \\ u = \frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha} \end{array} \right|$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2}{\left[\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 + \alpha} \exp\{-\beta^2 t^2\} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^+(t) \exp\{-\beta^2 t^2\} dt$$

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-\beta^2\left(u - \frac{\alpha}{u}\right)^2\right\} du = \frac{1}{2} [I + J]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [f^-(t) + f^+(t)] \exp\{-\beta^2 t^2\} dt$$

$$[f^-(t) + f^+(t)] = \frac{\left[\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2}{\left[\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 + \alpha} + \frac{\left[\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2}{\left[\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 + \alpha}$$

$$\left[\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 * \left[\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 = \left[\frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{4} - \alpha\right]^2 = \alpha^2$$

$$\frac{2 * \left[\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 * \left[\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 + \alpha \left[\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 + \alpha \left[\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2}{\left[\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 * \left[\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 + \alpha \left[\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 + \alpha \left[\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 + \alpha^2}$$

$$= \frac{2 * \alpha^2 + \alpha \left[\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 + \alpha \left[\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2}{\alpha^2 + \alpha \left[\frac{t}{2} - \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 + \alpha \left[\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + \alpha}\right]^2 + \alpha^2} = 1$$

$$[f^-(t) + f^+(t)] = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\beta^2 t^2\} dt$$

$$\text{substitúcia: } \begin{cases} t = \frac{y}{\sqrt{\beta^2}} \\ dt = \frac{dy}{\sqrt{\beta^2}} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\beta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\beta^2\left(u - \frac{\alpha}{u}\right)^2\right\} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4\beta^2}}$$

V tomto prípade sa $\beta = na$, $\alpha = \frac{\sqrt{b}}{na}$, pričom integrál od α nezávisí.

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-n^2 a^2 \left(u - \frac{\sqrt{b}}{na u}\right)^2\right\} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n^2 a^2}}$$

Čiže po sumarizácii získavame

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f_n(x) dx &= \int_0^{\infty} \frac{na}{\sqrt{\pi x^3}} \cdot \exp\left\{nac - \left(\frac{n^2 a^2}{x} + bx\right)\right\} dx \\ &= \frac{2na}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\{nac\} \cdot \exp\{-2na\sqrt{b}\} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n^2 a^2}} \\ &= \operatorname{sgn}(a) \cdot \exp\{na(c - 2\sqrt{b})\} \end{aligned}$$

Príloha č.3: Výpočet integrálu hadwigerovej funkcie v tvare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab}{c} \cdot \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \cdot \left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\} dx$$

Ukážeme, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab}{c} \cdot \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \cdot \left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\} dx = a\sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab}{c} \cdot \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \cdot \left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\} dx$$

$$\text{substitúcia: } \left| \begin{array}{lll} \frac{c}{x} = t & x: 0 & x: \infty \\ dx = c dt & t: 0 & t: \infty \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{ab}{c} \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \cdot \left(\frac{1}{t} + t - 2\right)\right\} \cdot c dt$$

$$= \int_0^{\infty} ab \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \cdot \left(\frac{1}{t} + t - 2\right)\right\} dt$$

$$\text{substitúcia: } \left| \begin{array}{lll} \sqrt{t} = u & t: 0 & t: \infty \\ dt = 2\sqrt{t} du & u: 0 & u: \infty \end{array} \right|$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\infty} ab \cdot \left(\frac{1}{u^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \cdot \left(\frac{1}{u^2} + u^2 - 2\right)\right\} \cdot u du$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\infty} ab \cdot (u^{-2})^{\frac{3}{2}} u \cdot \exp\left\{-b^2 \cdot \left(\frac{1}{u^2} + u^2 - 2\right)\right\} du$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\infty} ab \frac{1}{u^2} \cdot \exp\left\{-b^2 \cdot \left(\frac{1}{u^2} + u^2 - 2\right)\right\} du$$

$$\text{substitúcia: } \left| \begin{array}{lll} \frac{1}{u} = z & u: 0 & u: \infty \\ du = -u^2 dz & z: \infty & z: 0 \end{array} \right|$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\infty} abz^2 \cdot \exp\left\{-b^2 \cdot \left(\frac{1}{z^2} + z^2 - 2\right)\right\} \cdot \frac{1}{z^2} dz$$

$$= 2 ab \cdot \int_0^{\infty} \exp\left\{-b^2 \cdot \left(\frac{1}{z^2} + z^2 - 2\right)\right\} dz$$

$$= 2 ab \cdot \int_0^{\infty} \exp\left\{-b^2 \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)^2\right\} dz$$

$$= 2 ab \cdot J$$

$$J := \int_0^{\infty} \exp \left\{ -b^2 \cdot \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 \right\} dz$$

J je párna funkcia

$$\begin{aligned} J &:= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -b^2 \cdot \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 \right\} dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -b^2 \cdot \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 \right\} dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \exp \left\{ -b^2 \cdot \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 \right\} dz \right] \end{aligned}$$

Integrál J rozdelíme na dva integrály, J_1 a J_2

$$J := \frac{1}{2} \cdot [J_1 + J_2]$$

$\left(z - \frac{1}{z} \right)$ je prostá funkcia na intervale $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

$$J_1 = \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -b^2 \cdot \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 \right\} dz$$

$$\text{substitúcia : } \left| \begin{array}{lll} z - \frac{1}{z} = y & z: 0 & z: -\infty \\ dz = \frac{z^2}{z^2 + 1} dy & y: \infty & y: -\infty \end{array} \right|$$

$$\left| z - \frac{1}{z} = y \quad / \cdot z \right.$$

$$z^2 - yz - 1 = 0$$

$$\left(z - \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

$$\left(z - \frac{y}{2} \right)^2 = 1 + \frac{y^2}{4}$$

$$z - \frac{y}{2} = \pm \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}$$

$$z = \pm \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2}$$

$z \leq 0, y \in (-\infty, \infty)$, tým pádom berieme v úvahu zápornú hodnotu

$$\Rightarrow z = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2}$$

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b^2 y^2) \cdot \frac{\left(-\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2}\right)^2}{\left(-\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2}\right)^2 + 1} dy$$

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b^2 y^2) \cdot f^-(y) dy$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} \exp\left\{-b^2 \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right)^2\right\} dz$$

$$\text{substitúcia : } \left| \begin{array}{lll} z - \frac{1}{z} = y & z: 0 & z: \infty \\ dz = \frac{z^2}{z^2 + 1} dy & y: -\infty & y: \infty \end{array} \right|$$

$$\left| z - \frac{1}{z} = y \quad / \cdot z \right.$$

$$\left(z - \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

$$\left(z - \frac{y}{2} \right)^2 = 1 + \frac{y^2}{4}$$

$$z - \frac{y}{2} = \pm \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}$$

$$z = \pm \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2}$$

$z \geq 0, y \in (-\infty, \infty)$, tým pádom berieme v úvahu kladú hodnotu

$$\Rightarrow z = \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2}$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b^2 y^2) \cdot \frac{\left[\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2}\right]^2}{\left[\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2}\right]^2 + 1} dy$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b^2 y^2) \cdot f^+(y) dy$$

$$J := \frac{1}{2} \cdot [J_1 + J_2]$$

$$J = \frac{1}{2} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} (f^-(y) + f^+(y)) \exp(-b^2 y^2) \cdot dy \right]$$

$$[f^-(y) + f^+(y)] = \frac{\left[-\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2}{\left[-\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 + 1} + \frac{\left[\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2}{\left[\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 + 1}$$

$$\left[-\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 * \left[\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 =$$

$$\left[\frac{y^2}{4} + 1 - y \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y^2}{4} \right] * \left[\frac{y^2}{4} + 1 + y \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y^2}{4} \right] =$$

$$\left[1 - y \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y^2}{2} \right] * \left[1 + y \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y^2}{2} \right] = 1$$

$$\frac{\left[-\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 * \left[\left[\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 + 1 \right] + \left[\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 * \left[\left[-\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 + 1 \right]}{\left[\left[\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 + 1 \right] * \left[\left[-\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 + 1 \right]}$$

$$= \frac{1 + \left[-\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 + 1 + \left[\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2}{1 + \left[\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 + \left[-\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 + 1}$$

$$= \frac{2 + \left[-\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 + \left[\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2}{2 + \left[-\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2 + \left[\sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \right]^2} = 1$$

$$[f^-(y) + f^+(y)] = 1$$

$$J = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b^2 y^2) dy$$

$$\text{substitúcia : } \left| \begin{array}{lll} y^2 = \frac{v^2}{2b^2} & y: -\infty & y: \infty \\ dy = \frac{1}{\sqrt{2}|b|} dv & v: -\infty & v: \infty \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-b^2 \frac{v^2}{2b^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2|b|}} dv \\
&= \frac{1}{2|b|} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dv \\
&= \frac{1\sqrt{\pi}}{2|b|} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} dv \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} dv
\end{aligned}$$

je distribučná funkcia normálneho rozdelenia $N(0, 1)$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2|b|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab}{c} \cdot \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \cdot \left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\} dx = 2ab \cdot J = 2ab \frac{\sqrt{\pi}}{2|b|} = a\sqrt{\pi}$$

Nakoľko b je kladný parameter, absolútnu hodnotu písať nemusím, čím získavame konečný výsledok v tvare:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab}{c} \cdot \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-b^2 \cdot \left(\frac{c}{x} + \frac{x}{c} - 2\right)\right\} dx = a\sqrt{\pi}$$

Príloha č.4a: Hodnoty vekovo špecifických mier plodnosti pre roky 1980 – 1990

	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
15	0,0025347	0,0026120	0,0027524	0,0029219	0,0035824	0,0035381	0,0034358	0,0028091	0,0029287	0,0026686	0,0028610
16	0,0113171	0,0093786	0,0118823	0,0118823	0,0116645	0,0142572	0,0121390	0,0129380	0,0102467	0,0110692	0,0104178
17	0,0278386	0,0269434	0,0294878	0,0299953	0,0313395	0,0347201	0,0323446	0,0307000	0,0294577	0,0287087	0,0273551
18	0,0668888	0,0635867	0,0665576	0,0659247	0,0688806	0,0708587	0,0730782	0,0766237	0,0720205	0,0697298	0,0692097
19	0,1311588	0,1281384	0,1269262	0,1327555	0,1334256	0,1321264	0,1347347	0,1366987	0,1392808	0,1357557	0,1321346
20	0,1909823	0,1835946	0,1907975	0,1867813	0,1877523	0,1879008	0,1781296	0,1813493	0,1793831	0,1740303	0,1770616
21	0,2135699	0,2143588	0,2172290	0,2188320	0,2141727	0,2170969	0,2062965	0,1976808	0,1944989	0,1933056	0,2016459
22	0,2202580	0,2169164	0,2205890	0,2202229	0,2180186	0,2146994	0,2142158	0,2043566	0,2055387	0,1985515	0,1934893
23	0,2090183	0,2045022	0,2030739	0,2028770	0,2044611	0,2089472	0,1991307	0,1933444	0,1932554	0,1878863	0,1897748
24	0,1900625	0,1891701	0,1881340	0,1851843	0,1880705	0,1885723	0,1864852	0,1802344	0,1800228	0,1734712	0,1745504
25	0,1720564	0,1693507	0,1682024	0,1701548	0,1670134	0,1682561	0,1674582	0,1604176	0,1613337	0,1573153	0,1540712
26	0,1487845	0,1488082	0,1481942	0,1460129	0,1460589	0,1443445	0,1404994	0,1402745	0,1442081	0,1322709	0,1360783
27	0,1290077	0,1301576	0,1236826	0,1250680	0,1247609	0,1218972	0,1202032	0,1175392	0,1233064	0,1174639	0,1150408
28	0,1110648	0,1070973	0,1074152	0,1084028	0,1039156	0,1041075	0,1012136	0,0987356	0,0975323	0,0978554	0,0968346
29	0,0924422	0,0923059	0,0918923	0,0872065	0,0879229	0,0856077	0,0868851	0,0814056	0,0794586	0,0790314	0,0806148
30	0,0766890	0,0775876	0,0767744	0,0742208	0,0731451	0,0734655	0,0687362	0,0672502	0,0668069	0,0653680	0,0666650
31	0,0640895	0,0655094	0,0612747	0,0631019	0,0611659	0,0595294	0,0609428	0,0547983	0,0582536	0,0553028	0,0542191
32	0,0525564	0,0515185	0,0504736	0,0510930	0,0514299	0,0494756	0,0450040	0,0461748	0,0451579	0,0445697	0,0456081
33	0,0456368	0,0433104	0,0416723	0,0427147	0,0406500	0,0404189	0,0391139	0,0383004	0,0397693	0,0367222	0,0359988
34	0,0348070	0,0371659	0,0362929	0,0355683	0,0334937	0,0331669	0,0339808	0,0309259	0,0312661	0,0299131	0,0317068
35	0,0294767	0,0309061	0,0265980	0,0288530	0,0268597	0,0275721	0,0254722	0,0246737	0,0261443	0,0242151	0,0247416
36	0,0246184	0,0231053	0,0222156	0,0222786	0,0207732	0,0210856	0,0202254	0,0183113	0,0189397	0,0194462	0,0175319
37	0,0181912	0,0181258	0,0166001	0,0171638	0,0166353	0,0166213	0,0154448	0,0155459	0,0140960	0,0141014	0,0142078
38	0,0121607	0,0145963	0,0142042	0,0130597	0,0115228	0,0124495	0,0122086	0,0113007	0,0116073	0,0105944	0,0110203
39	0,0094516	0,0095975	0,0094053	0,0096545	0,0089768	0,0085255	0,0080338	0,0085012	0,0074204	0,0083277	0,0082958
40	0,0082587	0,0072156	0,0059971	0,0060285	0,0064020	0,0062870	0,0053833	0,0055839	0,0053090	0,0054519	0,0058134
41	0,0055786	0,0045105	0,0047756	0,0043167	0,0045456	0,0032409	0,0034846	0,0033622	0,0032190	0,0032969	0,0033433
42	0,0038402	0,0035677	0,0035673	0,0028778	0,0026638	0,0024345	0,0028415	0,0022826	0,0019013	0,0018089	0,0026380
43	0,0021683	0,0020630	0,0018608	0,0017341	0,0012160	0,0013874	0,0013594	0,0011864	0,0014130	0,0013707	0,0010273
44	0,0013040	0,0012941	0,0011284	0,0009143	0,0008159	0,0005922	0,0006257	0,0007336	0,0005777	0,0005397	0,0007043
45	0,0004000	0,0005000	0,0005000	0,0003000	0,0003000
46	0,0002000	0,0000000	0,0002000	0,0001000	0,0002000
47	0,0000000	0,0001000	0,0001000	0,0001000	0,0001000
48	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
49	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0001000

Príloha č.4b: Hodnoty vekovo špecifických mier plodnosti pre roky 1991 – 2000

	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
15	0,003884	0,003888	0,003732	0,003576	0,003564	0,003466	0,003645	0,003862	0,003997	0,003417
16	0,013818	0,012714	0,012013	0,010545	0,009521	0,009669	0,010986	0,009657	0,010347	0,009400
17	0,031968	0,031396	0,030516	0,024186	0,020488	0,020818	0,020148	0,020578	0,020254	0,018782
18	0,076774	0,074126	0,068343	0,052580	0,044889	0,040946	0,037796	0,035873	0,033837	0,033416
19	0,136768	0,133421	0,127527	0,101490	0,083251	0,075316	0,066827	0,060226	0,056811	0,053137
20	0,182205	0,172375	0,159275	0,131025	0,112955	0,099614	0,089440	0,080357	0,071547	0,068636
21	0,190057	0,185734	0,169978	0,146216	0,128418	0,115867	0,101783	0,092971	0,085941	0,076143
22	0,191327	0,184525	0,177461	0,143986	0,130267	0,121548	0,113189	0,100862	0,093671	0,086723
23	0,182092	0,177798	0,165965	0,144627	0,128123	0,121009	0,116256	0,110028	0,099598	0,091376
24	0,165967	0,161112	0,161430	0,132345	0,123167	0,117886	0,118075	0,112084	0,102165	0,097686
25	0,150149	0,148966	0,143574	0,122338	0,114478	0,113008	0,108544	0,109420	0,105296	0,100922
26	0,130387	0,125574	0,128495	0,109566	0,103789	0,103291	0,106022	0,100093	0,097906	0,098868
27	0,109477	0,104686	0,107845	0,097555	0,089574	0,092482	0,091649	0,089319	0,088810	0,089860
28	0,091945	0,089372	0,086465	0,082322	0,080526	0,079085	0,079236	0,077287	0,083750	0,079474
29	0,076656	0,076425	0,073823	0,066605	0,065224	0,067687	0,066196	0,071722	0,069817	0,069181
30	0,065390	0,062838	0,063909	0,058975	0,056772	0,055224	0,058083	0,058161	0,060267	0,061069
31	0,052515	0,051089	0,054310	0,050662	0,045780	0,047343	0,048387	0,049812	0,049210	0,052476
32	0,042313	0,043041	0,041507	0,040129	0,037830	0,039614	0,039690	0,039253	0,043608	0,042727
33	0,035718	0,032920	0,035598	0,033959	0,032393	0,031756	0,033158	0,034388	0,032683	0,034676
34	0,030139	0,028845	0,029013	0,026888	0,027188	0,026428	0,027412	0,028779	0,028289	0,029264
35	0,023194	0,022429	0,023888	0,021880	0,021645	0,023825	0,023249	0,021636	0,023324	0,024227
36	0,018489	0,018292	0,017630	0,018069	0,016250	0,017396	0,018874	0,019099	0,019009	0,018906
37	0,014789	0,014945	0,015341	0,013801	0,013539	0,014375	0,014803	0,014806	0,014203	0,015614
38	0,010515	0,011576	0,012060	0,011763	0,011113	0,010605	0,011382	0,010832	0,011797	0,011650
39	0,007686	0,008868	0,007423	0,009186	0,007230	0,008266	0,007998	0,007942	0,008216	0,008987
40	0,006099	0,005282	0,005980	0,005623	0,005320	0,005648	0,006162	0,006000	0,005477	0,006497
41	0,003517	0,004593	0,003602	0,003751	0,003941	0,002803	0,003345	0,003425	0,004094	0,003713
42	0,002298	0,002796	0,002865	0,002380	0,002353	0,002235	0,002455	0,002749	0,002537	0,002764
43	0,001818	0,001858	0,001593	0,001544	0,001739	0,001381	0,001047	0,001405	0,001435	0,001529
44	0,000792	0,000716	0,000647	0,000786	0,000711	0,000692	0,000643	0,000525	0,000540	0,000602
45	0,000300	0,000209	0,000303	0,000440	0,000367	0,000221	0,000359	0,000382	0,000311	0,000447
46	0,000200	0,000066	0,000150	0,000197	0,000000	0,000184	0,000148	0,000168	0,000096	0,000024
47	0,000100	0,000033	0,000000	0,000061	0,000056	0,000166	0,000105	0,000049	0,000000	0,000024
48	0,000000	0,000000	0,000033	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000026	0,000025	0,000024
49	0,000000	0,000000	0,000034	0,000034	0,000000	0,000031	0,000000	0,000000	0,000000	0,000025

Príloha č.4c: Hodnoty vekovo špecifických mier plodnosti pre roky 2001 – 2010

	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
15	0,003301	0,003579	0,003669	0,003606	0,004186	0,004254	0,003806	0,004095	0,004361	0,004631
16	0,009041	0,008778	0,009588	0,010883	0,009955	0,010609	0,010662	0,011798	0,011779	0,011920
17	0,019307	0,017237	0,016973	0,018495	0,018693	0,017375	0,019320	0,021167	0,019978	0,022060
18	0,028920	0,029845	0,026908	0,027230	0,027720	0,027521	0,029121	0,029027	0,030657	0,030797
19	0,044159	0,045682	0,043431	0,038806	0,038123	0,039273	0,038200	0,039372	0,039240	0,040433
20	0,056082	0,054746	0,052972	0,053340	0,046429	0,045729	0,044938	0,047149	0,047705	0,045718
21	0,066515	0,062612	0,058726	0,059092	0,054426	0,049971	0,048398	0,048811	0,050915	0,049424
22	0,074149	0,068318	0,061227	0,062549	0,060643	0,056814	0,051387	0,053147	0,057367	0,053042
23	0,082439	0,075654	0,071922	0,070726	0,068200	0,062607	0,059863	0,058541	0,058865	0,055458
24	0,086224	0,080567	0,077692	0,078223	0,074595	0,067444	0,064955	0,065279	0,065987	0,062611
25	0,093132	0,090370	0,087164	0,087400	0,082580	0,074922	0,073144	0,073432	0,079054	0,070920
26	0,091531	0,087826	0,090558	0,089726	0,086411	0,085058	0,079813	0,084653	0,086115	0,083824
27	0,086417	0,086842	0,087615	0,090205	0,091286	0,086253	0,085605	0,087537	0,093503	0,088457
28	0,078220	0,080029	0,085884	0,088313	0,092459	0,090752	0,090549	0,090840	0,096691	0,096564
29	0,069663	0,070756	0,074311	0,080404	0,087348	0,085616	0,087076	0,092816	0,100942	0,096296
30	0,060381	0,062709	0,068523	0,073889	0,076386	0,081923	0,082354	0,090723	0,097402	0,097068
31	0,048323	0,055215	0,056825	0,061924	0,069076	0,070711	0,075525	0,080361	0,088101	0,089947
32	0,043855	0,043116	0,049056	0,054016	0,057088	0,061774	0,065884	0,073020	0,079283	0,080706
33	0,035084	0,036842	0,040275	0,042625	0,048281	0,050238	0,054238	0,060892	0,068358	0,068044
34	0,028498	0,029782	0,033304	0,035918	0,037450	0,042265	0,046372	0,051289	0,055472	0,061738
35	0,024373	0,024210	0,026511	0,028710	0,030621	0,034718	0,036857	0,040105	0,046404	0,049824
36	0,018551	0,020001	0,022327	0,023655	0,025431	0,026899	0,028830	0,033118	0,039660	0,039137
37	0,014211	0,016128	0,016434	0,017559	0,020448	0,020882	0,023913	0,024701	0,026913	0,030887
38	0,011444	0,011502	0,011775	0,013944	0,014873	0,015557	0,016835	0,019357	0,021885	0,021515
39	0,008488	0,009537	0,009456	0,010215	0,011473	0,011148	0,011812	0,014658	0,015624	0,017505
40	0,006514	0,006399	0,006287	0,007396	0,007340	0,007760	0,008364	0,009077	0,010696	0,011949
41	0,004044	0,004177	0,004018	0,004710	0,004980	0,005158	0,005759	0,005998	0,007726	0,008042
42	0,002364	0,002491	0,002661	0,003337	0,002846	0,003048	0,003598	0,003565	0,004661	0,004646
43	0,001392	0,001043	0,001924	0,002222	0,001552	0,001398	0,001965	0,002427	0,002442	0,002599
44	0,000826	0,000831	0,000740	0,000754	0,001268	0,000922	0,001135	0,001423	0,001934	0,001397
45	0,000302	0,000331	0,000392	0,000204	0,000626	0,000467	0,000369	0,000555	0,000674	0,000811
46	0,000189	0,000140	0,000142	0,000172	0,000026	0,000235	0,000312	0,000264	0,000238	0,000234
47	0,000048	0,000047	0,000047	0,000071	0,000123	0,000128	0,000105	0,000182	0,000106	0,000133
48	0,000024	0,000048	0,000024	0,000000	0,000024	0,000025	0,000051	0,000079	0,000104	0,000080
49	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000070	0,000000	0,000099	0,000181	0,000053	0,000026

Zoznam použitej literatúry:

- BLEHA, B – VAŇO, B. 2007. *Prognóza vývoja obyvateľstva SR do roku 2025*, INFOSTAT, Výskumné demografické centrum, Bratislava, 2007
- HERMANOVÁ, Z. 2010. Bakalárska práca: *Modelovanie špecifických mier a ich zmien v čase*, FMFI UK, Bratislava, 2010.
- KALIBOVÁ, K - PAVLÍK, Z – VODÁKOVÁ, A. 1993. *Demografie (nejen) pro demografy*. Praha : Sociologické nakladatelství a sociologický ústav ČR, 1993. ISBN 80-901424-2-7
- KEYFITZ, N. 1977. *Introduction to the Mathematics of Population with Revisions*. Addison – Wesley publishing company. Ontario, 1977.
- LAMOŠ, F. 1979. *Úvod do teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky*. Bratislava : Univerzita Komenského v Bratislave, 1979
- PASTOR, K. 1998. *Druhá demografická revolúcia*. Slávnostná konferencia 30 Rokov Slovenskej štatistickej a demografickej spoločnosti, Bratislava 1998. Zborník. SŠDS Bratislava, s. 34 - 36.
- PAVLÍK, Z – RYCHTAŘÍKOVÁ, Z – ŠUBRTOVÁ, A. 1986. *Základy demografie*. Académia Praha 1986
- PERISTERA, P – KOSTAKI, A. 2007. *Modeling fertility in modern populations* Demographic Research, Volume 16, Germany, 2007
Dostupné aj na internete: <http://www.demographic-research.org/Volumes/Vol16/6/>
s. 141 – 194

- PETRIOLI, L – „Prodemog 3.0 – Demographic software for Windows“,
EMMCI-SIENA-ITALY, 2000
Spracovanie na základe spomínaného, dostupné aj na internete:
<http://www.population.it/HADWIG.pdf>
- PHILIPOV, D – LIEFBROER, A – BILLARI, F. 2006. *Vienna Yearbook of Population Research* : Special Issue on „Postponement of Childbearing in Europe“. Vienna: Vienna Institute of Demography, 2006.
ISBN 3-7001-3808-3, 978-3-7001-3808-2, ISSN 1728-4414, s. 115 – 151.
- VAŇO, B - JURČOVÁ, D - MÉSZÁROS, J. 2003. *Základy demografie*. Bratislava : Občianske združenie Sociálna práca, 2003.
ISBN 80-968927-3-8.
- ZVÁRA, K. – ŠTĚPÁN, J. 2001. *Pravděpodobnost a matematická Statistika*. Praha : MATFYZPRESS – Vydavatelství Matematicko – fyzikální fakulty Karlovy Univerzity, 2001. ISBN 80-2240736-4.

Doplňujúca literatúra :

- ANDĚL, J. 2002. *Základy matematické statistiky*. Praha : MATFYZPRESS –
– Vydavatelství Matematicko – fyzikální fakulty Karlovy Univerzity, 2002.
- JURČOVÁ, D. 2002. *Krátky slovník základných demografických pojmov*.
Miesto vydania : Inštitút informatiky a štatistiky, Bratislava, 2002. Akty. ISBN.