

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ODHAD VALUE-AT-RISK PRE PORTFÓLIO S VIACERÝMI
RIZIKOVÝMI FAKTORMI

Diplomová práca

Bratislava 2012

Bc. Peter Konečný

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ODHAD VALUE-AT-RISK PRE PORTFÓLIO S VIACERÝMI
RIZIKOVÝMI FAKTORMI

Diplomová práca

Štúdijný program: Ekonomická a finančná matematika
Štúdijný odbor: Aplikovaná matematika 1114
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky
Školiteľ: Ing. Mgr Pavol Jurča, PhD.

Bratislava 2012

Bc. Peter Konečný



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Peter Konečný
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Odhad Value-at-Risk pre portfólio s viacerými rizikovými faktormi

Cieľ: Diplomová práca sa bude zaoberať viacerými štatistickými modelmi ktoré možno využiť pri riadení rizík portfólia finančných nástrojov. Cieľom je predovšetkým ich funkčná implementácia pre (relatívne veľké) portfóliá finančných nástrojov a komparatívna analýza výhodnosti a nevýhodnosti týchto prístupov založená na ich dobrom pochopení.

Vedúci: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD.

Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum zadania: 13.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím citovaných zdrojov a za odborného vedenia môjho vedúceho diplomovej práce.

.....
Bc. Peter Konečný

Podakovanie

Týmto by som sa chcel podakovať vedúcemu mojej diplomovej práce Ing. Mgr. Pavlovi Jurčovi, PhD. za jeho cenné rady a pripomienky, ktoré mi počas odborného vedenia poskytol.

Abstrakt

KONEČNÝ, Peter, Bc.: Odhad Value-at-Risk pre portfólio s viacerými rizikovými faktormi [Diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky. Vedúci diplomovej práce: Ing. Mgr Pavol Jurča, PhD. Bratislava: FMFI UK, 2012. 65 s.

Práca sa venuje problematike odhadovania jednoduchovej Value-at-Risk (VaR) pre portfólio s veľkým počtom rizikových faktorov. Primárnym cieľom práce je teoreticky definovať a empiricky otestovať vhodné metódy na predikciu VaR pre portfólio s veľkým počtom rizikových faktorov. K odhadu VaR použijeme metódu historickej simulácie, metódu filtrovanej historickej simulácie a metódou dynamického faktorového modelu (DFM), kde k modelovaniu volatility procesu používame metódu viacrozmerného GARCH-u s dynamickými podmienenými koreláciami (DCC). Jednotlivé metódy sú otestované na portfóliu zloženom z akcií, dlhopisov, s vplyvom výmenných kurzov a pomocou spätného testovania je vybraný najvhodnejší typ metódy preň. Najlepšie výsledky v prípade predikcie 99% jednoduchovej VaR dosiahla metóda filtrovanej historickej simulácie a pre predikciu 95% jednoduchovej VaR sa zdá byť najvhodnejšia metóda DFM-DCC.

Kľúčové slová: Value-at-Risk (VaR), metóda historickej simulácie, metóda filtrovanej historickej simulácie, DFM-DCC metóda

Abstract

KONEČNÝ, Peter, Bc.: Value-at-Risk for large portfolios [Master thesis]. Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics; Department of Applied Mathematics. Master thesis supervisor: Ing. Mgr Pavol Jurča, PhD. Bratislava: FMFI UK, 2012. 65 p.

This thesis deals with Value-at-Risk (VaR) with one day horizon for large portfolios. Our primary goal is to define and to empirically test appropriate methods of prediction one-day VaR for large portfolios. We use the method of historical simulation, the filtered simulation method and the dynamic factor model method (DFM) where time-varying volatilities are modeled by using DCC (Dynamic Conditional Correlation) GARCH model. Each method is tested on portfolio that consists of stocks, bonds and exchange rates. We use backtesting procedures to select the most appropriate method for tested portfolio. The best results were achieved by the filtered historical simulation method for one-day 99% VaR prediction and by the DFM-DCC method for one-day 95% VaR prediction.

Keywords: Value-at-Risk (VaR), historical simulation method, filtered historical simulation method, DFM-DCC method

Obsah

Úvod	1
1 Value at Risk	2
2 Metóda historickej simulácie	4
3 Metóda filtrovanej historickej simulácie	5
3.1 Prispôsobenie historických dát súčasnej situácii na trhu	11
3.2 Simulovanie vývoja X v čase $T + 1$	11
4 DFM-DCC metodológia	12
5 Spätné testovanie	20
5.1 Kupiecov test nepodmieneného krytia	20
5.2 Christoffersenov test podmieneného krytia	21
5.3 Základné štatistické ukazovatele pre VaR_{T+1}^ϕ	22
6 Empirická analýza	24
6.1 Aplikácia metódy historickej simulácie	27
6.2 Aplikácia metódy filtrovanej historickej simulácie	28
6.2.1 Vyhodnotenie úspešnosti metódy filtrovanej historickej simulácie	30
6.3 Aplikácia metódy DFM-DCC	33
6.3.1 Vyhodnotenie úspešnosti metódy DFM-DCC	35
6.4 Porovnanie jednotlivých modelov	37
Záver	39
Literatúra	40
Prílohy	43

Zoznam obrázkov

1	Jednodenné výnosy/straty $P\&L_t$ testovacieho portfólia	27
2	Predikované 99% VaR_{T+1} FHS metódou ($n=500$) prispôbením historických dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom t-rozdelenia . . .	32
3	Predikované 95% VaR_{T+1} FHS metódou ($n=750$) prispôbením historických dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom N-rozdelenia . . .	33
4	Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} DFM-DCC metódou ($k = 2, p = 0$) a rastúcim n	36
5	Porovnanie predikcie 99% a 95% VaR_{T+1} metódou filtrovanej simulácie a DFM-DCC metódou	38
6	Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} metódou historickej simulácie	43
7	Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} FHS metódou prispôbením historických dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom N-rozdelenia	44
8	Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} FHS metódou prispôbením historických dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom t-rozdelenia	45
9	Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} FHS metódou simulovania vývoja jednotlivých X v čase $T + 1$ s predpokladom N-rozdelenia	46
10	Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} predikované FHS metódou simulovania vývoja jednotlivých X v čase $T + 1$ s predpokladom t-rozdelenia	47
11	Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} DFM-DCC metódou ($k = 2, p = 0$)	48
12	Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} DFM-DCC metódou ($k = 3, p = 0$)	49
13	Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} DFM-DCC metódou ($k = 4, p = 0$)	50
14	Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} DFM-DCC metódou ($k = 2, p = 1$)	51
15	Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} DFM-DCC metódou ($k = 2, p = 0$; $k = 2, p = 1$) pre $n \rightarrow \infty$	52

Zoznam tabuliek

1	Deskriptívne štatistiky pre $P\&L_t$ portfólia počas obdobia 27.1.2006-10.2.2012 (1508 dní)	26
2	Spätné testovanie pre 99% VaR_{T+1} predikované modelmi FHS	31
3	Hodnoty poradných štatistík pre 99% VaR_{T+1} predikované modelmi FHS	32
4	Spätné testovanie pre 95% VaR_{T+1} predikované modelmi FHS	32
5	Hodnoty poradných štatistík pre 95% VaR_{T+1} predikované modelmi FHS	33
6	Tabuľka odhadov parametra r v DFM-DCC metóde pomocou informačných kritérií IC_1, IC_2, IC_3	34
7	Parametre metódy DFM-DCC	34
8	Podiel vysvetľovanej variancie procesu $\{Y_t\}_{t=1}^{2258}$	35
9	Spätné testovanie pre 99% VaR_{T+1} predikované modelmi DFM-DCC .	35
10	Spätné testovanie pre 95% VaR_{T+1} predikované modelmi DFM-DCC .	36
11	Spätné testovanie pre 99% a 95% VaR_{T+1} predikované modelom DFM-DCC ($k = 2, p = 0$) s rastúcou veľkosťou okna n	36
12	Spätné testovanie pre 99% VaR_{T+1} predikované vybranými modelmi . .	37
13	Poradné štatistiky predikovanej 99% VaR_{T+1} pre definované modely . .	37
14	Spätné testovanie pre 95% VaR_{T+1} predikované vybranými modelmi . .	38
15	Poradné štatistiky predikovanej 95% VaR_{T+1} pre definované modely . .	38
16	Spätné testovanie pre 99% VaR_{T+1} predikované modelmi HS	43
17	Spätné testovanie pre 95% VaR_{T+1} predikované modelmi HS	43
18	Spätné testovanie pre 99% VaR_{T+1} predikované FHS metódou prispôsob. histor. dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom N-rozdelenia .	44
19	Spätné testovanie pre 95% VaR_{T+1} predikované FHS metódou prispôsob. histor. dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom N-rozdelenia .	44

20	Spätné testovanie pre 99% $VarR_{T+1}$ predikované FHS metódou prispôsob. histor. dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom t-rozdelenia .	45
21	Spätné testovanie pre 95% $VarR_{T+1}$ predikované FHS metódou prispôsob. histor. dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom t-rozdelenia .	45
22	Spätné testovanie pre 99% $VarR_{T+1}$ predikované FHS metódou simulovania vývoja jednotlivých X v čase $T + 1$ s predpokladom N-rozdelenia	46
23	Spätné testovanie pre 95% $VarR_{T+1}$ predikované FHS metódou simulovania vývoja jednotlivých X v čase $T + 1$ s predpokladom N-rozdelenia	46
24	Spätné testovanie pre 99% $VarR_{T+1}$ predikované FHS metódou simulovania vývoja jednotlivých X v čase $T + 1$ s predpokladom t-rozdelenia	47
25	Spätné testovanie pre 95% $VarR_{T+1}$ predikované FHS metódou simulovania vývoja jednotlivých X v čase $T + 1$ s predpokladom t-rozdelenia	47
26	Spätné testovanie pre 99% $VarR_{T+1}$ predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 0$	48
27	Spätné testovanie pre 95% $VarR_{T+1}$ predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 0$	48
28	Spätné testovanie pre 99% $VarR_{T+1}$ predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 3, p = 0$	49
29	Spätné testovanie pre 95% $VarR_{T+1}$ predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 3, p = 0$	49
30	Spätné testovanie pre 99% $VarR_{T+1}$ predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 4, p = 0$	50
31	Spätné testovanie pre 95% $VarR_{T+1}$ predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 4, p = 0$	50
32	Spätné testovanie pre 99% $VarR_{T+1}$ predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 1$	51
33	Spätné testovanie pre 95% $VarR_{T+1}$ predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 1$	51
34	Spätné testovanie pre 99% $VarR_{T+1}$ predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 0; k = 2, p = 1$ pre $n \rightarrow \infty$	52
35	Spätné testovanie pre 95% $VarR_{T+1}$ predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 0; k = 2, p = 1$ pre $n \rightarrow \infty$	52
36	Zoznam rizikových faktorov testovacieho portfólia	53

Úvod

Metóda Value-at-Risk (v doslovnom preklade „hodnota v riziku“) sa stala štandardným nástrojom pri meraní trhového rizika rôznych finančných inštitúcií. Problémom súčasnosti je nedostatok vhodných metód pre modelovanie Value-at-Risk (ďalej VaR) pre veľké portfólia, ktoré je náročné kvôli pomerne výraznej nelineárnej závislosti medzi rizikovými faktormi a ťažkosťami spojenými s veľkým počtom faktorov. V poslednom období poznačenom krízami (hypotekárna, dlhová) ešte vzrastá potreba zdokonaľovania už známych alebo definovania nových vhodných modelov VaR pre veľké portfólia. Cieľom práce je teoreticky zadefinovať a empiricky otestovať metódy odhadu hodnoty VaR v prípade portfólia s veľkým počtom rizikových faktorov.

V prvej časti diplomovej práce stručne definujeme jednoduchú VaR pre portfólio. Postupne popíšeme 3 prístupy k jeho predikcii. Najskôr uvedieme najjednoduchšiu a najpoužívanejšiu metódu historickej simulácie. Z nej vychádza metóda filtrovanej historickej simulácie, pričom k odhadu hodnoty jednoduchovej VaR používame 2 prístupy založené na predpoklade normálneho alebo studentovho rozdelenia náhodných zložiek. Metóda filtrovanej historickej simulácie je založená na modelovaní každého faktora ovplyvňujúceho hodnotu portfólia vhodným ARMA-GARCH modelom. Závislosti medzi faktormi sú zachytené empiricky na základe historických údajov. Poslednou metódou je dynamický faktorový model (DFM), kde k modelovaniu volatility procesu používame metódu viacrozmerného GARCH-u s dynamickými podmienenými koreláciami (DCC). Základná myšlienka DFM-DCC modelu spočíva v extrakcii malého počtu nezávislých latentných faktorov z veľkého počtu rizikových faktorov ovplyvňujúcich hodnotu portfólia. Všetky spomenuté metódy vychádzajú z minulých realizácií jednotlivých rizikových faktorov, preto je snahou nájsť aj najoptimálnejšiu šírku okna, t.j. počet realizácií z minulosti, ktoré využívame pri kalibrácii modelov. V tejto časti zadefinujeme aj testy, ktoré použijeme na selekciu najvhodnejšieho modelu.

V druhej časti nazvanej empirická analýza sú aplikované jednotlivé modely na portfólio s 58 rizikovými faktormi pozostávajúce z akcií, dlhopisov a s vplyvom výmenných kurzov. Detailne sú popísané výsledky odhadov VaR a spätných testov pre viacero typov modelov a prístupov, pričom v závere je uvedené konečné zhrnutie s ďalšími odporúčaniami.

Kapitola 1

Value at Risk

Nech $P\&L_{T+1}$ ¹ je jednodňový logaritmickej (≈ percentuálny) výnos (v prípade kladnej hodnoty) alebo strata (v prípade zápornej hodnoty) portfólia v čase $T + 1$ a I_T sú informácie o portfóliu známe v čase T . V tom prípade definujeme jednodňovú Value-at-Risk (ďalej VaR) na úrovni ϕ (hladina spoľahlivosti) ako:

$$VaR_{T+1}^{\phi} = \sup\{l \in \mathbb{R} : P(P\&L_{T+1} < l | I_T) \leq 1 - \phi\}, \quad \phi \in (0, 1), \quad (1.1)$$

t.j. jednodňová strata portfólia $P\&L$ bude väčšia v čase $T+1$ ako l s pravdepodobnosťou menšou alebo rovnou ako $(1 - \phi) \times 100\%$, pričom máme k dispozícii informácie z času I_T .

V práci sa zameriame na predikciu jednodňovej VaR na dvoch rôznych úrovniach $\phi = 0,99; 0,95$, t.j. 99%, 95%. Odhad jednodňovej 99% VaR sa využíva vo finančných inštitúciách kvôli požiadavke regulátora ohľadom kapitálovej primeranosti. Na druhej strane odhad jednodňovej VaR na úrovni 95% sa využíva skôr na interné účely v manažmente rizík.

Podľa definície jednodňovej VaR vo všeobecnosti hľadáme také l , ktoré v $\phi \times 100\%$ prípadoch neprekročí jednodňová strata portfólia $P\&L$ v čase $T + 1$.

Podstatné pri výpočte VaR_{T+1}^{ϕ} je odhadnúť rozdelenie $P\&L_{T+1}$ za podmienky I_T a vybrať jeho $(1 - \phi) \times 100\%$ kvantil ako VaR_{T+1}^{ϕ} .

$P\&L_t$ vypočítame ako:

$$P\&L_t = g(X_t, \theta_t), \quad (1.2)$$

kde X_t je vektor N logaritmickej zmien rizikových faktorov portfólia v čase $t \in \{1, \dots, T\}$ a θ_t je vektor časovo sa meniacich parametrov prislúchajúcich jednotlivým

¹Aramonte, Rodriguez, Wu (2011).

zložkám X_t , napr. pozície aktív v portfóliu alebo parametre oceňovacích funkcií.

Vo všeobecnosti definujeme vektor rizikových faktorov² $\{P_t\}_{t=1}^T$ (skrátene P_t) ako *vektorový* (N -rozmerný) *náhodný proces* na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$. Podobne definujeme jednotlivé zložky spomínaného vektorového procesu, t.j. $\{P_{i,t}\}_{t=1}^T$ (skrátene $P_{i,t}$) ako *náhodný proces* na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$. Keďže množina, z ktorej pochádza t ($t \in \{1, \dots, T\}$) je diskrétna, tak zavedieme pojem *časový rad* pre $\{P_{i,t}\}_{t=1}^T$.

Jednotlivé zložky vektora logaritmických zmien rizikových faktorov portfólia procesu $\{X_t\}_{t=1}^T$ (skrátene X_t) sú vyjadrené ako logaritmická zmena (log-diferencia) realizácií P_t v čase t a $t - 1$:

$$X_t = \begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ \vdots \\ X_{N,t} \end{bmatrix}, \quad X_{i,t} = \ln \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} = \ln P_{i,t} - \ln P_{i,t-1}, \quad (1.3)$$

kde $i \in \{1, \dots, N\}$.

Pri výpočte VaR_{T+1}^ϕ naviazaného na I_T predpokladáme, že θ_{T+1} je známa už v čase T . Náš problém určenia $P\&L_{T+1}$ pri I_T sa zmení podľa (1.2) na úlohu určenia $X_{T+1}|I_T$. Vo všeobecnosti sa používajú sa parametrické a neparametrické metódy odhadu rozdelenia X_{T+1} . Modely využívajúce dané metódy k následnej predikcii VaR_{T+1}^ϕ budeme nazývať VaR modely.

²Mikloška (2008).

Kapitola 2

Metóda historickej simulácie

V prípade portfólia s veľkým množstvom rizikových faktorov je metóda historickej simulácie štandardným nástrojom používaným pri výpočte hodnoty VaR. Daná metóda využíva realizácie logaritmických zmien rizikových faktorov z blízkej minulosti, aby predpovedala scenáre vývoja portfólia založené na empirickom rozdelení pravdepodobnosti.

Dôležité je určenie veľkosti okna n , t. j. koľko minulých realizácií $\{X_t\}_{t=T-n+1}^T$ použijeme pri výpočte rozdelenia X_{T+1} . S rastúcim n by za predpokladu stacionárneho rozdelenia logaritmických zmien jednotlivých faktorov mala vzrastať aj presnosť metódy. Predpoklad nebýva vždy splnený, a preto sa zaužívalo používanie $n = 250$ (približne 1 kalendárny rok) a násobky 250, aby sme nebrali do úvahy aj dáta z „príliš vzdialenej“ minulosti.

VaR_{T+1}^ϕ pri použití metódy historickej simulácie vypočítame nasledovne:

$$VaR_{T+1}^\phi = kvantil_{(1-\phi)} \left\{ g(X_{T-n+1}, \theta_{T+1}), \dots, g(X_{T-1}, \theta_{T+1}), g(X_T, \theta_{T+1}) \right\}, \quad (2.1)$$

na základe predpokladu, že θ_{T+1} už poznáme.

Výhodou metódy historickej simulácie¹ je „intuitívnosť“, ľahká interpretovateľnosť modelu a pomerne jednoduchá implementácia. Na druhej strane je prítomná nepresnosť metódy v prípade, že rozdelenie ziskov a strát nie je stacionárne počas obdobia n . Má tendenciu podceňovať trhové riziko v „príliš pokojnom“ období a preceňovať ho v období zvýšenej trhovej volatility.

¹Dowd (2002).

Kapitola 3

Metóda filtrovanej historickej simulácie

Metóda filtrovanej historickej simulácie bola prvýkrát popísaná v prácach Barone-Adesi, Giannopoulos, Vosper (1999, 2000). Snažili sa odstrániť nedostatky metódy historickej simulácie pomocou zapojenia predikovanej hodnoty volatility pre každú logaritmickú zmenu rizikového faktora v čase $T + 1$ ($\hat{\sigma}_{i,T+1}$) do procesu odhadu Var_{T+1}^{ϕ} . Výhodou metódy je, že každému $X_{i,t}$ nakalibruje vhodný ARMA-GARCH model, pomocou ktorého dokáže zachytiť aktuálnu trhovú situáciu.

Na začiatku určíme veľkosť okna n minulých realizácií logaritmických zmien jednotlivých rizikových faktorov portfólia, ktoré použijeme pri výpočte rozdelenia X_{T+1} . Časový rad použitý pri kalibrácii vhodného modelu pre logaritmickú diferenciu i -teho rizikového faktora:

$$\{X_{i,T-n+1}, X_{i,T-n+2}, \dots, X_{i,T-1}, X_{i,T}\}, \text{ t.j. } \{X_{i,t}\}_{t=T-n+1}^T, \quad (3.1)$$

pričom hodnota v čase T je hodnota k aktuálnemu dňu.

Na jednotlivé časové rady pripadajúce logaritmickým zmenám rizikových faktorov aplikujeme autoregresný model ARMA(m_{i1} , n_{i1}), ktorým modelujeme ich podmienenú strednú hodnotu. Ich podmienené variancie modelujeme pomocou GARCH (m_{i2} , n_{i2}).

$X_{i,t}$ vyjadrené pomocou podmienenej strednej hodnoty na základe informácií v čase $t - 1$ a náhodnej zložky má tvar:

$$X_{i,t} = E(X_{i,t}|I_{t-1}) + \varepsilon_{i,t}.^1 \quad (3.2)$$

¹Krátka (2006).

Kvôli skráteniu zápisu a lepšej prehľadnosti zavedieme $E(X_{i,t}|I_{t-1}) = \mu_{i,t}$. Potom dostávame nasledovný vzťah:

$$X_{i,t} = \mu_{i,t} + \varepsilon_{i,t}. \quad (3.3)$$

Podmienujú strednú hodnotu $\mu_{i,t}$ modelujeme ARMA(m_{i1} , n_{i1}) procesom:

$$X_{i,t} = \gamma_i + \sum_{j=1}^{m_{i1}} \alpha_{i,j} X_{i,t-j} + \sum_{j=1}^{n_{i1}} \beta_{i,j} \varepsilon_{i,t-j} + \varepsilon_{i,t}. \quad (3.4)$$

Náhodná zložka $\varepsilon_{i,t}$ má nasledovné vlastnosti:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,t} &= \sqrt{c_i} \sigma_{i,t} \psi_{i,t} \\ E(\varepsilon_{i,t}) &= 0 \\ E(\varepsilon_{i,t} \varepsilon_{i,s}) &= \begin{cases} 0 & t \neq s, \\ c_i \sigma_{i,t}^2 & t = s, \end{cases} \\ \psi_{i,t} &\sim i.i.d D(0, 1), \end{aligned} \quad (3.5)$$

kde $D(0,1)$ je centované štandardizované rozdelenie so strednou hodnotou 0 a varianciou 1.

Rovnica podmienenej variancie pre jednotlivé logaritmické zmeny rizikových faktorov:

$$\begin{aligned} Var(X_{i,t}|I_{t-1}) &= E((X_{i,t} - \mu_{i,t})^2|I_{t-1}) = E(\varepsilon_{i,t}^2|I_{t-1}) = Var(\varepsilon_{i,t}|I_{t-1}) \\ Var(\varepsilon_{i,t}|I_{t-1}) &= c_i \sigma_{i,t}^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

V prípade, predpokladu homoskedasticity je $Var(\varepsilon_{i,t}|I_{t-1}) = \sigma_i^2$, t.j. variancia náhodnej zložky je konštantná v čase. V prípade výnosov akcií tento predpoklad častokrát nezodpovedá realite. Preto predpokladáme, že $\sigma_{i,t}^2$ je rôzna v čase, t.j. hovoríme o heteroskedasticite variancie náhodnej zložky. Heteroskedasticitu modelujeme pomocou GARCH (m_{i2} , n_{i2}) modelu:

$$\sigma_{i,t}^2 = \eta_i + \sum_{j=1}^{m_{i2}} \omega_{i,j} \varepsilon_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^{n_{i2}} \delta_{i,j} \sigma_{i,t-j}^2. \quad (3.7)$$

GARCH(m_{i2} , n_{i2}) proces musí spĺňať podmienky:

$$\begin{aligned} \eta_i > 0, \delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \dots, \delta_{i,n_{i2}} \geq 0, \omega_{i,1}, \omega_{i,2}, \dots, \omega_{i,m_{i2}} \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{m_{i2}} \omega_{i,j} + c_i \sum_{j=1}^{n_{i2}} \delta_{i,j} < 1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Prvá podmienka z (3.8) zaručí kladnú hodnotu $\sigma_{i,t}^2$. Ďalšia zabezpečuje stacionaritu GARCH(m_{i2} , n_{i2}) procesu. V prípade potreby, nepodmienujú varianciu náhodnej zložky

vypočítame ako:

$$\sigma_i^2 = \frac{\eta_i}{1 + \sum_{j=1}^{m_{i2}} \omega_{i,j} \varepsilon_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^{n_{i2}} \delta_{i,j} \sigma_{i,t-j}^2}. \quad (3.9)$$

„Náhodnosť“ $\varepsilon_{i,t}$ zaistí $\psi_{i,t}$, ktoré je z $D(0, 1)$, t.j. centrovaneho štandardizovaného rozdelenia so strednou hodnotou 0 a varianciou 1. Pre potreby modelu filtrovanej historickej simulácie uvažujeme, že $D(0, 1)$ je:

1. Normálne rozdelenie - $N(0, 1)$

Predpokladajme, že logaritmické výnosy jednotlivých rizikových faktorov sú podmienené normálne rozdelené, t.j:

$$X_{i,t}|I_{t-1} \sim N(\mu_{i,t}, \sigma_{i,t}^2). \quad (3.10)$$

Hustota výnosov v tom prípade sleduje tiež podmienené normálne rozdelenie:

$$f(X_{i,t}|I_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{i,t}} \exp\left(-\frac{(X_{i,t} - \mu_{i,t})^2}{2\sigma_{i,t}^2}\right). \quad (3.11)$$

$\psi_{i,t}$ získame štandardizovaním podmieneného rozdelenia logaritmických zmien rizikových faktorov:

$$\frac{X_{i,t} - \mu_{i,t}}{\sigma_{i,t}} = \psi_{i,t} \sim N(0, 1). \quad (3.12)$$

c_i pre prípad podmieneného normálneho rozdelenia:

$$c_i = 1, \text{ pre } i = 1, \dots, N. \quad (3.13)$$

2. Studentovo rozdelenie $t(\mu, \rho, v)$

Predpokladáme, že logaritmické zmeny jednotlivých rizikových faktorov portfólia sledujú podmienené studentovo rozdelenie² s podmienenou strednou hodnotou $\mu_{i,t}$, škálou $\rho_{i,t}$ a v_i stupňami voľnosti:

$$X_{i,t}|I_{t-1} \sim t(\mu_{i,t}, \rho_{i,t}, v_i), \quad (3.14)$$

príčom jeho hustota je:

$$f(X_{i,t}|I_{t-1}) = \frac{\Gamma(\frac{v_i+1}{2})}{\Gamma(\frac{v_i}{2})} \left(\frac{\rho_{i,t}}{v_i\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\rho_{i,t}(X_{i,t} - \mu_{i,t})^2}{v_i}\right]^{-\frac{v_i+1}{2}}, \quad (3.15)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

²Güner, Rachev, Edelman, Fabozzi (2010).

Vlastnosti studentovho rozdelenia $t(\mu_{i,t}, \rho_{i,t}, v_i)$:

$$E(X_{i,t}|I_{t-1}) = \mu_{i,t} \text{ pre } v_i > 1, \quad (3.16)$$

$$Var(X_{i,t}|I_{t-1}) = \frac{1}{\rho_{i,t}} \frac{v_i}{v_i - 2} \text{ pre } v_i > 2. \quad (3.17)$$

Pre potreby modelu predpokladáme, že $v_i > 2$.

Vo vzťahu (4.16) nahradíme škálovací faktor $\rho_{i,t} = \frac{1}{\sigma_{i,t}^2}$:

$$\begin{aligned} Var(X_{i,t}|I_{t-1}) &= \frac{1}{\rho_{i,t}} \frac{v_i}{v_i - 2} = \sigma_{i,t}^2 \frac{v_i}{v_i - 2} \\ \Rightarrow Var(X_{i,t}|I_{t-1}) &= Var([\varepsilon_{i,t}|I_{t-1}] = c_i \sigma_{i,t}^2, \\ \text{kde } c_i &= \frac{v_i}{v_i - 2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Studentovo rozdelenie pre logaritmické zmeny jednotlivých rizikových faktorov je nasledovné:

$$f(X_{i,t}|I_{t-1}) = \frac{\Gamma(\frac{v_i+1}{2})}{(\Gamma\frac{v_i}{2})} \left(\frac{1}{v_i\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma_{i,t}} \left[1 + \frac{(X_{i,t} - \mu_{i,t})^2}{\sigma_{i,t}^2 v_i}\right]^{-\frac{v_i+1}{2}}. \quad (3.19)$$

Podmienené studentovo rozdelenie pre zložky $\psi_{i,t}$ získame centrovaním a štandardizovaním všeobecného studentovho rozdelenia:

$$E\left(\frac{X_{i,t} - \mu_{i,t}}{\sigma_{i,t}\sqrt{\frac{v_i}{v_i-2}}}|I_{t-1}\right) = E(\psi_{i,t}|I_{t-1}) = 0 \quad (3.20)$$

$$Var\left(\frac{X_{i,t} - \mu_{i,t}}{\sigma_{i,t}\sqrt{\frac{v_i}{v_i-2}}}|I_{t-1}\right) = Var(\psi_{i,t}|I_{t-1}) = 1 \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow f(\psi_{i,t}|I_{t-1}) = \frac{\Gamma(\frac{v_i+1}{2})}{\Gamma(\frac{v_i}{2})} \left(\frac{1}{(v_i-2)\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\psi_{i,t}^2}{v_i-2}\right]^{-\frac{v_i+1}{2}} \quad (3.22)$$

$$\Rightarrow \psi_{i,t} \sim t\left(0, \frac{v_i}{v_i-2}, v_i\right). \quad (3.23)$$

c_i pre podmienené studentovo rozdelenie:

$$c_i = \frac{v_i}{v_i - 2}. \quad (3.24)$$

V prípade, že pre stupeň voľnosti studentovho rozdelenia platí $v_i \rightarrow \infty$, potom sa tvar studentovho rozdelenia približuje k normálnemu rozdeleniu.

Pre oba vyššie uvedené typy podmienených rozdelení logaritmických zmien rizikových faktorov nakalibrujeme ARMA(m_{i1}, n_{i1})-GARCH(m_{i2}, n_{i2}) model. Základ metódy filtrovanej historickej simulácie spočíva vo vyfiltrovaní nezávislých a náhodne rozdelených

štandardizovaných zložiek $\hat{\psi}_{i,t}^{st}$:

$$\hat{\psi}_{i,t}^{st} = \frac{\hat{\varepsilon}_{i,t}}{\sqrt{c_i} \hat{\sigma}_{i,t}}, \quad (3.25)$$

teda $\hat{\psi}_{i,t}^{st}$ je štandardizované reziduum.

Pred ďalším pokračovaním potrebujeme overiť prítomnosť autokorelácie v štandardizovaných zložkách a ich štvorcov $\hat{\psi}_{i,t}^{st}$ použitím Ljung a Boxovho testu.³ Popíšeme postup pre test autokorelácie štandardizovaných zložiek⁴:

$$\begin{aligned} H_0 : & \text{štandardizované zložky sú nezávisle rozdelené} \\ & \text{vs.} \\ H_1 : & \text{štandardizované zložky nie sú nezávisle rozdelené} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Testovacia štatistika Q_i má tvar:

$$\begin{aligned} Q_i &= n(n+2) \sum_{k=1}^K \left(\frac{r_{i,k}^2}{n-k} \right) \\ r_{i,k} &= \frac{\sum_{t=k+1}^n (\hat{\psi}_{i,t}^{st} - \hat{\psi}_i^{st})(\hat{\psi}_{i,t+k}^{st} - \hat{\psi}_i^{st})}{\sum_{t=1}^n (\hat{\psi}_{i,t}^{st} - \hat{\psi}_i^{st})}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{aligned} \quad (3.27)$$

kde $r_{i,k}$ je koeficient autokorelácie k -teho rádu, K je najvyšší rad testovanej autokorelácie a $\hat{\psi}_i^{st}$ je priemerná hodnota $\{\hat{\psi}_{i,t}^{st}\}_{t=T-n+1}^T$.

Q_i štatistika má $\chi^2(m)$ rozdelenie. Hypotézu H_0 nezamietame v prípade, ak je hodnota štatistiky Q_i menšia alebo rovná ako kritická hodnota $\chi^2(m)$ pri danej hladine významnosti ω :

$$Q_i \leq F_{\chi^2}^{-1}(\omega; m). \quad (3.28)$$

Pre každé $X_{i,t}$ prijímame len model, kde sa neobjavil príznak autokorelácie štandardizovaných zložiek a ich štvorcov.

Pokračujeme naškálovaním štandardizovaných zložiek na súčasnú situáciu na trhu pre násobením $\hat{\sigma}_{i,T+1}$, ktorú získame zo vzťahu:

$$\hat{\sigma}_{i,T+1}^2 = \hat{\eta}_i + \sum_{j=1}^{m_{i2}} \hat{\gamma}_{i,j} \hat{\varepsilon}_{i,T+1-j}^2 + \sum_{j=1}^{n_{i2}} \hat{\delta}_{i,j} \hat{\sigma}_{i,T+1-j}^2. \quad (3.29)$$

³Berndt (1996); Box, Jenkins, Reinsel (1994).

⁴Pri overovaní autokorelácie štvorcov štandardizovaných zložiek postupujeme rovnako.

Preškáľovanie reziduí na súčasnú trhovú situáciu je nasledovné:

$$\hat{\varepsilon}_{i,t}^{T+1} = \hat{\psi}_{i,t}^{st} \sqrt{c_i} \hat{\sigma}_{i,T+1}. \quad (3.30)$$

Hodnota c_i v prípade podmieneného normálneho rozdelenia je 1. V prípade studentovho rozdelenia závisí od jeho stupňa voľnosti v_i , ktorý vieme odhadnúť podľa vzťahu (3.31).

$$\begin{aligned} \hat{v}_i &= \frac{4 \hat{k}ur_i - 6}{\hat{k}ur_i - 3} \\ \hat{k}ur_i &= \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{j=1}^n \left(\frac{X_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\hat{\sigma}_{i,j}} \right)^2 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

kde kur_i je kurtóza Studentovho rozdelenia a $\hat{k}ur_i$ je jej odhad.

Po preškáľovaní všetkých reziduí získame n vektorov $\hat{\varepsilon}_t^{T+1}$ zložených z preškáľovaných reziduí viazaných k času t :

$$\hat{\varepsilon}_t^{T+1} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{1,t}^{T+1} \\ \hat{\varepsilon}_{2,t}^{T+1} \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}_{N,t}^{T+1} \end{bmatrix}, \quad t = T - n + 1, \dots, T. \quad (3.32)$$

Vektory $\hat{\varepsilon}_t^{T+1}$ obsahujú koreláciu medzi rizikovými faktormi, ktorá sa objavila v minulosti, čo využijeme pri simulácii možných hodnôt X_{T+1} . Preto sa tejto metóde hovorí metóda filtrovanej historickej simulácie. Poznáme dva prístupy k metóde filtrovanej historickej simulácie:

1. Prispôsobenie historických dát súčasnej situácii na trhu.
2. Simulovanie vývoja X v čase $T + 1$.

3.1 Prispôsobenie historických dát súčasnej situácii na trhu

Cielom je prispôbiť časový rad jednotlivých rizikových faktorov súčasnej situácii na trhu využitím preškálovaných štandardizovaných reziduí⁵. Podľa vzorca

$$\begin{aligned} \hat{X}_{i,t}^{T+1} &= X_{i,t}^{T+1} \\ \text{pre } t &\in \{T - n + 1, \dots, T - n + \max(m_{i1}, n_{i1})\}, \\ \hat{X}_{i,t}^{T+1} &= \hat{\gamma}_i + \sum_{j=1}^{m_{i1}} \hat{\alpha}_{i,j} X_{i,t-j} + \sum_{j=1}^{n_{i1}} \hat{\beta}_{i,j} \hat{\varepsilon}_{i,t-j}^{T+1} + \hat{\varepsilon}_{i,t}^{T+1} \\ \text{pre } t &\in \{T - n + \max(m_{i1}, n_{i1}) + 1, \dots, T\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

získame n vektorov zložených z N logaritmickej zmien rizikových faktorov prispôbovaných súčasnej situácii na trhu a súčasne máme zachovanú koreláciu medzi dátami, ktorá sa už objavila v minulosti.

V konečnom dôsledku máme n možných realizácií X_{T+1} . Odhad $P\hat{\&}L_{T+1}$ získame podľa vzťahu (1.2), pričom θ_t je známa už v čase T . VaR_{T+1}^ϕ pre portfólio vypočítame nasledovne:

$$VaR_{T+1}^\phi = \text{kvantil}_{(1-\phi)} \left\{ g(\hat{X}_{T-n+1}^{T+1}, \theta_{T+1}), \dots, g(\hat{X}_{T-1}^{T+1}, \theta_{T+1}), g(\hat{X}_T^{T+1}, \theta_{T+1}) \right\}. \quad (3.34)$$

3.2 Simulovanie vývoja X v čase $T + 1$

Cielom je nasimulovať n možných vývojev $\hat{X}_{i,T+1}$ s použitím preškálovaných reziduí na súčasnú trhovú situáciu⁶:

$$\hat{X}_{i,T+1}^t = \hat{\gamma}_i + \sum_{j=1}^{m_{i1}} \hat{\alpha}_{i,j} X_{i,T+1-j} + \sum_{j=1}^{n_{i1}} \hat{\beta}_{i,j} \hat{\varepsilon}_{i,T+1-j} + \hat{\varepsilon}_{i,t}^{T+1}. \quad (3.35)$$

Za povšimnutie stojí, že narozdiel od prvej metódy (prispôsobenie historických dát súčasnej trhovej situácii) jediné, čo sa vo vzorci (4.31) mení je $\hat{\varepsilon}_{i,t}^{T+1}$. Pomocou n získaných možných realizácií vektora X_{T+1} vyjadríme odhad $P\hat{\&}L_{T+1}$ (1.2).

VaR_{T+1}^ϕ pre portfólio vypočítame podľa vzťahu:

$$VaR_{T+1}^\phi = \text{kvantil}_{(1-\phi)} \left\{ g(\hat{X}_{T+1}^{T-n+1}, \theta_{T+1}), \dots, g(\hat{X}_{T+1}^{T-1}, \theta_{T+1}), g(\hat{X}_{T+1}^T, \theta_{T+1}) \right\}. \quad (3.36)$$

⁵Tento postup bol použitý pre jednorozmerný proces $\{X_t\}_{t=T-n+1}^T$ v práci Harcek (2010).

⁶Barone-Adesi, Giannopoulos, Vosper (1999,2000).

Kapitola 4

DFM-DCC metodológia

Model založený na metodológii DFM-DCC patrí medzi nové prístupy k predikcií Var_{T+1}^ϕ . Vo svojich prácach sa ním zaoberali Stock, Watson (2002), Bai, Ng (2002, 2005), Alessi, Barigozzi, Capasso (2009) a Aramonte, Rodriguez, Wu (2011).

Táto metóda pri predikcii možných scenárov X_{T+1} využíva dynamický faktorový model (ďalej DFM) viacrozmerného GARCH-u s dynamickými podmienenými koreláciami (DCC)¹. Teoretické odvodenie modelu je veľmi dobre rozobrané v práci Alessi, Barigozzi, Capasso (2009). Základným predpokladom je, že jednotlivé časové rady $X_{i,t}$ vstupujúce do modelu sú stacionárne a majú nulovú strednú hodnotu.

Pri testovaní predpoklad stacionarity trochu zanedbáme a bude nám stačiť, ak log-diferencie $X_{i,t}$ nebudú obsahovať jednotkový koreň (pre použité dáta to zaručí logaritmickeá diferenciácia)². Predpoklad nulovej strednej hodnoty splnený nie je, preto je potrebné $X_{i,t}$ upraviť. Definujeme $\{Y_{i,t}\}_{t=1}^T$ (skrátene $Y_{i,t}$) ako proces s nulovou strednou hodnotou:

$$\begin{aligned} Y_{i,t} &= X_{i,t} - E(X_{i,t}) \\ E(X_{i,t}) &= \mu_i. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Strednú hodnotu $E(X_{i,t})$ označíme ako μ_i kvôli zjednodušeniu zápisu. Pre jednotlivé časové rady odhadneme μ_i na začiatku ako výberový priemer z hodnôt, z ktorých odhadujeme aj ostatné parametre modelu:

$$\mu_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_{i,t}. \tag{4.2}$$

¹Dynamic conditional correlation.

²Testy jednotkového koreňa sú zhrnuté v práci Zivot (2005).

Proces $\{Y_t\}_{t=1}^T$ (skrátene Y_t) na základe uvedeného definujeme:

$$Y_t = X_t - \mu = \begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ \vdots \\ X_{N,t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{2,t} \\ \vdots \\ Y_{N,t} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

kde t nadobúda hodnoty z $\{1, \dots, T\}$.

DFM model predpokladá, že Y_t sa dá rozložiť na systematické komponenty: vektor k latentných faktorov f_t a idiosynkratickej (špecifickej) zložky ε_t . V niektorých predpokladoch³ sa dokonca vyžaduje, aby $N, T \rightarrow \infty^4$. V našom prípade budeme predpokladať, že N, T je „dost veľké“. Dôležité je hlavne, aby $k \ll N$, potom zmeny veľkého množstva premenných môžu byť vyjadrené malou množinou systematických faktorov:

$$Y_t = \lambda(L)f_t + \varepsilon_t \quad (4.4)$$

$$\varphi(L)f_t = hu_t, \quad (4.5)$$

kde u_t je vektor korelovaných náhodných zložiek, $\lambda(L)$ je $N \times k$ polynóm lag-operátora L stupňa p_Y a $\varphi(L)$ je $k \times k$ polynóm lag-operátora L stupňa p_f :

$$\lambda(L) = \lambda_0 + \lambda_1 L + \dots + \lambda_{p_Y} L^{p_Y} \quad (4.6)$$

$$\varphi(L) = I_k - \varphi_1 L - \dots - \varphi_{p_f} L^{p_f}, \quad (4.7)$$

kde λ_j má rozmery $N \times k \forall j \in \{0, \dots, p_Y\}$, φ_j má rozmery $k \times k \forall j \in \{1, \dots, p_f\}$ a I_k je $k \times k$ nulová matica s jednotkami na diagonále - identická matica.

Lag-operátor L je definovaný ako:

$$Lf_t = f_{t-1}. \quad (4.8)$$

Definujeme $\lambda'_i(L)$ ako i -ty riadok polynómu $\lambda(L)$, ktorú využijeme pri práci s jednotlivými centrovanými logaritmickými zmenami rizikových faktorov:

$$\lambda'_i(L) = \lambda'_{i,0} + \lambda'_{i,1} L + \dots + \lambda'_{i,p_Y} L^{p_Y}, \quad (4.9)$$

kde $\lambda'_{i,j} \forall j \in \{0, \dots, p_Y\}$ je i -ty riadok λ_j .

³Alessi, Barigozzi, Capasso (2009).

⁴Preto pri teoretickom definovaní modelu DFM najskôr nepoužívame okno n .

Vzťah (4.5) rozložíme po zložkách, t.j. dostaneme vyjadrenie jednotlivých centrovaných logaritmických zmien rizikových faktorov $Y_{i,t}$:

$$\begin{aligned} Y_{i,t} &= \lambda'_i(L)f_t + \varepsilon_{i,t} = \lambda'_{i,0}f_t + \lambda'_{i,1}Lf_t + \dots + \lambda'_{i,p_Y}L^{p_Y}f_t \\ &= \lambda'_{i,0}f_t + \lambda'_{i,1}f_{t-1} + \dots + \lambda'_{i,p_Y}f_{t-p_Y} + \varepsilon_{i,t}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

Prvý vzťah (4.5) môžeme prepísať na statický faktorový model pre jednotlivé centrované rizikové zložky:

$$Y_{i,t} = \Lambda'_i F_t + \varepsilon_{i,t}, \quad (4.11)$$

kde F_t je vektor statických faktorov a Λ'_i je i -ty riadok matice faktorových váh (factor loadings):

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda'_1 \\ \Lambda'_2 \\ \vdots \\ \Lambda'_N \end{bmatrix}, \quad \Lambda'_i = [\lambda'_{i,0} \ \lambda'_{i,1} \ \dots \ \lambda'_{i,p_Y}], \quad F_t = \begin{bmatrix} f_t \\ f_{t-1} \\ \vdots \\ f_{t-p_Y} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Z predchádzajúceho zápisu F_t vyplýva, že jeho dimenzia, a teda počet statických faktorov je:

$$r = (p_Y + 1) k. \quad (4.13)$$

$Y_{i,t}$ je vyjadrené ako statický faktorový model pomocou F_t , t.j. závisí len od F v čase t . Nižšie ukážeme, že F_t samo o sebe môže byť dynamický proces závislý od dynamiky f_t , napr. $VAR(m_1)$ ⁵, $VMA(h_1)$ ⁶.

Pre ďalšie potreby práce podrobnejšie popíšeme prípad, že f_t sa dá popísať $VAR(p_f)$, pričom p_f je konečné.⁷

$$(I_k - \varphi_1 L - \dots - \varphi_{p_f} L^{p_f}) f_t = h u_t \quad (4.14)$$

Počet statických faktorov F_t (4.13), nezávisí od p_f (stupňa VAR procesu). Z (4.13) je tiež viditeľné, že počet statických faktorov vektora F_t je väčší ako počet dynamických faktorov vektora f_t , okrem prípadu keď $p_Y = 0$.

Chceme ukázať, že F_t spĺňa VAR proces, ktorého stupeň závisí od p_f a p_Y . Použitím f_t a jeho lagov vytvoríme stavovú reprezentáciu modelu, pričom stavový vektor je F_t .

⁵Vector autoregressive model - model vektorovej autoregresie

⁶Vector moving average - vektorový model kľzavých priemerov.

⁷Bai, Ng (2005).

Lemma 1: Nech $\kappa = \max(p_Y, p_f)$ a $\varphi_{p_f+1} = \dots = \varphi_{\kappa+1} = 0$, potom:

$$\begin{bmatrix} f_t \\ f_{t-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{t-\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdot & \cdot & \varphi_{\kappa+1} \\ I_k & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & I_k & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{t-1} \\ f_{t-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{t-\kappa-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} u_t. \quad (4.15)$$

Definujeme $F_t^* = (f_t', f_{t-1}', \dots, f_{t-\kappa}')'$. Vzťah (4.15) môžeme skrátene zapísať v tvare:

$$F_t^* = AF_{t-1}^* + Hu_t, \quad (4.16)$$

kde A je štvorcová matica dimenzie $k(\kappa + 1)$ a H je matica $k(\kappa + 1) \times k$.

Narozdiel od tradičnej stavovej reprezentácie modelu, kde je $\kappa = p_f$, v tomto prípade je $\kappa = \max(p_f, p_Y)$.

Čo sa týka hodnoty κ , môžu nastať 2 možnosti:

1. $p_Y \geq p_f$, potom nastáva

$$F_t \equiv F_t^*. \quad (4.17)$$

a na základe (4.16) sa dá F_t modelovať pomocou VAR(1), t.j. vektorový autoregresný proces s 1 lagom.

2. $p_Y < p_f$, v tomto prípade je F_t podvektorom vektora F_t^* . Vo všeobecnosti hocijaký podvektor systému VAR je vektor VARMA procesu (nie však nutne VAR). Avšak na základe špecifickej štruktúry F_t^* sa dá na podvektor F_t aplikovať proces VAR, ktorý bude obsahovať $p_f - p_Y$ lagov, t.j. VAR($p_f - p_Y$).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_t \\ f_{t-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{t-p_Y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdot & \cdot & \varphi_{p_Y+1} \\ I_k & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & I_k & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{t-1} \\ f_{t-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{t-p_Y-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \varphi_{p_Y+2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{t-2} \\ f_{t-3} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{t-p_Y-2} \end{bmatrix} + \\ &\dots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \varphi_{p_f} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{t-(p_f-p_Y)} \\ f_{t-(p_f-p_Y)-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{t-p_f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} u_t. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Zovšeobecnením oboch situácií dostávame, že vektor statických faktorov F_t spĺňa $VAR(g)$:

$$\begin{aligned} F_t &= A_1 F_{t-1} + A_2 F_{t-2} + \dots + A_g F_{t-g} + H u_t \\ g &= \max(1, p_f - p_Y). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Vo všeobecnosti sme dokázali prvú rovnicu z (4.5) pretransformovať pomocou **lemmy 1** na statický faktorový model, pričom dynamiku systému sme ponechali v tom, že vektor statických faktorov F_t spĺňa autoregresný proces $VAR(g)$.

Dynamika volatility Y_t je modelovaná cez časovo sa meniace volatility v korelovaných náhodných zložkách procesu u_t . Pre vektor u_t predpokladáme $E(u_t|I_{t-1}) = 0$ a vzťahy medzi jednotlivými zložkami vektora u_t sú zachytené v kovariančnej matici $E(u_t u_t' | I_{t-1}) = Q_t$. Preto u_t spĺňa vzťah:

$$u_t = Q_t^{1/2} z_t, \quad (4.20)$$

kde z_t je nezávislý a rovnako rozdelený vektor v čase. Kovariančnú maticu Q_t modelujeme použitím DCC⁸ modelu:

$$\begin{aligned} Q_t &= D_t W_t D_t \\ D_t &= \text{diagonálna matica s } q_{it} \text{ na diagonále, pre } i = 1, \dots, k \\ q_{it} &= w_i + \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} u_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} q_{i,t-j} \\ W_t &= C_t^{*-1} C_t C_t^{*-1} \\ C_t &= (1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j^c - \sum_{j=1}^n \beta_j^c) \bar{C} + \sum_{j=1}^m \alpha_j^c (\tilde{u}_{t-j} \tilde{u}_{t-j}') + \sum_{j=1}^n \beta_j^c C_{t-j} \\ C^* &= \text{diag}(C_t)^{1/2} \\ \tilde{u}_t &= D_t^{-1} u_t, \end{aligned} \quad (4.21)$$

kde matica \bar{C} je nepodmienená kovariančná matica \tilde{u}_t . Predpokladáme, že (z_t', ε_t') sú nezávislé a rovnako rozdelené v čase.

Pre potreby diplomovej práce pracujeme s prípadom rovnakých stupňov lag-polynómov $\lambda(L)$, $\varphi(L)$, t.j. $p_Y = p_f \equiv p$. Vzťah z (4.5) prepíšeme do tvaru statického faktorového modelu. Dynamika modelu bude zachovaná, keďže v tom prípade F_t spĺňa na základe

⁸Viac o DCC modeli v prácach Engle, Sheppard (2001), Engle (2002), Sheppard (2003).

lemmy 1 VAR(1), t.j. model s jedným lagom:

$$Y_t = \Lambda F_t + \varepsilon_t \quad (4.22)$$

$$F_t = AF_{t-1} + Hu_t, \quad (4.23)$$

kde $F_t = (f'_t, \dots, f'_{t-p})'$ je $r = (p+1)k$ vektor statických faktorov, Λ je $N \times r$ matica a H je nulová matica $k(p+1) \times k$, okrem začiatočného bloku $k \times k$, ktorý obsahuje h .

Pri výpočte Var_{T+1}^ϕ je potrebné zistiť možné predikcie X_{T+1} . Nech I_T sú informácie do času T (vrátane). Predpoveď X_{T+1} za podmienky I_T musí spĺňať nasledovné vzťahy:

$$X_{T+1} = Y_{T+1} + \mu \quad (4.24)$$

$$Y_{T+1} = \Lambda F_{T+1} + \varepsilon_{T+1} \quad (4.25)$$

$$F_{T+1} = AF_T + HQ_{T+1}^{1/2} z_{T+1}, \quad (4.26)$$

Z vyššie uvedených vzťahov vyplýva, že na predikciu Y_{T+1} potrebujeme poznať podmienenú variančnú maticu Q_{T+1} za podmienky I_T a podmienené rozdelenie $(z'_{T+1}, \varepsilon'_{T+1})'$ za podmienky I_T . Avšak predpokladáme, že vektory $(z'_t, \varepsilon'_t)'$ sú nezávislé a rovnako rozdelené v čase t , teda podmienené rozdelenie sa zhoduje s nepodmieneným. Jednotlivé zložky idiosynkratickej zložky modelu ε_t sa navyše dajú modelovať pomocou jednorozmerného procesu ARMA-GARCH⁹, čo ale v tomto modeli nepotrebujeme využiť. Z časových radov $\{Y_t\}_{t=1}^T$ vieme získať odhady faktorov $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_T$, koeficienty matíc a náhodných zložiek $\{(\hat{z}'_t, \hat{\varepsilon}'_t)'\}_{t=1}^T$.

Pri odhade jednodňového Var_{T+1}^ϕ založenom na DFM-DCC metodológii postupujeme¹⁰ nasledovne:

1. krok: Určenie veľkosti okna n , t.j. na koľkých minulých realizáciách logaritmických zmien rizikových faktorov sa nakalibrujú jednotlivé parametre modelu. Od tohto momentu bude $t \in \{T-n+1, T\}$.
2. krok: Centrovanie procesu X_t podľa (4.1) a získanie procesu Y_t , ktorý je potrebný k ďalšiemu postupu.
3. krok: Určenie koeficienta r , a následný výpočet k, p (4.13). V prácach Bai, Ng (2002), Alessi, Barigozzi, Capasso (2008) boli zadané 3 informačné kritéria

⁹Alesi, Barigozzi, Capasso (2009).

¹⁰postup podľa práce Aramonte, Rodriguez, Wu (2011).

slúžiace k určeniu r :

$$\begin{aligned}
IC_1 &= \ln(V(r_i, \hat{F}^{r_i})) + r_i \left(\frac{N+n}{Nn} \right) \ln \left(\frac{Nn}{N+n} \right) \\
IC_2 &= \ln(V(r_i, \hat{F}^{r_i})) + r_i \left(\frac{N+n}{Nn} \right) \ln(\min\{\sqrt{N}, \sqrt{n}\})^2 \\
IC_3 &= \ln(V(r_i, \hat{F}^{r_i})) + r_i \left(\frac{\ln(\min\{\sqrt{N}, \sqrt{n}\})^2}{(\min\{\sqrt{N}, \sqrt{n}\})^2} \right), \\
\text{kde } V(r_i, \hat{F}^{r_i}) &= \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^N \sum_{t=T-n+1}^T (Y_{i,t} - \Lambda_i^{r_i} \hat{F}_t^{r_i})^2.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Hľadáme $r_i \in \{1, \dots, r_{max}\}$ ¹¹, ktoré minimalizuje dané informačné kritérium:

$$\hat{r} = \operatorname{argmin}_{r_i} IC_a, \text{ kde } a=1,2,3 \tag{4.28}$$

Po odhadnutí \hat{r} dopočítame parametre \hat{k} a \hat{p} , aby platil vzťah (4.13).¹²

4. krok: Použijeme metódu hlavných komponentov (Stock, Watson (2002)), aby sme získali odhad Λ , $\{F_t\}_{t=T-n+1}^T$ a $\{\varepsilon_t\}_{t=T-n+1}^T$:

$$\hat{\Lambda} = \text{prvých } \hat{r} \text{ vlastných vektorov matice } \frac{1}{n} \sum_{t=T-n+1}^T Y_t Y_t' \text{ prislúchajúcich } \hat{r} \text{ najväčším vlastným číslom} \tag{4.29}$$

$$\hat{F}_t = \hat{\Lambda}' Y_t, \text{ pre } t \in \{T-n+1, \dots, T\} \tag{4.30}$$

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\Lambda} \hat{F}_t. \tag{4.31}$$

5. krok: Použitím odhadov $\{F_t\}_{t=T-n+1}^T$ a vzťahu (5.24) získame odhad \hat{A} a $\hat{H}u_t$. Odhad \hat{H} a \hat{u}_t získame nasledovne:

$$\hat{H} = \text{prvých } \hat{k} \text{ vlastných vektorov matice } \frac{1}{n} \sum_{t=T-n+1}^T \hat{H}u_t \hat{H}u_t' \text{ prislúchajúcich } k \text{ najväčším vlastným číslom} \tag{4.32}$$

$$\hat{u}_t = \hat{H}' \hat{H}u_t. \tag{4.33}$$

6. krok: Použijeme $\{\hat{u}_t\}_{t=T-n+1}^T$, aby sme odhadli parametre DCC modelu (5.21) $\{\hat{Q}_t\}_{t=T-n+1}^T$ a $\{\hat{z}_t\}_{t=T-n+1}^T$. Tieto parametre využijeme pri odhade podmienenej variančno-kovariančnej matice \hat{Q}_{T+1} .

¹¹ r_{max} stanovíme ako $N/2$.

¹²Zoberieme do úvahy možne kombinácie $\hat{r} = (\hat{p} + 1)\hat{k}$.

7. krok: Nakoniec vytvoríme možné scenáre pre X_{T+1} použitím vzťahu:

$$\hat{X}_{T+1}^t = \mu + \hat{\Lambda}(\hat{A}\hat{F}_T + \hat{H}\hat{Q}_{T+1}^{1/2}z_{T+1}^t) + \varepsilon_{T+1}^t, \quad (4.34)$$

pričom za $(z_{T+1}^t, \varepsilon_{T+1}^t)'$ sú postupne dosádzané $(\hat{z}'_{T-n+1}, \hat{\varepsilon}'_{T-n+1})', \dots, (\hat{z}'_T, \hat{\varepsilon}'_T)'$.

Vytvoríme hypotetické scenáre pre $P\&L_{T+1}$:

$$P\hat{\&L}_{T+1}^t = g(\hat{X}_{T+1}^t, \theta_{T+1}) \quad (4.35)$$

$$VaR_{T+1}^\phi = \text{kvantil}_{(1-\phi)}\{P\hat{\&L}_{T+1}^{T-n+1}, \dots, P\hat{\&L}_{T+1}^T\} \quad (4.36)$$

Z výsledkov Alessiho, Barigozziho a Capassa (2009) vyplýva, že ak pridáme obmedzenie $\|\hat{u}_t - u_t\| = o_p(1)$, potom rozdelenie scenárov \hat{X}_{T+1} je konzistentný odhad a má správne podmienené rozdelenie $X_{T+1}|I_T$ v prípade $T \rightarrow \infty$.

Kapitola 5

Spätne testovanie

Spätne testovanie nám bude slúžiť na kvalitatívne porovnanie modelov využívaných pri predikcii VaR_{T+1}^ϕ . Problematike spätneho testovania sa venovali napríklad Kupiec (1995) a Christoffersen (1998).

Dôležitým faktorom pri spätom testovaní je tzv. „počet prekročení“. V prípade dobrého $\phi * 100\%$ VaR modelu očakávame, že $P\&L_t < VaR_{T+1}^\phi$ v $(1 - \phi) * 100\%$ prípadov za sledované obdobie. Napríklad v prípade 99% VaR modelu by strata portfólia mohla prekročiť $VaR_t^{0,99}$ v 1% prípadov počas sledovaného obdobia.

Definujeme B_t^ϕ ako „prekročenie“ (breach) v čase t :

$$B_t^\phi = \begin{cases} 1, & \text{ak } P\&L_t < VaR_t^\phi, \\ 0, & \text{ak } P\&L_t \geq VaR_t^\phi. \end{cases} \quad (5.1)$$

V prípade správneho fungovania VaR modelu je podmienená pravdepodobnosť „prekročenia“:

$$P(B_t^\phi = 1 | I_{t-1}) = 1 - \phi \quad (5.2)$$

pre každé t .

5.1 Kupiecov test nepodmieneného krytia

Kupiecov test nepodmieneného krytia patrí k základným nástrojom slúžiacim k overeniu správnosti modelu na odhad VaR .

Definujeme „počet prekročení“ za testované obdobie ($t \in \{1, \dots, T_o\}$):

$$N_{B^\phi} = \sum_{t=1}^{T_o} B_t^\phi. \quad (5.3)$$

Nepodmienené krytie $1 - \hat{\phi}$ je definované:

$$(1 - \hat{\phi}) = \frac{N_{B^\phi}}{T_o}. \quad (5.4)$$

Test overuje hypotézu, že nepodmienené krytie $1 - \hat{\phi}$ VaR modelu nie je významne odchylené od očakávaného $1 - \phi$ na hladine významnosti ω .

$$H_0 : 1 - \hat{\phi} = 1 - \phi \quad vs. \quad H_1 : 1 - \hat{\phi} \neq 1 - \phi \quad (5.5)$$

Vierohodnostná funkcia je definovaná ako:

$$L(I_1, \dots, I_{T_o}; 1 - \phi) = \phi^{T_o - N_{B^\phi}} (1 - \phi)^{N_{B^\phi}} \quad (5.6)$$

$$L(I_1, \dots, I_{T_o}; 1 - \hat{\phi}) = \hat{\phi}^{T_o - N_{B^{\hat{\phi}}}} (1 - \hat{\phi})^{N_{B^{\hat{\phi}}}}. \quad (5.7)$$

Test založený na pomere vierohodností pre pomer nepodmieneného krytia:

$$LR_{UC} = -2 \ln \left(\frac{L(I_1, \dots, I_{T_o}; 1 - \phi)}{L(I_1, \dots, I_{T_o}; 1 - \hat{\phi})} \right) = -2 \ln \left(\frac{\phi^{T_o - N_{B^\phi}} (1 - \phi)^{N_{B^\phi}}}{\hat{\phi}^{T_o - N_{B^{\hat{\phi}}}} (1 - \hat{\phi})^{N_{B^{\hat{\phi}}}}} \right) \sim \chi^2(1). \quad (5.8)$$

H_0 nezamietame v prípade, ak je hodnota LR_{UC} štatistiky menšia alebo rovná ako kritická hodnota $\chi^2(1)$ pri danej hladine významnosti ω :

$$LR_{UC} \leq F_{\chi^2}^{-1}(\omega; 1), \quad (5.9)$$

kde $F_{\chi^2}^{-1}(\cdot; v)$ je kvantilová funkcia $\chi^2(v)$.

5.2 Christoffersenov test podmieneného krytia

Christoffersenov test podmieneného krytia odstraňuje nedostatky Kupiecovho testu a to je zhlukovanie prekročení VaR za sebou. Keď VaR model vykazuje korektné podmienené pokrytie, časový rad prekročení musí vykazovať súčasne nepodmienené pokrytie a nezávislosť.¹

Hlavná myšlienka testu je rozdeliť podmienené krytie na dve časti:

¹Krátka (2006).

1. Test nepodmieneneného krytia LR_{UC} (5.8).
2. Test nezávislosti (náhodnosti) výskytu prekročení LR_{IND} .

$$LR_{IND} = -2\ln\left(\frac{L(I_1, \dots, I_{T_o}; q)}{L(I_1, \dots, I_{T_o}; q_{01}, q_{11})}\right) = -2\ln\left(\frac{q^{T_{01}+T_{11}}(1-q)^{T_{00}+T_{10}}}{q_{01}^{T_{01}}(1-q_{01})^{T_{00}}q_{11}^{T_{11}}(1-q_{11})^{T_{10}}}\right) \sim \chi^2(1), \quad (5.10)$$

$$\text{kde } q = \frac{T_{01} + T_{11}}{T_{00} + T_{10} + T_{01} + T_{11}}, \quad q_{01} = \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}}, \quad q_{11} = \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}}, \quad (5.11)$$

- T_{01} - počet dní s prekročením nasledujúcich po dni bez prekročenia.
- T_{11} - počet dní s prekročením nasledujúcich po dni s prekročením.
- T_{00} - počet dní bez prekročenia nasledujúcich po dni bez prekročenia.
- T_{10} - počet dní bez prekročenia nasledujúcich po dni s prekročením.

Test nepodmieneneného krytia LR_{CC} je definovaný nasledovne:

$$LR_{CC} = LR_{UC} + LR_{IND} \sim \chi^2(2). \quad (5.12)$$

H_0 (o nepodmienenenosti a nezávislosti krytia) nezamietame v prípade, ak je hodnota LR_{CC} štatistiky menšia alebo rovná ako kritická hodnota $\chi^2(2)$ pri danej hladine významnosti ω :

$$LR_{CC} \leq F_{\chi^2}^{-1}(\omega; 2). \quad (5.13)$$

5.3 Základné štatistické ukazovatele pre VaR_{T+1}^ϕ

Poradným kritériom pre kvalitatívne porovnanie modelov využívaných pri predikcii VaR_{T+1}^ϕ budú hodnoty základných štatistických ukazovateľov. Dané kritéria majú informačný charakter a k ich zahrnutiu k analýze nastáva len v prípade modelov, ktoré neboli zamietnuté Kupiecovym testom nepodmieneneného krytia a Christoffersenovým testom podmieneného krytia.

Definícia poradných štatistických ukazovateľov:

1. Priemerná hodnota VaR_{T+1}^ϕ

$$E(VaR_{s,T+1}^\phi) = \frac{1}{T_o} \sum_{s=1}^{T_o} VaR_{s,T+1}^\phi, \quad (5.14)$$

kde T_o je počet realizácií VaR_{T+1}^ϕ vstupujúci do analýzy.

2. *Priemerná hodnota prekročenia*

$$E(|VaR_{s,T+1}^\phi - P \&L_s| | P \&L_s < VaR_{s,T+1}^\phi) = \frac{1}{N_{B^\phi}} \sum_{s=1}^{T_o} (|VaR_{s,T+1}^\phi - P \&L_s| | P \&L_s < VaR_{s,T+1}^\phi), \quad (5.15)$$

kde N_{B^ϕ} je počet prekročení $P\&L_t$ cez predikovanú hodnotu $VaR_{t,T+1}^\phi$ počas analyzovaného obdobia.

Kapitola 6

Empirická analýza

Kvalitatívne testovanie navrhnutých modelov bude prebiehať na portfóliu denominovanom v EUR zloženom z reálnych trhových dát. Rizikové faktory vplyvajúce na hodnotu $P\&L_{T+1}$ pozostávajú z 48 hodnôt akcií veľkých spoločností denominovaných v USD, 4 jednoročných, 4 dvojročných bezkupónových dlhopisov a 2 výmenných kurzov¹. Pracujeme s dennými hodnotami zatváracích cien rizikových faktorov za obdobie 31.1.2003 až 10.2.2012.

Do výberu akcií zahrňame hlavne akcie známych spoločností (Deutsche Bank AG, Microsoft Corp.) z rozvinutých krajín, ale aj veľké firmy z menej rozvinutých krajín (Petroleo Brasileiro SA). Podstatnými podmienkami ich zahrnutia bola kótovanosť daných akcií na burze v sledovanom období a ich dostatočná likvidita.

V prípade dlhopisov vyberáme dobre likvidné 1-ročné a 2-ročné bezkupónové dlhopisy krajín Nemecko, Francúzsko, USA a Veľkej Británie. Logaritmicke zmeny cien jednotlivých dlhopisov počítame podľa vzťahu:

$$X_{B,t} = \ln \frac{P_{B,t}}{P_{B,t-1}} = \ln \frac{e^{-R_{B,t}M_t}}{e^{-R_{B,t-1}M_{t-1}}} = R_{B,t-1}M_{t-1} - R_{B,t}M_t \approx M_{t-1}(R_{B,t-1} - R_{B,t}), \quad (6.1)$$

kde $P_{B,t}$ je cena daného bezkupónového dlhopisu v čase t , $R_{B,t}$ je úroková miera daného dlhopisu p.a. a M_t je doba maturity daného dlhopisu v rokoch. Pomocou aproximácie (6.1) definujeme jednotlivé logaritmicke zmeny $X_{B,t}$ dlhopisov ako jednoduchové zmeny úrokových mier prenasobené ich maturitou.

Kvôli denominácii portfólia v EUR zahrňame k rizikovým faktorom výmenné kurzy

¹Podrobnejší zoznam je uvedený v prílohe.

USD-EUR a GBP-EUR. Výmenný kurz USD-EUR má vplyv na hodnotu amerických dlhopisov a akcií denominovaných v USD. Na cenu dlhopisov Veľkej Británie pôsobí výmenný kurz GBP-EUR. V prípade potreby získania inverzných kurzov (EUR-USD, resp. EUR-GBP ²⁾) použijeme nasledujúce vzťahy:

$$P_{EURUSD,t} = \frac{1}{P_{USDEUR,t}}, \quad P_{EURGBP,t} = \frac{1}{P_{GBPEUR,t}}. \quad (6.2)$$

V jednotlivých akciách spoločností zahrnutých v testovacom portfóliu je investovaných 100 000 eur na dlhej pozícií (t.j. vlastnime dané aktíva) v deň T (a teda aj v deň $T+1$). Z toho vyplýva, že počet kusov každej akcií závisí od jej aktuálnej ceny v deň T :

$$\#A_{i,t} = \frac{100\,000 \cdot P_{EURUSD,t}}{P_{i,t}}, \text{ pre všetky akcie, t.j. } i \in \{1, \dots, 48\}. \quad (6.3)$$

Aktuálna hodnota každého dlhopisu zahrnutého v portfóliu v deň T je 100 000 eur (dlhá pozícia). Nominálnu hodnotu jednotlivých dlhopisov je vyjadrená:

$$P_{Nom,B} = P_{B,t} e^{R_{B,t} M_t}. \quad (6.4)$$

V prípade aktív denominovaných v iných menách ako EUR, logaritmicnú zmenu hodnoty v eurách vypočítame podľa vzorca:

$$\begin{aligned} X_{i,t}^{eur} &= \ln \frac{P_{i,t} P_{kurz,t}}{P_{i,t-1} P_{kurz,t-1}} = \ln \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \frac{P_{kurz,t}}{P_{kurz,t-1}} = \\ &= \ln \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} + \ln \frac{P_{kurz,t}}{P_{kurz,t-1}} = X_{i,t} + X_{kurz,t}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

kde $kurz \in \{USDEUR, GBPEUR\}$.

Hodnota portfólia v deň T je 5 600 000 EUR. Portfólio preusporiadávame a upravujeme každý deň, aby malo stále rovnakú hodnotu a rovnaký podiel investícií do všetkých aktív. Kvôli zjednodušeniu modelu rátame s tým, že akcie sú likvidné a dajú sa deliť (t.j. môžeme mať nakúpených napr. 1000,6 akcií spoločností). V prípade dlhopisov predpokladáme, že sa emitujú každý deň, t.j. každý deň je možný nákup dlhopisu s 1-ročnou, resp. 2-ročnou maturitou.

Rovnakým podielom finančných prostriedkov investovaných do každého aktíva docielime, aby každá akcia a dlhopis ovplyvňovali hodnotu portfólia v deň $T+1$ rovnakou mierou (veľkosť vplyvu bude záležať len na volatilitate daného aktíva). Na základe definície (1.2) v θ_ϕ budú obsiahnuté pozície jednotlivých zložiek portfólia platné v čase T a $T+1$.

²Kurz za 1 EUR.

Pre testovacie portfólio predikujeme jednoduchové VaR na 99% a 95% úrovni, t.j. hľadáme najvyššiu možnú stratu portfólia v EUR, ktorá môže nastať na preddefinovanej úrovni VaR v deň $T + 1$ (zajtra). Kvôli výpočtu VaR_{T+1} (1.1) definujeme zmenu hodnoty (výnos-strata) v EUR testovacieho portfólia (t.j. $P\&L_t$) z dňa $t - 1$ na deň t nasledovne:

$$P\&L_t = 100\,000 (X_{1,t}^{eur} + \dots + X_{48,t}^{eur} + X_{usa1y,t}^{eur} + X_{usa2y,t}^{eur} + X_{gb1y,t}^{eur} + X_{gb2y,t}^{eur} + X_{nem1y,t}^{eur} + X_{nem2y,t}^{eur} + X_{fra1y,t}^{eur} + X_{fra2y,t}^{eur}), \quad (6.6)$$

kde logaritmickej zmena faktora $X_{i,t}^{eur}$ je počítané podľa (6.5).

Graf vývoja $P\&L_t$ portfólia počas sledovaného obdobia (Obr. 1) naznačuje, že testovacie obdobie obsahuje časové úseky s nízkou aj s vysokou volatilitou jednoduchových zmien. Základné štatistické ukazovatele pre $P\&L_t$ ³ (tabuľka 1) poukazujú na nízky priemerný jednoduchový výnos (0,00%) s relatívne vysokou hodnotou štandardnej odchýlky (1,41%).

$E(P\&L_t)$	$\min(P\&L_t)$	$\max(P\&L_t)$	$Std(P\&L_t)$	$Skew(P\&L_t)$	$Kur(P\&L_t)$
115,41 €	-496 368,33 €	440 010,98 €	78 872,74 €	-	-
0,00%	-8,86%	7,86%	1,41%	-51,80%	966,37%

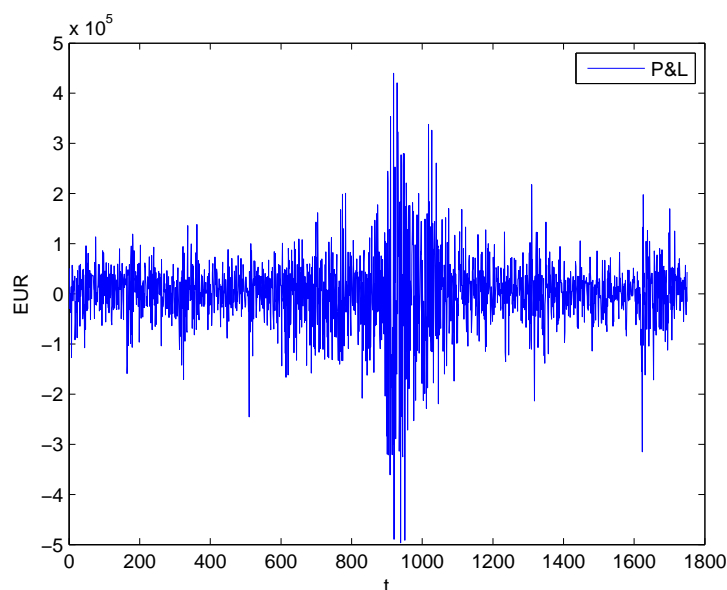
Tabuľka 1: Deskriptívne štatistiky pre $P\&L_t$ portfólia počas obdobia 27.1.2006-10.2.2012 (1508 dní)

Jednotlivé VaR_{T+1} na oboch úrovniach budeme predpovedať na posledných 1508 dňoch (27.1.2006-10.2.2012). Prvých 750 dní bude slúžiť ako najširšie okno pre jednotlivé metódy. Pre každý prístup k výpočtu 99% a 95% VaR_{T+1} postupne využijeme 3 veľkosti okna = 250, 500, 750 dní. K selekcii úspešných modelov použijeme Kupiecov test nepodmieneného krytia, Christoffersenov test podmieneného krytia. Poradné štatistické ukazovatele budú mať informačný charakter v prípade prijatých modelov.

Jednotlivé algoritmy modelov predikcie jednoduchovej VaR_{T+1} , ako aj programy potrebné k spätnému testovaniu boli naprogramované v prostredí MATLAB použitím niektorých funkcií z predprogramovaných toolboxov UCSD GARCH a MFE Toolbox⁴.

³Vzorce deskriptívnych štatistík sú dostupné v prílohe.

⁴Autorom toolboxov je Sheppard, K., dostupné na www.kevinsheppard.com.



Obr. 1: Jednodenné výnosy/straty $P\&L_t$ testovacieho portfólia počas obdobia 31.1.2003 až 10.2.2012

6.1 Aplikácia metódy historickej simulácie

Metóda historickej simulácie je z daných modelov najjednoduchšia a nevyžaduje žiadne predpoklady pre vstupujúce faktory. Jediným parametrom danej metódy je veľkosť okna n . V analýze uvažujeme modely historickej simulácie s $n = 250, 500, 750$.

Sledované obdobie v sebe zahŕňa obdobie, kedy sa prejavil premenlivý charakter časových radov rizikových faktorov (hypotekárna kríza, dlhová kríza), preto sa dá na začiatku predpokladať, že najlepšie odhady 99%, resp. 95% VaR_{T+1} by mohli byť v prípade najmenšieho okna, t.j. $n = 250$. Vtedy metóda berie do úvahy len relatívne „najčerstvejšie“ údaje.

Pri určení 99%, resp. 95% VaR_{T+1} nasledujeme definíciu $P\&L_t$ (6.6). Postupne vypočítame hodnoty minulých realizácií $P\&L_t$ pre $t \in \{T - 249, T\}$, $\{T - 499, T\}$ resp. $\{T - 749, T\}$. Následne podľa (2.1) určíme pre všetky veľkosti okna 99%-kvantil, resp. 95%-kvantil.

Grafy realizácií odhadu 99% a 99% VaR_{T+1} sú prístupné v prílohe. Je viditeľné, že predikcie VaR_{T+1} na oboch úrovniach v prvej polovici časového obdobia reagujú uspokojivo. Akonáhle nastupuje obdobie zvýšenej volatility (s ktorým je spojené obdobie so zvýšenou jednodennou stratou) metóda nestíha promptne reagovať. Je to spôsobené definíciou metódy, t.j. kvantilovým výberom z empirického rozdelenia pravdepodobností

daného portfólia, kedy vysoké straty musia nastať po dobu viacerých dní v krátkom časovom okamihu, aby sa dostali na vybraný kvantil. Naopak v druhej polovici časového obdobia dlhodobo nadhodnocovali 99% a 95% VaR_{T+1} . Prejavila sa ďalšia nevýhoda metódy historickej simulácie, kedy obdobie častejšieho výskytu extrémnych hodnôt pri veľkých oknách dlhodobo ovplyvňujú predikovanú hodnotu 99% VaR_{T+1} bez ohľadu na súčasnú situáciu na trhu.

Tabuľky s prekročeniami $P\&L_{T+1}$ cez odhadovanú VaR_{T+1} na oboch hodnotách, p-hodnotami Kupiecovho nepodmieneného testu a Christoffersenovho testu sú prístupné v prílohe.

V prípade predikcií 99% VaR_{T+1} neprešla ani jedným z testov na 5% hladine spoľahlivosti žiadna z realizácií metódy historickej simulácie ($n = 250, 500, 750$). Prekročenie nastalo priemerne v 1,8% prípadoch oproti žadanému 1%. Nízke hodnoty p-value Christoffersenovho testu navyše svedčia o závislosti výskytu prekročení.

Priemerná hodnota prekročenia pri odhade 95% VaR_{T+1} bola 6,3%, pričom žiadanou hodnotou je 5%. Kupiecovým nepodmieneným testom neprešla ani jedna realizácia metódy historickej simulácie. Christoffersenovým podmieneným testom tesne prešla (0,06) len realizácia metódy na okne veľkosti 750.

Na základe výsledkov spätného testovania neprijímame metódu historickej simulácie pre predikciu VaR_{T+1} na úrovniach 99%, 95% pre testovacie portfólio.

6.2 Aplikácia metódy filtrovanej historickej simulácie

Modely metódy filtrovanej historickej simulácie budeme kalibrovať na 3 veľkostiach okien, t.j. $n = 250, 500, 750$. Na začiatku určíme parametre v modeloch $ARMA(m_{i1}, n_{i1}) - GARCH(m_{i2}, n_{i2})$ aplikovaných na jednotlivé časové rady logaritmických zmien rizikových faktorov $\{X_{i,t}\}_{t=T-n+1}^T$.

V prípade modelovania ich podmienenej strednej hodnoty uvažujeme 3 modely pre každé X_i :

1. $ARMA(1, 1)$

$$X_{i,t} = \gamma_i + \alpha_{i,1} X_{i,t-1} + \beta_{i,1} \varepsilon_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}, \quad (6.7)$$

2. $AR(1)$

$$X_{i,t} = \gamma_i + \alpha_{i,1} X_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t}, \quad (6.8)$$

3. *const*

$$X_{i,t} = \gamma_i + \varepsilon_{i,t}, \quad (6.9)$$

Konštanta v modeli by mala zachytávať akúsi fundamentálnu logaritmickú zmenu jednotlivých rizikových faktorov. Pridanie autoregresného člena $AR(1)$, t.j. realizácia rizikového faktora v čase $t - 1$, popisuje reakciu vývoja log zmeny ceny v období t na predošlé obdobie $t - 1$. V turbulentnom období sa zvykne pridávať aj $MA(1)$ člen, t.j. realizácia náhodnej zložky $\varepsilon_{i,t-1}$ v čase $t - 1$.

Na zachytenie heteroskedasticity podmienenej variancie logaritmických zmien jednotlivých rizikových faktorov použijeme $GARCH(1,1)$ obsahujúci členy $GARCH(1)$, t.j. realizáciu $\sigma_{i,t-1}^2$ v čase $t - 1$ a tiež člen $ARCH(1)$ obsahujúci realizáciu náhodnej zložky $\varepsilon_{i,t-1}$ v čase $t - 1$:

$$\sigma_{i,t}^2 = \eta_i + \omega_{i,1} \varepsilon_{i,t-1}^2 + \delta_{i,1} \sigma_{i,t-1}^2 \quad (6.10)$$

Pre každý časový rad $\{X_{i,t}\}_{t=T-n+1}^T$ dostávame 3 modely, z ktorých vyberieme najvhodnejší.

Po nakalibrovaní modelov postupujeme k analýze ich štandardizovaných zložiek $\{\hat{\psi}_{i,t}^{st}\}_{t=T-n+1}^T$ (3.25). Od správneho modelu vyžadujeme, aby štandardizované zložky boli nezávislé a rovnako rozdelené v čase (rozdelenie $\sim D(0,1)$).

Nakalibrovaný model zamietame v prípade prítomnosti autokorelácie štandardizovaných zložiek alebo ich štvorcov, ktorú overíme Ljung Boxovým testom (3.26).

Z modelov, ktoré boli prijaté Ljung Boxovým testom vyberieme najvhodnejší pomocou hodnoty *Akaikeho informačné kritéria* (AIC):

$$AIC = -2\frac{l}{n} + 2\frac{k}{n}, \quad (6.11)$$

kde k je počet parametrov modelu, n je počet realizácií použitých na kalibráciu modelu a l vyjadruje hodnotu funkcie vierohodnosti pri odhade modelu. Vyberá sa model s najnižšou hodnotou AIC kritéria.

V kapitole venovanej filtrovanej historickej simulácií sú uvedené 2 prístupy k odhadu možných realizácií X_i v čase $T + 1$, ktoré sa použijú pri predikcii VaR_{T+1} na 99% a 95% úrovni (3.34), (3.36). V prípade podmieneného rozdelenia jednotlivých rizikových faktorov predpokladáme, že pochádzajú z normálneho rozdelenia (3.10) alebo studentovho rozdelenia (3.14).

Kombináciou prístupov a podmienených rozdelení dostávame 4 metódy modelu filtrovanej historickej simulácie:

1. Prístup: Prispôbenie historických dát súčasnej situácii na trhu
 - predpoklad podmieneného normálneho rozdelenia,
 - predpoklad podmieneného studentovho rozdelenia.
2. Prístup: Simulovanie vývoja X v čase $T + 1$
 - predpoklad podmieneného normálneho rozdelenia,
 - predpoklad podmieneného studentovho rozdelenia.

Algoritmus metódy filtrovanej historickej simulácie:

1. krok: Volba okna n .
2. krok: Kalibrácia troch modelov (6.7),(6.8),(6.9) pre každý časový rad $\{X_{i,t}\}_{t=T-n+1}^T$.
3. krok: Určenie najvhodnejšieho modelu pre každé $\{X_{i,t}\}_{t=T-n+1}^T$ použitím Ljung Boxovho testu (3.26) a AIC kritéria (6.11).
4. krok: Vytvorenie n možných realizácií \hat{X}_i v čase $T + 1$ pre každú logaritmickú zmenu rizikového faktora (3.34), (3.36) a následný výpočet n možných realizácií portfólia $P\hat{\&L}_{T+1}$.
5. krok: Výpočet hodnoty VaR_{T+1} na 99% a 95% úrovni (3.34), (3.36).

Najoptimálnejšie je kalibrovať modely v každú časovú jednotku. Kvôli výpočtovej zložitosti algoritmu sa parametre modelu nanovo kalibrovali na základe dvoch podmienok:

- reálna strata portfólia $P\hat{\&L}_{T+1}$ podliezla predikovanú hodnotu 99% VaR_{T+1} ,
- 50 dní (t) od poslednej kalibrácie.

6.2.1 Vyhodnotenie úspešnosti metódy filtrovanej historickej simulácie

Podrobné grafy predikcií VaR_{T+1} na úrovniach 99%, 95% a tabuľky s výsledkami spätného testovania sú uvedené v prílohe. V diplomovej práci sme zvolili prístup porovnania štatistických vlastností jednotlivých predikcií VaR_{T+1} na oboch úrovniach .

Do ďalšieho pozorovania zaradíme len najpresnejší model z každej metódy na základe najlepšej hodnoty Kupiecovho testu nepodmieneného krytia a Christoffersenovho testu podmieneného krytia.

Pre predikciu 99% VaR_{T+1} najlepšie výsledky spätného testovania dosahovali modely s $n = 500$, pre každú metódu (tabuľka 2) a jeden model s $n = 750$. Zaujímavosťou je, že pri 3 zo 4 metód model s $n = 500$ predikoval najväčšiu hodnotu 99% VaR_{T+1} . Najväčšiu presnosť dosiahol model založený na prispôbení historických dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom studentovho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov (obr. 2).

typ modelu	podm. rozd.	okno	prekroč. v %	Kupiec. test	Christoff. test
1.prístup	N	500;750	1,26%	0,3295	0,4877
1.prístup	t	500	1,06%	0,8136	0,8191
2.prístup	N	500	1,19%	0,4633	0,6148
2.prístup	t	500	1,19%	0,4633	0,6148

Tabuľka 2: Spätné testovanie (p-value) na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti pre 99% VaR_{T+1} predikované modelmi filtrovanej historickej simulácie na období 1508 dní

Model (tabuľka 3), ktorý predikoval počas celého obdobia najnižšiu hodnotu 99% VaR_{T+1} , je založený na metóde prispôbenia historických dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom normálneho rozdelenia pri použití $n = 750$. Najmenšia strata pri prekročení hodnoty odhadnutej 99% VaR_{T+1} nastala pri použití tej istej metódy, ale pri $n = 500$.

Všetky analyzované modely sú vhodné k predikcii 99% VaR_{T+1} pre testovacie portfólio, ale na základe spätného testovania prijímame model založený na prispôbení historických dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom studentovho (t) rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov.

Najlepšie hodnoty spätného testovania pri odhadovaní 95% VaR_{T+1} sme zaznamenali pri modeloch s $n = 750$ (tabuľka 4). Priemerná predikovaná hodnota 95% VaR_{T+1} sa medzi vybranými modelmi veľmi nelíšila (tabuľka 5). Najmenšiu priemerné prekročenie zaznamenal model s metódou založenou na prispôbení historických dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom studentovho rozdelenia.

Všetky 4 vybrané modely sú vhodné k predikcii 95% VaR_{T+1} pre testovacie portfólio. Riadiac sa výsledkami spätného testovania prijímame model založený na prispôbení

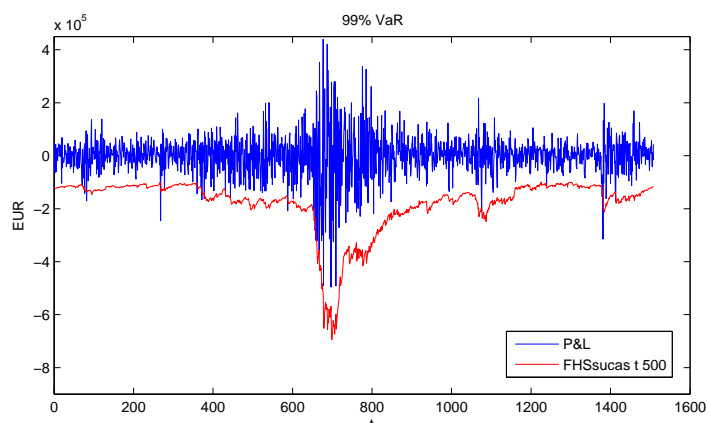
1.prístup: Prispôbenie historických dát súčasnej situácii na trhu.

2.prístup: Simulovanie vývoja X v čase $T + 1$.

tučným písmom sú označené najlepšie výsledky testu v prípade jeho prijatia.

typ modelu	podm. rozd.	okno	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
1.prístup	N	750	-176 861,09 €	42 440,58 €
1.prístup	N	500	-180 189,96 €	38 078,64 €
1.prístup	t	500	-179 615,74 €	43 967,65 €
2.prístup	N	500	-176 975,32 €	42 224,52 €
2.prístup	t	500	-177 649,91 €	41 104,31 €

Tabuľka 3: Hodnoty poradných štatistík pre 99% VaR_{T+1} predikované modelmi filtrovanej historickej simulácie na období 1508 dní



Obr. 2: Predikované 99% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 metódou filtrovanej historickej simulácie založenej na prispôbení historických dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom podmieneného studentovho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov pri veľkosti okna $n = 500$

historických dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom normálneho (N) rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov (obr. 3).

typ modelu	podm. rozd.	okno	prekroč. v %	Kupiec. test	Christoff. test
1.prístup	N	750	5,70%	0,2201	0,4146
1.prístup	t	750	5,77%	0,1805	0,3685
2.prístup	N	750	5,90%	0,1177	0,2181
2.prístup	t	750	5,84%	0,1465	0,2466

Tabuľka 4: Spätné testovanie (p-value) na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti pre 95% VaR_{T+1} predikované modelmi filtrovanej historickej simulácie na období 1508 dní

„Ťažké chvosty“ studentovho rozdelenia sa prejavili v predikovaní o niečo väčšej hodnoty VaR_{T+1} , ako v prípade normálneho rozdelenia (okrem predikcie 95% VaR_{T+1} použitím 1. prístupu), ale aj nižšej hodnote priemerného prekročenia. V prípade spät-

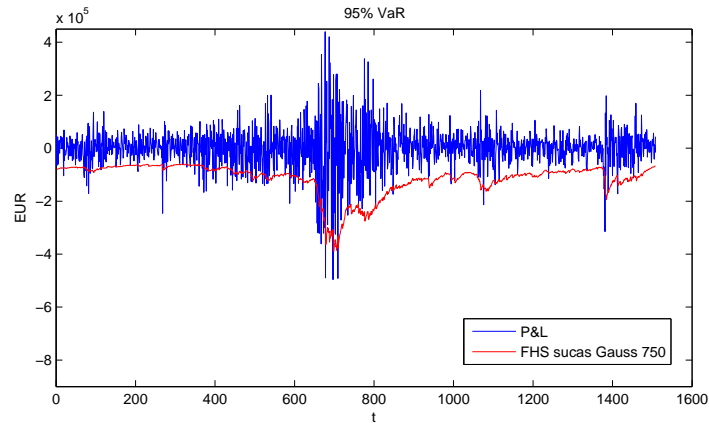
1.prístup: Prispôbenie historických dát súčasnej situácii na trhu.

2.prístup: Simulovanie vývoja X v čase $T + 1$.

tučným písmom sú označené najlepšie výsledky testu v prípade jeho prijatia.

typ modelu	podm. rozd.	okno	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
1.prístup	N	750	-114 673,66 €	43 133,38 €
1.prístup	t	750	-114 854,56 €	41 968,68 €
2.prístup	N	750	-114 344,74 €	43 169,29 €
2.prístup	t	750	-114 806,62 €	42 748,17 €

Tabuľka 5: Hodnoty poradných štatistík pre 95% VaR_{T+1} predikované modelmi filtrovanej historickej simulácie na období 1508 dní



Obr. 3: Predikované 95% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 metódou filtrovanej historickej simulácie založenej na prispôbení historických dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom podmieneného normálneho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov pri veľkosti okna $n = 750$

ného testovania sa neukázala výhodnosť použitia podmieneného studentovho rozdelenia. Dôvodom bude to, že už samotný $GARCH(1,1)$ dokáže zachytiť ťažké chvosty aj pri podmienenom normálnom rozdelení. Zaujímavým zistením je, že optimálna veľkosť okna pri predikcii VaR_{T+1} závisí (v prípade zvoleného portfólia) od toho, na akej úrovni sa počíta (99%, 95%). V závere konštatujeme, že všetky metódy vedú nakalibrovat vhodný model pre vybrané portfólio a pre danú úroveň VaR_{T+1} .

6.3 Aplikácia metódy DFM-DCC

Metóda DFM je oproti zvyšným metódam najťažšie aplikovateľná v praxi. Pri kalibrácii modelu berieme do úvahy 3 veľkosti okien, t.j. $n = 250, 500, 750$. Predpokladáme, že proces $\{X_t\}_{t=T-n+1}^T$ spĺňa predpoklady daného modelu. Volatilita procesu je modelovaná DCC metódou (4.21). Narozdiel od metódy filtrovanej historickej simulácie, model metódy DFM-DCC rekalibrujeme ku každej časovej jednotke t použitím historických dát z okna n .

Na začiatku zvolíme parametre DCC modelu. Rovnako ako pri metóde filtrovanej historickej simulácie sa použijú maximálne prvé lags, t.j. realizácie z $t - 1$:

$$\begin{aligned}
Q_t &= D_t W_t D_t \\
D_t &= \text{diagonálna matica s } q_{it} \text{ na diagonále, pre } i = 1, \dots, k \\
q_{it} &= w_i + \alpha_i u_{i,t-1}^2 + \beta_i q_{i,t-1} \\
W_t &= C_t^{*-1} C_t C_t^{*-1} \\
C_t &= (1 - \alpha_1^c - \beta_1^c) \bar{C} + \alpha_1^c \tilde{u}_{t-1} \tilde{u}_{t-1}' + \beta_1^c C_{t-1} \\
C^* &= \text{diag}(C_t)^{1/2} \\
\tilde{u}_t &= D_t^{-1} u_t,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

kde matica \bar{C} je nepodmienená kovariančná matica \tilde{u}_t .

Samotný DFM model má 2 základné parametre, t.j. p a k . V prípade zvoleného portfólia môže byť k maximálne 58, a maximálne p závisí od veľkosti okna (keďže sa jedná o lagy latentných faktorov f_t).

Podľa informačných kritérií IC_1, IC_2, IC_3 (4.27) určíme odhad parametra \hat{r} ($= (\hat{p} + 1)\hat{k}$). Kritériá aplikujeme pre prípady prvých 750 dní (max. veľkosť okna), 1000 dní a 2258 dní (celé obdobie). Najjednoduchšie výsledky dostávame pre prípad $n = 2258$ dní (tabuľka 6), t.j. $\hat{r} = 4$ pre IC_1, IC_2, IC_3 .

n	IC_1	IC_2	IC_3
750	5	5	7
1000	4	3	5
2258	4	4	4

Tabuľka 6: Tabuľka odhadov parametra r v DFM-DCC metóde pomocou informačných kritérií IC_1, IC_2, IC_3 pre testovacie portfólio

Pomocou vzťahu $\hat{r} = (\hat{p} + 1)\hat{k}$ určíme odhady \hat{p} , \hat{k} . V práci Aramonte, Rodriguez, Wu (2011) používali $k = 2, 3$; $p = 0$ pre portfólio zložené z 500 akcií s veľmi dobrými výsledkami. Preto budeme brať $\hat{r} = 4$ ako hornú hranicu dimenzie statického faktora F_t . Pri odhade VaR_{T+1} pre testovacie portfólio budeme používať nasledujúce modely:

r	2	3	4	4
k	2	3	4	2
p	0	0	0	1

Tabuľka 7: Parametre metódy DFM-DCC

V 4. kroku algoritmu odhadu VaR_{T+1} používame metódu hlavných komponentov, preto overíme, aká časť variancie centrovaneho procesu $\{Y_t\}_{t=1}^{2258}$ je vysvetľovaná r hlavnými

komponentmi, podľa kritéria:

$$\Upsilon_r = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i}{\sum_{i=1}^{58} \lambda_i}, \quad (6.13)$$

kde λ_i je vlastné číslo variančnej matice centrovaného procesu $\{Y_t\}_{t=1}^{2258}$ prisluchajúce i -temu hlavnému komponentu.

Už v prípade použitia $r=2$ (tabuľka 8) je vysvetlovaných 55,67% variancie procesu $\{Y_t\}_{t=1}^{2258}$, čo býva často-krát postačujúce (Stock, Watson (2002)).

Υ_r	%var(Y_t)
2	55,67%
3	60,53%
4	62,96%

Tabuľka 8: Podiel vysvetlovej variance procesu $\{Y_t\}_{t=1}^{2258}$

V ďalších častiach práce otestujeme úspešnosť zvolených modelov DFM-DCC (tabuľka 7) pre predikciu VaR_{T+1} na 99% a 95% úrovni.

6.3.1 Vyhodnotenie úspešnosti metódy DFM-DCC

Modely metódy DFM-DCC neprešli spätným testovaním pri oknách $n = 250, 500$ (tabuľky a grafy sú dostupné v prílohe). Z toho dôvodu porovnáme výsledky modelov spätného testovania len pri $n = 750$.

V prípade odhadu 99% VaR_{T+1} prešli spätným testovaním všetky modely s oknom $n = 750$. Najlepšie výsledky spätného testovania dosiahla metóda DFM-DCC s parametrami $k = 2$ a $p = 1$ (tabuľka 9). To znamená, že predikcie 99% VaR_{T+1} modelujeme pomocou dvoch latentných faktorov ($f_{1,t}, f_{2,t}$) a ich prvých lagov, t.j. realizácie z času $t - 1$.

k	p	prekroč. v %	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
2	0	1,53%	0,0571	0,1146	-177 204,17 €	33 008,02 €
3	0	1,53%	0,0571	0,1146	-172 820,06 €	37 394,19 €
4	0	1,53%	0,0571	0,1146	-175 069,62 €	36 761,88 €
2	1	1,46%	0,0937	0,1771	-175 448,79 €	38 534,90 €

Tabuľka 9: Spätné testovanie (p-value) na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 99% VaR_{T+1} predikované modelmi DFM-DCC s oknom $n = 750$ na období 1508 dní.

Zaujímavosťou je, že zvyšné 3 modely mali rovnakú mieru prekročenia (1,53%). Spomedzi nich mal najnižšiu predikovanú 99% VaR_{T+1} model s parametrami $k = 3, p = 0$.

Informačné kritériá pre odhad \hat{r} (tabuľka 6) nám odporučili použiť $r = 4$, t.j. $k = 4$, $p = 0$ alebo $k = 2$, $p = 1$. Pričom model s parametrami $k = 2$, $p = 1$ sa zdá byť naozaj najvhodnejší.

Pri predikcii 95% VaR_{T+1} neprešli spätným testovaním niektoré nakalibrované modely (tabuľka 10). Kupiecovým testom nepodmieneného krytia prešli všetky modely, avšak Christoffersenov test zamietol modely s parametrami $k = 4, p = 0$ a $k = 2, p = 1$.

Najoptimálnejším modelom DFM-DCC na základe spätného testovania je model s parametrami $k = 2, p = 0$, kedy prekročenie nastalo v 5,64% prípadoch.

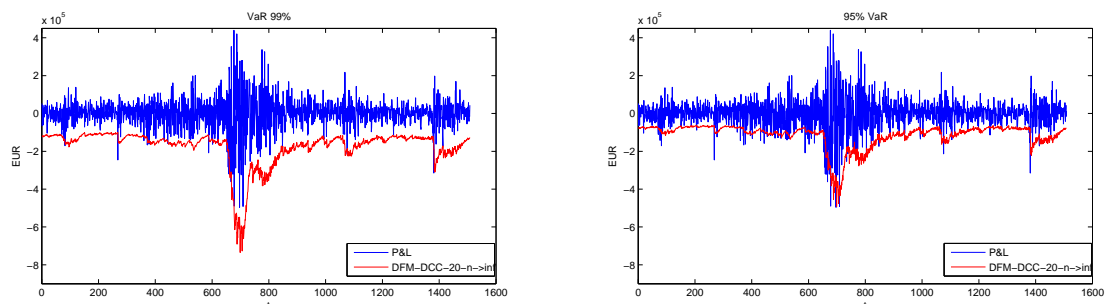
k	p	prekroč. v %	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
2	0	5,64%	0,2659	0,0990	-116 653,92 €	41 666,02 €
3	0	5,84%	0,1465	0,0885	-114 102,92 €	41 669,43 €
4	0	6,03%	0,0738	0,0358(*)	-113 973,74 €	39 778,02 €
2	1	6,03%	0,0738	0,0166(*)	-111 841,12 €	42 111,38 €

Tabuľka 10: Spätné testovanie (p-value) na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 95% VaR_{T+1} predikované modelmi DFM-DCC s oknom $n = 750$ na období 1508 dní.

Metóda DFM-DCC vyžaduje pre správnu kalibráciu dosť rozsiahle okno historických údajov. V ďalšom testovaní použijeme parametre $k = 2, p = 0$ a $k = 2, p = 1$ pričom parameter okno n budeme každým krokom zväčšovať o najnovší údaj. Počiatočnou hodnotou je $n = 750$.

VaR	k	p	prekroč. v %	Kup. test	Christ. test	Priem. VaR	Priem. prekroč.
99%	2	0	1,33%	0,2252	0,3663	-175 533,92 €	41 763,38 €
95%	2	0	5,57%	0,3180	0,6002	-115 018,48 €	42 857,22 €

Tabuľka 11: Spätné testovanie (p-value) na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 99%, 95% VaR_{T+1} predikované modelom DFM-DCC s parametrami $k = 2, p = 0$ s rastúcou veľkosťou okna n na období 1508 dní.



Obr. 4: Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 0$ a rastúcim n

Model s parametrami $k = 2$, $p = 1$ pre predikciu 99% aj 95% VaR_{T+1} a zväčšujúcim n bol zamietnutý Kupiecovým testom (príloha). Naopak kalibrácia modelu s $k = 2$, $p = 0$ sa ukázala ako vhodné riešenie pre dané portfólio. Dosiahol najlepšie výsledky spätného testovania pre odhad 99% a 95% VaR_{T+1} spomedzi doteraz kalibrovaných modelov (tabuľka 11).

Pre predikciu VaR_{T+1} na oboch úrovniach v prípade testovacieho portfólia prijímame model metódy DFM-DCC s parametrami $k = 2$, $p = 0$ pri rastúcom okne n , s počiatočnou hodnotou $n = 750$.

6.4 Porovnanie jednotlivých modelov

V poslednej časti diplomovej práce nasleduje porovnanie najúspešnejších modelov metódy filtrovanej historickej simulácie a DFM-DCC metódy (nasledujúce tabuľky). Všetky modely metódy historickej simulácie sme zamietli ako nevhodné pre testovacie portfólio, preto ich v tejto časti neuvažujeme.

V prípade odhadu 99% VaR_{T+1} najlepšie hodnoty spätného testovania zaznamenal model metódy filtrovanej historickej simulácie založený na prispôbení historických dát súčasnej situácii na trhu s predpokladom studentovho (t) rozdelenia. V tabuľke 2 je viditeľné, že aj ostatné modely filtrovanej historickej simulácie mali lepšie výsledky spätného testovania ako metóda DFM-DCC.

Napriek prevahe modelov založených na metóde filtrovanej historickej simulácie, hodnoty poradných štatistík modelu založenom na metóde DFM-DCC ($k = 2$, $p = 1$, $n \rightarrow \infty$) sú veľmi zaujímavé. Počas celého obdobia predikoval nižšie 99% VaR_{T+1} ako všetky nakalibrované modely filtrovanej historickej simulácie.

Model	n	prekroč. v %	Kupiec. test	Christ. test
FHS 1.prístup t-rozd.	500	1,06%	0,8136	0,8191
DFM-DCC $k = 2, p = 0$	$n \rightarrow \infty$	1,33%	0,2252	0,3663

Tabuľka 12: Spätné testovanie (p-value) pre 99% VaR_{T+1} predikované vybranými modelmi

Model	n	Priem. VaR	Priem. prekroč.
FHS 1.prístup t-rozd.	500	-179 615,74 €	43 967,65 €
DFM-DCC $k = 2, p = 0$	$n \rightarrow \infty$	-175 533,92 €	41 763,38 €

Tabuľka 13: Poradné štatistiky predikovanej 99% VaR_{T+1} pre definované modely

Pri predikcii 95% VaR_{T+1} najlepšie výsledky spätného testovania sme zaznamenali v prípade metódy DFM-DCC v porovnaní so všetkými modelmi nakalibrovanými pre metódu filtrovanej historickej simulácie. Poradné štatistiky pre 95% VaR_{T+1} pre obe zvolené modely daných metód sú veľmi blízke, aj keď v prípade modelu filtrovanej historickej simulácie sa vyskytli 2 prekročenia navyše počas skúmaného časového úseku.

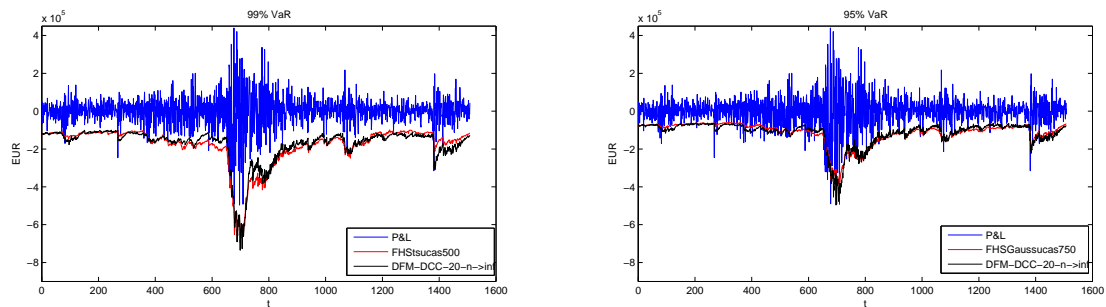
Model	n	prekroč. v %	Kupiec. test	Christ. test
FHS 1.prístup N-rozd.	750	5,70%	0,2201	0,4146
DFM-DCC $k = 2, p = 0$	$n \rightarrow \infty$	5,57%	0,3180	0,6002

Tabuľka 14: Spätné testovanie (p-value) pre 95% VaR_{T+1} predikované vybranými modelmi

Model	n	Priem. VaR	Priem. prekroč.
FHS 1.prístup N-rozd.	750	-114 673,66 €	43 133,38 €
DFM-DCC $k = 2, p = 0$	$n \rightarrow \infty$	-115 018,48 €	42 857,22 €

Tabuľka 15: Poradné štatistiky predikovanej 95% VaR_{T+1} pre definované modely

Obe testované metódy (filtrovaná historická simulácia, DFM-DCC) je vhodné používať pri predikcii VaR_{T+1} na 99% a 95% úrovni pre testovacie portfólio. Výsledky sú o to cennejšie, že v testovacom časovom úseku sa vyskytlo obdobie so zvýšenou volatilitou (hypotekárna kríza, dlhová kríza), ako aj pokojné obdobie.



Obr. 5: Porovnanie predikcie 99% a 95% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 metódou filtrovanej simulácie a DFM-DCC metódou

Záver

Cielom diplomovej práce bolo teoreticky zdefinovať a empiricky otestovať metódy odhadu hodnoty VaR v prípade portfólia s veľkým počtom rizikových faktorov.

Prvú časť práce sme venovali definovaniu metód historickej simulácie, filtrovanej historickej simulácie s dvoma prístupmi založenými na normálnom alebo studentovom podmienenom rozdelení a dynamickému faktorovému modelu, kde k modelovaniu volatility procesu používame metódu viacrozmerneho GARCH-u s dynamickými podmienenými koreláciami (DCC).

Definované modely sme otestovali na portfóliu zloženom z akcií, dlhopisov a s vplyvom výmenných kurzov. Modely sme kalibrovali pri troch veľkostiach okna, $n = 250, 500, 750$ a v prípade DFM-DCC aj $n \rightarrow \infty$. Najhoršie dopadla metóda historickej simulácie, ktorá neprešla spätným testovaním pri žiadnom zvolenom okne. Metóda filtrovanej historickej simulácie dosahovala najlepšie výsledky pre odhad 99% Value-at-Risk pri okne $n = 500$ a v prípade predikcie 95% Value-at-Risk pri okne $n = 750$. Modely metódy DFM-DCC prešli spätnými testami len v prípade $n = 750$ alebo $n \rightarrow \infty$. Zaujímavosťou je, že portfólio zložené z 58 rizikových faktorov bolo dobre popísané dvoma latentnými faktormi.

V prípade odhadu 99% Value-at-Risk odporúčame použiť metódu filtrovanej historickej simulácie, kde všetky nakalibrované modely pre $n = 500$ prekonali metódu DFM-DCC. Na druhej strane pokiaľ odhadujeme 95% Value-at-Risk je výhodnejšie použiť metódu DFM-DCC.

V prvotnom procese hľadania optimálnych modelov pre predikciu Value-at-Risk sme sa snažili k metóde filtrovanej historickej simulácii využiť poznatky z teórie kopúl. Pre štandardizované rezíduá sme chceli nájsť vhodnú aproximáciu Gaussovej alebo studentovej kopuly. Ani jeden z modelov však tesne neprešiel spätným testovaním pre dané portfólio, tak sme sa rozhodli túto časť do diplomovej práce nezaradiť.

Možným rozšírením diplomovej práce je zahrnutie ďalších modelov na modelovanie podmienenej variancie náhodnej zložky v metóde filtrovanej historickej simulácie, napr. EGARCH, TGARCH, GJR-GARCH. V prípade metódy DFM-DCC by bolo vhodným rozšírením zahrnutie sofistikovanejších metód na odhad parametrov k a p .

Literatúra

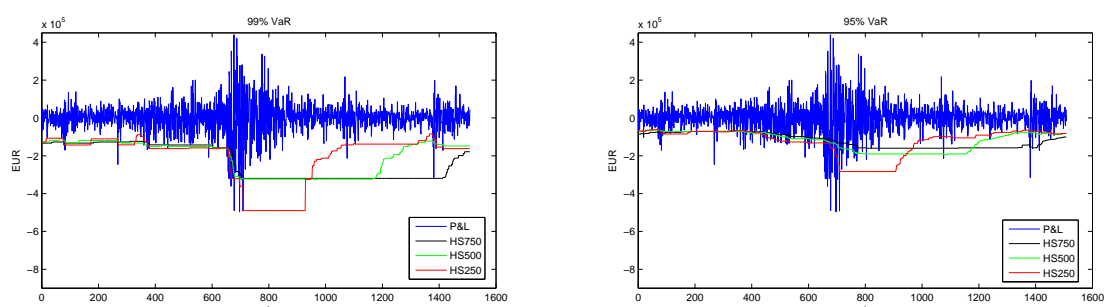
- [1] Adcock Ch., Areal, N., Oliveira, B., 2011. *Value-at-Risk Forecasting Ability of Filtered Historical Simulation for non-Normal GARCH Returns*. In European Financial Management.
- [2] Alessi, L., Barigozzi, M., Capasso, M., 2008. *A Robust Criterion for Determining the Number of Static Factors in Approximate Factor Models*. In ECB Working Paper.
- [3] Alessi, L., Barigozzi M., Capasso, M., 2009. *Estimation and Forecasting in Large Datasets with Conditionally Heteroskedastic Dynamic Common Factors*. In ECB Working Paper.
- [4] Aramonte, S., Rodriguez M. G., Wu J., 2011. *Dynamic Factor Value-at-Risk for Large, Heteroskedastic Portfolios*. In Finance and Economics Discussion Series.
- [5] Bai, J., Ng, S., 2002. *Determining the Number of Factors in Approximate Factor Models*. In Econometrica, Vol 70, No. 1, 191-221.
- [6] Bai, J., Ng, S., 2005. *Determining the Number of Primitive Shocks in Factor Models*. Manuscript, Department of Economics, Harvard University.
- [7] Baronse-Adesi, G., Giannopoulos, K., Vosper, L., 1999. *VaR without Correlations for Nonlinear Portfolios*. In Journal of Futures Markets,19.
- [8] Baronse-Adesi, G., Giannopoulos, K., Vosper, L., 2000. *Filtering Historical Simulation. Backtest Analysis*. Working Paper.
- [9] Berndt, E. R., 1996. *The Practice of Econometrics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- [10] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Reinsel, G .C., 1996. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Prentice Hall, Inc, New Yersey.
- [11] Campbell, S., 2005. *A Review of Backtesting and Backtesting Procedures*. In Finance and Economics Discussion Series.

- [12] Dowd, K., 2002. *Measuring Market Risk*. John Wiley & Sons, LTD, West Sussex, England.
- [13] Engle, R., 2002. *Dynamic Conditional Correlation - A Simple Class of Multivariate GARCH Models*. In Fourthcoming Journal of Business and Economic Statistics.
- [14] Engle, R. F., Sheppard K., 2001. *Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH*
- [15] Güner, B., Rachev, S. T., Edelman, D., Fabozzi, J., 2010. *Bayesian Inference for Hedge Funds with Stable Distribution of Returns*. In Working Paper Series in Economics, No. 1.
- [16] Harcek, M., 2010. *Neparametrické a semiparametrické metódy odhadu Value at Risk*. Diplomová práca, Univerzita Komenského v Bratislave.
- [17] Christoffersen, P., 1998. *Evaluating Interval Forecasts*. In International Economic Review, 39.
- [18] Christoffersen, P., 2006. *Value-at-Risk Models*. In Handbook of Financial Time Series.
- [19] Christoffersen, P., Goncalves, S., 2004. *Estimation Risk in Financial Risk Management*. Working Paper.
- [20] Krátka, J., 2006. *GARCH modely a Value-at-Risk aplikácie*. Diplomová práca, Univerzita Komenského v Bratislave.
- [21] Kuester, K., Mitink S., Paoletta S., 2006. *Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies*. In Journal of Financial Econometrics, Vol. 4, No. 1.
- [22] Kupiec, P., 1995. *Techniques for Verifying and the Accuracy of Risk Measurement Models*. In Journal of Derivatives, 3.
- [23] Mikloška M., 2008. *Modely kointegrovaných časových řad*. Diplomová práca, Univerzita Karlova v Prahe.
- [24] Nozari, M., Raei, S. M., Jahangirl, P., Bahramgirl, M., 2010. *A Comparison of Heavy-tailed VaR Estimates and Filtered Historical Simulation: Evidence from Emerging Markets*. In International Review of Business Research Papers, Vol. 6, No. 4.
- [25] Pritsker, M., 2006. *The Hidden Dangers of Historical Simulations*. In Journal of Banking and Finance.

- [26] Sheppard, K., 2003. *Multi-step Estimation of Multivariate GARCH Models*. Working Paper.
- [27] Silvennoinen A., Teräsvirta T., 2008. *Multivariate GARCH models*. In SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance No. 669.
- [28] Stock, J. H., Watson, M. W., 2002. *Macroeconomic Forecasting Using Diffusion Indexes*. In Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 20, No. 2.
- [29] Würtz, D., Chalabi, Y., Luksan L., 2006. *Parameter Estimation of ARMA Models with GARCH/APARCH Errors An R and SPlus Software Implementation*. In Journal of Statistical Software.
- [30] Zivot, E., 2005. *Unit Root Tests*. Working paper, University of Washington.

Prílohy

A Metóda historickej simulácie



Obr. 6: Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 metódou historickej simulácie použitím rôznych veľkostí okien

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	1,79%	0,0055(*)	0,0170(*)	-203 678,79 €	64 819,84 €
500	1,79%	0,0055(*)	0,0170(*)	-205 346,46 €	71 764,65 €
750	1,72%	0,0104(*)	0,0081(*)	-231 440,68 €	78 980,95 €

Tabuľka 16: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 99% VaR_{T+1} predikované modelmi historickej simulácie počas obdobia 1508 dní

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	6,37%	0,0193(*)	0,0007(*)	-122 625,25 €	56 117,87 €
500	6,43%	0,0143(*)	0,0268(*)	-118 889,05 €	66 500,30 €
750	6,37%	0,0193(*)	0,0604	-119 397,58 €	71 799,83 €

Tabuľka 17: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 95% VaR_{T+1} predikované modelmi historickej simulácie počas obdobia 1508 dní

Symbolom (*) sú označené hodnoty, ktoré sú daným testom zamietnuté.

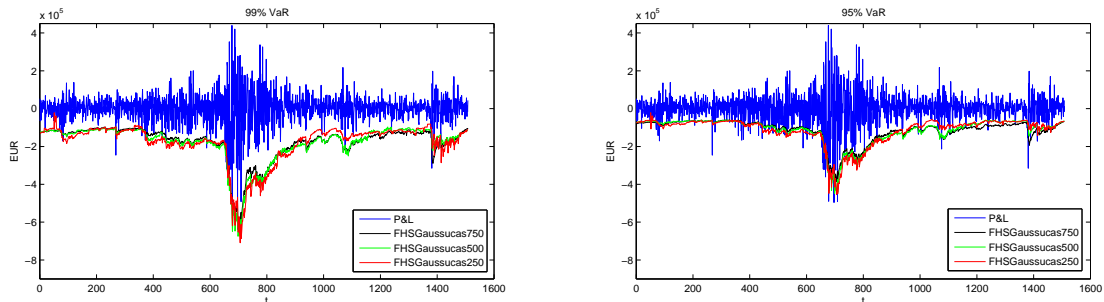
Tučným písmom sú označené najlepšie výsledky testu v prípade jeho prijatia.

Pre Kupiecov a Christoffersenov test je zobrazená hodnota p-value.

B Metóda filtrovanej historickej simulácie

B.1 Prispôsobenia historických dát súčasnej situácii na trhu

B.1.1 Predpoklad podmieneného normálneho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov



Obr. 7: Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 metódou filtrovanej historickej simulácie (3.33) s predpokladom podmieneného normálneho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov použitím rôznych veľkostí okien

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	1,33%	0,2252	0,3663	-179 623,75 €	49 243,89 €
500	1,26%	0,3295	0,4877	-180 189,96 €	38 078,64 €
750	1,26%	0,3295	0,4877	-176 861,09 €	42 440,58 €

Tabuľka 18: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 99% VaR_{T+1} predikované modelmi filtrovanej historickej simulácie (3.33) s predpokladom podmieneného normálneho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov na období 1508 dní

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	5,77%	0,1805	0,0067(*)	-114 884,49 €	41 910,44 €
500	5,90%	0,1177	0,0825	-114 996,14 €	39 413,82 €
750	5,70%	0,2201	0,4146	-114 673,66 €	43 133,38 €

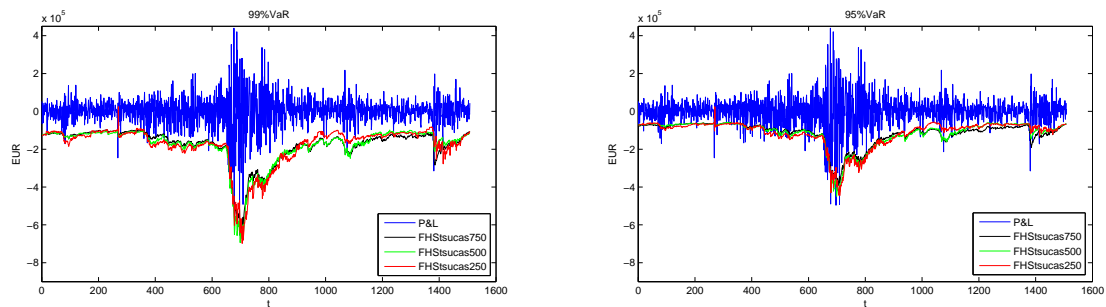
Tabuľka 19: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 95% VaR_{T+1} predikované modelmi filtrovanej historickej simulácie (3.33) s predpokladom podmieneného normálneho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov na období 1508 dní

Symbolom (*) sú označené hodnoty, ktoré sú daným testom zamietnuté.

Tučným písmom sú označené najlepšie výsledky testu v prípade jeho prijatia.

Pre Kupiecov a Christoffersenov test je zobrazená hodnota p-value.

B.1.2 Predpoklad podmieneného studentovho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov



Obr. 8: Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 metódou filtrovanej historickej simulácie (3.33) s predpokladom podmieneného studentovho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov použitím rôznych veľkostí okien

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	1,39%	0,1481	0,2035	-178 666,87 €	50 135,50 €
500	1,06%	0,8136	0,8191	-179 615,74 €	43 967,65 €
750	1,33%	0,2252	0,3663	-178 050,14 €	39 432,19 €

Tabuľka 20: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 99% VaR_{T+1} predikované modelmi filtrovanej historickej simulácie (3.33) s predpokladom podmieneného studentovho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov na období 1508 dní

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	5,64%	0,2659	0,0441(*)	-114 104,31 €	44 414,34 €
500	5,90%	0,1177	0,1446	-115 023,42 €	39 138,34 €
750	5,77%	0,1805	0,3685	-114 854,56 €	41 968,68 €

Tabuľka 21: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 95% VaR_{T+1} predikované modelmi filtrovanej historickej simulácie (3.33) s predpokladom podmieneného studentovho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov na období 1508 dní

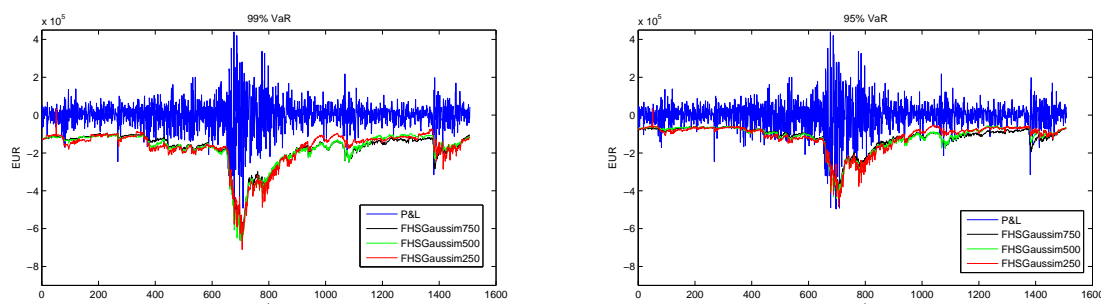
Symbolom (*) sú označené hodnoty, ktoré sú daným testom zamietnuté.

Tučným písmom sú označené najlepšie výsledky testu v prípade jeho prijatia.

Pre Kupiecov a Christoffersenov test je zobrazená hodnota p-value.

B.2 Simulovanie vývoja log. zmien jednotlivých rizikových faktorov v čase $T + 1$

B.2.1 Predpoklad podmieneného normálneho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov



Obr. 9: Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 metódou filtrovanej historickej simulácie (3.35) s predpokladom podmieneného normálneho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov použitím rôznych veľkostí okien

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	1,46%	0,0937	0,1521	-174 580,07 €	51 240,93 €
500	1,19%	0,4633	0,6148	-176 975,32 €	42 224,52 €
750	1,33%	0,2252	0,3663	-176 333,41 €	42 262,35 €

Tabuľka 22: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 99% VaR_{T+1} predikované modelmi filtrovanej historickej simulácie (3.35) s predpokladom podmieneného normálneho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov na období 1508 dní

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	6,03%	0,0738	0,0025(*)	-112 540,67 €	44 171,10 €
500	6,17%	0,0445(*)	0,0293(*)	-114 153,18 €	39 587,07 €
750	5,90%	0,1177	0,2181	-114 344,74 €	43 169,29 €

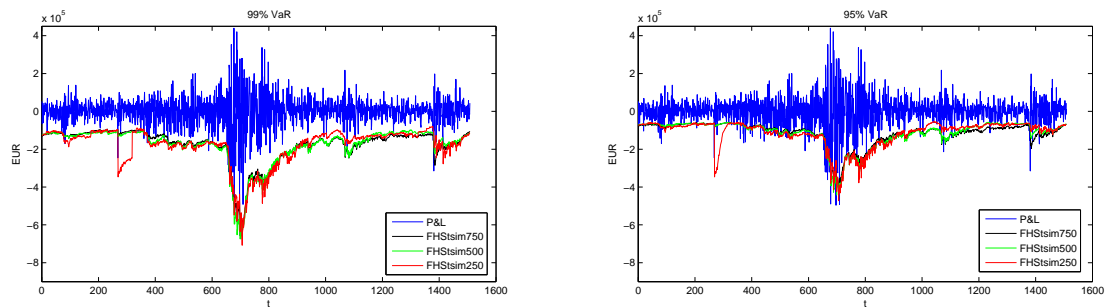
Tabuľka 23: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 95% VaR_{T+1} predikované modelmi filtrovanej historickej simulácie (3.35) s predpokladom podmieneného normálneho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov na období 1508 dní

Symbolom (*) sú označené hodnoty, ktoré sú daným testom zamietnuté.

Tučným písmom sú označené najlepšie výsledky testu v prípade jeho prijatia.

Pre Kupiecov a Christoffersenov test je zobrazená hodnota p-value.

B.2.2 Predpoklad podmieneného studentovho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov



Obr. 10: Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 metódou filtrovanej historickej simulácie (3.35) s predpokladom podmieneného studentovho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov použitím rôznych veľkostí okien

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	1,39%	0,1481	0,2611	-180 520,67 €	49 278,00 €
500	1,19%	0,4633	0,6148	-177 649,91 €	41 104,31 €
750	1,39%	0,1481	0,2611	-176 612,44 €	38 456,59 €

Tabuľka 24: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 99% VaR_{T+1} predikované modelmi filtrovanej historickej simulácie (3.35) s predpokladom podmieneného studentovho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov na období 1508 dní

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	5,84%	0,1465	0,0024(*)	-115 772,59 €	44 835,35 €
500	5,90%	0,1177	0,0825	-114 349,77 €	40 843,68 €
750	5,84%	0,1465	0,2466	-114 806,62 €	42 748,17 €

Tabuľka 25: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 95% VaR_{T+1} predikované modelmi filtrovanej historickej simulácie (3.35) s predpokladom podmieneného studentovho rozdelenia jednotlivých logaritmických zmien rizikových faktorov na období 1508 dní

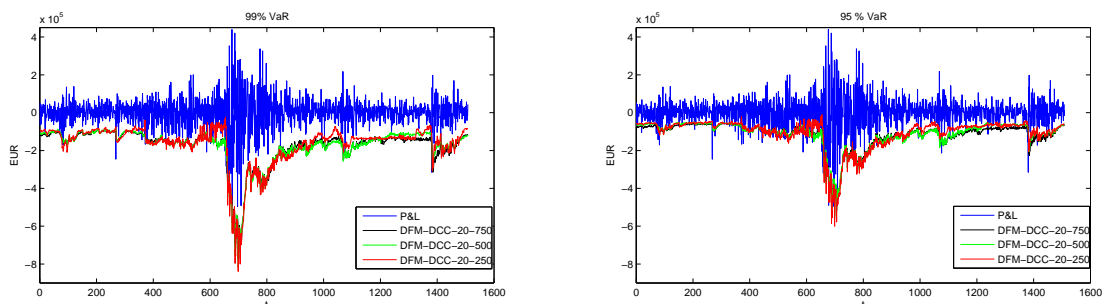
Symbolom (*) sú označené hodnoty, ktoré sú daným testom zamietnuté.

Tučným písmom sú označené najlepšie výsledky testu v prípade jeho prijatia.

Pre Kupiecov a Christoffersenov test je zobrazená hodnota p-value.

C DFM-DCC metóda

C.1 Parametre $k = 2, p = 0$



Obr. 11: Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 0$ použitím rôznych veľkostí okien

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	2,59%	0,0000(*)	0,0000(*)	-166 803,61 €	43 873,62 €
500	1,59%	0,0335(*)	0,0708	-175 318,11 €	36 969,10 €
750	1,53%	0,0571	0,1146	-177 204,17 €	33 008,02 €

Tabuľka 26: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 99% VaR_{T+1} predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 0$ na období 1508 dní

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	7,43%	0,0001(*)	0,0000(*)	-108 390,12 €	40 033,67 €
500	6,56%	0,0077(*)	0,0063(*)	-113 731,52 €	37 003,05 €
750	5,64%	0,2659	0,0990	-116 653,92 €	41 666,02 €

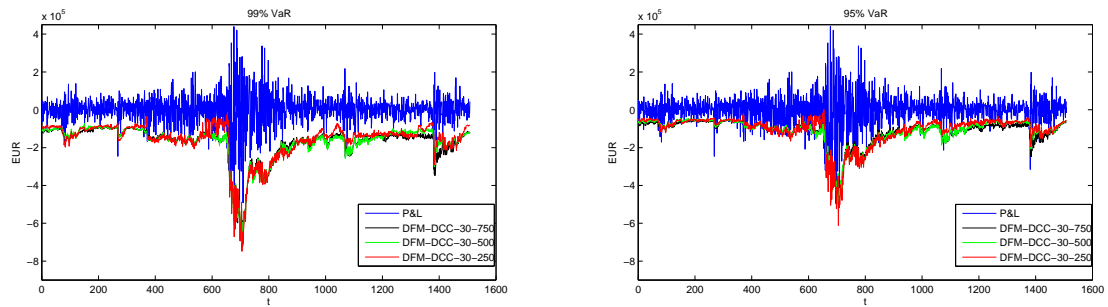
Tabuľka 27: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 95% VaR_{T+1} predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 0$ na období 1508 dní

Symbolom (*) sú označené hodnoty, ktoré sú daným testom zamietnuté.

Tučným písmom sú označené najlepšie výsledky testu v prípade jeho prijatia.

Pre Kupiecov a Christoffersenov test je zobrazená hodnota p-value.

C.2 Parametre $k = 3, p = 0$



Obr. 12: Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 DFM-DCC metódou s parametrami $k = 3, p = 0$ použitím rôznych veľkostí okien

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	2,52%	0,0000(*)	0,0000(*)	-160 652,09 €	50 959,13 €
500	1,72%	0,0104(*)	0,0289(*)	-169 678,61 €	36 833,60 €
750	1,53%	0,0571	0,1146	-172 820,06 €	37 394,19 €

Tabuľka 28: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 99% VaR_{T+1} predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 3, p = 0$ na období 1508 dní

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	7,69%	0,0000(*)	0,0000(*)	-106 136,93 €	41 247,60 €
500	6,90%	0,0014(*)	0,0012(*)	-112 106,24 €	36 562,57 €
750	5,84%	0,1465	0,0885	-114 102,92 €	41 669,43 €

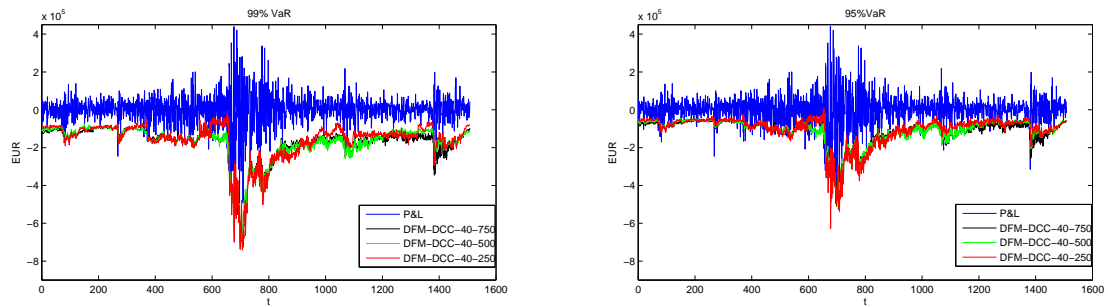
Tabuľka 29: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 95% VaR_{T+1} predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 3, p = 0$ na období 1508 dní

Symbolom (*) sú označené hodnoty, ktoré sú daným testom zamietnuté.

Tučným písmom sú označené najlepšie výsledky testu v prípade jeho prijatia.

Pre Kupiecov a Christoffersenov test je zobrazená hodnota p-value.

C.3 Parametre $k = 4, p = 0$



Obr. 13: Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 DFM-DCC metódou s parametrami $k = 4, p = 0$ použitím rôznych veľkostí okien

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	2,92%	0,0000(*)	0,0000(*)	-161 928,69 €	51 832,20 €
500	1,72%	0,0104(*)	0,0289(*)	-171 167,61 €	38 694,21 €
750	1,53%	0,0571	0,1146	-175 096,62 €	36 761,88 €

Tabuľka 30: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 99% VaR_{T+1} predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 4, p = 0$ na období 1508 dní

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	7,96%	0,0000(*)	0,0000(*)	-105 240,36 €	43 355,93 €
500	6,56%	0,0077(*)	0,0111(*)	-111 222,69 €	39 728,42 €
750	6,03%	0,0738	0,0358(*)	-113 973,74 €	39 778,02 €

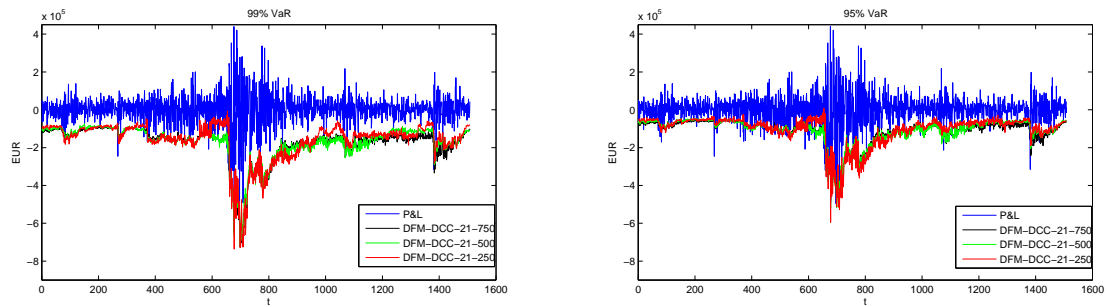
Tabuľka 31: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 95% VaR_{T+1} predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 4, p = 0$ na období 1508 dní

Symbolom (*) sú označené hodnoty, ktoré sú daným testom zamietnuté.

Tučným písmom sú označené najlepšie výsledky testu v prípade jeho prijatia.

Pre Kupiecov a Christoffersenov test je zobrazená hodnota p-value.

C.4 Parametre $k = 2, p = 1$



Obr. 14: Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 1$ použitím rôznych veľkostí okien

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	2,92%	0,0000(*)	0,0000(*)	-162 080,46 €	52 034,90 €
500	1,79%	0,0055(*)	0,0170(*)	-170 089,18 €	36 480,79 €
750	1,46%	0,0937	0,1771	-175 448,79 €	38 534,90 €

Tabuľka 32: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 99% VaR_{T+1} predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 1$ na období 1508 dní

Okno	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
250	8,09%	0,0000(*)	0,0000(*)	-104 489,65 €	43 184,73 €
500	6,70%	0,0039(*)	0,0042(*)	-109 930,88 €	39 317,15 €
750	6,03%	0,0738	0,0168(*)	-111 841,12 €	42 111,38 €

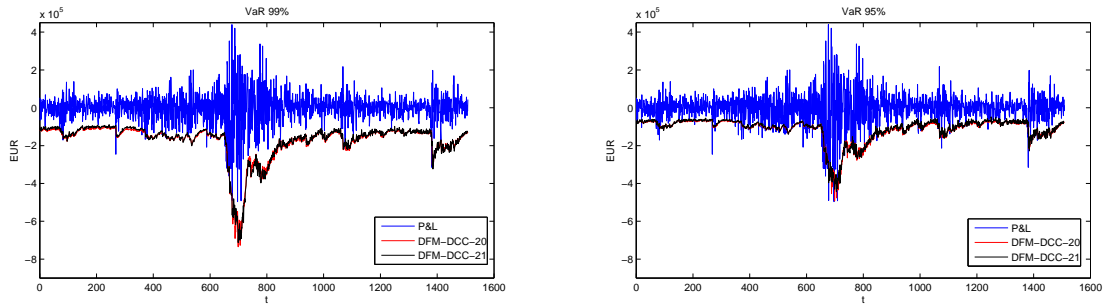
Tabuľka 33: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 95% VaR_{T+1} predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 1$ na období 1508 dní

Symbolom (*) sú označené hodnoty, ktoré sú daným testom zamietnuté.

Tučným písmom sú označené najlepšie výsledky testu v prípade jeho prijatia.

Pre Kupiecov a Christoffersenov test je zobrazená hodnota p-value.

C.5 Parametre $k = 2, p = 1; k = 2, p = 0$ pre okno $n \rightarrow \infty$



Obr. 15: Predikované 99% a 95% VaR_{T+1} počas obdobia 27.1.2006 až 10.2.2012 DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 0; k = 2, p = 1$ pre $n \rightarrow \infty$

k	p	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
2	0	1,33%	0,2252	0,3663	-175 533,92 €	41 763,38 €
2	1	1,59%	0,0335(*)	0,0708	-171 893,01 €	38 143,60 €

Tabuľka 34: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 99% VaR_{T+1} predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 0; k = 2, p = 1$ pre $n \rightarrow \infty$ na období 1508 dní

k	p	Prekroč. (%)	Kupiec. test	Christ. test	Priem. VaR_{T+1}	Priem. prekroč.
2	0	5,57%	0,3180	0,6001	-115 018,48 €	42 857,22 €
2	1	6,36%	0,0193(*)	0,0102(*)	-111 176,01 €	39 354,65 €

Tabuľka 35: Spätné testovanie na 5% ($\omega = 0,05$) hladine významnosti a hodnoty poradných štatistík pre 95% VaR_{T+1} predikované DFM-DCC metódou s parametrami $k = 2, p = 0; k = 2, p = 1$ pre $n \rightarrow \infty$ na období 1508 dní

Symbolom (*) sú označené hodnoty, ktoré sú daným testom zamietnuté.

Tučným písmom sú označené najlepšie výsledky testu v prípade jeho prijatia.

Pre Kupiecov a Christoffersenov test je zobrazená hodnota p-value.

D Zoznam rizikových faktorov testovacieho portfólia

Rizikové faktory		
Akcie	Deutsche Bank AG POSCO Chevron Corp Infosys Ltd Public Storage El du Pont de Nemours & Co Alexandria Real Estate Equitie Merck & Co Inc Humana Inc Teva Pharmaceutical Industries China Mobile Ltd Petroleo Brasileiro SA-ADR Harris Corp ProLogis Inc Forrest Laboratories Inc The Procter & Gamble Co Public Service Enterprise Grou Altria Group Inc Microsoft Corp Constellation Brands Inc Tyson Foods Inc CMS Energy Corp Gazprom OAO Cephalon Inc	Daimler AG FedEX Franklin Resources Inc Simon Property Group Inc. Petroleo Brasileiro SA Amgen Inc Vornado Realty Trust Entergy Corp Eli Lilly & Co America Movil SAB de CV L-3 Communications Holdings In Mobil Telesystems OJSC Kimco Realty Corp Johnson & Johnson Analog Devices Inc Vale SA Intel Corp Pfizer Inc Cisco Systems Inc Lukoil OAO MMC Norilsk Nickel OJSC Taiwan Semiconductor Manufactu Surgutneftgas Bayerische Motoren Werke AG
Dlhopisy	1 yr US 1 yr FR 1 yr DE 1 yr GB	2 yr US 2 yr FR 2 yr DE 2 yr GB
Kurzy	USD-EUR	GBP-EUR

Tabuľka 36: Zoznam rizikových faktorov testovacieho portfólia

E Výpočet základných štatistických ukazovateľov testovaného portfólia

Deskriptívne štatistiky sú počítane na období 1508 dní.

$$\begin{aligned}E(P\&L_t) &= \frac{1}{1508} \sum_{t=1}^{1508} P\&L_t \\Var(P\&L_t) &= \frac{1}{1508} \sum_{t=1}^{1508} (P\&L_t - E(P\&L_t))^2 \\Std(P\&L_t) &= \sqrt{Var(P\&L_t)} \\Skew(P\&L_t) &= \frac{\frac{1}{1508} \sum_{t=1}^{1508} (P\&L_t - E(P\&L_t))^3}{\left(\frac{1}{1508} \sum_{t=1}^{1508} (P\&L_t - E(P\&L_t))^2\right)^{3/2}} \\Kur(P\&L_t) &= \frac{\frac{1}{1508} \sum_{t=1}^{1508} (P\&L_t - E(P\&L_t))^4}{\left(\frac{1}{1508} \sum_{t=1}^{1508} (P\&L_t - E(P\&L_t))^2\right)^2}\end{aligned}$$