

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**PRÍSPEVKOVO DEFINOVANÉ MODELY
DÔCHODKOVÉHO SPORENIA**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2012

BC. ZUZANA MAŤOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



**PRÍSPEVKOVO DEFINOVANÉ MODELY
DÔCHODKOVÉHO SPORENIA**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: Aplikovaná matematika 1114

Vedúci diplomovej práce: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

BRATISLAVA 2012

BC. ZUZANA MAŽOVÁ



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Zuzana Maťová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Príspevkovo definované modely dôchodkového sporenia

Cieľ: Práca sa bude zaoberať niekoľkými modelmi sporenia v príspevkovo definovanom systéme, akým je aj sporivý pilier na Slovensku. V modeloch budeme predpokladať stochastický vývoj aktív aj miezd.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum zadania: 13.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry a s odbornou pomocou diplomového vedúceho.

Bratislava, 26. apríl 2012

.....
Zuzana Mat'ová

Pod'akovanie

Rada by som pod'akovala diplomovému vedúcemu doc. Mgr. Igorovi Melicherčikovi, PhD. za čas, ktorý mi venoval, za jeho odborné vedenie a za podnetné rady a pripomienky, ktoré mi veľ mi pomohli pri písaní tejto diplomovej práce.

Ďakujem aj priateľom a svojej rodine za ich lásku a neustálu podporu počas štúdia.

Abstrakt

MAŤOVÁ, Zuzana. Príspevkovo definované modely dôchodkového sporenia
Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Vedúci diplomovej práce: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Diplomová práca, 2012.

V diplomovej práci vytvoríme zjednodušený model dôchodkového sporenia v príspevkovo definovanom systéme, akým je aj sporivý II. pilier na Slovensku. V tomto modeli predpokladáme, že mzda sporiteľ'a na dôchodok sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou. Sporiteľ investuje ľubovoľnú časť nasporeného majetku do rizikového aktíva, ktoré sa riadi geometrickým Brownovým pohybom, zvyšok investuje do bezrizikového aktíva. Zameriavame sa na hľadanie optimálnych stratégií investovania. Pozornosť venujeme rôznym vlastnostiam optimálnych stratégií investovania za prítomnosti aj bez prítomnosti nezaistiteľného rizika v plate, t.j. v prípade úplného a neúplného trhu. Hľadanie optimálnej stratégie ilustrujeme na slovenskom dôchodkovom systéme. Nakoniec sa zaoberáme stratou vyplývajúcou z použitia nesprávnej stratégie.

Kľúčové slová: príspevkovo definované modely dôchodkového sporenia, optimálna stratégia investovania, stochastické riadenie, nezaistiteľné riziko v plate, úplný trh, neúplný trh.

Abstract

MAŤOVÁ, Zuzana. Defined contribution models for pension planning
Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics,
Department of Applied Mathematics and Statistics.

Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Master thesis, 2012.

In this master thesis we create a simplified model for pension planning in defined contribution system, such as the fully funded second pillar in Slovakia. In the model we assume that pension saver's salary is governed by the stochastic differential equation. A saver invests a proportion of his wealth in the risky asset, which is driven by the geometric Brownian motion, and the rest of the wealth is invested in the risk-free asset. We focus on search for optimal asset allocation strategies. Our attention is paid to various properties of optimal asset allocation strategies both with and without the presence of non-hedgeable salary risk, i.e. in the case of complete and incomplete market. The search for optimal strategy is illustrated to the Slovak pension system. Finally, we discuss the loss resulting from using wrong strategy.

Keywords: defined contribution models for pension planning, optimal asset allocation strategy, stochastic control, non-hedgeable salary risk, complete market, incomplete market.

Obsah

Obsah	1
Zoznam obrázkov	3
Zoznam tabuliek	3
Úvod	4
1 Dôchodkové systémy	6
1.1 Klasifikácia dôchodkových systémov	6
1.2 Motivácia a cieľ práce	8
2 Optimálne riadenie pre stochastické úlohy	9
2.1 Funkcia užitočnosti	9
2.2 Úloha stochastického riadenia	10
2.3 Dynamické programovanie	11
3 Matematický model dôchodkového sporenia	14
3.1 Predpoklady modelu	14
3.2 I. a II. prípad	16
3.3 III. prípad	18
3.3.1 Výpočet optimálnych váh pre konkrétne parametre	20
3.3.2 Strata pri nesprávne použitej stratégii	23
3.3.3 Strata pri nesprávne použitej stratégii pre konkrétne parametre	26
3.4 IV. prípad	28
4 Implementácia modelu pre IV. prípad	32
4.1 Výpočet optimálnych váh pre konkrétne parametre	35
4.2 Strata pri nesprávne použitej stratégii	37

Obsah	2
4.3 Strata pri nesprávne použitej stratégii pre konkrétne parametre	38
Záver	41
Literatúra	43

Zoznam obrázkov

3.1	Závislosť optimálnych váh $p^*(0, X(0))$ od pomeru majetku a platu $X(0)$. . .	21
3.2	Hore: Optimálne váhy $p^*(t, X(t))$ pre dve nasimulované situácie A, B a deterministická stratégia C. Dole: Časový priebeh pomeru majetku a platu $X(t)$ pre situácie A, B, C.	22
4.1	Hodnotová funkcia $V(t, x)$ pre $T-t = 10$ a 20 rokov do odchodu do dôchodku.	36
4.2	Závislosť optimálnych váh $p^*(t, X(t))$ v čase $t = 0$ (plná čiara), $t = 10$ (čiarkovaná čiara), $t = 20$ (bodkovaná čiara) od pomeru majetku a platu $X(t)$.	36
4.3	Hore: Optimálne váhy $p^*(t, X(t))$. Dole: Časový priebeh pomeru majetku a platu $X(t)$	37

Zoznam tabuliek

1.1	Obmedzenia na investovanie pre dôchodkové fondy v Slovenskej republike	8
3.1	Závislosť straty od averzie sporiteľ a voči riziku (od $1 - \gamma$)	27
3.2	Závislosť straty od parametra σ_{Y_1}	27
3.3	Závislosť straty od parametrov σ_1 a ξ_1	28
4.1	Závislosť straty od averzie sporiteľ a voči riziku (od $1 - \gamma$)	39
4.2	Závislosť straty od parametra σ_{Y_1}	39
4.3	Závislosť straty od parametra σ_{Y_0}	40
4.4	Závislosť straty od parametrov σ_1 a ξ_1	40

Úvod

Systém dôchodkového zabezpečenia je základom sociálneho systému každého rozvinutého štátu. Dôchodkový systém predstavuje jednu zo súčastí sociálneho zabezpečenia občanov a pretože určuje životnú úroveň veľkej časti populácie, má výrazný dopad na fungovanie celého hospodárstva štátu.

V posledných desať ročiach vyvolal politický, spoločenský a ekonomický vývoj vo svete potrebu reformovať dôchodkové systémy. Hoci už v mnohých krajinách došlo k zmenám a modernizácii dôchodkových systémov, dôchodková reforma je stále aktuálnou témou.

Rozlišujeme viacero typov a variantov dôchodkových systémov. Najčastejším typom dôchodkového systému je trojpilierový model odporúčaný svetovou bankou, ktorý je od januára 2005 používaný aj na Slovensku.

Cieľom práce je vytvoriť zjednodušený model dôchodkového sporenia v príspevkovo definovanom systéme, akým je aj sporivý II. pilier na Slovensku. Témou dôchodkového sporenia v rámci II. piliera sa zaoberá viacero prác, spomenieme [8] a [12], na ktoré nadviažeme.

Diplomová práca je rozčlenená na štyri časti. Prvá kapitola je stručným úvodom do problematiky, uvádza klasifikáciu dôchodkových systémov a bližšie predstavuje slovenský dôchodkový systém.

V druhej kapitole sú zhrnuté základné poznatky a princípy z teórie optimálneho riadenia pre stochastické úlohy.

V tretej kapitole špecifikujeme predpoklady modelu, ktorý vychádza z článku [2]. V porovnaní s inými prácami, v ktorých sú mzdy modelované deterministicky, v tomto modeli predpokladáme stochastický vývoj platu sporiteľ a na dôchodok. Sporiteľ odvádza časť majetku na svoj účet. Berieme do úvahy dva spôsoby príspevkov - jednorazové a spojité. Nasporenú sumu sporiteľ podľa svojho rozhodnutia investuje do rizikového a bezrizikového aktíva. Akciový trh je reprezentovaný jedným rizikovým aktívom, ktoré sa riadi geometrickým Brownovým pohybom. Hľadáme stratégie investovania, ktoré maximalizujú očakávaný úžitok sporiteľ a z nasporenej sumy v čase odchodu do dôchodku. Podmienkou je, že poznáme

funkciu užitočnosti sporiteľ'a a jeho postoj k riziku, ktorý je vyjadrený koeficientom averzie voči riziku. Problém hľadania optimálnej stratégie sporiteľ'a sformulujeme ako maximalizačnú úlohu optimálneho riadenia, ktorej riešenie, rozdelené na niekoľko prípadov, nájdeme a interpretujeme.

V poslednej štvrtej kapitole sa venujeme navrhnutiu a implementácii numerickej schémy pre najvšeobecnejší prípad modelu.

Prínosom práce je porovnanie deterministického spôsobu modelovania platov so stochastickým prístupom. Zaujíma nás, či a akú veľkú stratu utrpí sporiteľ', ktorý v prípade stochastického vývoja platov predpokladá, že platy sú deterministické a použije nesprávnu stratégiu.

Kapitola 1

Dôchodkové systémy

Dôchodkový systém predstavuje spôsob postarania sa o občanov v poproduktívnom veku. Každá krajina by sa mala snažiť zabezpečiť pre občanov v produktívnom aj poproduktívnom veku čo najvyššiu životnú úroveň aj prostredníctvom fungujúceho dôchodkového systému. Rozlišujeme rôzne typy dôchodkových systémov. Uvádzame ich stručný prehľad.

1.1 Klasifikácia dôchodkových systémov

Z hľadiska financovania dôchodkov rozlišujeme dva typy dôchodkových systémov

- priebežne financované dôchodkové systémy (PAYG - pay as you go),
- fondovo financované dôchodkové systémy.

Priebežne financovaný dôchodkový systém je založený na princípe medzigeneračnej solidarity a redistribúcie prostriedkov. Dôchodky sú vyplácané z odvodov ekonomicky aktívnej populácie. Vo fondovo orientovaných dôchodkových systémoch sú dôchodky financované aktívami naakumulovanými v dôchodkových fondoch. Výška dôchodku závisí od veľkosti odloženej spotreby (úspor) a jej zhodnotenia na finančných trhoch.

Z hľadiska príspevkov a dávok rozlišujeme tiež dva typy dôchodkových systémov

- dávkovo definované systémy (DB systémy - defined benefit),
- príspevkovo definované systémy (DC systémy - defined contribution).

V dávkovo definovanom systéme sa výška vyplácaného dôchodku určuje podľa vopred stanovených pravidiel spôsobu výpočtu.

V príspevkovo definovanom dôchodkovom systéme je výška dôchodku určená zo zaplatených

príspevkov vrátane výnosu z investovania príspevkov na finančných trhoch.

Z hľadiska spravovania rozlišujeme dva typy dôchodkových systémov

- verejne spravované,
- súkromne spravované.

Väčšina dôchodkových systémov je kombináciou viacerých typov či už z hľadiska financovania, z hľadiska príspevkov alebo z hľadiska spravovania.

V posledných desať ročiach prebehli v mnohých krajinách rôzne sociálne a ekonomické reformy. Medzi nimi aj reforma dôchodkového systému, ktorá bola, a v niektorých krajinách stále je, jednou z hlavných tém politických diskusií. Po reforme boli vo viacerých krajinách na celom svete (USA, krajiny Latinskej Ameriky, západoeurópske, ale aj východoeurópske krajiny) zavedené viacpilierové dôchodkové systémy.

Najčastejším typom, ktorý je od januára 2005 používaný aj na Slovensku, je svetovou bankou odporúčaný trojpilierový dôchodkový systém. Je kombináciou verejne spravovaného dávkovo financovaného piliera (povinný I. pilier) a súkromne spravovaného fondového piliera (povinný II. pilier), ktoré sú doplnené dobrovoľným pilierom (III. pilier). Existuje veľa variantov tohto systému, ktoré sa líšia hlavne váhou jednotlivých pilierov a nastavením parametrov.

V slovenskom dôchodkovom systéme je výška príspevkov stanovená na 18% hrubej mzdy (9% sa odvádza do I. piliera a 9% do II. piliera).

Aktíva v II. pilieri sú spravované dôchodkovými správcovskými spoločnosťami (DSS). Každá DSS je povinná ponúkať tri fondy s rôznym rizikovým profilom: Rastový fond, Vyvážený fond a Konzervatívny fond, ktoré sa líšia výškou finančných prostriedkov investovaných do rizikových aktív (akcií) a do bezrizikových dlhopisov. Obmedzenia na investovanie pre jednotlivé fondy sú uvedené v Tabuľke 1.1. Sporiteľ volí medzi jednotlivými fondami, pričom musia byť dodržané určité vládne regulačné obmedzenia: posledných 15 rokov pred odchodom do dôchodku nie je dovolené investovať do rastového fondu a posledných 7 rokov musia byť všetky úspory investované do konzervatívneho fondu.

Bližšie informácie o slovenskom dôchodkovom systéme a jeho reforme možno nájsť v [6], [13] a [16].

Typ fondu	Akcie	Dlhopisy
Rastový fond	najviac 80%	najmenej 20%
Vyvážený fond	najviac 50%	najmenej 50%
Konzervatívny fond	nič	100%

Tabuľka 1.1: Obmedzenia na investovanie pre dôchodkové fondy v Slovenskej republike

1.2 Motivácia a cieľ práce

V našej práci vytvoríme zjednodušený model dôchodkového sporenia. Budeme modelovať spravovanie majetku v príspevkovo definovanom dôchodkovom systéme. Podobnou problematikou sa autori zaoberajú aj v [8]. Na rozdiel od spomínaného článku, v ktorom autori predpokladajú, že plat sporiteľ a na dôchodok je deterministicky daný, v našom modeli nadviažeme na článok [2] a predpokladáme, že plat sa vyvíja stochasticky. Časť mzdy sporiteľ odvádza na svoj individuálny účet. Nasporený majetok môže investovať do bezrizikovej akcie alebo do rizikového aktíva, ktoré sa tiež vyvíja stochasticky. Rozhodnutie sporiteľ a akú časť investuje do rizikového aktíva nazveme jeho stratégiou. Sporiteľ volí takú stratégiu, aby maximalizoval svoj úžitok v čase odchodu do dôchodku. Nesnaží sa maximalizovať iba úžitok z nasporenej sumy, ide mu hlavne o zachovanie životnej úrovne.

Predpoklady modelu bližšie špecifikujeme neskôr. Zameriame sa na hľadanie optimálnych stratégií sporiteľ a a budeme pozorovať, ako sa optimálna stratégia mení v prípade úplného a neúplného trhu.

Kapitola 2

Optimálne riadenie pre stochastické úlohy

V tejto kapitole zhrnieme základné princípy z teórie optimálneho riadenia pre stochastické úlohy, ktoré budeme neskôr využívať.

Uvažujme sporiteľ'a, ktorý sa v spojitom čase rozhoduje, akú časť majetku investuje do rizikového, respektíve bezrizikového aktíva, aby maximalizoval svoju očakávanú užitočnosť. Prvou dôležitou otázkou je voľba funkcie užitočnosti.

2.1 Funkcia užitočnosti

Funkcia užitočnosti $u(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká, rastúca na $(0, \infty)$, t.j. $u'(x) > 0$ (viac je vždy lepšie) a rýdzo konkávna funkcia, t.j. $u''(x) < 0$.

U sporiteľ'ov sa funkcia užitočnosti mení a vyjadruje ich vzťah k riziku. Kľúčovú úlohu pri voľbe funkcie užitočnosti zohráva koeficient relatívnej averzie voči riziku

$$C(x) = \frac{-xu'(x)}{u''(x)}.$$

Konštantný koeficient relatívnej averzie voči riziku, $C(x) = C > 0$ pre všetky x , implikuje rovnaký pomer rôzne rizikových aktív v portfóliu nezávisle od veľkosti majetku.

V našej práci budeme používať funkciu užitočnosti s konštantnou relatívnou averziou voči riziku (CRRA - Constant relative risk aversion) v tvare

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} x^\gamma & \text{ak } \gamma < 1, \gamma \neq 0, \\ \ln x & \text{ak } \gamma = 0, \end{cases}$$

kde $1 - \gamma$ je koeficient averzie voči riziku. Podľa všeobecnej dohody by hodnota koeficientu averzie voči riziku mala byť väčšia ako 0 a menšia ako 10. V numerických experimentoch budeme počítat' s hodnotou 6.

2.2 Úloha stochastického riadenia

Vychádzame z rámca knihy [9]. Nech $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ je pravdepodobnostný priestor, $T > 0$ je koncový čas, v prípade sporiteľ'a na dôchodok je to čas odchodu do dôchodku. Predpokladáme, že všetky stochastické procesy sú adaptované vzhľadom k filtrácii $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$. Stratégia sporiteľ'a (proces riadenia) je \mathcal{F}_t - merateľ'ný proces $p = \{p(t), t \in [0, T]\}$. Stavovou premennou je proces $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$, ktorý je daný stochastickou diferenciálnou rovnicou (SDR)

$$dX(t) = b(t, X(t), p(t))dt + \sigma(t, X(t), p(t))dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad (2.1)$$

kde b, σ sú merateľ'né procesy, b je drift a σ je miera kvadratickej variácie procesu X a $W(t)$ je Wienerov proces.

Aby sme zdôraznili závislosť stavovej premennej X od riadenia p , budeme písať $X^p(t)$. Očakávanú užitočnosť sporiteľ'a zo zvolenej stratégie definujeme ako

$$J(t, x, p) = E[u(X^p(T)) | X^p(t) = x]. \quad (2.2)$$

Množinu prípustných riadení označíme $\mathcal{P}(t, x)$. Táto množina pozostáva zo všetkých riadení $\{p(s), s \in [0, T]\}$, pre ktoré existuje na intervale $[t, T]$ jednoznačné riešenie rovnice (2.1) pre dané $X(t) = x$.

Sporiteľ' maximalizuje očakávanú užitočnosť, úlohu preto sformulujeme ako

$$\max_{p(t) \in \mathcal{P}(t, x)} J(t, x, p) = \max_{p(t) \in \mathcal{P}(t, x)} E[u(X^p(T)) | X^p(t) = x]. \quad (2.3)$$

Hodnotová funkcia úlohy optimálneho riadenia je definovaná ako

$$V(t, x) = \sup_{p \in \mathcal{P}(t, x)} J(t, x, p) = \sup_{p \in \mathcal{P}(t, x)} E[u(X^p(T)) | X^p(t) = x]. \quad (2.4)$$

Cieľom je nájsť $V(0, X_0)$ a riadenie p^* , pre ktoré je táto optimálna hodnota dosiahnutá, teda také, že platí $V(0, X_0) = J(0, X_0, p^*)$. Takéto riadenie p^* nazývame optimálne.

2.3 Dynamické programovanie

Vychádzame opäť z teoretického rámca knihy [9]. Pri riešení úlohy (2.3) využijeme Bellmanov princíp

$$V(t, x) = \sup_{p \in \mathcal{P}([t, s], x)} \mathbb{E}[V(s, X^p(s)) | X^p(t) = x], \quad (2.5)$$

kde $\mathcal{P}([t, s], x)$ označuje podmnožinu stratégií z $\mathcal{P}(t, x)$ obmedzenú na interval $[t, s]$.

Pomocou Itôovho vzorca s využitím SDR (2.1) vyjadríme

$$dV(t, X^p) = \left[V_t(t, X^p) + b(t, X^p, p)V_x(t, X^p) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, X^p, p)V_{xx}(t, X^p) \right] dt + \sigma(t, X^p, p)V_x(t, X^p)dW^1.$$

Z tejto rovnice pre $s > t$ integrovaním dostaneme

$$V(s, X^p) = V(t, X^p) + \int_t^s \left[V_t(r, X^p) + b(r, X^p, p)V_x(r, X^p) + \frac{1}{2}\sigma^2(r, X^p, p)V_{xx}(r, X^p) \right] dr + \int_t^s \sigma(r, X^p, p)V_x(r, X^p)dW.$$

Po dosadení do rovnice (2.5) máme

$$V(t, x) = V(t, x) + \sup_{p \in \mathcal{P}([t, s], x)} \mathbb{E} \left\{ \int_t^s \left[V_t(r, X^p) + b(r, X^p, p)V_x(r, X^p) + \frac{1}{2}\sigma^2(r, X^p, p)V_{xx}(r, X^p) \right] dr + \int_t^s \sigma(r, X^p, p)V_x(r, X^p)dW \middle| X^p = x \right\}.$$

Za predpokladu, že stochastický integrál je martingál (teda jeho stredná hodnota je nula), po odčítaní výrazu $V(t, x)$ od oboch strán rovnice platí

$$0 = \sup_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{E} \left\{ \int_t^s \left[V_t(r, X^p) + b(r, X^p, p)V_x(r, X^p) + \frac{1}{2}\sigma^2(r, X^p, p)V_{xx}(r, X^p) \right] dr \middle| X^p = x \right\}.$$

Vydelením oboch strán rovnice výrazom $s - t$ a počítaním $\lim_{s \rightarrow t}$ dostaneme rovnicu

$$0 = \sup_{p \in \mathcal{P}(t, x)} \left\{ V_t(t, x) + b(t, x, p)V_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x, p)V_{xx}(t, x) \right\}. \quad (2.6)$$

V poslednej rovnici sa nevyskytuje stredná hodnota, pretože v čase t sú výrazy $X^p(t)$ a $p(t)$ známe, teda aj podmienená stredná hodnota je známa.

¹Kvôli zjednodušeniu píšeme p, X^p, W namiesto $p(t), X^p(t), W(t)$.

Rovnicu (2.6) s koncovou podmienkou

$$V(T, x) = u(X(T))$$

nazývame Hamilton-Jacobi-Bellamova (HJB) rovnica. Z vyššie uvedenej úvahy vyplýva, že za určitých podmienok hodnotová funkcia rieši HJB rovnicu.

Musíme overiť, či to platí aj opačne, či je riešenie HJB rovnice hodnotovou funkciou zodpovedajúcej úlohy optimálneho riadenia. Postupujem nasledovne:

- Nájďme riešenie $p = \hat{p}(t, x)$ rovnice (2.6).
- Ak existuje \hat{p} , potom závisí od derivácií hodnotovej funkcie

$$\hat{p}(t, x) = \hat{p}(t, x, V_t(t, x), V_x(t, x), V_{xx}(t, x)).$$

Dosadením \hat{p} do rovnice (2.6) dostaneme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre V s koncovou podmienkou. Vyriešením tejto rovnice nájdeme kandidáta V^* na optimálnu hodnotovú funkciu.

- Ak V^* spĺňa určité podmienky a $p^*(t) = \hat{p}(t, X^*(t))$, $t \in [0, T]$ je prípustná stratégia, potom V^* je optimálna hodnotová funkcia a $p^*(t) = \hat{p}(t, X^*(t))$ je optimálne riadenie. $X^*(t)$ je riešenie rovnice (2.1) s použitím stratégie p^* .

Podmienky, ktoré musia byť splnené, aby riešenie HJB rovnice bolo hodnotovou funkciou úlohy optimálneho riadenia, sú zhrnuté v jednom zo základných tvrdení optimálneho riadenia, tzv. "Verifikačná veta".

Veta 2.1 (Verifikačná veta). *Nech $\tilde{V}(t, x)$ je ohraničené riešenie Hamilton- Jacobi- Bellmanovej rovnice (2.6) spĺňajúce $\tilde{V}(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ a spojité na $[0, T] \times \mathbb{R}$.*

Nech $V(t, x)$ je hodnotová funkcia úlohy optimálneho riadenia (2.3) definovaná vzťahom (2.4). Potom platí

1. $\tilde{V}(t, x) \geq V(t, x)$ pre $\forall(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$.
2. Ak existuje prípustné riadenie (stratégia)

$$p^*(t, x, V) = \arg \max_{p \in \mathcal{P}} \left[V_t(t, X^*(t)) + b(t, X^*(t), p(t))V_x(t, X^*(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, X^*(t), p(t))V_{xx}(t, X^*(t)) \right],$$

kde $X^*(t)$ je riešením rovnice (2.1), tak potom

$$\tilde{V}(t, x) = V(t, x) = J(t, x, p^*)$$

pre $\forall(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, teda p^* je optimálne riadenie a $\tilde{V}(t, x)$ je hodnotová funkcia.

Dôkaz: Veta je špeciálnym prípadom Vety IV.3.1 v [5], kde je uvedený aj jej dôkaz.

Kapitola 3

Matematický model dôchodkového sporenia

V tejto časti práce vytvoríme zjednodušený príspevkovo definovaný model dôchodkového sporenia. Predpokladáme, že sporiteľ na dôchodok odvádza časť svojej mzdy (príspevok) na individuálny účet a následne sa rozhoduje, akú časť nasparených finančných prostriedkov investuje do rizikových, respektíve do bezrizikových aktív. Sporiteľ volí takú stratégiu, ktorá maximalizuje jeho úžitok.

V nasledujúcej časti podrobnejšie vysvetlíme predpoklady modelu.

3.1 Predpoklady modelu

Model, s ktorým pracujeme, je založený na článku [2]. V tomto modeli je plat sporiteľa na dôchodok používaný ako numeraire vo funkcii užitočnosti.

Pozornosť venujeme aj dôsledkom vyplývajúcim z neúplného trhu. V prípade úplného trhu nemáme problém. V prípade neúplného trhu je v plate prítomné nezaistiteľné riziko a preto vznikajú kvalitatívne odlišné výsledky ako v prípade úplného trhu.

Predpokladáme, že sporiteľ na dôchodok môže peniaze investovať do dvoch podkladových aktív (dvoch fondov)

1. bezrizikové aktívum (cash fond), ktoré má cenu $R_0(t) = R_0(0) \exp(rt)$,
2. rizikové aktívum (equity fond), ktorého cena $R_1(t)$ spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dR_1(t) = R_1(t) \{ (r + \xi_1 \sigma_1) dt + \sigma_1 dZ_1(t) \}, \quad (3.1)$$

kde r je konštantná bezriziková úroková miera, ξ_1 je trhová cena rizika (market price of risk), σ_1 je volatilita rizikového aktíva a $Z_1(t)$ je Wienerov proces.

Plat sporiteľa na dôchodok v čase t oznaime $Y(t)$ a riadi sa SDR

$$dY(t) = Y(t) \{ (r + \mu_Y)dt + \sigma_{Y_0}dZ_0(t) + \sigma_{Y_1}dZ_1(t) \}, \quad (3.2)$$

kde μ_Y je konštantna, σ_{Y_0} je volatilita platu - nezaistiteľné riziko v plate, $Z_0(t)$ je Wienerov proces nezávislý od $Z_1(t)$ a σ_{Y_1} je moźná korelácia medzi platom a výnosom rizikového aktíva. Výška platu súvisí so ziskom firmy a zisk je spojený s celkovým stavom ekonomiky, preto je pravdepodobné, že plat bude korelovaný s výnosom aktiv.

Riešenie $Y(t)$ vieme vyjadriť ako súčin zaistiteľnej zloźky $Y_H(t)$ a nezaistiteľnej zloźky $Y_N(t)$, t.j. $Y(t) = Y_H(t)Y_N(t)^2$, kde

$$Y_H(t) = Y(0) \exp \left[\left(r + \mu_Y - \frac{1}{2} \sigma_{Y_1}^2 \right) t + \sigma_{Y_1} Z_1(t) \right],$$

$$Y_N(t) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma_{Y_0}^2 t + \sigma_{Y_0} Z_0(t) \right].$$

Uvaźujeme dva spôsoby príspevkov

1. spojite príspevky - sporiteľ odvádza v kaźdom časovom okamihu časť platu, ktorú oznaime π , na svoj individualny učet (za čas t mu na učet pribudne $\pi Y(t)$),
2. jednorazové príspevky - celá suma je odvedená na učet na začiatku sporiaceho obdobia ($\pi = 0$).

Je zrejmé, že v našej práci sa budeme venovať najmä spojitym príspevkom, ktoré lepšie zodpovedajú skutočnosti.

Hodnotu nasporených peňaźnych prostriedkov, teda hodnotu na sporiacom ucte v čase t , oznaime $W(t)$. Označme $p(t)$ časť majetku, ktorú sporiteľ investuje do rizikového aktíva a T čas odchodu do dôchodku. $W(t)$ potom splňa SDR

$$dW(t) = W(t) \{ [r + p(t)\xi_1\sigma_1]dt + p(t)\sigma_1dZ_1(t) \} + \pi Y(t)dt. \quad (3.3)$$

Pripomeňme, že v d'ďalších výpočtoch budeme pracovať s mocninovou CRRA funkciou užitnosti

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} x^\gamma & \text{ak } \gamma < 1, \gamma \neq 0, \\ \ln x & \text{ak } \gamma = 0, \end{cases}$$

²Riešenia $Y_H(t)$ a $Y_N(t)$ sme prebrali z článku [2].

kde $1 - \gamma$ je konštantný koeficient averzie voči riziku.

Sporiteľ chce maximalizovať svoj úžitok. Nezaujíma ho samotná nasporená suma na účte v čase T , ide mu hlavne o zachovanie životnej úrovne. Maximalizuje teda pomer nasporenej čiastky v čase t k platu v čase t . Označme tento pomer $X(t) = \frac{W(t)}{Y(t)}$. Použitím Itôovho vzorca a rovníc (3.2), (3.3) sa dá ukázať, že $X(t)$ spĺňa nasledujúcu SDR

$$dX(t) = \left\{ \pi + X(t) \left[-\mu_Y + p(t)\sigma_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) + \sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{Y_1}^2 \right] \right\} dt + X(t) [p(t)\sigma_1 - \sigma_{Y_1}] dZ_1 - X(t)\sigma_{Y_0} dZ_0. \quad (3.4)$$

Teraz môžeme sformulovať úlohu stochastického optimálneho riadenia. Sporiteľ cez všetky prípustné stratégie $p(t)$ maximalizuje očakávanú užitočnosť z pomeru majetku na účte a platu v čase odchodu do dôchodku, t.j. z hodnoty $X(T)$:

$$\max_{p(t)} E[u(X(T))].$$

Riešenie maximalizačnej úlohy môžeme vzhľadom na spôsob príspevkov a prítomnosť nezaisiteľného rizika v plate rozdeliť na štyri prípady

- I. $\pi = 0, \sigma_{Y_0} = 0,$
- II. $\pi = 0, \sigma_{Y_0} \neq 0,$
- III. $\pi > 0, \sigma_{Y_0} = 0,$
- IV. $\pi > 0, \sigma_{Y_0} \neq 0.$

Zaujímavejšie sú pre nás posledné dva prípady, kedy sú príspevky na účet odvádzané spojito. Podľa hodnoty σ_{Y_0} rozlišujeme dve možnosti. Ak sa σ_{Y_0} rovná nule, znamená to, že nezaisiteľné riziko v plate je nulové. Trh je úplný, preto môžno budúce príspevky replikovať vhodnou kombináciou existujúcich finančných aktív, sporiteľ si môže požičiavať oproti budúcim príspevkom.

3.2 I. a II. prípad

Najskôr uvažujme prípad neúplného trhu s jednorazovými príspevkami ($\pi = 0, \sigma_{Y_0} \neq 0$). Plat nevieme replikovať existujúcimi finančnými aktívami, pretože trh nie je úplný. Napriek tomu vieme odvodiť analytické riešenie maximalizačnej úlohy

$$\max_{p(t)} E[u(X(T))],$$

pretože sporiteľ a nemusí trápiť neistota výšky budúcich príspevkov.

Predpokladajme, že hodnotová funkcia, ktorá je definovaná vzťahom (2.4), má tvar

$$V(t, X(t)) = h(t)X(t)^\gamma.$$

Dá sa ukázať, že pre $h(t)$ platí

$$h(t) = \frac{1}{\gamma} \exp[\gamma\theta_2(T-t)],$$

kde

$$\theta_2 = \frac{\gamma+1}{2}\sigma_{Y_0}^2 + \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2}{2(1-\gamma)} + \xi_1\sigma_{Y_1} - \mu_Y.$$

Pre derivácie funkcie $V(t, x)$ platí

$$V_t(t, x) = -\gamma\theta_2h(t)x^\gamma, \quad V_x(t, x) = \gamma h(t)x^{\gamma-1}, \quad V_{xx}(t, x) = \gamma(\gamma-1)h(t)x^{\gamma-2}.$$

Ak dosadíme hodnotovú funkciu a jej derivácie do Hamilton-Jacobi-Bellmanovej rovnice (2.6), dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{p(t)} \left\{ V_t(t, x) + b(t, x, p)V_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x, p)V_{xx}(t, x) \right\} \\ &= \sup_{p(t)} \left\{ -\gamma\theta_2h(t)x^\gamma + x \left[-\mu_Y + p(t)\sigma_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) + \sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{Y_1}^2 \right] \gamma h(t)x^{\gamma-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}x^2 \left[(p(t)\sigma_1 - \sigma_{Y_1})^2 + \sigma_{Y_0}^2 \right] \gamma(\gamma-1)h(t)x^{\gamma-2} \right\} \\ &= \sup_{p(t)} \left\{ \gamma h(t)x^\gamma \left[-\theta_2 + \left[-\mu_Y + p(t)\sigma_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) + \sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{Y_1}^2 \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(\gamma-1) \left[(p(t)\sigma_1 - \sigma_{Y_1})^2 + \sigma_{Y_0}^2 \right] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Vyjadríme $p(t)$, ktoré je riešením rovnice

$$-\theta_2 + \left[-\mu_Y + p(t)\sigma_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) + \sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{Y_1}^2 \right] + \frac{\gamma-1}{2} \left[(p(t)\sigma_1 - \sigma_{Y_1})^2 + \sigma_{Y_0}^2 \right] = 0.$$

Optimálna stratégia investovania do rizikového aktíva zahŕňa konštantné váhy

$$p(t, X(t)) = p^* \equiv \frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_1} + \frac{\xi_1 - \sigma_{Y_1}}{(1-\gamma)\sigma_1} \quad \text{pre všetky } t. \quad (3.5)$$

Tento výsledok ukazuje, že hoci nenulové nezaistiteľné riziko v plate má vplyv na koncovú očakávanú užitočnosť, na hodnotu p^* nemá vplyv. Inými slovami, sporiteľ nemôže urobiť nič preto, aby vykompenzoval vplyv nezaistiteľného rizika v plate, môže len akceptovať jeho existenciu. Ukázali sme, že optimálna stratégia pre I. a II. prípad je rovnaká.

Poznámka: I. prípad neuvažujeme samostatne, pretože je špeciálnym prípadom II., ak dosadíme za $\sigma_{Y_0} = 0$.

3.3 III. prípad

Teraz sa pozrieme na prípad úplného trhu so spojitými príspevkami ($\pi > 0$, $\sigma_{Y_0} = 0$). Keďže trh je úplný, vieme si požičiavať oproti budúcim príspevkom.

Súčasná hodnota budúcich príspevkov medzi časom t a T v rizikovo - neutrálnej miere Q je rovná

$$\begin{aligned} E_Q \left[\int_t^T e^{-r(s-t)} \pi Y(s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] &= \pi Y(t) \frac{\exp[(\mu_Y - \xi_1 \sigma_{Y_1})(T-t)] - 1}{\mu_Y - \xi_1 \sigma_{Y_1}} \\ &= \pi Y(t) f(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Budúce príspevky pripočítame k súčasnému majetku a dostaneme rozšírený majetok

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \pi Y(t) f(t).$$

Ak $q(t)$ označíme časť rozšíreného majetku $\widetilde{W}(t)$, ktorú investujeme do rizikového aktíva $R_1(t)$, potom platí

$$d\widetilde{W}(t) = \widetilde{W}(t) \{q(t)[(r + \xi_1 \sigma_1)dt + \sigma_1 dZ_1(t)] + (1 - q(t))[(r + \xi_1 \sigma_{Y_1})dt + \sigma_{Y_1} dZ_1(t)]\}. \quad (3.7)$$

Definujme

$$\widetilde{X}(t) \equiv \frac{\widetilde{W}(t)}{Y(t)} = X(t) + \pi f(t).$$

Je zřejmé, že pre hodnotu v koncovom čase T platí $\widetilde{X}(T) = X(T)$ a koncovú užitočnosť vieme vyjadriť ako $u(\widetilde{X}(T)) = \gamma^{-1} \widetilde{X}(T)^\gamma$.

Použitím Itôovho vzorca vieme odvodiť SDR pre $\widetilde{X}(t)$

$$d\widetilde{X}(t) = \widetilde{X}(t) \{[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + q(t)(\xi_1 - \sigma_{Y_1})(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})]dt + q(t)(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})dZ_1(t)\}. \quad (3.8)$$

Predpokladáme, že hodnotová funkcia má tvar

$$V(t, \widetilde{X}(t)) = h(t) \widetilde{X}(t)^\gamma = h(t) [X(t) + \pi f(t)]^\gamma.$$

Dá sa ukázať, že pre $h(t)$ platí

$$h(t) = \frac{1}{\gamma} \exp[\gamma \theta_3 (T-t)],$$

kde

$$\theta_3 = \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2}{2(1-\gamma)} + \xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y.$$

Pri riešení úlohy

$$\max_{q(t)} E[u(\tilde{X}(T))]$$

postupujeme podobne ako v predchádzajúcom prípade.

Pre derivácie funkcie $V(t, x)$ platí

$$V_t(t, x) = -\gamma\theta_3 h(t)x^\gamma, \quad V_x(t, x) = \gamma h(t)x^{\gamma-1}, \quad V_{xx}(t, x) = \gamma(\gamma-1)h(t)x^{\gamma-2}.$$

Po dosadení do Hamilton-Jacobi-Bellmanovej rovnice (2.6), dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{p(t)} \left\{ V_t(t, x) + b(t, x, p)V_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x, p)V_{xx}(t, x) \right\} \\ &= \sup_{p(t)} \left\{ -\gamma\theta_3 h(t)x^\gamma + x [\xi_1\sigma_{Y_1} - \mu_Y + q(t)(\xi_1 - \sigma_{Y_1})(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})] \gamma h(t)x^{\gamma-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} x^2 [q^2(t)(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})^2] \gamma(\gamma-1)h(t)x^{\gamma-2} \right\} \\ &= \sup_{p(t)} \left\{ \gamma h(t)x^\gamma \left[-\theta_3 + [\xi_1\sigma_{Y_1} - \mu_Y + q(t)(\xi_1 - \sigma_{Y_1})(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\gamma-1) [q^2(t)(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})^2] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Vyjadříme $q(t)$, ktoré rieši rovnicu

$$-\theta_3 + \xi_1\sigma_{Y_1} - \mu_Y + q(t)(\xi_1 - \sigma_{Y_1})(\sigma_1 - \sigma_{Y_1}) + \frac{1}{2}(\gamma-1)q^2(t)(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})^2 = 0.$$

Optimálna hodnota $q(t)$ je rovná

$$q(t, \tilde{X}(t)) = q^* \equiv \frac{\xi_1 - \sigma_{Y_1}}{(1-\gamma)(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})}. \quad (3.9)$$

Majetok investovaný do rizikového aktíva vyjadrený v jednotkách $Y(t)$ je rovný

$$X(t) \left[q^* + (1-q^*) \frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_1} \right] + \pi f(t) \frac{\sigma_1 - \sigma_{Y_1}}{\sigma_1} q^*.$$

Potom optimálna časť investovaná do akcie je rovná

$$p^*(t, X(t)) = \left[q^* + (1-q^*) \frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_1} \right] + \frac{\pi f(t)}{X(t)} \frac{\sigma_1 - \sigma_{Y_1}}{\sigma_1} q^*. \quad (3.10)$$

Môžeme si všimnúť, že $p^*(t, X(t))$ s rastúcim t , $X(t)$ klesá, teda s približujúcim sa časom odchodu do dôchodku je optimálne stále menej investovať do rizikového aktíva. Tento výsledok je v súlade s našimi očakávaniami.

Optimálne váhy q^* dosadíme do SDR (3.8) pre $\tilde{X}(t)$

$$\begin{aligned} d\tilde{X}(t) &= \tilde{X}(t) \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{\xi_1 - \sigma_{Y_1}}{(1-\gamma)(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})} (\xi_1 - \sigma_{Y_1})(\sigma_1 - \sigma_{Y_1}) \right] dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi_1 - \sigma_{Y_1}}{(1-\gamma)(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})} (\sigma_1 - \sigma_{Y_1}) dZ_1 \right\} \\ &= \tilde{X}(t) \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2}{1-\gamma} \right] dt + \frac{\xi_1 - \sigma_{Y_1}}{1-\gamma} dZ_1(t) \right\} \\ &= \tilde{X}(t) [\mu_{\tilde{X}} dt + \sigma_{\tilde{X}} dZ_1(t)]. \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice vieme vyjadriť

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t) &= \tilde{X}(0) \exp \left\{ \left[\mu_{\tilde{X}} - \frac{1}{2} \sigma_{\tilde{X}}^2 \right] t + \sigma_{\tilde{X}} Z_1(t) \right\} \\ &= \tilde{X}(0) \exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2}{1-\gamma} - \frac{1}{2} \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2}{(1-\gamma)^2} \right] t + \frac{\xi_1 - \sigma_{Y_1}}{1-\gamma} Z_1(t) \right\} \\ &= \tilde{X}(0) \exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2(1-2\gamma)}{2(1-\gamma)^2} \right] t + \frac{\xi_1 - \sigma_{Y_1}}{1-\gamma} Z_1(t) \right\}. \end{aligned}$$

Pre koncový stav potom platí

$$\begin{aligned} X(T) &= \tilde{X}(T) \\ &= [X(0) + \pi f(0)] \exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2(1-2\gamma)}{2(1-\gamma)^2} \right] T + \frac{\xi_1 - \sigma_{Y_1}}{1-\gamma} Z_1(T) \right\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\text{kde } f(0) = \frac{\exp[(\mu_Y - \xi_1 \sigma_{Y_1})T] - 1}{\mu_Y - \xi_1 \sigma_{Y_1}}.$$

3.3.1 Výpočet optimálnych váh pre konkrétne parametre

Aby sme ilustrovali výsledky v III. prípade, uvažujme nasledovnú sadu parametrov, ktoré sú v podstate v súlade s údajmi pre Slovenskú republiku

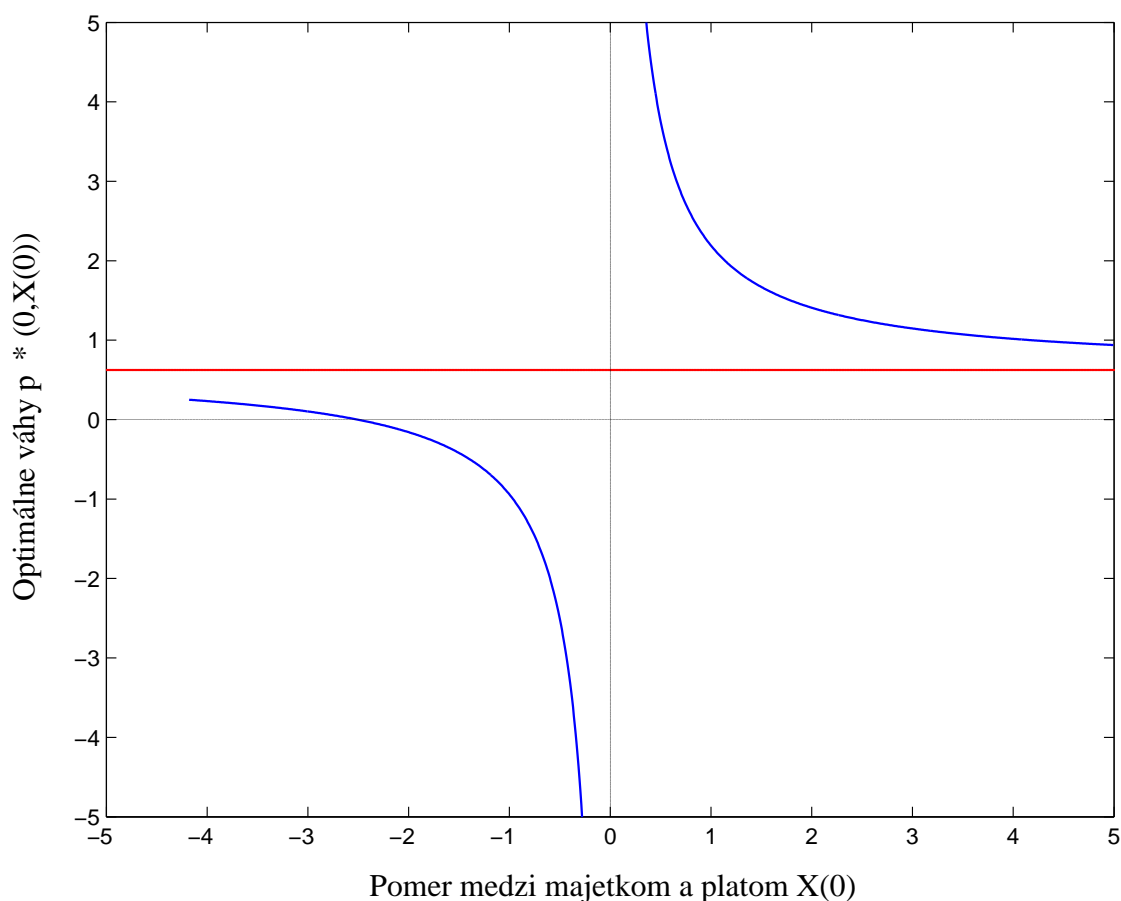
$$\mu_Y = 0,1; \quad \xi_1 = 0,5; \quad \sigma_1 = 0,20; \quad \sigma_{Y_1} = 0,05; \quad \pi = 0,09; \quad \gamma = -5; \quad T = 20. \quad (3.12)$$

Uvažujeme sporiteľa, ktorému ostáva 20 rokov, kým odíde do dôchodku ($T = 20$). Ako sme už uviedli predtým (v časti 2.1), vo výpočtoch používame koeficient averzie voči riziku rovný 6, teda $\gamma = -5$. V slovenskom dôchodkovom systéme je výška príspevkov, ktoré sa odvádzajú do II. piliera, stanovená na 9%, preto sme zvolili $\pi = 0,09$. Ďalej predpokladáme, že rizikové aktívum sa riadi SDR (3.1) s parametrami $r = 0,06$, $\xi_1 = 0,5$ a $\sigma_1 = 0,20$.

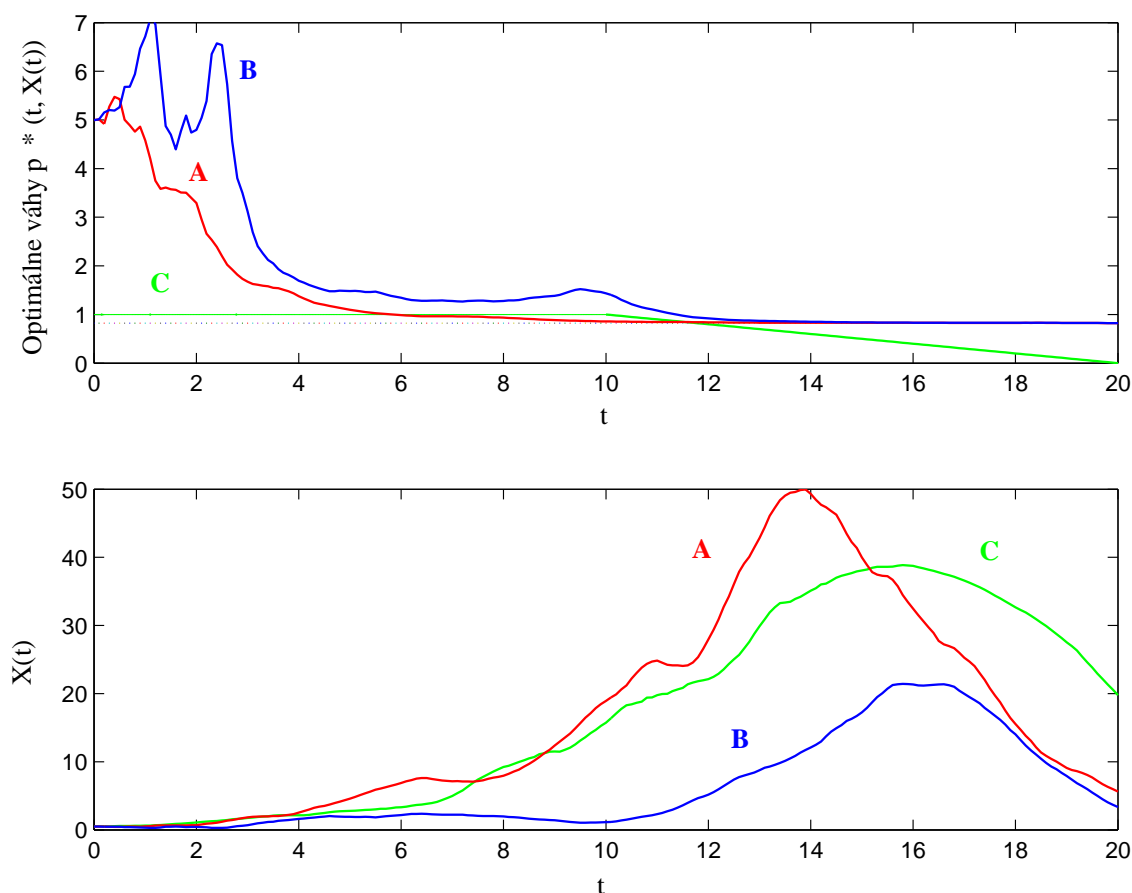
Predpokladáme, že korelácia medzi platom a výnosom rizikového aktíva je rovná 5%, teda $\sigma_{Y_1} = 0,05$.

Na Obrázku 3.1 vidíme závislosť optimálnych váh $p^*(0, X(0))$, t.j. optimálnej časti majetku investovanej v čase $t = 0$ do rizikového aktíva, od počiatočnej hodnoty pomeru majetku a platu $X(0)$.

Červenou čiarou je vykreslená asymptota $p^*(0, X(0)) \xrightarrow{X(0) \rightarrow \infty} q^* + (1 - q^*) \frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_1}$ (v tomto konkrétnom prípade je to 0,625). Môžeme si všimnúť, že pre malé kladné hodnoty $X(0)$ sú optimálne váhy ďalej od asymptoty. Obrázok znázorňuje aj optimálnu stratégiu v prípade, že je povolený záporný majetok. V rámci nášho modelu (úplný trh, žiadne obmedzenia na krátke pozície) mnohé stratégie (vrátane optimálnej) povolia újú pokles majetku do záporných hodnôt až na úroveň $-\pi f(t)$. Úplnosť trhu znamená, že aj keď klesneme s majetkom pod nulu, vieme nájsť stratégiu, ktorá zaručí, že v čase T bude hodnota $X(T)$ kladná.



Obr. 3.1: Závislosť optimálnych váh $p^*(0, X(0))$ od pomeru majetku a platu $X(0)$



Obr. 3.2: Hore: Optimálne váhy $p^*(t, X(t))$ pre dve nasimulované situácie A, B a deterministická stratégia C. Dole: Časový priebeh pomeru majetku a platu $X(t)$ pre situácie A, B, C.

Na Obrázku 3.2 je znázornený typický výsledok simulácie plánovania sporenia na dôchodok, pri ktorej boli použité parametre (3.12). V dolnej časti obrázka vidíme časový priebeh pomeru majetku a platu $X(t)$ pre tri rôzne simulácie A, B a C. Simulácie A a B predstavujú stochastické plánovanie, C je deterministická stratégia. Na hornom obrázku je vykreslený časový priebeh optimálnych váh $p^*(t, X(t))$.

Stochastické simulácie sme skonštuovali nasledovne. Hodnotu premennej $X(t)$ v čase $t = 0$ sme nastavili vo všetkých prípadoch na 0,5. Pre prípady A a B sme vygenerovali nezávislé Wienerove procesy, ktorými sa riadi $X(t)$, pomocou SDR (3.4) a vzt'ahu (3.10) pre optimálne váhy sme postupne pre $t = 1, \dots, T$ počítali $X(t)$ a $p^*(t, X(t))$.

Podobne sme postupovali aj v prípade deterministickej stratégie C, ktorá je vykreslená pre porovnanie. Rozdiel je v použitých váhach. Deterministická stratégia C v prvých rokoch zahŕňa investovanie majetku do rizikového aktíva ($p^* = 1$) a vo vopred stanovenom čase

(10 rokov pred odchodom do dôchodku) sa postupne majetok presúva do bezrizikového aktíva (p^* lineárne klesá z hodnoty 1 na hodnotu 0).

Trajektótie A, B aj C sú v súlade s intuíciou, ktorá nám hovorí, že s približujúcim sa odchodom do dôchodku sporiteľ menej riskuje. Dôvodom takéhoto správania je, že príspevky sa postupne hromadia a vyššia nasporená suma je citlivejšia na výnos rizikového aktíva. Tiež môžeme pozorovať postupný pokles investovania do rizikového aktíva s rastúcou nasporenou sumou (s rastúcou hodnotou $X(t)$).

Za povšimnutie stojí pokles hodnoty $X(t)$ pre deterministickú stratégiu C na konci sporiaceho obdobia. Príčinu tohto poklesu možno pripísať tomu, že deterministická stratégia nedokáže zachytiť rast miezd.

Optimálne váhy v prípade B dosahujú vyššie hodnoty ako A, pretože hodnoty $X(t)$ pre simuláciu B sú bližšie k 0. Obe simulácie ukazujú, že optimálna časť majetku investovaná do rizikového aktíva sa z roka na rok stochasticky mení. Preto tieto stratégie nazývame stochastické. Evidentný je postupný pokles investovania do rizika, pretože t a vo všeobecnosti aj $X(t)$ rastú.

Môžeme si všimnúť, že pri stochastických stratégiách časť investovaná do akcií postupne klesá na nenulovú úroveň $q^* + (1 - q^*) \frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_1}$, ktorá závisí od averzie sporiteľa k riziku a od korelácie medzi platom a výnosom akcií, na rozdiel od deterministickej stratégie, kedy klesá na nulu bez ohľadu na averziu voči riziku a koreláciu.

3.3.2 Strata pri nesprávne použitej stratégii

Teraz porovnáme stratégie, ktoré sú výsledkom optimalizácie za predpokladu stochastického vývoja platov, so stratégiami, ktoré sú optimálne v prípade deterministických platov.

Uvažujme dve stratégie sporiteľa na dôchodok

1. S_σ je optimálna stratégia sporiteľa, ktorý predpokladá, že mzdy sa vyvíjajú stochasticky ($\sigma_{Y_1} \neq 0$),
2. S_0 je optimálna stratégia sporiteľa, ktorý predpokladá, že mzdy nie sú stochastické, že σ_{Y_1} je nulová, ale v skutočnosti $\sigma_{Y_1} \neq 0$.

Ak sporiteľ v prípade stochastického vývoja platov očakáva, že platy sú deterministické a použije nesprávnu stratégiu S_0 , zrejme platí

$$E_{S_0}[u(X(T))] \leq E_{S_\sigma}[u(X(T))].$$

Zaujíma nás akú stratu spôsobí sporiteľovi nesprávny predpoklad a následne nesprávne použitá stratégia. Túto stratu môžeme vyjadriť pomocou určitého ekvivalentu c (istota,

za ktorú je sporiteľ ochotný vymeniť rizikovú situáciu)

$$E[u(X(T))] = u(c).$$

Označme

$$u(c_{S_0}) = E_{S_0}[u(X(T))] \quad \text{a} \quad u(c_{S_\sigma}) = E_{S_\sigma}[u(X(T))].$$

Najskôr pomocou určitostného ekvivalentu popíšeme stratégiu S_σ . S využitím vzťahu (3.11) vyjadríme $E_{S_\sigma}[u(X(T))]$.

$$\begin{aligned} E_{S_\sigma}[u(X(T))] &= E_{S_\sigma} \left[\frac{1}{\gamma} X(T)^\gamma \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} E \left\{ [X(0) + \pi f(0)]^\gamma \exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2 (1 - 2\gamma)}{2(1 - \gamma)^2} \right] \gamma T + \frac{\xi_1 - \sigma_{Y_1}}{1 - \gamma} \gamma Z_1(T) \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{\gamma} [X(0) + \pi f(0)]^\gamma \exp \left[\left(\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2 (1 - 2\gamma)}{2(1 - \gamma)^2} \right) \gamma T \right] \times \\ &\quad E \left\{ \exp \left[\frac{\xi_1 - \sigma_{Y_1}}{1 - \gamma} \gamma Z_1(T) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\gamma} [X(0) + \pi f(0)]^\gamma \exp \left[\left(\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2 (1 - 2\gamma)}{2(1 - \gamma)^2} \right) \gamma T \right] \exp \left[\frac{1}{2} \gamma^2 \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2}{(1 - \gamma)^2} T \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \left[X(0) + \pi \frac{\exp[(\mu_Y - \xi_1 \sigma_{Y_1})T] - 1}{\mu_Y - \xi_1 \sigma_{Y_1}} \right]^\gamma \exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2}{2(1 - \gamma)^2} \right] \gamma T \right\} \end{aligned}$$

Pri výpočte strednej hodnoty v 4. riadku sme využili tvrdenie zo štatistiky o strednej hodnote exponenciály normálneho rozdelenia. Ak náhodná premenná X má normálne rozdelenie $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, potom platí

$$E(e^{\theta X}) = e^{\theta \mu + \frac{1}{2} \theta^2 \sigma^2}.$$

Z rovnice $E_{S_\sigma}[u(X(T))] = u(c_{S_\sigma})$ vieme vyjadriť

$$c_{S_\sigma} = [X(0) + \pi f(0)] \exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2}{2(1 - \gamma)^2} \right] T \right\}. \quad (3.13)$$

Teraz popíšeme pomocou určitostného ekvivalentu stratégiu S_0 . Najskôr zopakovaním postupu z predchádzajúcej časti odvodíme optimálne váhy a $X(T)$ pre prípad, keď sporiteľ predpokladá, že mzdy nie sú stochastické ($\sigma_{Y_1} = 0$).

Pomocou vzťahu (3.9) sa optimálna hodnota $q(t)$ rovná

$$q(t, \tilde{X}(t)) = q^* \equiv \frac{\xi_1}{\sigma_1(1 - \gamma)}.$$

Optimálna časť investovaná do akcií je rovná

$$p^*(t, X(t)) = q^* + \frac{\pi g(t)}{X(t)} q^* = q^* \left[1 + \frac{\pi g(t)}{X(t)} \right], \quad \text{kde} \quad g(t) = \frac{\exp[\mu_Y(T - t)] - 1}{\mu_Y}.$$

Váhy q^* dosadíme do SDR (3.8) pre $\tilde{X}(t)$

$$\begin{aligned} d\tilde{X}(t) &= \tilde{X}(t) \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{\xi_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1})(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})}{\sigma_1(1 - \gamma)} \right] dt + \frac{\xi_1}{\sigma_1(1 - \gamma)} (\sigma_1 - \sigma_{Y_1}) dZ_1 \right\} \\ &= \tilde{X}(t) [\mu_{\tilde{X}} dt + \sigma_{\tilde{X}} dZ_1(t)]. \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice vieme vyjadriť

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t) &= \tilde{X}(0) \exp \left\{ \left[\mu_{\tilde{X}} - \frac{1}{2} \sigma_{\tilde{X}}^2 \right] t + \sigma_{\tilde{X}} Z_1(t) \right\} \\ &= \tilde{X}(0) \exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{\xi_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1})(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})}{\sigma_1(1 - \gamma)} - \frac{1}{2} \frac{\xi_1^2 (\sigma_1 - \sigma_{Y_1})^2}{\sigma_1^2 (1 - \gamma)^2} \right] t \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi_1(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})}{\sigma_1(1 - \gamma)} Z_1(t) \right\} \\ &= \tilde{X}(0) \exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{2\xi_1\sigma_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1})(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})(1 - \gamma) - \xi_1^2(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})^2}{2\sigma_1^2(1 - \gamma)^2} \right] t \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi_1(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})}{\sigma_1(1 - \gamma)} Z_1(t) \right\}. \end{aligned}$$

Pre koncový stav platí

$$\begin{aligned} X(T) &= \tilde{X}(T) \\ &= [X(0) + \pi f(0)] \exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{2\xi_1\sigma_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1})(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})(1 - \gamma) - \xi_1^2(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})^2}{2\sigma_1^2(1 - \gamma)^2} \right] T \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi_1(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})}{\sigma_1(1 - \gamma)} Z_1(T) \right\}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\text{kde } f(0) = \frac{\exp[(\mu_Y - \xi_1 \sigma_{Y_1})T] - 1}{\mu_Y - \xi_1 \sigma_{Y_1}}.$$

Pomocou rovnice (3.14) vyjadríme $E_{S_0}[u(X(T))]$.

$$\begin{aligned} E_{S_0}[u(X(T))] &= E_{S_0} \left[\frac{1}{\gamma} X(T)^\gamma \right] \\ &= \frac{1}{\gamma} E \left\{ \tilde{X}(0)^\gamma \exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{\xi_1(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})[2\sigma_1(1 - \gamma)(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) - \xi_1(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})]}{2\sigma_1^2(1 - \gamma)^2} \right] \gamma T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\xi_1(\sigma_1 - \sigma_{Y_1})}{\sigma_1(1 - \gamma)} \gamma Z_1(T) \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\gamma} \tilde{X}(0)^\gamma \exp \left[\left(\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{\xi_1 (\sigma_1 - \sigma_{Y_1}) [2\sigma_1 (1 - \gamma) (\xi_1 - \sigma_{Y_1}) - \xi_1 (\sigma_1 - \sigma_{Y_1})]}{2\sigma_1^2 (1 - \gamma)^2} \right) \gamma T \right] \times \\
&\quad \mathbb{E} \left\{ \exp \left[\frac{\xi_1 (\sigma_1 - \sigma_{Y_1})}{\sigma_1 (1 - \gamma)} \gamma Z_1(T) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\gamma} \tilde{X}(0)^\gamma \exp \left[\left(\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{\xi_1 (\sigma_1 - \sigma_{Y_1}) [2\sigma_1 (1 - \gamma) (\xi_1 - \sigma_{Y_1}) - \xi_1 (\sigma_1 - \sigma_{Y_1})]}{2\sigma_1^2 (1 - \gamma)^2} \right) \gamma T \right] \times \\
&\quad \exp \left[\frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\xi_1^2 (\sigma_1 - \sigma_{Y_1})^2}{\sigma_1^2 (1 - \gamma)^2} T \right] \\
&= \frac{1}{\gamma} [X(0) + \pi f(0)]^\gamma \exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_1 - \mu_Y + \frac{\xi_1 (\sigma_1 - \sigma_{Y_1}) (\xi_1 \sigma_1 - 2\sigma_1 \sigma_{Y_1} + \xi_1 \sigma_{Y_1})}{2\sigma_1^2 (1 - \gamma)} \right] \gamma T \right\}, \\
&\text{kde } f(0) = \frac{\exp[(\mu_Y - \xi_1 \sigma_{Y_1})T] - 1}{\mu_Y - \xi_1 \sigma_{Y_1}}.
\end{aligned}$$

Z rovnice $\mathbb{E}_{S_0}[u(X(T))] = u(c_{S_0})$ vieme vyjadriť

$$c_{S_0} = [X(0) + \pi f(0)] \exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{\xi_1 (\sigma_1 - \sigma_{Y_1}) (\xi_1 \sigma_1 - 2\sigma_1 \sigma_{Y_1} + \xi_1 \sigma_{Y_1})}{2\sigma_1^2 (1 - \gamma)} \right] T \right\}. \quad (3.15)$$

Po vyjadrení hodnôt c_{S_0} a c_{S_σ} vieme percentuálnu stratu sporiteľ a spôsobenú nesprávne použitou stratégiou vyjadriť ako

$$\begin{aligned}
\frac{c_{S_\sigma}}{c_{S_0}} - 1 &= \frac{\exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2}{2(1 - \gamma)} \right] T \right\}}{\exp \left\{ \left[\xi_1 \sigma_{Y_1} - \mu_Y + \frac{\xi_1 (\sigma_1 - \sigma_{Y_1}) (\xi_1 \sigma_1 - 2\sigma_1 \sigma_{Y_1} + \xi_1 \sigma_{Y_1})}{2\sigma_1^2 (1 - \gamma)} \right] T \right\}} - 1 \\
&= \exp \left\{ \frac{1}{2(1 - \gamma)} \left[\frac{\sigma_{Y_1} (\sigma_1 - \xi_1)}{\sigma_1} \right]^2 \right\} - 1.
\end{aligned} \quad (3.16)$$

3.3.3 Strata pri nesprávne použitej stratégii pre konkrétne parametre

Pre konkrétne parametre vieme stratu (3.16) vyjadriť číselne. Pri výpočtoch sme zvolili nasledovné základné parametre

$$\gamma = -5; \quad \sigma_1 = 0,10; \quad \xi_1 = 1; \quad \sigma_{Y_1} = 0,05.$$

Pre uvedené hodnoty parametrov dostaneme

$$\frac{c_{S_\sigma}}{c_{S_0}} - 1 = \exp \left\{ \frac{1}{2(1 - \gamma)} \left[\frac{\sigma_{Y_1} (\sigma_1 - \xi_1)}{\sigma_1} \right]^2 \right\} - 1 = 1,7018 \times 10^{-2} = 1,7018\%.$$

Vidíme, že pre takto nastavené parametre dochádza v prípade nesprávneho predpokladu, že mzdy sú deterministické, k 1,7018%–nej strate oproti prípadu, kedy bola použitá správna stratégia očakávajúca stochastický vývoj platov.

Jednotlivé parametre sme postupne menili a sledovali, aký majú vplyv na veľkosť straty. V tabuľkách uvádzame výsledky.

V Tabuľke 3.1 môžeme vidieť, že s rastúcou averziou sporiteľa voči riziku (s rastúcou hodnotou parametra $1 - \gamma$), klesá strata vyplývajúca z použitia nesprávnej stratégie. Rizikovo averznejší sporiteľ utrpí pri nesprávne použitej stratégii menšiu stratu. Naopak sporitelia, ktorí radi riskujú, zaznamenajú výraznejšiu stratu. Pre koeficient averzie voči riziku rovný 3 je to pomerne výrazná strata (takmer 3,5%.)

Parametre				Strata
$1 - \gamma$	σ_1	ξ_1	σ_{Y_1}	$\frac{c_{S_\sigma} - 1}{c_{S_0}} (\%)$
9	0,10	1	0,05	1,1313%
6	0,10	1	0,05	1,7018%
3	0,10	1	0,05	3,4326%

Tabuľka 3.1: Závislosť straty od averzie sporiteľa voči riziku (od $1 - \gamma$)

Tabuľka 3.2 ukazuje, že s rastúcou koreláciou medzi platom a výnosom rizikového aktíva (s rastúcou hodnotou parametra σ_{Y_1}), rastie strata vyplývajúca z použitia nesprávnej stratégie.

Parametre				Strata
$1 - \gamma$	σ_1	ξ_1	σ_{Y_1}	$\frac{c_{S_\sigma} - 1}{c_{S_0}} (\%)$
6	0,10	1	0,01	0,0675%
6	0,10	1	0,05	1,7018%
6	0,10	1	0,09	5,6197%

Tabuľka 3.2: Závislosť straty od parametra σ_{Y_1}

Parametre σ_1 a ξ_1 spolu súvisia, preto ich vplyv analyzujeme spolu. V Tabuľke 3.3 môžeme vidieť, že s rastúcou volatilitou rizikového aktíva σ_1 , t.j. s poklesom trhovej ceny rizika ξ_1 , klesá strata vyplývajúca z použitia nesprávnej stratégie.

Parametre				Strata
$1 - \gamma$	σ_1	ξ_1	σ_{Y_1}	$\frac{c_{S_\sigma}}{c_{S_0}} - 1$ (%)
6	0,10	1	0,05	1,7018%
6	0,17	0,6	0,05	0,1262%
6	0,2	0,5	0,05	0,0468%

Tabuľka 3.3: Závislosť straty od parametrov σ_1 a ξ_1

3.4 IV. prípad

Podrobnejšie sa budeme zaoberať aj prípadom neúplného trhu so spojitými príspevkami ($\pi > 0$, $\sigma_{Y_0} \neq 0$). Keďže trh nie je úplný, sporiteľ si nemôže požičiavať oproti budúcim príspevkom. Záporné hodnoty majetku $W(t)$ vedú s kladnou pravdepodobnosťou k zápornému koncovému majetku $W(T)$. Preto stratégie $p(t)$ vedúce k zápornému majetku nie sú prípustné. Tieto neprípustné stratégie musíme vylúčiť.

V zmysle teórie, ktorú sme zhrnuli v 2. kapitole definujeme očakávanú užitočnosť sporiteľa ako

$$J(t, x, p) = E[u(X^p(T)) | X(t) = x],$$

kde $X^p(t)$ je riešenie rovnice (3.4) dané stratégiou alokácie aktív $p = p(t, x)$. Definujme množinu všetkých prípustných stratégií \mathcal{P} .

Hodnotová funkcia je definovaná vzt'ahom (2.4) ako

$$V(t, x) = \sup_{p \in \mathcal{P}} E[u(X^p(T)) | X(t) = x] = \sup_{p \in \mathcal{P}} J(t, x, p).$$

K nájdeniu hodnotovej funkcie môžeme pristupovať dvoma rôznymi spôsobmi. Prvý spôsob využíva Hamilton-Jacobi-Bellmanovu rovnicu (2.6)

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{p \in \mathcal{P}} \left\{ V_t(t, x) + b(t, x, p)V_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x, p)V_{xx}(t, x) \right\} \\ &= V_t(t, x) + \sup_{p \in \mathcal{P}} \left\{ \mu_X^p V_x(t, x) + \frac{1}{2}(\sigma_X^p)^2 V_{xx}(t, x) \right\} \end{aligned}$$

s koncovou podmienkou

$$V(T, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma.$$

μ_X^p a σ_X^p sú drift a volatilita procesu $X(t)$, ktorý sa riadi SDR (3.4) a platí

$$\begin{aligned}\mu_X^p &= \mu_X^p(t, x) = \pi + x[-\mu_Y + p(t)\sigma_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) + \sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{Y_1}^2], \\ (\sigma_X^p)^2 &= \sigma_X^p(t, x)^2 = x^2[\sigma_{Y_0}^2 + (p(t)\sigma_1 - \sigma_{Y_1})^2].\end{aligned}$$

Pre dané (t, x) vyriešime úlohu na suprénum.

$$\begin{aligned}\sup_{p \in \mathcal{P}} \left[\mu_X^p V_x + \frac{1}{2} (\sigma_X^p)^2 V_{xx} \right] &= \sup_{p \in \mathcal{P}} \left\{ \left\{ \pi + x[-\mu_Y + p(t)\sigma_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) + \sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{Y_1}^2] \right\} V_x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} x^2 [\sigma_{Y_0}^2 + (p(t)\sigma_1 - \sigma_{Y_1})^2] V_{xx} \right\}\end{aligned}$$

Derivovaním výrazu, ktorého suprénum hľadáme, dostaneme

$$xV_x\sigma_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) + \frac{1}{2}x^2V_{xx}2(p(t)\sigma_1 - \sigma_{Y_1})\sigma_1 = 0,$$

odtiaľ vyjadríme kandidáta na optimálne riešenie

$$p^*(t, x) \equiv p^*(t, x, V) = \frac{1}{\sigma_1} \left[\sigma_{Y_1} - \frac{V_x}{xV_{xx}}(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) \right]. \quad (3.17)$$

Hodnota p^* teda závisí od optimálnej hodnoty funkcie $V(t, x)$, ktorú nájdeme riešním partiálnej diferenciálnej rovnice (PDR)

$$V_t + \mu_X^{p^*} V_x + \frac{1}{2} (\sigma_X^{p^*})^2 V_{xx} = 0 \quad (3.18)$$

s koncovou podmienkou

$$V(T, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma,$$

kde

$$\begin{aligned}\mu_X^{p^*} &= \pi + x \left[-\mu_Y + p^*(t, x, V)\sigma_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) + \sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{Y_1}^2 \right], \\ (\sigma_X^{p^*})^2 &= x^2 \left[\sigma_{Y_0}^2 + (p^*(t, x, V)\sigma_1 - \sigma_{Y_1})^2 \right].\end{aligned}$$

Po dosadení kandidáta (3.17) do PDR (3.18) dostaneme

$$\begin{aligned}V_t + \left\{ \pi + x \left[-\mu_Y + \frac{1}{\sigma_1} \left[\sigma_{Y_1} - \frac{V_x}{xV_{xx}}(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) \right] \sigma_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) + \sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{Y_1}^2 \right] \right\} V_x \\ + \frac{1}{2} x^2 \left\{ \sigma_{Y_0}^2 + \left[\frac{1}{\sigma_1} \left(\sigma_{Y_1} - \frac{V_x}{xV_{xx}}(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) \right) \sigma_1 - \sigma_{Y_1} \right]^2 \right\} V_{xx} = 0.\end{aligned}$$

Postupne upravujeme túto PDR na jednoduchší tvar:

$$\begin{aligned}V_t + \left\{ \pi + x \left[-\mu_Y + \sigma_{Y_1}(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) - \frac{V_x}{xV_{xx}}(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2 + \sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{Y_1}^2 \right] \right\} V_x \\ + \frac{1}{2} x^2 \left[\sigma_{Y_0}^2 + \left(-\frac{V_x}{xV_{xx}}(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) \right)^2 \right] V_{xx} = 0,\end{aligned}$$

$$V_t + [\pi + Kx]V_x - \frac{V_x^2}{V_{xx}}(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2 + \frac{1}{2}x^2\sigma_{Y_0}^2V_{xx} + \frac{1}{2}\frac{V_x^2}{V_{xx}}(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2 = 0,$$

$$V_t + [\pi + Kx]V_x - \frac{1}{2}\frac{V_x^2}{V_{xx}}(\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2 + \frac{1}{2}x^2\sigma_{Y_0}^2V_{xx} = 0,$$

kde $K = -\mu_Y + \sigma_{Y_1}(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) + \sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{Y_1}^2 = -\mu_Y + \sigma_{Y_1}\xi_1 + \sigma_{Y_0}^2$.

Dostali sme rovnicu

$$V_t + [\pi + Kx]V_x - \frac{1}{2} \frac{V_x^2}{V_{xx}} (\xi_1 - \sigma_{Y_1})^2 + \frac{1}{2} x^2 \sigma_{Y_0}^2 V_{xx} = 0 \quad (3.19)$$

s koncovou podmienkou

$$V(T, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma.$$

Explicitné riešenie rovnice (3.19) nevieme nájsť. Jednou z možností je nájsť aproximáciu funkcie $V(t, x)$ numericky. Takýto postup by bol pomerne náročný kvôli nelinearite funkcie $V(t, x)$ v danej PDR.

Iný spôsob, ako sa môžeme pozrieť na problém hľadania hodnotovej funkcie, využíva teóriu podmienených očakávaní, presnejšie použijeme tzv. vežové pravidlo (Tower law). Pripomeňme, že $X(t)$ spĺňa SDR (3.4)

$$dX(t) = \pi dt + X(t) \left\{ [-\mu_Y + p(t)\sigma_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) + \sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{Y_1}^2] dt + [p(t)\sigma_1 - \sigma_{Y_1}] dZ_1(t) - \sigma_{Y_0} dZ_0(t) \right\}.$$

Wienerove procesy $Z_1(t)$ a $Z_0(t)$ sú nezávislé. Využijeme známy fakt zo štatistiky, že lineárna kombinácia nezávislých normálnych rozdelení $\mathcal{N}(0, 1)$ je normálne rozdelenie

$$\sigma_1 \mathcal{N}(0, 1) + \sigma_2 \mathcal{N}(0, 1) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

SDR pre $X(t)$ prepíšeme do tvaru

$$dX(t) = \pi dt + X(t) [\mu_X^p dt + \sigma_X^p dW(t)], \quad (3.20)$$

kde $W(t)$ je nový Wienerov proces,

$$\mu_X^p = -\mu_Y + p(t)\sigma_1(\xi_1 - \sigma_{Y_1}) + \sigma_{Y_0}^2 + \sigma_{Y_1}^2 \quad \text{a} \quad (\sigma_X^p)^2 = [p(t)\sigma_1 - \sigma_{Y_1}]^2 + \sigma_{Y_0}^2.$$

Pomocou rovnice (3.20) vyjadríme zmenu premennej $X(t)$ za krátky časový úsek, ktorý označíme Δt . V danej rovnici nám malý problém spôsobuje iba člen πdt . S týmto problémom sa vysporiadame tak, že budeme predpokladať, že sporiteľ neodvádza príspevky na účet v každom okamihu, ale na konci intervalu Δt . Pre dostatočne malé Δt si takúto diskretizáciu môžeme dovoliť. Potom môžeme zmenu $X(t)$ vyjadriť

$$\begin{aligned} X(t + \Delta t) &= \pi \Delta t + X(t) \exp \left\{ \left[\mu_X^p - \frac{1}{2} (\sigma_X^p)^2 \right] \Delta t + \sigma_X^p \sqrt{\Delta t} W(t) \right\} \\ &= F(t, X(t), p(t), W(t)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Teraz využijeme vežové pravidlo

$$\mathbb{E}[u(X^p(T))|X(t) = x] = \mathbb{E} \{ \mathbb{E} [u(X^p(T))|X(t + \Delta t)] |X(t) = x \}. \quad (3.22)$$

Ak dosadíme rovnicu (3.22) do rovnice pre hodnotovú funkciu (2.4), tak dostaneme

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \sup_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{E}[u(X^p(T))|X(t) = x] = \sup_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{E} \{ \mathbb{E} [u(X^p(T))|X(t + \Delta t)] |X(t) = x \} \\ &= \sup_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{E}[V(t + \Delta t, F(t, x, p, \Phi))], \end{aligned}$$

kde Φ je normálne rozdelená náhodná premenná $\Phi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ so známou funkciou hustoty

$$f(y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

Rovnicu

$$V(t, x) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{E}[V(t + \Delta t, F(t, x, p, \Phi))] \quad (3.23)$$

s koncovou podmienkou $V(T, x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma$ nazývame Bellmanova rovnica.

Stredná hodnota je definovaná ako integrál, preto môžeme rovnicu (3.23) prepísať na tvar

$$V(t, x) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \int_{\mathbb{R}} V(t + \Delta t, F(t, x, p, y)) f(y) dy. \quad (3.24)$$

Kapitola 4

Implementácia modelu pre IV. prípad

V tejto časti práce uvidíme postup numerickej aproximácie hodnotovej funkcie $V(t, x)$ pomocou rovnice (3.24). Používame nasledovný algoritmus:

- Časový interval $(0, T)$ si rozdelíme na N diskrétnych časov

$$t_1 = 0, t_2 = t_1 + \Delta t, t_3 = t_2 + \Delta t, \dots, t_{N-1} = T - \Delta t, t_N = T,$$

kde $\Delta t = \frac{T}{N}$ je časový krok a N je dostatočne veľké.

- V čase $t_N = T$ je funkcia $V(T, x) = u(x)$ daná.
- Pre $t = t_{N-1}, \dots, t_1$ postupne počítame hodnotovú funkciu $V(t, x)$. V každom časovom kroku $t_i, i = N-1, \dots, 1$ vypočítame aproximovanú hodnotu $V(t_i, x_j)$ v diskrétnych bodoch $x_j, j = 1, \dots, N_x$, kde x_j je ekvidištantné delenie intervalu (x_{min}, x_{max}) pre vhodne zvolené x_{min} a x_{max} a N_x je dostatočne veľké. Pre $V(t_i, x_j)$ platí

$$V(t_i, x_j) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \int_{\mathbb{R}} V(t_{i+1}, F(t_i, x_j, p, y)) f(y) dy. \quad (4.1)$$

- Skonstruujeme delenie $p_k, k = 1, \dots, N_p$ množiny prípustných riešení $\mathcal{P}(t, x)$.
- V každom bode (t_i, x_j) nájdeme hodnotu \hat{p}_k , ktorá maximalizuje p - parametrický integrál (4.1), teda

$$\hat{p}_k = \arg \max_{k=1, \dots, N_p} \int_{\mathbb{R}} V(t_{i+1}, F(t_i, x_j, p_k, y)) f(y) dy. \quad (4.2)$$

- Nastavíme $\widehat{p}(t_i, x_j) = \widehat{p}_k$ a hodnotová funkcia $V(t_i, x_j)$ sa podľa vzťahov (4.1), (4.2) rovná

$$V(t_i, x_j) = \int_{\mathbb{R}} V(t_{i+1}, F(t_i, x_j, \widehat{p}_k, y)) f(y) dy.$$

Výpočet integrálu (4.1) je pomerne náročný kvôli výrazne rozdielnym hodnotám, ktoré nadobúda hodnotová funkcia. Funkcia $V(t, x)$ totiž nadobúda rádovo veľmi veľké, ale aj veľmi malé hodnoty. Preto je potrebné použiť škálovanie. Použijeme techniku škálovania, ktorá je za daných okolností bežná (bola použitá v [7],[8],[12]).

Namiesto funkcie $V(t, x)$ budeme aproximovať funkciu $W(t, x)$, ktorú definujeme vzťahom

$$W(t, x) = H(t, x)V(t, x), \quad (4.3)$$

kde škálovacia funkcia $H(t, x)$ je ľubovoľná kladná ohraničená funkcia. Potom vieme jednoducho vyjadriť

$$V(t, x) = \frac{W(t, x)}{H(t, x)}.$$

V koncovom čase platí

$$W(T, x) = H(T, x)V(T, x) = H(T, x)u(x).$$

V našej práci zvolíme rovnakú škálovaciu funkciu ako zvolili autori v [7], [8] a [12]. V čase T definujeme

$$H(T, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + V(T, x)^2}},$$

pre $t = T - \Delta t, \dots, 0$ definujeme $H(t, x)$ rekurzívne pomocou vzťahu

$$H(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + V(t + \Delta t, x)^2}} = \frac{H(t + \Delta t, x)}{\sqrt{H(t + \Delta t, x)^2 + W(t + \Delta t, x)^2}}.$$

Pomocou rovníc (3.24), (4.3) počítame

$$\begin{aligned} W(t, x) &= H(t, x)V(t, x) = H(t, x) \sup_{p \in \mathcal{P}} \int_{\mathbb{R}} V(t + \Delta t, F(t, x, p, y)) f(y) dy \\ &= H(t, x) \sup_{p \in \mathcal{P}} \int_{\mathbb{R}} \frac{W(t + \Delta t, F(t, x, p, y))}{H(t + \Delta t, F(t, x, p, y))} f(y) dy. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Výpočet $W(t, x)$ spočíva vo vyčíslení integrálu (4.4) cez množinu všetkých reálnych čísel \mathbb{R} . Zvyčajne sa v podobných situáciách obmedzia hranice integrálu na konečný interval $(-L, L)$, kde L je dostatočne veľká konštanta. Pre praktické výpočty je postačujúce použiť $L \approx 3$. Interval $(-3, 3)$ pokrýva viac ako 98% signifikantných hodnôt hustotovej funkcie

$f(y)$.

$W(t, x)$ budeme aproximovať na intervale $(-3, 3)$ a budeme postupovať podľa predtým popísaného algoritmu.

Platí

$$W(t_i, x_j) = \max_{k=1, \dots, N_p} \int_{-3}^3 H(t_i, x_j) \frac{W(t_{i+1}, F(t_i, x_j, p_k, y))}{H(t_{i+1}, F(t_i, x_j, p_k, y))} f(y) dy. \quad (4.5)$$

Kvôli zjednodušeniu použijeme substitúciu

$$z = F(t, x, p, y) = \pi \Delta t + x \exp \left\{ \left[\mu_X^p - \frac{1}{2} (\sigma_X^p)^2 \right] \Delta t + \sigma_X^p \sqrt{\Delta t} y \right\},$$

potom rovnicu (4.5) upravíme na tvar

$$W(t_i, x_j) = \max_{k=1, \dots, N_p} \int_{z_a}^{z_b} \underbrace{H(t_i, x_j) \frac{W(t_{i+1}, z)}{H(t_{i+1}, z)} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dz}{\sigma_X^p \sqrt{\Delta t} [z - \pi \Delta t]}}_{G(z) dz} \quad (4.6)$$

kde

$$y = \frac{1}{\sigma_X^p \sqrt{\Delta t}} \left\{ \ln \frac{z - \pi \Delta t}{x} - \left[\mu_X^p - \frac{1}{2} (\sigma_X^p)^2 \right] \Delta t \right\}$$

a pre hranice integrálu platí

$$z_a = \pi \Delta t + x \exp \left\{ \left[\mu_X^p - \frac{1}{2} (\sigma_X^p)^2 \right] \Delta t - 3 \sigma_X^p \sqrt{\Delta t} \right\},$$

$$z_b = \pi \Delta t + x \exp \left\{ \left[\mu_X^p - \frac{1}{2} (\sigma_X^p)^2 \right] \Delta t + 3 \sigma_X^p \sqrt{\Delta t} \right\}.$$

Integrál (4.6) numericky aproximujeme pomocou zloženej Simpsonovej metódy pre N_z bodov.

Tvrdenie 4.1. *Predpokladajme, že interval (a, b) rozdelíme na $2m$ podintervalov rovnakej dĺžky $h = \frac{b-a}{2m}$. Potom pomocou zloženej Simpsonovej metódy numericky aproximujeme integrál podľa vzorca³*

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6m} \left[f(a) + 4 \sum_{j=0}^{m-1} f(x_{2j+1}) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + f(b) \right],$$

kde $x_j = a + jh$ pre $j = 1, \dots, 2m - 1$.

³Vzorec je odvodený v [1].

4.1 Výpočet optimálnych váh pre konkrétne parametre

Výsledky IV. prípadu opäť ilustrujeme na príklade s konkrétnymi parametrami. Použijeme rovnakú sadu parametrov ako v III. prípade (3.12) doplnenú o parameter $\sigma_{Y0} = 0,05$, ktorý vyjadruje nezaistiteľné riziko v plate. Parametre sú

$$\begin{aligned} \mu_Y &= 0,1; & \xi_1 &= 0,5; & \sigma_1 &= 0,20; & \sigma_{Y1} &= 0,05; \\ \sigma_{Y0} &= 0,05; & \pi &= 0,09; & \gamma &= -5; & T &= 20. \end{aligned} \quad (4.7)$$

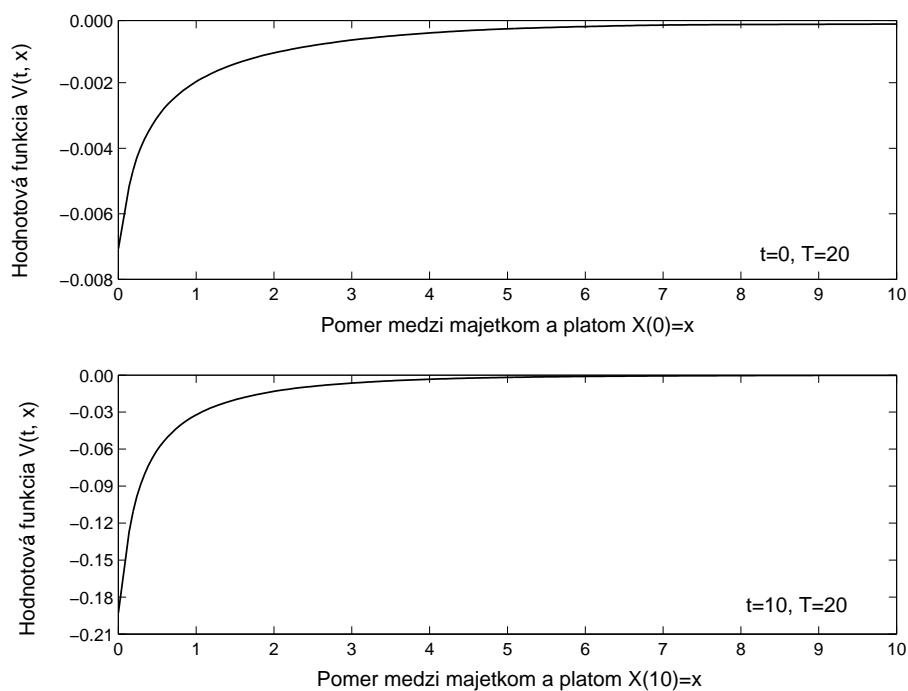
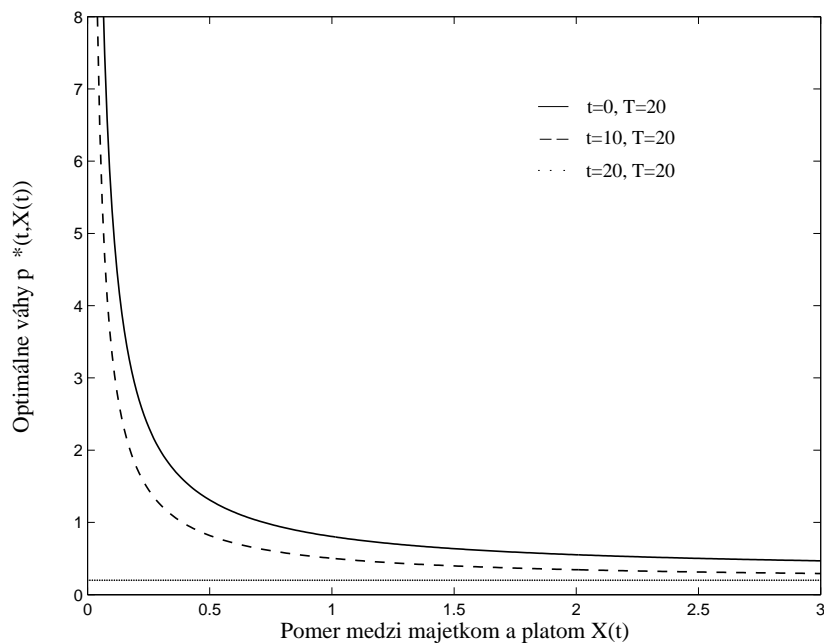
Numerické výpočty sme realizovali v programovacom prostredí Matlab 7. Časový interval $(0, T)$ rozdelíme na $N = 20, 40, 240$ časových krokov, t.j. sporiteľ sa rozhoduje raz ročne, polročne, respektíve mesačne akú časť majetku investuje do rizikového aktíva. Keďže sme predpokladali, že sporiteľ prispieva na účet spojitou, v grafoch a tabuľkách, ktoré uvádzame, sme počítali s mesačným prispievaním na účet ($N = 240$). Vzhľadom na naše očakávania o hodnotách, ktoré nadobúda premenná $X(t)$ zvolíme $x_{min} = 0,09$ a $x_{max} = 10$. Interval $(0,09; 10)$ rozdelíme na $N_x = 200$ diskretných bodov. Podľa optimálnych váh, ktoré sme vypočítali pre III. prípad, môžeme očakávať, že pre IV. prípad dostaneme podobné výsledky. Interval $(0, 10)$, v ktorom očakávame váhy, rozdelíme na $N_p = 201$ diskretných bodov, teda $p_k \in \{0; 0,05; 0,1; \dots; 9,95; 10\}$. Integrál (4.6) numericky aproximujeme pomocou Simpsonovej metódy v $N_z = 5$ bodoch nasledovne

$$\int_{z_a}^{z_b} G(z) dz \approx \frac{h}{3} [G(z_a) + 4G(z_1) + 2G(z_2) + 4G(z_3) + G(z_b)],$$

kde $z_1 = z_a + h$, $z_2 = z_a + 2h$ a $z_3 = z_a + 3h$, $h = \frac{z_b - z_a}{4}$.

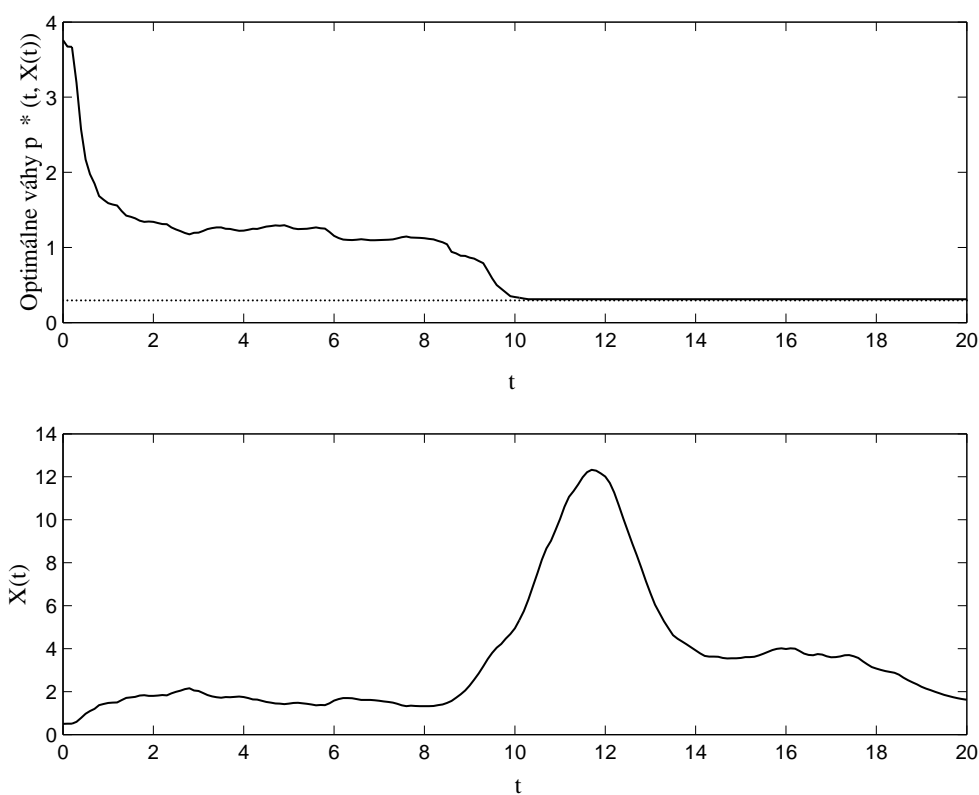
Obrázok 4.1 znázorňuje výsledok numerickej aproximácie hodnotovej funkcie pomocou popísaného algoritmu pre zvolené parametre. Na jednotlivých častiach obrázku vidíme priebeh hodnotovej funkcie $V(t, x)$ pre $T - t = 10$ a 20 rokov do odchodu do dôchodku. Z grafov si môžeme všimnúť, že pre časy pred odchodom do dôchodku, $t < T$, má hodnotová funkcia $V(t, x)$ konečnú limitu pre $x \rightarrow 0^+$, na rozdiel od času odchodu do dôchodku, kedy pre hodnotovú funkciu platí $V(T, x) = u(x) \rightarrow -\infty$ pre $x \rightarrow 0^+$. Toto sa deje kvôli príspevkom. Ak je $X(t) = 0$, tak vďaka budúcim príspevkom budeme mať $X(T) > 0$ a konečná limita $V(t, x)$ pre $x \rightarrow 0^+$ indikuje, že $X(T)$ nie je príliš blízko k 0.

Závislosť zodpovedajúcich optimálnych stratégií $p^*(t, X(t))$ pre $T - t = 0, 10$ a 20 rokov do odchodu do dôchodku od pomeru majetku a platu $X(t)$ pre danú sadu parametrov je vykreslená na Obrázku 4.2. Môžeme si všimnúť, že pre $x \rightarrow 0^+$, platí $p^*(t, x) \rightarrow \infty$ a pre $x \rightarrow \infty$ máme $p^*(t, x) \rightarrow \frac{\sigma_{Y1}}{\sigma_1}$.

Obr. 4.1: Hodnotová funkcia $V(t, x)$ pre $T - t = 10$ a 20 rokov do odchodu do dôchodku.Obr. 4.2: Závislosť optimálnych váh $p^*(t, X(t))$ v čase $t = 0$ (plná čiara), $t = 10$ (čiarkovaná čiara), $t = 20$ (bodkovaná čiara) od pomeru majetku a platu $X(t)$.

Časový priebeh optimálnej stratégie $p^*(t, X(t))$ je znázornený na Obrázku 4.3. Optimálne váhy sa správali veľmi podobne ako stochastické stratégie v prípade úplného trhu (pozri Obr. 3.2, simulácie A a B). Rozdiel je v tom, že za prítomnosti nezaistiteľného rizika v plate, sa zdá, že optimálna stratégia sporiteľ'a je pre rovnaké parametre konzervatívnejšia. Optimálne váhy dosahujú v priemere menšie hodnoty ako v prípade úplného trhu. V dolnej časti Obrázka 4.3 je znázornený časový priebeh pomeru majetku a platu $X(t)$. Premenná $X(t)$ sa riadi SDR (3.4) s počiatočnou podmienkou $X(0) = 0,5$.

Opäť sa potvrdil postupný pokles investovania do rizikového aktíva s približujúcim sa časom odchodu do dôchodku.



Obr. 4.3: Hore: Optimálne váhy $p^*(t, X(t))$. Dole: Časový priebeh pomeru majetku a platu $X(t)$.

4.2 Strata pri nesprávne použitej stratégii

Podobne ako v III. prípade aj pre IV. prípad porovnáme stratégie, ktoré sú výsledkom optimalizácie za predpokladu stochastického vývoja platov, so stratégiami, ktoré sú optimálne

v prípade deterministických platov.

Uvažujme dve stratégie sporiteľa na dôchodok

1. S_σ je optimálna stratégia sporiteľa, ktorý predpokladá, že mzdy sa vyvíjajú stochasticky ($\sigma_{Y_0} \neq 0, \sigma_{Y_1} \neq 0$),
2. S_0 je optimálna stratégia sporiteľa, ktorý predpokladá, že mzdy nie sú stochastické, že σ_{Y_0} aj σ_{Y_1} sú nulové, ale v skutočnosti $\sigma_{Y_0} \neq 0, \sigma_{Y_1} \neq 0$.

Ak sporiteľ v prípade stochasticky sa vyvíjajúcich platov očakáva, že platy sú deterministické a použije nesprávnu stratégiu S_0 , zrejme platí

$$E_{S_0}[u(X(T))] \leq E_{S_\sigma}[u(X(T))].$$

Stratu spôsobenú zvolením nesprávnej stratégie, vyjadríme opäť pomocou určitosného ekvivalentu. Označme

$$u(c_{S_0}) = E_{S_0}[u(X(T))] \quad \text{a} \quad u(c_{S_\sigma}) = E_{S_\sigma}[u(X(T))].$$

Určitosné ekvivalenty c_{S_0}, c_{S_σ} nevieme vyjadriť explicitným vzorcom ako v III. prípade, ale vieme ich numericky počítať a vyjadriť percentuálnu stratu sporiteľa podľa vzťahu (3.16).

4.3 Strata pri nesprávne použitej stratégii pre konkrétne parametre

Pre zvolené parametre (4.7) je strata sporiteľa rovná

$$\frac{c_{S_\sigma}}{c_{S_0}} - 1 = 1,8692 \times 10^{-2} = 1,8692\%.$$

Pre takto nastavené parametre dochádza v prípade nesprávneho predpokladu, že platy sú deterministické, k 1,8692%–nej strate oproti prípadu, kedy bola použitá správna stratégia očakávajúca stochastický vývoj platov.

Jednotlivé parametre sme postupne menili a sledovali, aký majú vplyv na veľkosť straty, ktorú utrpí sporiteľ. V tabuľkách uvádzame prehľad výsledkov.

V Tabuľke 4.1 môžeme vidieť, že v prítomnosti nezaistiteľného rizika v plate, rovnako ako v prípade, že nezaistiteľné riziko je nulové (Tabuľka 3.1), s rastúcou averziou sporiteľa

voči riziku (s rastúcou hodnotou parametra $1 - \gamma$), klesá strata vyplývajúca z použitia nesprávnej stratégie. Rizikovo averznejšiemu sporiteľovi spôsobí použitie nesprávnej stratégie menšiu stratu. Naopak sporitelia, ktorí obľubujú riziko, zaznamenajú výraznejšiu stratu. Pre koeficient averzie voči riziku rovný 3 je strata najväčšia (3,6721%).

Parametre					Strata
$1 - \gamma$	σ_1	ξ_1	σ_{Y0}	σ_{Y1}	$\frac{c_{S\sigma} - 1}{c_{S_0}} (\%)$
9	0,10	1	0,05	0,05	1,2017%
6	0,10	1	0,05	0,05	1,8692%
3	0,10	1	0,05	0,05	3,6721%

Tabuľka 4.1: Závislosť straty od averzie sporiteľa voči riziku (od $1 - \gamma$)

Tabuľka 4.2 ukazuje, že s rastúcou koreláciou medzi platom a výnosom rizikového aktíva (s rastúcou hodnotou parametra σ_{Y1}), rastie strata spôsobená nesprávnym predpokladom, že mzdy sú deterministické.

Parametre					Strata
$1 - \gamma$	σ_1	ξ_1	σ_{Y0}	σ_{Y1}	$\frac{c_{S\sigma} - 1}{c_{S_0}} (\%)$
6	0,10	1	0,05	0,01	0,1364%
6	0,10	1	0,05	0,05	1,8692%
6	0,10	1	0,05	0,09	5,7961%

Tabuľka 4.2: Závislosť straty od parametra σ_{Y1}

V Tabuľke 4.3 si môžeme všimnúť, že čím väčšie nezaistiteľné riziko je prítomné v plati, tým väčšia je strata, ktorú zaznamená sporiteľ vychádzajúci z nesprávneho predpokladu, že mzdy sú deterministické.

Parametre					Strata
$1 - \gamma$	σ_1	ξ_1	σ_{Y_0}	σ_{Y_1}	$\frac{c_{S_\sigma}}{c_{S_0}} - 1$ (%)
6	0,10	1	0,01	0,05	1,0817%
6	0,10	1	0,05	0,05	1,8692%
6	0,10	1	0,09	0,05	6,9315%

Tabuľka 4.3: Závislosť straty od parametra σ_{Y_0}

Parametre σ_1 a ξ_1 spolu súvisia, preto ich vplyv analyzujeme spolu. V Tabuľke 4.4 môžeme vidieť, že s rastúcou volatilitou rizikového aktíva σ_1 , t.j. s poklesom trhovej ceny rizika ξ_1 , klesá strata vyplývajúca z použitia nesprávnej stratégie.

Parametre					Strata
$1 - \gamma$	σ_1	ξ_1	σ_{Y_0}	σ_{Y_1}	$\frac{c_{S_\sigma}}{c_{S_0}} - 1$ (%)
6	0,10	1	0,05	0,05	1,8692%
6	0,17	0,6	0,05	0,05	0,5768%
6	0,20	0,5	0,05	0,05	0,2913%

Tabuľka 4.4: Závislosť straty od parametrov σ_1 a ξ_1

Na základe výpočtov a výsledkov, ktoré sú zhrnuté v tabuľkách, môžeme skonštatovať, že sa potvrdili naše očakávania a sporiteľ utrpí určitú stratu, ak volí optimálnu stratégiu na základe predpokladu, že mzdy sú deterministické. Môžeme teda povedať, že stratégie, ktoré zohľadňujú stochastický vývoj platov sú o niečo lepšie.

Záver

V práci sme sa zaoberali príspevkovo definovanými dôchodkovými systémami. Touto problematikou sa zaoberali aj autori v článkoch [8] a [12]. Náš prístup sa líši v tom, že sme predpokladali stochastický vývoj plátov namiesto deterministického.

Na základe článku [2] sme vytvorili zjednodušený model dôchodkového sporenia. Ako sme už uviedli, v modeli sme predpokladali stochastický vývoj platu sporiteľ'a na dôchodok. Sporiteľ' odvádza časť majetku (príspevok) na svoj účet. Uvažovali sme dva spôsoby príspevkov - jednorazové a spojité. Nasporený majetok môže sporiteľ' podľa svojho rozhodnutia investovať do rizikového a bezrizikového aktíva. Rozhodnutie sporiteľ'a akú časť investuje do rizikového aktíva nazveme jeho stratégiou. Naším cieľom bolo nájsť stratégiu sporiteľ'a, ktorá maximalizuje jeho úžitok v čase odchodu do dôchodku. Používali sme CRRA funkciu užitočnosti. Problém hľadania optimálnej stratégie sporiteľ'a sme sformulovali ako úlohu stochastického optimálneho riadenia - maximalizuje sa očakávaná užitočnosť z nasporenej sumy v okamihu odchodu do dôchodku. Riešenie tejto úlohy sme rozdelili na viaceré prípady podľa spôsobu príspevkov a podľa toho, či je trh úplný alebo neúplný, teda či je v plate prítomné nezaistiteľné riziko. V jednotlivých prípadoch sme hľadali optimálne stratégie.

V prípade jednorazových príspevkov bez ohľadu na to, či bol trh úplný alebo neúplný, optimálna stratégia zahŕňala rovnaké váhy konštantné v čase. Prípady spojitých príspevkov lepšie zodpovedá realite, preto sme sa mu venovali podrobnejšie. Vďaka tomu, že v prípade úplného trhu si možno požičiavať oproti budúcim príspevkom, existuje analytické riešenie spomínanej úlohy stochastického optimálneho riadenia. V prípade neúplného trhu si sporiteľ' nemôže požičiavať oproti budúcim príspevkom, preto nevieme nájsť analytické riešenie takým spôsobom ako v prípade úplného trhu. Navrhli a implementovali sme numerickú schému, pomocou ktorej sme aproximovali riešenie. Výsledky pre jednotlivé prípady sme graficky znázornili a interpretovali. Na základe simulácií sme zistili, že spoločnou črtou optimálnych stratégií je postupný pokles investovania do rizikového aktíva s približujúcim sa časom odchodu do dôchodku. Tento fakt je v súlade s intuíciou, pretože s pribúdajúcim časom sa hromadia príspevky, zvyšuje sa nasporená suma a tá je citlivejšia na výnos rizikového

aktíva.

Nakoniec sme porovnali náš prístup predpokladajúci stochastické mzdy s doterajším deterministickým prístupom. Sledovali sme veľkosť straty, ktorú utrpí sporiteľ, ak v prípade stochastického vývoja platov predpokladá, že platy sú deterministické a použije nesprávnu stratégiu. Stratu sme vyjadrili pomocou určitosného ekvivalentu v percentách. Najzaujímavejšie výsledky sú zhrnuté v prehľadných tabuľkách. Výpočty potvrdili naše očakávania, že sporiteľ zaznamená určitú stratu. Veľkosť tejto straty závisí od jeho averzie k riziku a od ďalších parametrov modelu. V mnohých prípadoch strata dosahovala aj pár percent.

Model, s ktorým sme pracovali, by bolo možné v budúcnosti zovšeobecniť napríklad zavedením stochastického vývoja bezrizikovej úrokovej miery alebo by sme mohli rozšíriť portfólio rizikových aktív, do ktorých môže sporiteľ investovať.

Literatúra

- [1] BABUŠÍKOVÁ J. - SLODIČKA M. - WEISZ J. (2000): *Numerické metódy*, vysokoškolské skriptá, Univerzita Komenského v Bratislave.
- [2] BLAKE D. - CAIRNS A.J.G. - DOWD K. (2006): *Stochastic Lifestyling: Optimal Dynamic Asset Allocation for Defined Contribution Pension Plans*. Journal of Economic Dynamics and Control vol. 30, No. 5: pp. 843-877.
- [3] BODIE Z. - DETEMPLE J.B. - OTRUBA S. - WALTER S. (2003): *Optimal consumption-portfolio choices and retirement planning*. Journal of Economic Dynamics and Control vol 28, No.6: pp. 1115–1148.
- [4] BODIE Z. - MERTON R - SAMUELSON W.F. (1992): *Labor supply flexibility and portfolio choice in a life-cycle model*. Journal of Economic Dynamics and Control vol. 16, No. 3: pp. 427–449.
- [5] FLEMING W.H. - SONER M.H. (1993): *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Berlin: Springer. ISBN 0-387-26045-5.
- [6] GOLIAŠ P. (2003): *Pension Calculations for the PAYG and the Funded Pension System in Slovakia*. Academia Istropolitana Nova, Professional Programme in Applied Economics and Finance.
- [7] KILIANO VÁ S. (2008): *Stochastic Dynamic Optimization Model for Pension Planning*. Doctoral Thesis, Comenius University, 106 pp.
- [8] KILIANO VÁ S. - MELICHERČÍK I. - ŠEVČOVIČ D. (2006): *Dynamic Accumulation Model for the Second Pillar of the Slovak Pension System*. Finance a úvěr – Czech Journal of Economics and Finance, vol. 56, No. 11-12: pp. 506-521.

- [9] KORN R. (1997): *Optimal Portfolios: Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time*. Singapore: World Scientific Publishing Co. ISBN 981-02-3215-2.
- [10] MACOVÁ Z. - ŠEVČOVIČ D. (2010): *Weakly Nonlinear Analysis of the Hamilton-Jacobi-Bellman Equation Arising from Pension Savings Management*. International Journal of Numerical Analysis and Modeling vol. 7, No. 4: pp. 619-638.
- [11] MELICHERČÍK I. - OLŠAROVÁ L. - ÚRADNÍČEK V. (2005): *Kapitoly z finančnej matematiky*. Bratislava: EPOS. ISBN 80-8057-651-3.
- [12] MELICHERČÍK I. - ŠEVČOVIČ D. (2010): *Dynamic Stochastic Accumulation Model with Application to Pension Savings Management*. Yugoslav Journal of Operations Research vol. 20, No. 1: pp. 1-24.
- [13] MELICHERČÍK I. - UNGVARSKÝ C. (2004): *Pension Reform in Slovakia: Perspectives of the Fiscal Debt and Pension Level*. Finance a úvěr – Czech Journal of Economics and Finance, Vol. 54, No. 9-10: pp 391-404.
- [14] MIKULA K. - STEHLÍKOVÁ B. - ŠEVČOVIČ D. (2009): *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. Bratislava: Nakladateľstvo STU. ISBN 978-80-227-3014-3.
- [15] SAMUELSON P.A. (1969): *Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming*. The Review of Economics and Statistics vol. 51, No. 3: pp. 239–246.
- [16] <http://www.employment.gov.sk/dochodkovy-system.html>