Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Ekonofyzikálne modelovanie finančných trhov

Diplomová práca

Bratislava 2012

Bc. Igor Mako

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

Ekonofyzikálne modelovanie finančných trhov

Diplomová práca

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	Aplikovaná matematika 1114
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Školiteľ:	Doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

Bratislava 2012

Bc. Igor Mako

70898210

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Igor Mako
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Ekonofyzikálne modelovanie finančných trhov

Cieľ: Metodiky modelovania finančných trhov, porovnanie a praktické výsledky.

Vedúci: doc. RNDr. Július Vanko, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum zadania: 13.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne na základe vlastných poznatkov získaných z odbornej literatúry uvedenej v zozname použitej literatúry.

. . . .

Igor Mako

Poďakovanie

Predovšetkým sa chcem poďakovat vedúcemu diplomovej práce Doc. RNDr. Júliusovi Vankovi, PhD. za množstvo času, ktoré mi venoval pri zodpovedaní odborných i praktických otázok spojených s diplomovou prácou, za jeho odborné vedenie, pripomienky, návrhy a trpezlivosť. A v neposlednom rade patrí vďaka mojej rodine a priateľom za ich neustálu morálnu podporu.

Abstract

Mako Igor: Econophysical Modeling of Financial Markets [Master's thesis].
Comenius Univerisity in Bratislava; Faculty of Mathematics, Physics and Informatics; Department of Applied Mathematics and Statistics.
Supervisor: doc. RNDr. Július Vanko, PhD.
Bratislava, FMFI UK, 2012. 54 p.

In our work we apply methods of quantum mechanics for mathematical modeling of price dynamics at the financial market. the information exchange and market psychology play important, sometimes determining, role in price dynamics. We propose to describe such behavioral financial factors by using the pilot wave model of quantum mechanics.

Keywords: econophysics • financial markets • financial pilot wave • behavioral economics • quantum mechanics.

Abstrakt

Mako Igor: Ekonofyzikálne modelovanie finančných trhov [Diplomová práca].
Univerzita Komenského v Bratislave; Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.
Diplomový vedúci: doc. RNDr. Július Vanko, PhD.
Bratislava, FMFI UK, 2012. 54 s.

V práci aplikujeme qvantovú mechaniku na matematické modelovanie dynamiky cien na finančných trhoch. Pri určovaní dynamiky cien zohrávajú dôležitú, niekedy dokonca rozhodujúcu, úlohu výmena informácií a trhová psychológia. Predstavíme popis takýchto behaviorálnych finančných faktorov pomocou modelu pilotnej vlny kvantovej mechaniky.

Kľúčové slová: ekonofyzika • finančné trhy • finančná pilotná vlna • behaviorálna ekonómia • kvantová mechanika.

Obsah

Úvod

Štúdium ekonofyziky vzniklo približne v 90. rokoch 20. storočia. Niektorí fyzici zistili, že niektoré modely štatistickej fyziky môžu byť využité na popísanie zložitosti finančných trhov.

V ekonomickej a finančnej teórii sa na modelovanie cien finančných aktív najčastejšie využíva princíp „náhodnej prechádzky“ (random walk). Tento princíp je v značnej miere založený na predpoklade, že obchodníci konajú bez odchýlok a racionálne. Takto sa cena bude meniť len v prípade, že sa na trhu objaví nová informácia. Bolo však ukázané, že ceny úplne nesledujú náhodnú prechádzku.

Je preto prirodzená snaha o vytváranie prístupov, ktoré sa na predpokladoch racionality nezakladajú. Existujú dve úzko spojené oblasti výskumu, konkrétne behaviorálna ekonómia a behaviorálne financie, ktoré skúmajú vplyvy ľudských a spoločenských kognitívnych a emocionálnych odchýliek, aby lepšie porozumeli ekonomické rozhodnutia a ich vplyvy na trhové ceny, výnosy a alokáciu zdrojov. Hlavný predmetom výskumu sú racionalita, resp. jej nedostatok u ekonomických agentov.

V tejto práci sa budeme snažiť o nový spôsob modelovania, ktorý sa nebude zakladať na prepodklade, že investori sa správajú racionálne, následne nové informácie sa budú objavovať náhodne a rovnako náhodne budú aj ovplyvňovať ceny aktív. V našom prístupe sú informácie o finančncom trhu (vrátane očakávaní agentov finančných trhov) popísané informačným poľom (finančnou vlnou) $\psi(q)$. Toto pole sa vyvíja deterministicky narúšajúc dynamiku cien akcií a opcií.

Postupne najskôr predstavíme základy bohmovskej mechaniky, na ktorej je celý model postavený. Spomenieme základné zákonitosti a vzťahy. Ďalej sa pozrieme na klasický ekonofyzikálny model, ktorý v ďalšej kapitole porovnáme s kvantovým ekonofyzikálnym modelom. Pokračovať budeme porovnaním vlastností daného modelu s vlastnosťami zaužívaných modelov. V ďalších kapitolách sa budeme snažiť vyriešiť niektoré z nedostatkov modelu. A nakoniec budeme diskutovať využiteľnosť modelu v praxi.

Kapitola 1

Deterministické a stochastické modely finančných trhov

1.1 Stochastické modely a hypotéza efektívneho trhu

Analytici v ekonomickej a finančnej teórii využívajú na modelovanie vývoja cien aktív, konkrétne akcií na akciových trhoch, výmenných kurzov a cien komodít „náhodnú prechádzku" (random walk) a ešte všeobecnejšie martingaly. Tieto postupy vychádzajú z predpokladu, že investori konajú racionálne a bez akejkoľvek odchýlky a že v každom momente odhadujú cenu aktív založenú na budúcich očakávaniach. Za takýchto podmienok všetky dostupné informácie vplývajú na cenu, ktorá sa teda bude meniť, len keď vyjde najavo nová informácia. Podľa definície, *nové informácie sa objavujú náhodne a vplývajú na ceny aktív tiež náhodne.*

Tento postup bol formalizovaný pomocou *hypotézy efektívneho trhu*, ktorá bola sformulovaná v 60. rokoch 20. storočia:

Hovoríme, že trh je efektívny pri stanovení najracionálnejšej ceny, ak sú všetky dostupné informácie spracované hneď, ako sa dostanú na trh a okamžite sa odrazia na novej hodnote cien obchodovaných aktív. [15]

Matematicky túto hypotézu skúmal Samuelson [15]. Použitím hypotézy racionálneho správania sa a efektívnosti trhu bol schopný demonštrovať v akom vzťahu je q_{t+1}, očakávaná hodnota ceny daného aktíva v čase $t+1$, s predchádzajúcimi hodnotami cien $q_0, q_1, ..., q_t$ pomocou vzťahu:

$$E(q_{t+1}|q_0, q_1, ..., q_t) = q_t \tag{1.1}$$

Zvyčajne máme zavedenú σ-algebru $\mathcal{F}_t$ generovanú náhodnými premennými $q_0, q_1, ..., q_t$.

Podmienku (1.1) píšeme potom v tvare:

$$E(q_{t+1}|\mathcal{F}_t) = q_t \tag{1.2}$$

Stochastické procesy takéhoto typu nazývame martingaly. Eventuálne martingalový model pre finančné trhy znamená, že

$$(q_{t+1} - q_t)$$

je „férová hra“ (fair game), t.j. hra, ktorá nie je v prospech ani vás, ani vášho oponenta:

$$E(q_{t+1} - q_t|\mathcal{F}_t) = 0. \tag{1.3}$$

Na základe informácie, $\mathcal{F}_t$, ktorá je dostupná v čase t, nemôžeme očakávať ani

$$E(q_{t+1} - q_t|\mathcal{F}_t) < 0$$

ani

$$E(q_{t+1} - q_t|\mathcal{F}_t) > 0.$$

1.2 Deterministické modely pre dynamiku cien

V prvom rade treba poznamenať, že ceny nie vždy úplne sledujú „náhodnú prechádzku“ (random walk). V krátkodobom hľadisku sa vyskytuje nízka radová korelácia (okolo 0,05); v dlhodobom hľadisku sú hodnoty o niečo vyššie. Ich znamienko a hodnota závisia od viacerých faktorov, ale transakčné náklady a bid-ask spready vo všeobecnosti znemožňujú zarobiť vyššie výnosy. Výskumníci Rosario N. Mantegna a H. Eugene Stanley zistili, že niektoré z najväčších cenových odchýliek od náhodnej prechádzky sú dôsledkami sezónnych a dočasných vzťahov [13].

Vyskytuje sa taktiež množstvo tvrdení, či už teoretických alebo získaných na základe štatistických analýz dát, ktoré spochybnňujú všeobecný martingalový model (a teda aj hypotézu efektívneho trhu). Je dôležité všimnúť si, že efektívny trh naznačuje, že neexistuje využiteľná príležitosť na zisk. Ak by toto bola pravda, obchodovanie na trhu by bola hra o náhode a nie o schopnostiach a skúsenostiach. Ale obchodníci kupujú aktíva, o ktorých si myslia, že sú neohodnotené v nádeji, že ich predajú za ich skutočnú cenu so ziskom. Ak však trhové ceny už odrážajú všetky dostupné informácie, z kade berie obchodník túto tajnú informáciu? Keďže existuje tisíce veľmi dobre informovaných, dobre vzdelaných obchodníkov s aktívami, podporovaných mnohými výskumníkmi dát, ktorí kupujú a predávajú akcie rýchlo, logicky očakávame, že trhy s aktívami by mali byť veľmi efektívne a príležitostí na zisk by malo byť veľmi málo. Na druhej strane, môžeme si všimnúť, že je mnoho obchodníkov, ktorí úspešne využívajú svoje príležitosti a nepretržite predvádzajú veľmi úspešné finančné transakcie. Tiež sa intenzívne skúmalo, či skutočné finančné dáta môžu byť opisované martingalovým modelom. Čo sa teda ľudia na základe dostupných finančných dát snažia pochopiť, je:

Správajú sa výnosy finančných aktív náhodne (a teda sú nepredvídateľné) alebo deterministicky? A v druhom prípade dúfajú v ich predpovedanie, dokonca v zostrojenie deterministického dynamického systému, ktorý by sa aspoň priblížil k skutočnému správaniu sa finančného trhu.

Predpovedateľnosť výnosou finančných aktív je v súčasnosti veľmi rozšírená téma a je cieľom výskumu množstva prác. Spomenieme len, že vo všeobecnosti prevláda názor, že výnosy finančných aktív sú predpovedateľné.

1.3 Behaviorálne financie a behaviorálna ekonómia

Treba zdôrazniť, že pokiaľ ide o hypotézu efektívneho trhu, neexistuje všeobecný konsenzus. „...ekonometrické postupy a empirické dôkazy naznačujú, že výnosy z finančných aktív sú do istej miery predpovedatľné. V nedávnej minulosti by toto tvrdenie bolo považované za jednoznačné popieranie efektívnosti trhu. Avšak moderná finančná ekonómia nás učí, že niektoré perfektne racionálne faktory sa taktiež môžu podieľať na takejto predpovedateľnosti. Jemná štruktúra akciových trhov, trenie počas obchodovacieho procesu môžu generovať predpovedateľnosť. V čase sa meniaca očakávaná hodnota výnosov v dôsledku zmeny obchodných podmienok takisto môže generovať predpovedateľnosť. Istý stupeň predpovedateľnosti je možno potrebný k odmeňovaniu investorov za nesenie určitej miery dynamického rizika.“ [4]

Preto je prirodzené vyvíjať prístupy, ktoré nie sú založené na predpoklade investorov konajúcich *racionálne a bez odchýlok* a že nové informácie sa objavujú náhodne a ovplyvňujú ceny aktív náhodne. Konkrétne existujú dve zavedené a úzko spojené oblasti vúýskumu *behaviorálne financie a behaviorálna ekonómia*, ktoré aplikujú vedecký výskum na ľudskú a sociálnu kognitívnu a emocionálnu zaujatosť, aby sme lepšie pochopili ekonomické rozhodnutia a to, ako vplývajú na trhové ceny, výnosy a rozdelenie zdrojov. Tieto oblasti sa zaoberajú racionalitou, resp. jej nedostatkom u ekonomických agentov. Behaviorálne modely zvyčajne zahŕňajú psychologický náhľad spolu s neoklasickou ekonomicou teóriou.

Od 70. rokov 20. storočia sa intenzívna výmena informácií vo svete financií stala jedným z hlavných zdrojov určovania dynamiky cien. Elektronické obchodovanie, ktoré sa stalo najdôležitejšou súčasťou prostredia väčšiny búrz cenných papierov, vyvolalo obrovský tok informácií medzi obchodníkmi. Finančné kontrakty sú uskotočňované na novej časovej škále, ktorá sa podstatne líši od starej časovej škály, ktorá bola určovaná vývojom ekonomického základu finančného trhu. Ceny, za ktoré sú obchodníci ochotní predať alebo kúpiť finančné aktíva nie sú určované len nepretržitým vývojom priemyslu, obchodu, služieb, situácie na trhu s prírodnými zdrojmi atď. Informačné (mentálne, trhovo-psychologické) faktory zohrávajú taktiež veľmi dôležitú úlohu v dynamike cien. Obchodníci vykonávajúci finančné transakcie pracujú ako obrovský kolektívny kognitívny systém.

1.4 Kvantový model pre behaviorálne financie

V tejto časti sa budeme zaoberať prístupom, ktorý nie je založený na predpoklade, že invsetori sa správajú racionálne a bez odchýlky a navyše nové informácie sa neobjavujú náhodne, ani neovplyvňujú cenu aktív náhodne. Náš model môžeme považovať za špeciálny ekonofyzikálny model v oblasti behaviorálnych financií. V našom prístupe sú informácie o trhu, vrátane tých o očakávaniach agentov o finančnom trhu, opísané *informačným poľom* $\psi(q)$*- finančnou vlnou.* Toto pole sa vyvíja deterministicky rozrušujúc pri tom dynamiku cien akcií a opcií. Dynamika je daná Schrödingerovou rovnicou na priestore cien akcií. Keďže psychológia agentov finančných trhov sa nemalou mierou podieľa na finančnej vlne $\psi(\mathrm{q})$, môžeme náš model považovať za špeciálny *psycho-finančný model.*

V tejto práci využijeme metódy bohmovskej mechaniky na simulovanie dynamiky cien na finančných trhoch. Začneme vyvinutím klasického hamiltonovského formalizmu na fázový priestor cien/zmien cien, aby sme opísali klasický vývoj cien. Táto klasická dynamika cien je určená „silnými“ finančnými podmienkami (prírodné zdroje, priemyselná výroba, služby, atď.). Tieto podmienky, rovnako ako „silné“ vzťahy medzi obchodníkmi na finančnom trhu, sú matematicky popísané pomocou klasického finančného potenciálu. Ako sme už spomenuli, na reálnych finančných trhoch nie sú „silné“ podmienky jediným zdrojom zmien cien. Informácie a trhová psychológia zohrávajú takisto dôležitú, niekedy dokonca rozhodujúcu, úlohu pri dynamike cien.

Pokúsime sa opísať „slabé“ finančné faktory za použitia bohmovského modelu kvantovej mechaniky. Teória finančných psychologických vĺn berie do úvahy trhovú psychológiu. Reálne trajektórie sú určované dvoma finančnými potenciálmi: klasickým („silné“ trhové podmienky) a kvantovým („slabé“ trhové podmienky).

G. Soros správne poznamenal, že „nementálny“ trh sa vyvíja vďaka klasickým náhodným fluktuáciám. Avšak takéto fluktuácie neposkytujú dostatočný popis pre mentálny trh. Navrhol využiť analógiu s kvantovou teóriou. Aj keď bolo zistené, že priamo kvantový formalizmus nemôže byť použitý na finančné trhy [18]. Obchodníci sa podstatne líšia od elementárnych častíc. Elementárne častice sa správajú stochasticky kvôli odchýlkam spôsobenými meracími prístrojmi.

Podľa G. Sorosa sa obchodníci na finančných trhoch správajú stochasticky kvôli slobodnej vôli jednotlivcov. Kombinácie obrovského množstva slobodných vôľ obchodníkov vytvárajú dodatočnú stochasticitu na finančnom trhu, ktorá nemôže byť redukovaná na klasické náhodné fluktuácie (určené nementálnymi faktormi). V bohmovskom prístupe (narozdiel od bežných prístupov) je kvantová štatistika indukovaná akciami dodatočného potenciálu, kvantovým potenciálom, ktorý mení klasické trajektórie elementárnych častíc. Takýto prístup nám dáva možnosť použiť kvantový formalizmus na finančné trhy.

Kapitola 2

Úvod k bohmovskej mechanike

V tejto časti uvedieme základné pojmy bohmovskej mechaniky. Je to špeciálny model kvantovej mechaniky v tom, že na rozdiel od bežnej kodaňskej interpretácie majú kvantové častice dobre definované trajektórie vo fyzikálnom priestore.

Podľa bežnej kodaňskej interpretácie (vytvorenej N. Bohrom a W. Heisenbergom) kvantové častice nemajú trajektórie vo fyzikálnom priestore. Bohr a Heisenberg zdôvodnili takýto pohľad na kvantovú fyzikálnu realitu heisenbergovým princípom neurčitosti:

$$\Delta q \Delta p \geq h/2 \tag{2.1}$$

kde h je planckova konštanta, q a p sú poloha a hybnosť, v uvedenom poradí, a Δq a Δp sú neurčitosti v rozhodovaní o q a p. Aj napriek heisenbergovmu princípu neurčitosti (2.1) však David Bohm demonštroval [3], že je možné zostrojiť kvantový model, v ktorom trajektórie kvantových častíc budú vhodne definované. Keďže táto práca sa zaoberá matematickými modelmi v ekonómii a nie vo fyzike, nebude sa tomu podrobnejšie venovať. Len spomenieme, že koreň problému leží v rozdielnych interpretáciách heisenbergovho princípu neurčitosti (2.1). Ak interpretujeme Δq a Δp ako neurčitosti pre polohu a hybnosť jedinej kvantovej častice (napr. konkrétneho elektrónu), potom by (2.1) naozaj znamenalo, že je nemožné vytvoriť model, v ktorom by trajektórie $q(t)$ a $p(t)$ boli dobre definované. Na druhej strane, ak by sme Δq a Δp interpretovali ako *štandardné odchýlky*

$$\Delta q = \sqrt{E(q - Eq)^2}, \Delta p = \sqrt{E(p - Ep)^2} \tag{2.2}$$

tak nie je žiadny rozpor medzi heisenbergovým princípom neurčitosti a možnosťou uvažovať trajektórie. Modely ako bohmovská mechanika teda dávajú zmysel. Nakoniec ešte poznamenáme, že v skutočných experimentoch sa vždy používa štatistická interpretácia Δq a Δp (2.2).

Treba zdôrazniť, že bežný kvantový formalizmus nemôže tvrdiť nič o samostatnej kvantovej častici. Tento formalizmus poskytuje len štatistické predpovede pre obrovské súbory častíc. Preto bohmovská mechanika poskytuje lepší popis kvantovej reality, pretože tu je lepšia možnosť pre popis trajektórií samostatných častíc. Táto veľká výhoda bohmovskej mechaniky nebola až tak preskúmaná v oblasti fyziky. Doteraz neboli uskutočnené experimenty, ktoré by rozlišovali predikcie bohmovskej a klasickej kvantovej mechaniky.

V tejto práci ukážeme, že spomínané výhody bohmovskej mechaniky môžu byť preskúmané v aplikáciách na finančné trhy. Skutočne je možné pozorovať trajektóriu ceny alebo zmeny dynamiky cien. Táto trajektória je popísaná rovnicami matematického formalizmu bohmovskej mechaniky.

Teraz predstvíme detailné odvodenie rovníc pohybu kvantovej častice v bohmovskom modely kvantovej mechaniky. Keďže práca je určená pre matematikov a ekonómov, ktorí nemajú dostatočné vedomosti o kvantovej fyzike, predstavíme všetky výpočty. Dynamika vlnovej funkcie $\psi(t,q)$ je popísaná pomocou schrödingerovej rovnice

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,q) = -\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}(t,q) + V(q)\psi(t,q) \tag{2.3}$$

Tu $\psi(t,q)$ je komplexná hodnotová funkcia. Zatiaľ nebudeme pojednávať o klasickej pravedpodobnostnej interpretácii $\psi(t,q)$. Budeme uvažovať, že $\psi(t,q)$ je iba pole (podľa pravdepodobnostnej interpretácie $\psi(t,q)$ nám $|\psi(t,q)|^2$ dáva pravdepodobnosť nájdenia kvantovej častice v bode q v čase t).

Uvažujeme jednorozmerný prípad, ale zovšeobecnenie na viacrozmerný prípad, $q = (q_1,\ldots,q_n)$, je zrejmé. Napíšeme vlnovú funkciu $\psi(t,q)$ v nasledujúcom tvare:

$$\psi(t,q) = R(t,q)e^{i\frac{S(t,q)}{h}} \tag{2.4}$$

kde $R(t,q) = |\psi(t,q)|$ a $\theta(t,q) = S(t,q)/h$ je argument komplexného čísla $\psi(t,q)$.

Dosadíme (2.4) do schrödingerovej rovnice (2.3). Dostaneme

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = ih\left(\frac{\partial R}{\partial t}e^{\frac{iS}{h}} + \frac{iR}{h}\frac{\partial S}{\partial t}e^{\frac{iS}{h}}\right) = ih\frac{\partial R}{\partial t}e^{\frac{iS}{h}} - R\frac{\partial S}{\partial t}e^{\frac{iS}{h}}$$

a

$$\frac{\partial\psi}{\partial q} = \frac{\partial R}{\partial q}e^{\frac{iS}{h}} + \frac{iR}{h}\frac{\partial S}{\partial q}e^{\frac{iS}{h}}$$

a teda:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial q^2}e^{\frac{iS}{h}} + \frac{2i}{h}\frac{\partial R}{\partial q}\frac{\partial S}{\partial q}e^{\frac{iS}{h}} + \frac{iR}{h}\frac{\partial^2 S}{\partial q^2}e^{\frac{iS}{h}} - \frac{R}{h^2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 e^{\frac{iS}{h}}$$

Získavame diferenciálne rovnice:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{-1}{2m}\left(2\frac{\partial R}{\partial q}\frac{\partial S}{\partial q} + R\frac{\partial^2 S}{\partial q^2}\right), \tag{2.5}$$

$$-R\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial q^2} - \frac{R}{h^2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2\right) + VR. \tag{2.6}$$

Prenásobením oboch strán rovnice (2.5) $2R$ a využitím triviálnych rovností:

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} = 2R\frac{\partial R}{\partial t}$$

a

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(R^2\frac{\partial S}{\partial q}\right) = 2R\frac{\partial R}{\partial q}\frac{\partial S}{\partial q} + R^2\frac{\partial^2 S}{\partial q^2},$$

odvodíme rovnicu pre R^2:

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial q}\left(R^2\frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0. \tag{2.7}$$

Treba podotknúť, že ak použijeme pravdepodobnostnú interpretáciu vlnovej funkcie, potom nám

$$R^2(t,x) = |\psi(t,x)|^2$$

dáva pravdepodobnosť. Preto rovnica (2.7) je rovnicou popisujúcou dynamiku pravdepodobnostného rozdelenia (vo fyzike ju nazývame rovnicou kontinuity).

Druhá rovnica môže byť prepísaná do tvaru:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \left(V - \frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2 R}{\partial q^2}\right) = 0. \tag{2.8}$$

Za predpokladu, že

$$\frac{h^2}{2m} \ll 1$$

a že výraz

$$\frac{h^2}{2mR}\frac{\partial^2 R}{\partial q^2}$$

teda môžeme zanedbať. Dostávame tak rovnicu:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + V = 0 \tag{2.9}$$

Z klasickej mechaniky vieme, že toto je klasická hamilton-jacobiho rovnica, ktorá zodpovedá dynamike častíc:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \text{ alebo } m\dot{q} = \frac{\partial S}{\partial q}, \tag{2.10}$$

kde sa častice pohybujú normálovo k povrchu $S = const.$

David Bohm navrhol interpretovať rovnicu (2.7) rovnakým spôsobom. Ale môžeme vidieť, že v tejto rovnici je klasický potenciál V narušovaný dodatočným „kvantovým potenciálom“

$$U = \frac{h^2}{2mR}\frac{\partial^2 R}{\partial q^2}$$

Preto je v bohmovskej mechanike pohyb častice popísaný zvyčajnou newtonovou rovnicou, ale so silou zodpovedajúcou kombinácii klasického potenciálu V a kvantového potenciálu U:

$$m\frac{dv}{dt} = -\left(\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q}\right) \tag{2.11}$$

Čo je podstané je, že potenciál U sa sám o sebe riadi schrödingerovou rovnicou (2.3). Preto nemôžeme považovať rovnicu (2.11) ako čisto newtonovu klasickú dynamiku (pretože potenciál U závisí od ψ ako parametra). Rovnicu (2.11) budeme nazývať *bohm-newtonova rovnica.*

Treba poznamenať, že zvyčajne v prácach o bohmovskej mechanike sa hovorí, že rovnica (2.11) nie je nič iné ako obyčajná newtonova rovnica. To by ale mohlo vzbudzovať dojem, že bohmovský prístup by dával možnosť redukovať kvantovú mechaniku na obyčajnú klasickú mechaniku. Nie je to však tak. Rovnica (2.11) neposkytuje úplný popis dynamiky systémov. Ako sme už spomínali, kvantový potenciál U je určený cez vlnovú funkciu ψ a ďalej sa vyvíja podľa schrödingerovej rovnice. Dynamiku danú bohm-newtonovou rovnicou nemôžeme považovať za nezávislú od schrödingerovej dynamiky.

Kapitola 3

Klasický ekonofyzikálny model pre finančné trhy

3.1 Finančný fázový priestor

Uvažujme matematický model, v ktorom obrovské množstvo agentov finančných trhov na seba vzájomne pôsobí berúc do úvahy externé ekonomické (ale aj politické, sociálne a dokonca aj meteorologické) podmienky, aby určili cenu, za ktorú kúpiť alebo predať finančné aktíva. Uvažujeme obchod s akciami nejakých spoločností.

Uvažujeme *cenový súradnicový systém*. Očíslujeme spološnosti, ktoré emitovali akcie na finančný trh: $j = 1, 2, \ldots, n$. Môžeme použiť n-rozmerný konfiguračný priestor cien $Q = R^n$,

$$q = (q_1, \ldots, q_n),$$

kde q_j je cena akcie j-tej spoločnosti. R v tomto prípade je reálna os. Dymika cien je popísaná trajektóriou

$$q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$$

v konfiguračnom priestore cien Q.

Ďalšia premenná, ktorú budeme používať je *premenná zmeny ceny*:

$$v_j(t) = \dot{q}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q_j(t + \Delta t) - q_j(t)}{\Delta t}$$

V reálnych modeloch uvažujeme diskrétnu časovú škálu $\Delta t, 2\Delta t, \ldots$. Tu použijeme i diskrétnu premennú zmeny ceny

$$\delta q_j(t) = q_j(t + \Delta t) - q_j(t).$$

Priestor zmien ceny označíme symbolom $V(\equiv R^n)$ so súradnicami $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Tak ako v klasickej fyzike, aj tu je užitočné zaviezť fázový priestor $Q \times V = R^{2n}$, konkrétne *cenový fázový priestor*. Dvojica (q, v) =(cena, zmena ceny) sa nazýva *stav finančného trhu*.

Neskôr budeme uvažovať kvantový stav finančného trhu. Stav (q, v), ktorý momentálne uvažujeme, je klasciký stav.

Teraz predstavíme analógiu m hmotnosti ako počtu prvkov, v našom prípade akcií, ktoré obchodníci emitovali na trh. Hovoríme, že m je *finančná hmotnosť*. Teda každý obchodník j má svoju finančnú hmotnosť m_j (objem emitovaných akcií). Celkový objem emisie uskutočnenej j-tym obchodníkom je rovný $T_j = m_j q_j$ (nie je to nič iné ako trhová kapitalizácia). Táto veličina samozrejme závisí od času: $T_j(t) = m_j q_j(t)$. Pre zjednodušenie budeme uvažovať, že každá emisia, ktorá sa na trhu uskutoční, bude v pevne danom množstve akcií, aby premenná m_j nezávisela od času. Náš model sa ale dá zovšeobecniť, aby popisoval trh časovo závislou finančnou hmotnosťou $m_j = m_j(t)$.

Ďalej zavedieme *finančnú energiu* trhu ako funkciu

$$H : Q \times V \to R.$$

Ak využijeme analógiu s klasickou mechanikou, tak môžeme uvažovať finančnú energiu vo forme:

$$H(q, v) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j v_j^2 + V(q_1, \ldots, q_n). \tag{3.1}$$

Tu

$$K(q, v) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j v_j^2$$

je *kinetická finančná energia* a

$$V(q_1, \ldots, q_n)$$

je potenciálna finančná energia, m_j je finančná hmotnosť j-teho obchodníka.

Kinetická finančná energia predstavuje snahu agentov finančných trhov zmeniť ceny: väčšie zmeny ceny znamenajú väčšiu kinetickú finančnú energiu. Ak má spoločnosť j_1 vyššiu finančnú hmotnosť ako spoločnosť j_2, teda $m_{j_1} > m_{j_2}$, potom rovnaká zmena ceny, t.j. rovnaká finančná rýchlosť $v_{j_1} = v_{j_2}$, je charakterizovaná vyššou kinetickou finančnou energiou: $K_{j_1} > K_{j_2}$. Taktiež vysoká kinetická finančná energia charakterizuje rapídne zmeny finančnej situácie na trhu. Avšak kinetická finančnáná energia neudáva charakter týchto zmien. Môže sa jednať o prudký ekonomický rast rovnako ako recesiu.

Potenciálna finančná energia V popisuje vzájomné pôsobenie medzi obchoníkmi $j = 1, \ldots, n$, takisto externé ekonomické podmienky (napr. cena ropy a zemného plynu) alebo dokonca meteorologické podmienky (napr. počasie v Nemecku). Ako príklad môžeme uvažovať najjednoduchší interakčný potenciál:

$$V(q_1,\dots,q_n)=\sum_{j=1}^{n}(q_i-q_j)^2.$$

Rozdiel $|q_1-q_j|$ medzi cenami je najdôležitejšou podmienkou pre *arbitráž*.

Nikdy sa nám nepodarí vziať do úvahy všetky ekonomické alebo iné podmienky, ktoré vplývajú na trh. Preto použitím nejakého konkrétneho porenciálu $V(q)$ uvažujeme veľmi zidealizovaný model finančných procesov. Avšak takýto prístup je bežný pre fyzikálne modelovanie, kde uvažujeme idealizované matematické modely pre reálne fyzikálne procesy.

3.2 Klasická dynamika

Aplikujeme hamiltonovskú dynamiku na cenový fázový priestor. Ako aj v klasickej mechanike pre hmotné objekty, predstavíme novú premennú

$$p=mv,$$

cenovú hybnosť. Namiesto vektora zmeny cien

$$v=(v_1,\dots,v_n),$$

budeme uvažovať vektor cenovej hybnosti

$$p=(p_1,\dots,p_n),p_j=m_jv_j.$$

Priestor cenových hybností je označený symbolom P. Priestor

$$\Omega=Q\times P$$

budeme nazývať cenový fázový priestor. *Hamiltonovské rovnice* pohybu na cenový fázový priestor majú tvar:

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j},j=1,\dots,n.$$

Ak má finančná energia tvar (3.1), potom hamiltonovské rovnice majú tvar

$$\dot{q}_j=\frac{p_j}{m_j}=v_j,\dot{p}_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Druhú rovnicu môžeme písať v tvare:

$$m_j \dot{v}_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Veličinu

$$\dot{v}_j = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_j(t+\Delta t) - v_j(t)}{\Delta t}$$

budeme prirodzene nazývať *cenové zrýchlenie* (zmena zmeny ceny). Veličina

$$f_j(q) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

sa nazýva (potenciálna) finančná sila. Máme teda finančný variant druhého newtonovho zákona:

$$m\dot{v} = f \tag{3.2}$$

„Produkt finančnéhej hmotnosti a cenového zrýchlenia je rovný finančnej sile.“

V skutočnosti je hamiltonovský vývoj určený nasledujúcou základnou vlastnosťou finančnej energie: *Finančná energia sa počas hamiltonovského vývoja nemení:*

$$H(q_1(t), \ldots, q_n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t)) = H(q_1(0), \ldots, q_n(0), p_1(0), \ldots, p_n(0)).$$

Treba vymedziť úvahy o finančných energiách vo forme (3.1). V prvom rade, všetky externé podmienky, rovnako ako charakter interakcií medzi obchodníkmi na trhu, silno závisia od času. Toto musíme brať do úvahy a to tak, že budeme uvažovať potenciál závislý od času:

$$V = V(t, q).$$

Ďalej, predpoklad, že potenciál finančných trhov závisí len na cenách, $V = V(t, q)$, nie je pre finančné trhy úplne prirodzený. Finanční agenti majú úplné informácie o zmenách cien. Obchodníci tieto informácie berú do úvahy pre uskutočnenie arbitráže. Preto môže byť užitočné uvažovať potenciál, ktorý závisí nie len na cenách, ale aj na zmenách cien:

$$V = V(t, q, v)$$

alebo v hamiltonovskom ponímaní

$$V = V(t, q, p).$$

V takom prípade finančná sila nie je potenciál. Preto treba uvažovať finančný druhý newtonov zákon pre všeobecné finančné sily:

$$m\dot{v} = f(t, q, p).$$

3.3 Kritika klasického ekonofyzikálneho modelu

Model dynamiky hamiltonovskej ceny na cenovom fázovom priestore môže byť užitočný pri popisovaní trhu, ktorý závisí len na „silných“ ekonomických podmienkach: prírodné zdroje, objemy produkcie, ľudské zdroje atď. Klasická cenová dynamika však nemôže byť aplikovaná na moderné finančné trhy. Je zrejmé, že akciový trh nie je založený len na „silných“ faktoroch. Existujú iné faktory, slabé (behaviorálne), ktoré zohrávajú dôležitú úlohu v určovaní cien na finančných trhoch. Do úvahy by mala byť braná aj psychológia trhu. Zanedbateľné množstvo informácií môže mať za následok veľké zmeny cien na finančnom trhu. Môžeme uvažovať model, v ktorom sú na trh neustále prezentované finančné (psychologické) vlny. Niekedy tieto vlny majú za následok nekontrolovateľné zmeny cien a tým rozrušujú celý trh. Samozrejme finančné vlny tiež závisia na „silných ekonomických faktoroch.“ Ale tieto faktory nezohrávajú rozhodujúcu úlohu pri formovaní finančných vĺn. Finančné vlny sú len vlnami informácií.

Mohli by sme prirovnať správanie sa finančného trhu k správaniu obrovskej lode, ktorá je ovládaná rádiovým signálom. Rádiový signál so zanedbateľne malou fyzikálnou energiou môže podstatne zmeniť pohyb obrovskej lode (kvôli informáciám obsahovaným v signále). Ak by sme tomu rádiovému signálu nevenovali pozornosť, boli by sme neustále sklamaní zo správania sa lode. Môže zmeniť smer bez akéhokoľvek „silného“ dôvodu (počasie, cieľ, technický stav). Ak však vieme o existencii rádiového monitorovania, môžeme informácie vysielané rádiom zachytiť. Toto by nám poskytlo silný nástroj na predpovedanie trasy lode. Tento príklad bol použitý v [2].

Kapitola 4

Kvantový ekonofyzikálny model pre finančné trhy

4.1 Finančné pilotné vlny

Ak interpretujeme pilotnú vlnu ako pole, mali by sme si uvedomiť, že to bude dosť zvláštne pole. Podstatne sa líši od „obyčajných fyzikálnych polí“, ako elektromagnetické pole. Spomenieme niektoré neprirodzené črty. Konkrétne, sila indukovaná týmto poľom pilotnej vlny nezávisí od amplitúdy vlny. Preto malé vlny narúšajú trajektórie elementárnych častíc rovnako ako veľké vlny. Takéto vlastnosti pilotnej vlny nás nabádajú k domnienke, že ide iba o vlnu informácií. Teda pole pilotnej vlny popisuje šírenie informácií. Pilotná vlna nám môže pripomínať rádiový signál, ktorý navigoval loď. Toto je samozrejme len analógia, pretože rádiový signál je spojený s obyčajným fyzikálnym poľom, konkrétne elektromagnetickým poľom. Presnejšia analógia by bola, ak by sme porovnali pilotnú vlnu k informácii obsiahnutej v rádiovom signále.

Podotýkame, že (bohmovská) interpretácia kvantovej mechaniky pomocou pilotnej vlny nie je konvenčná. Ako sme už spomínali, existuje niekoľko vážnych argumentov proti bohmovskému kvantovému formalizmu:

1. Bohmovská teória nám dáva možnosť poskytnúť matematický popis trajektórie $q(t)$ elementárnej častice. Avšak takáto trajektória podľa konvenčného kvantového formalizmu neexistuje.

2. Bohmovská teória nie je lokálna, t.j. pomocou poľa pilotnej vlny jedna častica „cíti“ druhú na veľké vzdialenosti.

Tieto nevýhody teórie sa stanú výhodami pri aplikáciách bohmovskej teórie na finančné trhy.

Naším základným poredpokladom je, že agenti na modernom finančnom trhu nie sú len „klasickí agenti.“ Ich akcie nie sú riadené len klasickým finančným potenciálom

$V(t, q_1, \ldots, q_n)$, ale tiež (rovnako ako pri teórii pilotnej vlny pre kvantové systémy) potenciálom dodatočných informácií (alebo psychologickým potenciálom) indukovaným finančnou pilotnou vlnou.

Preto nemôžeme použiť klasickú finančnú dynamiku (hamiltonovský formalizmus) na finančný fázový priestor, aby sme popísali trajektórie reálnych cien. Musíme brať do úvahy informačné (psychologické) odchýlky hamiltonovských rovníc pre cenu a zmenu ceny. Aby sme popísali taký model matematicky, je vhodné využiť objekt, ako *finančná pilotná vlna*, ktorý riadi finančný trh.

V istom zmysle $\psi(q)$ popisuje psychologický vplyv cenovej konfigurácie q na správanie agentov finančného trhu. Konkrétne $\psi(q)$ predstavuje očakávania agentov.

Zdôrazňujeme dve dôležité zložky modelu finančnej pilotnej vlny:

1. Všetky akcie sú prepojené na informačnej úrovni. Všeobecný formalizmus teórie pilotnej vlny vraví, že ak funkcia $\psi(q_1, \ldots, q_n)$ nie je faktorizovaná, t.j.

$$\psi(q_1, \ldots, q_n) \neq \psi_1(q_1) \ldots \psi_n(q_n),$$

potom akákoľvek zmena ceny q_i automaticky zmení správanie všetkých agentov na finančnom trhu (dokonca aj tých, ktorí nemajú žiadny priamy vzťah s i akciami). Toto by malo za následok zmenu cien j akcií pre $i \neq j$. Súčasne „silný“ ekonomciký potenciál $V(q_1, \ldots, q_n)$ nemusí zahŕňať žiaden pojem interakcie.

Uvažujme napríklad potenciál

$$V(q_1, \ldots, q_n) = q_1^2 + \cdots + q_n^2.$$

Hamiltonovské rovnice pre tento potenciál (s vynechaním finančnej pilotnej vlny) majú tvar:

$$\dot{q}_j = p_j, \dot{p}_j = -2q_j, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Teda klasická trajektória ceny $q_j(t)$ nezávisí od dynamiky cien akcií iných obchodníkov $i \neq j$ (napríklad, cena akcií Dell nezávisí od cien akcií IBM a naopak).

Ak by však vlnová funkcia mala napríklad tvar:

$$\psi(q_1, \ldots, q_n) = ce^{i(q_1 q_2 + \ldots + q_{n-1} q_n)} e^{-(q_1^2 + \ldots + q_n^2)},$$

kde $c \in C$ je nejaká normalizačná konštanta, potom finančné správanie agentov na finančnom trhu nie je lokálne.

2. Reakcie trhu nezávisia na amplitúde finančnej pilotnej vlny: vlny ψ, 2ψ, 100000ψ spôsobia rovnakú reakciu. Takéto správanie na trhu je prirodzené, ak je finančná pilotná vlna interpretovaná ako informačná vlna, vlna finančných informácií.

Amplitúda informačného signálu nehrá dôležitú rolu pri informačnej výmene. Najdôležiteší je obsah takého signálu. Obsah je daný tvarom signálu, formou funkcie finančnej pilotnej vlny.

4.2 Dynamika cien riadených finančnou pilotnou vlnou

V skutočnosti nepotrebujeme vyvíjať nový matematický formalizmus. Iba aplikujeme štandardný formalizmus pilotnej vlny na finančné trhy. Základný predpoklad teórie pilotnej vlny je, že pilotná vlna (pole)

$$\psi(q_1, \dots, q_n)$$

indukuje nový (kvantový) potencál

$$U(q_1, \dots, q_n)$$

ktorý narúša klasické rovnice pohybu. Upravená newtonova rovnica má tvar:

$$\dot{p} = f + g, \tag{4.1}$$

kde

$$f = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

a

$$g = -\frac{\partial U}{\partial q}.$$

Dodatočnú finančnú silu g nazývame *finančná mentálna sila.* Táto sila $g(q_1, \dots, q_n)$ predstavuje niečo ako kolektívne vedomie finančného trhu. Samozrejme g závisí na ekonomických a iných „silných“ podmienkach daných finančným potenciálom $V(q_1, \dots, q_n)$. Nejedná sa však o priamu závislosť. V princípe, nenulová finančná mentálna sila môže byť vyvolaná finančnou pilotnou vlnou ψ v prípade nulového finančného potenciálu, $V \equiv 0$. Takže $V \equiv 0$ neimplikuje $U \equiv 0$. *Trhová psychológia nie je úplne určovaná ekonomickými faktormi.* Finančné (psychologické) vlny informácií nemusia byť generované nejakými zmenami v reálnej ekonomickej situácii. Sú kombináciami mentálnych a ekonomických vĺn. Dokonca i bez ekonomických vĺn môžu mať mentálne finančné vlny veľký vplyv na trh.

Využitím štandardného formalizmu pilotnej vlny získame nasledujúce pravidlo pre výpočet finančnej mentálnej sily. Vyjadríme finančnú pilotnú vlnu $\psi(q)$ v tvare:

$$\psi(q) = R(q)e^{iS(q)},$$

kde $R(q) = |\psi(q)|$ je amplitúda $\psi(q)$, (absolútna hodnota komplexného čísla $c = \psi(q)$) a $S(q)$ je fáza $\psi(q)$ (argument komplexného čísla $c = \psi(q)$). Potom finančný mentálny potenciál vypočítame ako

$$U(q_1, \ldots, q_n) = -\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 R}{\partial q_i^2}$$

a finančnú mentálnu silu ako

$$g_j(q_1, \ldots, q_n) = \frac{-\partial U}{\partial q_j}(q_1, \ldots, q_n).$$

Tieto vzťahy naznačujú, že silné finančné vplyvy sú tvorené finančnými vlnami majúcimi podstatné odchýlky amplitúd.

Príklad 1. (Finančné vlny s malými odchýlkami nemajú žiaden efekt). Začnime s najjednoduchším príkladom:

$$R \equiv const.$$

Potom finančná (behaviorálna) sila $g \equiv 0$. Ak $R \equiv const$, nie je možné meniť očakávania celého trhu pozmenením ceny q_j jedného pevného typu akcií j. Konštanté informačné pole nevyvoláva psychologické finančné efekty. Ako sme už spomínali, absolútna hodnota tejto konštanty nezohráva žiadnu rolu. Vlny s konštantnou amplitúdou, či už $R = 1$, alebo $R = 10^{100}$ nevytvárajú žiaden efekt.

Príklad 2. (Špekulácia) Nech

$$R(q) = c(q^2 + d), \; c, d > 0.$$

Tu

$$U(q) = -\frac{2}{q^2 + d}$$

(nezávisí to od amlitúdy c) a

$$g(q) = \frac{-4q}{(q^2 + d)^2}.$$

Kvadratická funkcia sa mení podstatne viac ako lineárna funkcia a ako dôsledok toho, takáto finančná pilotná vlna má za následok netriviálnu finančnú silu.

Pozrieme sa na finančné pohnútky indukované takouto silou. Uvažujeme situáciu: (počiatočná cena) $q > 0$ a $g < 0$. Finančná sila g stimuluje trh, ktorý funguje ako veľký kognitívny systém, aby znižoval cenu. Pre malé ceny,

$$g(q) \approx -4q/d^2.$$

Ak finančný trh zvýši cenu q pre akcie takéhoto typu, negatívna reakcia finančnej sily bude silnejšia a silnejšia. Trh je tlačený finančnou silou k zastaveniu zvyšovania ceny q. Avšak pre veľké ceny,

$$g(q) \approx -4/q^3.$$

Ak je trh schopný priblížiť sa k tomuto rozmedziu cien (napriek negatívnemu tlaku finančnej sily pre relatívne malé q), trh bude pociťovať znižovanie negatívneho tlaku. Tento model dobre popisuje špekulatívne správanie finančného trhu.

Príklad 3. Nech

$$R(q) = c(q^4 + b),\ c, b > 0.$$

Teda

$$g(q) = \frac{bq - q^5}{(q^4 + b)^2}.$$

Tu je správanie trhu komplikovanejšie. Určime

$$d = \sqrt[4]{b}.$$

Ak sa cena mení z $q = 0$ do $q = d$, potom je trh motivovaný finančnou silou $g(q)$, aby zvýšil cenu. Cena $q = d$ je kritická pre jeho finančnú aktivitu. Kvôli psychologickým dôvodom trh „rozumie“, že by bolo nebezpečné pokračovať v zvyšovaní ceny. Po priblížení sa ceny k $q = d$ má trh psychologické podnety k zníženiu ceny.

Finančná pilotná vlna $\psi(q)$ s $R(q)$, ktoré sú polynómy vyšších rádov môžu mať za následok veľmi komplexné správanie. Interval $[0, \infty)$ je rozdelený na súbor podintervalov $0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_n < \infty$ tak, že na každej cenovej úrovni $q = d_j$ obchodník mení svoj postoj k zvýšeniu alebo zníženiu ceny.

Zatiaľ sme uvažovali jednorozmerný model. V skutočnosti musíme uvažovať viacrozmerné modely veľkého rozmeru. Finančná pilotná vlna $\psi(q_1, \ldots, q_n)$ na takom cenovom priestore Q indukuje rozdelenie Q na veľké množstvo polí

$$Q = O_1 \bigcup \ldots \bigcup O_N$$

Jediný problém, ktorý ešte musíme vyriešiť, je popis časovej dynamiky finančnej pilotnej vlny $\psi(t, q)$. Postupujeme podľa štandardnej teórie pilotnej vlny. Tu $\psi(t, q)$ nájdeme ako riešenie schrödingerovej rovnice. Schrödingerova rovnica pre energiu

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j^2}{m_j} + V(q_1, \ldots, q_n)$$

má tvar:

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,q_1,\ldots,q_n) = -\sum_{j=1}^{n}\frac{h^2}{2m_j}\frac{\partial^2\psi(t,q_1,\ldots,q_n)}{\partial q_j^2} + V(q_1,\ldots,q_n)\psi(t,q_1,\ldots,q_n) \quad (4.2)$$

s počiatočnou podmienkou

$$\psi(0,q_1,\ldots,q_n) = \psi(q_1,\ldots,q_n).$$

Teda ak poznáme $\psi(0,q)$, tak použitím schrödingerovej rovnice môžeme nájsť pilotnú vlnu v ľubovoľnom časovom okamihu $t, \psi(t,q)$. Potom môžeme vypočítať prislúchajúci mentálny potenciál $U(t,q)$ a mentálnu silu $g(t,q)$ a vyriešiť newtonovu rovnicu.

Tú istú rovnicu použijeme pre nájdenie vývoja finančnej pilotnej vlny. Podotkneme len jednu vec, a to k úlohe konštanty h v schrödingerovej rovnici. V kvantovej mechanike, ktorá sa zaoberá mikroskopickými časticami, je h planckova konštanta. Táto je považovaná za konštantu, ktorá zohráva hlavnú úlohu v kvantových úvahách. Avšak pôvodne sa h objavovala len ako škálovací parameter pre procesy výmeny energie. Preto budeme v našom finančnom modeli hovoriť o h ako o parametri, ktorý škáluje cenu, teda ako o jednotke, ktorou chceme merať zmenu ceny. Nepredstavíme špeciálnu veličinu pre h.

Predpokladáme, že finančná pilotná vlna sa vyvíja cez finančnú schrödingerovu rovnicu na priestore cien. Vo všeobecnom prípade má táto rovnica tvar:

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,q) = \widehat{H}\psi(t,q), \psi(0,q) = \psi(q),$$

kde $\widehat{H}$ je samopripojený operátor prislúchajúci finančnej energii danej funkciou $H(q,p)$ na finančnom fázovom priestore. Ďalej pokračujeme rovnako ako pri obyčajnej kvantovej teórii elementárnych častíc.

4.3 Výber miery klasických fluktuácií

Ako matematický základ modelu použijeme priestor $L_2(Q)$ funkcií $\psi : Q \to C$, kde Q je konfiguračný priestor cien, $Q = R^n$ alebo nejaká podmnožina $Q \subset R^n$ (napr. $Q = R^n_+$):

$$\|\psi\|^2 = \int_Q |\psi(x)|^2 dx < \infty.$$

Tu je dx lebesqueova miera, uniformné pravdepodobnostné rozdelenie, na konfiguračnom cenovom priestore. Samozrejme uniformné rozdelenie dx nie je jediný spôsob normalizácie miery na konfiguračnom cenovom priestore. Zvolením dx prepdpokladáme, že za absencie vplyvu pilotnej vlny majú všetky ceny *rovnaké práva.* To vo všeobecnosti neplatí. Ak nie sú žiadne finančné (psychologické) vlny, trh stále silno závisí od „silných“ ekonomických podmienok. Vo všeobecnosti, výber normalizačnej miery M musí byť opodstatnený reálnymi vzťahmi medzi cenami. Takže všeobecne finančná pilotná vlna ψ patrí do priestoru $L_2(Q, dM)$ s ohľadom na nejakú mieru M na konfiguračnom cenovom priestore:

$$\|\psi\|^2 = \int_Q |\psi(x)|^2 dM < \infty.$$

Konkrétne, M môže byť gaussovská miera:

$$dM(x) = \frac{1}{(2\pi det B)^{n/2}} e^{\frac{-(B^{-1}(x-\alpha), x-\alpha)}{2}} dx,$$

kde $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ je kovariančná matica a $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ je vektor stredných hodnôt. Miera M popisuje klasické náhodné fluktuácie na finančných trhoch, ktoré nie sú spojené s kvantovými (behaviorálnymi) efektami (tie sú v našom modeli popísané finančnou pilotnou vlnou). Ak sú vplyvy tejto vlny veľmi malé, môžeme použiť klasické pravdepodobnostné modely; konkrétne, založené na gaussovom rozdelení.

Kapitola 5

Porovnanie s konvenčnými modelmi finančných trhov

Náš model akciového trhu sa podstatne líší od bežných modelov. Preto by sme mali porovnať náš model s doposiaľ známymi modelmi.

5.1 Stochastický model

Aktívne sa vyvíja množstvo modelov finančných trhov založených na stochastických procesoch. Bachelier (1890) určil pravdepodobnosť zmeny ceny $P(v(t) \leq v)$tak, že použil niečo, čomu dnes hovoríme chapman-kolmogorova rovnica. Ak zavedieme hustotu pravdepodobnostného rozdelenia: $p(t,x)$, čiže $P(x_t \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p(t,q)dx$, tak to spĺňa cauchyho problém parciálnej diferenciálnej rovnice druhého rádu. Táto rovnica je vo fyzike známa ako chapmanova rovnica a v teórii pravdepodobnosti ako kolmogorova rovnica. V najjednoduchšom prípade je základný difúzny proces wienerov proces (brownov pohyb), táto rovnica má tvar (rovnica vedenia tepla):

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}. \tag{5.1}$$

Tu x predstavuje premennú zmeny ceny.

Pre všeobecný difúzny proces máme kolmogorovu rovnicu:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma^2(t,x)p(t,x)) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu(t,x)p(t,x)). \tag{5.2}$$

Táto rovnica je založená na difúznom procese

$$dx_t = \mu(t,x_t)dt + \sigma(t,x_t)dw_t, \tag{5.3}$$

kde w_t je wienerov proces. Táto rovnica by mala byť interpretovaná ako jednoduchší spôsob vyjadrenia prislúchajúcej integrálnej rovnice

$$x_t = x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mu(s, x_s)ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, x_s)dw_s. \tag{5.4}$$

Tento pôvodný model s gaussovsky rozdelenými cenami bol pomerne rýchlo nahradený modelom, v ktorom ceny akcií sú rozdelené *lognormálne*, t.j. ceny akcií sa správajú podľa *geometrického brownovho pohybu.*

Pripomíname, že stochastický proces S_t sleduje geometrický brownov pohyb, ak spĺňa nasledujúcu stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$dS_t = uS_tdt + vSdw_t \tag{5.5}$$

kde w_t je wienerov proces (=brownov pohyb) a u („percentuálny drift“) a v („percentuálna volatilita“) sú konštanty. Rovnica má analytické riešenie:

$$S_t = S_0exp\left((u - v^2/2)t + vw_t\right) \tag{5.6}$$

$S_t = S_t(\omega)$ závisí od náhodného parametra ω; tento parameter bude zvyčajne vynechaný. Základná vlastnosť stochastického procesu S_t je, že náhodná premenná

$$log(S_t/S_0) = log(S_t) - log(S_0)$$

je normálne rozdelená.

Na rozdiel od takéhoto stochastického modelu, náš bohmovský model akciového trhu nie je založený na teórii stochastických diferenciálnych rovníc. V našom modeli nemôže byť náhodnosť akciového trhu reprezentovaná nejakou transformáciou wienerovho procesu.

Najpodstatnejší problém pri stochastických procesoch je výber adekvátneho stochastického procesu $\xi(t)$ popisujúceho cenu alebo zmenu ceny. V súčasnosti je model geometrického brownovho pohybu považovaný za model poskytujúci len prvú aproximáciu niečoho pozorovaného v reálnych dátach.

5.2 Deterministický dynamický model

Tento prístup je často kritzovaný, konkrétny protiargument je: „Časový vývoj ceny aktíva závisí na všetkých informáciách ovplyvňujúcich skúmané aktívum a zdá sa nepravdepodobné, že všetky tieto informácie môžu byť popísané malým množstvom nelineárnych rovníc.“ [13]

Iba na prvý pohľad sa zdá, že aj bohmovský finančný model je deterministický model. Samozrejme dynamika cien (ako aj zmien cien) sú deterministické. Je popísaná druhým newtonovým zákonom, viď (4.1). Môže sa zdať, že náhodnosť môže byť v takomto modely zahrnutá len cez počiatočné podmienky:

$$\dot{p}(t,\omega) = f(t,q(t,\omega)) + g(t,q(t,\omega)), q(0) = q_0(\omega), p(0) = p_0(\omega), \tag{5.7}$$

kde $q(0) = q_0(\omega), p(0) = p_0(\omega)$ sú náhodné premenné (počiatočné podmienky pre ceny a hybnosti) a tu ω je rizikový parameter.

Ale nie je to také jednoduché. Bohmovská náhodnosť nie je pre niektoré nelineárne klasické a kvantové sily redukovaná na náhodnosť počiatočných podmienok alebo chaotického správania rovnice (4.1). Tieto sú klasické dopady náhodnosti. Ale skutočne nový dopad podstatne určený kvantovou náhodnosťou, ktorá je zahrnutá v $\psi-$funkcii (=pilotná vlna=vlnová funkcia). Ako už vieme, vývoj $\psi-$funkcie je popísaný dodatočnou rovnicou- schrödingerovou rovnicou- a teda $\psi-$náhodnosť nemôže byť oddčlenená ani z počiatočných podmienok (5.7) ani z možného náhodného správania.

V našom modeli funkcia ψ poskytuje dynamiku očakávaní na finančnom trhu. Tieto očakávania sú obrovským zdrojom náhodnosti na trhu- mentálnej (psychologickej) náhodnosti. Ale táto náhodnosť nie je klasická, t.j. jedná sa o nekolmogorovský pravdepodobnostný model.

Nakoniec dávame do pozornosti, že v kvantovej mechanike vlnová funkcia nie je merateľná veličina. Zdá sa, že podobná situácia nastáva na finančnom trhu. Nie sme schopní merať finančné $\psi-$pole (ktoré je nekonečnorozmerný objekt, keďže hilbertov priestor je nekonečného rozmeru). Toto pole obsahuje myšlienky a očakávania miliónov agentov a samozrejme nemôže byť všetko zaznamenané ako pri cenách a zmenách cien.

5.3 Stochastický model a očakávania agentov na finančnom trhu

Uvažujme znova model akciového trhu založeného na geometrickom brownovom pohybe:

$$dS_t = uS_tdt + vSdw_t.$$

Všimnime si, že v tejto rovnici nie je žiaden výraz popisujúci správanie sa agentov na finančnom trhu. Koeficienty u a v nemajú žiaden priamy vzťah s očakávaniami a trhovou psychológiou. Ďalej, ak dokonca popíšeme nejaké dodatočné stochastické procesy

$$\eta(t,\omega) = (\eta_1(t,\omega),\ldots,\eta_N(t,\omega))$$

popisujúce správanie agentov a dodatočné koeficienty (v stochastických diferenciálnych roviciach pre takéto procesy), budeme schopní simulovať reálny trh. Konečnorozmerný vektor $\eta(t,\omega)$ nemôže popisovať „mentálny stav trhu“, ktorý je nekonečnej komplexnosti. môžeme bohmovský model považovať za úvod k nekonečnorozmernému rizikovému parametru ψ. A tento parameter nemôže byť popísaný klasickou pravdepodobnostnou teóriou.

5.4 Hypotéza efektívneho trhu a bohmovský prístup k finančnému trhu

Hypotéza efektívneho trhu bola formulovaná v šesťdesiatych rokoch minulého storočia v [15]:

Hovoríme, že trh je efektívny v určovaní najracionálnejšej ceny, ak sú všetky dostupné informácie spracované okamžite, ako sa dostanú na trh a sú okamžite odrazené na novej hodnote ceny obchodovaných aktív.

Hypotéza efektívneho trhu je úzko spojená s hypotézou stochastického trhu. Za použitia hypotézy racionálneho správania a trhovej efektivity bol Samuelson schopný vyjadriť ako q_{t+1}, očakávaná hodnota ceny daného aktíva v čase $t + 1$, závisí od predchádzajúcich hodnôt cien $q_0, q_1, \ldots, q_t$ vzťahom

$$E(q_{t+1}|q_0, q_1, \ldots, q_t) = q_t. \tag{5.8}$$

Stochastické procesy takéhoto typu nazývame martingaly.

Teda hypotéza efektívneho trhu má za následok, že finančné trhy sú popísané špeciálnym druhom stochastických procesov, martingalmi.

Keďže bohmovský kvantový model finančných trhov nie je založený na hypotéze stochastického trhu, ani hypotéza efektívneho trhu neposlúži ako základ pre bohmovský kvantový model. Vzťah medzi modelom efektívneho trhu a bohmovským kvantovým modelom je veľmi krehký. Neexistuje žiadne priame protirečenie medzi týmito modelmi. Keďže klasická náhodnosť je tiež zahrnutá v modeli bohmovského kvantového trhu (cez náhodnosť počiatočných podmienok), mali by sme sa zhodnúť na tom, že „ dostupné informácie sú spracované okamžite, ako sa dostanú na trh a sú okamžite odrazené na novej hodnote ceny obchodovaných aktív.“ Avšak okrem dostupných informácií máme ešte informácie zakódované vo funkcii ψ popisujúcej psychológiu trhu. Ako sme už spomínali, táto funkcia nie je merateľná, takže úplné informácie v nej zahrnuté nemáme k dispozícii. Každopádne nejaké informácie z nej môžeme získať nejakými agentami na finančnom trhu (takými, čo „lepšie cítia psychológiu trhu“). Preto klasické formovanie cien založené na dostupných informáciách je nepretržite narúšané kvantovým príspevkom k cenám aktív. Nakoniec musíme povedať, že reálny trh nie je efektívny. Konkrétne v tom, že neurčuje najracionálnejšiu cenu. Môže dokonca indukovať aj úplne iracionálne ceny kvôli kvantovým efektom.

Kapitola 6

Existenčné vety pre nehladké finančné sily

6.1 Problém hladkosti cenových trajektórií

V bohmovskom modeli cenovej dynamiky môžeme nájsť cenovú trajektóriu $q(t)$ ako riešenie rovnice

$$m\frac{d^2q(t)}{dt^2} = f(t,q(t)) + g(t,q(t)) \tag{6.1}$$

s počiatočnou podmienkou

$$q(t_0) = q_0, q'(t_0) = q'_0.$$

Tu uvažujeme „klasickú“ silu (závislú od času)

$$f(t,q) = -\frac{\partial V(t,q)}{\partial q}$$

a „kvantovú“ silu

$$g(t,q) = -\frac{\partial U(t,q)}{\partial q},$$

kde $U(t,q)$ je kvantový potenciál indukovaný schrödingerovou dynamikou.V bohmovskej mechanike pre fyzikálne systémy je rovnica (6.1) braná ako obyčajná diferenciálna rovnica a $q(t)$ ako jediné riešenie (prislúchajúce počiatočným podmienkam) z množiny C^2: predpokladáme, že $q(t)$ je dvakrát diferencovateľná so spojitou $q''(t)$.

Jedna z možných námietok proti aplikovaniu bohmovského kvantového modelu pre popísanie dynamiky cien na finančnom trhu je hladkosť trajektórií. Vo finančnej matematike sa zvyčajne predpokladá, že trajektórie cien nie sú diferencovateľné.

6.2 Matematický model a realita

Samozrejme niekto môže proste tvrdiť, že v prírode sa žiadne hladké trajektórie nevyskytujú. Hladké trajektórie nepatria ani do fyzikálnej, ani do finančnej reality. Objavujú sa v matematických modeloch, ktoré môžu byť využité pri popisovaní reality. Je zrejmé, že možnosť aplikovať matematický model s hladkými trajektóriami závisí od časovej škály. Trajektórie, ktoré sú považované za hladké (alebo spojité) na jednej časovej škále, môžu byt nehladké (alebo nespojité) na jemnejšej časovej škále.

Túto filozofickú tému predstavíme pomocou histórie vývoja finančných modelov. Pripomíname, že v prvom štádiu vývoja finančnej matematiky, v bachelierovom a black-scholesovom modeli, boli uvažované procesy *so spojitými trajektóriami:* wienerov proces a všeobecnejší difúzny proces. V poslednej dobe sa však tvrdí, že takéto stochastické modely (so spojitými procesmi) nie sú dostatočne primerané pre reálne finančné dáta. Bolo pozorované, že na jemnejšej časovej škále sú niektoré levyho procesy so skokovými trajektóriami adekvátnejšie pre dáta z finančných trhov.

Kvôli tomu by niekto mohol tvrdiť, že bohmovský model poskytuje hrubý popis dynamiky cien a nepopisuje reálne trajektórie cien ich vyhladenými verziami. Bolo by však zaujímavé ponechať interpretáciu bohmovských trajektórií ako skutočných cenových trajektórií. V takom prípade by sme mali získať nehladké bohmovské trajektórie. V nasledujúcej časti predstavíme vety poskytujúce nehladké riešenia.

6.3 Picardova veta a jej zovšeobecnenie

Veta o jednoznačnosti a existencii pre obyčajné diferenciálne rovnice, picardova veta, nám dáva istotu hladkosti trajektórií. (viď [12])

Veta 1. *Nech $F : [0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia a nech F splňa lipschitzovské podmienky vzhľadom na premennú x:*

$$|F(t,x) - F(t,y)| \leq c|x-y|, c > 0. \tag{6.2}$$

Potom pre ľubovoľný bod $(t_0, x_0) \in [0,T) \times \mathbf{R}$ existuje jediné C^1 riešenie cauchyho problému

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0, \tag{6.3}$$

na úseku $\Delta = [t_0, a]$, kde $a > 0$ závisí od t_0, x_0 a F.

Predstavíme štandardný dôkaz tejto vety, pretože jeho schému neskôr využijeme. Uvažujme priestor spojitých funkcií $x : [t_0, a] \to \mathbf{R}$, kde $a > 0$ je číslo, ktoré bude určené. Označme tento priestor symbolom $C[t_0, a]$. Cauchyho problém (6.3) pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu môžeme napísať ako integrálnu rovnicu:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds \tag{6.4}$$

Podstatná vec pre ďalšie naše uvažovania je, že zo spojitosti funkcie F vzhľadom na dvojicu premenných (t, x) vyplýva spojitosť $y(s) = F(s, x(s))$ pre ľubovoľné spojité $x(s)$. Ale integrál $z(t) = \int_0^t y(s)ds$ je diferencovateľný pre hociaké spojité $y(s)$ a $z'(t) = y(t)$ je tiež spojité. Základným bodom štandardného dôkazu je to, že pre dostatočne malé $a > 0$ operátor

$$G(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds \tag{6.5}$$

mapuje funkcionálny priestor $C[t_0, a]$ do $C[t_0, a]$ a je to kontrakcia v tomto priestore:

$$\rho_\infty(G(x_1), G(x_2)) \leq \alpha\rho_\infty(x_{10}, x_{20}),\ \alpha < 1, \tag{6.6}$$

pre hociaké 2 trajektórie $x_1(t), x_2(t) \in C[t_0, a]$ také, že $x_1(t_0) = x_{10}$ a $x_2(t_0) = x_{20}$. Tu aby sme získali $\alpha < 1$, musí byť interval $[t_0, a]$ zvolený dostatočne malý. Tu $\rho_\infty(u_1, u_2) = \|u_1 - u_2\|_\infty$ a

$$\|u\|_\infty = \sup_{t_0 \leq t \leq a} |u(s)|.$$

Z podmienky $\alpha < 1$ vyplýva, že iterácie

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(S, x_0)ds,$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(S, x_1(S))ds, \ldots,$$

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(S, x_{n-1}(S))ds, \ldots$$

konvergujú k riešeniu $x(t)$ integrálnej rovnice (6.4). Ďalej poznamenáme, že z podmienky (6.6) vyplýva, že riešenie je jednoznačné na priestore $C[t_0, a]$.

Stručne povedané vo Vete 1 je lipschitzovská podmienky zodpovedná za jednoznačnosť riešenia a spojitosť $F(t, x)$. Ďalej spomenieme peanovu vetu:

Veta 2. *Nech $F : [0, T] \times \mathbf{R}$ je spojitá funkcia. Potom pre ľubovoľný bod $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbf{R}$ existuje lokálne C^1 riešenie cauchyho problému (6.3).*

Poznamenáme, že z peanovej vety nevyplýva jedinečnosť riešenia.

Je zrejmé, že nespojité finančné sily môžu indukovať cenové trajektórie $q(t)$, ktoré nie sú hladké; trajektórie cien môžu byť dokonca nespojité. Z tohto uhla pohľadu nie je hlavný problém hladkosľ trajektórií cien $q(t)$, ale to, že neexistuje veta o jednoznačnosti pre nespojité finančné sily. My takú vetu sformulujeme a dokážeme. Samozrejme mimo triedy hladkých riešení by sme sa nemali zameriavať na pôvodný cauchyho problém (6.3). Namiesto toho by sme mali uvažovať integrálnu rovnicu (6.4).

Zovšeobecníme Vetu 1 na nespojité F. Uvažujme priestor $BM[t_0, a]$ pozostávajúci z ohraničených merateľných funkcií $x : [t_0, a] \to \mathbf{R}$. Teda:

1. $sup_{t_0 \le t \le a} |x(t)| \equiv \|x\|_\infty < \infty$;

2. pre hociakú borelovskú podmnožinu $A \subset \mathbf{R}$, jej vzor $x^{-1}(A) = \{s \in [t_0, s] : x(s) \in A\}$ je opäť borelovská podmnožina v $[t_0, a]$.

Lema 1. *Priestor trajektórií $BM[t_0, a]$ je banachov priestor.*

Dôkaz. *Nech $\{x_n(t)\}$ je postupnosť trajektórií, ktorá je cauchyho postupnosť v priestore $BM[t_0, a]$:*

$$\|x_n - x_m\|_\infty \to 0, n, m \to \infty.$$

Teda

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{t_0 \le t \le a} |x_n(t) - x_m(t)| \to 0. \tag{6.7}$$

Teda pre hociaké $t \in [t_0, a], |x_n(t) - x_m(t)| \to 0, n, m \to \infty$. Odtiaľ, pre hociaké t je postupnosť reálnych čísel $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyho postupnosť na $\mathbf{R}$.

Ale priestor $\mathbf{R}$ je úplný. Teda pre hociaké $t \in [t_0, a]$ existuje $\lim_{n\to\infty} x_n(t)$, ktorú vyjadríme ako $x(t)$. Takto sme zostrojili novú funkciu $x(t), t \in [t_0, a]$. Teraz prepíšeme podmienku (6.7): $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, m \ge N$:

$$|x_n(t) - x_m(t)| \le \epsilon \text{ pre ľubovoľné } t \in [t_0, a]. \tag{6.8}$$

Teraz nastavíme $n \ge N$ a v nerovnosti (6.8) vezmeme limitu pre $m \to \infty$. Získame:

$$|x_n(t) - x(t)| \le \epsilon \text{ pre ľubovoľné } t \in [t_0, a]. \tag{6.9}$$

Teda

$$\sup_{t_0 \le t \le a} |x_n(t) - x(t)| \le \epsilon \tag{6.10}$$

To nie je nič iné ako podmienka:

$$\forall n \ge N : \|x_n - x\|_\infty \le \epsilon.$$

Preto $x_n \to x$ v priestore $BM[t_0, a]$. Pripomíname, že trajektória $x(t)$ je ohraničená, pretože:

$$\|x\|_\infty \le \|x_{n_0} - x\|_\infty + \|x_{n_0}\|_\infty \in \epsilon + \|x_{n_0}\|_\infty$$

pre ľubovoľné pevne dané $n_0 \ge N$ a keďže $\|x_{n_0}\|_\infty \le \infty$, nakoniec dostávame $\|x\|_\infty \le \infty$. Ešte poznamenáme, že $x(t)$ je merateľná funkcia ako uniformná limita merateľných funkcií. Teda priestor $BM[t_0, a]$ je úplný normovaný priestor- Banachov priestor.

Veta 3. *Nech $F : [0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je merateľná ohraničená funkcia a nech F spĺňa lipschitzovskú podmienku vzhľadom na premennú x, viď (6.2). Potom pre hociaký bod z $t_0, x_0 \in [0,T) \times \mathbf{R}$ existuje jednoznačné riešenie integrálnej rovnice (6.4) triedy $BM[t_0,a]$, kde $a > 0$ závisí do t_0, x_0 a F.*

Dôkaz. *Neskôr určíme $a > 0$. Nech $u(s)$ je hociaká funkcia triedy $BM[t_0,a]$. Potom funkcia $y(s) = F(s,u(s))$ je merateľná (keďže F aj u sú merateľné) a ohraničená (lebo F je ohraničená). Teda $y \in BM[t_0,a]$. Každá ohraničená a merateľná funkcia je integrovateľná vzľadom na lebesqueovu mieru dt na $[t_0,a]$. Preto*

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} y(s)ds \equiv \int_{t_0}^{t} F(s,u(s))ds$$

je dobre definovaná pre každé t. Táto funkcia je opäť merateľná vzhľadom na t a ohraničená, pretože:

$$\left| \int_{t_0}^{t} y(a)ds \right| \leq \sup_{t_0 \leq s \leq t} |y(s)|(t-t_0) \leq \|y\|_\infty (a-t_0) < \infty.$$

Teda operátor G, ktorý bol definovaný v (6.5) mapuje $BM[t_0,a]$ do $BM[t_0,a]$. Teraz ukážeme, že pre dostatočne malé $a > 0$ je G kontrakcia v $BM[t_0,a]$. Využitím lipschitzovskej podmienky získame:

$$\sup_{t_0 \leq t \leq a} |G(x_1)(t) - G(x_2)(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (F(s,x_1(s))) - F(s,x_2(s))ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |(F(s,x_1(s))) - F(s,x_2(s))|ds \leq \sup_{t_0 \leq t \leq a} c \int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_2(s)|ds$$
$$\leq \sup_{t_0 \leq t \leq a} c(t-t_0) \sup_{t_0 \leq t \leq a} |x_1(s) - x_2(s)| \leq c(a-t_0)\|x_1 - x_2\|_\infty.$$

Určíme $\alpha = c(a-t_0)$. Ak $\alpha < 1$, t.j. $c(a-t_0) < 1$ alebo $(a-t_0) < \frac{1}{2}$, alebo $0 < a < \frac{1}{c} + t_0$, potom G je kontrakcia. Preto vďaka známemu pevnému bodu pre kontrakciu zobrazení v úplných metrických priestoroch (konkrétne v banachových priestoroch), má zobrazenie G jednoznačný pevný bod

$$x(t) \in BM[t_0,a], G(x) = 0,$$

alebo

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,x(s))ds.$$

Tvrdenie 1. *(Spojitosť riešenia integrálnej rovnice). Nech platia podmienky Vety 3. Riešenia sú spojitými funkciami $x : [t_0,a] \to \mathbf{R}$.*

Dôkaz. *Použijeme to isté označenie ako v dôkaze Vety 3. Nech $u \in BM[t_0,a], y(s) =$*

$F(s,u(s))$. Ako sme už ukázali, toto je ohraničená merateľná funkcia. Ukážeme, že $u(t) = \int_{t_0}^{t} y(s)ds$ je spojitá funkcia. Nech $\tau \in [t_0, t]$ a nech Δ je malé reálne číslo. Potom

$$|\xi(\tau+\Delta) - \xi(\tau)| = \left| \int_{\tau}^{\tau+\Delta} y(s)ds \right| \leq |\Delta| \|y\|_\infty \to 0, \Delta \to 0.$$

Tu sme využili jednoduché vlastnosti lebesqueovho integrálu: $|\int_a^e y(s)ds| \leq \int_a^b |y(s)|ds$ a ak $|y(s)| \leq const$, potom $\int_a^b |y(s)|ds \leq const(b-a)$ (v našom prípade $const = \|y\|_\infty = sup_{t_0 \leq t \leq a}|y(s)|$).

Teda Veta 3 dáva dostatočné podmienky pre existenciu jednoznačného spojitého riešenia ako trajektórie $x(t)$ pre integrálnu rovnicu (6.4). Samozrejme vo všeobecnosti $x(t)$ nie je spojite diferencovateľné.

Veta 4. *Nech f spĺňa lipschitzovské podmienky (6.2). Potom pre ľubovoľný bod $(t_0, x_0 \in [0,T) \times \mathbf{R})$ existuje jednoznačné riešenie integrálnej rovnice (6.4) triedy $L_2[t_0, a]$, kde $a > 0$ závisí od x_0, t_0 a F.*

Dôkaz. *Nech $u \in L_2[t_0, a]$ (ako vždy, $a > 0$ určíme neskôr). Potom $y(s) = F(s, u(s))$ taktiež patrí do $L_2[t_0, a]$:*

$$\int_{t_0}^{a} y^2(s)ds = \int_{t_0}^{a} F^2(s, u(s))ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{a} (m_1|u(s)| + m_2)^2 ds =$$

$$m_1^2 \int_{t_0}^{a} u^2(s)ds + m_2^2(a - t_0) + 2m_1m_2 \int_{t_0}^{a} |u(s)|ds.$$

Tu sme odhadli $F(t,u)$ pomocou nerovnosti (6.8).

Teraz spomenieme známu cauchy-bunyakowskeho nerovnosť v L-priestore. Pre hociakú dvojicu trajektórií $u_1, u_2 \in L_2$ máme

$$\int_{t_0}^{a} |u_1(s)u_2(s)|ds \leq \sqrt{\int_{t_0}^{a} u_1^2(s)ds} \sqrt{\int_{t_0}^{a} u_2^2(s)ds}.$$

Chceme odhadnúť intehrál

$$\int_{t_0} |u(s)|ds$$

použitím cauchy-bunaykovskeho nerovnosti. Zvolíme si $u_2(s) = u(s)$ a $u_1(s) \equiv 1$. Máme

$$\int_{t_0}^{a} |u(s)|ds \leq \sqrt{\int_{t_0}^{a} ds} \sqrt{\int_{t_0}^{a} u^2(s)ds} = \sqrt{a - t_0}\|u\|_2.$$

Nakoniec dostávame

$$\int_{t_0}^{a} y^2(s)ds \leq m_1^2\|u\|_2^2 + m_2^2(a-t_0) + 2m_1m_2\sqrt{a-t_0}\|u\|_2 \leq \infty.$$

Teda funkcia $y \in L_2[t_0, a]$. *Preto inegrálny operátor daný*

$$G(u)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, u(s))ds$$

zpbrazuje priestor trajektórií $L_2[t_0, a]$ *do* $L_2[t_0, a]$. *Pripomíname, že* L_2*-priestory sú banochove priestory. Teda sú to úplné metrické priestory. Tu môžeme použiť vetu o pevnom bode pre kompresné zobrazenia. Nakoniec dokážeme, že integrálny operátor* $G : L_2[t_0, a] \to L_2[t_0, a]$ *je kompresia pre dostatočne malé* $a > 0$.

Ako vždy použijeme lipschitzovksú podmienku vzhľadomna x. *Pre každú dvojicu trajektórií* $x_1(s), x_2(s) \in L_2[t_0, a]$*:*

$$\|G(x_1) - G(x_2)\|_2^2 = \int_{t_0}^{a} \left(\int_{t_0}^{t} (F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s)))ds \right)^2 dt$$

$$\leq c^2 \int_{t_0}^{a} \left(\int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_2(s)|ds \right)^2 dt.$$

Teraz predstavíme charakteristickú funkciu intervalu $[t_0, t]$*:*

$$\phi_t(s) = \begin{cases} 1, s \in [t_0, t] \\ 0, s \notin [t_0, t] \end{cases}$$

Posledný integrál môžeme prepísať do tvaru

$$\int_{t_0}^{a} \left(\int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_2(s)|ds \right)^2 dt = \int_{t_0}^{a} \left(\int_{t_0}^{t} \phi_t(s)|x_1(s) - x_2(s)|ds \right)^2 dt.$$

Teraz využijeme cauchy-bunaykovskeho nerovnosť pre integrál vzhľadom na ds. *Zvolíme* $u_1(s) = \phi_t(s)$ *a* $u_2(s) = |x_1(s) - x_2(s)|$. *Dostaneme:*

$$\int_{t_0}^{a} \phi_t(s)|x_1(s) - x_2(s)|ds$$

$$\leq \sqrt{\int_{t_0}^{a} \phi_{t_0}^2(s)ds}\sqrt{\int_{t_0}^{a} |x_1(s) - x_2(s)|^2 ds}$$

$$= \sqrt{\int_{t_0}^{t} ds}\|x_1 - x_2\|_2 = \sqrt{t - t_0}\|x_1 - x_2\|_2 \leq \sqrt{a - t_0}\|x_1 - x_2\|_2$$

Nakoniec dostávame

$$\|G(x_1) - G(x_2)\|_2^2 \leq c^2 \int_{t_0}^{a} (a - t_0)\|x_1 - x_2\|_2^2 dt \leq c^2 (a - t_0)^2 \|x_1 - x_2\|_2^2.$$

Teda

$$\rho_2(G(x_1), G(x_2)) = \|G(x_1) - G(x_2)\|_2 \leq c(a - t_0)\rho_2(x_1, x_2).$$

Určíme

$$\alpha = c(a - t_0).$$

Preto ak $\alpha < 1$*, potom*

$$G : L_2[t_0, a] \to L_2[t_0, a]$$

je kompresia. Má pevný bod, ktorý je jednoznačným riešením našej integrálnej rovnice. Čím je tvrdenie dokázané

Treba poznamenať, že rovnako ako v prípade $BM[t_0, a]$ priestoru, môžeme ukázať, že riešenia existujúce kvôli Vete 4 sú spojitými funkciami.

Tvrdenie 2. *(Spojitosť) Nech platia podmienky z Vety 4. Potom riešenia* $x : [t_0, a] \to \mathbf{R}$ *sú spojitými funkciami.*

Dôkaz. *Ako sme mohli vidieť v dôkaze vety 4, pre akúkoľvek trajektóriu* $u \in L_2[t_0, a]$ *funkcia* $y(s) = F(s, u(s))$ *taktiež patrí do* $L_2[t_0, a]$*. Dokážeme, že*

$$\xi(s) = \int_{t_0}^{t} y(s)ds$$

je spojitá. Vezmime si $\Delta \geq 0$ *(prípad* $\Delta < 0$ *by bol rozobratý analogicky). Máme*

$$|\xi(\tau + \Delta) - \xi(\tau)| \leq \int_{\tau}^{\tau+\Delta} |y(s)|ds.$$

Predstavíme charakteristické funkcie

$$\phi_{[\tau,\tau+\Delta]} = \begin{cases} 1, s \in [\tau, \tau + \Delta] \\ 0, s \notin [\tau, \tau + \Delta] \end{cases}$$

Máme

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta} |y(s)|ds = \int_{t_0}^{a} \phi_{[\tau,\tau+\Delta]}(s)|y(s)|ds$$

$$\leq \sqrt{\int_{t_0}^{a} \phi^2_{[\tau,\tau+\Delta]}(s)ds}\sqrt{\int_{t_0}^{a} |y(s)|^2 ds} = \sqrt{\Delta}\|y\|_2 \to 0, \Delta \to 0.$$

Tu sme využili cauchy-bunaykovskeho nerovnosť pre funkcie $u_1(s) = \phi_{[\tau,\tau+\Delta]}(s)$ *a* $u_2(s) = |y(s)|$*. Dôkaz je hotový.*

Teda opäť sme získali spojité, no vo všeobecnosti nehladké ($x \notin C^1$) riešenia základnej integrálnej rovnice.

Táto teória môže byť prirodzene zovšeobecnená na L_p priestory, $p \geq 1$:

$$L_p[t_0, a] = \{x : [t_0, a] \to \mathbf{R} : \|x\|_p^p \equiv \int_{t_0}^{a} |x(t)|^p dt < \infty\}.$$

Toto nebudeme robiť, pretože naším cieľom bolo len ukázať, že integrálna rovnica (6.4) s nespojitým F je dobre postavená (t.j. má jednoznačné riešenie) v nejakej triede (nehladkých) trajektórií.

Dôležitejšie je poznamenať, že vety 3 a 4 platia vo viacrozmernom prípade:

$$x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n}), x(t) = (x_1, (t), \ldots, x_n(t)),$$

a

$$F : [0, T] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

Aby sme to ukázali, treba zmeniť vo všetkých predošlých úvahách absolútnu hodnotu $|x|$ na normu euklidovského priestoru $\mathbf{R}^n$:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1} x_j^2}.$$

Teraz využijeme bežný trik, ako aplikovať teóriu na newtonovu rovnicu (6.1), ktorá je diferenciálnou rovnicou druhého rádu. Prepíšeme túto rovnicu ako systém rovníc prvého rádu vzhľadom na

$$x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{2n}),$$

kde

$$x_1 = q_1, \ldots, x_n = q_n,$$

$$x_{n+1} = p_1, \ldots, x_{2n} = p_n.$$

Toto vlastne nie je nič iné ako interpretácia fázového priestoru. Newtonova rovnica (6.1) bude písaná ako hamiltonova rovnica. Avšak hamiltonovská štruktúra pre nás v tomto kontexte nie je dôležitá. Za každých okolností získame nasledujúci systém rovníc prvého rádu:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t)), \tag{6.11}$$

kde

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \\ f_1(t,x_1,\ldots,x_n) + g_1(t,x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(t,x_1,\ldots,x_n) + g_n(t,x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}.$$

Tu

$$f_j(t,x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial V}{\partial x_j}(t,x_1,\ldots,x_n)$$

a

$$g_j(t,x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial U}{\partial x_j}(t,x_1,\ldots,x_n).$$

Preto ak

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$$

alebo

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial U}{\partial x_n}\right)$$

nie sú spojité, potom štandardné vety o existencii a jednoznačnosti, viď Vety 1 a 2, nemôžu byť použité. Ale namiesto obyčajnej diferenciálnej rovnice (6.11) môžeme uvažovať integrálnu rovnicu:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,x(s))ds \tag{6.12}$$

a využijeme Vety 3 a 4 na túto rovnicu. Poznamenáme, že kvôli štruktúre $F(t,x)$ máme vlastne

$$p_1(t) = p_{01} + \int_{t_0}^{t} F_1(s,q(s))ds$$

$$p_n(t) = p_{0n} + \int_{t_0}^{t} F_n(s,q(s))ds$$

$$q_1(t) = q_{01} + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} p_1(s,q(s))ds$$

$$q_n(t) = q_{0n} + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} p_n(s)ds.$$

Podľa Tvrdení 1 a 2 $p_j(t)$ sú spojité funkcie. Preto integrály $\int_{t_0}^{t} p_j(s)ds$ sú spojité diferencovateľné funkcie. Teda za podmienok Vety 3 alebo Vety 4 získame nasledujúci tvar pre cenovú dynamiku:

Cenové trajektórie sú triedy C^1 *(teda* $\frac{dq}{dt}(t)$ *existuje a je spojitá), ale cenová rýchlosť*

$$v(t) = \frac{p(t)}{m}$$

je vo všeobecnosti nespojitá.

6.4 Problém kvadratickej variácie

Kvadratická variácia funkcie u na intervale $[0, T]$ je definovaná ako

$$\langle u\rangle(T) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (u(t_{k+1}) - u(t_k))^2,$$

kde

$$P = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$$

je delenie intervalu $[0, T]$ a

$$\|P\| = \max_k \{(t_{k+1} - t_k)\}.$$

Pripomíname známy výsledok:

Veta. *Ak je* u *diferencovateľná, potom* $\langle u\rangle(T) = 0$.

Preto pre ľubovoľnú hladkú bohmovskú trajektóriu je jej kvadratická variácia rovná nule. Na druhej strane je dobre známe, že trajektórie reálnych cien majú nenulovú kvadratickú variáciu. Toto je silná prekážka pri úvahách o hladkých bohmovských cenových trajektóriách.

V predchádzajúcej časti sme odvodili vety o existencii, ktoré poskytujú nehladké trajektórie. môžeme dúfať, že riešenia dané týmito vetami by mohli mať nenulové kvadratické variácie, nie je tomu však tak.

Veta. *Predpokladajme, že*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t F(s, x(s))ds,$$

kde F *je ohraničená, t.j.* $|F(t, x)| \leq K$, *a merateľná. Potom kvadratická variácia* $\langle F\rangle(t) = 0$.

Dôkaz. *Máme:*

$$|x(t_k) - x(t_{k-1})|^2 = \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(s, x(s))ds \right| \leq K^2(t_k - t_{k-1})^2.$$

Teda s delením $[0,t]$, *povedzme* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$, *dostávame*

$$\sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})|^2 \leq K^2 \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})^2$$

$$\leq K^2 \max_{k:1\leq k\leq n} (t_k - t_{k-1}) \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = K^2 \max_{k:1\leq k\leq n} (t_k - t_{k-1}),$$

čo konverguje k nule ako sa delenie stáva jemnejším, t.j. kvadratická variácia pre $t \mapsto x(t)$ *je nula.*

Teda prekážka spojená s nenulovou kvadratickou variáciou je podstatne ťažšia ako tá s hladkosťou. Jedna možnosť, ako sa tomuto problému vyhnúť, je uvažovať neohraničený kvantový potenciál alebo dokonca potenciál daný rozdelením.

6.5 Singulárne potenciály a sily

Predstavíme niektoré príklady nespojitých kvantových síl g (indukovaných nespojitým kvantovým potenciálom U).

6.6 Príklad singularity

Uvažujme vlnovú funkciu

$$\psi(x) = c(x+1)^2 e^{-x^2/2} dx,$$

kde c je normalizačná konštanta dávajúca

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Tu $\psi(x) \equiv R(x) = |\psi(x)|$. Máme:

$$R'(x) = c[2(x+1) - x(x+1)^2]e^{-\frac{x^2}{2}} = -c(x^3 + 2x^2 - x - 2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

a

$$R''(x) = c(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Teda

$$U(x) = -\frac{R''(x)}{R(x)} = \frac{x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 6x + 1}{(x+1)^2}.$$

Preto potenciál nadobúda singularitu v bode $x = -1$.

V tomto príklade je singularita kvantového potenciálu $U(t,x)$ dôsledkom rozdelenia amplitúdou vlnovej funkcie $R(t,x)$. Ak by $|\psi(t,x_0)| = 0$, mohla by sa tam vyskytovať singularita v bode x_0.

6.7 Všeobecná schéma pre vytvorenie singulárneho kvantového potenciálu pre ľubovoľný hamiltonián

Nech $\hat{H}$ je operátor , $\hat{H} \geq 0$, v $L_2(\mathbf{R}^n)$ (hamiltonián- operátor predstavujúci finančnú energiu). Uvažujme prislúchajúcu schrödingerovu rovnicu

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi,$$

$$\psi(0) = \psi_0,$$

v $L_2(\mathbf{R}^n)$. Potom má riešenie tvar:

$$u_t(\psi_0) = e^{\frac{-it\hat{H}}{h}}\psi_0.$$

Ak je operátor $\hat{H}$ spojitý, potom jeho exponent je definovaný za pomoci zvyčajného exponenciálneho mocninového radu:

$$e^{\frac{-it\hat{H}}{h}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-it\hat{H}}{h}\right)^n /n! = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-it}{h}\right)^n /n!\hat{H}^n.$$

Ak operátor $\hat{H}$ nie je spojitý, potom jeho exponent môže byť definovaný využitím *spektrálnej vety.*

Pripomenieme, že pre ľubovoľné $t \geq 0$ je zobrazenie

$$u_t : L_2(\mathbf{R}^n) \to L_2(\mathbf{R}^n)$$

unitárnym operátorom:

1. je vzájomným
2. zobrazuje $L_2(\mathbf{R}^n)$ do $L_2(\mathbf{R}^n)$
3. zachováva skalárny súčin:

$$(u_t\psi, u_t\phi) = (\psi, \phi),\ \psi, \phi \in L_2.$$

Dávame do pozornosti 2.. Podľa 2. pre hociaké $\phi \in L_2(\mathbf{R}^n)$ môžeme nájsť $\psi_0 \in L_2(\mathbf{R}^n)$ také, že

$$\phi = u_t(\psi_0).$$

Stačí zvoliť

$$\psi_0 = u_t^{-1}(\phi)$$

(každý unitárny operátor je invertibilný). Teda

$$\psi(t) = u_t(\psi_0) = \phi.$$

Vo všeobecnosti funkcia $\phi \in L_2(\mathbf{R}^n)$ nie je hladká alebo dokonca ani spojitá. Preto v uvažovanom prípade (vytvorili sme vlnovú funkciu ψ takú, že $\psi(t) = \phi$, kde ϕ je ľubovoľne zvolená dvakrát integrovateľná funkcia)

$$U(t,x) = -\frac{|\psi(t,x)|''}{|\psi(t,x)|} = -\frac{|\phi(x)|''}{\phi(x)}$$

je vo všeobecnosti zovšeobecnená funkcia (rozdelenie). Napríklad zvoľme

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2b}, -b \leq x \leq b \\ 0, x \notin [-b,b] \end{cases}$$

Tu $R(t,x) = |\phi(x)| = \phi(x)$ a

$$R'(t,x) = \frac{\delta(x+b) - \delta(x-b)}{2b},$$

$$R''(t,x) = \frac{\delta'(x+b) - \delta'(x-b)}{2b}.$$

Záver. Vo všeobecnosti, kvantový potenciál $U(t,x)$ je zovšeobecnenou funkciou (rozdelením). Preto trajektória ceny, rovnako ako zmeny ceny, je zovšeobecnenou funkciou (rozdelením) premennej času, t. Ďalej, keďže dynamická rovnice nie je lineárna, nemôžeme zaručiť ani existenciu riešenia.

Kapitola 7

Klasická a kvantová finančná náhodnosť

Uvažovaním singulárneho kvantového potenciálu môžeme modelovať bohmovskú cenovú dynamiku s trajektóriami majúcimi nenulovú kvadratickú variáciu. Hlavný problém je, že neexistujú žiadne existenčné vety pre také sily.

Ďalšou možnosťou, ako získať realistickejší kvantový model pre finančné trhy, je uvažovať dodatočné stochastické podmienky v newtonovej rovnici pre cenovú dynamiku.

7.1 Náhodnosť z počiatočných podmienok

Uvažujme finančnú newtonovu rovnicu (6.1) s náhodnými počiatočnými podmienkami:

$$\frac{md^2q(t,\omega)}{dt^2} = f(t,q(t,\omega)) + g(t,q(t,\omega)), \tag{7.1}$$

$$q(0,\omega) = q_0(\omega),\ \dot{q}(0,\omega) = \dot{q}_0(\omega), \tag{7.2}$$

kde $q_0(\omega)$ a $\dot{q}_0(\omega)$ sú dve náhodné premenné dávajúce počiatočné rozdelenie cien a zmien cien, v uvedenom poradí. Toto je cauchyho problém pre obyčajné diferenciálne rovnice v závislosti od parametra ω. Ak f spĺňa podmienky Vety 1, t.j. ak obe klasická aj kvantová (behaviorálna) finančná sila $f(t,q)$ a $g(t,q)$ sú spojité a spĺňajú lipschitzovské podmienky vzhľadom na premennú ceny, q, potom pre hociaké ω existuje riešenie $q(t,\omega)$ triedy C^2 vzhľadom na premennú času, t. Ale cez počiatočné podmienky cena závisí na náhodnej premennej ω, takže $q(t,\omega)$ je stochastický proces. Rovnako zmena ceny $v(t,\omega) = \dot{q}(t,\omega)$ je takisto stochastický proces. Tieto procesy môžu byť veľmi komplikované kvôli nelinearite koeficientov f a g. Vo všeobecnosti sa jedná o nestacionárne procesy. Napríklad matematická stredná hodnota

$$< q(t) >= Eq(t, \omega)$$

a disperzia (volatilita)

$$\sigma^2(q(t)) = Eq^2(t, \omega) - < q(t) >^2$$

môžu závisieť od t.

Ak aspoň jedna z finančných síl, $f(t, x)$ alebo $g(t, x)$, nie je spojitá, potom uvažujeme prislúchajúce integrálne rovnice:

$$p(t, \omega) = p_0(\omega) + \int_{t_0}^{t} f(s, q(s, \omega))ds + \int_{t_0}^{t} g(s, q(s, \omega))ds, \tag{7.3}$$

$$q(t, \omega) = q_0(\omega) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} p(s, \omega)ds \tag{7.4}$$

Pod predpokladmi Vety 3 a 4, existuje jednoznačný stochastický proces so spojitými trajektóriami, $q(t, \omega), p(t, \omega)$, dávajúci riešenie systému integrálnych rovníc (7.3),(7.4) s náhodnými počiatočnými podmienkami.

Avšak trajektórie stále budú mať nulovú kvadratickú variáciu. Preto tento model nie je uspokojivý.

7.2 Náhodná finančná hmotnosť

Pred tým sme parameter m, „finančnú hmotnosť“, považovali za konštantu modelu. Na reálnom finančnom trhu však m závisí od t:

$$m \equiv m(t) = (m_1(t), \ldots, m_n(t)).$$

Tu $m_j(t)$ predstavuje objem emisie (počet kusov) akcií $j-$tej spoločnosti. Preto prislúchajúca kapitalizácia trhu je daná

$$T_j(t) = m_j(t) q_j(t).$$

Takto sme modifikovali newtonovu rovnicu (7.1):

$$m_j(t)\ddot{q}_j = f_j(t, q) + g_j(t, q).$$

Určíme $F_j(t, q) = \frac{f_j(t,q)+g_j(t,q)}{m_j(t)}$.

Ak sú tieto funkcie spojité (napr. $m_j(t) \geq \epsilon_j > 0$ a spojité) a spĺňajú lipschitzovské podmienky, potom podľa Vety 1 existuje jednoznačné C^2- riešenie. Ak sú komponenty

$F_j(t,q)$ nespojité, ale spĺajú podmienky Vety 3 a 4, potom existuje jednoznačné spojité riešenie prisúchajúcej integrálnej rovnice s časovo závyslými finančnými hmotnosťami. Pri uvažovaní bohmovského modelu finančného trhu je prirodzené predpokladať, že dokonca aj finančné hmotnosti $m_j(t)$ sú náhodné premenné, $m_j(t,\omega)$.

Teda veľkosť emisie $j-$tej akcie m_j závisí od klasického stavu ω finančného trhu: $m_j \equiv m_j(t,\omega)$. Takto získame najjednoduchšiu stochastickú modifikáciu bohmovskej dynamiky:

$$\ddot{q}_j(t,\omega) = \frac{f_j(t,q(t,\omega)) + g_j(t,q(t,\omega))}{m_j(t,\omega)}$$

alebo v integrálnej verzii:

$$q_j(t,\omega) = q_{0j}(\omega) + \int_{t_0}^{t} v(s,\omega)ds \tag{7.5}$$

$$v_j(t,\omega) = v_{0j}(\omega) + \int_{t_0}^{t} [f_j(s,q(s,\omega)) + g_j(s,q(s,\omega))]/m_j(s,\omega)ds \tag{7.6}$$

Ak sa finančná hmotnosť stane nulovou v nejakom časovom okamihu, potom cena môže mať nenulovú kvadratickú variáciu. Avšak za takých podmienok nemáme vetu o existencii.

Kapitola 8

Bohm-Vigierova stochastická mechanika

Kvôli problému s kvadratickou variáciou sa namiesto úplne deterministického modelu začal uvažovať bohm-vigierov model. Pripomíname, že v pôvodnom bohmovom modeli je rýchlosť jednotlivých častíc daná vzťahom

$$v = \frac{\nabla S(q)}{m}. \tag{8.1}$$

Ak $\psi = Re^{is/h}$, potom zo schrödingerovej rovnice vyplýva

$$\frac{dv}{dt} = -\nabla(V + U), \tag{8.2}$$

kde V a U sú klasické kvantové potenciály v uvedenom poradí. V podstate môžeme pracovať len so základnou rovnicou (8.1).

Základným predpokladom Bohma a Vigiera bolo to, že rýchlosť jednotlivých častíc bola daná vzťahom

$$v = \frac{\nabla S(q)}{m} + \eta(t), \tag{8.3}$$

kde $\eta(t)$ predstavuje náhodný príspevok k rýchlosti danej častice, ktorý sa mení spôsobom, ktorý môže byť vyjadrený ako náhodný proces, ale s nulovou strednou hodnotou. V bohm-vigierovej stochastickej mechanike máme kvantový potenciál z priemernej rýchlosti, nie zo skutočnej.

Teraz aplikujeme bohm-vigierov model na finančné trhy. Rovnicu (8.3) budeme považovať za základnú rovnicu pre cenovú rýchlosť. Teda skutočná cena sa stáva náhodným procesom (rovnako ako v klasickej finančnej matematike). môžeme písať stochastickú diferenciálnu rovnicu pre cenu:

$$dq(t) = \frac{\nabla S(q)}{m}dt + \eta(t)dt. \tag{8.4}$$

Aby sme tejto stochastickej diferencii dali matematický význam, budeme predpokladať, že

$$\eta(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}, \tag{8.5}$$

pre nejaké stochastické $\xi(t)$. Formálne máme teda:

$$\eta(t)dt = \frac{d\xi(t)}{dt}dt = d\xi(t), \tag{8.6}$$

a rigorózny matematický tvar rovnice (8.4) je

$$dq(t) = \frac{\nabla S(q)}{m}dt + \xi(t). \tag{8.7}$$

Výraz (8.5) môžeme uvažovať buď formálne alebo v zmysle teórie rozdelení. Pripomíname, že pre základné stochastické procesy, ako napr. wienerov proces, trajektórie nie sú diferencovateľné skoro všade v klasickom zmysle.

Predpokladajme, že náhodný príspevok k cenovej dynamike je daný bielym šumom, $\eta_{white\ noise}(t)$. Môže byť definovaný ako odvodenie wienerovho procesu:

$$\eta_{white\ noise}(t) = \frac{dw(t)}{dt},$$

teda:

$$v = \frac{\nabla S(q)}{m} + \eta_{white\ noise}(t). \tag{8.8}$$

V tomto prípade je cenová dynamika daná stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dq(t) = \frac{\nabla S(q)}{m}dt + dw(t). \tag{8.9}$$

Aký je hlavný rozdiel od klasického popisu finančného trhu stochastickou diferenciálnou rovnicou? Je to prítomnosť pilotnej vlny $\psi(t,q)$, mentálneho poľa finančného trhu, ktoré určuje koeficient driftu $\frac{\nabla S(q)}{m}$. Tu $S \equiv S_\psi$. A funkcia ψ sa riadi špeciálnou rovnicou-schrödingerovou rovnicou. Tá nie je určená stochsatickou diferenciálnou rovnicou (8.9). Teda namiesto jednej stochastickej diferenciálnej rovnice v kvantovom modeli máme systém dvoch rovníc:

$$dq(t) = \frac{\nabla S_\psi(q)}{m}dt + d\xi(t) \tag{8.10}$$

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,q) = -\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}(t,q) + V(q)\psi(t,q). \tag{8.11}$$

Nakoniec sa dostávame späť k problému kvadratickej variácie ceny. V bohm-vigierovom modeli je nenulová (kvôli napr. fluktuáciám bieleho šumu cenovej rýchlosti).

Kapitola 9

Porovnanie bohmovho modelu s modelmi so stochastickou volatilitou

Niektorí považujú parameter volatility $\sigma(t)$ za vysvetľujúci správanie trhu. Z takéhoto uhla pohľadu naša finančná vlna $\psi(t,q)$ hrá v bohmovom modeli podobnú úlohu ako volatilita $\sigma(t)$ v štandardných stochastických finančných modeloch. Pripomíname že dynamika vlny $\psi(t,q)$ sa riadi nezávislou rovnicou, konkrétne schrödingerovou rovnicou a $\psi(t,q)$ zohráva rolu parametra dynamickej rovnice pre cenu $q(t)$.

Pripomeňme si ako funguje táto schéma:

1. nájdeme finančnú vlnu $\psi(t,q)$ zo schrödingerovej rovnice;
2. nájdeme prislúchajúci kvantový potenciál

$$U(t,q) \equiv U(t,q;\psi)$$

(závisí od ψ ako od parametra)

3. vložíme $U(t,q;\psi)$ do finančnej newtonovej rovnice cez kvantovú (behaviorálnu) silu $g(t,q;\psi) = -\frac{\partial U(t,q;\psi)}{\partial q}$.

Dávame do pozornosti, že bežné modely so stochastickou volatilitou fungujú na rovnakom princípe. Tu cena q_t je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice:

$$dq_t = q_t(\mu(t,q_t,\sigma_t)dt + \sigma_t dw_t^{\epsilon}), \tag{9.1}$$

kde w_t^{ϵ} je wienerov proces, σ_t je koeficient závisiaci od času, ceny a volatility. A volatilita spĺňa nasledujúcu stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$d\Delta_t = \alpha(t,\Delta_t)dt + b(t,\Delta_t)dw_t^{\delta}, \tag{9.2}$$

kde $\Delta_t = ln\sigma_t^2$ a w_t^δ je wienerov proces, ktorý je nezávislý od w_t^ϵ.

Najprv treba vyriešiť rovnicu pre volatilitu (9.2), potom vložiť σ_t do (9.1) a nakoniec nájsť cenu q_t.

Kapitola 10

Klasické a kvantové príspevky k finančnej náhodnosti

Tak ako v bežnej stochastickej finančnej matematike, môžeme interpretovať ω ako predstavujúcu stav finančného trhu. Jediný rozdiel je, že v našom modeli by takáto ω bola spojená s „klasickým stavom“ finančného trhu. Teda interpretujeme zaužívanú náhodnosť ako „klasickú náhodnosť“, t.j. náhodnosť, ktorá nie je určená očakávaniami obchodníkov ani inými behaviorálnymi faktormi. Okrem týchto „klasických stavov“ ω náš model obsahuje aj „kvantové stavy“ ψ finančných trhov popisujúce trhovú psychológiu. V podstate všetky uvažované procesy závisia nie len od klasického stavu ω, ale aj od kvantového stavu ψ:

$$dv_j(t,\omega,\psi) = \frac{f_j(t,q(t,\omega,\psi),v(t,\omega,\psi),\omega)}{m_j(t,\omega)}dt + \frac{g_j(t,q(t,\omega,\psi),\omega,\psi)}{m_j(t,\omega)}dt + \sigma_j(t,\omega)dW_j(t,\omega). \tag{10.1}$$

Dávame do pozornosti, že kvantová sila závisí do parametra ψ dokonca priamo:

$$g_j = g_j(t,q,\omega,\psi).$$

Počiatočná podmienka pre stochastickú rovnicu (10.1) závisí len od ω:

$$q_j(0,\omega) = q_{j0}(\omega),\ v_j(0,\omega) = v_{j0}(\omega).$$

Ale vo všeobecnosti kvantový stav finančného trhu nie je daný čistým stavom ψ, ale von neumannovým operátorom hustoty ρ. Preto ψ v (10.1) je kvantový náhodný parameter s počiatočným kvantovým pravdepodovnostným rozdelením daným operátorom hustoty v počiatočný moment:

$$\rho(0) = \rho_0.$$

Pripomíname, že schrödingerova rovnica pre čistý stav implikuje von neumannovu rovnicu pre operátor hustoty:

$$i\dot{\rho}(t) = [\hat{H}, \rho]. \tag{10.2}$$

Kapitola 11

Využitie modelu v praxi

Treba povedať, že model, ktorý sme si v tejto práci predstavili, sa pohybuje v súčasnosti v teoretickej rovine. Predstavili sme si jeho základné vlastnosti. Jedná sa o relatívne nový a podstatne odlišný prístup od konvenčných modelov využívaných v praxi na skutočných finančných trhoch.

Pri snahe o aplikovanie daného modelu na reálne dáta a numerické porovnanie s inými modelmi sme však narazili na niekoľko problémov.

Ako sme už spomínali cieľom tohoto modelu je zachytiť okrem „silných“ ekonomických faktorov (napr. prírodné zdroje, objemy produkcie, ľudské zdroje, atď) aj faktory „slabé“, t.j. behaviorálne, ktoré zohrávajú podstatnú úlohu v určovaní cien na finančných trhoch. Teda našou snahou je do modelu zahrnúť akúsi psychológiu trhu, ktorú by mali predstavovať očakávania a preferencie agentov finančných trhov, ktoré sa podieľajú na vytváraní informačného poľa (finančnej vlny) $\psi(q)$.

Tu sa dostávame k prvému a azda najpodstatnejšiemu problému. Ak totiž chceme numericky vyjadriť dynamiku systému so zahrnutím spomínaných vlastností, musíme predstaviť veličiny, ktorými by sme dané behaviorálne vlastnosti trhu a jeho agentov mohli kvantifikovať. Je zrejmé, že takúto prekážku nie je jednoduché prekonať. Aj keby sa nám podariloí nájsť merateľnú a kvantifikovateľnú veličinu pre napr. preferencie jednotlivých agentov finančných trhov, narazíme na ďalší problém.

Ďalším problémom pri aplikácií modelu na skutočné finančné trhy je, že na zachytenie ich psychológie ako aj správania sa jednotlivých agentov nám zďaleka nebude stačiť jedna veličina. Aby sme sa čo najviac priblížili reálnemu trhu, takých faktorov by sme potrebovali niekoľkonásobne viac.

Netreba zabúdať na fakt, že na finančnom trhu na seba vzájomne pôsobí obrovské množstvo agentov (obchodníkov, firiem, atď.) berúc do úvahy rôzne externé ekonomické (no rovnako aj politické, sociálne, dokonca aj meteorologické) podmienky. Každý z agentov vstupuje do modelu s vlastnou finančnou hmotnosťou m_j a vlastnou kinetickou energiou, teda akousi snahou zmeniť ceny. Dôležitá je taktiež potenciálna finančná energia, ktorá zachytáva vzájomné pôsobenie medzi jednotlivými agentami. A je zrejmé, že zachytiť všetky tieto pôsobenia rozhodne nie je ľahkou úlohou.

V súčasnosti sa problematikou psychológie trhu a správania sa agentov na finančných trhoch zaoberá množstvo odborníkov v rámci behaviorálnej ekonómie a behaviorálnych financií. môžeme sa domnievať, že časom sa týmto vedcom v spolupráci s ekonofyzikmi podarí dostatočne vystihnúť trhovú realitu a uvedú modely, ktoré sa nespoliehajú len na obmedzujúce predpoklady racionality a efektívneho trhu, do praxe alebo aspoň budú schopný porovnať ich výsledky s doposiaľ známymi modelmi.

Záver

V tejto práci sme sa venovali vytvoreniu modelu, v ktorom by sme nevychádzali z predpokladov, že agenti finančných trhov sa správajú perfektne racionálne a bez odchýlok a z hypotézy efektívneho trhu. Tieto predpoklady vo všeobecnosti vôbec platiť nemusia a môžu výsledky do značnej miery skresľovať.

V práci sme pracovali s poznatkami získanými z oblasti ekonofyziky, behaviorálnej ekonómie a behaviorálnych financií. Práve vďaka tomu sme sa do modelu snažili zahrnúť okrem „silných“ ekonomický faktorov, ako sú napríklad priemyselná výroba, prírodné zdroje, služby a pod., aj faktory „slabé“, teda behaviorálne (preferencie a očakávania agentov, psychológia trhu).

Po stručnom úvode k modelom finančných trhov sme si predstavili základný model bohmovskej mechaniky, na ktorom sme postavili náš model finančných trhov. Predstavili sme si základné vlastnosti a vzťahy.

Ďalej sme pojednávali o modeli v rámci klasickej ekonofyziky. V tejto kapitole sme okrem jeho vlastností ukázali aj jeho nedostatky.

Nasledujúca kapitola sa už zaoberala modelom z kvantovej ekonofyziky. Predstavili sme si finančnú vlnu $\psi(q)$, ako informačnú vlnu, podľa ktorej sa ďalej riadi aj dynamika cien finančných trhov.

Takto vytvorený model a jeho vlastnosti sme v 5. kapitole porovnali s konvenčnými modelmi (náš model je považovaný za nekonvenčný). Konkrétne so stochastickým modelom, s deterministickým dynamickým modelom, ďalej s modelom stochastickým no doplneným o očakávania agentov finančných trhov. A taktiež sme konfrontovali hypotézu efektívneho trhu s naším ekonofyzikálnym prístupom k finančným trhom.

Rovnako sme sa snažili vyriešiť problém hladkosti finančných trajektórií a preto sme si v ďalšej kapitole predstavili existenčné vety pre nehladké finančné sily aj s odvodeniami a dôkazmi. A pokračovali sme so zdrojmi náhodnosti v modeli. Kvôli problémom s kvadratickou variáciou sme v krátkosti predstavili bohm-vigierovu stochastickú mechaniku a jej aplikáciu na finančné trhy.

Nakoniec pri snahe o aplikáciu nášho modelu na skutočné finančné trhy a porovnanie konkrétnych výsledkov sme narazili hneď na niekoľko problémov. Jedná sa o ťažkosti s kvantifikáciou behaviorálnych faktorov vstupujúcich do modelu (môžu to byť faktory sociálne, psychologické alebo dokonca meteorologické). Rovnako podstatnú úlohu zohráva množstvo agentov, ktorí ovplyvňujú svojím správaním celý trh. Toto sú problémy, ktoré sa nám žiaľ prekonať nepodarilo.

Našou snahou a našimi hlavnými cieľmi v tejto práci boli teda nasledovné body:

- Predstaviť nový alternatívny pohľad na problematiku modelovania finančných trhov a zároveň na základe tohto prístupu predstaviť konkrétny model aj s jeho vlastnosťami.
- Porovnať vlastnosti daného modelu s vlastnosťami už existujúcich známych modelov využívaných ako v teórii, tak i v praxi.
- Snaha o aplikáciu modelu na skutočné finančné dáta s porovnaním konkrétnych výsledkov. V tomto prípade sme však narazili hneď na niekoľko prekážok, preto si splnenie tohto bodu vyžaduje ďalšie skúmanie.

Jedná sa však o relatívne nový prístup a môžeme dúfať, že v budúcnosti aj takéto problémy budú prekonané vďaka úzkej spolupráci odborníkov z oblastí ekonómie, fyziky a spoločenských vied a dočkáme sa využitia takýchto modelov na skutočných finančných trhoch.

Literatúra

[1] Aerts, D., Aerts, S. *Applications of quantum statistics in psychological studies of decision processes. Foundations of Sciences vol.1.* strany 85-97, 1994.

[2] Bohm, D., Hiley, B *The undivided universe: an ontological interpretation of quantum mechanics.* Routledge and Kegan Paul, 1993.

[3] Bohm, D. *Quantum theory.* Englewood Cliffs, New-Jersey: Prentice-Hall, 1951.

[4] Campbell, J.Y., Lo, A.W., MacKinlay A.C. *The econometrics of financial markets.* Princeton University Press, 1997.

[5] Dirac, P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics.* Claredon Press, 1995.

[6] Granger, C. W. J *Is chaotic theory relevant for economics? A review essay. Journal of International and Comparative Economics 3.* strany 139-145, 1994.

[7] Haven, E. *A discussion on embedding the Black-Scholes option pricing model in a quantum physics setting. Physica A vol. 304.* strany 507-524, 2002.

[8] Haven, E. *Bohmian mechanics in a macroscopic quantum system. Foundations of Probability and Physics-3 vol. 810.* strana 330, AIP, 2006.

[9] Haven, E. *Pilot-wave theory and financial option pricing. International Journal of Theoretical Physics vol. 44.* strany 1957-1962, 2005.

[10] Haven, E. *The wave-equivalent of the Black-Scholes option price: an interpretation. Physica A vol. 344.* strany 142-145, 2004.

[11] Khrennikov, A. *Information dynamics in cognitive, psychological and anomalous phenomena.* Dordreht: Kluwer, 2004.

[12] Kolmogorov, A. N., Fomin, S.V. *Introductory Real Analysis.* Dover Publications, 1975.

[13] Mantegna, R. N., Stanley, H. E. *Introduction to econophysics.* Cambridge Univ. Press, 2000.

[14] Piotrowski, E. W., Sladkowski, J. *Trading by quantum rules: Quantum anthropic principle. International Journal of Theoretical Physics vol. 42.* strany 1101-1106, 2003.

[15] Samuelson, P. A. *Industrial Management Review 6. Collected Scientic Papers, Volume III.* M.I.T. Press, 1972.

[16] Segal, W., Segal, I. E. *The Black-Scholes pricing formula in the quantum context. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America vol. 95.* strana 4072, 2004.

[17] Shiryaev, A. *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory.* World Scientific Publishing Company, 1999

[18] Soros, G. *The alchemy of finance. Reading of mind of the market.* J. Wiley and Sons, Inc., 1987.