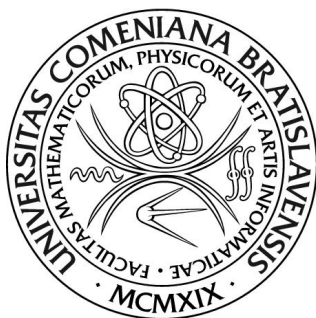


UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Ekológia jazera Peck

(DIPLOMOVÁ PRÁCA)

Bc. Michaela Matušková, 2012

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Ekológia jazera Peck

(DIPLOMOVÁ PRÁCA)

Vedúci diplomovej práce: Mgr. Richard Kollár, PhD.

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika

Bc. Michaela Matušková, 2012



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Michaela Matušková
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Ekológia jazera Peck

Cieľ: Jazero Peck v kanadskom Algonquin National Park ma počas biologického roka zaujímavé ekologické vlastnosti. V práci sa pokúsime na základe matematického modelu vysvetliť neúspech pri ničení nechcených rias, ktorý sa pozoroval v praxi. Charakter práce: modelovanie ekologického systému, dynamické systémy a parciálne diferenciálne rovnice, numerické riešenie rovníc Požadované schopnosti: záujem o matematické modelovanie a o pochopenie biologických procesov, práca s odbornou literatúrou v anglickom jazyku, schopnosť programovať v MATLABe.

Vedúci: Mgr. Richard Kollár, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Dátum zadania: 13.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s využitím teoretických vedomostí a s použitím uvedenej literatúry.

.....
Michaela Matušková

Pod'akovanie

Predovšetkým sa chcem poďakovať vedúcemu diplomovej práce Mgr. Richardovi Kollárovi, PhD. za cenné rady, pripomienky a usmernenie pri písaní záverečnej práce. Moje poďakovanie patrí tiež rodine, priateľovi a kamarátom za ich podporu počas písania tejto práce a počas celého štúdia.

Abstrakt

MATUŠKOVÁ, Michaela: Ekológia jazera Peck [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Richard Kollár, PhD. , Bratislava, 2012, 72 s.

Cieľom diplomovej práce je modelovanie ekosystému jazera Peck nachádzajúceho sa v kanadskom Algonquin National Park, ktoré má počas biologického roka zaujímavé ekologické vlastnosti. Na základe dostupnej publikácie vyberieme hlavné objekty ekosystému, ktorých správanie v čase opíšeme pomocou diferenciálnych rovníc a vhodných aproximácií, pričom zavedieme predpoklady na zjednodušenie modelovania. Pri hľadaní ekvilibríí vytvoríme redukovaný model, ktorého správanie sledujeme na numerických experimentoch v programe Matlab 7.0.1. Potrebné hodnoty koeficientov zisťujeme buď z dostupnej literatúry a článkov, alebo sa ich snažíme vhodne odhadnúť. Nepriaznivé ekologické vlastnosti a pokusy o ich zlepšenie prinášajú so sebou kritický stav, ktorého kľúčové mechanizmy sa pokúsime vysvetliť pomocou redukovaného modelu.

Kľúčové slová: matematické modelovanie, diferenciálne rovnice, diferenčné rovnice, limitná krivka, Michaelisova konštanta

Abstract

MATUŠKOVÁ, Michaela: The Ecology of the Peck Lake [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; supervisor: Mgr. Richard Kollár, PhD., Bratislava, 2012, 72 p.

The purpose of Master Thesis is modelling the ecosystem of the Peck Lake located in the Canadian Algonquin National Park that has interesting ecological properties during the biological year. On the basis of the available publication we choose the main objects of the ecosystem. We describe their behaviour in time using differential equations and appropriate approximations. Meanwhile we establish assumptions concerning the simplification of the modelling. In addition to searching for equilibria, we create a reduced model, whose behaviour we monitor by numerical experiments in Matlab 7.0.1. We source the required values of the coefficients from the available documentation or we try to estimate them properly. The adverse ecological properties and attempts to improve them bring the critical condition and we try to explain these key mechanisms using the reduced model.

Keywords: Mathematical modelling, Differential equations, Limit curve, Michaelis constant

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 9 |
| 1 Modelovanie | 11 |
| 1.1 Zachytávanie svetla | 11 |
| 1.1.1 Uzavretý vrchlík | 11 |
| 1.2 Fotosyntéza a fotosyntetická odozva | 15 |
| 1.2.1 Alometria | 17 |
| 1.3 Metodika tvorby diferenčných rovníc | 19 |
| 1.4 Počiatočné predpoklady | 19 |
| 1.5 Živiny | 20 |
| 1.6 Rastliny a živočíchy | 28 |
| 1.6.1 Zvieratá | 28 |
| 1.6.2 Ryby | 32 |
| 1.6.3 Rastliny | 34 |
| 1.7 Proces rozkladu | 38 |
| 1.8 Kyslík | 42 |
| 1.9 Zrhnutie predpokladov a modelu | 48 |
| 2 Analýza modelu | 50 |
| 2.1 Redukovaný model | 52 |
| 2.1.1 Jazero s nedostatkom živín | 53 |
| 2.1.2 Vplyv hnojenia na jazero s nedostatkom živín | 55 |
| 2.1.3 Jazero s dostatkom živín | 61 |

Úvod

Ekologické vlastnosti jazera sú významné faktory, na ktorých závisí kvalita života pod vodnou hladinou. Jazero Peck je jedným z mnohých jazier kanadského Algonquin National Park. Zaujímavé je tým, že je príkladom jazera, ktoré má vďaka kombinácií viacerých zlých ekologických vlastností veľký nedostatok živín vo vode. Množstvo živín obmedzuje rast živočíchov a organizmov v celom jazere, preto je prirodzená produkcia pstruha v jazerách Algonquin National Park len 300 gramov živej váhy pstruha na hektár jazera každý rok. V južnom Ontáriu, kde sú ekologické vlastnosti jazier protikladom ekologických vlastností jazier v Algonquin National Park, je často prirodzená produkcia pstruha 20-krát taká veľká. Na zlepšenie produkcie pstruha bolo na jazero Peck aplikované riešenie v podobe externého pridania živín do jazera. Z dôvodu reakcií a procesov v potravinovom reťazci došlo k premnoženiu rastlín, čo vyvrcholilo zadusením živých organizmov ako následok predčasného minútia kyslíka v jazere. Preto je cieľom práce modelovanie ekosystému jazera Peck.

V prvej kapitole sa oboznámime so základnými procesmi, ktoré sú životne dôležitou súčasťou kolobehu v prírode. A to nielen pod vodnou hladinou, ale aj na súši. Priblížime si fotosyntézu a jej účinok, dôležitosť listov zelených rastlín a odvodíme vzťah medzi slnečným žiarením a fotosyntézou. Zavedieme dôležité predpoklady, ktoré zjednodušia modelovanie ekosystému jazera Peck. Následne na základe potravinového reťazca a ďalších životne dôležitých činiteľov vo vode určíme hlavné objekty modelovania. S pomocou dostupných publikácií a článkov, ktoré sa zaoberajú podobným druhom modelovania,

zostavíme model opisujúci správanie pod vodnou hladinou a interpretujeme význam jednotlivých premenných.

V druhej kapitole analyzujeme vytvorený model a pokúsime sa nájsť jeho ekvilibriá. Vytvoríme redukovaný model, ktorý následne použijeme na skúmanie kľúčových mechanizmov jazera v kritickom stave. Pomocou numerických experimentov priblížime správanie dynamického systému. Zameriame sa na jazero s nedostatkom živín s cieľom vysvetliť procesy a reakcie prebiehajúce po externom pridaní živín do vody a závislosť na ich množstve. Experimenty sa pokúšame čo najviac priblížiť realite. Načrtneme, ako by sa dala situácia v jazere Peck vylepšiť.

Kapitola 1

Modelovanie

1.1 Zachytávanie svetla

V tejto časti budeme vychádzať informácií spracovaných v [1]. Zachytenie svetla je základnou podmienkou pre priebeh fotosyntézy, pri ktorej rastliny získavajú energiu potrebnú nielen na svoj rast, ale aj ako hnaciu silu ostatných procesov. Rastliny môžu rásť izolovane, v súvislých radoch alebo môžu tvoriť súvislé „canopy“, ktoré budeme ďalej nazývať vrchlíkom. Vrchlík je nadzemná časť rastlinného spoločenstva tvorená korunami rastlín. Je zďaleka jednoduchšie modelovať rastliny žijúce v takzvaných uzavretých vrchlíkoch, preto to bude zároveň jeden z predpokladov pre náš model.

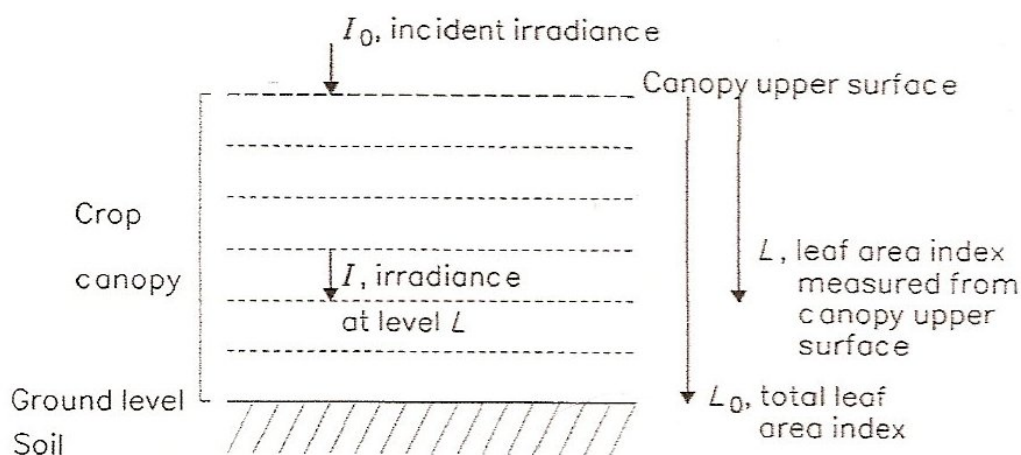
1.1.1 Uzavretý vrchlík

Vrchlík je uzavretý, ak pri pohľade na rastliny zvrchu je pôda viditeľná náhodne, väčšinou ako malé záplaty a rastliny nemôžu byť jednotlivo významné. Kľúčovou premennou je index listovej plochy, ktorý je často skrácovaný ako LAI a označovaný symbolom L , $[L] = (m^2 \text{ listu}) / (m^2 \text{ povrchu pôdy})^{-1}$. L je celková listová plocha situovaná nad jedným metrom štvorcovým pôdy.

Index listovej plochy L je nutné odlišovať od projektovaného indexu listovej plochy L_p . L_p je väčšinou definovaný projektovaním plochy každého listu na horizontálnu rovinu. Ak rovina každého listu zvierá s horizontálnou

rovinou uhol α , potom:

$$L_p = L \cos \alpha \quad (1.1)$$



Obr. 1.1: Grafické znázornenie dopadajúceho ožiarenia na vrchlík. Zdroj: [1].

Obrázok 1.2 zobrazuje hustotu toku svetla I_0 dopadajúceho na horný povrch vrchlíka v horizontálnej rovine; $[I_0] = Jm^{-2}s^{-1}$. Celková LAI je L_0 , ale premenná LAI môže byť definovaná nasledovne: L je merané zostupne od horného povrchu vrchlíka a ako zostupujeme nižšie, hodnota L sa zvyšuje. Teda $0 \leq L \leq L_0$. Na horizontálnej rovine definovanej indexom listovej plochy je I klesajúca intenzita žiarenia. I závisí na L , teda môžeme písať $I(L)$, aby sme zaznačili túto závislosť. Na opis tejto závislosti autori v [1] použili negatívnu exponenciálnu funkciu:

$$I = I_0 e^{-kL}, \quad (1.2)$$

kde k je koeficient zaniknutia; $[k] = (m^2 \text{ povrchu pôdy})(m^2 \text{ povrchu listu})^{-1}$. Podľa tejto rovnice pre svetlo dopadajúce na pôdu, I_{gnd} , a pre svetlo zachy-

tené vrchlíkom, I_{int} platí:

$$\begin{aligned} I_{gnd} &= I_0 e^{-kL_0} \\ I_{int} &= I_0 (1 - e^{-kL}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Výpočet fotosyntézy vyžaduje svetlo dopadajúce na povrch listu, I_{leaf} . Svetlo dopadajúce na povrch listu nie je to isté ako svetlo dopadajúce na horizontálnu rovinu, ktoré je opísané rovnicou (1.2). I_{leaf} je aproximované:

$$I_{leaf}(L) = \frac{k}{1-m} I = \frac{kI_0}{1-m} e^{-kL}, \quad (1.4)$$

kde m je koeficient prenosu listu, zvyčajne v rozmedzí od 0.1 do 0.2. Ak $k = 1$ a $m = 0.1$, potom svetlo dopadajúce na listy na vrchu vrchlíka je $1.1I_0$, čo je neprípustné. U nameraných hodnôt k a m funguje rovnica uspokojivo, aj keď mnoho pracovníkov preferuje používať jednoduchšiu rovnicu:

$$I_{leaf}(L) = kI_0 e^{-kL}. \quad (1.5)$$

Priame a rozptýlené žiarenie

Môže byť dôležité rozlišovať medzi rozptýleným svetlom dopadajúcim na list a priamym slnečným svetlom dopadajúcim na povrch listu:

$$I_{leaf}(total) = I_{leaf}(diffuse) + I_{leaf}(direct) \quad (1.6)$$

Dôvodom tohto rozlíšenia je, že fotosyntetická odozva na ožiarenie je nelineárna, čomu sa bližšie budeme venovať v kapitole 1.2. Predikcia fotosyntézy vrchlíka, ktorá rozlišuje medzi slnečnými listami, t.j. osvetlenými listami priamym slnečným svetlom a rozptýleným žiarením z oblohy, a medzi zatienenými listami, t.j. osvetlenými len rozptýleným žiarením z oblohy, môže byť bližšie pozorovaným hodnotám ako v prípade, že je tento rozdiel ignorovaný.

Rozptýlené svetlo môže pochádzať z oblohy alebo z odrážaného a prenášaného svetla. Priame svetlo závisí od toho, či je slnko vonku a či nie sú listy zatienené. Priame svetlo produkuje teda odrážané a prenášané svetlo. Takéto výpočty môžu byť pracné a možné sú mnohé úrovne obtiažnosti. Jednoduchý aproximačný prístup je nasledovný. Listy sú rozdelené na dve populácie:

- L_{sha} - zatienené listy osvetlené len rozptýleným svetlom
- L_{sun} - listy osvetlené rozptýleným a priamym slnečným svetlom

V zmysle obrázka 1.2, prírastok listovej plochy ΔL v hĺbke L je ďalej rozdelený na slnečné, ΔL_{sun} , a zatienené časti, ΔL_{sha} :

$$\begin{aligned}\Delta L &= \Delta L_{sun} + \Delta L_{sha} \\ \Delta L_{sun} &= \Delta L e^{-kl} \\ \Delta L_{sha} &= \Delta L(1 - e^{-kL})\end{aligned}\tag{1.7}$$

Tento prístup predpokladá zánik koeficientu k pre slnečné svetlo a náhodné rozloženie listu. Členy LAI, ktorými sú zatienené listy a slnečné listy, majú po integrácií nasledovný tvar:

$$\begin{aligned}L_{sun} &= \frac{1}{k}(1 - e^{-kL}) \\ L_{sha} &= L - \frac{1}{k}(1 - e^{-kL})\end{aligned}\tag{1.8}$$

Ďalej predpokladajme, že ožiarenie horizontálnych receptorov na povrchu vrchlíka na obrázku 1.2 zahŕňa dva členy: difúzne, rozptýlené svetlo (*dif*) a slnečné svetlo (*sun*). Teda:

$$\begin{aligned}I_0 &= I_{dif0} + I_{sun0} \\ I_{sun0} &= f_{sun} I_0 \\ I_{dif0} &= (1 - f_{sun}) I_0\end{aligned}\tag{1.9}$$

Člen f_{sun} predstavuje podiel slnečného žiarenia a hodnota f_{sun} sa pohybuje medzi 0 a 1. Tento člen umožní ohodnotenie dôsledkov fotosyntézy.

Fotosyntetické príspevky sú počítané oddelene pre dve populácie listov. Podľa rovnice (1.4), svetlo dopadajúce na slnečné listy a svetlo dopadajúce na zatienené listy v hĺbke L uvažovaného vrchlíka získame:

$$\begin{aligned}I_{leaf}(sun) &= \frac{k}{1 - m}(I_{sun0} + I_{dif0}e^{-kL}) \\ I_{leaf}(sha) &= \frac{k}{1 - m}e^{-kL}I_{dif0}\end{aligned}\tag{1.10}$$

Tento prístup robí mnoho aproximácií, napr. listy sú náhodnej orientácie, meniaci sa azimut slnka je ignorovaný.

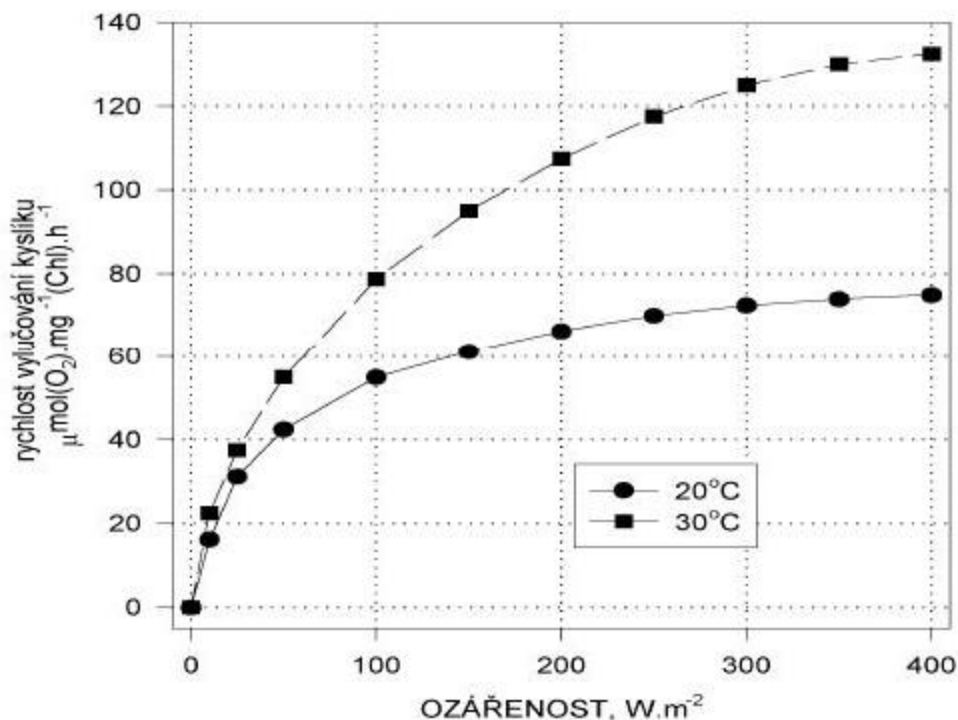
1.2 Fotosyntéza a fotosyntetická odozva

Fotosyntéza je kľúčovým procesom v ekológii. Je to biochemický proces zachytávania slnečného žiarenia, pri ktorom vzniká kyslík ako vedľajší produkt pri fixácii oxidu uhličitého. Zdrojom informácií v tejto podkapitole sú [2], [3], [4] a [5].

Žiarenie je hlavný vonkajší faktor riadiaci rýchlosť fotosyntézy. Množstvo žiarenia kolísava v denných aj v ročných cykloch a závisí aj od umiestnenia listov v priestore. Dopadajúce množstvo žiarenia na jednotku listovej plochy za jednotku času meriame ako hustotu toku fotosynteticky aktívnych fotónov ($\text{mol m}^{-2}\text{s}^{-1}$) alebo ako ožiarenosť v jednotkách toku energie (W m^{-2}). Maximálne hodnoty sú dosahované za jasného letného dňa a to 400 až 500 W m^{-2} , či 2000 až 2200 $\mu\text{mol m}^{-2}\text{s}^{-1}$. V [5] je maximálna hodnota na povrchu vrchlika udávaná dokonca až vo výške 800 W m^{-2} . Rýchlosť čistej fotosyntézy meriame najčastejšie počtom molov uvoľneného kyslíka jednotkou listovej plochy za jednotku času alebo počtom molov prijatého oxidu uhličitého jednotkou listovej plochy za jednotku času. Za obvyklých podmienok je množstvo uvoľneného kyslíka a množstvo prijatého oxidu uhličitého približne rovnaké. Rozlišujeme medzi čistou a hrubou fotosyntézou. Hrubá fotosyntéza je sa skladá z čistej fotosyntézy a dýchania. Čistá fotosyntéza dýchanie nezahrňuje.

Vzťah medzi ožiarením listu a rýchlosťou čistej fotosyntézy nie je lineárny, ale má tvar limitnej krivky charakteristického tvaru a býva označovaná ako svetelná krivka fotosyntézy. Jej počiatok na abscise leží na takej hodnote ožiarenosti, pri ktorej je rýchlosť hrubej fotosyntézy dostatočná na kompenzáciu respirácie, ktorá prebieha súčasne s fotosyntézou. Tento bod sa nazýva kompenzačná ožiarenosť alebo svetelný kompenzačný bod. Hodnota tohoto bodu je závislá na rýchlosti respirácie, a taktiež na štruktúrnych charakte-

ristikách listu, čo môže byť zas závislé na druhu rastliny a na podmienkach, v ktorých sa nachádza. Najčastejšie sa však hodnota kompenzačného bodu pohybuje v rozmedzí 1 až 5 Wm^{-2} (= približne 5 až $20 \mu\text{mol m}^{-2}\text{s}^{-1}$).



Obr. 1.2: Grafické znázornenie vzťahu medzi ožiarením listu a čistou odozvou fotosyntézy. Zdroj: [3].

Pri zvyšovaní ožiarenosti nad kompenzačnú úroveň rýchlosť fotosyntézy stúpa spočiatku lineárne. Pri nízkych hodnotách ožiarenosti je rýchlosť fotosyntézy obmedzená rýchlosťou fotochemických reakcií a stúpa priamoúmerne množstvu zachyteného a pohlteneho žiarenia. Rýchlosť fotochemických reakcií by mohla aj ďalej stúpať lineárne, avšak nestíha tak rýchlo spracovávať ďalšie reakcie fotosyntézy. S opätovným zvyšovaním ožiarenosti sa preto stúpanie rýchlosti fotosyntézy spomaľuje a ďalej už nerastie, pretože bolo dosiahnuté

nasýtenie fotosyntézy ožiarením. Hodnota ožiarenosti, pri ktorej došlo k nasýteniu, sa nazýva saturačná ožiarenosť. Aj táto hodnota závisí od štruktúrnych charakteristík listov, napr. tenké listy majú túto hodnotu vždy nižšiu. Všeobecne platí, že listy s nízkou hodnotou saturačnej ožiarenosti majú nízku rýchlosť fotosyntézy pri nasýtenom žiarení. Vzťah medzi rýchlosťou fotosyntézy, alebo fotosyntetickou odozvou a veľkosťou ožiarenia je v [3] vyjadrený ako:

$$P = \frac{P_{max}I}{I + K_S}, \quad (1.11)$$

kde P je rýchlosť fotosyntézy, P_{max} je najväčšia možná rýchlosť fotosyntézy pri vysokej ožiarenosti, I je ožiarenosť a K_S je konštanta obdobná Michaelisovej konštante polovičnej saturácie a hovorí, že K_S je taká hodnota ožiarenosti, pri ktorej bude rýchlosť fotosyntézy rovná $\frac{P_{max}}{2}$.

1.2.1 Alometria

Alometria, ako je uvedené v [1], znamená rast časti tela W_1 za inej proporcionálnej rýchlosti, ako je rýchlosť rastu celého tela W , pričom W je hmotnosť celého tela a W_1 je hmotnosť určitej časti tela. Alometrický rast masy môže byť vyjadrený:

$$W_1 = aW^q, \quad (1.12)$$

- a - normalizačná konštanta; $[a] = \text{masa}^{(1-q)}$.
- q - bezrozmerný alometrický parameter.

Zlogaritmovaním lineárnej rovnice dostaneme:

$$\ln W_1 = \ln a + q \ln W$$

a zderivovaním podľa času:

$$\frac{1}{W} \frac{dW_1}{dt} = q \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}.$$

Ak $q \neq 1$, relatívna veľkosť $\frac{W_1}{W}$ sa mení s rastom organizmu.

Na základe alometrie môžeme odvodiť, aký je vzťah medzi hmotnosťou rastlín a listovou plochou, ktorá bude zohrávať dôležitú úlohu pri fotosyntéze. Označme:

- S_{leaf} - listovú plochu; $[S_{leaf}] = m^2$,
- P - hmotnosť suchej masy rastlín; $[P] = kg$,
- V_{leaf} - objem listu; $[V_{leaf}] = m^3$,
- W_{leaf} - hmotnosť listku; $[W_{leaf}] = kg$,
- ρ - hustota listu; $[\rho] = kg\ m^{-3}$.

Potom v zmysle rovnice (1.12):

$$W_{leaf} = aP^q. \quad (1.13)$$

Predpokladajme, že všetky listy majú rovnaký tvar, ktorým je tenký kváder s hrúbkou h , šírkou a dĺžkou d . Jednotkou je meter. Potom použitím triviálnych matematických vzorcov pre objem a povrch kvádra a hustotu môžeme napísať:

$$W_{leaf} = \rho S_{leaf} h$$

a dosadením do alometrického vzťahu (1.13) vieme vyjadriť povrch listovej plochy vzhľadom na hmotnosť rastlín v tvare:

$$S_{leaf} = \frac{a}{\rho h} P^q, \quad (1.14)$$

- a - normalizačná konštanta v čase t ; $[a] = kg^{(1-q)}m^{-2}$,
- h - typická hrúbka listu v čase t ; $[h] = m$,
- ρ - hustota listu v čase t ; $[\rho] = kg\ m^{-3}$,
- q - bezrozmerný alometrický parameter.

1.3 Metodika tvorby diferenčných rovníc

Uvažujme populáciu s prekrývajúcimi sa generáciami, vychádzajúc z teórie v [6]. Populáciu sledujeme nepretržite očakávajúc, že jej veľkosť sa bude meniť v čase takmer nepretržite. Preto predpoklad, že veľkosť populácie $x(t)$ sa mení spojito, nie je veľkým skreslením. Ak počet potomkov jedinca počas časového intervalu dĺžky Δt označíme $r\Delta t$ a veľkosť populácie v čase t $x(t)$ môžeme napísať:

$$\begin{aligned}x(t + \Delta t) &= x(t) + r\Delta t x(t) \\x(t + \Delta t) - x(t) &= rx(t)\Delta t,\end{aligned}\tag{1.15}$$

alebo:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = rx(t).\tag{1.16}$$

Pre $\Delta t \rightarrow 0$ dostávame diferenciálnu rovnicu:

$$\dot{x}(t) = rx(t).\tag{1.17}$$

Pri modelovaní ekosystému jazera Peck budeme sledovať zmeny za jeden deň. Budeme teda predpokladať, že:

$$\Delta t = 1 \text{ den}\tag{1.18}$$

Ak:

$$\Delta t = 1 \text{ deň}\tag{1.19}$$

môžeme napísať:

$$x(t + 1) - x(t) = rx(t),\tag{1.20}$$

čo je diferenčná rovnica.

1.4 Počiatočné predpoklady

Počas leta sa jazero Peck skladá z dvoch jazier, a to zo studeného jazera ležiaceho v dolnej časti jazera Peck a z teplého jazera nachádzajúceho sa

nad ním. Toto delenie má obrovský vplyv na príjem kyslíka, pretože teplota ovplyvňuje množstvo prijímaného kyslíka z atmosféry. Ďalej má vplyv na proces rozkladu, ktorý je prebieha rýchlejšie v teplej vode a na všetky živé organizmy. Pre zjednodušenie modelovania tento fakt zanedbáme a budeme predpokladať, že voda v jazere je rovnakej teploty. Tento predpoklad možno interpretovať aj tak, že model popisuje najmä správanie sa dolného, studeného jazera. Keďže v našich numerických experimentoch sa zameriavame najmä na vývoj rastlín, živín a kyslíka v jazere a vplyv rýb a menších živočíchov z modelu vynechávame, je predpoklad homogénnej teploty na popis správania dolného jazera oprávnený. Ďalším predpokladom pred začiatkom modelovania je rovnomerné rozloženie živín, rastlín, zvierat a kyslíka v jazere. Základné informácie používané pri tvorbe modelu sú spracované na základe informácií o jazere Peck v [7].

1.5 Živiny

Zelené rastliny potrebujú okrem oxidu uhličitého, z ktorého si vyrábajú svoju vlastnú potravu, aj iné látky: dusík, fosfor, draslík a vápnik, ktoré budeme nazývať živiny. Dusík sa dostáva do vody zo vzduchu a ostatné živiny prichádzajú do vody z horniny povodia. Ak sú horniny bohaté na živiny a rozkladajú sa ľahko, pričom uvoľňujú živiny do pôdy a nakoniec do jazera, očakáva sa zvýšený rast rastlín, a teda malé zvieratá a ryby budú prekvitať a podporovať dobrú produkciu väčších rýb ako napríklad pstruh. Algonquin park je však opačným prípadom. Horniny sú nielen chudobné na živiny, ale aj extrémne tvrdé, a navyše väčšina jazier v tomto parku má malé povodie ako napríklad jazero Peck. Jazero je preto chudobné na živiny, čo obmedzuje rast rastlín, rast malých živočíchov a rýb a populáciu lovných rýb. Na porovnanie, prirodzená ročná produkcia pstruha v týchto jazeroch môže byť len 300 gramov pstruha na jeden hektár jazera, pričom jazera južného Ontaria, ležiace na mäkšej a na živiny bohatšej hornine, často produkujú až 20-krát toľko. Z tohto dôvodu bolo vyskúšané hnojenie vody pridaním živín ako du-

sík, draslík a fosfor, čo spôsobilo síce očakávané zvýšenie rastu rastlín, ale tým aj zvýšenie množstva mŕtvych rastlín a živočíchov, teda zvýšenie hnitia. Vzhľadom na to, že hnutie kladie väčšie nároky na kyslík, výsledkom môže byť smrť pstruhov zadusením.

Časovú zmenu hmotnosti živín v jazere v čase t môžeme napísať v tvare:

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = E(t) + f(C_N) - K_0 \frac{C_N}{C_N + L_0} P + K_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \quad (1.21)$$

- N - hmotnosť živín nachádzajúcich sa vo vode v kilogramoch v čase t ; $[N] = kg$.
- $E(t)$ - hmotnosť živín v kilogramoch v čase t , ktoré sú do vody pridané externe za jeden deň. Pretože živiny sú externe pridávané do vody len raz ročne, funkcia $E(t)$ bude s výnimkou jedného dňa nadobúdať počas celého roka nulovú hodnotu; $[E(t)] = (kg \text{ živín})(\text{deň})^{-1}$.
- $f(C_N)$ - priemerná hmotnosť živín v čase t prenikajúcich do vody cez dno jazera za jeden deň. V prípade, že živiny nie sú spotrebované z dôvodu neprítomnosti rastlín, množstvo živín v jazere stúpa, až kým nedosiahne určitú nasýtenosť. Táto nasýtenosť súvisí s koncentráciou živín v pôde. Naopak, ak sú živiny rýchlo spotrebované a v jazere je malé množstvo živín, ich prienik do jazera je rýchly a so zvyšujúcim sa množstvom živín bude veľkosť prieniku klesať. Najjednoduchšiou aproximáciou opisujúcou takéto správanie je kvadratická funkcia:

$$f(C_N) = c_0 - c_1 C_N^2, \quad (1.22)$$

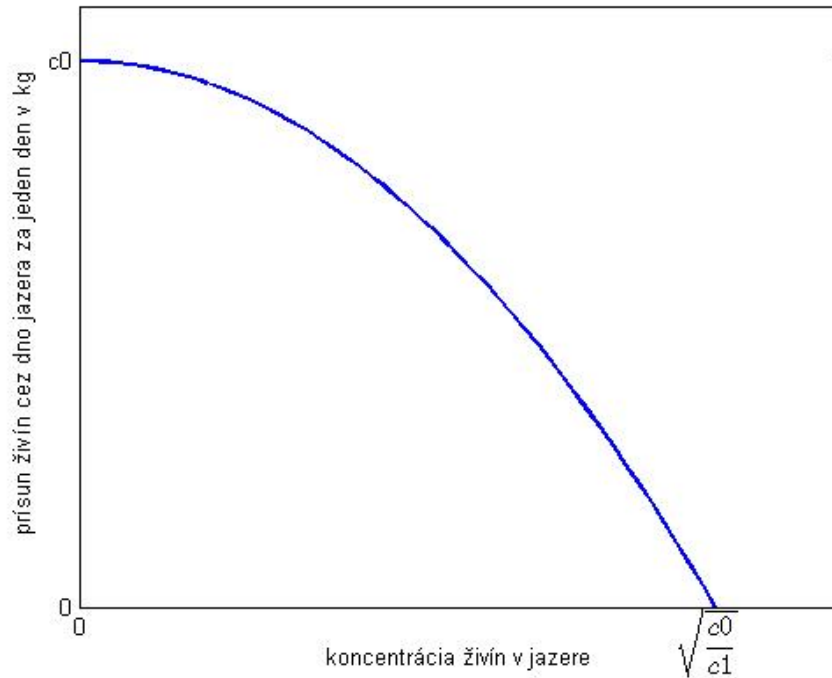
ktorej graf je znázornený na obrázku 1.3.

Ak vo vode nie sú žiadne živiny, potom:

$$f(C_N) = c_0.$$

Ak je prienik živín do jazera cez dno nulový, potom:

$$0 = c_0 - c_1 C_N^2 \iff C_{N_{full}} = C_N = \sqrt{\frac{c_0}{c_1}}, \quad (1.23)$$



Obr. 1.3: Grafické znázornenie prieniku živín do jazera

kde $C_{N_{full}}$ predstavuje nasýtenú koncentráciu živín v jazere. Táto situácia nastane vtedy, keď sa koncentrácia živín v pôde rovná koncentrácií živín v jazere. Označme teda koncentráciu živín v pôde ako C_{soil} . Potom môžeme napísať:

$$f(C_N) = 0 \iff C = C_{N_{full}}$$

Použitím vzťahu (1.23) dostaneme:

$$C_{soil} = \sqrt{\frac{c_0}{c_1}},$$

z čoho vieme vyjadriť:

$$c_1 = \frac{c_0}{C_{soil}^2}$$

Nech

$$c_0 = \rho_1 S_1. \quad (1.24)$$

Potom použitím vzťahu (1.23) a (1.24) dostaneme člen predstavujúci prienik živín do vody cez dno jazera aproximáciu v tvare:

$$f(N) = \rho_1 S_1 - \frac{\rho_1 S_1}{C_{soil}^2} C_N^2 = \left[1 - \left(\frac{C_N}{C_{soil}} \right)^2 \right] \rho_1 S_1 \quad (1.25)$$

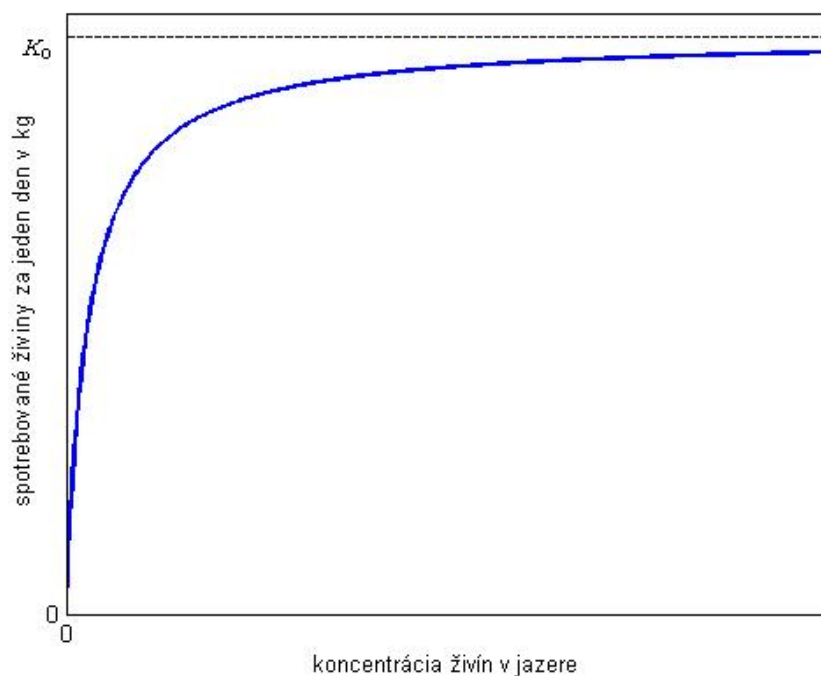
- ρ_1 - priemerná hmotnosť živín v čase t v kilogramoch prenikajúcich do vody cez $1m^2$ dna jazera za jeden deň. Veľkosť tohto koeficientu závisí od množstva živín v pôde a od tvrdosti horniny. Vzhľadom na vyššie uvedené vlastnosti povodia jazera Peck je zrejmé, že ρ_1 bude nadobúdať veľmi nízku hodnotu; $[\rho_1] = (kg \text{ živín})(deň)^{-1}m^{-2}$.
 - S_1 - povrch dna jazera v m^2 v čase t; $[S_1] = m^2$.
 - C_{soil} - koncentrácia živín v pôde v čase t; $[C] = (kg \text{ živín}) m^{-3}$.
 - C_N - koncentrácia živín v jazere v čase t; $[C_N] = (kg \text{ živín}) m^{-3}$.
 - V - objem jazera Peck v čase t; $[V] = m^3$.
- $K_0 \frac{C_N}{C_N + L_0} P$ - hmotnosť živín v čase t v kilogramoch, ktoré sú spotrebované zelenými rastlinami za jeden deň. Táto spotreba je ovplyvnená koncentráciou živín nasledovne: čím je väčšia koncentrácia živín v jazere, tým viac živín rastliny spotrebujú. Avšak od určitej koncentrácie rastliny nie sú schopné s jej ďalším zvyšovaním zväčšovať svoju spotrebu, a to v dôsledku svojej nasýtenosti. Teda s opätovným zvyšovaním koncentrácie živín v jazere je ich spotreba už konštantná, dosahujúc hodnotu K_0 , čo je nasýtená spotreba živín. Preto člen vyjadrujúci spotrebu živín zelenými rastlinami bude mať nasledujúci tvar:

$$-K_0 \frac{C_N}{C_N + L_0} P = -K_0 \frac{1}{1 + \frac{L_0}{C_N}} P. \quad (1.26)$$

- K_0 - nasýtená spotreba živín v čase t; hmotnosť spotrebovaných živín jedným kilogramom suchej masy zelených rastlín za jeden deň; $[K_0] = (kg \text{ živín}) (deň)^{-1} (kg \text{ masy rastlín})^{-1}$.
- C_N - koncentrácia živín v jazere v čase t; $[C_N] = (kg \text{ živín}) m^{-3}$.

- L_0 - koncentrácia živín, pri ktorej je hmotnosť spotrebovaných živín jedným kilogramom zelených rastlín za jeden deň rovná; Michaelisova konštanta; $\frac{K_0}{2}$; $[L_0] = (kg \text{ živín}) m^{-3}$.
- P - hmotnosť suchej hmoty rastlín v jazere v čase t v kilogramoch; $[P] = kg$.

Graf funkcie (1.26) je znázornený na obrázku 1.4:



Obr. 1.4: Grafické znázornenie spotreby živín rastlinami pri pevne zvolenej hodnote P .

Ak je v jazere veľká koncentrácia živín, potom:

$$-K_0 \frac{C_N}{C_N + L_0} P \approx -K_0 P. \quad (1.27)$$

- K_0 - hmotnosť živín v čase t v kilogramoch, ktoré sú spotrebované jedným kilogramom suchej masy zelených rastlín za jeden

deň. Táto hmotnosť sa rovná nasýtenej spotrebe živín; $[K_0] = (kg \text{ živín}) (\text{deň})^{-1} (kg \text{ masy rastlín})^{-1}$.

– P - hmotnosť suchej hmoty zelených rastlín v jazere v čase t v kilogramoch; $[P] = kg$.

Naopak, ak je v jazere malá koncentrácia živín, potom:

$$-K_0 \frac{C_N}{C_N + L_0} P \approx -K_0 \frac{1}{\frac{L_0}{C_N}} P = -K_0 \frac{C_N}{L_0} P. \quad (1.28)$$

– $\frac{K_0}{L_0}$ - konštanta vyjadrujúca spotrebu živín jedným kilogramom zelených rastlín za jeden deň v čase t ; $[\frac{K_0}{L_0}] = (\text{den})^{-1} (kg \text{ masy rastlín})^{-1}$.

– P - hmotnosť suchej masy zelených rastlín v jazere v čase t v kilogramoch; $[P] = kg$.

- $K_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} D$ - hmotnosť živín v čase t v kilogramoch, ktoré sú uvoľnené do vody rozkladom mŕtvych tiel rastlín a živočíchov za jeden deň. Rozklad je závislý od koncentrácie rozpusteného kyslíka vo vode. Čím je väčšia koncentrácia, tým je viac rozkladu a viac uvoľnených živín. Ak je koncentrácia dostatočne veľká, rozklad prebieha najrýchlejšie a do vody sa uvoľňuje najviac živín. Rozklad je však obmedzený. Od určitej veľkosti koncentrácie kyslíka v jazere sa rozklad s jej ďalším zvyšovaním už nezväčšuje, ale je konštantný, pretože bola dosiahnutá maximálna rýchlosť rozkladu. Teda aj množstvo uvoľnených živín bude od určitej koncentrácie konštantné, nadobúdajúc hodnotu K_1 . Preto bude mať člen opisujúci hmotnosť živín uvoľnených pri rozklade odumretého materiálu tvar:

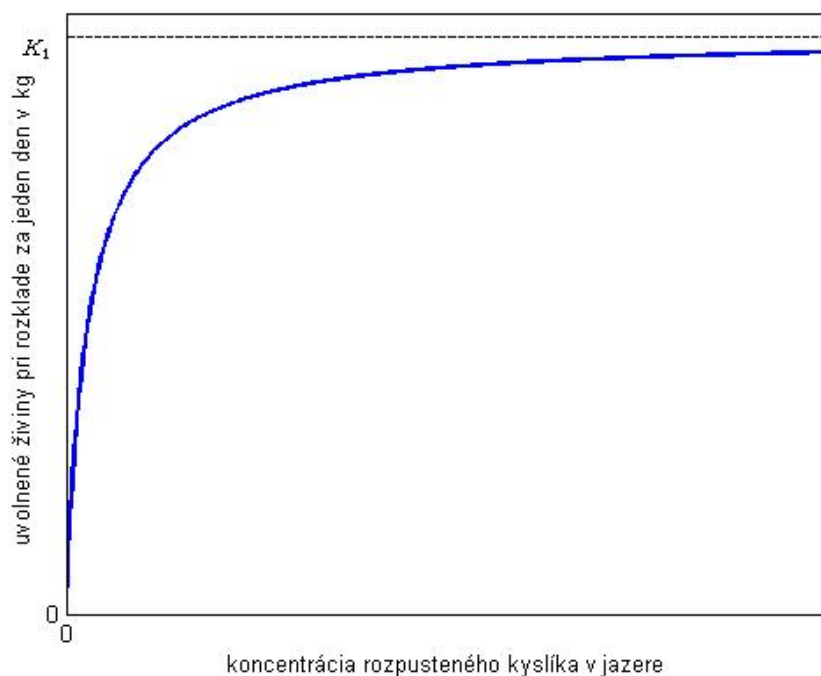
$$K_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} D = K_1 \frac{1}{1 + \frac{L_1}{C_O}} D. \quad (1.29)$$

– K_1 - hmotnosť živín v čase t v kilogramoch, ktoré sú uvoľnené do jazera rozkladom jedného kilogramu odumretého materiálu za jeden deň; $[K_1] = (kg \text{ živín}) (\text{deň})^{-1} (kg \text{ mŕtveho materiálu})^{-1}$.

– C_O - koncentrácia rozpusteného kyslíka v jazere v čase t ; $[C_O] = (kg \text{ kyslíka}) m^{-3}$.

- L_1 - koncentrácia rozpusteného kyslíka v čase t , pri ktorej je hmotnosť uvoľnených rozkladom jedného kilogramu odumretého materiálu za jeden deň rovná $\frac{K_1}{2}$; $[L_1] = (kg \text{ kyslíka}) m^{-3}$.
- D - hmotnosť mŕtveho materiálu v čase t v kilogramoch; $[D] = kg$.

Graf funkcie (1.29) pri pevne zvolenej hodnote D je znázornený na nasledujúcom obrázku 1.5:



Obr. 1.5: Grafické znázornenie uvoľňovania živín do jazera pri procese rozkladu

Analogicky, ako pri predchádzajúcom člene, môžeme opäť použiť aproximácie v rôznych režimoch, ale tentokrát vzhľadom na koncentráciu kyslíka v jazere.

Časovú zmenu množstva živín v jazere môžeme napísať v tvare:

$$\begin{aligned} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} &= E(t) + \left[1 - \left(\frac{C_N}{C_{soil}} \right)^2 \right] \rho_1 S_1 - K_0 \frac{C_N}{C_N + L_0} P \\ &\quad + K_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \end{aligned} \quad (1.30)$$

Tento tvar môžeme napísať pomocou aproximácií vo viacerých režimoch, a to buď vzhľadom na koncentráciu dostupných živín vo vode, alebo vzhľadom na koncentráciu rozpusteného kyslíka. Využitím aproximácií (1.27) a (1.28) môžeme (1.30) napísať v dvoch režimoch vzhľadom na koncentráciu dostupných živín v jazere ako:

- režim s malou koncentráciou dostupných živín vo vode v čase t:

$$\begin{aligned} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} &= E(t) + \left[1 - \left(\frac{C_N}{C_{soil}} \right)^2 \right] \rho_1 S_1 + \rho_2 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\ &\quad - K_0 \frac{C_N}{L_0} P \end{aligned}$$

- režim s veľkou koncentráciou dostupných živín vo vode v čase t:

$$\begin{aligned} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} &= E(t) + \left[1 - \left(\frac{C_N}{C_{soil}} \right)^2 \right] \rho_1 S_1 + \rho_2 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\ &\quad + K_0 P \end{aligned}$$

V dvoch režimoch vzhľadom na koncentráciu rozpusteného kyslíka v jazere môžeme (1.30) napísať ako :

- režim s malou koncentráciou rozpusteného kyslíka vo vode:

$$\begin{aligned} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} &= E(t) + \left[1 - \left(\frac{C_N}{C_{soil}} \right)^2 \right] \rho_1 S_1 - K_0 \frac{C_N}{C_N + L_0} P \\ &\quad + K_1 \frac{C_O}{L_1} D \end{aligned}$$

- režim s veľkou koncentráciou rozpusteného kyslíka vo vode:

$$\begin{aligned} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} &= E(t) + \left[1 - \left(\frac{C_N}{C_{soil}} \right)^2 \right] \rho_1 S_1 - K_0 \frac{C_N}{C_N + L_0} P \\ &\quad + K_1 D \end{aligned}$$

Z vyššie uvedených informácií o jazere je jasné, že jazero Peck sa nachádza v druhom režime, teda v režime s malou koncentráciou dostupných živín vo vode.

1.6 Rastliny a živočíchy

1.6.1 Zvieratá

Predpokladajme, že zvieratá sa živia výlučne rastlinami, a že sú lovené a konzumované inými dravcami, ktorými sú ryby. Pod zvieratami rozumieme napríklad: slimáky, vírnik, larvy jednodňovky, dafnie, atď. Časovú zmenu veľkosti populácie zvierat v čase t môžeme napísať v tvare:

$$\frac{\tilde{A}(t + \Delta t) - \tilde{A}(t)}{\Delta t} = \beta_1 P \tilde{A} - \delta_1 \tilde{A} \tilde{F} - \gamma_1(O, P) \tilde{A} \quad (1.31)$$

- \tilde{A} - počet zvierat v jazere v čase t , ktoré sú zároveň korisťou pre iné živočíchy, teda konkrétne pre ryby.

$$\tilde{A} = \frac{A}{m_A},$$

kde m_A je priemerná hmotnosť jedného zvieratá v kilogramoch v čase t a A je hmotnosť zvierat v jazere v kilogramoch v čase t .

- $\beta_1 P \tilde{A}$ - počet zvierat v čase t , o ktorý sa zvýši úroveň populácie za jeden deň; $[\beta_1 P \tilde{A}] = (ks \tilde{A}) (\text{deň})^{-1}$.
 - P - hmotnosť zelených rastlín v kilogramoch v čase t , ktoré slúžia ako potrava pre zvieratá; $[P] = kg$.
 - β_1 - faktor rozmnožovania, konštanta vyjadrujúca rozmnožovacia schopnosť daného druhu, ktorá súvisí napríklad s priemerným množstvom narodených mláďat pripadajúcim na jeden pár a s dĺžkou trvania reprodukčného cyklu. $[\beta_1] = (kg \text{ masy rastlín})^{-1} (\text{deň})^{-1}$, teda presnejšie β_1 je konštanta vyjadrujúca rozmnožovacia schopnosť daného druhu pri dostupnosti jedného kilogramu zelených rastlín za jeden deň v čase t .

- $\delta_1 \tilde{A} \tilde{F}$ - počet zvierat v čase t , o ktoré sa zníži celková úroveň populácie za jeden deň, a to v dôsledku napadnutia a skonzumovania rybami. Čím vyššia je populačná úroveň zvierat, tým väčšia je pravdepodobnosť, že bude napadnutá dravcami, teda rybami; $[\delta_1 \tilde{A} \tilde{F}] = (ks \tilde{A}) (\text{deň})^{-1}$.
 - δ_1 - faktor predácie. $[\delta_1] = (ks \tilde{F})^{-1} (\text{deň})^{-1}$, teda δ_1 je konštanta vyjadrujúca pravdepodobnosť napadnutia zvierat jednou rybou za jeden deň v čase t .
 - \tilde{F} - počet rýb v jazere v čase t .

$$\tilde{F} = \frac{F}{m_F},$$

kde m_F je priemerná hmotnosť jednej ryby v jazere v čase t a F je hmotnosť rýb v jazere v kilogramoch v čase t .

- $\gamma_1(O, P) \tilde{A}$ - počet zvierat v čase t , o ktoré sa zmenší úroveň populácie za jeden deň v dôsledku prirodzenej úmrtnosti; $[\gamma_1(O, P) \tilde{A}] = (ks \tilde{A}) (\text{deň})^{-1}$.
 - $\gamma_1(O, P)$ - faktor úmrtia, konštanta predstavujúca úmrtnosť zvierat za jeden deň v čase t ; $[\gamma_1] = (\text{deň})^{-1}$. Veľkosť tejto konštanty je závislá na množstve dostupného kyslíka potrebného na dýchanie a množstve potravy, ktorou sú zelené rastliny. Túto závislosť značíme ako $\gamma_1(O, P)$. S klesajúcim množstvom kyslíka dostupného na dýchanie rastie hodnota konštanty úmrtnosti $\gamma_1(O, P)$, teda závislosť je klesajúca. Analogicky, s klesajúcim množstvom zelených rastlín rastie úmrtnosť, preto je aj táto závislosť klesajúca. Chceme teda nájsť takú funkciu, ktorá bude klesajúcou funkciou O aj P .

Uvažujme najskôr závislosť na kyslíku, pričom zanedbáme závislosť na zelených rastlinách. Ak v jazere nie je žiaden kyslík, úmrtnosť prudko stúpne a všetky živočíchy zomrú. Naopak, ak v jazere dostatok kyslíka, úmrtnosť klesne na minimálnu možnú úroveň. Vhodnou aproximáciou takéhoto správania je lineárna lomená

funkcia:

$$\gamma_1(O) = \frac{aO + b}{cO + d} \quad (1.32)$$

Podobne, ak uvažujeme závislosť na množstve zelených rastlín zanedbajúc závislosť na kyslíku:

$$\gamma_1(P) = \frac{eP + f}{gP + h} \quad (1.33)$$

Potom:

$$\gamma_1(O, P) = \frac{aO + b}{cO + d} \frac{eP + f}{gP + h} = k \frac{O + a_1}{O + b_1} \frac{P + a_2}{P + b_2} \quad (1.34)$$

Ak je v jazere dostatočne veľké množstvo kyslíka a súčasne aj zelených rastlín, úmrtnosť bude klesať k minimálnej úmrtnosti, γ_{1min} , ktorá predstavuje prirodzenú úmrtnosť v dôsledku startnutia. Preto môžeme napísať:

$$\begin{aligned} \gamma_{1min} &= \lim_{(O,P) \rightarrow (\infty, \infty)} k \frac{O + a_1}{O + b_1} \frac{P + a_2}{P + b_2} \\ &= \lim_{(O,P) \rightarrow (\infty, \infty)} k \frac{1 + \frac{a_1}{O}}{1 + \frac{b_1}{O}} \frac{1 + \frac{a_2}{P}}{1 + \frac{b_2}{P}} = k \end{aligned} \quad (1.35)$$

Dostaneme:

$$k = \gamma_{1min} \quad (1.36)$$

Ak v jazere nie je žiaden kyslík, alebo žiadne zelené rastliny, nastane smrť všetkých zvierat:

$$\begin{aligned} A(t+1) - A(t) &= -\gamma_1(O, P)A(t) \\ A(t+1) &= A(t)(1 - \gamma_1(O, P)) \\ A(t+1) = 0 &\iff \gamma_1(O, P) = 1 \end{aligned} \quad (1.37)$$

To znamená, že ak úmrtnosť dosiahne hodnotu 1, dôjde k zániku celej populácie zvierat. Teda, ak v jazere nie je žiaden kyslík,

potom $\gamma_1(0, P) = 1$ nezávisle od množstva zelených rastlín v jazere. Naopak, ak v jazere nie sú žiadne zelené rastliny, potom $\gamma_1(O, 0) = 1$ nezávisle od množstva kyslíka. Preto musíme tvar úmrtnosti upraviť pridaním ešte jednej konštanty:

$$\gamma_1(O, P) = \gamma_{1min} \frac{(O + a_1)(P + a_2) + c}{(O + b_1)(P + b_2)}, \quad (1.38)$$

kde a_1, b_1, a_2, b_2, c sú bezrozmerné konštanty a $\gamma_1(O, P) \in [\gamma_{1min}, 1]$. Počet konštánt môžeme znížiť využitím nasledujúcich troch situácií:

* v jazere nie je žiaden kyslík:

$$1 = \gamma_1(0, P) = \gamma_{1min} \frac{a_1(P + a_2) + c}{b_1(P + b_2)} \quad (1.39)$$

* v jazere nie sú žiadne zelené rastliny:

$$1 = \gamma_1(O, 0) = \gamma_{1min} \frac{(O + a_1)a_2 + c}{(O + b_1)b_2} \quad (1.40)$$

* v jazere nie je ani kyslík, ani zelené rastliny:

$$1 = \gamma_1(O, P) = \gamma_{1min} \frac{a_1a_2 + c}{b_1b_2} \quad (1.41)$$

Máme tri rovnice, pomocou ktorých môžeme päť konštánt eliminovať na dve. Postupnou úpravou rovníc (1.39), (1.40) a (1.41) dostaneme:

$$a_1 = \frac{b_1}{\gamma_{1min}}, \quad a_2 = \frac{b_2}{\gamma_{1min}}, \quad c = \frac{b_1b_2}{\gamma_{1min}} - \frac{b_1b_2}{\gamma_{1min}^2}$$

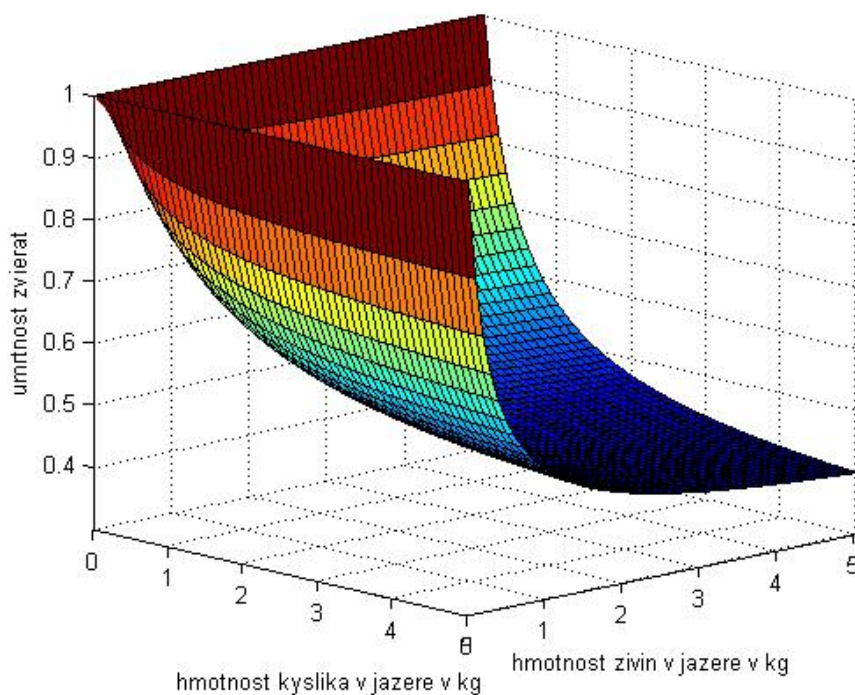
Následným dosadením týchto vzťahov do vyjadrenia úmrtnosti (1.38) získame tvar:

$$\gamma_1(O, P) = \gamma_{1min} \frac{(O + \frac{b_1}{\gamma_{1min}})(P + \frac{b_2}{\gamma_{1min}}) + \frac{b_1b_2}{\gamma_{1min}} - \frac{b_1b_2}{\gamma_{1min}^2}}{(O + b_1)(P + b_2)},$$

ktorý môžeme zjednodušiť na tvar:

$$\gamma_1(O, P) = 1 - (1 - \gamma_{1min}) \frac{OP}{(O + b_1)(P + b_2)}, \quad (1.42)$$

kde b_1 a b_2 sú bezrozmerné konštanty a $\gamma_1(O, P) \in [\gamma_{1min}, 1]$. Na obrázku 1.6 môžeme vidieť grafické znázornenie úmrtnosti (1.42).



Obr. 1.6: Grafické znázornenie úmrtnosti zvierat

Časovú zmenu populácie zvierat môžeme napísať v konečnom tvare:

$$\frac{\tilde{A}(t + \Delta t) - \tilde{A}(t)}{\Delta t} = \beta_1 P \tilde{A} - \delta_1 \tilde{A} \tilde{F} - \left(1 - (1 - \gamma_{1min}) \frac{OP}{(O + b_1)(P + b_2)}\right) \tilde{A} \quad (1.43)$$

1.6.2 Ryby

Predpokladajme, že ryby sa živia výlučne zvieratami, a zároveň sú lovené rybármi. Taktiež predpokladajme, že rybolov je regulovaný. Časovú zmenu veľkosti populácie rýb v čase t môžeme napísať v tvare:

$$\frac{\tilde{F}(t + \Delta t) - \tilde{F}(t)}{\Delta t} = \beta_2 A \tilde{F} - \theta \tilde{F} - \gamma_2(O, A) \tilde{F} \quad (1.44)$$

- \tilde{F} - počet rýb v jazere v čase t .

$$\tilde{F} = \frac{F}{m_F},$$

kde m_F je priemerná hmotnosť jednej ryby v jazere v čase t a F je hmotnosť rýb v jazere v kilogramoch v čase t .

- $\beta_2 A \tilde{F}$ - počet rýb v čase t , o ktorý sa zvýši úroveň populácie za jeden deň; $[\beta_2 A \tilde{F}] = (ks \tilde{F}) (\text{deň})^{-1}$.
 - A - hmotnosť zvierat v jazere v kilogramoch v čase t ; $[A] = kg$.
 - β_2 - faktor rozmnožovania rýb, konštanta vyjadrujúca rozmnožovaciu schopnosť rýb, ktorá súvisí napríklad s priemerným množstvom narodených mláďat pripadajúcim na jeden pár a s dĺžkou trvania reprodukčného cyklu. $[\beta_1] = (kg \text{ zvierat})^{-1} (\text{deň})^{-1}$, teda β_1 je konštanta vyjadrujúca rozmnožovaciu schopnosť rýb v čase t pri dostupnosti jedného kilogramu zvierat za jeden deň.
- $\theta \tilde{F}$ - počet rýb v čase t , o ktoré sa zníži úroveň populácie za jeden deň v dôsledku rybolovu. Pravdepodobnosť alebo schopnosť ulovenia rýb rybármi sa zväčšuje so zvyšujúcou sa úrovňou populácie rýb v jazere; $[\theta \tilde{F}] = (ks \tilde{F}) (\text{deň})^{-1}$.
 - θ - faktor uloviteľnosti pri rybolove, konštanta vyjadrujúca uloviteľnosť rýb za jeden deň v čase t ; $[\theta] = (\text{deň})^{-1}$.
- $\gamma_2(O, A) \tilde{F}$ - počet rýb v čase t , o ktoré sa zmenší úroveň populácie za jeden deň v dôsledku prirodzenej úmrtnosti; $[\gamma_2(O, A) \tilde{F}] = (ks \tilde{F}) (\text{deň})^{-1}$.
 - $\gamma_2(O, A)$ - faktor úmrtnosti rýb, konštanta predstavujúca úmrtnosť rýb za jeden deň v čase t ; $[\gamma_2] = (\text{deň})^{-1}$, γ_2 . Veľkosť tejto konštanty je ovplyvnená množstvom dostupného kyslíka na dýchanie a množstvom potravy, ktorou sú zvieratá. Túto závislosť

značíme ako $\gamma_2(O, A)$. S klesajúcim množstvom kyslíka dostupného na dýchanie rastie hodnota konštanty úmrtnosti $\gamma_2(O, A)$, teda závislosť na kyslíku je klesajúca. Analogicky, s klesajúcim množstvom zvierat rastie úmrtnosť, preto je aj táto závislosť klesajúca. Ak v jazere nie je kyslík, alebo zvieratá, alebo ak v jazere chýba oboje, nastáva vymretie všetkých rýb, teda $\gamma_2(O, A) = 1$. Naopak, ak je v jazere dostatok kyslíka a zvierat, úmrtnosť klesne na prirodzenú úmrtnosť, γ_{2min} , ktorá predstavuje úmrtnosť v dôsledku starnutia. Preto môžeme na úmrtnosť rýb aplikovať vzťah (1.42) a dostávame:

$$\gamma_2(O, A) = 1 - (1 - \gamma_{2min}) \frac{OA}{(O + b_3)(A + b_4)}, \quad (1.45)$$

kde b_3 a b_4 sú bezrozmerné konštanty a $\gamma_2(O, A) \in [\gamma_{2min}, 1]$. Graf funkcie vyzerá analogicky ako graf znázornený na obrázku 1.6.

Časovú zmenu veľkosti populácie rýb v čase t môžeme napísať v tvare:

$$\frac{\tilde{F}(t + \Delta t) - \tilde{F}(t)}{\Delta t} = \beta_2 A \tilde{F} - \theta \tilde{F} - \left(1 - (1 - \gamma_{2min}) \frac{OA}{(O + b_3)(A + b_4)}\right) \tilde{F} \quad (1.46)$$

1.6.3 Rastliny

Uvažujeme ponorené zelené rastliny a voľne plávajúce riasy, ktoré sa zaraďujú taktiež k rastlinám. Slúžia nielen na výrobu rozpusteného kyslíka, ale aj ako potrava pre zvieratá. Pre svoj život a rast potrebujú prítomnosť dostupných živín. Predpokladáme, že rastliny sú schopné okamžitej adaptácie a okamžitého prijímania živín z vody. Časovú zmenu suchej hmotnosti rastlín v jazere v čase t môžeme napísať v tvare:

$$\frac{P(t + \Delta(t)) - P(t)}{\Delta t} = \beta_3 \frac{C_N}{C_N + L_0} \frac{PK}{P + K} H(t_1 - t_0) - \delta_2 P \tilde{A} - \gamma_3(O, N)P \quad (1.47)$$

- P - hmotnosť suchej hmoty rastlín, alebo suchá hmotnosť rastlín v jazere v kilogramoch v čase t ; $[P] = kg$.

- $\beta_3 \frac{C_N}{C_N + L_0} \frac{PK}{P + K} H(t_1 - t_0)$ - hmotnosť suchej masy rastlín v čase t , o ktorú zvýši celková hmotnosť za jeden deň. Rast suchej hmoty rastlín závisí od koncentrácie živín v telách rastlín. Avšak za predpokladu, že rastliny sú schopné okamžite prijať živiny z vody, môžeme koncentráciu živín v telách rastlín nahradiť koncentráciou živín vo vode. Na vyjadrenie tejto závislosti použijeme tvar (1.26), „pozri podkapitolu 1.5 na strane 20.“ Avšak rast suchej masy rastlín nie je po celý čas rovnaký. Vo vegetačnom období nerastú rastliny vôbec. Keď skončí vegetačné obdobie, začínajú intenzívne rásť. Rast je Preto pre tento člen použijeme tvar:

$$\beta_3 \frac{C_N}{C_N + L_0} \frac{PK}{P + K} H(t_1 - t_0), \quad (1.48)$$

ktorý možno nájsť v [1].

- β_3 - faktor rastu suchej masy rastlín v čase t za jeden deň, konštanta vyjadrujúca rozmnožovaciu schopnosť rýb, ktorá súvisí napríklad s priemerným množstvom narodených mládat pripadajúcim na jeden pár a s dĺžkou trvania reprodukčného cyklu; $[\beta_3] = (\text{deň})^{-1}$.
- C_N - koncentrácia živín v jazere v čase t ; $[C_N] = (kg \text{ živín}) m^{-3}$.
- K - hmotnosť suchej masy rastlín; $[K] = (kg \text{ masy rastlín})$.
- L_0 - koncentrácia živín v jazere v čase t , pri ktorej je faktor rastu suchej hmoty rovný $\frac{\beta_3}{2}$; $[L_0] = (kg \text{ živín}) m^{-3}$.
- $H(t_1 - t_0)$ - funkcia závislá od času, vymedzujúca obdobie rastu a vegetačné obdobie. t_0 je časová jednotka, teda deň, ktorým končí vegetačné obdobie a t_1 je deň, ktorým končí rast a začína vegetačné obdobie. $H(t_1 - t_0)$ bude nadobúdať hodnoty 0 alebo 1, podľa toho, či ide o rast, alebo o vegetačné obdobie. Keďže rastliny vo vegetačnom období nerastú ale len prežívajú, $H(t_1 - t_0)$ bude na intervale $[t_0, t_1]$ nadobúdať hodnotu 1, inak hodnotu 0.

Ak je v jazere veľká koncentrácia dostupných živín, potom:

$$\beta_3 \frac{C_N}{C_N + L_0} \frac{PK}{P + K} H(t_1 - t_0) \approx \beta_3 \frac{PK}{P + K} H(t_1 - t_0). \quad (1.49)$$

- β_3 - faktor rastu suchej hmoty rastlín za jeden deň v čase t , ktorý sa v režime s veľkou koncentráciou dostupných živín rovná nasýtenej spotrebe živín; $[\beta_3] = (\text{deň})^{-1}$.

Naopak, ak je v jazere malá koncentrácia dostupných živín, potom:

$$\begin{aligned} \beta_3 \frac{C_N}{C_N + L_0} \frac{PK}{P + K} H(t_1 - t_0) &\approx \beta_3 \frac{1}{\frac{L_0}{C_N}} \frac{PK}{P + K} H(t_1 - t_0) \\ &= \beta_3 \frac{C_N}{L_0} \frac{PK}{P + K} H(t_1 - t_0) \quad (1.50) \end{aligned}$$

- $\frac{\beta_3}{L_0}$ - faktor rastu suchej hmoty rastlín v čase t za jeden deň vzhľadom na aktuálnu koncentráciu dostupných živín.
- C_N - koncentrácia živín v jazere v čase t ; $[C_N] = (\text{kg živín}) m^{-3}$.
- $\delta_2 P \tilde{A}$ - hmotnosť suchej masy rastlín v čase t v kilogramoch, o ktorú sa zníži celková hmotnosť v dôsledku napadnutia a konzumácie dravcami, ktorými sú ryby. Čím je v jazere viac kilogramov suchej masy rastlín, tým väčšia je pravdepodobnosť napadnutia.
 - δ_2 - faktor predácie, konštanta vyjadrujúca pravdepodobnosť, že rastliny budú napadnuté jedným zvieraťom za jeden deň v čase t ; $[\delta_2] = (\text{kg } \tilde{A})^{-1} (\text{deň})^{-1}$.
 - \tilde{A} - priemerný počet zvierat v jazere v čase t .

$$\tilde{A} = \frac{A}{m_A},$$

kde m_A je priemerná hmotnosť jedného zvieraťa v kilogramoch v čase t a A je hmotnosť zvierat v jazere v kilogramoch v čase t .

- $\gamma_3(O, N)P$ - hmotnosť suchej masy rastlín v čase t v kilogramoch, o ktorú sa zmenší celková hmotnosť za jeden deň v dôsledku prirodzeného starnutia a odumierania rastlín; $[\gamma_3(O, N)P] = \text{kg } P (\text{den})^{-1}$.
 - $\gamma_3(O, N)$ - faktor úmrtnosti rastlín v čase t , konštanta predstavujúca úmrtnosť rastlín za jeden deň; $[\gamma_3] = (\text{deň})^{-1}$. Veľkosť tejto

konštanty je ovplyvnená množstvom dostupného kyslíka na dýchanie a množstvom dostupných živín. Túto závislosť značíme ako $\gamma_3(O, N)$. S klesajúcim množstvom kyslíka dostupného na dýchanie rastie hodnota konštanty úmrtnosti $\gamma_3(O, N)$, teda závislosť na kyslíku je klesajúca. Analogicky, s klesajúcim množstvom dostupných živín rastie úmrtnosť, preto je aj táto závislosť klesajúca. Ak v jazere nie je kyslík, alebo živiny, alebo ak v jazere chýba oboje, nastáva vymretie všetkých rastlín, teda $\gamma_3(O, N) = 1$. Naopak, ak je v jazere dostatok kyslíka a živín, úmrtnosť klesne na prirodzenú úmrtnosť, γ_{3min} , v dôsledku starnutia. Preto môžeme na úmrtnosť rastlín aplikovať vzťah (1.42), čím dostávame:

$$\gamma_3(O, N) = 1 - (1 - \gamma_{3min}) \frac{ON}{(O + b_5)(N + b_6)}, \quad (1.51)$$

kde b_5 a b_6 sú bezrozmerné konštanty a $\gamma_3(O, N) \in [\gamma_{3min}, 1]$. Graf funkcie vyzerá analogicky ako graf znázornený na obrázku 1.6.

Časovú zmenu hmotnosti suchej masy rastlín v čase t v jazere môžeme napísať v tvare:

$$\begin{aligned} \frac{P(t + \Delta(t)) - P(t)}{\Delta t} &= \beta_3 \frac{C_N}{C_N + L_0} \frac{PK}{P + K} H(t - t_0) - \delta_2 P \tilde{A} \\ &\quad - \left(1 - (1 - \gamma_{3min}) \frac{ON}{(O + b_5)(N + b_6)} \right) P \end{aligned} \quad (1.52)$$

Využitím aproximácií (1.49) a (1.50) môžeme tento tvar napísať v dvoch režimoch:

- režim s malou koncentráciou dostupných živín v jazere v čase t :

$$\begin{aligned} \frac{P(t + \Delta(t)) - P(t)}{\Delta t} &= \beta_3 \frac{C_N}{L_0} \frac{PK}{P + K} H(t_1 - t_0) - \delta_2 P \tilde{A} \\ &\quad - \left(1 - (1 - \gamma_{3min}) \frac{ON}{(O + b_5)(N + b_6)} \right) P \end{aligned}$$

- režim s veľkou koncentráciou dostupných živín v jazere v čase t :

$$\begin{aligned} \frac{P(t + \Delta(t)) - P(t)}{\Delta t} &= \beta_3 \frac{PK}{P + K} H(t_1 - t_0) - \delta_2 P \tilde{A} \\ &\quad - \left(1 - (1 - \gamma_{3min}) \frac{ON}{(O + b_5)(N + b_6)} \right) P \end{aligned}$$

1.7 Proces rozkladu

Rozklad je životne dôležitý proces pre všetko živé v jazere a to z dôvodu, že mŕtve rastliny a živočíchy klesajúce na dno jazera obsahujú živiny, ktoré sa uvoľnia pri procese rozkladu za pomoci baktérií a kyslíka. Každoročné hnojenie vody s cieľom zvýšiť obsah živín vo vode má za následok väčšie množstvo mŕtvych rastlín a živočíchov, a teda zvyšovanie spotreby kyslíka. Zmenu hmotnosti rozkladaného materiálu na dne jazera v čase t môžeme napísať v tvare:

$$\begin{aligned} \frac{D(t + \Delta t) - D(t)}{\Delta t} &= \gamma_1(O, P)A + \gamma_2(O, A)F + \gamma_3(O, N)P + \theta_1 \delta_1 A \tilde{F} \\ &\quad + \theta_2 \delta_2 P \tilde{A} - \varphi(O)D \\ \gamma_1(O, P) &= 1 - (1 - \gamma_{1min}) \frac{OP}{(O + b_1)(P + b_2)} \\ \gamma_2(O, A) &= 1 - (1 - \gamma_{2min}) \frac{OA}{(O + b_3)(A + b_4)} \\ \gamma_3(O, N) &= 1 - (1 - \gamma_{3min}) \frac{ON}{(O + b_5)(N + b_6)} \end{aligned} \tag{1.53}$$

- D - hmotnosť rozkladaného materiálu na dne jazera v čase t v kilogramoch; $[D] = kg$.
- $\gamma_1(O, P)A$ - hmotnosť rozkladaného materiálu v kilogramoch v čase t , ktorý vznikne v dôsledku úmrtnosti zvierat za jeden deň; $[\gamma_1(O, P)A] = (kg \text{ mŕtvej hmoty}) (\text{deň})^{-1}$.

- $\gamma_1(O, P)$ - faktor úmrtnosti zvierat v čase t , konštanta predstavujúca úmrtnosť zvierat za jeden deň v čase t ; $[\gamma_1(O, P)] = (\text{deň})^{-1}$.
- A - hmotnosť zvierat v jazere v kilogramoch v čase t ; $[A] = kg$.
- $\gamma_2(O, A)F$ - hmotnosť rozkladaného materiálu v čase t v kilogramoch, ktorý vznikne v dôsledku úmrtnosti rýb za jeden deň; $[\gamma_2(O, A)F] = (kg \text{ mŕtvej hmoty}) (\text{deň})^{-1}$.
 - $\gamma_2(O, A)$ - faktor úmrtnosti rýb v čase t , konštanta predstavujúca úmrtnosť rýb za jeden deň v čase t ; $[\gamma_2(O, A)] = (\text{deň})^{-1}$.
 - F - hmotnosť rýb v jazere v kilogramoch v čase t ; $[F] = kg$.
- $\gamma_3(O, N)P$ - hmotnosť rozkladaného materiálu v čase t v kilogramoch, ktorý vznikne v dôsledku úmrtnosti suchej masy rastlín za jeden deň; $[\gamma_3(O, N)P] = (kg \text{ mŕtvej hmoty}) (\text{deň})^{-1}$.
 - $\gamma_3(O, N)$ - faktor odumierania rastlín v čase t , konštanta predstavujúca úmrtnosť suchej masy rastlín za jeden deň v čase t ; $[\gamma_3(O, N)] = (\text{deň})^{-1}$.
 - P - hmotnosť suchej masy rastlín v jazere v čase t v kilogramoch; $[P] = kg$.
- $\theta_1 \delta_1 A \tilde{F}$ - hmotnosť rozkladaného materiálu v čase t v kilogramoch, ktorý vzniká v dôsledku požierania zvierat rybami za jeden deň; $[\theta_1 \delta_1 A \tilde{F}] = (kg \text{ mŕtvej hmoty}) (\text{deň})^{-1}$.
 - θ_1 - konštanta, ktorá hovorí, aká časť z celkovej hmotnosti zvierat v jazere, ktoré sú požierané rybami, bude za jeden deň, bude v čase klesať na dno v podobe neskonsumovaných zvyškov, ktoré budú následne rozkladané spolu s ďalším materiálom.
 - δ_1 - faktor predácie v čase t . $[\delta_1] = (ks \text{ rýb})^{-1} (\text{deň})^{-1}$, teda δ_1 je konštanta vyjadrujúca pravdepodobnosť napadnutia zvierat jednou rybou za jeden deň v čase t .

– \tilde{F} - počet rýb v jazere v čase t .

$$\tilde{F} = \frac{F}{m_F},$$

kde m_F je priemerná hmotnosť jednej ryby v jazere v čase t a F je hmotnosť rýb v jazere v kilogramoch v čase t .

- $\theta_2 \delta_2 P \tilde{A}$ - hmotnosť rozkladaného materiálu v čase t v kilogramoch, ktorý vznikne v dôsledku požierania suchej masy rastlín zvieratami za jeden deň; $[\theta_2 \delta_2 P \tilde{A}] = (kg \text{ mŕtvej hmoty}) (\text{deň})^{-1}$.

– θ_2 - konštanta, ktorá hovorí, aká časť z celkovej hmotnosti suchej masy rastlín v jazere v čase t , ktoré sú požierané zvieratami, bude za jeden deň klesať na dno v podobe neskonsumovaných zvyškov, ktoré budú následne rozkladané spolu s ďalším materiálom .

– δ_2 - konštanta vyjadrujúca predátorstvo v čase t , alebo pravdepodobnosť, že rastliny budú napadnuté a skonsumované jedným zvieratom za jeden deň; $[\delta_2] = (ks \tilde{A})^{-1} (\text{deň})^{-1}$.

– \tilde{A} - počet zvierat v jazere v čase t .

$$\tilde{A} = \frac{A}{m_A},$$

kde m_A je priemerná hmotnosť jedného zvierata v kilogramoch v čase t a A je hmotnosť zvierat v jazere v kilogramoch v čase t .

- $\varphi(C_O)D$ - hmotnosť rozkladaného materiálu v čase t v kilogramoch, ktorý sa pôsobením kyslíka rozloží za jeden deň; $[\varphi(C_O)D] = (kg \text{ mŕtvej hmoty}) (\text{deň})^{-1}$.

– C_O - koncentrácia kyslíka v jazere v čase t ; $[C_O] = (kg \text{ kyslíka}) m^{-3}$.

– $\varphi(C_O)$ - faktor rozkladu odumretého materiálu na dne jazere v čase t za jeden deň; $[\varphi(C_O)] = (\text{deň})^{-1}$. Ako sme už spomínali v kapitole 1.5, rýchlosť rozkladu závisí od koncentrácie dostupného kyslíka v jazere. Preto použitím vzťahu (1.29) môžeme napísať:

$$\varphi(C_O) = \varphi \frac{C_O}{C_O + L_1} = \varphi \frac{1}{1 + \frac{L_1}{C_O}} \quad (1.54)$$

- * φ - faktor rozkladu odumretého materiálu v čase t za jeden deň; $[\varphi] = (\text{deň})^{-1}$.
- * L_1 - koncentrácia kyslíka v jazere v čase t , pri ktorej sa veľkosť rozkladu rovná $\frac{\varphi}{2}$; $[L_1 = (\text{kg kyslíka}) m^{-3}]$.

Ak je v jazere malá koncentrácia kyslíka, potom:

$$\varphi(C_O) = \varphi \frac{C_O}{C_O + L_1} \approx \frac{\varphi}{L_1} C_O \quad (1.55)$$

- * $\frac{\varphi}{L_1}$ - faktor rozkladu odumretého materiálu v čase t pri dostupnej koncentrácii kyslíka za jeden deň;
- $[\frac{\varphi}{L_1}] = (\text{deň})^{-1}(\text{koncentrácia kyslíka})^{-1}$.

Ak je v jazere veľká koncentrácia kyslíka, potom:

$$\varphi(C_O) = \varphi \frac{C_O}{C_O + L_1} \approx \varphi \quad (1.56)$$

- * φ - faktor rozkladu odumretého materiálu v čase t za jeden deň; $[\varphi] = (\text{deň})^{-1}$.

Časovú zmenu hmotnosti odumretého materiálu v jazere v čase t môžeme napísať v tvare:

$$\begin{aligned} \frac{D(t + \Delta t) - D(t)}{\Delta} &= \gamma_1(O, P)A + \gamma_2(O, A)F + \gamma_3(O, N)P + \theta_1 \delta_1 A \tilde{F} \\ &\quad + \theta_2 \delta_2 P \tilde{A} - \varphi \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\ \gamma_1(O, P) &= \gamma_{1min} \frac{O + a_1}{O + b_1} \frac{P + a_2}{P + b_2} \\ \gamma_2(O, A) &= \gamma_{2min} \frac{O + a_3}{O + b_3} \frac{A + a_4}{A + b_4} \\ \gamma_3(O, N) &= \gamma_{3min} \frac{O + a_5}{O + b_5} \frac{A + a_6}{A + b_6} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Ak uvažujeme dva režimy vzhľadom na koncentráciu kyslíka v jazere, potom môžeme použitím aproximácií (1.55) a (1.56) napísať časovú zmenu hmotnosti mŕtveho materiálu v tvare:

- režim s malou koncentráciou dostupného kyslíka v jazere v čase t :

$$\begin{aligned} \frac{D(t + \Delta t) - D(t)}{\Delta t} &= \gamma_1(O, P)A + \gamma_2(O, A)F + \gamma_3(O, N)P \\ &\quad + \theta_1 \delta_1 A \tilde{F} + \theta_2 \delta_2 P \tilde{A} - \frac{\varphi}{L_1} C_O D \end{aligned}$$

- režim s veľkou koncentráciou dostupného kyslíka v jazere v čase t :

$$\begin{aligned} \frac{D(t + \Delta t) - D(t)}{\Delta t} &= \gamma_1(O, P)A + \gamma_2(O, A)F + \gamma_3(O, N)P \\ &\quad + \theta_1 \delta_1 A \tilde{F} + \theta_2 \delta_2 P \tilde{A} - \varphi D \end{aligned}$$

1.8 Kyslík

Tak ako ľudský život je závislý na kyslíku, tak aj pre tvory žijúce pod vodnou hladinou je rozpustený kyslík životne dôležitou požiadavkou. Voda obsahuje menej ako 1% kyslíka a vzhľadom na to, že kyslík sa dostáva do vody veľmi pomaly, bezpečnostná rezerva pre život vodných tvorov je veľmi malá. Časť kyslíka je poskytovaná v lete zelenými rastlinami rastúcimi pod vodnou hladinou. Riasy a celkom ponorené rastliny prinášajú kyslík do vody počas dňa cez fotosyntézu. Za zlých podmienok svetla (noc, zamračené dni) tieto rastliny kyslík nevyrábajú, ale len spotrebovávajú dýchaním. Teda za dostatočného slnečného žiarenia prebieha fotosyntéza a dýchanie a pri nedostatku prebieha len dýchanie. Všeobecne, ponorené rastliny poskytujú päť krát viac kyslíka ako samy spotrebojú. Najdôležitejším zdrojom je kyslík primiešaný do vody zo vzduchu počas jarného a jesenného obratu. V zime je jazero zablokované od prísunu kyslíka vrstvou ľadu a snehu, preto zásoby kyslíka získané pri jesennom obrate musia vydržať až do jarného obratu. Kyslík je využívaný nielen rybami a inými organizmami žijúcimi vo vode, ale väčšia časť je spotrebovaná pri rozklade mŕtvych tiel rastlín a živočíchov na dne jazera. Predpokladáme, že rastliny, živočíchy, zvieratá a ryby spotrebovávajú kyslík počas celeho dňa a noci v rovnakom množstve. Na základe týchto informácií sa dá zmena hmotnosti rozpusteného kyslíka v jazere v čase t napísať v tvare:

$$\frac{O(t + \Delta t) - O(t)}{\Delta t} = F_{O_2}S_0 + P_{leaf}S_{leaf} - \alpha_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} S_{leaf} - \alpha_2 A - \alpha_3 F - \alpha_4 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \quad (1.58)$$

- O - hmotnosť kyslíka v jazere v kilogramoch v čase t ; $[O] = kg$
- $F_{O_2}S_0$ - hmotnosť kyslíka v kilogramoch v čase t , ktorý sa dostane do jazera z atmosféry za jeden deň; $[F_{O_2}S_0] = (kg \text{ kyslíka}) (\text{deň})^{-1}$.
 - F_{O_2} - tok kyslíka v čase t cez hranicu, ktorá oddeľuje vodu v jazere a vzduch. F_{O_2} je hmotnosť kyslíka v kilogramoch, ktorý sa dostane do vody z atmosféry jedným m^2 povrchu jazera za jeden deň; $[F_{O_2}] = kg(m)^{-2}(\text{deň})^{-1}$. Svoju maximálnu hodnotu, F_{O_2max} , bude nadobúdať v čase jarného a jesenného obratu, v zime bude hodnota tohto člena nulová, pretože jazero je pokryté vrstvou ľadu a snehu, a na jar bude F_{O_2} nadobúdať hodnotu z intervalu $(0, F_{O_2max})$. F_{O_2} spĺňa rovnicu, ktorá je bližšie spracovaná v [8]:

$$F_{O_2} = k_{O_2}(t)(O_{air} - C_O), \quad (1.59)$$

- * $k_{O_2}(t)$ - koeficient prenosu kyslíka v čase t ; $[k_{O_2}] = m (\text{deň})^{-1}$.
- * C_O - koncentrácia kyslíka vo vrchnej vrstve jazera blízko rozhrania v čase t ; $[C_O] = (kg \text{ kyslíka}) m^{-3}$.
- * O_{air} - koncentrácia kyslíka vo vzduchovej vrstve blízko rozhrania v čase t ; $[O_{air}] = (kg \text{ kyslíka}) m^{-3}$.
- S_0 - povrch jazera Peck v čase t ; $[S] = m^2$.
- S_{leaf} - povrch listovej plochy v m^2 v čase t . Pre jednoduchosť predpokladajme, že všetky listy majú tvar úzkeho kvádra s malou hrúbkou. Potom môžeme povrch listovej plochy napísať pomocou suchej hmotnosti rastlín nasledovne:

$$S_{leaf} = \frac{a}{h\rho} P^q$$

- a - normalizačná konštanta v čase t ; $[a] = kg^{(1-a)}m^{-2}$.
 - h - typická hrúbka listu v čase t ; $[h] = m$.
 - ρ - hustota listu v čase t ; $[\rho] = kg m^{-3}$.
 - q - bezrozmerný alometrický parameter.
- P_{leaf} - hmotnosť rozpusteného kyslíka v kilogramoch v čase t , ktorý sa dostane do vody ako vedľajší produkt čistej fotosyntézy za jeden deň prostredníctvom jedného m^2 povrchu listovej plochy; $[P_{leaf}] = (kg \text{ kyslík}) m^{-2}(\text{deň})^{-1}$. Rýchlosť fotosyntézy a teda množstvo vyprodukovaného kyslíka závisí od slnečného žiarenia, pričom vzťah medzi rýchlosťou fotosyntézy a ožiarením nie je lineárny, (pozri podkapitolu 1.2 na strane 15). Množstvo prijatého CO_2 sa rovná množstvu vzniknutého kyslíka. Preto na vyjadrenie listovej fotosyntézy použijeme tvar spracovaný v [1]

$$P_{leaf} = \frac{\alpha I_{leaf} P_{max}}{\alpha I_{leaf} + P_{max}}, \quad (1.60)$$

- α - fotosyntetická účinnosť; $[\alpha] = (kg \text{ kyslík}) (W \text{ deň } PAR)^{-1}$.
- P_{max} - svetelne nasýtená fotosyntetická miera, je to maximálna hmotnosť kyslíka v čase t v kilogramoch, ktorá je vyprodukovaná pri fotosyntéze jedným m^2 povrchu listovej plochy za jeden deň; $[P_{max}] = (kg \text{ kyslík}) m^{-2}(\text{deň})^{-1}$.
- I_{leaf} - svetelný tok v čase t , alebo tok svetelného ožiarenia dopadajúceho na jeden m^2 listu v hĺbke L ; $[I_{leaf}] = W m^{-2}$. Ak použijeme vzorec (1.4) a pre zjednodušenie zanedbáme zatienené listy a rozdelenie svetla na rozptýlené a priame, môžeme I_{leaf} napísať v tvare, použitý v [1]:

$$I_{leaf} = \frac{kT_0(t)}{1 - m} e^{-kL} e^{-k_t d},$$

- * $I_0(t)$ - sila elektromagnetickej radiácie na jednotku plochy v čase t , teda na m^2 hornej vrstvy vrchlíka alebo teda hornej vrstvy listovej plochy; $[I_0] = W m^{-2}$.

- * k - koeficient zaniknutia $I_0(t)$ v čase t ; $[k] = m^2 S_1 (m^2 \text{ listu})^{-1}$.
- * L - index listovej plochy v čase t , veľkosť listovej plochy v m^2 , ktorá je situovaná nad jedným m^2 pôdy, v našom prípade dna jazera; $[L] = (m^2 \text{ listu})(m^2 \text{ dna jazera})^{-1}$. Vzhľadom na túto informáciu môžeme index listovej plochy vyjadriť nasledovne:

$$L = \frac{S_{leaf}}{S_1} = \frac{a}{S_1 h \rho} P^q,$$

kde S_1 je povrch dna jazera.

- * k_t - zoslabnutie ožiarenia vo vode v hĺbke d ; $[k_t] = m^{-1}$.
 - * d - hĺbka, v ktorej sa nachádzajú uvažované rastliny, teda listy; $[d] = m$. Predpokladáme, že všetky rastliny sa nachádzajú v jednej hĺbke, a to konkrétne v hĺbke $\frac{3}{4}$ z priemernej hĺbky jazera Peck.
 - * m - koeficient prenosu, bezrozmerný parameter.
- $\alpha_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} S_{leaf}$ - hmotnosť kyslíka v kilogramoch v čase t , ktorý je spotrebovaný dýchaním rastlín prostredníctvom listovej plochy za jeden deň; $[\alpha_1 P] = (kg \text{ kyslík}) (\text{deň})^{-1}$.
 - α_1 - hmotnosť kyslíka v kilogramoch, ktorý je spotrebovaný dýchaním cez jeden m^2 listovej plochy za jeden deň v čase t ; $[\alpha_1] = (kg \text{ kyslík}) m^{-2} (\text{deň})^{-1}$.
 - C_O - koncentrácia kyslíka v jazere v čase t ; $[C_O] = (kg \text{ kyslíka}) m^3$.
 - L_1 - Michaelisova konštanta; $[L_1] = (kg \text{ kyslíka}) m^3$.
 - S_{leaf} - povrch listovej plochy v m^2 ; $[S_{leaf}] = m^2$.
 - $\alpha_2 A$ - hmotnosť kyslíka v kilogramoch v čase t , ktorý je spotrebovaný dýchaním zvierat v jazere za jeden deň; $[\alpha_2 A] = (kg \text{ kyslík}) (\text{deň})^{-1}$.
 - α_2 - hmotnosť kyslíka v kilogramoch, ktorý je spotrebovaný dýchaním jedného kilogramu zvierat za jeden deň v čase t ; $[\alpha_2] = (kg \text{ kyslík}) (\text{deň})^{-1} (kg A)^{-1}$.

- A - hmotnosť zvierat v jazere v kilogramoch v čase t ; $[A] = kg$.
- $\alpha_3 F$ - hmotnosť kyslíka v kilogramoch v čase t , ktorý je spotrebovaný dýchaním rýb v jazere za jeden deň; $[\alpha_3 F] = (kg \text{ kyslík}) (\text{deň})^{-1}$.
 - α_3 - hmotnosť kyslíka v kilogramoch, ktorý je spotrebovaný dýchaním jedným kilogramom rýb za jeden deň v čase t ; $[\alpha_3] = (kg \text{ kyslík}) (\text{deň})^{-1} (kg F)^{-1}$.
 - F - hmotnosť rýb v jazere v kilogramoch v čase t ; $[F] = kg$.
- $\alpha_4 \frac{C_O}{C_O + L_1} D$ - hmotnosť kyslíka v kilogramoch spotrebovaného pri procese rozkladu mŕtveho materiálu na dne jazera za jeden deň v čase t . Tvar člena je vysvetlený v kapitole 1.5 a na vyjadrenie závislosti medzi rozkladom a koncentráciou dostupného kyslíka v jazere sme použili tvar (1.29).

Ak je v jazere malá koncentrácia dostupného kyslíka:

$$\alpha_4 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \approx \alpha_4 \frac{C_O}{L_1} D \quad (1.61)$$

- $\frac{\alpha_4}{L_1}$ - hmotnosť spotrebovaného kyslíka v kilogramoch v čase t pri rozklade jedného kilogramu odumretých tiel rastlín a živočíchov za jeden deň vzhľadom na koncentráciu dostupného kyslíka v jazere; $[\frac{\alpha_4}{L_1}] = (kg \text{ kyslík}) (\text{deň})^{-1} (kg D)^{-1}$.

Ak je v jazere veľká koncentrácia dostupného kyslíka:

$$\alpha_4 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \approx \alpha_4 D \quad (1.62)$$

- α_4 - hmotnosť kyslíka v kilogramoch v čase t , ktorý je spotrebovaný pri rozklade jedného kilogramu odumretých tiel rastlín a živočíchov za jeden deň; $[\alpha_4] = kg \text{ kyslík}) (\text{deň})^{-1} (kg D)^{-1}$.

Časovú zmenu množstva kyslíka v jazere v čase t za jeden deň môžeme napísať v tvare:

$$\begin{aligned}
 \frac{O(t + \Delta t) - O(t)}{\Delta t} &= F_{O_2}S_0 + P_{leaf}S_{leaf} - \alpha_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} S_{leaf} - \alpha_2 A \\
 &\quad - \alpha_3 F - \alpha_4 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\
 I_{leaf} &= \frac{kT_0(t)}{1 - m} e^{-kL} e^{-k_t d} \\
 L &= \frac{a}{S_1 h \rho} P^q \\
 P_{leaf} &= \frac{\alpha I_{leaf} P_{max}}{\alpha I_{leaf} + P_{max}}
 \end{aligned} \tag{1.63}$$

Ak uvažujeme dva režimy vzhľadom na koncentráciu dostupného kyslíka v jazere, môžeme časovú zmenu množstva kyslíka napísať pomocou aproximácií v tvare:

- režim s malou koncentráciou dostupného kyslíka v jazere v čase t :

$$\begin{aligned}
 \frac{O(t + \Delta t) - O(t)}{\Delta t} &= F_{O_2}S_0 + P_{leaf}S_{leaf} - \alpha_1 S_{leaf} - \alpha_2 A \\
 &\quad - \alpha_3 F - \alpha_4 \frac{C_O}{L_1} D
 \end{aligned}$$

- režim s veľkou koncentráciou dostupného kyslíka v jazere v čase t :

$$\frac{O(t + \Delta t) - O(t)}{\Delta t} = F_{O_2}S_0 + P_{leaf}S_{leaf} - \alpha_1 S_{leaf} - \alpha_2 A - \alpha_3 F - \alpha_4 D$$

1.9 Zrhnutie predpokladov a modelu

Konečný model má tvar:

$$\begin{aligned}
\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} &= E(t) + \left[1 - \left(\frac{C_N}{C_{soil}}\right)^2\right] \rho_1 S_1 - K_0 \frac{C_N}{C_N + L_0} P \\
&\quad + K_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\
\frac{\tilde{A}(t + \Delta t) - \tilde{A}(t)}{\Delta t} &= \beta_1 P \tilde{A} - \delta_1 \tilde{A} \tilde{F} - \gamma_1(O, P) \tilde{A} \\
\frac{\tilde{F}(t + \Delta t) - \tilde{F}(t)}{\Delta t} &= \beta_2 A \tilde{F} - \theta \tilde{F} - \gamma_2(O, A) \tilde{F} \\
\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} &= \beta_3 \frac{C_N}{C_N + L_0} \frac{PK}{P + K} H(t - t_0) - \delta_2 P \tilde{A} - \gamma_3(O, N) P \\
\frac{D(t + \Delta t) - D(t)}{\Delta t} &= \gamma_1(O, P) A + \gamma_2(O, A) F + \gamma_3(O, N) P + \theta_1 \delta_1 A \tilde{F} \\
&\quad + \theta_2 \delta_2 P \tilde{A} - \varphi \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\
\frac{O(t + \Delta t) - O(t)}{\Delta t} &= F_{O2} S_0 + P_{leaf} S_{leaf} - \alpha_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} S_{leaf} - \alpha_2 A - \alpha_3 F \\
&\quad - \alpha_4 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\
I_{leaf} &= \frac{kT_0(t)}{1 - m} e^{-kL} e^{-kt} \\
L &= \frac{a}{S_1 h \rho} P^q \\
P_{leaf} &= \frac{\alpha I_{leaf} P_{max}}{\alpha I_{leaf} + P_{max}} \\
\gamma_1(O, P) &= \gamma_{1min} \frac{O + a_1}{O + b_1} \frac{P + a_2}{P + b_2} \\
\gamma_2(O, A) &= \gamma_{2min} \frac{O + a_3}{O + b_3} \frac{A + a_4}{A + b_4} \\
\gamma_3(O, N) &= \gamma_{3min} \frac{O + a_5}{O + b_5} \frac{A + a_6}{A + b_6}
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Predpoklady:

- zanedbanie teploty,

- všetky listy v tvare tenkého kvádra s malou hrúbkou,
- uzavretý vrchlík,
- rovnomerné rozloženie,
- potravinový reťazec,
- regulovaný rybolov,
- len ponorené rastliny a voľne plávajúce riasy,
- okamžitá adaptácia rastlín,
- dýchanie v rovnakom množstve aj v noci, aj cez deň,
- rastliny dýchajú len listami,
- všetky rastliny v jednej hĺbke, a to v hĺbke 6 metrov.

Kapitola 2

Analýza modelu

Pokúsme sa zistiť equilibriá nášho namodelovaného dynamického systému.

Položme všetky pravé strany modelu položíme rovné nule:

$$\begin{aligned} 0 &= E(t) + \left[1 - \left(\frac{C_N}{C_{soil}}\right)^2\right] \rho_1 S_1 - K_0 \frac{C_N}{C_N + L_0} P + K_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\ 0 &= \beta_1 P \tilde{A} - \delta_1 \tilde{A} \tilde{F} - \gamma_1(O, P) \tilde{A} \\ 0 &= \beta_2 A \tilde{F} - \theta \tilde{F} - \gamma_2(O, A) \tilde{F} \\ 0 &= \beta_3 \frac{C_N}{C_N + L_0} \frac{PK}{P + K} H(t - t_0) - \delta_2 P \tilde{A} - \gamma_3(O, N) P \\ 0 &= \gamma_1(O, P) A + \gamma_2(O, A) F + \gamma_3(O, N) P + \theta_1 \delta_1 A \tilde{F} + \theta_2 \delta_2 P \tilde{A} - \varphi \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\ 0 &= F_{O_2} S_0 + P_{leaf} S_{leaf} - \alpha_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} S_{leaf} - \alpha_2 A - \alpha_3 F - \alpha_4 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \end{aligned} \quad (2.2)$$

Máme dve možnosti:

1. $A = F = P = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= E(t) + \left[1 - \left(\frac{C_N}{C_{soil}}\right)^2\right] \rho_1 S_1 + K_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\ 0 &= \varphi \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\ 0 &= F_{O_2} S_0 - \alpha_4 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \end{aligned} \quad (2.3)$$

Opäť máme dve možnosti:

(a) $D = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= E(t) + \left[1 - \left(\frac{C_N}{C_{soil}}\right)^2\right] \rho_1 S_1 \\ 0 &= F_{O_2} S_0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nakoľko v jazere nie sú ani rastliny, ani zvieratá, ani ryby, živiny nie sú spotrebovávané, preto do jazera len prichádzajú a postupne sa ustália na nasýtenej hodnote $C_{N_{full}}V$. Kyslík taktiež nie je spotrebovávaný, preto sa ustáli na nasýatenej koncentrácii jazera $C_{O_{full}}V$. Prvé ekvilibrium je:

$$N^* = C_{N_{full}}V, A^* = 0, F^* = 0, P^* = 0, D^* = 0, O^* = C_{O_{full}}V \tag{2.5}$$

a predstavuje mŕtve jazero.

(b) $O = 0$:

$$0 = E(t) + \left[1 - \left(\frac{C_N}{C_{soil}}\right)^2\right] \rho_1 S_1 \tag{2.6}$$

Keď v jazere nie je kyslík, to znamená, že v jazere nepriebeha rozklad, teda D je ľubovoľné. Živiny sa správajú ako v predchádzajúcej situácii. Druhé ekvilibrium je:

$$N^* = C_{N_{full}}V, A^* = 0, F^* = 0, P^* = 0, D^* = \text{ľubovoľné}, O^* = 0. \tag{2.7}$$

2. $A = 0$ - ak v jazere nie sú žiadne zvieratá, masťáva smrť všetkých rýb,

pretože ryby nemajú žiadnu potravu. Preto aj $F = 0$. Dostávame:

$$\begin{aligned} 0 &= E(t) + \left[1 - \left(\frac{C_N}{C_{soil}}\right)^2\right] \rho_1 S_1 - K_0 \frac{C_N}{C_N + L_0} P + K_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\ 0 &= \beta_3 \frac{C_N}{C_N + L_0} \frac{PK}{P + K} H(t - t_0) - \gamma_3(O, N)P \\ 0 &= \gamma_3(O, N)P + -\varphi \frac{C_O}{C_O + L_1} D \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$0 = F_{O_2} S_0 + P_{leaf} S_{leaf} - \alpha_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} S_{leaf} - \alpha_4 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \quad (2.9)$$

Nájdenie ekvilibria pre takýto systém je netriviálny problém.

Vzniká submodel, ktorý je zjednodušením pôvodného modelu za predpokladu, že v jazere nie sú žiadne rastliny ani ryby. Submodel predstavuje zjednodušenú dynamiku. Nakoľko skúmaným problémom nie je premnoženie rýb alebo zvierat, ale je ním premnoženie rastlín, populácia rýb a zvierat zásadne neovplyvní úbytok živín, kyslíku, či rastlín. A to vzhľadom na skutočnosť, že množstvo zvierat rastie s množstvom rastlín a s množstvom zvierat zas množstvo rýb. Tento submodel je preto vyhovujúci na pozorovanie kritického stavu jazera a ďalej sa zameriame na kľúčové mechanizmy vzniku tohto stavu už len v redukovanom modeli.

2.1 Redukovaný model

$$\begin{aligned} \dot{N} &= E(t) + \left[1 - \left(\frac{C_N}{C_{soil}}\right)^2\right] \rho_1 S_1 - K_0 \frac{C_N}{C_N + L_0} P + K_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\ \dot{P} &= \beta_3 \frac{C_N}{C_N + L_0} \frac{PK}{P + K} H(t - t_0) - \gamma_3(O, N)P \\ \dot{D} &= \gamma_3(O, N)P - \varphi \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\ \dot{O} &= F_{O_2} S_0 + P_{max} \frac{\alpha I_{leaf}}{\alpha I_{leaf} + P_{max}} S_{leaf} - \alpha_1 \frac{C_O}{C_O + L_1} S_{leaf} - \alpha_4 \frac{C_O}{C_O + L_1} D \\ \gamma_3(O, N) &= \left(1 - (1 - \gamma_{3min}) \frac{ON}{(O + b_5)(N + b_6)}\right) \end{aligned}$$

Správanie redukovaného modelu analyzujeme pomocou simulácií v programe Matlab 7.0.1, pričom používame hodnoty koeficientov znázornené v tabuľke 2.1. Hodnoty koeficientov sme vybrali z dostupnej literatúry a článkov, čo je taktiež uvedené v tabuľke. Koeficienty, ktorých hodnoty sme nedokázali zistiť, sme sa na základe informácií o jazere Peck pokúsili vhodne odhadnúť. Napríklad koeficient ρ_1 , ktorý predstavuje priemernú hmotnosť živín v kilogramoch, ktoré prenikajú do jazera jedným m^2 za jeden deň, sme odhadli na základe informácií o malom povodí jazera, o pôde chudobnej na živiny a o tvrdosti horniny. Podobne koeficient K_1 , ktorý predstavuje hmotnosť uvoľnených živín pri rozklade jedného kilogramu odumretého materiálu za jeden deň, nebolo možné určiť z dostupnej literatúry vzhľadom na komplikovanosť bakteriálneho rozkladu prebiehajúceho na dne jazera. Uvoľňovanie živín pri rozklade je totiž spojené s procesom mineralizácie, nitrifikácie a pod., teda by sme potrebovali zistiť napríklad mieru mineralizácie a nitrifikácie. Pri koeficientoch K_2 a K_0 sa vyskytol problém. Pretože pod pojmom živiny rozumieme viacero látok, nebolo možné nájsť hodnoty, ktoré by zahŕňali všetky. Preto sme ako zástupcu živín zvolili dusík. Problém predstavujú aj koeficienty b_5 a b_6 , pretože úmrtnosť sa obyčajne nepoužíva v podobe, v akej ju používame v tejto práci a nie je možné nájsť pre ne odporúčané hodnoty. Veľký vplyv na správanie redukovaného má parameter K , ktorého hodnotu sa nám tiež nepodarilo zistiť.

2.1.1 Jazero s nedostatkom živín

$N = 500$, $P = 1500$, $D = 0$, $O = 900$, $E(t) = 0$ - predpokladajme, že na začiatku je v jazere 500 kg živín, 1500 kg rastlín, 900 kg rozpusteného kyslíka a žiaden odumretý materiál. Máme teda jazero s malým množstvom živín. Na obrázku 2.1 môžeme vidieť, že živiny v prvom roku veľmi rýchlo klesajú. Hmotnosť suchej masy rastlín sa na začiatku roka tiež pomaly znižuje, čo je spôsobené tým, že sa nachádzajú vo vegetačnom období. Keď sa vegetačné obdobie končí, teda v 90-ty deň, nastáva prudký nárast suchej masy rastlín, čo zvyšuje hmotnosť rozkladaného materiálu v jazere. Na konci vegetačného

Tabuľka 2.1: Použité hodnoty koeficientov

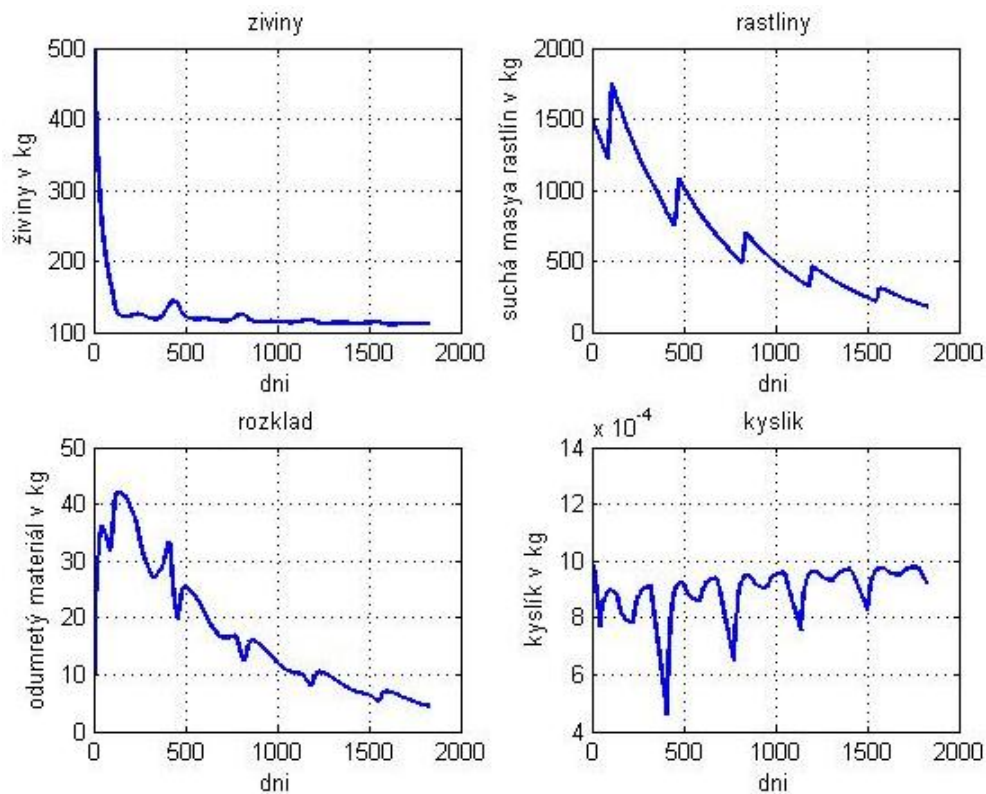
| Koeficient | Hodnota | Jednotky | Zdroj |
|-----------------|---------------|---|-------|
| C | 0.003 | $(kg \text{ živín}) m^{-3}$ | [15] |
| ρ_1 | 0.00000001 | $(kg \text{ živín}) (\text{deň})^{-1} m^{-2}$ | odhad |
| S_1 | 81000 | m^2 | odhad |
| K_0 | 0.02 | $(kg \text{ živín}) (kg \text{ masy rastlín})^{-1} (\text{deň})^{-1}$ | [1] |
| L_0 | 0.001 | $(kg \text{ živín}) m^{-3}$ | [1] |
| K_1 | 0.1 | $(kg \text{ živín}) (kg D)^{-1} (\text{deň})^{-1}$ | odhad |
| L_1 | 0.0001 | $(kg \text{ kyslíka}) m^{-3}$ | [1] |
| K_2 | 0.2 | $(\text{deň})^{-1}$ | [1] |
| K | 3000 | $(kg \text{ masy rastlín})$ | odhad |
| γ_{3min} | 0.001 | $(\text{deň})^{-1}$ | [1] |
| b_5 | 1 | - | odhad |
| b_6 | 0.001 | - | odhad |
| φ | 0.1 | $(\text{deň})^{-1}$ | [9] |
| $k_{O_2}(t)$ | 1-0.5 | $(\text{deň})^{-1} m^{-2}$ | odhad |
| V | 891000 | m^3 | odhad |
| P_{max} | 0.0432 | $(kg \text{ kyslíka}) (\text{deň})^{-1} m^{-2}$ | [1] |
| α | 0.000864 | $(kg \text{ kyslíka}) (W \text{ deň } PAR)^{-1}$ | [1] |
| k | 0.5 | $(m^2 S_1)(m^2 \text{ listu})^{-1}$ | [1] |
| k_t | 1 | m^{-1} | [9] |
| d | 6 | m | odhad |
| m | 0.1 | - | [1] |
| a | 1 | $kg^{(1-a)} m^{-2}$ | odhad |
| h | 0.001 | m | odhad |
| ρ | 200 | $(kg \text{ masy rastlín}) m^{-3}$ | [12] |
| q | $\frac{3}{5}$ | - | odhad |
| α_1 | 0.0055296 | $(kg \text{ kyslíka}) m^{-2} (\text{deň})^{-1}$ | [5] |
| α_4 | 0.12 | $(kg \text{ kyslíka}) (kg \text{ masy rastlín})^{-1} (\text{deň})^{-1}$ | [11] |
| O_{air} | 0.001 | $(kg \text{ kyslíka}) m^{-3}$ | odhad |
| S_0 | 54000 | m^2 | odhad |
| $I(0)(t)$ | 800 | $W m^{-2}$ | [5] |

obdobia rastliny prestávajú rásť, ďalej len prežívajú. Zmenu v ich množstve spôsobuje len odumieranie v dôsledku starnutia, ktoré je väčšie, pretože živiny prudko klesli. Zvyšuje sa rozkladný materiál, ktorý kladie vysoké nároky na kyslík, preto kyslík prudko klesá, čo taktiež ovplyvňuje umieranie rastlín. Nakoľko je kyslíku málo, rozklad sa spomaľuje. Zásoby kyslíka sú zväčšované počas jarného a jesenného obratu. Jarné a jesenné prísuny kyslíka sú jasne viditeľné na obrázku. Keď sa množstvo kyslíka zväčší, rozklad sa opäť zrýchli a s ním sa mierne zvýšia aj živiny. Toto zvyšovanie živín je však nedostatočné. Pri ďalšom ukončení vegetačného obdobia síce rastliny opäť začínajú rásť, ale tentokrát pomalšie. Takýto cyklus sa opakuje každý rok a množstvo a rast rastlín sa v dôsledku nedostatku živín rok čo rok znižuje. Znižuje sa preto aj hmotnosť odumretého materiálu v jazere. Kyslík sa pomaly stabilizuje. Straty kyslíka v období zimy a leta už nie sú také veľké a jeho množstvo sa približuje nasýtenej hodnote. Skúsme sa pozrieť ako bude jazero vyzerat' až po 10 rokoch. Očakávame, že množstvo rastlín sa bude ďalej znižovať, až kým sa rastliny nedostanú na 0. Prípadne sa stabilizujú na veľmi nízkych hodnotách, ak bude prienik živín do jazera dostatočný na to, aby nevymreli úplne. Vzhľadom na malý prísun živín do jazera, však očakávame úplne vymretie rastlín.

Obrázok 2.3 znázorňuje stav jazera v počas 15 rokov. Vidíme, že pokles rastlín sa síce výrazne spomalil, hmotnosť suchej masy rastlín sa pohybuje okolo malých hodnôt, no aj naďalej klesá. To je spôsobené tým, že pokles živín sa spomalil. Obrázkom 2.2, ktorý znázorňuje stav po 25 rokoch, sa očakávania úplného vymretia rastlín potvrdili. Jazero sa stáva mŕtvym bez akéhokoľvek života, kyslík sa stabilizuje na nasýtenej hodnote a živiny budú pomalým tempom stúpať, až kým nedosiahnu taktiež nasýtenú hodnotu, čo je vlastne ekvilibrium (2.5).

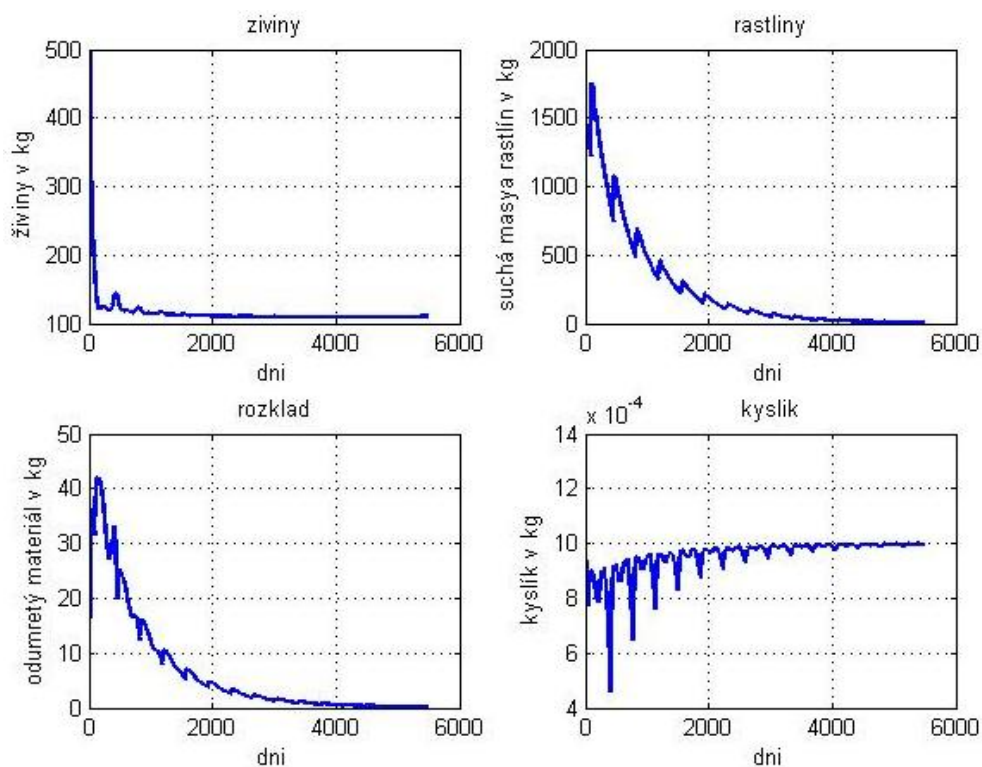
2.1.2 Vplyv hnojenia na jazero s nedostatkom živín

- $N = 500$, $P = 1500$, $D = 0$, $O = 900$, $E(800) = 3000$ - opäť predpokladajme počiatočné podmienky ako v úvodnom prípade. Tentokrát sa



Obr. 2.1: Grafické znázornenie správania submodelu po dobu 5 rokov pri počiatkových podmienkach $N = 500$, $P = 1500$, $D = 0$ a $O = 900$.

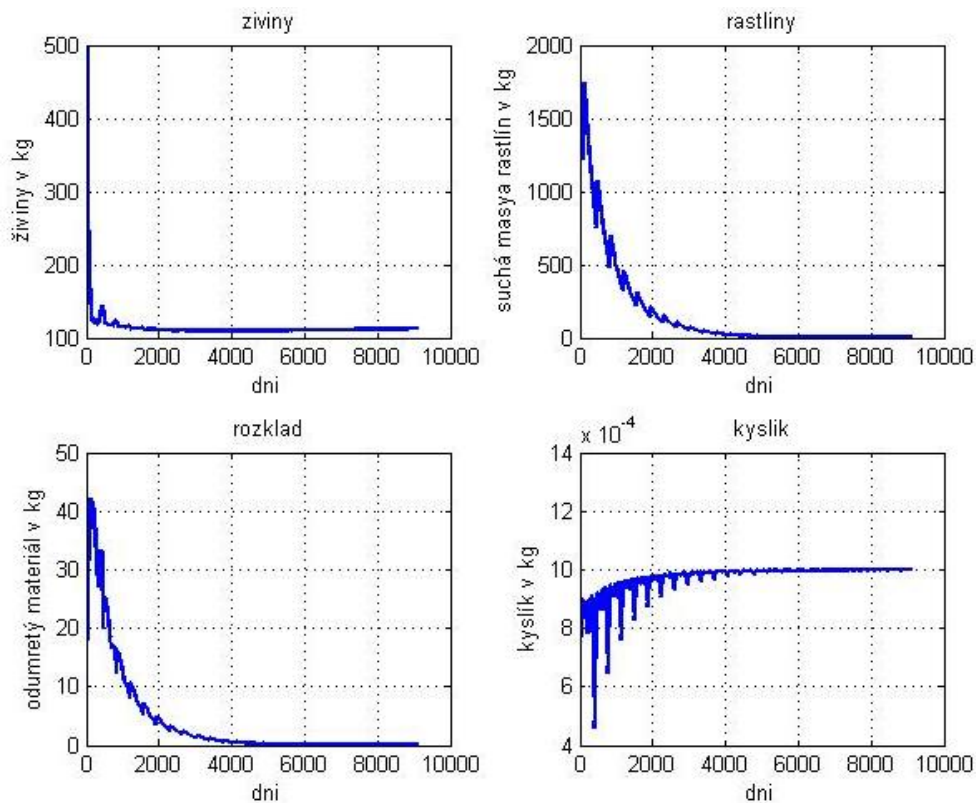
pokúsime nedostatok živín podporiť hnojením jazera, $E(800) = 3000$. Hnojenie nastane v 70. deň v treťom roku pridaním živín vo výške 3000 kg. Hmotnosť pridaných živín je síce veľká, ale vhodná vzhľadom na veľkosť a nastavenie odhadovaných koeficientov. Efekt pridaných živín na rastliny je znázornený na obrázku 2.4. Nastáva obrovský nárast suchej masy rastlín, v dôsledku čoho rapídne stúpa množstvo odumretého materiálu, ktorý kladie veľké nároky na spotrebu kyslíka. Zásoby kyslíka sa takmer úplne vyčerpajú, čím nastáva prudké odumieranie rastlín. Tesne pred úplným vyčerpaním zásob a úplným vymretím rastlín nastáva prísun kyslíka prostredníctvom jarného obratu. Rastliny mierne vzrastú, počas vegetačného obdobia sa znížia, no pri ďalšom



Obr. 2.2: Grafické znázornenie správania submodelu po dobu 15 rokov pri počiatkových podmienkach $N = 500$, $P = 1500$, $D = 0$ a $O = 900$.

raste opäť hmotnosť suchej masy rastlín stúpne, tentokrát výraznejšie. To je spôsobené prísunom živín, ktoré boli uvoľnené rozkladom nadmerného množstva mŕtvych rastlín. Dostatok kyslíka spôsobil úplný rozklad. Živiny pomaly začínajú klesať, v dôsledku zvyšujúceho sa rastu rastlín. Pozrime sa, čo sa deje v ďalších rokoch.

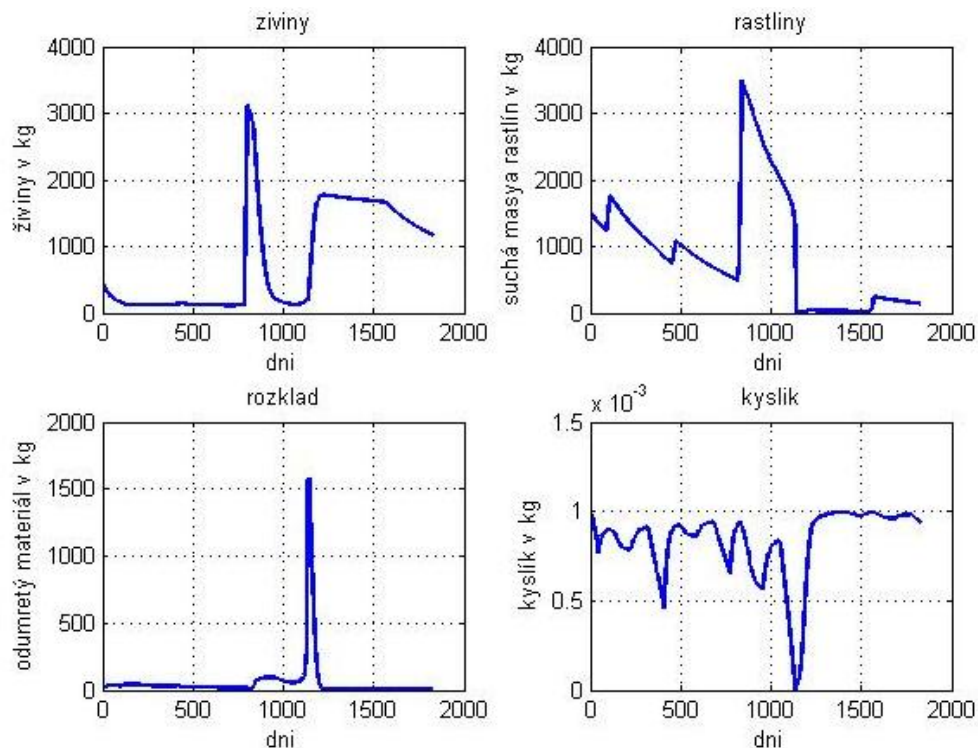
V ďalších rokoch, sa rast suchej masy rastlín v jednotlivých mimovegetačných obdobiach ešte naďalej zvyšuje, ako je zobrazené na obrázku 2.5. Živiny však naďalej klesajú, povodie jazera nie je schopné zásobovať vodu dostatočným množstvom živín, a preto pri ďalšom poklese živín sa rast rastlín začína opäť znižovať. V prípade, že nenastane opätovné hnojenie, vzniká opäť mŕtve jazero, s nasýtenou hodnotou kyslíka a



Obr. 2.3: Grafické znázornenie správania submodelu po dobu 25 rokov pri počiatkových podmienkach $N = 500$, $P = 1500$, $D = 0$ a $O = 900$.

živín.

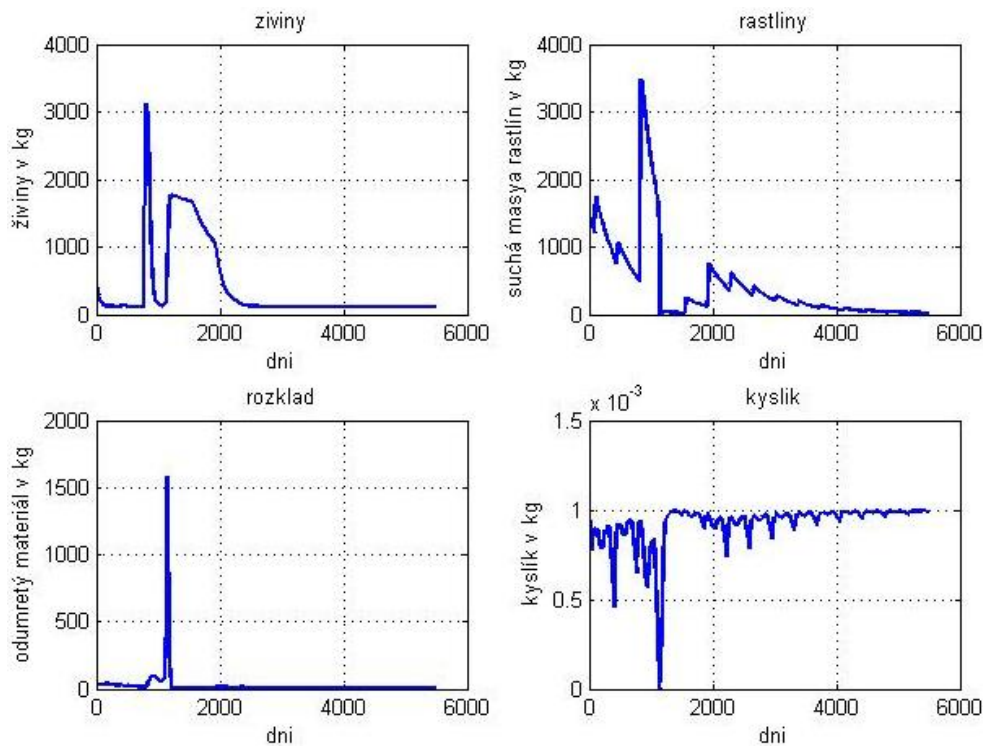
- $N = 500$, $P = 1500$, $D = 0$, $O = 900$ a $E(800) = 10000$ - do jazera pridávané obrovské množstvo živín v tom istom čase, ako v predchádzajúcom prípade a na obrázku 2.6 sledujeme, ako jazero zareaguje. Hmotnosť suchej masy rastlín na začiatku pozorovaného obdobia pomaly klesá. Pridaním živín opäť nastáva prudký nárast rastlín, a teda aj odumretého materiálu. Požiadavky na kyslík sú privysoké, dochádza k vyčerpaniu zásob kyslíka a k vymretiu rastlín. Vzniká mŕtve jazero s nasýteným množstvom kyslíka. Živiny budú v dôsledku prieniku veľmi pomalým tempom stúpať, až kým nedosiahnu nasýtené množstvo v



Obr. 2.4: Grafické znázornenie správania submodelu po dobu 5 rokov pri počiatkových podmienkach $N = 500$, $P = 1500$, $D = 0$, $O = 900$ a $E(800) = 3000$.

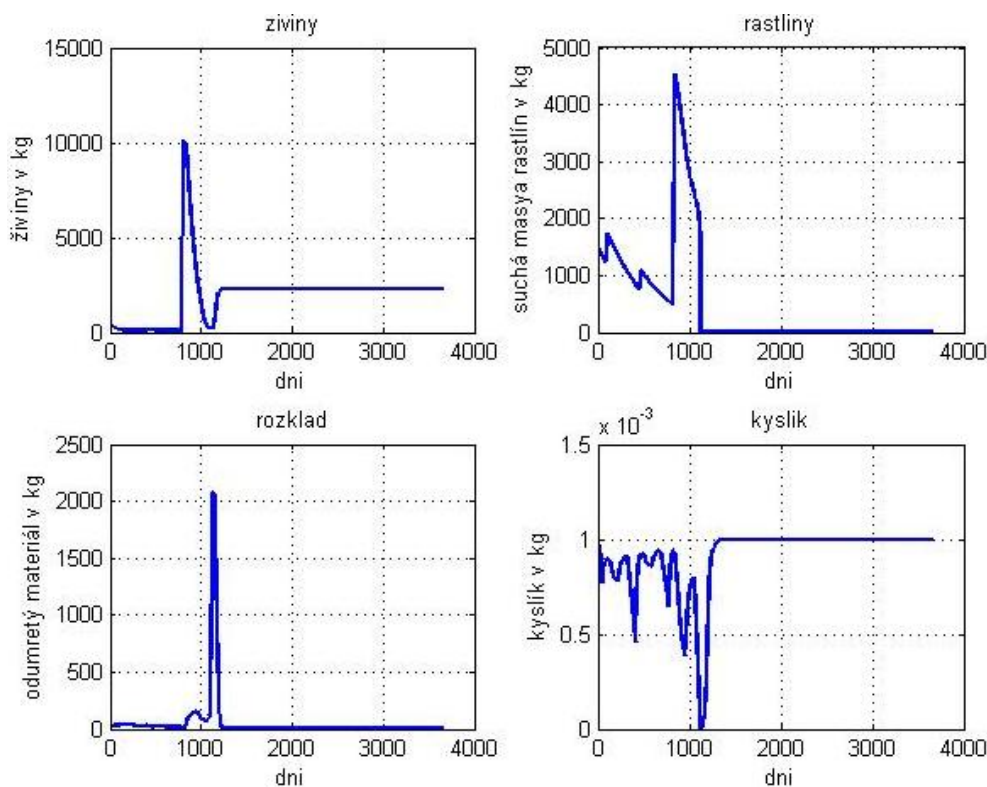
jazere.

- $N = 500$, $P = 1500$, $D = 0$, $O = 900$ a $E(800) = 700$ - živiny sú opäť externe pridané do jazera v tom istom čase, tentokrát však v podstatne menšom množstve. Hmotnosť suchej masy rastlín začiatkom pozorovaného obdobia klesá, strieda sa rast a vegetačné obdobie. Aj keď je rast rastlín na začiatku výrazný, väčšie zmeny v množstve kyslíka a pokles živín spôsobujú, že rastlín je čoraz menej. Nastáva externé prídanie živín. Ako vidíme na obrázku 2.7, prídanie živín zvyšuje rast, to zvyšuje opäť rast hmotnosti odumretej hmoty na dne jazera. Kyslík síce klesá, ale vzhľadom na množstvo prídanych živín pokles kyslíka nie je až taký extrémny ako v prípade, keď bolo do jazera prídanych viac ži-



Obr. 2.5: Grafické znázornenie správania submodelu po dobu 15 rokov pri počiatočných podmienkach $N = 500$, $P = 1500$, $D = 0$, $O = 900$ a $E(800) = 3000$.

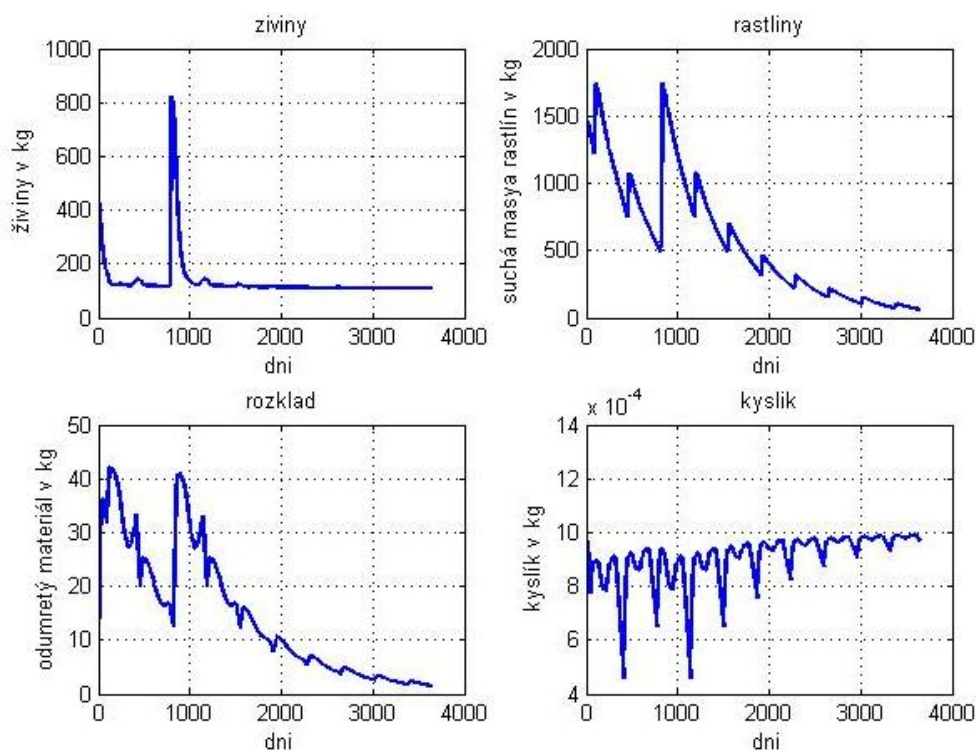
vín. Kyslík sa obnoví pri jarnom alebo jesennom obrate, nastáva nárast rastlín, živiny sú pomaly spotrebovávané. Rozklad sa znižuje vzhľadom na kolísanie množstva kyslíka. Vidíme teda, že pridanie menšieho množstva živín pomohlo zvýšeniu rastu suchej masy rastlín. Ak by neboli znova pridané živiny do jazera, jazero by sa s postupom času stalo opäť mŕtvym jazerom. Tentokrát by sa tak vďaka dodaným živinám stalo podstatne neskôr. Ak by živiny boli opäť pridané do jazera v takomto čase, rastliny by sa opäť spamätali a stav mŕtveho jazera by sa oddialil.



Obr. 2.6: Grafické znázornenie správania submodelu po dobu 10 rokov pri počiatkových podmienkach $N = 500$, $P = 1500$, $D = 0$, $O = 900$ a $E(800) = 10000$.

2.1.3 Jazero s dostatkom živín

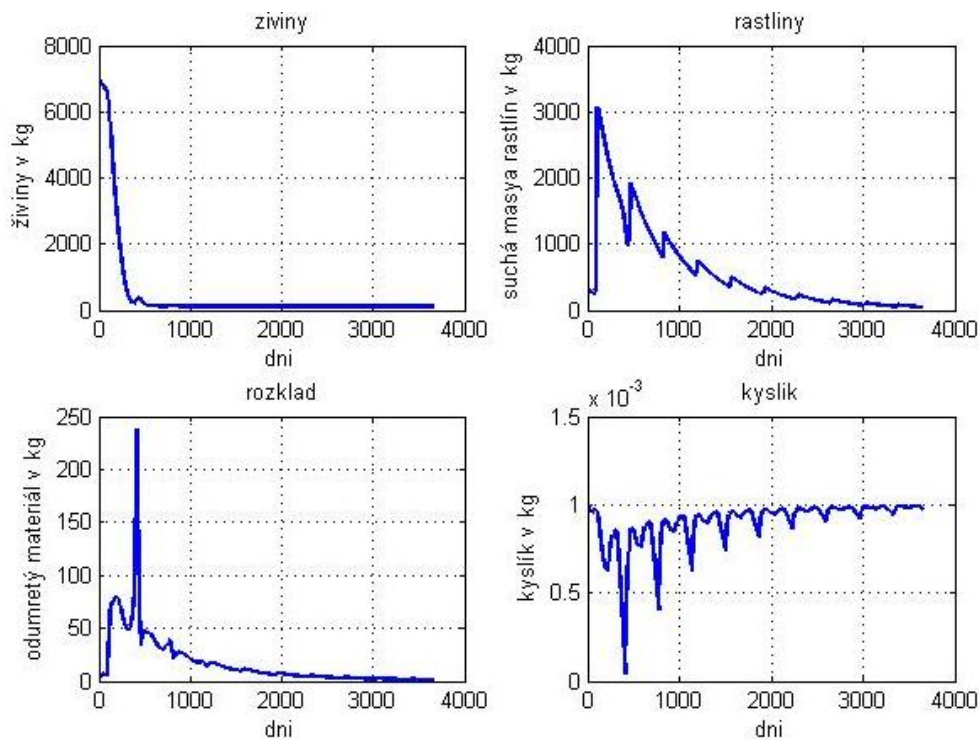
- $N = 7000$, $P = 300$, $D = 0$, $O = 900$, $E(t) = 0$, $K = 3000$ - predpokladajme, že na začiatku je v jazere dostatok živín a málo rastlín. Máme teda jazero s dostatkom živín. Obrázok 2.8 znázorňuje situáciu v jazere počas 10 rokov. Vidíme, že okmažite nastáva prudký pokles živín a prudký nárast hmotnosti suchej masy živín, pretože končí vegetačné obdobie. Popri prudkom raste však rastliny aj umierajú, čo sa odráža vo zvýšení hmotnosti odumretého materiálu na dne jazera. Keď sa opäť začne vegetačné obdobie, rastliny začínajú rýchlo umierať, pretože klesnutie živín zvýšilo úmrtnosť rastlín. Následkom toho sa prudko zvyšuje



Obr. 2.7: Grafické znázornenie správania submodelu po dobu 10 rokov pri počiatkových podmienkach $N = 500$, $P = 1500$, $D = 0$, $O = 900$ a $E(800) = 700$.

množstvo odumretého materiálu, ktorý kladie vysoké nároky na kyslík. Kyslík preto prudko klesne, čím sa ešte viac zvýši úmrtnosť rastlín. Pred úplným vyčerpaním sa kyslík doplní prostredníctvom obratu. Živiny postupne klesajú a to spôsobuje, že rastlín je v jazere čoraz menej, taktiež odumretého materiálu a kolísanie kyslíka sa postupne stabilizuje. Jazero sa s postupom času stáva mŕtvym jazerom, čo signalizuje, že model alebo parametre v tejto chvíli nie sú v poriadku, nakoľko ide o jazero s dostatkom živín a s malým množstvom rastlín v počiatkovej podmienke. Z obrázku je zrejmé, že problém bude v rovnici pre rastliny, nakoľko veľmi prudko vyrastú až do výšky 3000kg. Preto sa pokúsime zmeniť parameter K , ktorého hodnotu, alebo odporúčané hodnoty sa

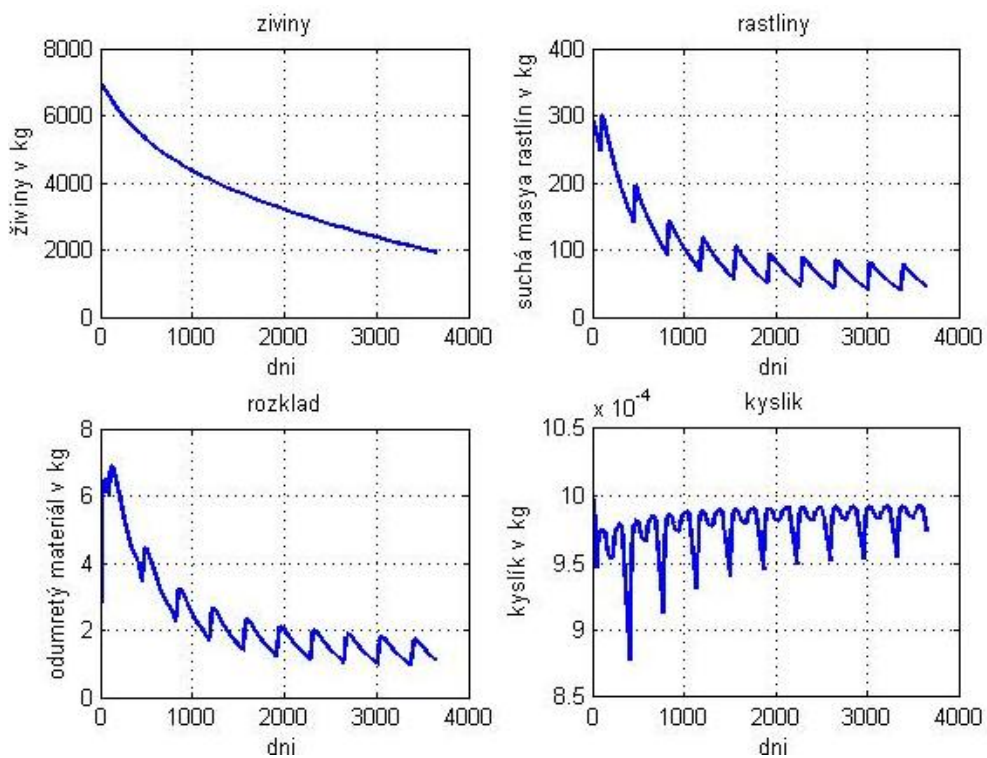
nám nepodarilo nájsť v publikovanej literatúre a článkoch.



Obr. 2.8: Grafické znázornenie správania submodelu po dobu 10 rokov pri počiatkových podmienkach $N = 7000$, $P = 300$, $D = 0$, $O = 900$, $E(t) = 0$, $K = 3000$.

- $N = 7000$, $P = 300$, $D = 0$, $O = 900$, $E(t) = 0$, $K = 20$ - predpokladajme rovnaký počiatkový stav v jazere ako v predchádzajúcom prípade. Parameter K nastavíme na oveľa nižšiu hodnotu, $K = 20$, čo obmedzí a spomalí rast rastlín. Na obrázku 2.9, že teraz už vyzera situácia raálnejšie. Živiny klesajú oveľa pomalšie, pretože rastlín v jazere je menej. Na začiatku pozorovaného obdobia hmotnosť suchej masy rastlín mierne klesá, pretože sa nachádzajú vo vegetačnom období. Po ukončení vegetačného obdobia začína rásť. Ten spôsobuje nárast odumretého materiálu. Vzhľadom na hmotnosť rastlín a odumretého materiálu hmotnosť kyslíka v jazere sa mení. S poklesom živín

klesá aj rast a množstvo rastlín, a teda aj odumretej hmoty . Klesanie živín sa postupom času spomaľuje. Ako vidíme na obrázku, hmotnosť suchej masy rastlín sa postupne ustalaľuje, taktiež kyslík a odumretý materiál sa postupne stabilizuje. Toto správanie už vystihuje reálnu správanie jazera v prípade, že vo vode je dostatok živín.



Obr. 2.9: Grafické znázornenie správania submodelu po dobu 10 rokov pri počiatočných podmienkach $N = 7000$, $P = 300$, $D = 0$, $O = 900$, $E(t) = 0$, $K = 20$.

Záver

Cieľom práce bolo modelovanie ekosystému jazera Peck, následné použitie modelu na vysvetlenie neúspechu pri riešení kritického stavu jazera a prípadné navrhnutie riešenia, ktoré by prinášalo lepšie výsledky.

Pomocou dostupných zdrojov a doterajších modelov sme vytvorili model, ktorý sme za predpokladu zanedbania vplyvu zvierat a rýb zjednodušili na redukovaný model. Vzhľadom na potravinový reťazec v jazere Peck bol tento model dobrý na pozorovanie kľúčových mechanizmov vzniku kritického stavu. Pred začatím numerických experimentov sme potrebovali nastaviť hodnoty parametrov. Pri hľadaní čo najreálnejších hodnôt nastal problém. Mnohé koeficienty sa nám síce nepodarilo nájsť, ale na základe informácií o jazere a jeho ekologických vlastnostiach, sme boli schopní ich vhodne odhadnúť. Napokon nám zostali tri parametre, ktoré sme nastavili tak, aby bolo možné skúmať jazero, ktorého počiatkové podmienky zodpovedajú jazeru s malým množstvom živín.

Pomocou numerických simulácií sme zistili, že jazero s malým množstvom živín postupom času končí v ekvilibriu, ktoré predstavuje mŕtve jazero. Pridaním živín raz za pozorované obdobie nastal prudký nárast rastlín, čo spôsobilo nárast rozkladaného materiálu na dne jazera. Nakoľko rozklad má veľké požiadavky na množstvo dostupného kyslíka, pri náraste odumretého materiálu kyslík prudko klesol. Zistili sme, že pokles kyslíka závisí od množstva pridaných živín. Ak je množstvo pridaných živín priveľké, nárast odumretého materiálu a jeho následne požiadavky na množstvo kyslíka sú také veľké, že dochádza k vyčerpaniu zásob kyslíka a následnej smrti zadusením. Ak je však

množstvo pridaných živín vhodne zvolené, kyslík sa stíha obnovovať a je podporený rast rastlín. Pre udržanie uspokojujúceho stavu jazera, je potrebné toto hnojenie pravidelne opakovať. Ak by externé pridávanie živín skončilo, živiny začnú klesať v dôsledku spotreby a pomalého prísunu živín z povodia jazera. Jazero by sa opäť po čase dostalo do ekvilibria, ktorým je mŕtve jazero.

Numericky sme simulovali aj jazero s dostatkom živín. Zistili sme, že parametre, ktoré boli vhodné pre jazero s malým množstvom živín, neboli vyhovujúce pre jazero s dostatkuom živín. Dôležitú úlohu zohrávajú hodnoty parametrov vystupujúcich v úmrtnosti a parameter K . Pre tieto parametre nám neboli známe ani približné hodnoty. Citlivosť modelu na tieto parametre je taká veľká, že malá zmena jedného parametru, vedie k zmenám správania sa modelu. Dôsledkom toho môže byť aj fakt, že hnojenie, ktoré sme aplikovali v simuláciach je veľké vzhľadom k reálnemu hnojeniu. Preto by bolo zaujímavé bližšie a podrobnejšie sa venovať odhadnutiu týchto koeficientom a ich vplyvu na dynamiku jazera pri rôznych počiatočných podmienkach.

Literatúra

- [1] THORNLEY, J.H.M. a FRANCE, J.: *Mathematical Models in Agriculture: Quantitative Methods for the Plant, Animal and Ecological Sciences*, 2. vydanie, Trowbridge, Cromwell Press, 2007, ISBN 0-85199-010-X
- [2] Masarykova Univerzita, Přírodovědecká fakulta: *B Metabolické procesy*, [online], dostupné na internete: http://www.sci.muni.cz/~fyzrost/part_02.pdf
- [3] ŠETLÍK, SEIDLOVÁ, ŠANTRUČEK: *Fyziologie rastlin: Fyziologické stránky fotosyntézy: Závislost fotosyntézy na vnějších faktorech*, [online] dostupné na internete: http://kfr.prf.jcu.cz/download/lectures/KFR220/KFR220_S06.pdf
- [4] ALAN, D. JASSABY a TREVOR PLATT: *Mathematical formulation of the relationship between photosynthesis and light for phytoplankton*, Bedford Institute of Oceanography, Dartmouth, Nova Scotia, 1976, [online], dostupné na http://www.aslo.org/lo/toc/vol_21/issue_4/0540.pdf
- [5] LAMBERS, H., F. STUAERT CHAPIN III a THIJS L. PONS: *Plant Physiological*, 2. vydanie, Springer Science+Business Media, New York, ISBN 978-0-387-78340-6
- [6] BRUNOVSKÝ P.: *Prof. RNDr. Pavol Brunovsky', DrSc.*, 2011, [online], dostupné na internete: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky/>

- [7] ALGONQUIN PARK: *Peck Lake Trail: Ecology of an Algonquin Lake*, The Friends of Algonquin Park, Whitney, 2000, ISBN 1-895709-55-5
- [8] ROMEO, J. R., HIPSEY, M. R., ANTENUCCI, J. P. A HAMILTON, D: *Computational Aquatic Ecosystem Dynamics Model: CAEDYM v2*, 2004, [online], dostupné na internete: http://www.cwr.uwa.edu.au/services/models/legacy/model/caedym/ScienceManual/CAEDYMv2p2_SciManual.pdf
- [9] DORTE KRAUSE-JENSEN, KAJ SAND-JENSEN: *Light attenuation and photosynthesis of aquatic plant communities*, American Society of Limnology and Oceanography, 1998
- [10] OLAF A. CIRPKA A PETER K. KITANIDIS: *Impact of Biomass-Decay Terms on the Simulation of Pulsed Bioremediation*, [online], dostupné na internete: <http://info.ngwa.org/gwol/pdf/001066804.PDF>
- [11] G. FRED LEE, PhD, PE, DEE a ANNA JONES-LEE, PhD: *Synthesis and Disussion of Findings on the Causes and Factors Influencing Low DO in the San Joaquin River Deep Water Ship CHannel near Stockton, CA: Including 2002 Data*, G. Fred Lee Associates, California, [online], dostupné na internete: http://www.waterboards.ca.gov/waterrights/water_issues/programs/bay_delta/wq_control_plans/1995wqcp/exhibits/dk/dk-exh-08.pdf
- [12] P. CASTRO-DIEZ, J. P. PUYRAVAUD A J. H. C. CORNELISSEN: *Leaf structure and anatomy as related to leaf mass per area variation in seedlings of a wide range of woody plant species an types*, Springer, 2000, [online], dostupné na internete: http://www2.uah.es/dep_ecologia_pcastro/Curriculum/11.Publicaciones/14.Oecologia2000.pdf
- [13] <http://www.esf.edu/efb/schulz/Limnology/PhytoEcol2.html>
- [14] http://www.sjrdotmdl.org/concept_model/phys-chem_model/basics.htm

[15] http://grounds-mag.com/mag/grounds_maintenance_keeping_eye_nitrogen/

Prílohy

Prísun kyslíka z atmosféry

```
function K=obrat(t)
tm = mod(t,365);
if ((tm<=45) | (tm>=318))
    K=0;
else
    if (((tm>=45) & (tm<=136)) | ((tm>=228)&(tm<=318)))
        K=1;
    else
        K=0.5;
    end
end
end
```

Ožiarenie vrchlíka

```
function I=svetlo(t)
global lightpar
%I=lightpar*(1-cos(2*pi*t))/2;
I=lightpar*1/(2*sqrt(2));
```

Vegetačné obdobie

```
function H=heaviside(t)
if ((mod(t,365)>=90) & (mod(t,365)<=110))
    H=1;
else
    H=0;
end
end
```

Parametre, model

```
function dydt=jazero2(t,y)
dydt = zeros(size(y));

global lightpar
global V
```

```

C=0.003;
V=891000;
rho1=0.00000001;
S1=81000;
S0=54000;
K0=0.02;
L0=0.001;
K1=0.1;
L1=0.1*10^(-3);
K2=0.2;
gammamin=0.001;
b5=1;
b6=0.001;
K=3000;
fi=0.1;
Oair=0.001;
Pmax=0.0432;
k=0.5;
m=0.1;
alfa=0.864*10^(-3);
d=6;
a=1;
rho=200;
h=1*10^(-3);
q=3/5;
alfa1=0.55296*10^(-2);
alfa4=0.12;
kt = 1;
lightpar = 800;

N=y(1);
P=y(2);
D=y(3);
O=y(4);

co=0/V; %koncentrácia kyslíka v jazere, kg/m^3
cn=N/V; %koncentrácia živín v jazere, kg/m^3

Sleaf = (a/(rho*h))*P^q;
Ileaf=(k*svetlo(t)/(1-m))*exp(-k*(Sleaf/S1))*exp(-kt*d);
gamma=1-(1-gammamin)*((0*N)/((0+b5)*(N+b6)));
R=co/(co+L1);

dydt(1)=(1-((cn)^2/(C^2)))*rho1*S1-K0*(cn/(cn+L0))*P+K1*R*D;
dydt(2)=K2*(cn/(cn+L0))*((P*K)/(P+K))*heaviside(t)-gamma*P;

```



```
dydt(3)=gamma*P-fi*R*D;
dydt(4)=obrat(t)*(Oair-co)*S0+(Pmax*alfa*Ileaf/(alfa*Ileaf+Pmax))*Sleaf-alfa1*R*Sleaf-alfa4*R*D;
```

Numerické riešenie pomocou ode45

```
clf
clear
global V
TK1 = 800;   %%% cas hnojenia
TK2 = 10*365; %%% kolko este bezi po hnojeni program
T0 = 0; %%% pocitacny cas simulacie
kick = 0; %%% hnojenie - pridať jednotky
OPTIONS=odeset('MaxStep',0.2); %%% nastavenie max. dlzky integracneho kroku
[t1,y1]=ode45('jazero4',[T0:0.1:TK1],[7000 300 0 900],OPTIONS); %%% integracia po hnojenie
incond = [y1(end,1)+kick y1(end,2) y1(end,3) y1(end,4)]; %%% hnojenie
[t2,y2]=ode45('jazero4',[t1(end):0.1:TK2],incond,OPTIONS); %%% integracia po skonceni hnojenia
t = [t1; t2];
y = [y1; y2];

%% max oxygen concentration 0.03 [0.01-0.03]
%% N ziviny 1000
%subplot(2,2,1);
figure(1);
grid on
subplot(2,2,1)
plot(t,y(:,1),'LineWidth',1.5);
grid on
title('ziviny');
xlabel('dni');
ylabel('Živiny v kg');
subplot(2,2,2);
plot(t,y(:,2),'LineWidth',1.5);
grid on
title('rastliny');
xlabel('dni');
ylabel('suchá masya rastlín v kg');
subplot(2,2,3);
plot(t,y(:,3),'LineWidth',1.5);
grid on
title('rozklad');
xlabel('dni');
ylabel('odumretý materiál v kg');
subplot(2,2,4);
plot(t,y(:,4)/V,'LineWidth',1.5);
grid on
title('kyslík');
xlabel('dni');
ylabel('kyslík v kg');
```