

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Analýza bifurkácií v modeli  
fundamentalistov a chartistov

Diplomová práca

2012

Bc. Mária Kornhauserová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Analýza bifurkácií v modeli  
fundamentalistov a chartistov

Diplomová práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika 1114

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.

Bratislava 2012

Bc. Mária Kornhauserová



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

### ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Mária Kornhauserová  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Analýza bifurkácií v modeli fundamentalistov a chartistov

**Cieľ:** Exaktne analyzovať charakter Hopfovej bifurkácie v modeli vývoja ceny špekulatívneho aktíva pri dvoch typoch agentov - fundamentalistov a chartistov.

**Vedúci:** prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

**Dátum zadania:** 14.01.2011

**Dátum schválenia:** 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

## **Čestné prehlásenie:**

Týmto prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím teoretických vedomostí a uvedenej literatúry.

V Bratislave, 26. apríla 2012

## **PodĀkovanie:**

Moje veľké úprimné Āakujem patŕi vedúcemu mojej diplomovej práce prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za jeho odbornú pomoc, neoceniteľné rady, cenné pripomienky, taktieĹ za poskytnutú literatúru a hlavne za ochotu a čas počas konzultácií, ako aj za starostlivé vedenie pri vypracovaní diplomovej práce.

# Abstrakt

KORNHAUSEROVÁ, Mária: Analýza bifurkácií v modeli fundamentalistov a chartistov [diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Školenie: Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc. Bratislava: FMFI UK, 2012, str.45.

Diplomová práca sa zaoberá modelom vývoja ceny pri dvoch typoch agentov-fundamentalistov a chartistov, ako je uvedný v článku *Chiarella* [4]. V práci sme spočítali, že pre hodnotu parametra  $b$  väčšiu ako 1 nastáva v modeli Andronovova-Hopfova bifurkácia. Podrobnými výpočtami sme zistili, že charakter bifurkácie závisí od tretej derivácie funkcie  $k(\psi)$ . Ak je táto tretia derivácia väčšia ako 0, tak nastáva subkritická bifurkácia a naopak ak je menšia ako 0, tak nastáva superkritická bifurkácia. Analýza bifurkácie je doplnená o analýzu správania modelu pri veľmi krátkom časovom oneskorení informovania, ktoré vykazuje relaxačné oscilácie.

Kľúčové slová: fundamentalisti, chartisti, bifurkácia

# Abstract

KORNHAUSEROVÁ, Mária: Analysis of bifurcations in the model of fundamentalists and chartists [diploma thesis]. Comenius University Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of applied Mathematics and Statistics, Diploma advisor: Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc. Bratislava: FMFI UK, 2012, str.45.

This thesis deals with price development in a model with two types of agents-fundamentalists and chartists, as stated in article *Chiarella* [4]. We argue that the Andronov-Hopf bifurcation if the parameter  $b$  is greater 1 occurs. By detailed calculations, we found that the type of bifurcation depends on the third derivative of the function  $k(\psi)$ . If the third derivative is greater than 0, then the bifurcation is subcritical and vice versa, if it is less than 0, the bifurcation is supercritical. Bifurcation analysis is completed by analyzing the behavior of the model in a very short time information delay exhibiting relaxation oscillations.

Keywords: fundamentalists, chartists, bifurcation

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>8</b>
<b>1 Model fundamentalistov a chartistov</b>	<b>9</b>
1.1 Odvodenie modelu fundamentalistov a chartistov . . . . .	11
1.2 Dynamická analýza . . . . .	13
1.3 Lokálna lineárna analýza . . . . .	15
1.4 Klasifikácia pevných bodov . . . . .	16
<b>2 Andronovova-Hopfova bifurkácia modelu fundamentalistov a chartis-</b>	<b>18</b>
<b>tov</b>	
2.1 Podmienka bifurkácie . . . . .	19
2.2 Transformácia modelu . . . . .	20
2.3 Andronovova-Hopfova bifurkácia . . . . .	23
<b>3 Relaxačné oscilácie modelu fundamentalistov a chartistov</b>	<b>27</b>
3.1 Úvod do singulárnych perturbácií . . . . .	27
3.2 Van der Polov systém . . . . .	28
3.3 Analýza fázového portréту . . . . .	34
3.4 Singulárne perturbácie modelu fundamentalistov a chartistov . . . . .	37
<b>Záver</b>	<b>42</b>
<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>43</b>
<b>Literatúra</b>	<b>44</b>



# Úvod

Cieľom tejto diplomovej práce je exaktná analýza charakteru Hopfovej bifurkácie v modeli vývoja ceny špekulatívneho aktíva pri dvoch typoch agentov - fundamentalistov a chartistov.

V prvej kapitole sa bližšie oboznámime s modelom a odvodíme ho tak ako je uvedený v článku *Chiarella* [4]. Budeme sa mu venovať ako dynamickému systému. Určíme pevný bod, budeme sa venovať správaniu sa systému v okolí pevného bodu a určíme oblasti stability a nestability.

Na začiatku druhej kapitoly uvidíme teóriu o Andronovovej-Hopfovej bifurkácii, ktorej bude venovaná celá táto kapitola, ktorá je jadrom práce. Určíme podmienku bifurkácie a určíme jej charakter.

Tretia kapitola bude venovaná relaxačným osciláciám. Na začiatku kapitoly objasníme teóriu singulárnych perturbácií, potom uvidíme jeden z najstarších príkladov, ktorým je van der Polov systém a nakoniec vysvetlíme singulárne perturbácie modelu fundamentalistov a chartistov.

# Kapitola 1

## Model fundamentalistov a chartistov

Väčšina ekonomickej teórie prešla počas posledných desaťročí zmenami. Budúce správanie cien aktív matematici aj ekonómovia odhadujú rôznymi spôsobmi. V posledných rokoch klesá popularita odhadov, ktoré boli založené na teórií, že účastníci trhu sú identickí. Na rozdiel od nich model heterogénnych agentov rozoznáva rozdiely medzi agentmi. Heterogénny agenti nie sú striktne racionálni, ale menia svoje správanie v závislosti od okamžitej situácie. Modely heterogénnych agentov sa viac približujú realite, keďže ani ľudia nie sú racionálni, pretože majú obmedzené vedomosti a pod tlakom nekonajú rozumne. Inak povedané agenti sú racionálni s určitými obmedzeniami. V ekonómii nie je pojem obmedzená racionalita presne definovaný, ale napriek tomu bol použitý v mnohých prípadoch, prevažne pre zlé alebo neúplné modely.

Modely heterogénnych agentov rozlišujú sa dva typy agentov, t.j. že akciový trh pozostáva z dvoch skupín obchodníkov, ktorými sú:

*Fundamentalisti:* zakladajú svoje obchodné rozhodovanie na odhade fundamentálnej hodnoty aktív

*Chartisti:* sa spoliehajú na analýzu minulých trendov cien

Fundamentalisti sa preto prikláňajú k tomu, že investujú do aktív, ktoré sú podhodnotené vzhľadom na nimi predpokladanú fundamentálnu hodnotu a predávajú tie, ktoré považujú za nadhodnotené. Naproti tomu chartisti sa snažia

extrapolovať pozorované priebehy cien a využiť ich pri svojich investičných rozhodnutiach.

Modelom heterogénnych agentov sa zaoberali matematici vo viacerých prácach ako napríklad:

- Medzi prvých patrí *Zeeman* [10], ktorý rozdelil akciový trh na medvedí a býčí s tým, že investori na medveďom trhu sú pesimisti a na býčom optimisti. Zeemanov model je aplikáciou teórie katastrof a zahŕňa fundamentalistov a chartistov.
- *Frankel a Froot* [10] sa vo svojom modeli výmenných kurzov zaoberajú fluktuáciami, ktoré sú okrem iného spôsobené očakávaniami a správaním investorov. Tento model zahŕňa tri skupiny agentov, ktorí sú racionálni a konajú podľa svojho presvedčenia:
  - *fundamentalisti* očakávajú, že sa ceny riadia ekonomickými fundamentami,
  - *chartisti* analyzujú minulé zmeny cien,
  - *portfólio manažéri* robia rozhodnutia na základe váženého priemeru očakávaní fundamentalistov a chartistov, pričom váhy menia podľa toho, ktoré odhady sú presnejšie.
- Modelom heterogénnych agentov sa zaoberá vo svojej diplomovej práci *Boďová* [1] a taktiež bol spracovaný v článku *Brunovský, Erdélyi a Walther* [3]. Aj tento model zahŕňa rozdiely medzi inverstormi a predpokladá, že agenti môžu meniť svoje správanie na základe stavu trhu a správajú sa podľa dvoch už spomínaných očakávacích mechanizmov.
- *Chiarella, Dieci a Gardini* [5] publikovali článok, ktorý sa tiež zaoberá modelom, v ktorom sú agenti rozdelení na fundamentalistov a chartistov.
- Diplomová práca *Lukašíková* [12] sa zaoberá modelmi fluktuácií výmenných kurzov a nadväzuje na článok *Chiarella, Dieci a Gardini* [5]. Je zameraná na modely s obmedzenými racionálnymi heterogénnymi agentmi. Bližšie sa

zaobrá troji už spomínanými modelmi s diskretným časom, ich odvodením a porovnaním vybraných modelov. Analyzuje spojitú verziu jedného modelu. V prípade nestability je pre tento model dokázaná existencia limitného cyklu, ktorá je potvrdená počítačovou simuláciou.

- V bakalárskej práci *Guliš* [8] sú analyzované stabilné vlastnosti a bifurkácie modelu heterogénnych agentov, zaoberá sa kvalitatívnou analýzou vybraného modelu s diskretným a spojitým časom. Podrobne odvádza model heterogénnych agentov a venuje sa mu ako dynamickému systému. Diskutuje jeho rovnovážne stavy a oblasti stability, taktiež odvádza spojitú verziu. Jadrom bakalárskej práce sú numerické simulácie pre model heterogénnych agentov s danými parametrami.

## 1.1 Odvodenie modelu fundamentalistov a chartistov

Nadväzujeme na model *Chiarella* [4]. Predpokladom pre odvodenie modelu je, že cenové zmeny sú vyvolané agregátnym dopytom investorov a že rýchlosť prispôsobovania cien je konečná. Matematicky môže byť vyjadrený ako

$$\dot{P}(t) = D(t), \quad (1.1.1)$$

kde  $P(t)$  označuje logaritmus ceny aktív v čase  $t$  a  $D(t)$  dopyt v čase  $t$ , čo znamená, že čím väčší dopyt, tým viac ceny rastú. Rozložíme dopytovú funkciu

$$D(t) = D_0(t) + d(t), \quad (1.1.2)$$

kde  $D_0(t)$  je dopyt fundamentalistov. Druhá zložka agregátneho dopytu  $d(t)$  je agregátny dopyt chartistov. Označme  $W(t)$  hodnotu logaritmu ceny, pri ktorej je dopyt fundamentalistov nulový. Predpokladáme, že dopyt fundamentalistov je lineárna funkcia odchýlky od  $W(t)$ , t.j.

$$D_t^0(.) = a(W(t) - P(t)), \quad (1.1.3)$$

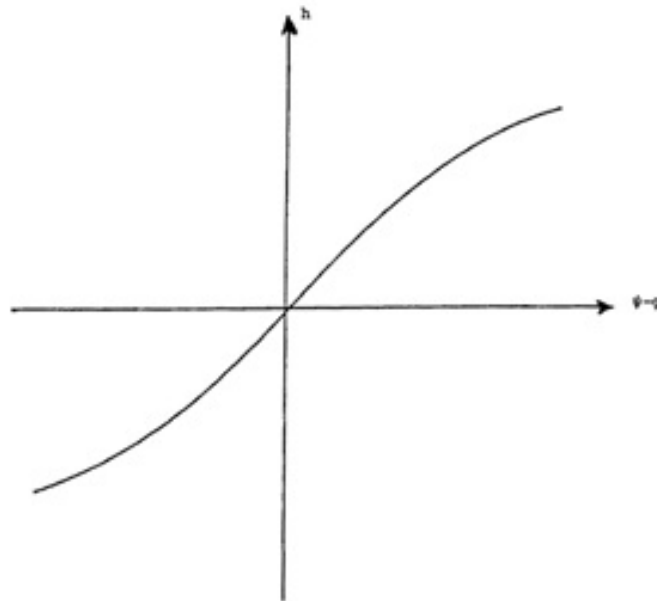
kde  $a$  je kladná konštanta.

Nech  $\psi(t)$  označuje odhad súčasného trendu vývoja  $P(t)$  chartistami a  $g(t)$  je výnos bezrizikového aktíva. Predpokladáme, že dopyt chartistov je nelineárna funkcia

$$d_t(\cdot) = h(\psi(t) - g(t)), \quad (1.1.4)$$

kde funkcia  $h$  má vlastnosti

$$\begin{aligned} h'(x) &> 0 \quad \forall x, \\ h(0) &= 0, \\ \text{existuje } x^* &\text{ také, že } h''(x) < 0 (> 0) \quad \forall x > x^* (< x^*), \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} h'(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.5)$$



Obr. 1.1: Funkcia  $h$

Ešte musíme špecifikovať, akým spôsobom chartisti tvoria svoj odhad  $\psi$ . Jeden z najjednoduchších predpokladov, ktoré môžeme urobiť je, že  $\psi$  je exponenciálne klesajúci vážený priemer minulých cien a teda je riešením diferenciálnej rovnice

$$\dot{\psi}(t) = c(\dot{P}(t) - \psi(t)) \quad (1.1.6)$$

$$\psi(t) = e^{-ct}\psi(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-c(t-s)} c\dot{P}(s) ds$$

$$\psi(t) = ce^{-ct} \int_0^t e^{cs} \dot{P}(s) ds,$$

kde  $c$  ( $0 < c < \infty$ ) je rýchlosť, s akou chartisti dokážu prispôbiť svoj odhad trendu posledných zmien cien.  $\tau$  ( $= \frac{1}{c}$ ) možno považovať za časové oneskorenie pri informovaní.

Všimnite si, že pre  $c \rightarrow \infty$  ( $\tau \rightarrow 0$ ) chartisti tvoria svoj odhad cenového vývoja iba z okamžitej zmeny, t.j.  $\psi(t) \dot{P}(t)$ . Tomuto sa budeme venovať v kapitole 3.

Z rovníc (1.1.1) a (1.1.6) vyplýva, že dynamiky cien aktív sú

$$\dot{P} = a(W - P) + h(\psi - g) \quad (1.1.7)$$

a

$$\dot{\psi} = -acP - c\psi + ch(\psi - g) + acW \quad (1.1.8)$$

čo predstavuje dvojrozmerný systém nelineárnych diferenciálnych rovníc.

## 1.2 Dynamická analýza

Budeme predpokladať, že  $W$  a  $g$  sú konštantné. Kvôli ďalšej analýze vypočítame rovnováhu systému.

Rovnováha systému (1.1.7) a (1.1.8) je

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= 0 \\ \bar{P} &= W + \frac{h(0 - g)}{a} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

**Veta 1.2.1.** [2] Uvažujme rovnicu

$$\dot{x} = ax + b \quad (1.2.2)$$

1. Ak  $a = 0$ , potom jediné riešenie prechádzajúce cez bod  $(t_0, x_0)$  je

$$x(t) = x_0 + b(t - t_0)$$

2. Ak  $a \neq 0$ , potom (1.2.2) má pevný bod, t.j. konštantné riešenie  $\hat{x}(t) \equiv \hat{x}$ , ktoré musí spĺňať  $\hat{x} \equiv 0$ , t.j.

$$a\hat{x} + b = 0,$$

alebo

$$\hat{x} = -\frac{b}{a}.$$

Pre odchýlku  $y(t)$  riešenia  $x(t)$  od  $\hat{x}$ ,  $y(t) = x(t) - \hat{x} = x(t) + \frac{b}{a}$  dostávame

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = ax(t) + b = a \left( y(t) - \frac{b}{a} \right) + b = ay(t),$$

V dôsledku toho je  $y(t)$  riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice  $\dot{x} = ax$ . Jej riešenia sú

$$y(t) = y(t_0)e^{a(t-t_0)}.$$

Preto funkcia

$$x(t) = -\frac{b}{a} + \left[ x(t_0) + \frac{b}{a} \right] e^{a(t-t_0)}$$

je riešenie (1.2.2) prechádzajúce cez bod  $(t_0, x_0)$ .

Ak nahradíme cenu jej odchýlkou od rovnovážnej hodnoty  $p = P - \bar{P}$ , tak systém (1.1.7) a (1.1.8) bude v tvare

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -ap + k(\psi) \\ \tau \dot{\psi} &= -ap - \psi + k(\psi), \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

kde

$$k(\psi) = h(\psi - g) - h(-g) \tag{1.2.4}$$

Funkcia  $k(\psi)$  má nasledujúce vlastnosti

$$\begin{aligned} k'(\psi) &> 0 \forall \psi, \\ k(0) &= 0, \\ k(\psi) &= -k(-\psi), \\ \psi k''(\psi) &< 0, \\ k'(0) &> 1, \\ k'(\infty) &< 1 \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Potom rovnováha systému diferenciálnych rovníc (1.2.3) je  $\bar{p} = \bar{\psi} = 0$ . Cieľom práce je analyzovať lokálne asymptotické správanie sa riešenia v okolí stacionárneho bodu v závislosti od parametrov a najmä charakter zmien správania.

## 1.3 Lokálna lineárna analýza

**Definícia 1.3.1.** [9] Ak  $(\hat{x}, \hat{y})$  je pevným bodom systému

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y),$$

potom systém

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(\hat{x}, \hat{y}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

kde  $J(\hat{x}, \hat{y})$  je Jacobiho matica

$$J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix}$$

sa nazýva linearizácia systému v pevnom bode  $\hat{x}, \hat{y}$ .

Stabilitné vlastnosti určujeme podľa vlastných hodnôt Jacobiánu vyčísleného v rovnováhe. Jacobián matice systému diferenciálnych rovníc (1.2.3) vyčíslený v pevnom bode  $(\bar{\psi}, \bar{p}) = 0$

$$J = \begin{bmatrix} -a & b \\ \frac{-a}{\tau} & \frac{b-1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad (1.3.1)$$

kde  $b = h'(-g)$ . Ďalej spočítame determinant matice  $J$

$$\det(J) = \frac{a}{\tau} \quad (1.3.2)$$

a stopu matice  $J$

$$\text{stopa}(J) = -a + \frac{b-1}{\tau}. \quad (1.3.3)$$

Spočítame vlastné hodnoty z charakteristického polynómu

$$\lambda^2 + \lambda \left( a - \frac{b-1}{\tau} \right) + \frac{a}{\tau} \quad (1.3.4)$$

a v medzikroku spočítame diskriminant

$$D = \left( a - \frac{b-1}{\tau} \right)^2 - 4 \frac{a}{\tau} \quad (1.3.5)$$

a dostávame vlastné hodnoty Jacobiánu

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a + \frac{b-1}{\tau} \pm \sqrt{\left( a - \frac{b-1}{\tau} \right)^2 - 4 \frac{a}{\tau}}}{2} \quad (1.3.6)$$



## 1.4 Klasifikácia pevných bodov

**Veta 1.4.1.** [2] *Nech  $f \in C^1$ ,  $f(\hat{x}) = 0$ . Potom stabilné riešenie  $x(t) \equiv \hat{x}$  diferenciálnej rovnice  $\dot{x} = f(x)$  je*

- *asymptoticky stabilné, ak reálne časti všetkých vlastných hodnôt matice  $J(\hat{x})$  sú záporné*
- *nestabilné, ak reálna časť aspoň jednej vlastnej hodnoty  $J(\hat{x})$  je kladná.*

$\det(J) = 0$			neizolované pevné body
$\det(J) < 0$	$D > 0$		sedlo
$\det(J) > 0$	$D > 0$	$\text{stopa}(J) > 0$	nestabilný uzol
		$\text{stopa}(J) < 0$	stabilný uzol
		$D < 0$	nestabilný fokus
	$D < 0$	$\text{stopa}(J) > 0$	stabilný fokus
		$\text{stopa}(J) < 0$	centrum
		$D = 0$	$\text{stopa}(J) > 0$
		$\text{stopa}(J) < 0$	degenerovaný stabilný uzol

Tabuľka 1.1: Klasifikácia pevných bodov

Predovšetkým si všimnime, že  $\det(J) = \frac{a}{\tau} > 0$ , čo vylučuje sedlový bod, takže lokálne cesty sa buď všetky približujú k rovnováhe, vtedy nastáva lokálna stabilita, alebo od nej divergujú a ide o nestabilitu. Ak chceme zistiť, o ktorý prípad ide musíme skúmať stopu matice. Rovnováha je lokálne stabilná, ak

$$\tau > \frac{b-1}{a} = \tau^* \quad (1.4.1)$$

a nestabilná, ak platí

$$\tau < \frac{b-1}{a} = \tau^*. \quad (1.4.2)$$

V tomto označení budú vlastné hodnoty Jacobiánu v tvare

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \left(1 - \frac{\tau^*}{\tau}\right) \pm \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{\tau^*}{\tau}\right)^2 - 4\frac{a}{\tau}}}{2} \quad (1.4.3)$$

môžu byť reálne alebo imaginárne podľa toho, či diskriminant je  $> 0$  alebo  $< 0$ . My sa zameriame na prípad, keď je diskriminant záporný, vtedy pri prechode

$\tau$  cez kritickú hodnotu sa stacionárne riešenie mení zo stabilného na nestabilný fokus.

## Kapitola 2

# Andronovova-Hopfova bifurkácia modelu fundamentalistov a chartistov

Pri Andronovovej-Hopfovej bifurkácii vzniká periodická trajektória zo singulárneho bodu. Pri splnení ďalších podmienok nastáva pri prechode komplexne združeného páru vlastných čísel linearizácie cez imaginárnu os nenulovou rýchlosťou.

Uvažujme systém  $\dot{x} = f_\mu(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C^3$  a predpokladajme, že pre  $\mu$  blízke  $\mu_0$  je  $x_0$  stacionárnym riešením, t.j.  $f_{\mu_0}(x_0) = 0$ , a že  $D_x f_{\mu_0}(x_0)$  má jednoduchú dvojicu rýdzo imaginárnych vlastných čísel  $\pm i\beta_0$ . Za tohto predpokladu  $D_x f_\mu(x_0)$  má dvojicu komplexne združených vlastných hodnôt  $\lambda(\mu)$ ,  $\bar{\lambda}(\mu)$ , ktorá hladko závisí od  $\mu$  a platí  $\lambda(\mu) = i\beta_0$ .

Označme

$$d = \frac{d}{d\mu}(\operatorname{Re}\lambda(\mu))|_{\mu=\mu_0} \neq 0.$$

**Veta 2.0.2.** [7] Ak

$$d \neq 0,$$

tak potom existuje  $C^3$  hladká lokálna sústava súradníc v bode  $(x_0, \mu_0)$ , v ktorej systém  $\dot{x} = f_\mu(x)$  s presnosťou rádu 3 má tvar

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (d\mu + \alpha(x^2 + y^2))x - (\beta_0 + c\mu + b(x^2 + y^2))y \\ \dot{y} &= (\beta_0 + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + \alpha(x^2 + y^2))y\end{aligned}\tag{2.0.1}$$

Ak  $\alpha < 0$ , potom existuje plocha periodických riešení, ktoré sú stabilné limitné cykly, zatiaľ čo pre  $\alpha > 0$  sú periodické riešenia odpuzujúce.

**Veta 2.0.3.** Ak  $\alpha \neq 0$ , potom v priestore  $(x, \mu)$  existuje hladká plocha vyplnená periodickými riešeniami a bodom  $(x_0, \mu_0)$ . Plocha je obsiahnutá v podpriestore  $\mu \geq \mu_0$  ak  $\alpha d < 0$  a v podpriestore  $\mu \leq \mu_0$  ak  $\alpha d > 0$ . Ďalej platí

- i. V prípade, ak  $\alpha d < 0$  sú periodické riešenia asymptoticky stabilné, ak  $d > 0$  a stacionárne riešenie je nestabilné pre  $\mu > \mu_0$  a stabilné pre  $\mu < \mu_0$ . (superkritická bifurkácia)
- ii. V prípade, ak  $\alpha d < 0$  sú periodické riešenia nestabilné, ak  $d < 0$  a stacionárne riešenie je nestabilné pre  $\mu < \mu_0$  a stabilné pre  $\mu > \mu_0$ . (subkritická bifurkácia)
- iii. V prípade, ak  $\alpha d > 0$  sú periodické riešenia nestabilné, ak  $d > 0$  a stacionárne riešenie je nestabilné pre  $\mu > \mu_0$  a stabilné pre  $\mu < \mu_0$ . (subkritická bifurkácia)
- iv. V prípade, ak  $\alpha d > 0$  sú periodické riešenia asymptoticky stabilné, ak  $d < 0$  a stacionárne riešenie je nestabilné pre  $\mu < \mu_0$  a stabilné pre  $\mu > \mu_0$ . (superkritická bifurkácia)

Prvým krokom k použitiu vety bude vypočítanie bifurkačného bodu na imaginárnej osi, čiže reálna časť vlastných čísel je nulová a musí platiť

$$-a \left( 1 - \frac{\tau^*}{\tau} \right) = 0 \quad (2.0.2)$$

čo nastáva v bode

$$\tau^* = \tau \Rightarrow \tau = \frac{b-1}{a}. \quad (2.0.3)$$

Tento bod sa nazýva bodom bifurkácie alebo bifurkačný bod.

## 2.1 Podmienka bifurkácie

Nutnou podmienkou Hopfovej bifurkácie je, že linearizácia v stabilnom bode má komplexnú dvojicu vlastných čísel s nulovou reálnou časťou. Najskôr overíme, či pre podmienku bifurkačného bodu (2.0.3) môžu byť vlastné hodnoty reálne, t.j. či môže byť diskriminant kladný.

$$a^2 \left( 1 - \frac{\tau^*}{\tau} \right)^2 - 4 \frac{a}{\tau} > 0$$

Dosadíme podmienku bifurkačného bodu  $\tau^* = \tau = \frac{b-1}{a}$ . Dostávame

$$-4\frac{a}{\frac{b-1}{a}} > 0$$

$$-4\frac{a^2}{b-1} \not> 0 \text{ pre } b > 1.$$

Overíme, či za podmienky bifurkačného bodu dostaneme komplexné vlastné hodnoty, t.j. za akého obmedzenia bude splnená podmienka bifurkačného bodu (2.0.3) a zároveň bude diskriminant záporný

$$a^2 \left(1 - \frac{\tau^*}{\tau}\right)^2 - 4\frac{a}{\tau} < 0 \wedge \tau^* = \tau = \frac{b-1}{a}$$

$$-4\frac{a}{\frac{b-1}{a}} < 0$$

$$-4\frac{a^2}{b-1} < 0 \text{ pre } b > 1,$$

tak dostávame nutnú podmienku pre Andronovovu-Hopfovú bifurkáciu, ktorá je

$$b > 1. \tag{2.1.1}$$

Všimnime si, že po splnení tejto podmienky pre Andronovovu-Hopfovú bifurkáciu bifurkačný bod (2.0.3) bude kladný. Zahrnutím podmienky bifurkačného bodu (2.0.3) dostávame komplexne združený pár rýdzo imaginárnych vlastných hodnôt

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}i\sqrt{4\frac{a^2}{b-1}}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm ia\sqrt{\frac{1}{b-1}}. \tag{2.1.2}$$

## 2.2 Transformácia modelu

Náš model heterogénnych agentov pretransformujeme na normálnu formu, z ktorej budeme ďalej počítať hodnoty, z ktorých určíme typ Andronovovej-Hopfovej bifurkácie. Najskôr v systéme (1.2.3) spravíme Taylorov rozvoj do druhého rádu pre funkciu  $k(\psi)$

$$k(\psi) = b\psi + \tilde{k}(\psi), \tag{2.2.1}$$

kde  $\tilde{k}(\psi) = k(\psi) - b\psi = O(\psi^2)$ , čo označuje členy vyššieho rádu pre funkciu  $k(\psi)$ . Po dosadení dostávame systém v tvare

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -ap + b\psi + \tilde{k}(\psi) \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{\tau}(-ap - \psi) + \frac{b}{\tau}\psi + \frac{1}{\tau}\tilde{k}(\psi). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Zahrnutím podmienky bifurkačného bodu  $\tau = \tau^* = \frac{b-1}{a}$  (2.0.3) bude systém v tvare

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \psi \\ p \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} \psi \\ p \end{pmatrix}, \quad (2.2.3)$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ -\frac{a^2}{b-1} & a \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

a funkcia  $f \begin{pmatrix} \psi \\ p \end{pmatrix}$  označuje členy vyššieho rádu a je v tvare

$$f \begin{pmatrix} \psi \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(\psi) - b\psi \\ \frac{a}{b-1}k(\psi) - \frac{ab}{b-1}\psi \end{pmatrix}. \quad (2.2.5)$$

Systém (2.2.3) pretransformujeme na normálnu formu, tak že zavedieme transformáciu

$$\begin{pmatrix} \psi \\ p \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.6)$$

Použitím transformácie (2.2.6) dostaneme

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = C^{-1}AC \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + C^{-1}f \left( C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right), \quad (2.2.7)$$

kde

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix},$$

a  $\beta$  označuje imaginárnu časť vlastných čísel, t.j.  $\beta = \frac{a}{\sqrt{b-1}}$ .

Prenásobením zľava maticou  $C$  dostaneme

$$AC = C \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ -\frac{a^2}{b-1} & a \end{pmatrix} C = C \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{b-1}} \\ \frac{a}{\sqrt{b-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Vyriešením dostaneme maticu  $C$  v tvare

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{b-1}} \\ \frac{a}{b-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.8)$$

Ďalej spočítame inverznú maticu k matici  $C$  podľa vzorca

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{11} \end{pmatrix}$$

a dostaneme inverznú maticu k matici  $C$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-1}{a} \\ \sqrt{b-1} & -\frac{\sqrt{b-1}b-1}{a} \end{pmatrix}. \quad (2.2.9)$$

Pre normálnu formu systému (2.2.3) bude mať funkcia pre členy vyššieho rádu tvar

$$\begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} k(\psi) - b\psi \\ \frac{a}{b-1}k(\psi) - \frac{ab}{b-1}\psi \end{pmatrix}, \quad (2.2.10)$$

kde  $\psi = x_1 + \frac{1}{\sqrt{b-1}}x_2$  a po dosadení  $C^{-1}$  dostaneme

$$\begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-1}{a} \\ \sqrt{b-1} & -\frac{\sqrt{b-1}b-1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k(\psi) - b\psi \\ \frac{a}{b-1}k(\psi) - \frac{ab}{b-1}\psi \end{pmatrix}. \quad (2.2.11)$$

Ďalej vypočítame čomu sa rovnajú funkcie  $g_1(x_1, x_2)$  a  $g_2(x_1, x_2)$

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{b-1}{a} \left( \frac{a}{b-1}k(\psi) - \frac{ab}{b-1}\psi \right)$$

$$g_2(x_1, x_2) = \left( \sqrt{b-1} - \frac{\sqrt{b-1}(b-1)}{a} \frac{a}{b-1} \right) (k(\psi) - b\psi)$$

dostávame

$$g_1(x_1, x_2) = k(\psi) - b\psi$$

$$g_2(x_1, x_2) = 0.$$

Pre funkciu  $g_1(x_1, x_2)$  odvodíme Taylorov rozvoj do tretieho stupňa

$$g_1(x_1, x_2) = -b\psi + k'(0)\psi + \frac{1}{2!}k''(0)\psi^2 + \frac{1}{3!}k'''(0)\psi^3 + O(\psi^4)$$

vieme, že

$$k'(0) = b$$

$$k''(0) = 0$$

a označíme

$$k'''(0) = q \tag{2.2.12}$$

dostávame

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{1}{6}q\psi^3,$$

kde  $\psi$  dosadíme z (2.2.6) a to v tvare

$$\psi = x_1 + \frac{1}{\sqrt{b-1}}x_2.$$

Funkcia pre členy vyššieho rádu transformovaného systému  $g_1(x_1, x_2)$  a  $g_2(x_1, x_2)$  budú mať tvar

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{q}{6} \left( x_1^3 + \frac{3}{\sqrt{b-1}}x_1^2x_2 + \frac{3}{b-1}x_1x_2^2 + \frac{1}{\sqrt{b-1}(b-1)}x_2^3 \right) \tag{2.2.13}$$

$$g_2(x_1, x_2) = 0.$$

## 2.3 Andronovova-Hopfova bifurkácia

**Veta 2.3.1.** [7] *Pre dvojrozmerný systém v tvare*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix},$$

pre ktorý platí  $f(0)=g(0)=0$  a  $Df(0)=Dg(0)=0$ , sa  $\alpha$  počíta nasledovne

$$\alpha = \frac{1}{16}[f_{xxx}+f_{xyy}+g_{xxy}+g_{yyy}] + \frac{1}{16\omega}[f_{xy}(f_{xx}+f_{yy})-g_{xy}(g_{xx}+g_{yy})-f_{xx}g_{xx}+f_{yy}g_{yy}],$$

kde  $f_{xy}$  označuje  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(0,0)$ , atď.

Vypočítame čomu sa rovná  $\alpha$  pre náš systém. Najskôr vypočítame parciálne derivácie

$$g_{x_1x_1x_1}^1 = \left(\frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1^3}\right) = q$$



$$g_{x_2x_2x_2}^1 = \left( \frac{\partial^3 g_1}{\partial x_2^3} \right) = \frac{q}{\sqrt{b-1}(b-1)}$$

$$g_{x_1x_1x_2}^1 = \left( \frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = \frac{q}{\sqrt{b-1}}$$

$$g_{x_1x_2x_2}^1 = \left( \frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) = \frac{q}{b-1}$$

druhé parciálne derivácie funkcie  $g_1(x_1, x_2)$  sú nulové a taktiež aj derivácie funkcie  $g_2(x_1, x_2)$ . A tak dostávame

$$\alpha = \frac{1}{16} \left( q + \frac{q}{b-1} \right) = \frac{q}{16} \frac{b}{b-1}. \quad (2.3.1)$$

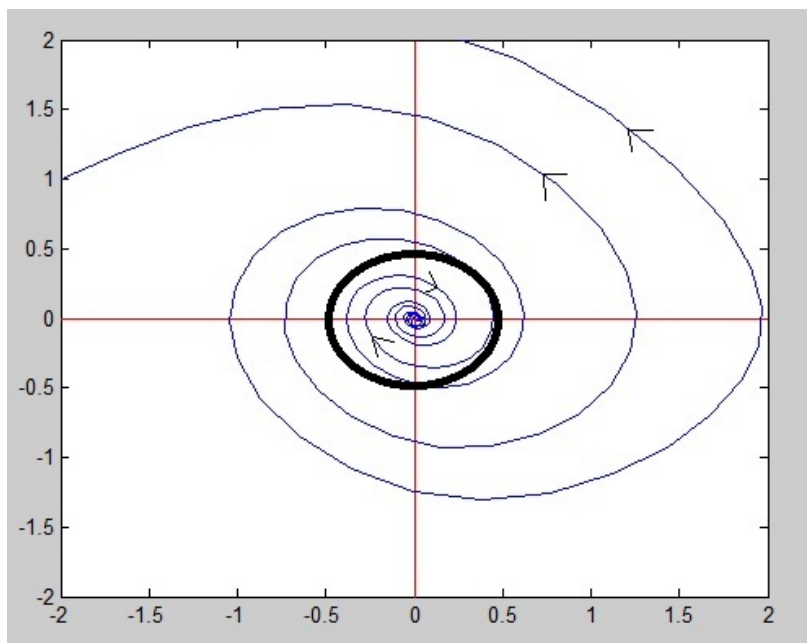
Nakoniec vypočítame čomu sa rovná  $d$  pre náš systém

$$\begin{aligned} d &= \frac{d}{d\tau} (Re\lambda(\tau))|_{\tau=\tau^*} \\ d &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{-a}{2} \left( 1 - \frac{\tau^*}{\tau} \right) \right) |_{\tau=\tau^*} \\ d &= \frac{-a}{2} \left( \tau^* \frac{1}{\tau^2} \right) |_{\tau=\tau^*} \\ d &= \frac{-a}{2} \left( \frac{1}{\tau^*} \right) \\ d &= \frac{-a^2}{2(b-1)}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

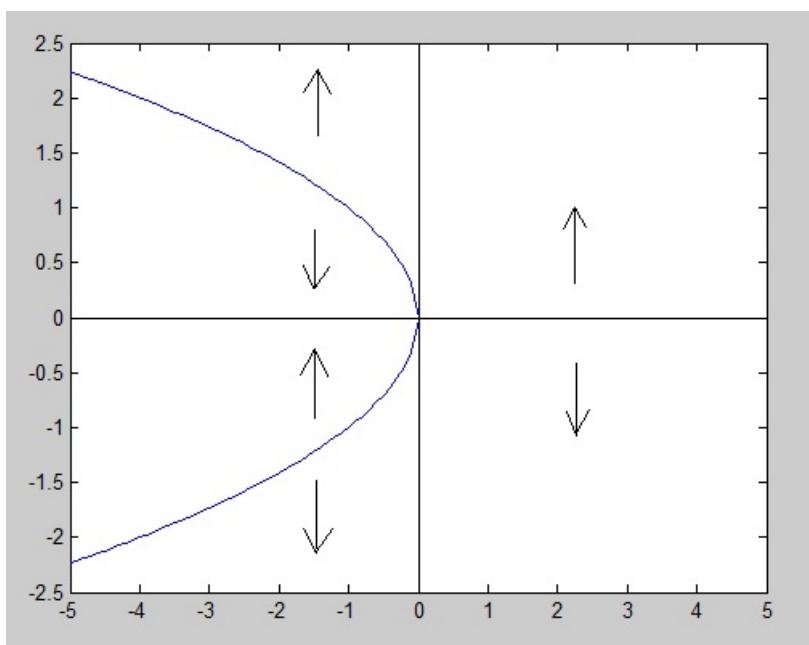
Vieme, že  $d < 0$ , pretože podmienka bifurkácie musí byť splnená.

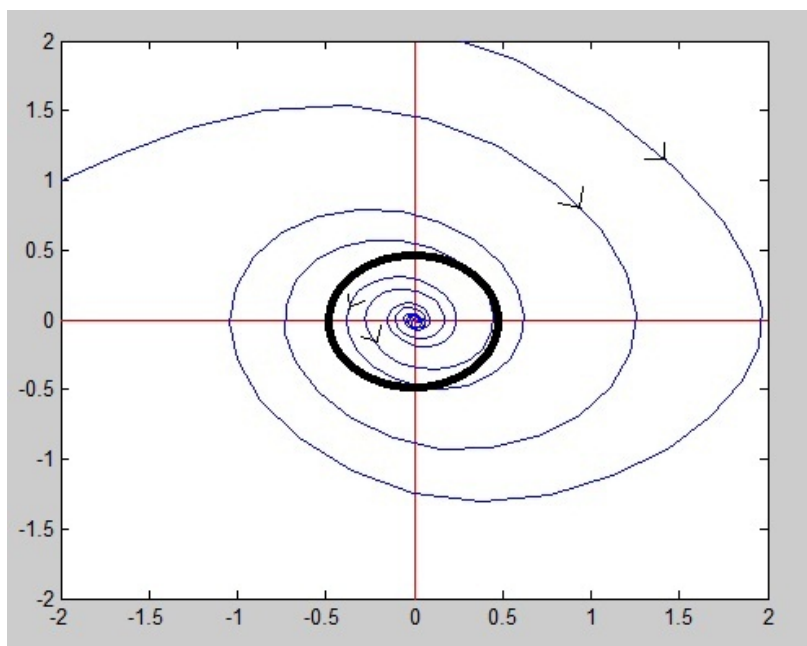
Z predchádzajúcich výpočtov vyplýva, že typ Andronovovej-Hopfovej bifurkácie závisí od znamienka  $q$ , čiže od  $k'''(0)$ . Ak je  $q > 0$ , tým pádom aj  $\alpha > 0$ , tak pre  $\tau > \tau^*$  vzniká nestabilný limitný cyklus, čiže subkritická bifurkácia (Obr.2.1, 2.2) .

A naopak, ak  $q = k'''(0) < 0$ , tak zároveň aj  $\alpha < 0$  a pre  $\tau < \tau^*$  vzniká stabilný limitný cyklus, čiže superkritická bifurkácia (Obr.2.3, 2.4).

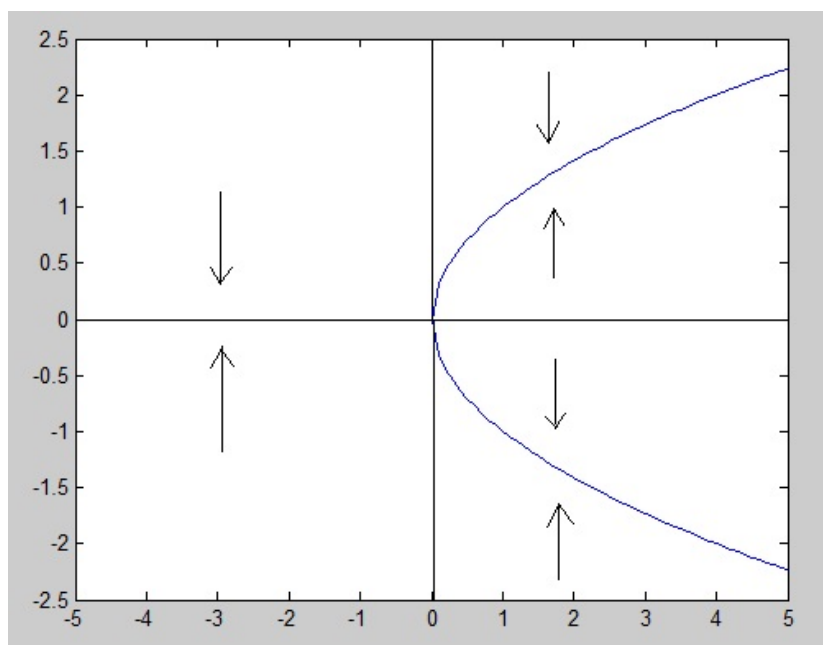


Obr. 2.1: Subkritická bifurkácia

Obr. 2.2: Bifurkačný diagram pre prípad  $\alpha > 0$



Obr. 2.3: Superkritická bifurkácia

Obr. 2.4: Bifurkačný diagram pre prípad  $\alpha < 0$

# Kapitola 3

## Relaxačné oscilácie modelu fundamentalistov a chartistov

V rozličných fyzikálnych kontextoch sa vyskytujú oscilácie a iné priebehy, v ktorých sú periódy veľmi rýchleho priebehu striedané periódami veľmi pomalého pobytu. Ak ide o kmitania, hovorí sa im tiež "relaxačné" kmitania.

Typicky sa vyskytujú v "singulárne perturbovaných" rovniciach typu

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, \epsilon) \\y' &= \epsilon g(x, y, \epsilon)\end{aligned}\tag{3.0.1}$$

a zaoberá sa nimi teória singulárnych perturbácií. V tejto kapitole si ukážeme, že pre  $\tau \rightarrow 0$  bude systém (1.2.3) vykazovať takéto správanie.

### 3.1 Úvod do singulárnych perturbácií

Cieľom je priblížiť geometrický prístup k problémom singulárnych perturbácií. Singulárne perturbované rovnice získavajú špeciálnu štruktúru prechodom z rozličných časových škál. Prvým krokom je vysvetliť základný nástroj na analýzu singulárnych perturbácií.

Uvažujme základné rovnice v tvare

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, \epsilon) \\y' &= \epsilon g(x, y, \epsilon),\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

kde  $' = \frac{d}{dt}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^l$  a  $\epsilon$  je malý reálny parameter  $\rightarrow 0$ .

Predpokladáme, že funkcie  $f$  a  $g$  sú obe  $C^\infty$  na množine  $U \times I$ , kde  $U \subset \mathbb{R}^N$  je otvorená, s  $N = n + l$  a  $I$  je otvorený interval obsahujúci 0.

Systém (3.1.1) môžeme zmenou časovej škály  $\tau = \epsilon t$  preformulovať na

$$\begin{aligned}\epsilon \dot{x} &= f(x, y, \epsilon) \\ \dot{y} &= g(x, y, \epsilon),\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

kde  $\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{d\tau}$ . Časová škála daná  $\tau$  je pomalá zatiaľ, čo pre  $t$  je rýchla. Ak  $\epsilon \neq 0$ , tak sú tieto dva systémy ekvivalentné. Preto nazývame systém (3.1.1) rýchlym systémom a systém (3.1.2) pomalým systémom. Pre tieto systémy máme významnú limitu, ktorá je prirodzene spojená s  $\epsilon \rightarrow 0$ . V prípade rýchleho systému pre  $\epsilon \rightarrow 0$  dostávame systém

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, 0) \\ y' &= 0.\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

Podľa (3.1.3) sa bude premenná  $x$  meniť, zatiaľ čo premenná  $y$  zostane konštantná, preto sa premenná  $x$  nazýva rýchla premenná. Pre  $\epsilon \rightarrow 0$  v pomalom systéme má limita zmysel iba vtedy, ak  $f(x, y, 0) = 0$  a teda máme

$$\begin{aligned}f(x, y, 0) &= 0 \\ \dot{y} &= g(x, y, 0).\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

Podmienka  $f(x, y, 0) = 0$  určuje množinu, na ktorej je tok daný rovnicou  $\dot{y} = g(x, y, 0)$ . Ďalej sa pokúsime vyeliminovať  $x$  v závislosti od  $y$  z rovnice  $f(x, y, 0) = 0$  a dosadíme ho do druhej rovnice systému (3.1.4). Táto množina je presne množinou kritických bodov pre systém (3.1.3).

Na množine  $f(x, y, 0) = 0$  je pre systém (3.1.3) tok triviálny. Zatiaľ čo pre systém (3.1.4) je tok na tejto množine netriviálny a nie je definovaný mimo tejto množiny. Hlavným cieľom teórie geometrických singulárnych perturbácií je zrealizovať tieto dva aspekty - pomalý a rýchly, súčasne.

## 3.2 Van der Polov systém

Jedným z najstarších príkladov je van der Polov oscilátor, ktorý navrhol Balthasar van der Pol (1889-1959) v roku 1920. Van der Polov oscilátor je oscilátor s

nelineárnym tlmením, ktorý sa riadi diferenciálnou rovnicou druhého rádu

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \lambda(x^2 - 1)\frac{dx}{d\tau} + x = 0 \quad (3.2.1)$$

kde  $x$  je dynamická premenná a  $\lambda > 0$  parameter.

Použitím Liénardovej transformácie

$$y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{\lambda} \frac{dx}{d\tau}, \quad t = \frac{\tau}{\lambda}, \quad \epsilon = \frac{1}{\lambda^2} \quad (3.2.2)$$

môžeme rovnicu (3.2.1) prepísať na singulárne perturbovaný systém

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{x} &= y - \frac{1}{3}x^3 + x \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

kde  $\dot{\phantom{x}} = \frac{d}{dt}$ . Ak  $\lambda$  je veľké,  $\epsilon$  je malé a teda dostávame singulárne perturbovaný úlohu. Tento systém je rýchly a zmenou časovej škály dostaneme k nemu zodpovedajúci pomalý systém

$$\begin{aligned} x' &= y - \frac{1}{3}x^3 + x \\ y' &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

kde  $' = \frac{d}{d\tau}$  a  $\tau = \epsilon t$ .

Ďalej voľne sledujeme výklad z knihy *Mishchenko et al.* [13]

Zodpovedajúci limitný systém je

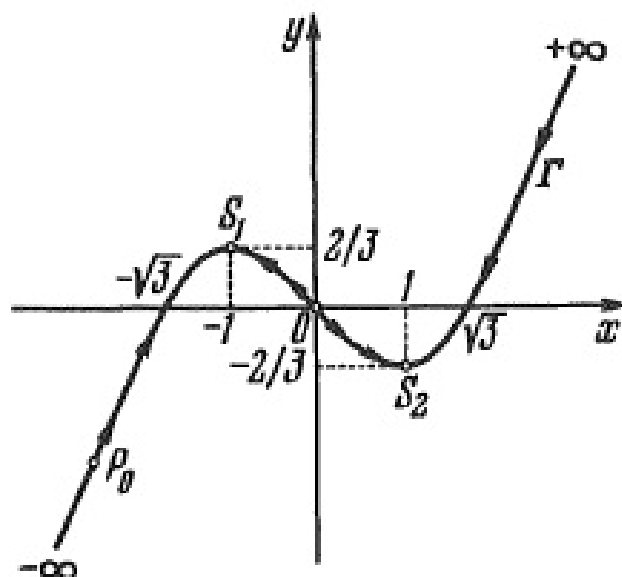
$$\begin{aligned} y - \frac{1}{3}x^3 + x &= 0 \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Nepochybne trajektórie všetkých riešení ležia na kubickej parabole  $\Gamma : y = \frac{1}{3}x^3 - x$  (Obr. 3.1). Úplnými trajektóriami limitného systému (3.2.5) sú

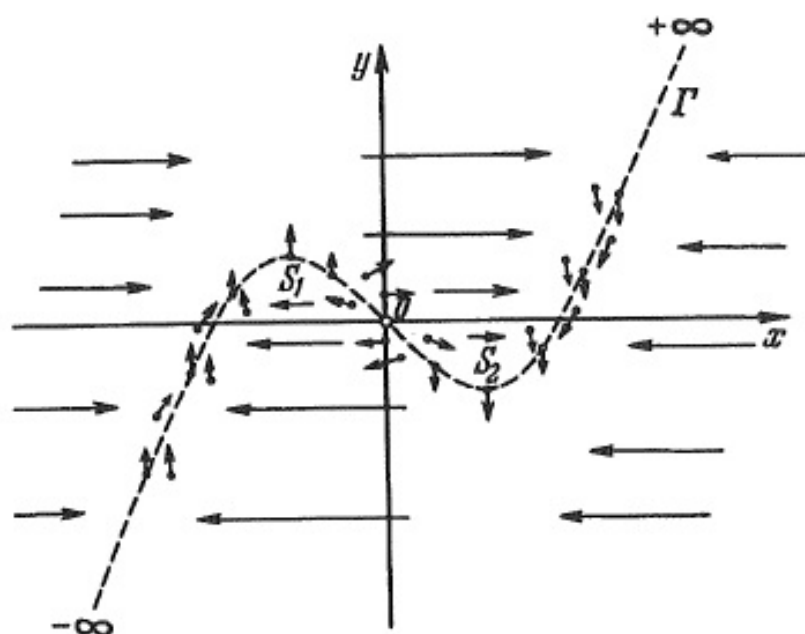
$$(-\infty, S_1); (+\infty, S_2); (0, S_1); (0, S_2); \text{bod } 0.$$

Bod 0 je jediný pevný bod.

Pre  $\epsilon \neq 0$  trajektória pomalého systému vychádzajúca z bodu  $P_0$  na vetve  $(-\infty, S_1)$  krivky  $\Gamma$  dosiahne bod  $S_1$  v konečnom čase. Pretože žiadna z trajektórií systému (3.2.5) nezačína v bode  $S_1$ , tak analýzou limitného systému nemôžeme urobiť žiadny záver o ďalšom pohybe fázového bodu. Uvažujme teda pomalý



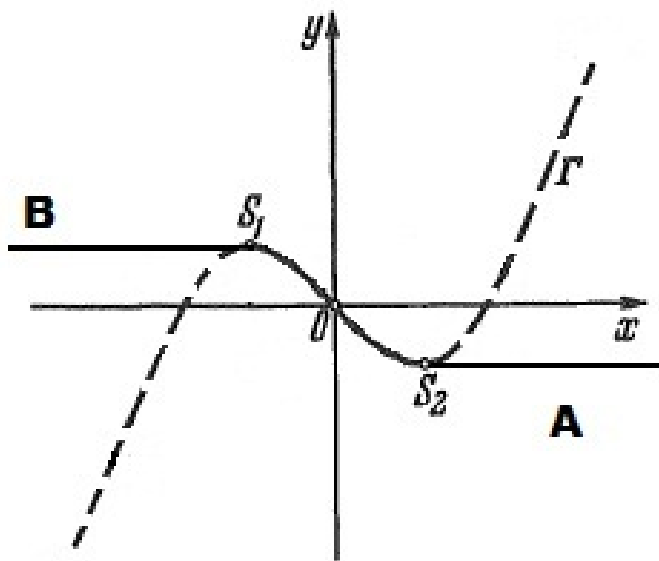
Obr. 3.1: Van der Polov systém 1



Obr. 3.2: Van der Polov systém 2

systém (3.2.3) a zostrojme vektorové pole fázových veličín v priestore  $(x, y)$  (Obr. 3.2).

Intuitívnou analýzou tohto systému môžeme vidieť, že trajektórie tohto systému, ktoré začínajú v ľubovoľnom bode  $Q_0 \notin \Gamma$  prvý krát vstupujú do malého okolia vetvy  $(-\infty, S_1)$  ak  $Q_0 \in A$ , alebo do vetvy  $(+\infty, S_2)$  ak sa bod  $Q_0$  nachádza v oblasti  $B$  (Obr. 3.3).



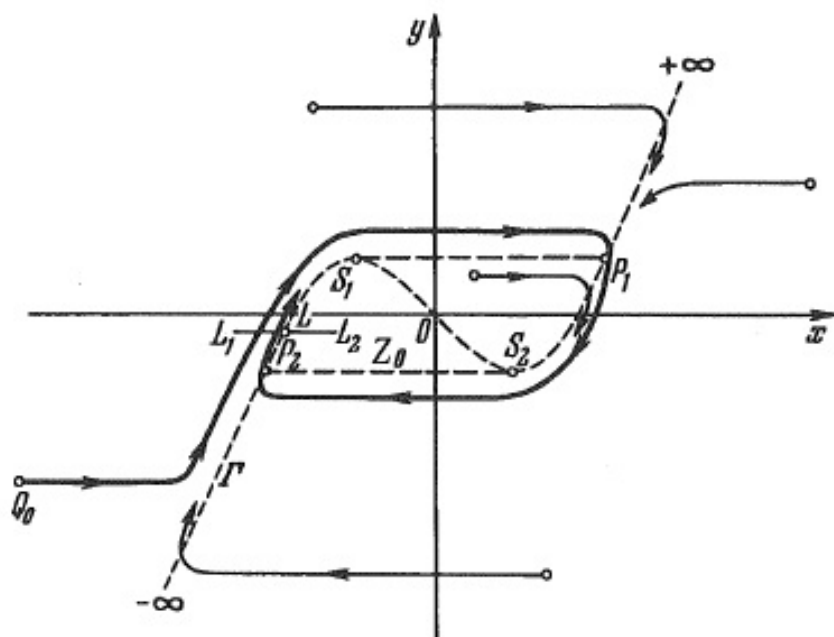
Obr. 3.3: Van der Polov systém 3

A potom počas celej doby, ktorá nasleduje zostáva v blízkosti obrysu  $Z_0 = P_2S_1P_1S_2$  pozostávajúceho z horizontálnych úsečiek  $S_1P_1$ ;  $S_2P_2$  a oblúkov  $P_2S_1$  a  $P_1S_2$  krivky  $\Gamma$  (Obr. 3.4), inak povedané trajektória obťáča počiatok.

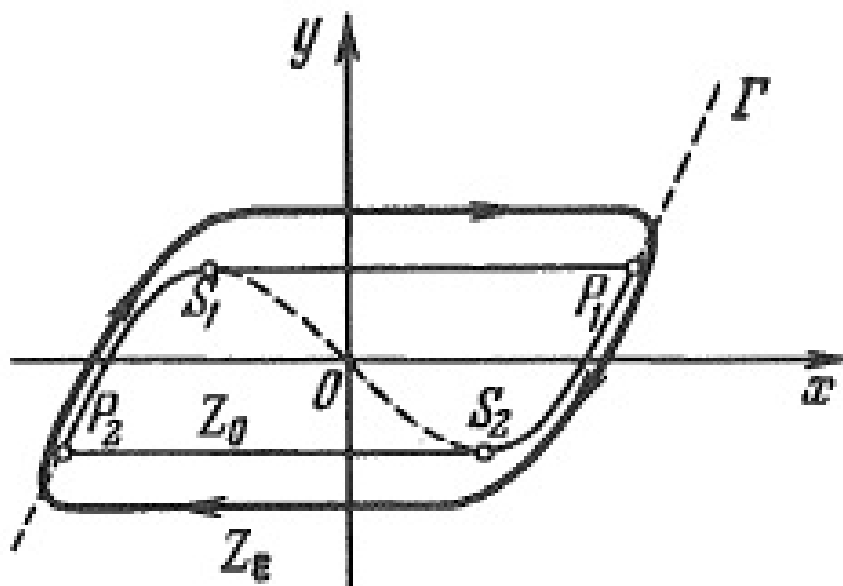
Ukážeme, že v blízkosti obrysu  $Z_0$  existuje uzavretá trajektória  $Z_\epsilon$  z van der Polovho systému (3.2.3) (Obr. 3.5).

Vezmime úsečku  $L_1L_2$  malej dĺžky, ktorá je rovnobežná s osou  $x$ , a ktorá pretína oblúk  $P_2S_1$  vo vnútornom bode  $L$ . Trajektórie, ktoré vychádzajú z  $L_1L_2$  obkolesia počiatok a definujú zobrazenie úsečky  $L_1L_2$  do priamky ňou definovanej, kde obrazom bodu z  $L_1L_2$  je prvý priesečník trajektórie tohto bodu s touto priamkou. Dá sa dokázať, že v skutočnosti bude obraz  $L_1L_2$  pri tomto zobrazení ležať vo vnútri úsečky  $L_1L_2$ . Zobrazenie má teda pevný bod, ktorým prechádza





Obr. 3.4: Van der Polov systém 4

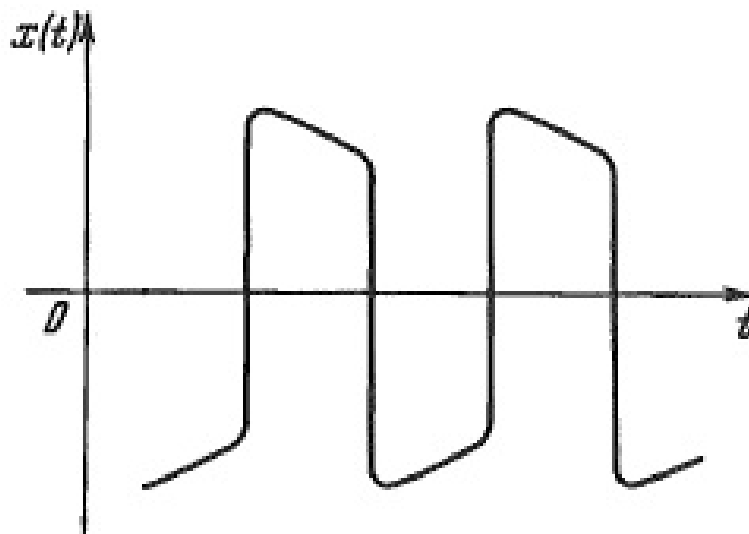


Obr. 3.5: Van der Polov systém 5

periodická trajektória.

Z rovníc systému (3.2.3) môžeme ľahko odvodiť, že pohyb fázového bodu po častiach kruhu  $Z_\epsilon$  leží v blízkom okolí oblúkov  $P_2S_1$  a  $P_1S_2$  obrysu  $Z_0$ , čo nastáva s konečnou rýchlosťou, teda trvá konečný čas. Pokiaľ ide o časti okruhu  $Z_\epsilon$  ležiace v blízkom okolí častí  $S_1P_1$  a  $S_2P_2$  obrysu  $Z_0$ , tie prechádzajú takmer okamžite, pretože po týchto častiach má horizontálna zložka vektora fázovej rýchlosti hodnotu  $\frac{1}{\epsilon}$ .

Inak povedané, keď sa fázový bod pohybuje po uzavretej trajektórii  $Z_\epsilon$ , pomerne pomalé úseky vývoja stavu van der Polovho systému sa striedajú s rýchlymi skokovými pohybmi (Obr. 3.6).



Obr. 3.6: Van der Polov systém 6

### 3.3 Analýza fázového portréту

Zvláštnosti správania sa trajektórií van der Polovho systému sú typické pre ľubovoľné systémy druhého rádu v tvare

$$\begin{aligned}\epsilon\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

a k nim prislúchajúce limitné systémy tvaru

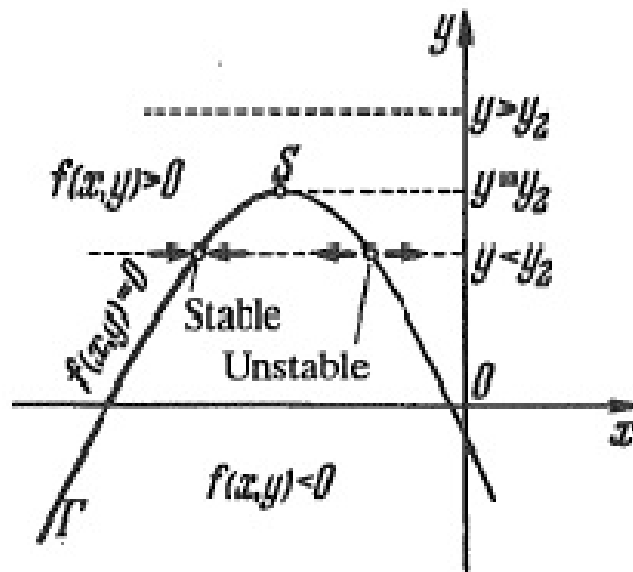
$$\begin{aligned}f(x, y) &= 0 \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

Dôvod, prečo trajektórie tohto systému prechádzajú v blízkom okolí niektorých častí krivky  $\Gamma$  môžeme vysvetliť pomocou kinematiky z hľadiska stability (nestability) pevného bodu špeciálnej pomocnej rovnice prvého rádu. Prechod z pomalého pohybu do rýchleho môžeme vysvetliť pomocou bifurkácie pevného bodu. Podľa [2]-*Colloraly 2.3* množina bodov krivky  $\Gamma$ , pre ktoré platí nerovnosť  $f'_x(x, y) < 0$  predstavuje množinu asymptoticky stabilných pevných bodov pre rovnicu  $x' = f(x, y)$  a naopak, pre ktoré platí  $f'_x(x, y) > 0$  predstavuje množinu nestabilných pevných bodov. Stabilné a nestabilné časti sú rozdelené bodmi krivky  $\Gamma$ , pre ktoré platí  $f'_x(x, y) = 0$ . Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že deliace body sú izolované na krivke  $\Gamma$  a pre každý z nich platí  $f''_x(x, y) \neq 0$ . Napríklad pre prípad van der Polovho systému (3.2.3) krivka  $\Gamma$  pozostáva z dvoch stabilných častí  $(-\infty, S_1)$  a  $(\infty, S_2)$  a jednej nestabilnej časti  $(S_1, S_2)$  a dvoch deliacich bodov  $S_1$  a  $S_2$ .

Uvažujme prvú rovnicu systému (3.3.1)

$$\epsilon\dot{x} = f(x, y)\tag{3.3.3}$$

a  $y$  zoberme ako parameter. Pre fixnú hodnotu parametra  $y = y_1$  môže mať autonómna rovnica (3.3.3) niekoľko pevných bodov. Nech  $x = x_1$  je jedným z nich. Podľa definície pevného bodu platí rovnosť  $f(x_1, y_1) = 0$  a teda  $(x_1, y_1) \in \Gamma$ . Platí to aj naopak, t.j. ak  $(x_1, y_1) \in \Gamma$ , potom je zrejmé, že  $x = x_1$  je pevný bod rovnice (3.3.3) pre  $y = y_1$ . Teda krivku  $\Gamma$  môžeme definovať pomocou množiny pevných bodov rovnice (3.3.3). V tomto prípade stabilné časti krivky  $\Gamma$  zodpovedajú stabilným pevným bodom a nestabilné časti zodpovedajú nestabilným pevným bodom. Deliace body krivky  $\Gamma$  oddeľujú množiny stabilných a nestabilných pevných bodov, t.j. bifurkačné hodnoty parametra  $y$  pre rovnicu (3.3.3).



Obr. 3.7: Van der Polov systém 7

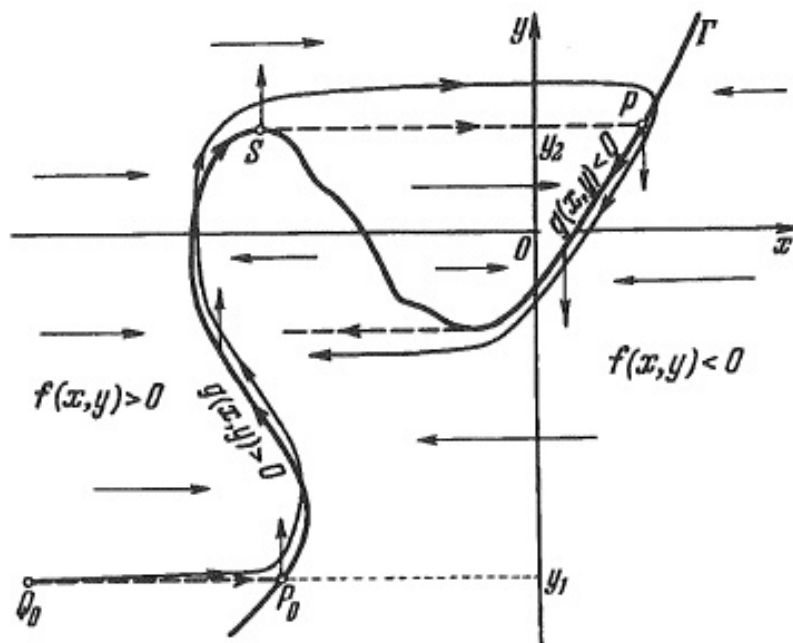
Napríklad, pre prípad zobrazený na (Obr. 3.7) je druhá súradnica  $y_2$  deliaceho bodu  $S$  bifurkačnou hodnotou parametra  $y$  pre zodpovedajúcu rovnicu (3.3.3). Pre  $y < y_2$  v blízkom okolí bodu  $S$  má rovnica dva pevné body a to jeden stabilný a druhý nestabilný, pre  $y = y_2$  sa tieto pevné body spájajú do jedného a potom pre  $y > y_2$  v blízkom okolí bodu  $S$  už nie sú žiadne pevné body.

Použitím týchto tvrdení môžeme nasledovne interpretovať pohyb fázového bodu po ľubovoľnej trajektórii systému (3.3.1) (Obr. 3.8). Pripomeňme, že vektor fázovej rýchlosti tohto systému je

$$v(x, y) = \left( \frac{1}{\epsilon} f(x, y), g(x, y) \right) \quad (3.3.4)$$

a je definovaný v každom bode fázového portréту  $(x, y)$ .

Nech  $Q_0(x_0, y_1)$  je počiatkový bod trajektórie. Ak je v konečnej vzdialenosti od krivky  $\Gamma$ , tak potom v tomto bode pre konečnú druhú zložku má vektor fázovej rýchlosti (pre  $\epsilon \rightarrow 0$ ) nekonečne veľkú druhú zložku. Teda v počiatkovej fáze sa premenná  $x$  veľmi rýchlo mení pri takmer nezmenenej hodnote premennej  $y$ . Tento charakter pohybu je zachovaný až dovtedy, kým obe zložky vektora fázovej



Obr. 3.8: Van der Polov systém 8

rýchlosti nebudú konečné. Inak povedané, keď z rovnice (3.3.3) určíme hodnotu parametra  $y$ , tak táto fáza pohybu po trajektórii systému (3.3.1) sa nachádza v blízkosti rýchleho pohybu po vodorovnej priamke  $y = y_1$ , z počiatočného bodu  $x = x_0$  do okolia stabilného pevného bodu  $x = x_1$ , ktorý je v blízkosti bodu  $P_0(x_1, y_1) \in \Gamma$ .

Keď sa fázový bod systému (3.3.1) priblíži k bodu  $P_0$ , pokračuje v pohybe konečnou rýchlosťou pozdĺž stabilnej časti krivky  $\Gamma$  obsahujúcej bod  $P_0$  a zostáva v malom okolí tejto časti. Hodnota  $y$  sa mení pomaly vďaka limitnému systému (3.3.2).

Predpokladajme, že v stabilnej časti krivky  $\Gamma$ , berúc do úvahy aj jej koncové body, nie sú žiadne pevné body systému (3.3.2), t.j.  $g(x, y) \neq 0$ . Smer variácie premennej  $y$ , hore alebo dole z počiatočnej hodnoty  $y_1$ , je definovaný podľa znamienka funkcie  $g(x, y)$  v stabilnej časti.

Počas tejto monotónnej zmeny môže  $y$  v konečnom čase dosiahnuť nejakú hodnotu, ktorá je bifurkačnou hodnotou pre rovnicu (3.3.3)  $y = y_2$ . Táto hodnota je deliacim bodom  $S(x_2, y_2)$ , ktorý je koncovým bodom stabilnej časti. Bod  $S$  je bodom extrémum pre krivku  $\Gamma$ , a preto fázový bod systému (3.3.1), ktorý nasleduje

### 3.4 Singulárne perturbácie modelu fundamentalistov a chartistov 87

stabilný bod rovnice (3.3.3) zmizne.

Po zmiznutí pevného bodu fázový bod systému (3.3.1) opustí malé okolie bodu  $S$  a rýchlo sa pohybuje takmer po priamke  $y = y_2$  cez bod  $P(x_3, y_2) \in \Gamma$ . Ak nie je žiadny pevný bod tohto typu, tak fázový bod systému (3.3.1) diverguje pozdĺž priamky  $y = y_2$ .

Potom sa časť pohybu, ktorá je opísaná vyššie opakuje so zmenou  $P$  na  $P_0$  a tak ďalej. Teda trajektória systému (3.3.1) je zložená z častí rýchleho pohybu, ktoré ležia na úsečkách, ktoré sú rovnobežne s osou  $x$  a z častí pomalého pohybu, ktoré ležia na oblúkoch krivky  $\Gamma$ .

## 3.4 Singulárne perturbácie modelu fundamentalistov a chartistov

Cieľom bude analyzovať singulárne perturbácie systému (1.2.3). Nadviažeme na van der Polov systém, keďže náš model fundamentalistov a chartistov je diferenciálny systém druhého rádu v tvare (3.3.1) a jeho správanie by malo vykazovať relaxačné oscilácie, preto budeme skúmať jeho správanie pre rôzne časové škály. Pôvodný systém

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -ap + k(\psi) \\ \tau \dot{\psi} &= -ap - \psi + k(\psi), \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

je pomalý systém a  $t$  je pomalý čas. Pre porovnanie parameter  $\epsilon$  z van der Polovho systému je v našom prípade parameter  $\tau$ , premennou  $x$  je premenná  $\psi$  a premennou  $y$  je premenná  $p$ . Pre  $\tau \rightarrow 0$  dostávame limitnú rovnicu

$$\begin{aligned} 0 &= -ap - \psi + k(\psi) \\ \dot{p} &= -ap + k(\psi). \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Z prvej rovnice systému (3.4.2) dostaneme

$$p = \frac{-\psi + k(\psi)}{a}. \quad (3.4.3)$$

[2] Nech  $g(\psi) = -\psi + k(\psi)$ . Predpokladajme, že

$$\begin{aligned} k(0) &= 0, \\ k'(0) &> 1, \\ k'(\infty) &< 1 \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

### 3.4 Singulárne perturbácie modelu fundamentalistov a chartistov 88

potom máme  $g(0) = 0$  a

$$g'(0) = k'(0) - 1 > 0, \quad (3.4.5)$$

teda  $g(\psi) > 0$  pre dostatočne malé  $\psi > 0$ .

Na druhej strane, existuje  $\psi^*$  také, že pre  $\psi > \psi^*$  platí  $k'(\psi) \leq 1 - \delta$  pre nejaké  $\delta > 0$ , teda

$$g'(\psi) = k'(\psi) - 1 \leq -\delta < 0. \quad (3.4.6)$$

Z toho dostávame

$$g(\psi) \leq g(\psi^*) - \delta(\psi - \psi^*) \quad (3.4.7)$$

pre  $\psi > \psi^*$ , čo znamená, že  $g(\psi) \rightarrow -\infty$  pre  $\psi \rightarrow \infty$ .

Existuje  $\hat{\psi} > 0$ , také že  $g(\hat{\psi}) = 0$ . Dostávame

$$g''(\psi) = k''(\psi) < 0, \quad (3.4.8)$$

teda  $g'$  je klesajúca. Z (3.4.5) a (3.4.7) vyplýva, že  $g(\psi)$  má kladné maximum v bode  $\psi_1 > 0$ . Keďže  $g'(\psi_1) = 0$  a zároveň  $g'$  je klesajúca, tak  $g'(\psi) < 0$  pre  $\psi > \psi_1$ . Zrejme  $\hat{\psi} > \psi_1$  a

$$g'(\hat{\psi}) < 0, g(\psi) > 0 \text{ pre } 0 < \psi < \hat{\psi} \text{ a } g(\psi) < 0 \text{ pre } \psi > \hat{\psi}. \quad (3.4.9)$$

Teda máme dva pevné body 0 a  $\hat{\psi}$ . Ak navyše funkcia  $k(\psi)$  má nasledujúcu vlastnosť

$$k(\psi) = -k(-\psi), \quad (3.4.10)$$

tak inverznou funkciou k (3.4.3) sú tri vetvy riešenia

$$\psi = \psi_i(p) \text{ pre } i = 1, 2, 3 \quad (3.4.11)$$

čo sú tri riešenia prvej rovnice systému (3.4.2). Pre  $p$  dostávame diferenciálnu rovnicu

$$\dot{p} = -ap + k(\psi_i(p)) \text{ pre } i = 1, 2, 3. \quad (3.4.12)$$

Za  $p$  dosadíme z (3.4.3) a máme

$$\dot{p} = -a \frac{\psi_i(p) + k(\psi_i(p))}{a} + k(\psi_i(p)) \text{ pre } i = 1, 2, 3$$

$$\dot{p} = \psi_i(p) \text{ pre } i = 1, 2, 3. \quad (3.4.13)$$

Zmenu časovej škály z pomalej na rýchlu dosiahneme zavedením transformácie

$$t = \tau s$$

### 3.4 Singulárne perturbácie modelu fundamentalistov a chartistov 89

$$s = \frac{1}{\tau}t$$

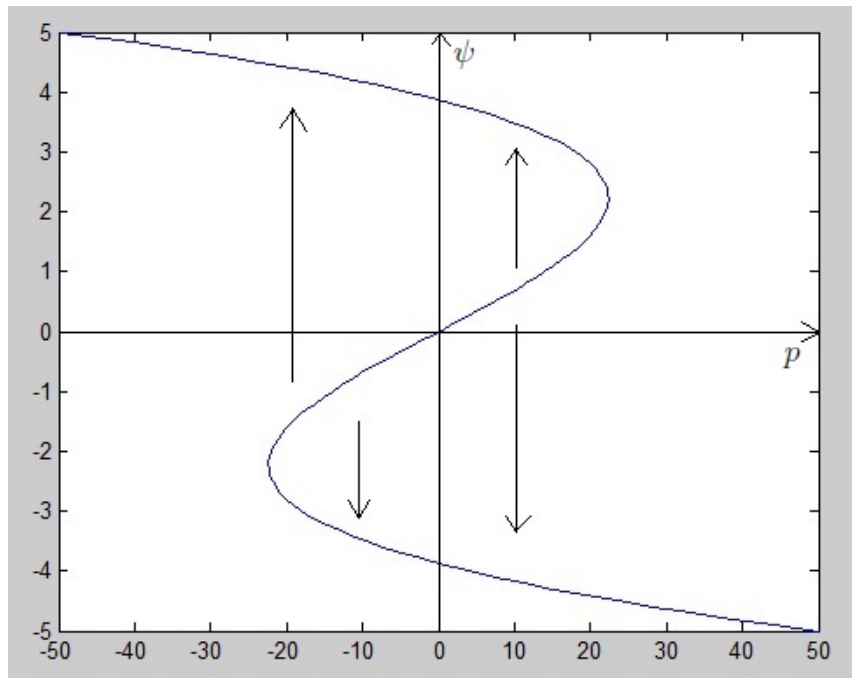
a dostávame rýchly systém

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau}p' &= -ap + k(\psi) \\ \psi' &= -ap - \psi + k(\psi) \\ p' &= \tau(-ap + k(\psi)) \\ \psi' &= -ap - \psi + k(\psi),\end{aligned}\tag{3.4.14}$$

kde  $' = \frac{d}{ds}$  a  $s$  je rýchly čas. Vypočítame limitnú rovnicu rýchleho systému pre  $\tau \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}p' &= 0 \\ \psi' &= -ap - \psi + k(\psi).\end{aligned}\tag{3.4.15}$$

Plynutie rýchleho času spôsobí, že sa rýchly systém takmer okamžite ustáli v rovnováhe. Rovnováhou rýchleho systému (3.4.14) je pomalá variéta daná rovnicou (3.4.13) (Obr.3.9).



Obr. 3.9: Rovnováha rýchleho systému



### 3.4 Singulárne perturbácie modelu fundamentalistov a chartista 40

Stabilná vetva je tam, kde platí

$$-1 + k'(\psi) < 0$$

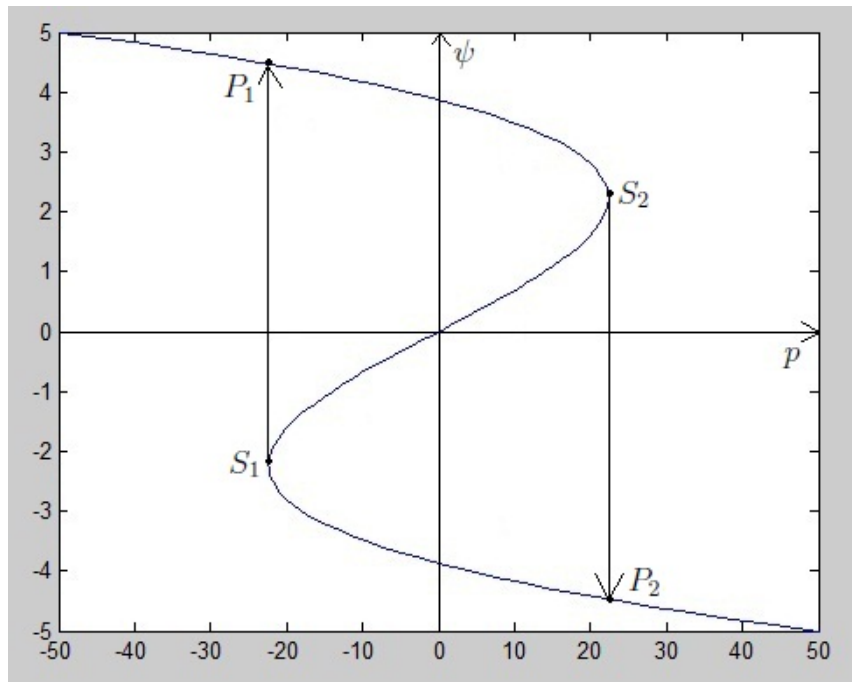
$$k'(\psi) < 1 \quad (3.4.16)$$

a pre nestabilnú platí

$$k'(\psi) > 1. \quad (3.4.17)$$

Ďalej sa zameriame na body, pre ktoré platí rovnosť, čiže

$$k'(\psi) = 1. \quad (3.4.18)$$



Obr. 3.10: Oscilácie fázového bodu

Použijeme označenie týchto bodov z van der Polovho systému, takže to budú body  $S_1$  a  $S_2$ . Akonáhle sa fázový bod dostane do jedného z týchto bodov, tak takmer okamžite prejde do bodu  $P_1$  alebo  $P_2$ . Tieto body sú priesečníky priamok, ktoré sú rovnobežné s osou  $\psi$  a prechádzajú cez body  $S_1$  a  $S_2$ , s pomalou variétou danou rovnicou (3.4.13). Čiže ak sa fázový bod náchádza v bode  $S_1$ , tak takmer okamžite prejde do bodu  $P_1$  a potom sa pomalým pohybom po oblúku  $P_1S_2$

### 3.4 Singulárne perturbácie modelu fundamentalistov a chartistov

dostane do bodu  $S_2$ , odkiaľ veľmi rýchlym pohybom prejde do bodu  $P_2$ . Ďalej pokračuje pomalým pohybom po oblúku  $P_2S_1$  do bodu  $S_1$ . Tento pohyb sa bude opakovať (Obr.3.10).

# Záver

V práci sme analyzovali model fundamentalistov a chartistov. Na začiatku sme zistili jeho pevný bod a exaktnou analýzou sme sa snažili určiť typ Andronovovej-Hopfovej bifurkácie v okolí tohto pevného bodu. Jedným z prvých krokov bolo určiť podmienky bifurkácie. Zistili sme, že pre  $b > 1$  pri prechode komplexne združeného páru rýdzo imaginárnych vlastných čísel cez kritickú hodnotu  $\tau^*$  nastáva Andronovova-Hopfova bifurkácia. Zaujímavosťou je, že charakter bifurkácie závisí od znamienka tretej derivácie funkcie  $k(\psi)$ . Ak je táto tretia derivácia väčšia ako 0, tak vzniká nestabilný limitný cyklus, čiže nastáva subkritická bifurkácia. A naopak ak tretia derivácia funkcie  $k(\psi)$  je menšia ako 0, tak vzniká stabilný limitný cyklus, čiže nastáva superkritická bifurkácia.

Nakoniec sme analyzovali systém pri veľmi krátkom časovom oneskorení pri informovaní. Zistili sme, že takýto systém je typu singularne perturbovaných systémov a jeho správanie vykazuje relaxačné oscilácie.

# Zoznam obrázkov

1.1	Funkcia $h$ . . . . .	12
2.1	Subkritická bifurkácia . . . . .	25
2.2	Bifurkačný diagram pre prípad $\alpha > 0$ . . . . .	25
2.3	Superkritická bifurkácia . . . . .	26
2.4	Bifurkačný diagram pre prípad $\alpha < 0$ . . . . .	26
3.1	Van der Polov systém 1 . . . . .	30
3.2	Van der Polov systém 2 . . . . .	30
3.3	Van der Polov systém 3 . . . . .	31
3.4	Van der Polov systém 4 . . . . .	32
3.5	Van der Polov systém 5 . . . . .	32
3.6	Van der Polov systém 6 . . . . .	33
3.7	Van der Polov systém 7 . . . . .	35
3.8	Van der Polov systém 8 . . . . .	36
3.9	Rovnováha rýchleho systému . . . . .	39
3.10	Oscilácie fázového bodu . . . . .	40

# Literatúra

- [1] K. Boďová: *Oscillations of the foreign echange rate and the devil's staircase*, Diplomová práca, FMFI UK 2004
- [2] P. Brunovský: *Diferenčné a diferenciálne rovnice*, Študijný materiál, FMFI UK, Bratislava, <http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky>
- [3] P. Brunovský, A. Erdélyi, H. O. Walther: *On a model of a currency exchange rate-local stability and periodic solutions*, Journal of Dynamics and Differential Equations 16(2004), 393-432
- [4] C. Chiarella: *The dynamics of speculative behaviour* , Annals of Operations Research 37(1992), 101-123
- [5] C. Chiarella, R. Dieci, L. Gardini: *Speculative behaviour and complex asset price dynamics: a global analysis*, Journal of Economic Behaviour & Organization Vol. 49 (2002), 173-197
- [6] M. Foltin: *Analýza Tobinovho modelu s Cobbovou-Douglasovou produkčnou funkciou*, Diplomová práca, FMFI UK 2011
- [7] J. Guckenheimer, P. Holmes: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York
- [8] J. Guliš: *Numerické simulácie nelineárneho modelu heterogénnych agentov*, Bakalárska práca, FMFI UK 2011
- [9] J. Hale, H. Koçak: *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York
- [10] C. H. Hommes: *Heterogeneous agent models in economics and finance*, In: Handbook of coputational economics 2, Tesfatsion, L.,Judd, K.L. Editors, Elsiever, 1009-1186

- 
- [11] Ch. Jones: *Geometric singular perturbation theory*, Brown University, Providence
- [12] Z. Lukašíková: *Heterogenita agentov a dynamika výmenných kurzov*, Diplomová práca, FMFI UK 2010
- [13] E.F. Mishchenko, Yu. S. Kolesov, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, : *Asymptotic Methods in Singularly Perturbed Systems*, Consultants Bureau, New York