Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Oceňovanie reálnych opcií pomocou stochastického dynamického programovania

Diplomová práca

Bratislava 2012

Bc. Jozef Mesároš

Oceňovanie reálnych opcií pomocou stochastického dynamického programovania

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bc. Jozef Mesároš

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

9.1.9 Aplikovaná matematika 1114
Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce:

Mgr. Jana Szolgayová, PhD.

BRATISLAVA 2012

46416332

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jozef Mesároš
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Oceňovanie reálnych opcií pomocou stochastického dynamického programovania

Cieľ: Teória reálnych opcií sa zaoberá oceňovaním investičnej príležitosti - t.j. aká je hodnota pre firmu mať právo, nie však povinnosť, investovať (nie nutne okamžite, ale do stanoveného času) do daného projektu za vopred stanovenú expiračnú cenu. Investíciou firma získa hodnotu projektu, ktorá však v skutočnosti nebýva deterministická, ale môžeme ju vnímať ako stochastický proces. V princípe teda môžme hodnotu reálnej opcie vnímať ako súčasnú hodnotu projektu za predpokladu, že do neho firma investuje v najvhodnejší čas. Oceňovanie reálnych opcií vedie v praxi na úlohy stochastického optimálneho riadenia. Cieľom práce bude na konkrétnom modeli numericky odvodiť a analyzovať jednak hodnotu danej reálnej opcie, ako aj vyplývajúcu stratégiu kedy je najlepšie opciu použiť.

Vedúci: Mgr. Jana Szolgayová, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum zadania: 13.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry pod vedením vedúcej diplomovej práce.

V Bratislave, apríl 2012 ....

Jozef Mesároš

Poďakovanie

Úprimne ďakujem svojej vedúcej diplomovej práce Mgr. Jane Szolgayovej, PhD. nielen za odborné rady, cenné návrhy a prospešné pripomienky, ktorými mi pomohla pri vypracovaní tejto práce, ale predovšetkým jej ďakujem za trpezlivosť a povzbudivé slová, ktoré ma nesmierne motivovali k svedomitému štúdiu.

Rovnako úprimne ďakujem svojej najbližšej rodine, ktorá o mne nikdy nepochybovala a verila mi nielen počas celého vysokoškolského štúdia.

V neposlednom rade čo najsrdečnejšie ďakujem ,,Božej ruke", ktorá ma viedla tým správnym smerom, a zázračnému osvieteniu s ,,tfuj, tfuj, tfuj" pre šťastie, ktoré bolo zlomovým bodom k úspešnej ceste dokončenia tejto záverečnej práce.

Abstrakt

MESÁROŠ, Jozef: *Oceňovanie reálnych opcií pomocou stochastického dynamického programovania* [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; Školiteľ: Mgr. Jana Szolgayová, PhD., Bratislava, 2012, 59 strán

V predloženej diplomovej práci sa zaoberáme oceňovaním investičných príležitostí s teóriou reálnych opcií, ktorá umožňuje lepšie zachytenie flexibility v investičnom rozhodovaní na rozdiel od klasickej metódy čistej súčasnej hodnoty NPV. Bližšie vysvetľujeme pojem reálna opcia, ktorá predstavuje pre firmu hodnotu mať právo, nie však povinnosť, investovať do daného projektu kedykoľvek v priebehu jeho životnosti za vopred stanovenú expiračnú cenu. Využitím teoretických poznatkov reálnych a finančných opcií poukážeme na ich analógiu a následne si sformulujeme jednoduchý model oceňovania reálnych opcií. Hlavným cieľom práce bude na tomto konkrétnom modeli numericky odvodiť a analyzovať pomocou stochastického dynamického programovania jednak hodnotu danej reálnej opcie, ako aj vyplývajúcu stratégiu kedy je najlepšie opciu použiť. A na záver práce, aplikujúc týchto výsledkov sa zaoberáme analýzou citlivosti nielen hodnoty opcie, ale aj investičného pravidla na zmeny vstupných parametrov daného modelu.

Kľúčové slová: reálna opcia, investičná analýza, stochastické dynamické programovanie, Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica

Abstract

MESÁROŠ, Jozef: *Evaluation of real options by stochastic dynamic programming* [Diploma thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Jana Szolgayová, PhD., Bratislava, 2012, 59 pages

The content of diploma thesis deals with the evaluation of investment opportunities with real option theory, allowing better capturing the flexibility within the investment decision making, in comparison to classical method of net current value NPV. We explain closer the notion of real option, that represents the value for the company to have the right but not the duty, to invest into project anytime during its lifetime, worth the determined expiration price. Using the theoretical knowledge of real and financial options we can point out their analogy and then we can form a simple model of real option evaluation. The main aim of the work, within the context of this particular model, will be to derive numerically and analyse with stochastic dynamic programming, either the value of the real option as well as the resulting strategy when it is the best to use the option. At the end of our work, applying the results we deal with sensibility analyse of option value as well as the investment rule to change the input parameters of stated model.

Keywords: real option, investment analysis, stochastic dynamic programming, Black-Scholes partial differential equation

Obsah

Zoznam obrázkov

Úvod

Investícia je v praxi najčastejšie ponímaná ako vklad určitého finančného obnosu do investičného projektu (napr. obstaranie akcií alebo hmotného a nehmotného majetku) s cieľom maximalizovať budúci zisk. Jednou zo základných metód hodnotenia investičného rozhodovania je metóda čistej súčasnej hodnoty NPV (Net Present Value), práve ktorá je aj najčastejšie používaná. Síce táto metóda má najväčšiu vypovedaciu schopnosť oproti ostatným metódam, avšak slabo popisuje bežné problémy investorov. Neuvažuje s možnosťou odloženia investičného rozhodnutia na neskôr, čím investori strácajú možnosť robiť svoje rozhodnutia s cieľom maximalizácie budúceho zisku na základe vývinu situácie na trhu.

Práve tento problém, možnosť odloženia investičného rozhodnutia na neskôr, rieši teória reálnych opcií, kde jednou z možností chápania investície je právo, nie však povinnosť, investovať do určitého projektu, napríklad produkujúceho danú komoditu[1], v priebehu nejakého časového obdobia, životnosti projektu. Reálne opcie sú tak flexibilným prístupom v investičnom rozhodovaní investorov.

Teoretické základy reálnych opcií sú odvodené od analógie s finančnými opciami, kde je zameranie sa najmä na výpočet samotnej ceny opcie v danom čase, zatiaľ čo v reálnych opciach je zameranie sa hlavne na výpočet investičného pravidla, ktoré investorovi napovie kedy má využiť možnosť investovať a naopak, kedy má s týmto rozhodnutím počkať.

V princípe teda môžme hodnotu reálnej opcie vnímať ako súčasnú hodnotu projektu za predpokladu, že do neho investor investuje v najvhodnejší čas. Oceňovanie reálnych opcií v praxi vedie na úlohy stochastického optimálneho riadenia.

[1]Komodity patria do skupiny reálnych investičných inštrumentov, ktoré majú na rozdiel od finančných inštrumentov hmatateľnú podobu, ako napríklad investície do nehnuteľností, drahých kovov alebo do nerastných surovín.

Práca je rozdelená na tri kapitoly, na záver ktorých pridávame appendix. V prvej kapitole hovoríme o základnej metóde hodnotenia investičných rozhodnutí, o metóde čistej súčasnej hodnoty NPV, ktorú následne porovnávame s metódou hodnotenia pomocou reálnej opcie. Ďalej v prvej kapitole vysvetľujeme základnú definíciu reálnej opcie a poukazujeme na jej analógiu s klasickou americkou opciou. Záver kapitoly patrí zhrnutiu hlavných rozdielov medzi reálnou a finančnou opciou.

Oceňovanie reálnych opcií je obsahom druhej kapitoly. V jej úvode formulujeme základný problém oceňovania reálnej opcie, ktorý po teoretickej stránke riešime s najviac používanými metódami, ako napríklad pomocou analógie s americkými opciami, metódou binárnych stromových modelov, Monte Carlo metódou najmenších štvorcov alebo metódou stochastického dynamického programovania, pričom práve jej venujeme najväčšiu pozornosť. Záver kapitoly patrí schematickému náčrtu teoretického algoritmu, pomocou ktorého vieme oceniť daný sformulovaný problém.

V tretej a zároveň v poslednej kapitole tento daný problém numericky riešime pre konkrétne hodnoty parametrov. Následne sa venujeme analýze citlivosti jeho riešenia na zmeny vstupných parametrov a porovnávame investičné pravidlo daného problému pre jednotlivé zmeny.

A na záver týchto troch kapitol diplomovej práce uvádzame appendix, v ktorom sa nachádzajú potrebné teoretické poznatky, ktorých znalosť je nevyhnutným predpokladom k pochopeniu oceňovania reálnych opcií pomocou stochastického dynamického programovania.

Kapitola 1

Reálne opcie

V prvej kapitole oboznámime čitateľa so stručným historickým a súčasným pohľadom na teóriu reálnych opcií, ako aj s jej základnými pojmami. Vysvetlíme si základnú definíciu investície ponímanú v ekonómii a spoločné charakteristiky všetkých investícií. Ďalej si povieme o základnej metóde hodnotenia investičných rozhodnutí, ktorou je metóda čistej súčasnej hodnoty NPV. Následne ju porovnáme s metódou hodnotenia pomocou reálnej opcie, kde zavedieme i základnú definíciu reálnej opcie, ako aj jej analógiu s finančnou opciou. A na záver prvej kapitoly si zhrnieme hlavné rozdiely medzi finančnou a reálnou opciou, ktoré podrobne rozpíšeme, aby si čitateľ tak mohol utvoriť komplexnejší prehľad o reálnych opciach, následne čoho bude lepšie pripravený na pochopenie oceňovania s reálnymi opciami, ktorému sú venované zvyšné kapitoly tejto diplomovej práce.

1.1 Historický pohľad na teóriu reálnych opcií

Klasické opcie na akcie sa po prvýkrát spomínali v 90-tych rokoch 18-teho storočia na newyorskej burze v Spojených štátoch amerických. Ich oceňovanie robilo značné problémy až do obdobia 70-tych rokov 20-teho storočia, keď sa začali objavovať prvé sľubné teoretické modely na oceňovanie konkrétnych opcií. Najväčšie napredovanie v oceňovaní opcií nastalo v roku 1973, o čo sa zasúžili dvaja ekonómovia M. S. Scholes, R. C. Merton a teoretický fyzik F. Black.

Podarilo sa im odvodiť model, ktorý dnes poznáme ako Black-Scholesov model, za ktorý obdržali v roku 1977 Nobelovu cenu za ekonómiu. Ich model je založený na riešení parciálnych diferenciálnych rovníc, ktoré popisujú vývoj ceny opcie. O dva roky neskôr, v roku 1979, prišli Cox, Ross a Rubinstein s novým modelom na oceňovanie opcií, ktorý poznáme pod názvom Cox-Ross-Rubinsteinov model. Tento model sa zaraďoval medzi numerické metódy na výpočet ceny opcie, kde najznámejšia z nich je metóda binomických stromov (Podrobnejšie v ich knihe [1].).

Aj napriek tomu, že na finančných trhoch sa s opciami dlho obchodovalo, pojem reálna opcia je relatívne nový. Tento pojem bol zavedený profesorom S. C. Myersom z MIT Sloan School of Management v roku 1977. Po prvýkrát ho spomenul vo svojom článku [2], v ktorom reálnu opciu definuje ako možnosť rozšírenia, prípadne odloženia projektu na základe nových budúcich informácií.

Reálne opcie využívajú silný aparát z finančných opcií, dôsledkom čoho je pojem reálnej opcie blízky k pojmu finančnej opcie. V súčasnosti sú reálne opcie veľmi obľúbené v oblastiach akademických výskumov a sú i jednou z najnovších metód oceňovania investícií a akcií na finančných trhoch. Profesor L. Trigeorgis (University of Cyprus) je po dlhé roky popredným profesorom práve v tejto oblasti. Publikoval niekoľko veľmi významných kníh, ako i článkov (Napríklad [3], [4], [5].), s ktorými sa mu podarilo rozšíriť pohľad na reálnu opciu aj prostredníctvom laika. Najväčší ohlas v tomto pohľade prostredníctvom laika zaznamenal v článku publikovaného v *,,The Wall Street Journal"*. Ďalšími významnými profesormi v tejto oblasti sú E. Schwartz a M. Brennan (UCLA Anderson), ktorí teóriu reálnych opcií obohatili svojimi poznatkami publikovaných v odborných článkoch, ako napríklad v [6], [7]. Nemenej populárnym menom je M. J. Mauboussin, ktorý je šéfom *U.S. investment strategist for Credit Suisse First Boston*, a ktorý pojem reálna opcia používa na vysvetlenie rozdielu medzi hodnotou cenných papierov firiem a vnútornou hodnotou týchto firiem. Medzi jeho najznámejšiu knihu patrí [8].

V dnešnej dobe sa metóda využívania reálnych opcií aplikuje najmä v rozhodovaní podnikoch o investíciach. Zaoberá sa výpočtom optimálneho času investície podniku, keďže reálne opcie sú vlastne funkciou neistoty v podnikaní a tým aj flexibility. Ďalej sú reálne opcie využívané hlavne v oblastiach s vysokou volatilitou (napr. ťažba prírodných zdrojov a surovín, energetika, doprava, telekomunikácie).

1.2 Investičné rozhodovanie

V knihe „*Investment under Uncertainity*" od Dixita a Pindycka [9], ktorá je celá venovaná reálnym opciam a ich oceňovaniu, nájdeme základnú definíciu investície ponímanú v ekonómii, ktorá je nasledovná:

Definícia 1.1 *[9] Investícia je akt obetovania súčasných nákladov v prospech očakávania ziskov v budúcnosti.*

V najbežnejšom ponímaní v manažmente je investícia definovaná ako použitie finančných zdrojov, najmä dlhodobejšie a najmä s cieľom dosiahnuť výnos (zisk), pričom tieto investície môžu byť rôzneho druhu, rôzneho zamerania i môžu mať rôzny účel ako aj ich funkciu.[1]

Každá investícia je niečim iným špecifická, odlišujúca sa od ostatných investícií, avšak jednotlivé investície majú i spoločné charakteristiky. Tými najzákladnejšími spoločnými charakteristikami všetkých investícií sú nasledovné:

- **Nenávratnosť**
  V prípade investícií, ktoré boli čiastočne alebo úplne zrealizované nepripadá do úvahy vrátenie vstupných nákladov, ak sa rozhodneme pre odstúpenie z možnosti investovania do daného projektu.

- **Neistota**
  Hlavnou príčinou neistoty v prípade investovania určitého finančného obnosu do daného projektu sa javí stochastický charakter veličín. Najčastejšie sú to príjmy, pretože ich časový vývoj nie je v čase rozhodnutia známy.

- **Časová flexibilita**
  Pri investičných príležitostiach máme možnosť rohodnutia sa či vôbec investovať alebo neinvestovať do daného projektu počas jeho životnosti. Teda rozhodnutie investovať môžeme tak odďalovať a tým vlastne získame čas a priestor na získanie nových prospešných informácií.

[1] Viac o podrobnom delení, ktoré vzhľadom na jeho obšírne spektrum neuvádzame, dávame do pozornosti v knihe [9].

1.3 Metóda čistej súčasnej hodnoty NPV

Metóda čistej súčasnej hodnoty NPV (Net Present Value) je jednou zo základných metód hodnotenia v oblasti investičných rozhodnutí. Práve táto metóda je najčastejšie používaná a má i najväčšiu vypovedaciu schopnosť oproti ostatným metódam. Jej využitie je zamerané hlavne v projektoch, ktoré majú dlhšie trvanie.

Hlavná myšlienka metódy NPV je založená na porovnaní všetkých budúcich diskontovaných príjmov a nákladov. Definujeme ju ako rozdiel medzi čistými budúcimi diskontovanými peňažnými príjmami plynúcich z investície a kapitálovými výdavkami vynaloženými na jej realizáciu. Je daná vzťahom

$$NPV = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t}{(1+r)^t} - I, \qquad (1.1)$$

kde C_t predstavuje peňažné toky plynúce z investície vo výške I v čase t, ktoré sú diskontované diskontnou mierou vo výške r.

V prípade, že príjmy prevyšujú náklady ($NPV > 0$), tak podľa investiňého pravidla metódy NPV by sme mali prijať rozhodnutie investovať. V opačnom prípade, ak náklady prevyšujú príjmy ($NPV < 0$), prijímame rozhodnutie neinvestovať.

Najväčšia negatívna črta tejto metódy spočíva v neuvažovaní možnosti odloženia investičného rozhodnutia na neskôr. Teda, nemáme k dispozícii možnosť získania nových informácií, ktoré by nám naše rozhodnutie uľahčili. Keďže budúce príjmy nie sú deterministické, ale majú stochastický charakter, tak je spomenuté negatívum zrejmé. Preto pre rozhodovanie sa v neistom prostredí je vhodná teória reálnych opcií, ktorá počíta i s touto možnosťou odloženia rozhodnutia na neskôr.

V investičnej metóde NPV pri nenávratnej investícii hovoríme o možnosti investovať *teraz alebo nikdy*. To znamená, že ak neinvestujeme do daného projektu teraz, tak túto investíciu nebudeme môcť už nikdy v budúcnosti zrealizovať.

V ďalšej časti si na jednoduchom príklade, ktorý je analógiou príkladu z diplomovej práce Ladislava Barkociho [10], vysvetlíme rozdiely investičného rozhodnutia medzi metódou čistej súčasnej hodnoty NPV a metódou reálnej opcie.

1.4 Porovnanie metódy NPV a reálnej opcie

Predpokladajme existenciu podniku, ktorý má možnosť rozhodnutia sa medzi investovaním a neinvestovaním do továrne, ktorá výraba určitý druh výrobku. Ďalej predpokladajme, že továreň spolu s jej strojovými zariadeniami je natoľko špecifická, že je použiteľná len na výrobu jediného výrobku. Teda, v prípade nepriaznivého vývoja situácie na trhu, podnik nemôže, resp. nevie továreň spolu s jej strojovými zariadeniami predať, čím by tak získal svoje peňažné prosriedky vo výške jeho investície späť. Tento predpoklad nám vlastne hovorí, že investícia je nenávratná.

Nech výška investície potrebná na výstavbu továrne je 4000 Eur. Kvôli jednoduchosti predpokladajme, že v prípade uskutočnenia investície továreň môže byť postavená hneď. Nech na začiatku každého roka, vrátane nultého, továreň vyrobí jeden výrobok, ktorý hneď aj predá. Zisk z predaja tohto jedného výrobku nech je 400 Eur. Na ďalší rok sa tento zisk zmení a to s pravdepodobnosťou $p = 0,5$ narastie na hodnotu 600 Eur alebo s pravdepodobnosťou $(1-p) = 0,5$ klesne na hodnotu 200 Eur. Taktiež kvôli jednoduchosti predpokladajme, že v ďalšom období sa zisk už meniť nebude a riziko zmeny tohto zisku je perfektne diverzifikovateľné. Teda, všetky budúce peňažné toky diskontujeme bezrizikovou úrokovou mierou vo výške 10 % p.a.

Vypočítame si čistú súčasnú hodnotu tejto investície v dvoch prípadoch. V prvom prípade, ak podnik investuje teraz. V druhom prípade, ak podnik počká s investíciou jeden rok, čím vlastne počká na zmenu zisku z predaja daného výrobku.

Najprv počítajme čistú súčasnú hodnotu budúcich pežných tokov pomocou metódy NPV, pričom uvažujme, že do továrne investujeme teraz.

$$NPV_1 = -4000 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{400}{(1,1)^t} = -4000 + 4400 = 400$$

Vypočítaná čistá súčasná hodnota pomocou metódy NPV je kladné číslo, čo znamená, že podnik by mal prijať rozhodnutie[2] investovať do továrne.

V tomto výpočte sme ale nezohľadnili náklady stratenej príležitosti rozhodnutia sa investovať *teraz alebo nikdy* oproti možnosti rozhodnutia sa investovať *o rok*, keď už bude známa zmena zisku. Pretože v prípade, že táto zmena zisku bude mať nepriaznivý vývoj, tak investíciu do továrne podnik neuskutoční.

[2]Podnik svoje rozhodnutie robí na základe investičného pravidla spomenutého v sekcii (1.3).

Teraz počítajme čistú súčasnú hodnotu projektu za predpokladu, že s investíciou podnik počká rok a až potom sa rozhodne či investuje alebo neinvestuje do projektu. Svoje rozhodnutie tak spraví na základe čistej súčasnej hodnoty projektu v dvoch rozličných alternatívach vývoja. Prvou alternatívou je prípadný vzrast zisku z predaja výrobku, kým druhá alternatíva predstavuje prípadný pokles. Tu ešte pripomenieme, že investícia, ktorá sa zrealizuje o rok, tak v nultom roku projekt neprináša žiadne výdavky ani príjmy.

$$\begin{aligned} NPV_2 &= 0,5max\Big\{\frac{-4000}{1,1}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{600}{(1,1)^t};0\Big\}+0,5max\Big\{\frac{-4000}{1,1}+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{200}{(1,1)^t};0\Big\} \\ &= 0,5max\Big\{\frac{-4000+6600}{1,1};0\Big\}+0,5max\Big\{\frac{-4000+2200}{1,1};0\Big\}=1181,82 \end{aligned}$$

Vypočítaná čistá súčasná hodnota projektu pomocou metódy NPV za predpokladu, že s investíciou počkáme rok a až potom sa podnik rozhodne či investuje alebo neinvestuje do továrne, vzrastie na hodnotu 1181,82 Eur.

V prípade možnosti investovania *teraz alebo nikdy* (NPV_1) by bolo správnym rozhodnutím pre podnik investovať teraz. Teda, ak tu nie je možnosť odloženia rozhodnutia či investovať alebo neinvestovať do továrne o rok, tak platí klasická metóda NPV. V tomto prípade, ale nie sú zahrnuté náklady stratenej príležitosti nevyužitia tejto možnosti, investície *o rok*. Rovnako správnym rozhodnutím by bolo investovať teraz aj vtedy, ak by v prípade nepriaznivého vývoja zisku mohol podnik svoju investíciu odvolať, čím by získal tak svoje investičné prostriedky späť. Z toho vyplýva, že na vznik nákladov stratenej príležitosti je potrebná nenávratnosť investície a možnosť odložiť čas investovania na budúcnosť.

Možnosť odložiť čas investovania na budúcnosť má svoju hodnotu. Táto hodnota predstavuje hodnotu *reálnej opcie* a určíme ju ako rozdiel medzi NPV projektu s opciou (NPV_2) a NPV projektu bez opcie (NPV_1):

$$NPV_2 - NPV_1 = 1182,82 - 400 = 782,82$$

V tomto prípade, v možnosti investície podniku do daného projektu s prislúchajúcimi alernatívnymi možnosťami vývoja zisku z predaja výrobku, je hodnota reálnej opcie, opcie odložiť investíciu 782,82 Eur.

1.5 Reálna opcia

Teória reálnych opcií predpokladá, že existuje možnosť ponúknuť firme možnosť rozhodnutia sa či investovať alebo neinvestovať do podkladového aktíva daného projektu až do expiračného času opcie. Za takéhoto predpokladu buduje aparát na hľadanie optimálneho času investovať. Teda, firma má možnosť kedykoľvek do času expirácie sa rozhodnúť, či do projektu vôbec investuje. Hodnota opcie sa môže stanoviť napríklad pomocou analógie s finančnými opciami, preto sa vyžaduje ich dobrá znalosť. Tu sa ponúka analógia podobnosti medzi finančnými a reálnymi opciami, ktorá je zrejmá z nasledovných definícií prebratých z diplomovej práce Ingrid Michnovej [11].

Definícia 1.2 *[11] Americká call (put) opcia predstavuje právo, nie však povinnosť, kúpiť (predať) podkladové aktívum (najčastejšie akciu) za vopred stanovenú expiračnú cenu kedykoľvek do času T (maturity).*

Definícia 1.3 *[11] Reálna opcia poskytuje právo, nie však povinnosť, investovať určitý finančný obnos (kúpiť dané podkladové aktívum za vopred stanovenú expiraņú cenu) do stanoveného času (maturity) a získať projekt (podkladové aktívum).*

Zo spomenutých definícií vyplýva, že investíciu ponímanú z hľadiska reálnej opcie si predstavujeme ako právo, nie však povinnosť, túto investíciu uskutočniť v ľubovoľnom čase počas životnosti projektu. Ďalej predpokladáme, že cena podkladového aktíva má stochastický vývoj, tak ako vo finančných opciach, tak aj v reálnych opciach. Investícia v reálnych opciach je považovaná za nenávratnú. To znamená, že ak firma uplatní opciu, teda sa rozhodne investovať, tak sa vzdáva možnosti uplatnenia tejto opcie v neskoršom čase. Stráca tak možnosť odkladu svojho rozhodnutia, čím jej vznikajú náklady stratenej príležitosti. Analógiu medzi finančnou a reálnou opciou najlepšie však vysvetlíme na ich vzájomnom porovnaní:[3]

- **Podkladové aktívum**

  Vo finančných opciach je podkladovým aktívom finančný nástroj, najčastejšie akcia. V reálnych opciach je ním daný investičný projekt.

[3]Porovnávame reálnu a finančnú americkú call opciu na akciu vyplácajúcu dividendy.

- **Cena akcie** S

  V reálnych opciach je cena akcie ponímaná ako hodnota daného projektu (podkladového aktíva).

- **Expiračná cena opcie** E

  V reálnych opciach expiračná cena opcie predstavuje náklady na investíciu a je označovaná písmenom I.

- **Maturita opcie** T

  Maturita opcie v reálnych opciach predstavuje čas, do ktorého je možné uskutočniť investíciu, teda uplatniť opciu.

- **Dividendový výnos** δ

  V reálnych opciach je dividendový výnos definovaný ako výnos podkladového aktíva, pod čím rozumieme peňažné toky, ktoré nám prináša investícia.

- **Bezriziková úroková miera** r

  Bezriziková úroková miera v reálnych opciach vyjadruje časovú hodnotu peňazí.

- **Volatilita akcie** σ^2

  V reálnych opciach je volatilita projektu definovaná ako rizikovosť projektu.

Hlavným rozdielom medzi finančnou a reálnou opciou je, že vo finančných opciach je zameranie sa najmä na výpočet samotnej ceny opcie v danom čase, kde v reálnych opciach sa zameriavame na výpočet investičného pravidla. Toto investičné pravidlo obsahuje v sebe informáciu, ktoré nám povie v každom čase pri akej cene projektu sa nám oplatí do daného projektu investovať.

Ďalším rozdielom medzi finančnou a reálnou opciou môžeme považovať čas do expirácie T. Zatiaľ čo pri finančných opciach býva čas do expirácie krátky, rádovo niekoľko dní, tak pri reálnych opciach sa môže jednať aj o viaceré roky.

Za ďalšiu odlišnú charakteristiku možno považovať historický vývoj ceny podkladového aktíva. Pri finančných opciach je historický vývoj ceny akcie známy, zatiaľ čo v reálnych opciach je to raritou, keďže takmer každý investičný projekt je niečim iným jedinečným.

Posledným nami spomenutým rozdielom medzi finančnou a reálnou opciou je podstata ceny podkladového aktíva. Finančné opcie vypísané na jednotlivé akcie, s ktorými sa obchoduje na finančných burzách majú fixne stanovenú cenu. Presnejšie, majiteľ takejto finančnej opcie nevie nijakým spôsobom ovplyvniť výšku ceny opcie. Pri reálnych opciach je zvykom, nie však pravidlom, že vlastník opcie na určité podkladové aktívum je rovnaká osoba, ako osoba, ktorá riadi toto podkladové aktívum. Z toho dôvodu je zrejmé, že pri zmene ceny podkladového aktíva nastane i zmena ceny reálnej opcie na dané podkladové aktívum.

Na záver prvej kapitoly venovanej teórii o reálnych opciach si v krátkosti povieme niečo o ich základných typov, resp. o základnom delení. Rovnako ako finančné opcie majú svoje základné delenie[4], tak rovnako aj reálne opcie. V dôsledku analógie podobnosti medzi finančnými a reálnymi opciami je zrejmé, že každý typ finančnej opcie má svoj ekvivalent aj v reálnych opciach.

Vzhľadom na ich veľkú rôznorodosť medzi najzákladnejšiu kategorizáciu patria nasledovné tri typy reálnych opcií:[5]

- *option to wait* - predstavuje možnosť odložit investičné rozhodnutie na neskorší okamih, v ktorom môžu byť k dispozícii nové prospešné informácie ohľadne cenového vývoja danej komodity produkujúcou určitým projektom. Takáto možnosť oddialiť rozhodnutie má určitú nezápornú hodnotu oproti možnosti rozhodnutia sa *teraz alebo nikdy*. Touto hodnotou je cena opcie vypísanej na danú komoditu. Analógiou k *option to wait* je klasická americká call opcia na akciu vyplácajúcu dividendy, kde jej expiračná cena predstavuje počiatočné náklady spojené s investíciou a dividendy korešpondujú s kladnými alebo zápornými finančnými tokmi plynúcimi z tejto investície.

- *option to abandon* - predstavuje možnosť ukončiť určitý projekt v ľubovoľnom čase pred jeho životnosťou v dôsledku nedostačujúcej, z neho plynúcej výnosnosti. Ďalej tento typ reálnej opcie zahŕňa aj možnosť predať vybavenie projektu[6], ktoré

[4]Za najzákladnejšie delenie finančných opcií považujeme delenie na *call* (kúpne) opcie a na *put* (predajné) opcie.

[5]Podrobnejší popis jednotlivých typov reálnych opcií uvádza Ingrid Michnová vo svojej diplomovej práci [11], z ktorej sme prebrali uvedenú kategorizáciu.

[6]Pod vybavením projektu si môžeme predstaviť jeho technické vybavenie, ako napríklad stroje.

bolo určené na jeho realizáciu, ak využijeme spomínanú možnosť predčasného ukončenia. Teda *option to abandon* chráni investora pred veľkými stratami v prípade nepriaznivej situácie na trhu. A tak ako prvý typ reálnej opcie bol analogický ku klasickej americkej call opcii, tak v tomto prípade je zrejmá analógia ku klasickej americkej put opcii.

- *option to switch* - predstavuje možnosť prechodu reálnej opcie od jednej alternatívy k druhej[7], pričom každá jedna alternatíva je optimálna v inej situácii a pri iných podmienkach.

V realite majú svoje najväčšie zastúpenie investičné príležitosti vyskytujúce sa v komplikovanejších formách, ktoré spadajú do najobšírnejších typov reálnych opcií, ktorými sú *compound option* a *rainbow option*. Ich komplikovanosť spočíva v možnosti umožnenia viac realizácií a v dôsledku, že takmer každá investičná príležitosť obsahuje niekoľko zdrojov náhodností.[8]

V ďalšej časti diplomovej práce budeme oceňovať reálnu opciu typu *option to wait*. Teda, reálnu opciu analogickú ku klasickej americkej call opcii na akciu vyplácajúcu dividendy. Okrem optimálnej hodnoty ceny opcie vypísanej na danú komoditu budeme počítať aj optimálny čas investície do určitého projektu, keďže typ reálnej opcie *option to wait*, ako sme spomínali, predstavuje možnosť odložiť investičné rozhodnutie na neskorší okamih.

[7]Najčastejšie sa jedná o prechod v technickom alebo softvérovom vybavení, pričom za optimálnu voľbu sa väčšinou považuje tá lacnejšia alternatíva.

[8]Jedným zdrojom náhodnosti môže byť napríklad stochastický proces premenných (ceny rôznych vstupov, resp. výstupov), ktoré obsahuje takmer každá investičná príležitosť.

Kapitola 2

Oceňovanie reálnych opcií

Po oboznámení čitateľa s pojmom reálna opcia z prvej kapitoly ho v tejto druhej kapitole oboznámime s potrebnou teóriou, ktorá sa skrýva za oceňovaním reálnych opcií. Prvým bodom bude formulácia jednoduchého problému oceňovania reálnych opcií, v ktorom si uvedieme i základné predpoklady investovania, čím čitateľa dostaneme do hlavnej podstaty tejto kapitoly. Následne stručne opíšeme po teoretickej stránke rôzne metódy, ktoré sú najviac používané na oceňovanie reálnych opcií. Najväčšiu pozornosť však budeme venovať metóde stochastického dynamického programovania, pretože práve touto metódou budeme oceňovať nami sformulovaný jednoduchý problém oceňovania reálnych opcií. A na úplný záver kapitoly si schematicky načrtneme teoretický algoritmus oceňovania tejto metódy a taktiež obzrejmíme čitateľovi čo bude vlastne výstupom nášho algoritmu, na základe ktorého sa vzhľadom na vypočítanú optimálnu hodnotu ceny reálnej opcie, tak budeme vedieť rozhodnúť pre prípadnú možnosť investície.

Teória reálnych opcií sa zaoberá oceňovaním investičnej príležitosti, t.j. aká je hodnota pre firmu mať právo, nie však povinnosť, investovať (nie nutne okamžite, ale do stanoveného času) do daného projektu za vopred stanovenú expiračnú cenu. Investíciou tak firma získa hodnotu projektu, ktorá však v skutočnosti nebýva deterministická, ale môžeme ju vnímať ako stochastický proces. Teda hodnota projektu je vlastne čistou súčasnou hodnotou NPV zvýšenou o právo prijímania neskorších rozhodnutí v dôsledku získavania nových informácií.

Jedným determinantom z hodnoty daného projektu je cena jeho podkladového aktíva, ktorá sa rovná súčasnej hodnote očakávaných budúcich peňažných tokov diskontovaných diskontnou mierou, a ktorá sa riadi stochastickým procesom, najčastejšie geometrickým Brownovým pohybom[1]. A práve tento stochastický vývoj ceny podkladového aktíva daného projektu je hlavným problémom takmer každého modelu oceňovania reálnych opcií.

S touto problematikou sa podrobne zaoberali Dixit a Pindyck, a výsledky ich pozorovania nájdeme v ich knihe [9] z roku 1994. Za hlavnú a podstatnú myšlienku teórie oceňovania reálnych opcií stanovili na výpočet investičného pravidla, ktoré nám napovie, kedy je najvýhodnejšie do daného projektu investovať. Teda, pre každý časový okamih pri akej cene by sme mali investíciu uskutočniť. V princípe tak môžeme hodnotu reálnej opcie vnímať ako súčasnú hodnotu projektu za predpokladu, že do neho firma investuje v najvhodnejší čas. Oceňovanie reálnych opcií vedie v praxi na úlohy stochastického optimálneho riadenia, práve vďaka ktorému vieme vypočítať tento najvhodnejší čas investície do daného projektu.

2.1 Formulácia modelu oceňovania reálnych opcií

Uvažujme firmu, ktorá zvažuje možnosť investovania určitého finančného obnosu do určitého projektu, ktorý produkuje danú komoditu. Predpokladajme, že cena tejto komodity je v čase premenlivá a riadená určitým stochastickým procesom. Firma sa rozhoduje optimálne a jej cieľom, resp. snahou firmy je maximalizovať svoj zisk z tejto investície, ktorú môže uskutočniť najviac jedenkrát. Ak sa firma už raz rozhodne pre možnosť investície, tak nie je možné, aby si toto svoje rozhodnutie rozmyslela, pričom jej rozhodnutie je riadené s vedomím maximalizácie očakávaného zisku.

Našou úlohou je vypočítať v každom čase až do stanoveného času projektu, do ktorého sa firma môže rozhodovať, pri akej cene komodity je pre firmu výhodné zrealizovať túto investíciu.[2]

[1] Na základe histórie geometrického Brownovho pohybu do času splatnosti projektu možno vyčísliť hodnotu aktíva v čase splatnoti, ktoré má neustály časový vývoj vykazujúci fluktuácie pôsobením burzového a mimoburzového trhu na cenu aktíva.

[2] Úloha je modifikáciou problému, s ktorým sa vo svojej práci [11] zaoberala Ingrid Michnová.

Definujme si základné predpoklady modelu:

(P0) Uvažujme úplný trh[3] vyjadrený v rizikovo neutrálnej miere, na ktorom nie je arbitráž[4].

(P1) V zmysle maximalizácie zisku nech sa firma rozhoduje optimálne. Jej rozhodnutie je riadené tak, že maximalizuje svoj očakávaný zisk.

(P2) Nech cena S_t danej komodity, ktorá spojite vypláca[5] dividendový podiel vo výške $\gamma S_t dt$ za čas dt, s ročnou dividendovou mierou[6] $\gamma \geq 0$, sleduje geometrický Brownov pohyb vyjadrený v rizikovo neutrálnej miere

$$dS = (r-\gamma)Sdt + \sigma SdW, \quad resp. \quad S_t = S_0 e^{(r-\gamma-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t}, \tag{2.1}$$

kde σ nazývame volatilitou (neistota výnosu) daného procesu, r predstavuje konštantnú v čase nemennú ročnú bezrizikovú úrokovú mieru, dS je zmena ceny akcie za nekonečne malú časovú zmenu dt, W_t predstavuje Wienerov proces, dW diferenciál Wienerovho procesu a S_0 predstavuje hodnotu daného stochastického procesu v čase $t = 0$.

(P3) Nech výška investície firmy je I a možnosť investovať do určitého projektu produkujúceho danú komoditu pripadá do úvahy najviac jedenkrát, pričom s týmto podkladovým aktívom vieme obchodovať.

(P4) Rozhodnutie investovať je nenávratné.

(P5) Nech zisk z investície definovaný funkciou $\Pi(S_t, t)$ je jednorázový a lineárny v cene S_t danej komodity.

(P6) Uvažujme firmu, ktorej životnosť je $\Delta t{\cdot}T$ rokov, po uplynutí ktorých firma úplne zaniká a s jej činnosťou nie sú spojené žiadne ďalšie výdavky.

---

[3] Úplným trhom nazývame taký trh, na ktorom existuje pre ľubovoľný derivát dokonalé zaistenie (samofinancovaná stratégia).

[4] Arbitráž je samofinancovaná stratégia, pomocou ktorej možno do konca životnosti projektu bez rizika straty dosiahnuť kladný zisk s nenulovou pravdepodobnosťou.

[5] Vyplácaním spojitých dividend samotná cena komodity klesá, čo sa prejaví na zníženom trende ceny komodity.

[6] V reálnych opciach, predstavujúce materiálne aktíva, na rozdiel od finančných opcií je k pojmu dividenda ekvivalentý pojem *convenience yield*.

(P7a) Rozhodnutie pre investíciu robí firma diskrétne, a to v časoch $0, 1, 2, \ldots, T-1$ po intervaloch Δt.

(P7b) Rozhodnutie pre investíciu robí firma spojito do konca životnosti firmy.

Definujme si funkciu $V(S,t)$ ako cenu opcie v čase t na cenu komodity $S_t = S$, ktorá sa vyvíja podľa stochastickej diferenciálnej rovnice sledujúcej geometrický Brownov pohyb (2.1). Našou úlohou je stanoviť túto cenu opcie[7] tak, aby na počiatku uzatvárania kontraktu (v čase $t = 0$) nebola zvýhodnená ani jedna strana. Teda, aby nevznikol priestor pre arbitráž, t. j. dosiahnutie bezrizikových ziskov, ktorý síce môže nastať, a ak aj nastane, tak trvá len veľmi krátko.

Neexistencia arbitráže na trhu z matematického hľadiska hovorí o tom, že existuje tzv. rizikovo neutrálna miera, vďaka ktorej vieme oceňovať reálne opcie na základe výpočtov stredných hodnôt.

2.2 Metódy oceňovania reálnych opcií

Na oceňovanie reálnych opcií sa dá využiť viacero rôznych metód. Aby si čitateľ vedel utvoriť obraz o ich hlavnej myšlienke, v tejto podkapitole si v krátkosti predstavíme tie najzákladnejšie. Najväčšiu pozornosť upriamime na metódu stochastického dynamického programovania, pretože práve ňou budeme oceňovať nami sformulovaný model v predošlej sekcii. Podrobne si túto metódu oceňovania priblížime po teoretickej stránke, sformulujeme základný problém stochastického optimálneho riadenia, na ktorý vedie, ako i uvedieme nutné a postačujúce podmienky riešenia tohto problému.

V prípade riešenia problému oceňovania reálnych opcií sa v praxi často jedná ako o prípady, kde sa firma môže rozhodovať ohľadne investície spojito, tak i o prípady, kde toto rozhodnutie môže byť robené len diskrétne vo vopred predpísaných časoch po intervaloch Δt (napr. mesiace, roky).

[7] Hľadáme hodnotu $V(S,0)$, ktorú nazývame *opčná prémia*. Opčná prémia je teda cena opcie (potenciálna hodnota práva jej uplatnenia) vyplácajúcu v čase uzavretia kontraktu. Hodnota tohto práva je stanovená na optimálnu hodnotu tak, aby v čase uzatvárania kontraktu nebola ani jedna zo strán (vypisovateľ opcie a jej budúci vlastník) dopredu zvýhodnená.

V prípade prvej alternatívy oceňovania reálnych opcií sa najviac využíva analógia problému s oceňovaním americkej opcie a na výpočet sa teda používajú aj rovnaké metódy. Metóda binárnych stromových modelov, Monte Carlo metóda najmenších štvorcov alebo metóda stochastického dynamického programovania sú vhodné v prípade druhej alternatívy. Sú to teda metódy využiteľné najmä v úlohách, kde sa firma môže rozhodovať len vo vopred predpísaných časových okamihoch.

2.2.1 Využitie analógie s americkými opciami

Analógiu medzi finančnými a reálnymi opciami sme už spomenuli v prvej kapitole v tejto diplomovej práci. Z nej priamo vyplýva, že pri spojitom rozhodovaní je problém oceňovania reálnej opcie v podstate ekvivalentný k problému oceňovania klasickej americkej opcie v dôsledku toho, že opcie tohto druhu môžeme uplatniť kedykoľvek pred ich dátumom vypršania.

V prípade, že by sa jednalo o reálnu opciu európskeho typu derivátu, tzn. právo využiť opciu je možné len v čase expirácie opcie, tak na výpočet hodnoty takejto opcie by sme mohli použiť Black-Scholesov model oceňovania derivátov (Viac v [12], str. 48-54.). Avšak väčšina reálnych opcií je amerického typu derivátu, kde opčné právo je možné uplatniť kedykoľvek v priebehu životnosti opcie. To znamená, že firma tak má možnosť svojho budúceho rozhodnutia sa ohľadne investície do danej komodity za vopred stanovenú cenu (výška investície I) kedykoľvek do expiračného času T projektu (doba životnosti projektu).

Prvé poznatky o finančných derivátoch, typu opcie, priniesli dvaja ekonómovia M. S. Scholes, R. C. Merton a teoretický fyzik F. Black vo svojich prácach [13] a [14] z roku 1973. Ich prínosom bola metóda uplatnenia parciálnych diferenciálnych rovníc pri oceňovaní finančných derivátov, a to nielen derivátu amerického typu[8].

Vďaka ich prínosu, kde časový vývoj ceny nielen americkej opcie je opísaný parabolickou parciálnou diferenciálnou rovnicou, existuje spôsob riešenia problému ocenenia americkej opcie ako úlohy s voľnou hranicou, kde zvláštnu pozornosť treba venovať okrajovým a koncovým podmienkam opcie. (Viac v appendixe v sekcii (B).)

[8]Deriváty amerického typu sa nedajú oceniť "presne", pretože neexistuje explicitný vzorec na ich oceňovanie, t. j. riešenie vždy dostaneme len ako odhad z numerickej schémy.

Uvažujme problém oceňovania reálnych opcií sformulovaný v sekcii (2.1), v ktorom sa firma môže rozhodovať spojito (P7b). Daný problém je ekvivalentný práve k problému ocenenia amerického typu derivátu, v ktorom obchodovateľným aktívom je daná komodita ceny S_t spĺňajúca predpoklad (P2). Expiračná cena investičného projektu je vo výške investície I (P3) a zisk z tejto investície je $\Pi(S_t, t)$ (P5). Potom pay-off daného problému je v tvare $max\,(\Pi(S_t, t) - I, 0)$.

Aby sme boli schopní v ľubovoľnom čase počas životnosti projektu oceniť hodnotu opcie na danú komoditu, musíme eliminovať jej náhodný člen. Podstata eliminácie spočíva v kombinácii Itôovej lemy a Δ hedgingu. Detailný postup uvádzame v appendixe v sekcii (A), ktorého výsledkom je Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica, ktorá sa používa na oceňovanie finančných derivátov. Teda hodnota reálnej opcie $V(S, t)$ je riešením Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice, v tvare

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - \gamma)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \tag{2.2}$$

na časovo premenlivej oblasti $0 < t < \Delta t{\cdot}T$ a $0 < S < S_f(t)$.

Avšak okrem samotného riešenia tejto parciálnej diferenciálnej rovnice, ktorým je výpočet hodnoty reálnej opcie[9], je úlohou stanoviť aj samotnú hranicu predčasného uplatnenia $S_f(t)$. A aby sme riešenie rovnice (2.2) boli schopní vôbec nájsť potrebujeme terminálovú (koncovú) podmienku a príslušné okrajové podmienky. Terminálovú podmienku získame tak, že sa pozrieme na pay-off reálnej opcie z modelu sformulovaného v sekcii (2.1) v čase expirácie. Dostávame ju tak v tvare:

$$V(S, \Delta t{\cdot}T) = \max(\Pi(S_{\Delta t \cdot T}, \Delta t{\cdot}T) - I, 0) \tag{2.3}$$

Okrajové podmienky[10] pre cenu amerického typu derivátu určujú priestorové ohraničenia ceny komodity S. V našom prípade sú v tvare

$$V(0, t) = 0, \quad V(S_f(t), t) = \Pi(S_f(t), t) - I, \quad \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = \frac{\partial \Pi(S_f(t), t)}{\partial S}, \tag{2.4}$$

pre krajné hodnoty ceny komodity $S = 0$ a $S = S_f(t)$.

[9] Výsledkom rovnice (2.2) je taká hodnota reálnej opcie, pri ktorej nevzniká priestor pre arbitráž, t. j. možnosť bezrizikového zisku, čo predpokladáme o úplnom trhu (P0).

[10] Práve posledné dve okrajové podmienky z (2.4) zaručujú spojitosť a C^1 hladkosť funkcie $V(S, t)$ v bode $S = S_f(t)$ na voľnej hranici $S = S_f(t)$, pre každé $0 < t < \Delta t{\cdot}T$.

Bod $S = S_f(t)$ predstavuje kritickú hodnotu investičného projektu, t. j. spúšťacia hodnota investície. Teda, je to hraničná cena uplatnenia reálnej opcie, ktorú rovnako ako hodnotu opcie nepoznáme. Z toho je zrejmé, že rovnako aj posledné dve okrajové podmienky nepoznáme.

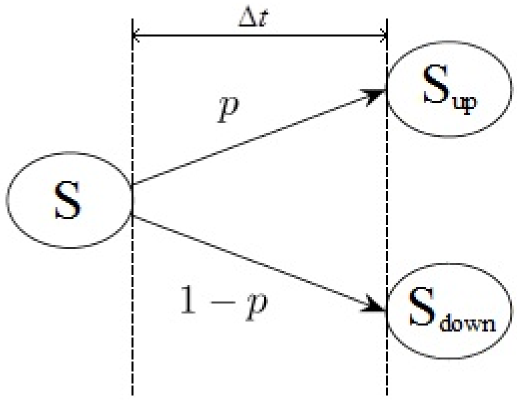
Zhrnutím uvedeného postupu ocenenia danej reálnej opcie na základe analógie s americkými opciami dostávame, že hodnotu reálnej opcie získame ako riešenie Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice (2.2) s koncovou podmienkou (2.3) a s príslušnými okrajovými podmienkami (2.4). Takýto postup vedie na úlohu s voľnou hranicou, ktorú ale nepoznáme, a tak okrem samotného riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice počítame aj túto hranicu predčasného uplatnenia opcie $S_f(t)$ a optimálny čas jej uplatnenia, ktorý predstavuje inverznú funkciu k $S_f(t)$.

V súčasnosti nie je známa presná explicitná formula pre polohu hranice predčasného uplatnenia call alebo put opcie, avšak dávame do pozornosti práce [15], [16] alebo prácu Chadama [17], v ktorých sa ich autori venujú práve tomuto problému, odvodeniu hranice predčasného uplatnenia.

Daná úloha oceňovania reálnych opcií sa reálne rieši numerickými metódami, pretože ich presné analytické riešenie nie je známe, nakoľko neexistuje explicitný vzorec na ich oceňovanie.

2.2.2 Metóda binárnych stromových modelov

Oceňovanie reálnych opcií metódou binárnych stromových modelov bolo po prvýkrát navrhnuté Coxom, Rossom a Rubinsteinom v práci [1] ako jednoduchšia alternatíva k prístupu Blacka a Scholesa. Táto metóda je v praxi najviac používaná, čoho hlavnou príčinou je jednoduchá názornosť riešenia a následne z čoho vyplýva jednoduché modelovanie vzťahov ako aj jednoduchá ekonomická interpretácia výsledkov. Metódou binárnych stromových modelov aplikovanou na oceňovanie reálnych opcií sa špeciálne zaoberali autori Copeland a Antikarov v práci [18]. Rovnakou metódou oceňovania reálnych opcií sa zaoberal i Ladislav Barkoci vo svojej diplomovej práci [10], v ktorej sa čitateľ dočíta o podrobnom postupe odvodenia vzťahov oceňovania. V našej diplomovej práci zhrnieme jeho poznatky do stručného súhrnu tých najpodstatnejších krokov, ktoré čitateľovi načrtnú hlavnú myšlienku tejto metódy. Rovnako využijeme i vzťahy prebraté z knihy [19].



Obr. 2.1: Jednokrokový binárny model

Uvažujme problém oceňovania reálnych opcií sformulovaný v sekcii (2.1), v ktorom rozhodnutie pre investíciu robí firma diskrétne po intervaloch Δt (P7a). Ďalej v predpoklade o životnosti firmy $\Delta t{\cdot}T$ rokov (P6) uvažujme počet periód $T = 1$. Teda, životnosť firmy $\Delta t{\cdot}T$ bude tak totožná s dĺžkou periódy Δt.[11]

V takom prípade hlavnou myšlienkou metódy binárnych stromových modelov je aproximácia práve tohto časového vývoja ceny komodity alternatívnym binárnym stromovým modelom za predpokladu zachovania jeho štatistík, ktorými sú stredná hodnota a variancia.

Pre jednoduchosť ilustrácie, si na jednokrokovom binárnom modeli (Obr. 2.1) odvodíme potrebné vzťahy pre výpočet súčasnej hodnoty danej reálnej opcie. Ide o jednoduchý model s diskrétnym časom na krátkom časovom úseku, *tzv. tiku*, dĺžky Δt, s ktorým geometrický Brownov pohyb aproximujeme nasledovne. Cena S, danej komodity, za nejaký krátky časový úsek Δt vzrastie nahor na hodnotu $S_{up} = S_0{\cdot}up$ alebo poklesne nadol na hodnotu $S_{down} = S_0{\cdot}down$, kde S_0 predstavuje jej počiatočnú (súčasnú) cenu (t. j. v čase $t = 0$). Nech prvý prípad nastáva s pravdepodobnosťou p a druhý prípad s pravdepodobnosťou $(1 - p)$, kde $0 < p < 1$ (Viď Obr. 2.1).

[11]Predpoklad, o totožnosti dĺžky periódy Δt a expiračného času projektu, robíme kvôli jednoduchosti predstavenia si a odvodenia uvedených vzťahov v tejto sekcii.

Hlavná myšlienka ocenenia nami sformulovaného problému, založeného na aproximácii geometrického Brownovho pohybu (2.1) alternatívnym binárnym stromovým modelom, spočíva v určení súčasnej hodnoty (v čase $t = 0$) ceny $V_0 = V(S_0, 0)$ danej reálnej opcie tak, aby nevznikol priestor pre arbitráž.

V pôvodnom Cox-Ross-Rubinsteinovom modeli jeho autori vychádzali z toho, že ceny komodity sa menia v pravidelných, rovnako veľkých skokoch, závisiacich od dĺžky časového kroku Δt, pre ktoré platí:

$$up = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{2.5}$$

$$down = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{2.6}$$

Tieto dva možné prípady vývojovej ceny S sú zvolené práve tak, aby bol binárny strom rekombinovateľný[12], a takisto aby sa spolu s jednoznačne daným p zachovala variancia, pričom hodnota p je zvolená tak, aby bola zachovaná stredná hodnota tohto alternatívneho binárneho stromového modelu. Kalibráciu takéhoto binárneho stromového modelu robíme podľa rovnice vývojovej ceny komodity vyjadrenej v reálnej miere, nie v rizikovo neutrálnej. Teda v prípade, že cena S vzrastie nahor na hodnotu S_{up}, tak pre túto cenu platí:

$$S_{up} = S_0 e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{2.7}$$

V druhom prípade, keď cena poklesne nadol na hodnotu S_{down}, platí:

$$S_{down} = S_0 e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{2.8}$$

Podstata výpočtu súčasnej hodnoty ceny reálnej opcie $V(S_0, 0)$ spočíva vo vytvorení *tzv. bezrizikového portfólia*, ktoré bude pozostávať z jednej reálnej opcie a $(-\Delta)$ podkladového aktíva vyplácajúceho spojité dividendy.

Označme si hodnotu reálnej opcie v prípade rastu ceny podkladového aktíva ako $V_{up} = V(S_{up}, \Delta t)$ a hodnotu reálnej opcie v prípade poklesu ceny podkladového aktíva ako $V_{down} = V(S_{down}, \Delta t)$. Potom parameter Δ volíme ako

$$\Delta = \frac{e^{-\gamma\Delta t}(V_{up} - V_{down})}{S_{up} - S_{down}}, \tag{2.9}$$

[12]Rekombinovateľnosť je dôležitou súčasťou viacperiodového modelu, aby sa postupným nárastom a poklesom ceny S v 1. a 2. perióde dostala tá istá hodnota, ako v prípade postupného poklesu a nárastu.

kde tento parameter Δ vlastne zaručuje, aby hodnota nášho portfólia bola rovnaká bez ohľadu na to, či cena podkladového aktíva vzrastie alebo poklesne.

Aplikujme predošlú myšlienku výpočtu súčasnej hodnoty ceny reálnej opcie na náš problém oceňovania reálnych opcií sformulovaného v sekcii (2.1), pričom berieme na vedomie platnosť nami uvažovaného predpokladu o životnosti firmy, ktorá je totožná s dĺžkou periódy Δt. Potom v jednokrokovom binárnom modeli (Obr. 2.1), v prípade vzrastu ceny podkladového aktíva, pre hodnotu opcie platí vzťah

$$V(S_{up}, \Delta t) = \max(\Pi(S_{up}, \Delta t) - I; 0), \tag{2.10}$$

a v prípade poklesu ceny

$$V(S_{down}, \Delta t) = \max(\Pi(S_{down}, \Delta t) - I; 0). \tag{2.11}$$

Z rovnosti medzi hodnotou portfólia v čase $t = 0$ a diskontovanou hodnotou bezrizikového portfólia pri vzraste ceny podkladového aktíva nahor (bez ujmy na všeobecnosti) dostávame vzťah pre výpočet hodnoty reálnej opcie v čase $t = 0$ v tvare:

$$V(S_0, 0) = \Delta S_0 + e^{-r\Delta t}(e^{-\gamma\Delta t}V_{up} - \Delta S_{up}) \tag{2.12}$$

Po dosadení za parameter Δ dostávame:

$$V(S_0, 0) = \frac{e^{-\gamma\Delta t}(V_{up} - V_{down})}{S_{up} - S_{down}}S_0 + e^{-r\Delta t}\Big(e^{-\gamma\Delta t}V_{up} - \frac{e^{-\gamma\Delta t}(V_{up} - V_{down})}{S_{up} - S_{down}}S_{up}\Big) \tag{2.13}$$

Po úprave vzťahu (2.13) dostávame nový vzťah pre výpočet hodnoty reálnej opcie v čase $t = 0$, z ktorého vyplýva, že súčasnú hodnotu danej reálnej opcie možno určiť ako diskontovanú strednú hodnotu jej budúcich hodnôt pri nových pravdepodobnostiach, a to pri rizikovo neutrálnych pravdepodobnostiach ako

$$V(S_0, 0) = e^{-r\Delta t}[qV_{up} + (1 - q)V_{down}], \tag{2.14}$$

kde q $(0 < q < 1)$[13] sa nazýva *rizikovo neutrálna pravdepodobnosť*, pre ktorú platí:

$$q = \frac{S_0 e^{(r-\gamma)\Delta t} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} \tag{2.15}$$

[13]Za predpokladu, ak by $q \notin (0, 1)$, tak by došlo k arbitráži, ktorej ale vieme zabrániť vhodnou voľbou dĺžky tiku Δt.

Zovšeobecnením jednokrokového binárneho stromového modelu je *viackrokový binárny stromový model (n-krokový)*[14], v ktorom má vzťah (2.15) všeobecný tvar

$$q = \frac{S_{now}e^{(r-\gamma)\Delta t} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}}, \tag{2.16}$$

kde S_{now} je hodnota aktíva na začiatku každého jedného tiku.

2.2.3 Monte Carlo metóda najmenších štvorcov

Monte Carlo metóda najmenších štvorcov je relatívne nová, avšak aj často používaná numerická metóda oceňovania opcií. Od ostatných metód sa líši v samotnom zameraní sa na výpočet podmienenej hodnoty očakávania. Pojem *Monte Carlo metóda* ako prví zaviedli dvaja matematici John von Neumann a Stanislaw Ulam spolu s fyzikom Nicholasom Metropolisom v roku 1940. Za zaujímavosť z histórie tejto metódy môžeme považovať práve to, že ju vytvorili počas ich práce na projekte *Manhattan Project* v Los Alamos National Laboratory, ktorý súvisel s výrobou prvej atomovej bomby použitej počas druhej svetovej vojny. Táto trojica publikovala nespočetné množstvo článkov venovaných nielen metóde Monte Carlo, napríklad [20] alebo [21].

Prvé aplikovanie Monte Carlo metódy na oceňovanie finančného typu derivátu, a to konkrétne európskeho typu derivátu, dlho nenechalo na seba čakať. Bolo to v roku 1977 a ujal sa toho profesor Phelim Boyle, ktorého poznatky sú zaznamenané v jeho odbornom článku [22]. O 19 rokov neskôr bola Monte Carlo metóda aplikovaná aj na oceňovanie opcií ázijského typu, o ktorom sa viac dočítame v článku [23], ktorého autormi sú profesori Mark Broadie a Paul Glasserman. A v roku 2001 profesori F. A. Longstaff a E. S. Schwartz v [24] podrobne popísali túto metódu aj pre oceňovanie opcií amerického typu derivátu.

Podstata Monte Carlo metódy spočíva v odhadnutí podmienenej očakávanej hodnoty výplaty v prípade držania opcie z prierezových dát, ktoré získame zo simulácií. Je relatívne ľahko aplikovateľná aj v dráhovo závislých a viacfaktorových situáciach, ako

[14] Pri výpočte súčasnej hodnoty reálnej opcie vo viackrokovom binárnom stromovom modeli môžeme postupovať „skladaním" jednokrokových binárnych modelov. Hodnoty opcie počítame postupne od konca binárneho stromu ako diskontované stredné hodnoty z hodnôt opcie pri rizikovo neutrálnych pravdepodobnostiach q.

aj v prípade všeobecných stochastických procesov. Aproximáciu získavame projekciou na lineárny priestor s konečným počtom bázových funkcií pomocou lineárnej regresie a pri metóde najmenších štvorcov postupujeme odzadu.

Vzhľadom na zložitosť a náročnosť podrobného postupu oceňovania opcií s Monte Carlo metódou najmenších štvorcov v našej diplomovej práci uvedieme len slovný priebeh oceňovacieho algoritmu v stručných bodoch, pomocou ktorého tak načrtneme jej hlavnú myšlienku. V prípade záujmu čitateľa o detailný postup odvodenia priebehu algoritmu dávame do pozornosti článok [24].

Stručný priebeh oceňovacieho algoritmu:

- Simuláciami vygenerujeme rôzne možné dráhy stochastickej vývojovej cesty ceny podkladového aktíva.
- Počítaním odzadu pre všetky časové kroky najprv určíme podmienenú hodnotu opcie v prípade jej držania, ktorú vypočítame pomocou metódy najmenších štvorcov (LS). Následne túto očakávanú podmienenú hodnotu opcie porovnávame s pevnými hodnotami peňažných tokov v prípade, že by sme opciu uplatnili, a vyberieme maximum z nich.
- Z rozhodnutí uplatnenia, resp. neuplatnenia opcie pre každý časový krok vieme určiť zrealizované peňažné toky od času 0 cez všetky dráhy vývojovej cesty funkcie a teda aj vypočítať optimálny čas uplatnenia opcie. A hodnotu opcie vypočítame ako priemer všetkých týchto diskontovaných peňažných tokov.

Poznamenajme ešte, že Monte Carlo metóda najmenších štvorcov sa počíta po intervaloch Δt pre $\Delta t \to 0$. Výsledky tejto metódy konvergujú k výsledkom, ktoré by sme dosiahli výpočtom podľa expilicitného vzorca, ako napríklad z Black-Scholesovho modelu. Presnosť odhadu výpočtu ceny opcie metódou Monte Carlo je nepriamo úmerná druhej mocnine počtu simulácií (t. j. ak chceme dosiahnuť napr. 10-krát vyššiu presnosť odhadu ceny opcie, musíme počet simulácií metódy zvýšiť 100-krát).

2.2.4 Metóda stochastického dynamického programovania

V tejto časti diplomovej práce si podrobne odvodíme metódu oceňovania reálnych opcií rovnicou stochastického dynamického programovania. Prehľad potrebnej teórie zo stochastického optimálneho riadenia, ktoré čitateľovi dávame do pozornosti na lepšie pochopenie súvislostí a danej problematiky oceňovania, odporúčame prácu [25]. Ďalej čitateľovi dávame do pozornosti knihu [26], ktorá je venovaná teórii ako aj praktickým príkladom z oblasti optimálneho riadenia.

Ešte pred samotným počítaním nášho problému oceňovania reálnych opcií sformulovaného v sekcii (2.1) si v tejto časti predstavíme schému odvodenia rovnice stochastického dynamického programovania, práve ktorou budeme daný problém riešiť. Autorom tejto schémy je Zuzana Chladná, ktorú nájdeme v jej dizertačnej práci [27]. Skôr ako si ju začneme podrobne odvodzovať sa však najprv stručne pozrieme na krátky historický úvod do danej problematiky.

Pojem *dynamické programovanie* po prvýkrát použil matematik Richard Ernest Bellman v roku 1940 na popis procesu riešenia problémov, v ktorom treba urobiť rad rozhodnutí na seba nadväzujúcich, pričom rozhodnutie v každom okamihu ovplyvňuje riešenie v nasledujúcich okamihoch, ako aj ďalšie možnosti rozhodnutia v týchto okamihoch. Bol objaviteľom rovnice na riešenie optimalizačných úloh, známej ako *Bellmanova rovnica* (Viac v [28].).

V súčasnosti v matematických optimalizačných metódach dynamického programovania hlavný spôsob riešenia Bellmanovej rovnice je spätná indukcia. Je to vlastne proces zdôvodňovania späť v čase, teda od konca problému, na nájdenie optimálneho sledu akcií. Pojem *stochastický* v názve *stochastické dynamické programovanie* predstavuje náhodnosť. Znamená to, že rovnica dynamického programovania závisí nielen od stavových a riadiacich premenných, ale aj od hodnôt realizácií náhodných premenných, ktoré vopred nie sú známe.

Teória optimálneho riadenia nachádzala spočiatku uplatnenie najmä v technických odboroch ako napríklad v kozmonautike, elektrotechnike, v prípade v robotike. V priebehu posledných desaťročí však nachádza stále viac aplikácií v ekonomických vedách a výpočtových financiách, napríklad v mikroekonomickej teórii firmy a spotrebiteľa alebo v manažmente investičných portfólií.

Uvažujme spomínaný model oceňovania reálnych opcií sformulovaný v sekcii (2.1), v ktorom rozhodnutie pre investíciu robí firma diskrétne v časoch $0, 1, \ldots, T-1$ po intervaloch dĺžky Δt (P7a). Na základe ostatných, nami definovaných základných predpokladov[15] investovania modelu, si úlohu zapíšeme ako maximalizačnú úlohu stochastického dynamického programovania:

$$\begin{aligned}
\text{maximalizovať} \quad & E\Bigg[\sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{(1+r\Delta t)^t}\Big[u_t(\Pi(S_t,t)-I)\Big]\Bigg] \\
& S_{t+1}{\sim}LN\Big(S_t e^{(r-\gamma)\Delta t}, {S_t}^2 e^{2(r-\gamma)\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t}-1)\Big), \quad t=0,1,\ldots,T-1 \\
& X_{t+1} = X_t - u_t, \quad t=0,1,\ldots,T-1 \\
& S_0 > 0 \ \text{– dané} \\
& X_0 = 1,\ X_t{\geq}0, \quad t=0,1,\ldots,T-1 \\
& u_t = \{0,1\}, \quad t=0,1,\ldots,T-1
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Stavová premenná X_t vyjadruje, či firma už na začiatku Δt - tej periódy do projektu investovala ($X_t = 0$) alebo ešte neivestovala ($X_t = 1$). Jej počiatočný stav ($X_0 = 1$) vyjadruje, že firma vstupuje do projektu v plnej výške svôjho finančného obnosu, ktorý je rozhodnutá investovať za predpokladu výnosnoti projektu. Na základe tohto predpokladu ľahko usúdime, že koncový stav stavovej premennej X_t je voľný, pretože firma svoju investíciu nemusí vôbec uskutočniť.[16] Ohraničenie na nezápornosť tejto stavovej premennej spolu s jej stavovou rovnicou zabezpečujú, že ak sme už raz investovali, tak druhýkrát už nemôžeme investovať.

Skutočnosť, či firma investuje alebo neinsvetuje do projektu závisí od vývoja ceny komodity, ktorý je stochastický, pretože rovnako ako môže cena komodity stúpnuť, tak rovnako jej cena môže aj klesnúť. Tento jej vývoj ceny popisuje stavová premenná S_t, ktorá sleduje geometrický Brownov pohyb (2.1) (P2).

Riadiaca premenná u_t vyjadruje či počas Δt - tej periódy investujeme ($u_t = 1$) alebo neivestujeme ($u_t = 0$) do projektu.

[15] Predpoklady (P0) až (P6).

[16] Čo je zrejmé zo základnej definície opcie, ktorá pre firmu predstavuje právo, nie však povinnosť, investovať do projektu.

Označme si očakávanú čistú súčasnú hodnotu budúcich peňažných tokov od času t do času T ako $V(S_t, X_t, t)$ za predpokladu, že sa firma rozhoduje optimálne vo všetkých budúcich časových okamihoch. Potom riešenie úlohy stochastického dynamického programovania (2.17) dostaneme ako riešenie Bellmanovej rovnice úlohy optimálneho riadenia s diskrétnym pevným časom a s pevným koncom:

$$\begin{aligned} V(S_t, X_t, t) = \quad & \max \left((1-u_t)\frac{1}{(1+r\Delta t)} E[V(S,1,t+1)|S_t, X_t] + u_t(\Pi(S_t,t) - I) \right) \\ & u_t \in \{0,1\} | X_t - u_t \geq 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

s koncovou podmienkou

$$V(S, X_t, T) = 0, \tag{2.19}$$

kde $t = 0, 1, \ldots, T-1$.

Prvý argument v maximalizačnej úlohe (2.18) predstavuje diskontovanú očakávanú hodnotu budúcich peňažných tokov za predpokladu, že v každom ďalšom časovom okamihu sa firma rozhoduje optimálne a neinvestuje v čase t. V čase rozhodnutia je ale známa cena komodity S_t.

Druhý argument predstavuje čistý zisk z investovania, ktorý je v skutočnosti rozdielom funkcie zisku z investície a samotnej výšky investície, čo pripadá do úvahy iba v tom prípade, ak firma investuje v čase t.

Vzťah (2.19) predstavuje koncovú podmienku, ktorá zodpovedá predpokladu (P6), kde uvažujeme ukončenie prevádzky firmy v čase T a kde s jej činnosťou nie sú spojené žiadne ďalšie výdavky.

Všimnime si, že ak v predošlej Bellmanovej rovnici (2.18) úlohy stochastického dynamického programovania (2.17) položíme stavovú premennú $X_t = 0$, tak pre hodnotovú funkciu (2.18) v takomto prípade dostávame:

$$V(S_t, 0, t) = 0 \tag{2.20}$$

Nulová hodota hodnotovej funkcie je v dôsledku toho, že diskontovaná očakávaná hodnota budúcich peňažných tokov je nulová, a rovnako aj zisk z investíce v ďalších časových okamihoch je nulový, v dôsledku predpokladu o jeho jednorázovosti (P5).

V prípade položenia stavovej premennej $X_t = 1$, hodnotová funkcia Bellmanovej rovnice v takomto prípade vyjadruje rovnakú hodnotu ako funkcia (2.18). Preto stavovú premennú X_t môžeme z tejto hodnotovej funkcie vynechať, a tak v nasledujúcich častiach ju budeme brať ako funkciu jednej stavovej premennej S_t a času t.

$$V(S_t, t) = \max_{u_t \in \{0,1\}} \left((1 - u_t) \frac{1}{(1 + r\Delta t)} E[V(S, t+1)|S_t] + u_t(\Pi(S_t, t) - I) \right) \tag{2.21}$$

Takto sformulovanú Bellmanovu rovnicu úlohy optimálneho riadenia (2.21) vieme riešiť metódou programového riadenia alebo metódou optimálnej spätnej väzby. My na naše výpočty aplikujeme druhú možnosť, teda Bellmanovu rovnicu riešime od konca a to metódou optimálnej spätnej väzby.

Najväčší problém pri výpočte nám robí diskontovaná podmienená stredná hodnota budúcich peňažných tokov. Tento problém je spôsobený stochastickým vývojom ceny S_t danej komodity na intervaloch Δt. Preto ešte pred samotným riešením Bellmanovej rovnice si vysvetlíme ako vypočítať diskontovanú strednú hodnotu budúcich peňažných tokov

$$\frac{1}{(1 + r\Delta t)} E[V(S, t+1)|S_t]. \tag{2.22}$$

Jednou z možností výpočtu je využitie analógie s oceňovaním európskeho typu derivátu, ktorej podstata spočíva v riešení Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice slúžiacej na oceňovanie finančných derivátov, pomocou ktorej vieme vypočítať práve túto podmienenú strednú hodnotu budúcich peňažných tokov danej opcie, a to vďaka eliminácie[17] stochastického člena z vývoja ceny komodity.

Skutočnosť využitia analógie s oceňovaním, a to konkrétne s európskym typom derivátov, pripadá do úvahy v dôsledku toho, že na ľubovoľnom časovom intervale $(t, t + \Delta t)$ nenastáva žiadne rozhodnutie či investovať alebo neinvestovať, pretože toto rozhodnutie nie je robené spojito, ale diskrétne. Rozhodujeme sa v časových okamihoch $0 \cdot \Delta t, 1 \cdot \Delta t, \ldots, (T-1) \cdot \Delta t$. V dôsledku toho je diskontovaná súčasná hodnota opcie $V(S, t+1)$ rovná cene opcie európskeho typu vypísanej na danú komoditu, ktorá expiruje v čase $(t + \Delta t)$ a v tomto čase má pay-off rovný hodnote $V(S, t+1)$.

[17]Podrobnejšie o eliminácii píšeme v appendixe v sekcii (A), pri odvodzovovaní Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice.

Riešime tak parciálnu diferenciálnu rovnicu odvodenú z Black-Scholesovho modelu oceňovania európskeho typu derivátu v tvare

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}(S,\tau) + (r-\gamma)S\frac{\partial W}{\partial S}(S,\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2}(S,\tau) - rW(S,\tau) = 0, \tag{2.23}$$

s okrajovými podmienkami[18]

$$W(S,\Delta t) = V(S,t+1), \tag{2.24}$$

$$W(0,\tau) = 0 \text{ pre } S = 0, \qquad W(S,\tau) \to \Pi(S_\tau,\tau)e^{-\gamma(\Delta t-\tau)} - Ie^{-r(\Delta t-\tau)} \text{ pre } \quad S \to \infty, \tag{2.25}$$

kde $\tau \in [0,\Delta t]$. V dôsledku toho vieme dopočítať diskontovanú podmienenú strednú hodnotu budúcich peňažných tokov ako riešenie nasledujúcej rovnice:

$$\frac{1}{(1+r\Delta t)}E[V(S,t+1)|S_t] = W(S_t,0) \tag{2.26}$$

Vyriešením tohto nášho problému, ktorý sa nám vyskytol pri riešení rovnice stochastického dynamického programovania metódou spätnej väzby, vieme vypočítať riešenie Bellmanovej rovnice (2.21), čím získame aj optimálne riadenie. Pod pojmom optimálne riadenie si predstavujeme tabuľku, v ktorej je ku každej možnej cene komodity v prislúchajúcom časovom okamihu informácia či investovať alebo neinvestovať za účelom maximalizácie zisku firmy z investície.

Zhrnutím celého nášho postupu oceňovania pomocou rovnice stochastického dynamického programovania nami sformulovanej teoretickej úlohy reálnej opcie v sekcii (2.1) dostávame tak nasledovný schematický algoritmus oceňovania:

Vstupy: r, σ, γ, Δt, T, I, Π
Parametre: ΔS

1. Zadaná koncová podmienka: $V(S,T) = 0 \quad \forall S$

[18] Posledná okrajová podmienka pre $S \to \infty$ je v uvedenom tvare v dôsledku linearity zisku v cene danej komodity (P5). Podrobnejšie o nej píšu Dixit a Pindyck v [9], v sekcii Appedix A, str. 353-356. Avšak poznamenajme, že uvedená okrajová podmienka je v platnosti iba za predpokladu $b = 0$ vo všeobecnom tvare lineárneho zisku definovaného ako $\Pi(S_\tau,\tau) = a{\cdot}S_\tau + b$. V prípade, ak by $b \neq 0$, tak okrajová podmienka pre $S \to \infty$ by bola v tvare $W(S,\tau) \to a{\cdot}Se^{-\gamma(\Delta t-\tau)} - (I-b)e^{-r(\Delta t-\tau)}$.

2. Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu s okrajovými podmienkami:

   for $t = T-1 : -1 : 0$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}(S,\tau) + (r-\gamma)S\frac{\partial W}{\partial S}(S,\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2}(S,\tau) - rW(S,\tau) = 0$$

$$W(S,\Delta t) = V(S,t+1) \quad \forall S, \quad \tau \in [0,\Delta t]$$

$$W(0,\tau) = 0 \text{ pre } S = 0, \quad W(S,\tau) \to \Pi(S_\tau,\tau)e^{-\gamma(\Delta t-\tau)} - Ie^{-r(\Delta t-\tau)} \text{ pre } \quad S \to \infty$$

   end

3. Pre každý časový okamih a každú možnú hodnotu ceny komodity vypočítame diskontovanú podmienenú strednú hodnotu budúcich peňažných tokov:

   for $t = T-1 : -1 : 0$

$$\frac{1}{(1+r\Delta t)}E[V(S,t+1)|S_t] = W(S_t,0) \quad \forall S$$

   end

4. Riešime Bellmanovu rovnicu stochastického dynamického programovania:

   for $t = T-1 : -1 : 0$

$$V(S_t,t) = \max_{u_t \in \{0,1\}} \left((1-u_t)\frac{1}{(1+r\Delta t)}E[V(S,t+1)|S_t] + u_t(\Pi(S_t,t) - I) \right) \quad \forall S$$

   end

Výstup: Výstupom je tabuľka, ktorá pre každý časový okamih a každú možnú cenu komodity obsahuje v sebe informáciu či investovať alebo neinvestovať v zmysle maximalizácie zisku.

Z tejto výstupnej tabuľky, ktorá pozostáva z hodnôt opcie vypočítaných v každom časovom okamihu pre každú možnú cenu danej komodity je zrejmé, že sa vieme rozhodnúť v každom rozhodovacom časovom okamihu či sa nám oplatí alebo neoplatí investovať určitý finančný obnos do určitého projektu produkujúceho danú komoditu, ktorej cenu v čase rozhodnutia poznáme.

Ďalším výstupom algoritmu je i tabuľka, ktorá pre prislúchajúci časový okamih a prislúchajúcu cenu komodity obsahuje v sebe optimálnu hodnotu z prípadnej investície v zmysle maximalizácie zisku.

Avšak okrem samotných hodnôt cien reálnej opcie vieme na základe rovnakej výstupnej tabuľky vykresliť i hranicu predčasného uplatnenia[19] $S_f(t)$ danej reálnej opcie.

Je zrejmé, že optimálne je investovať pri vyšších hodnotách ceny komodity S, a že celú oblasť rozhodovania, ktorou je rovina $(t, S(t))$, môžeme rozdeliť krivkou $S_f(t)$ na dve oblasti, pričom v prvej oblasti je optimálne investovať a v druhej naopak neinvestovať, teda zotrvať v súčasnom stave. Krivku S_f nazývame aj *voľnou hranicou*, pričom predpokladajme, že investovať je optimálne pre $S > S_f$ a neinvestovať pre $S < S_f$[20]. Ešte poznamenajme, že krivka S_f je analógiou voľnej hranice z teórie finančných opcií, ktorú podrobne popisujeme v appendixe v sekcii (B), kde sa zaoberáme s problémom oceňovania amerického typu derivátov. Pre bližšie matematické vysvetlenie odporúčame knihu Dixita a Pindycka [9] (str. 130-131).

Za zaujímavú vlastnosť výstupov z daného oceňovacieho algoritmu považujeme analýzu citlivosti jeho výsledkov, a to na zmeny jednotlivých vstupných parametrov, pričom našu najväčšiu pozornosť púta práve analýza citlivosti krivky $S_f(t)$ pri rôznych hodnotách spomínaných vstupných parametrov (napr. σ, Δt, I).

[19] Hranica predčasného uplatnenia danej reálnej opcie je definovaná ako množina takých bodov $(S_f(t), t)$, kde hodnota reálnej opcie $V(S,t)$ prvýkrát pretne svoju pay-off funkciu $V(S_f(t), t) = max(\Pi(S_f(t), t) - I, 0)$.

[20] V knihe [9]*Investment under Uncertainity* autori krivku S_f, rozdeľujúcu oblasť rozhodovania, nazývajú ako investičné pravidlo investora. Kým je cena komodity menšia ako toto investičné pravidlo, investor opciu neuplatňuje. Akonáhle však cena komodity dosiahne túto hraničnú hodnotu, investor opciu uplatní a investuje do projektu, a tak hodnota opcie bude rovná hodnote projektu.

Kapitola 3

Numerické riešenie reálnych opcií

V tretej a zároveň v poslednej kapitole tejto diplomovej práce budeme pre konkrétne parametre numericky riešiť nami sformulovaný problém oceňovania reálnych opcií v sekcii (2.1) z druhej kapitoly. Na jeho riešenie aplikujeme oceňovací algoritmus, ktorý sme schematicky popísali na záver sekcie (2.2.4) venovanej oceňovaniu reálnych opcií pomocou stochastického dynamického programovania v predošlej kapitole. Následne sa budeme venovať analýze citlivosti tohto riešenia na zmeny vstupných parametrov a porovnáme si jeho investičné pravidlo pre tieto jednotlivé zmeny.

3.1 Implicitná Eulerova metóda

Uvažujme daný problém ocenenia reálnej opcie zo sekcie (2.1). Pri jeho oceňovaní metódou stochastického dynamického programovania, ako sme spomínali v sekcii (2.2.4), sme narazili na problém výpočtu diskontovanej podmienenej strednej hodnoty budúcich peňažných tokov plynúcich z danej reálnej opcie. Na jej výpočet sme využili analógiu s oceňovaním európskeho typu derivátu, ktorej podstata spočíva v riešení Black Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice (2.23) s koncovou podmienkou (2.24) a s príslušnými okrajovými podmienkami (2.25). A práve na výpočet tejto parciálnej diferenciálnej rovnice aplikujeme numerickú metódu[1], konkrétne implicitnú Eulerovu schému.

[1]Základná myšlienka pri numerických metódach spočíva v diskretizácií skúmanej oblasti a pretransformovaní príslušnej parciálnej diferenciálnej rovnice na systém algebraických rovníc.

V prípade, že by sme riešili parciálnu diferenciálnu rovnicu nie pre danú reálnu opciu, ale pre finančnú európskeho typu derivátu, a to konkrétne pre európsky call alebo put, poprípadne ich kombinácia, tak v tom príde by sme ju vedeli vyriešiť na základe explicitného riešenia, ktoré je jednoznačne dané (Viac v [12], str. 48-54.). Preto najväčší význam numerických metód spočíva pri ich aplikovaní na deriváty, ktorých analytické riešenie nie je známe[2], kde patria aj reálne opcie.

Jednou z numerických metód je aj Eulerova metóda, ktorá je pomenovaná po jej objaviteľovi, priekopníckom matematikovi a fyzikovi Leonhardovi Eulerovi, ktorého najznámejšia publikácia venovaná práve tejto metóde je [29]. My na naše riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice implementujeme numerickú schému nachádzajúcu sa v práci [30].

Aplikujme Eulerovu implicitnú metódu na riešenie Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice (2.23), kde Δt je maturita danej reálnej opcie, ktorú riešime na intervale $[0, \Delta t]$. Nech S_{min} je minimálna a S_{max} maximálna hodnota ceny danej komodity. Potom táto metóda spočíva v uvažovaní diskretizačnej siete mrežových bodov v priestore nezávislých premenných $(S, \tau) \in (S_{min}, S_{max}) \times (0, \Delta t)$, a v náhrade hľadaného riešenia $W(S, \tau)$ a jeho derivácií diferenciami v jednotlivých bodoch siete.

Zvoľme si počet priestorových delení $M \in \mathbb{N}$ intervalu (S_{min}, S_{max}) a počet časových delení $N \in \mathbb{N}$ intervalu $(0, \Delta t)$. Potom priestorový krok $\Delta S > 0$ je daný ako $M{\cdot}\Delta S = S_{max} - S_{min}$ a časový krok $\Delta\tau > 0$ ako $N{\cdot}\Delta\tau = \Delta t$. Potom v priestore nezávislých premenných $(S, \tau) \in (S_{min}, S_{max}) \times (0, \Delta t)$ uvažujme sieť mrežových bodov:

$$S_i = S_{min} + i{\cdot}\Delta S,\ i = 0, 1, \ldots, M \quad a \quad \tau_j = j{\cdot}\Delta\tau,\ j = 0, 1, \ldots, N$$

Aproximáciu hľadaného riešenia, ktorým je hodnota danej reálnej opcie v mrežovom bode (S_i, τ_j) označme ako W_i^j, t. j.

$$W_i^j \approx W(S_i, \tau_j). \tag{3.1}$$

Hlavná myšlienka Eulerovej metódy spočíva v numerickej aproximácii jednotlivých parciálnych derivácií, priestorových a časových, danej Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice (2.23) metódou konečných diferencií, pričom základom implicitnej

[2]Takým prípadom sú napríklad americké typy derivátov, ktoré podrobne rozoberáme v appendixe v sekcii (B), resp. niektoré exotické typy derivátov.

schémy je aproximácia časovej parciálnej derivácie v mrežovom bode W_i^j pomocou spätnej časovej diferencie[3].

Návod postupu riešenia odvodenej Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice (2.23) pomocou diferenčných aproximácií čitateľovi dávame do pozornosti vo vyššie spomínanej práci [30], v ktorej sa dočíta viac aj o predstavenej numerickej schéme.

Jej numerickým vyriešením tak vyriešime i problém výpočtu podmienej strednej hodnoty budúcich peňažných tokov plynúcich z danej reálnej opcie, na ktorý sme narazili pri jej oceňovaní metódou stochastického dynamického programovania, ktorej hodnota je vlastne rovná hodnote projektu.

Numerické riešenie Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice predstavenou implicitnou schémou je bezpodmienečne stabilné[4], čiže veľkosť časového kroku $\Delta\tau$ a hustota diskretizačnej siete priestorovým krokom ΔS sú limitované iba presnosťou výpočtu riešenia.

Nevýhodou programového riešenia tejto metódy však je, že program je zložitejší a počet matematických operácií je v každom časovom kroku vyšší. Na druhej strane, výhoda implicitnej Eulerovej metódy spočíva v možnosti riešenia parciálnej rovnice aj s väčším časovým krokom $\Delta\tau$, pri zachovaní malého priestorového kroku ΔS, ktorý je potrebný na jemné zachytenie priestorového rozlíšenia v cene komodity, a tým presnejších numerických výsledkov.

3.2 Predstavenie modelu a jeho riešenie

V tejto časti si predstavíme nami sformulovaný problém oceňovania reálych opcií z druhej kapitoly zo sekcie (2.1), a to s konkrétnymi hodnotami jednotlivých parametrov, ktorý si následne numericky vyriešime. Budeme uvažovať jednoduchý ilustratívny príklad s fiktívnymi dátami vstupných parametrov.

[3]Hlavná myšlienka spätnej časovej diferencie spočíva v tom, že sa hodnoty opcií na novej časovej vrstve dajú implicitným spôsobom vyjadriť pomocou hodnoty riešenia v starej časovej vrstve.

[4]Viac o stabilite a bezpodmienečnej konvergencii numerického riešenia implicitnou metódou dávame do pozornosti v [30] a [31].

Uvažujme existenciu firmy nachádzajúcu sa na úplnom trhu, na ktorom nie je arbitráž (P0). Firma zvažuje možnosť investície, kúpu malej bane, v ktorej sa nachádzajú náleziská ušľachtilého kovu, striebra Ag, pričom odhadované množstvo tohto náleziska je stanovené na $Q = 200$ trójskych uncií[5]. Za predpokladu, že sa firma rozhoduje optimálne v zmysle maximalizácie zisku, tak jej rozhodnutie, ohľadne investície do bane, je robené za účelom maximalizácie jej očakávaného zisku (P1). Cena striebra je však výsledkom náhodného procesu (P2), geometrického Brownovho pohybu vyjadreného v rizikovo neutrálnej miere, kde jeho volatilita σ je na úrovni 20 %. Ročná bezriziková úroková miera je vo výške $r = 3$ % a *convenience yields* proporcionálne k cene striebra sú vo výške $\gamma = 2,5$ %, pričom súčasná[6] hodnota striebra je na úrovni 24,50 € za uncu, ktoré je na trhu obchodovateľné. Výška investície I (nákupná cena bane) je v hodnote 1000 € a možnosť investovať pripadá do úvahy najviac jedenkrát (P3), pričom táto možnosť je nenávratná (P4). Zisk z takejto investície, ktorý je jednorázový a lineárny v cene striebra, je funkciou jeho ceny S_t a času t, daný ako $\Pi(S_t, t) = (S_t - C) \cdot Q$, kde C predstavujú náklady na ťažbu jednej unci striebra, $C = 15$ € (P5). Životnosť firmy zvažujúcej túto investíciu je 10 rokov (P6) a rozhodnutie pre investíciu robí firma diskrétne po intervaloch Δt (P7a), pričom v našich základných výsledkoch budeme uvažovať $\Delta t = 1$ rok.

Našou úlohou je vypočítať nielen súčasnú hodnotu tejto reálnej opcie, ale predovšetkým jej hodnoty v každom časovom okamihu, v ktorých má tú možnosť firma rozhodnutia sa, pri každej možnej cene striebra. A na základe týchto výpočtov stanovíme investičné pravidlo pre danú reálnu opciu, ktoré firme napovie v každom časovom okamihu, či sa jej oplatí alebo neoplatí zrealizovať danú investíciu, ak v príslušnom časovom okamihu pozná aktuálnu trhovú cenu striebra.

Vyššie predstavený problém oceňovania reálnych opcií za predpokladu $\Delta t \to 0$, predstavujúci možnosť spojitého rozhodovania sa, a neinvestovania v týchto bodoch je ekvivalentný k problému oceňovania finančných opcií, a to konkrétne amerických call opcií. Uvedená ekvivalencia je zrejmá z definícií (1.2) a (1.3) z prvej kapitoly, ktoré poukazujú na analógiu reálnej opcie s americkou opciou.

[5] Trójska unca je jednotka váhy drahých kovov a má presne 31, 1034768 gramu.

[6] Hodnota je viazaná k dátumu 1. apríl 2012. Zdroj: *www.silverprice.org*

Vzhľadom na konkrétne sformulované parametre v danom probléme ocenenia reálnej opcie je tento problém ekvivalentný k oceneniu 200 amerických call opcií s expiračnou cenou 20 € a expiráciou 10 rokov, pričom ostatné parametre zostávajú nezmenené. Počet amerických call opcií a ich expiračná cena sú odvodené z payoffu danej reálnej opcie ako

$$\max(\Pi(S_t, t) - I, 0) = \max((S_t - 15)\cdot 200 - 1000, 0) = 200\cdot \max(S_t - 20, 0),$$

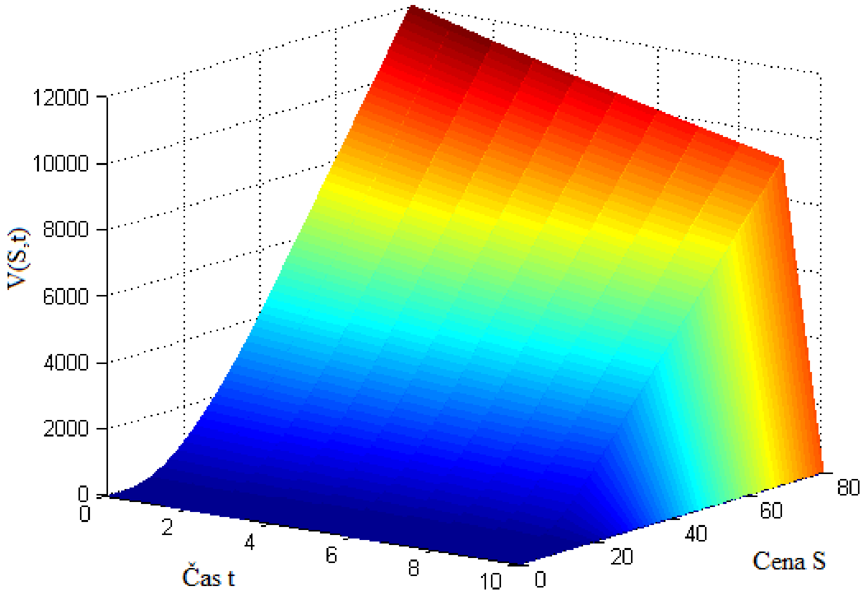
a ich expirácia (maturita) 10 rokov je totožná so životnosťou firmy. Teda hodnoty reálnej opcie v každom časovom okamihu a v prislúchajúcej cene komodity tak konvergujú k hodnotám 200 amerických call opcií.

Výhoda spomenutej ekvivalencie oceňovania danej reálnej opcie s finančnými opciami spočíva v tom, že vieme využiť alternatívne schémy na počítanie cien opcií s našou predstavenou schémou a máme možnosť sledovať aj vplyv veľkosti rozhodovacieho intervalu Δt nielen na cenu opcie, ale aj na zmenu investičného pravidla.

Využitím tejto analógie budeme tak v nasledujúcich častiach, venovaných numerickým výpočtom, porovnávať výsledky danej reálnej opcie s výsledkami *projektovanej sor metódy* aplikovanej na oceňovanie amerických call opcií.

3.2.1 Numerické riešenie

Na obrázku (Obr. 3.1) je znázornené numerické riešenie $V(S_t, t)$ pre konkrétne hodnoty parametrov danej investície. Toto riešenie zobrazuje hodnoty reálnej opcie v každom časovom okamihu pri každej možnej cene striebra. Je zrejmé, že s plynúcim časom hodnoty $V(S_t, t)$ klesajú, čo je spôsobené tým, že životnosť firmy s plynúcim časom taktiež klesá. A práve skracovanie životnosti firmy je ekvivalentné k skracovaniu expiračného času prípadnej investície do danej reálnej opcie, v dôsledku čoho hodnota reálnej opcie s blížiacim sa časom k jej expirácii je nižšia. Z uvedeného teda vyplýva, že hodnota reálnej opcie s dlhším časom do expirácie, pri ostatných nezmenených podmienkach, musí mať väčšiu hodnotu ako reálna opcia s kratším časom do expirácie. Z rovnakého obrázku je i vidieť rast hodnôt $V(S_t, t)$ s rastom ceny striebra. Je to z dôvodu, že pri vyšších cenách striebra sú vyššie zisky i vyššie hodnoty danej reálnej opcie.

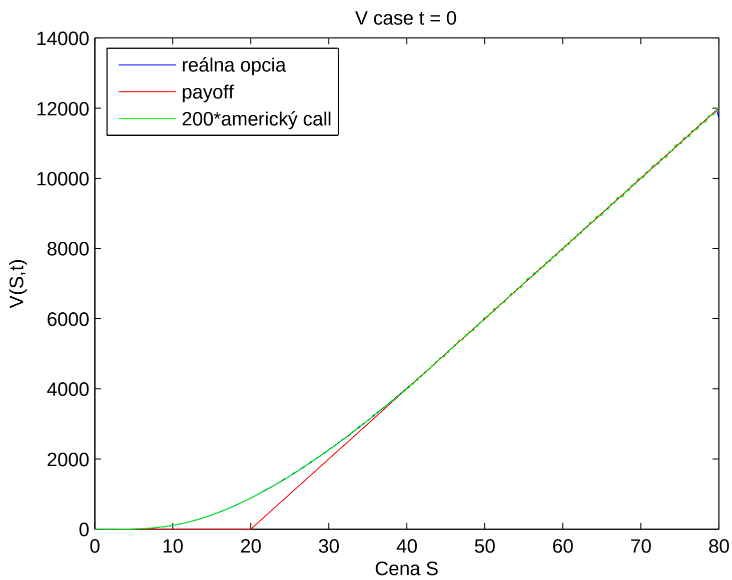


Obr. 3.1: Hodnota $V(S_t, t)$ pre parametre: $S_0 = 24,50$ €; $r = 0,03$; $\sigma = 0,20$; $\gamma = 0,025$; $\Delta t = 1$; $T = 10$; $I = 1000$ €; $\Pi(S_t, t) = (S_t - 15)\cdot 200$ €.

Súčasná hodnota (v čase $t = 0$) danej reálnej opcie (hodnota investičného projektu) pre firmu v tomto prípade, ak súčasná cena striebra je na úrovni $S_0 = 24,50$ € za uncu, je vo výške $V(S_0, 0) = 1449,50$ €. Ak sa pozrieme na zisk z prípadnej investície pri rovnakej cene striebra, tak by bol vo výške 900 €. Rozdiel tejto hodnoty reálnej opcie a zisku z prípadnej investície predstavuje pre firmu hodnotu čakania, ktorá v tomto prípade je 549,50 €.

Ak by sa firma ohľadne investície mala rozhodnúť podľa NPV pravidla, toto rozhodnutie by mala prijať. Avšak v teórii reálnych opcií toto rozhodnutie firma robí na základe investičného pravidla, ktorému sa budeme podrobnejšie venovať v nasledujúcej sekcii.

Predtým si však poukážeme, a to za platnosti spomenutých predpokladov z predošlej sekcie, na analógiu daného problému k oceňovaniu príslušného počtu finančných opcií amerického typu derivátu. Teda, porovnáme si hodnoty reálnych opcií vypočítaných na základe algoritmu ich oceňovania pomocou stochastického dynamického programovania, kde veľkosť rozhodovacieho intervalu položíme ako $\Delta t \to 0$, projektovanou sor metódou aplikovanou na oceňovanie amerických call opcií.



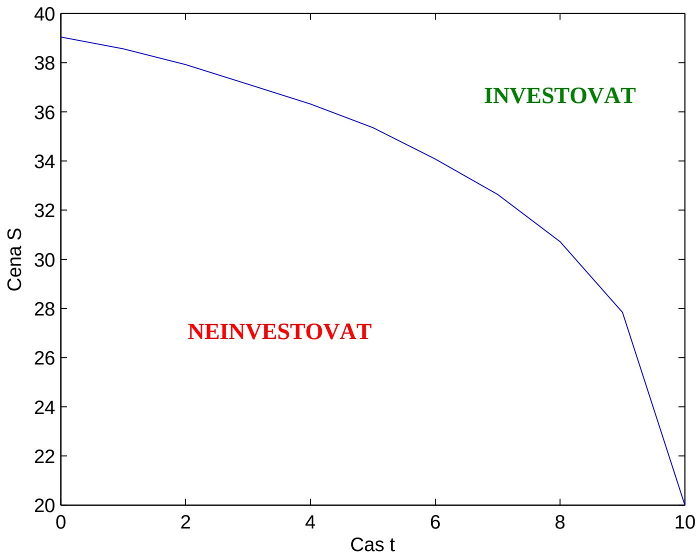
Obr. 3.2: Porovnanie hodnôt danej reálnej opcie pre $\Delta t \to 0$ s 200 americkými call opciami s expiračnými cenami 20 € a s expiráciou 10 rokov.

Ako vidieť na obrázku (Obr. 3.2), analógia amerických call opcií s danou reálnou opciou je zrejmá. Rovnako vidieť, že aj hodnoty $S_f(0)$ ich hraníc predčasného uplatnenia, ktoré predstavujú cenu striebra, pri ktorej nastáva hladké napojenie na payoff, sú rovnaké. Toto tvrdenie ich rovnosti, resp. konvergencie ich hraníc predčasného uplatnenia, si podrobne rozoberieme v nasledujúcej časti.

3.2.2 Investičné pravidlo

V prvej kapitole v sekcii (1.3) sme poukázali na investičné pravidlo metódy čistej súčasnej hodnoty NPV, podľa ktorého, ak $NPV > 0$, firma by mala prijať rozhodnutie investovať do striebornej bane. V tejto metóde však podstata investície spočíva len v možnosti jej zrealizovania *teraz alebo nikdy*, narozdiel od teórie reálnych opcií, kde investíciu firma môže uskutočniť v ľubovoľnom časovom okamihu až do konca času expirácie danej reálnej opcie.

Autori knihy [9], v teórii reálnych opcií, nazývajú investičným pravidlom krivku $S_f(t)$, ktorá je závislá od času, a ktorá rozdeľuje oblasť rozhodovania na dve oblasti, pričom v jednej je optimálne investovať a v druhej naopak neinvestovať.

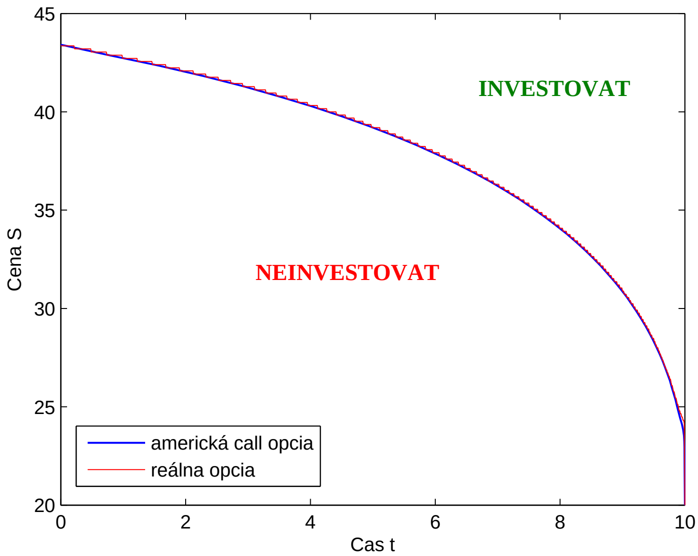


Obr. 3.3: Investičné pravidlo, resp. krivka $S_f(t)$ pre parametre: $S_0 = 24,50$ €; $r = 0,03$; $\sigma = 0,20$; $\gamma = 0,025$; $\Delta t = 1$; $T = 10$; $I = 1000$ €; $\Pi(S_t, t) = (S_t - 15) \cdot 200$ €.

Z obrázku (Obr. 3.3) vidieť, že pre firmu je na začiatku investičného projektu výhodné investovať iba pri veľmi vysokých cenách striebra za uncu, oproti jeho súčasnej hodnote. Tým vlastne dostávame odpoveď na otázku, či je pre firmu v čase $t = 0$ a pri aktuálnej cene striebra $S_0 = 24,50$ € výhodné investovať alebo neinvestovať. Teda, na základe vypočítaného investičného pravidla optimálnym rozhodnutím pre firmu by malo byť s investíciou počkať, nakoľko hodnota reálnej opcie prevyšuje hodnotu zisku z prípadnej investície.

Rovnako je na obrázku (Obr. 3.3) vidieť, že čím je bližšie opcia k expirácii, tak tým je táto hodnota investičného pravidla v príslušnom čase nižšia. Dôvodom je nižšia cena opcie s blížiacim sa časom k jej expirácii. Teda investovať do striebornej bane s blížiacim sa časom k expirácii bude pre firmu optimálne už pri nižších hodnotách ceny striebra. Príčinou dôvodu nižšej ceny opcie s približovaním sa k času expirácii je stochastický vývoj ceny striebra.

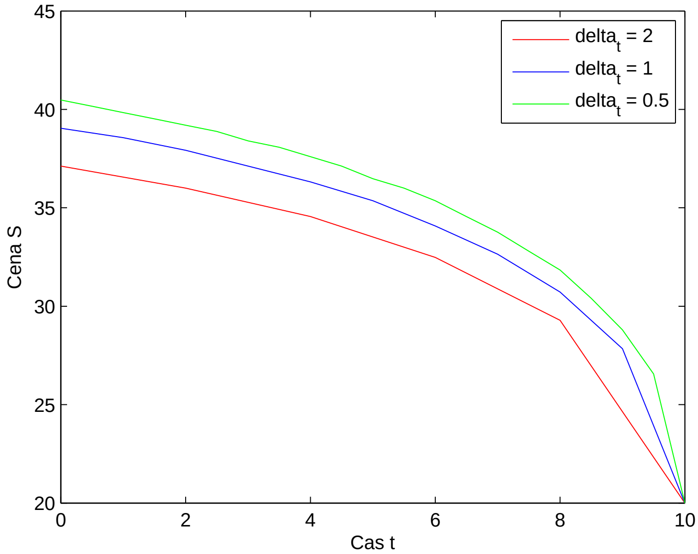
Rovnako, ako sme v sekcii (3.2) za predpokladu $\Delta t \to 0$ poukázali na ekvivalenciu hodnôt danej reálnej opcie k hodnotám americkým call opciam (Obr. 3.2), tak rovnako si poukážeme aj na ekvivalenciu ich investičných pravidiel, hraníc predčasného uplatnenia, ktorú popisuje obrázok (Obr. 3.4).



Obr. 3.4: Porovnanie investičného pravidla danej reálnej opcie ($\Delta t = 0,01$) s investičným pravidlom ekvivalentnej americkej call opcie.

Keď si vypočítané investičné pravidlo danej reálnej opcie, ktoré popisuje obrázok (Obr. 3.3) porovnáme s investičným pravidlom tej istej reálnej opcie avšak za nového predpokladu $\Delta t \to 0$ popisujúce obrázok (Obr. 3.4) je zrejmé, že v tomto druhom prípade sú hodnoty investičného pravidla vyššie. Dôvodom vyšších hodnôt hranice predčasného uplatnenia sú vyššie hodnoty reálnej opcie v možnosti spojitého rozhodovania sa ($\Delta t \to 0$) oproti možnosti rozhodovania sa jedenkrát ročne ($\Delta t = 1$). A dôvod vyšších hodnôt reálnej opcie v možnosti častejšieho rozhodovania sa si vysvetlíme v nasledujúcich riadkoch.

Uvažujme zmenu dĺžky intervalu Δt, t. j. dĺžky periódy rozhodovania sa pre investíciu, pričom životnosť investičného projektu zostáva nezmenená, t. j. 10 rokov. V prvom prípade uvažujme, že firma robí svoje rozhodnutie ohľadne investície každý druhý rok ($\Delta t = 2$), v druhom prípade každý polrok ($\Delta t = 0,5$). Je zrejmé, že ak firma má možnosť robiť svoje rozhodnutie ohľadne investície viackrát počas životnosti projektu, tak je zvýhodnená oproti možnosti, keď toto rozhodnutie robí menejkrát. Výhoda v častejšej možnosti rozhodovania sa spočíva v tom, že firma má k dispozícii aktuálnejšie informácie ohľadne o stochastickom vývoji ceny striebra. Teda v prípade nepriaznivého vývoja situácie na trhu danú investíciu vôbec neuskutoční. Takéto zvýhodnenie má svoju hodnotu, čo spôsobuje rast hodnoty danej reálnej opcie, ktorý má za dôsledok posun krivky $S_f(t)$ smerom nahor. A tento posun smerom nahor nastáva v dôsledku toho, že s rastom hodnoty reálnej opcie rastie aj cena striebra, pri ktorej je už optimálne investovať. V opačnom prípade, v možnosti menej častejšieho rozhodovania sa ohľadne investície, uvažujeme analogicky, čo má za následok posun krivky $S_f(t)$ smerom nadol. (Obr. 3.5)



Obr. 3.5: Citlivosť investičného pravidla na zmenu dĺžky periódy Δt.

3.2.3 Analýza citlivosti investičného pravidla

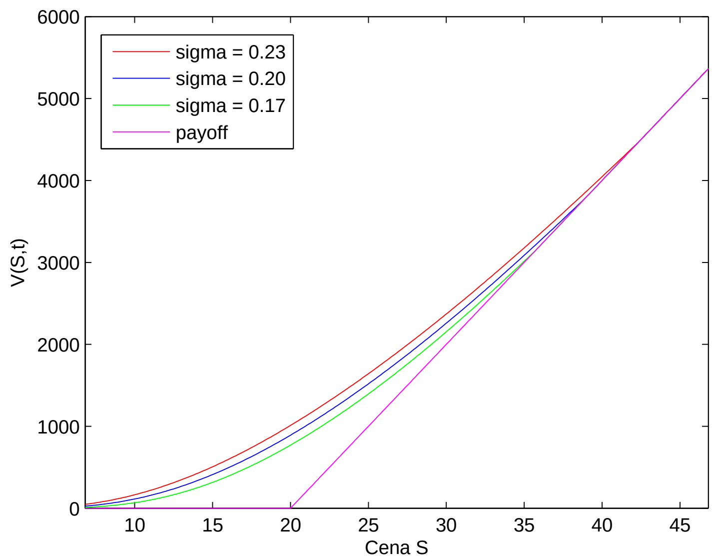
V tejto sekcii sa budeme zaoberať pozorovaním analýzy citlivosti investičného pravidla danej reálnej opcie. Budeme sledovať zmenu citlivosti krivky $S_f(t)$ na zmenu vždy iba jedného z parametrov, pričom ostatné parametre zostávajú nezmenené.[7] A tak, ako cena reálnej opcie, tak aj hranica predčasného uplatnenia sú funkcie. Z toho je zrejmé, že zmenou parametra môže, ale nemusí dôjsť k zmene funkcionálnej závislosti krivky $S_f(t)$, práve čomu sa budeme venovať v nasledujúcich častiach, kde si jednotlivé zmeny graficky i vykreslíme.

[7]Parametre r, γ, $\Pi(S_t, t)$ v prípade komodity ako je striebro, budeme považovať za fixné parametre trhu. Predpoklad robíme na základe diskusie autorov knihy [9], str. 135-212.

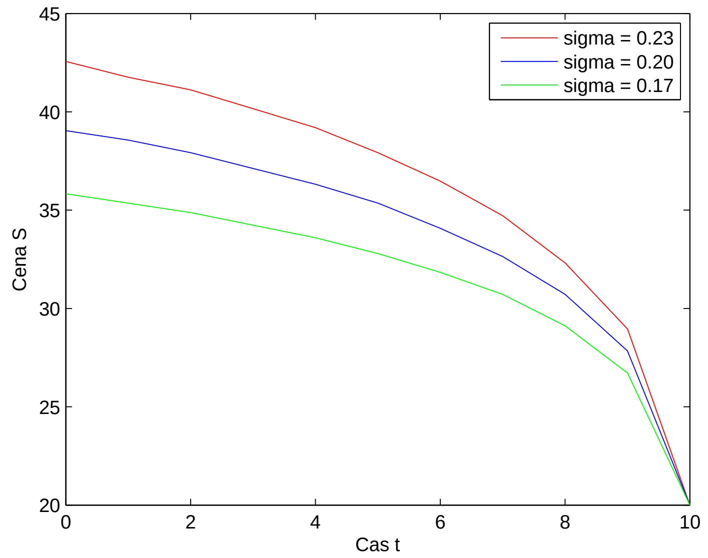
Ešte poznamenáme, že nasledujúce analýzy citlivosti krivky $S_f(t)$ budú aplikované pri rovnakých parametroch, aké sme v sekcii (3.2) predstavili, t. j. $S_0 = 24,50$ €; $r = 0,03$; $\sigma = 0,20$; $\gamma = 0,025$; $\Delta t = 1$; $T = 10$; $I = 1000$ €; $\Pi(S_t, t) = (S_t - 15) \cdot 200$ €. Oblasť rozhodovania v tomto prípade budeme vykresľovať plnou modrou čiarou a nové oblasti rozhodovania, krivky $S_f(t)$ pri jednotlivých zmenách, farebnými čiarami, pričom v legende jednotlivých obrázkoch vždy uvedieme o aké zmeny a konkrétne, ktorého parametra sa týkajú.

- σ - *volatilita stochastického procesu vývoja ceny striebra*

  Možným dôvodom zmeny ceny reálnej opcie na trhu môže byť zmena volatility. Volatilita odzrkadľuje pravdepodobnosť, že trh sa výrazne pohne jedným alebo druhým smerom. Rovnako vyjadruje mieru rizika investície do investičného projektu. Teda zvýšenie volatility, ktorá predstavuje neistotu výnosu stochastického procesu vývoja ceny striebra, znamená ešte väčšie riziko zmeny ceny komodity. Z toho dôvodu tak usudzujeme, že nárast (pokles) volatility na trhu spôsobí rast (pokles) hodnoty danej reálnej opcie (Obr. 3.6). A tento rast (pokles) hodnoty reálnej opcie má za následok zvýšenie (zníženie) ceny striebra, pri ktorej je optimálne investovať. Teda je zrejmé, že rastúca (klesajúca) volatilita posúva krivku $S_f(t)$ smerom nahor (nadol). (Obr. 3.7)



Obr. 3.6: Analýza citlivosti hodnoty reálnej opcie na zmenu volatility σ.



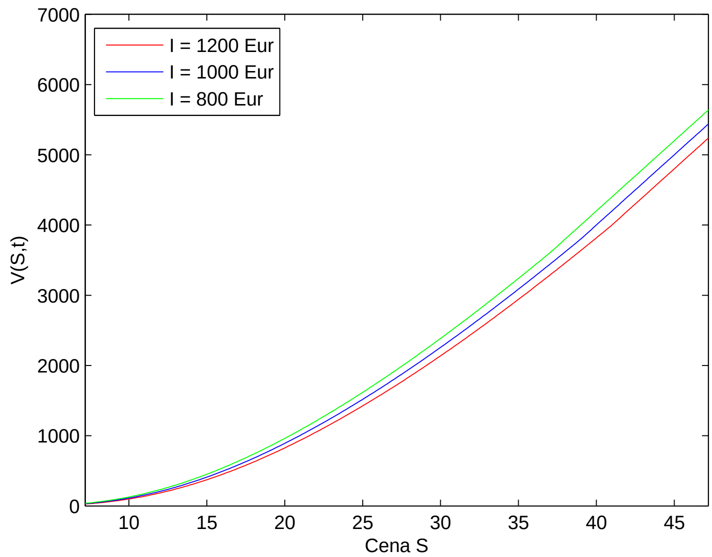
Obr. 3.7: Analýza citlivosti investičného pravidla na zmenu volatility σ.

- *I - cena investície*

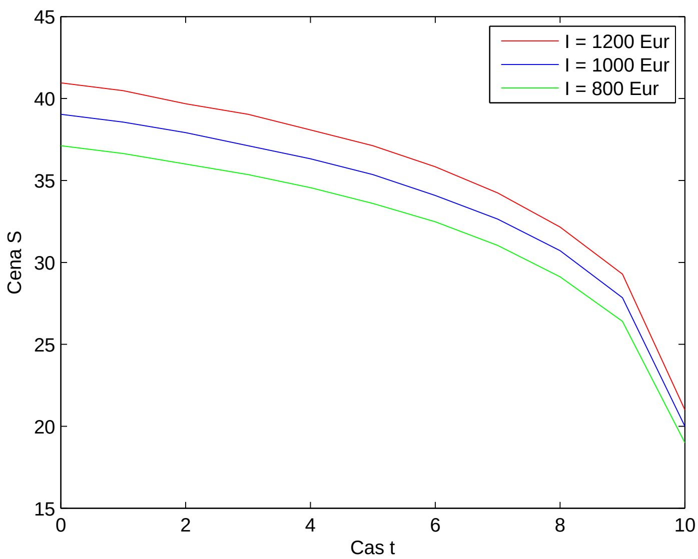
  Pri analýze citlivosti hodnoty danej reálnej opcie na zmenu ceny investície I využijeme analógiu s finančnými opciami. V prípade nárastu ceny investície z pôvodných 1000 € na 1200 € je reálna opcia s takto zmeneným ziskom ekvivalentná k 200 americkým call opciam s expiračnými cenami 21 € a s expiráciou 10 rokov.[8] Ako vidieť, tak zmena oproti pôvodnému problému ocenenia nastala iba v expiračnej cene. Je zrejmé, že s nárastom expiračnej ceny hodnota opcie klesne. Teda nárast (pokles) ceny investície I spôsobí pokles (nárast) hodnoty reálnej opcie. (Obr. 3.8)

  V prípade analýzy citlivosti investičného pravidla na zmenu ceny investície do daného investičného projektu je zrejmé, že čím je výška investície vyššia (nižšia), tak tým je menší (väčší) zisk z prípadnej investície. Preto sa krivka $S_f(t)$ posúva smerom nahor (nadol) s nárastom (poklesom) ceny investície. Je to spôsobené tým, že investovať sa oplatí až (už) pri vyšších (nižších) cenách striebra, ako oproti pôvodnej cene investície. (Obr. 3.9)

[8] Postup odvodenia je analogický k uvedenému v sekcii 3.2.



Obr. 3.8: Analýza citlivosti hodnoty reálnej opcie na zmenu investície I.



Obr. 3.9: Analýza citlivosti investičného pravidla na zmenu investície I.

Záver

Investícia v teórii reálnych opcií zohráva významnú úlohu. Tak ako investori premýšľajú v prospech očakávania ziskov v budúcnosti, tak aj firmy uvažujú o investíciach voľných finančných prostriedkov za účelom maximalizácie budúceho zisku. Dôležitú úlohu v rozhodovaní firmy zohrávajú investičné projekty, ktoré následne zvýšia jej hodnotu. Vzhľadom k veľkému počtu špecifických a individuálnych charakteristík každého jedného investičného projektu, v súčasnosti nie je k dispozícii všeobecne aplikovateľná metóda investičného rozhodovania.

Cieľom diplomovej práce bolo na konkrétnom modeli numericky odvodiť a analyzovať hodnotu reálnej opcie, ako aj vyplývajúcu stratégiu kedy je najlepšie opciu uplatniť. K splneniu tohto cieľa najprv predchádzala teória o reálnych opciach, ktorú sme uviedli na úvod práce, do prvej kapitoly. Poukázali sme v nej i na rozdiel v investičnom rozhodovaní medzi najviac používanou metódou čistej súčasnej hodnoty NPV a teóriou reálnych opcií, kde máme možnosť odloženia investičného rozhodnutia na neskôr. Následne v druhej kapitole sme sformulovali jednoduchý ilustratívny problém oceňovania reálnych opcií, v ktorom sme za úlohu stanovili maximalizáciu budúceho zisku z prípadnej investície do určitého investičného projektu. A po ocenení tohto problému po teoretickej stránke sme ho v tretej kapitole s konkrétnymi hodnotami parametrov numericky riešili a analyzovali pomocou stochastického dynamického programovania hodnotu reálnej opcie, ako aj vyplývajúcu stratégiu kedy je najlepšie reálnu opciu uplatniť. Túto stratégiu sme nazvali investičným pravidlom, ktoré sme si graficky vykreslili a poukázali na skutočnosť, že s blížiacim sa časom k expirácii reálnej opcie klesá i cena striebra, pri ktorej je už optimálne pre firmu investovať. Poukázali sme i na analógiu danej reálnej opcie k finančným opciam, a to konkrétne k americkým call opciam. Porovnali sme hodnoty ich opcií, ako aj investičných pravidiel za predpokladu spojitého rozhodovania sa v sformulovanom probléme ocenenia reálnej opcie. Následne sme sa zaoberali analýzou citlivosti investičného pravidla a ceny opcie na zmeny vstupných parametrov, pričom týmto zmenám citlivosti sme sa najprv vyjadrili po teoretickej stránke a následne sa graficky presvedčili o našich očakávaniach.

Ako sme na začiatku poznamenali, oceňovali sme jednoduchý ilustratívny príklad reálnej opcie. Takýto príklad aj napriek jeho jednoduchosti v skutočnosti vystihuje malé množstvo reálnych opcií. Avšak obrovská väčšina reálnych opcií je oveľa zložitejšia, kde ich zložitosť môže spočívať v iných stochastických vývojoch ceny komodity, ako napríklad *mean-reverting proces* alebo *jump proces*. Rovnako ich zložitosť môže spočívať aj v inej definícii zisku.

Appendix

(A) Oceňovanie európskeho typu derivátov

Cieľom tejto časti je analyzovať možnosť oceňovania európskych typov derivátov, pričom základnou charakteristikou európskeho typu opčných kontraktov je vlastnosť, že k uplatneniu opcie môže dôjsť len v presne stanovenom čase expirácie $t = T$.

V prípade záujmu o podrobnejší a detailnejší postup odvodzovania všetkých vzťahov, ktoré tu uvádzame, dávame do pozornosti práce [12], [32], [33] a [34], z ktorých sme vybrali tie najdôležitejšie poznatky potrebné na pochopenie celej podstaty oceňovania európskeho typu derivátov.

Ešte predtým, ako sa pozrieme na riešenie problému oceňovania európskych derivátov, si zadefinujeme čo je to európska opcia.

Definícia A.1 *Európska call (put) opcia predstavuje právo, nie však povinnosť, kúpiť (predať) podkladové aktívum (najčastejšie akciu) za vopred stanovenú expiračnú cenu vo vopred stanovenom expiračnom čase T (maturity).*

Pre takýto typ opčných kontraktov je možné odvodiť explicitný vzorec pre riešenie Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice na oceňovanie opcií. Predpokladajme, že cena akcie S, na ktorú sú vyplácané spojité dividendy s ročnou dividendovou mierou $D \geq 0$, sa vyvíja podľa stochastickej diferenciálnej rovnice nazývanej *geometrický Brownov pohyb* v tvare

$$dS = (\mu - D)Sdt + \sigma SdW, \tag{A.1}$$

s očakávanou návratnosťou μ a volatilitou časového vývoja ceny akcie σ (štandardná ochýlka ceny akcie). Ďalej dS predstavuje zmenu ceny akcie za nekonečne malú časovú zmenu dt, W_t Wienerov proces a dW predstavuje diferenciál Wienerovho procesu, pričom jednotlivé parametre sú vyjadrené v rizikovo neutrálnej miere.

Nech $V(S,t)$ je hodnota finančného derivátu súvisiaceho s akciou S. Predpokladáme, že $V(S,t)$ je hladkou funkciou premenných S, t. Potom na základe Itôovej lemy[1] prvý diferenciál funkcie $V(S,t)$ je daný vzťahom:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS \tag{A.2}$$

Dôsledkom vzťahov $(A.1)$ a $(A.2)$ dostávame ďalšiu stochastickú diferenciálnu rovnicu pre $V(S,t)$ v tvare:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu - D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW \tag{A.3}$$

Stratégia Blacka a Scholesa v hľadaní optimálnej hodnoty finančného derivátu $V(S,t)$ spočíva v lineárnej kombinácií dvoch náhodných procesov $(A.1)$ a $(A.3)$ tak, aby sa podarilo vytvoriť bezrizikové portfólio. Inými slovami tak, aby sa eliminovala náhodná časť, ktorou v obidvoch náhodných procesoch je diferenciál Wienerovho procesu dW. Jeho vylúčením tak vytvoríme bezrizikové portfólio. Takémuto postupu vytvorenia bezrizikového portfólia hovoríme *hedging (zaisťovanie).*

Uvažujme portfólio P obsahujúce v čase t jeden finančný derivát s hodnotou V a Δ akcií s hodnotou S vyplácajúce divideny. Tomuto postupu vytvorenia bezrizikového portfólia hovoríme Δ *hedging.* Potom hodnota portfólia P je daná vzťahom ako

$$P = V + \Delta S. \tag{A.4}$$

Prírastok (zmena) hodnoty tohto portfólia za malý časový interval dt, pri fixovanom Δ sa potom rovná

$$dP = dV + \Delta dS + \Delta DSdt. \tag{A.5}$$

Dosadením vzťahu $(A.1)$ a $(A.3)$ do rovnosti $(A.5)$ dostávame stochastickú diferenciálnu rovnicu pre hodnotu portfólia P v tvare

[1] Definíciu a dôkaz Itôovej lemy dávame do pozornosti v [12] a [19].

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu - D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \Delta\mu S\right)dt + \left(\sigma S\frac{\partial V}{\partial S} + \Delta\sigma S\right)dW, \quad (A.6)$$

pričom pomer Δ volíme tak, aby bol anulovaný koeficient pred náhodným členom, ktorým je spomínaný diferenciál Wienerovho procesu dW. Teda za Δ položíme

$$\Delta = -\frac{\partial V}{\partial S}. \quad (A.7)$$

Pri takomto výbere pomeru Δ, ktorý ak dosadíme do stochastickej diferenciálnej rovnice pre hodnotu portfólia P vyjadrenú vzťahom $(A.6)$, tak dostávame novú diferenciálnu rovnicu, ktorá už ale neobsahuje žiadny náhodný člen. Teda zmena hodnoty portfólia, ktorá už je ale bezriziková, je na malom časovom intervale dt deterministická a nie stochastická, a rovná sa

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - DS\frac{\partial V}{\partial S}\right)dt. \quad (A.8)$$

Bezriziková zmena hodnoty portfólia $(A.8)$ sa musí rovnať výnosu, ktorý by sme získali spojitým úrokovaním hodnoty P v bankovom depozite za rovnaký časový interval dt. V dôsledku priestoru možnosti vzniku arbitráže je práve táto rovnosť nutná, aby taká možnosť nenastala. Ak predpokladáme spojitú bezrizikovú mieru vo výške r, pre zúročenie hodnoty P v bankovom depozite platí

$$dP = rPdt. \quad (A.9)$$

Dosadením vzťahu $(A.9)$ do vzťahu $(A.8)$ dostávame:

$$rPdt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - DS\frac{\partial V}{\partial S}\right)dt \quad (A.10)$$

Využijúc vzťahy $(A.4)$, $(A.7)$ a $(A.10)$ dostávame pre hodnotu finančného derivátu $V(S,t)$ modifikovanú Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu v tvare:[2]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \quad (A.11)$$

[2] Poznamenajme, že za povšimnutie stojí fakt, že hodnota opcie závisí iba od volatility ceny akcie σ, lebo ako vidieť, očakávaná výnosnosť akcie μ v Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnici vôbec nevystupuje.

V prípade, že na akcie nie sú vyplácané spojité divideny vo výške $DSdt$ $(D = 0)$, má príslušná parciálna diferenciálna rovnica opisujúca vývoj ceny opcie tvar

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \qquad (A.12)$$

ktorá sa nazýva klasická Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica.

Teraz hľadajme riešenie $V(S,t)$ pre $S \geq 0$ a $t \in [0,T]$. Aby sme ho vedeli jednoznačne nájsť musíme k Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnici pridať tzv. okrajové podmienky v krajných bodoch ,,priestorovej premennej" S a podmienku na hodnoty finančného derivátu v určitom bode ,,časovej premennej" t. V dôsledku poznania hodnoty finančného derivátu v čase jeho expirácie túto druhú podmienku dostaneme pre $t = T$, ktorú nazývame expiračnou (koncovou) podmienkou.[3]

V takom prípade, ak poznáme koncovú podmienku, úloha je dobre postavená a má jediné riešenie. Okrajové podmienky pre parciálne diferenciálne rovnice mávajú rôzny tvar, avšak určujú sa ako hodnoty $V(S,t)$ pre cenu akcie S rovnú nule a pre cenu akcie nadobúdajúce veľké hodnoty.

Pre lepšiu predstavivosť a detailné pochopenie významu jednotlivých podmienok sa zamerajme na konkrétny typ finančného derivátu, ktorým nech je európska call opcia, ktorú označíme $V_{ec}(S,t)$. Na nej si teraz podrobne vysvetlíme okrajové podmienky i koncovú podmienku.

Ak cena akcie S v čase expirácie $(t = T)$ opcie je menšia, nanajvýš rovná danej expiračnej cene E, potom hodnota opcie bude nulová, pretože opcia nebude uplatnená. A ak cena akcie S v čase expirácie $(t = T)$ opcie bude väčšia ako daná expiračná cena E, potom hodnota opcie bude rovná rozdielu ceny akcie S a expiračnej ceny E, aby nenastala možnosť vzniku arbitráže.

$$V_{ec}(S,T) = \begin{cases} 0 & \text{pre } S \leq E \\ \text{S-E} & \text{pre } S > E \end{cases} \qquad (A.13)$$

[3]V prípade obrátenia času, ak do T umiestnime 0, pôjde o tzv. začiatočnú podmieku, a pri tejto transformácií tak dostaneme klasickú doprednú difúznu rovnicu, ktorú vieme riešiť smerom do budúcnosti.

Z týchto úvach dostávame tak koncovú podmienku v čase expirácie ($t = T$) pre európsku call opciu v tvare

$$V_{ec}(S,T) = \max\,(S - E, 0), \tag{A.14}$$

pričom hodnoty opcie v expiračnom čase tvoria terminálovú výplatnú (pay-off) funkciu.

Priestorové ohraničenie ceny akcie S určujú okrajové podmienky pre cenu európskej call opcie. V prípade, že cena akcie S je nulová ($S = 0$), tak aj hodnota opcie vypísanej na danú akciu bude nulová, pretože nebude mať žiadnu hodnotu.

$$V_{ec}(0,t) = 0, \quad t \in [0,T] \tag{A.15}$$

V druhom prípade, t. j. ak cena akcie S rastie nad všetky ohraničenia ($S \to \infty$), tak cena európskej call opcie vypísanej na takúto akciu je rovná cene akcie zredukovanej o príjmy z dividend (až do času expirácie akciu nevlastníme), ktorej hodnota je ešte znížená o diskontovanú expiračnú cenu akcie.

$$V_{ec}(S,t) \to S e^{-D(T-t)} - E e^{-r(T-t)}, \quad t \in [0,T] \tag{A.16}$$

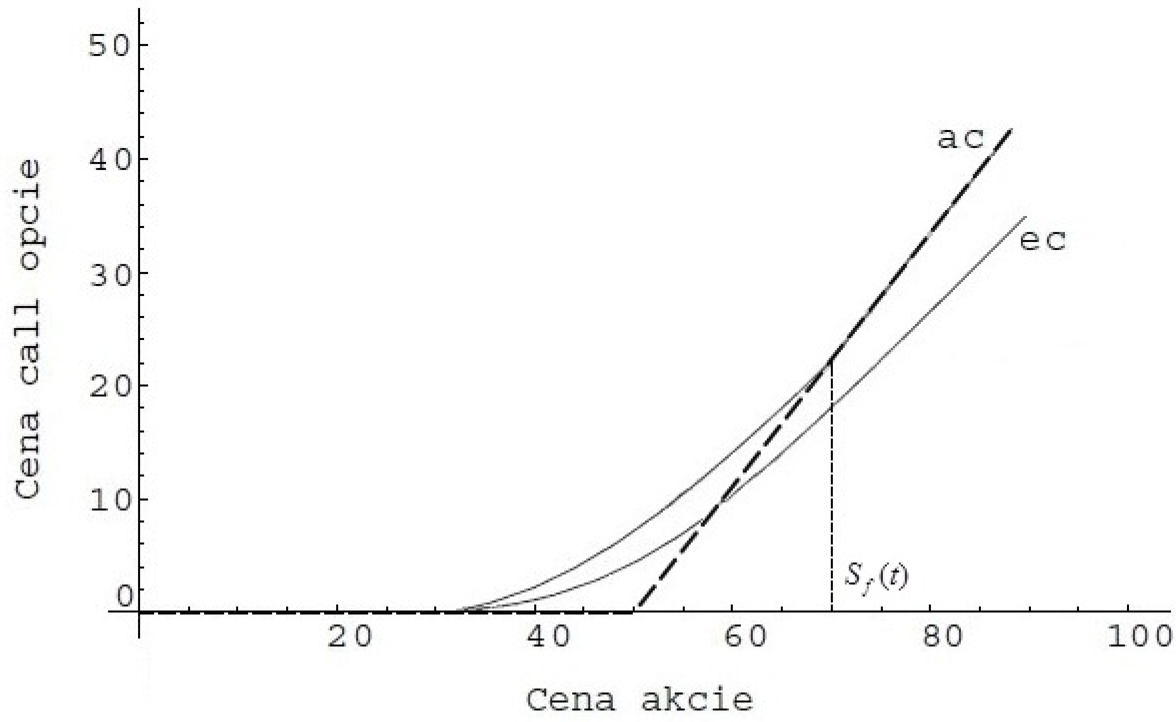
Ak $D = 0$, tak okrajová podmienka (A.16) sa zjednoduší na tvar:

$$V_{ec}(S,t) \to S - E e^{-r(T-t)}, \quad t \in [0,T] \tag{A.17}$$

(B) Oceňovanie amerického typu derivátov

V tejto časti diplomovej práce uvádzame postup riešenia problému oceňovania amerického typu derivátu, a to konkrétne americkej call opcie. Pripomeňme si, že základnou charakteristikou americkej opcie je možnosť jej uplatnenia kedykoľvek v priebehu životnosti opcie. Oceňovanie amerických opcií vedie tak na úlohu s voľnou hranicou, kde si špeciálnu pozornosť vyžadujú okrajové a koncové podmienky opcie.

Nasledujúce teoretické poznatky, rovnako aj definície, ktoré uvádzame sú prebraté z knihy [12].



Obr. 3.10: Porovnanie riešenia európskej call (ec) a americkej call (ac) opcie s vyznačením polohy predčasného uplatnenia americkej call opcie $S_f(t)$ pre čas $0 \leq t < T$.

Z definície (1.2) americkej call opcie vyplýva, že ju môžeme uplatniť skôr, ako len v čase expirácie, preto okrem samotného riešenia $V(S,t) = V^{ac}(S,t)$ hľadáme aj funkciu $S_f(t)$ času $t \in [0,T]$ tvoriacu tzv. hranicu predčasného uplatnenia opcie, ktorá je definovaná ako množina takých bodov $(S_f(t), t)$, kde hodnota americkej call opcie $V^{ac}(S,t)$ prvýkrát pretne pay-off funkciu $V^{ac}(S_f(t),t) = \max(S_f - E, 0)$, s nasledujúcimi vlastnosťami:

1. Ak pre cenu akcie S_t v čase $t \in [0,T]$ platí $S < S_f(t)$, potom $V^{ac}(S,t) > \max(S-E,0)$. Z toho vyplýva, že americkú call opciu budeme naďalej držať, nakoľko jej hodnota je vyššia ako pay-off diagram opcie. Na zaistenie portfólia použijeme Black-Scholesov model, a teda pre $0 < t < T$ a $S < S_f(t)$ platí Black-Scholesova rovnica.

2. Ak pre cenu akcie S_t v čase $t \in [0,T]$ platí $S \geq S_f(t)$, potom $V^{ac}(S,t) = \max(S-E,0)$. V tomto prípade americkú call opciu uplatníme, nakoľko jej hodnota je zhodná s pay-off diagramom. Black-Scholesov model tu narozdiel od prvého prípadu zlyháva.

Úlohou je teda nájsť funkciu $V = V^{ac}(S,t)$ spolu s funkciou $S_f : [0,T] \rightarrow \mathbb{R}$ opisujúcu hranicu predčasného uplatnenia americkej call opcie tak, aby boli splnené nasledujúce podmienky:[4]

1. Funkcia $V(S,t)$ je riešením Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice
$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r-D)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \qquad (B.1)$$
na časovo premenlivej oblasti $0 < t < T$ a $0 < S < S_f(t)$.

2. Terminálová podmienka pre call opciu je v tvare:
$$V(S,T) = max(S-E,0) \qquad (B.2)$$

3. Okrajové podmienky pre riešenie americkej call opcie sú v tvare:
$$V(0,t) = 0, \quad V(S_f(t)) = S_f(t) - E, \quad \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = 1, \qquad (B.3)$$
pre krajné hodnoty ceny akcie $S = 0$ a $S = S_f(t)$.

Poznamenajme ešte, že posledné dve okrajové podmienky z $(B.3)$ zaručujú spojitosť a C^1 hladkosť funkcie $V^{ac}(S,t)$ v bode $S = S_f(t)$ na voľnej hranici $S = S_f(t)$, pre každé $0 < t < T$.

[4]Úloha s voľnou hranicou pre oceňovanie americkej call opcie.

Literatúra

[1] Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M., *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, Vol. 7, p. 229-263, 1979

[2] Myers S. C., *Determinants of Corporate Borrowing*, Journal of Financial Economics, Vol. 5, p. 147-175, 1977

[3] Smit Han T. J., Trigeorgis L., *Strategic Investment: Real Options and Games*, Princeton, Princeton University Press, 2004

[4] Baldwin C., Trigeorgis L., *Real Options, Capabilities, TQM, and Competitiveness*, Working paper, Harvard Business School, p. 93-125, 1993

[5] Trigeorgis L., *Real Options and Interactions with Financial Flexibility*, Financial Management 22, No. 3, p. 202-224, 1993

[6] Brennan M., Schwartz E., *The Valuation of American Put Options*, Journal of Finance, Vol. 32, No. 2, p. 449-462, 1977

[7] Brennan M., Schwartz E., *Evaluating Natural Resource Investments*, Journal of Business, Vol. 58, No. 2, p. 135-157, 1985

[8] Mauboussin M. J., *Think Twice: Harnessing the Power of Counterintuition*, Harvard, Harvard Business School Press, 2009

[9] Dixit A. K., Pindyck R. S., *Investment under Uncertainity*, Princeton, Princeton University Press, 1994

[10] Barkoci L., *Hodnotenie investície do obnoviteľného zdroja energie prostredníctvom reálnych opcií*, Bratislava, 2008

[11] Michnová I., *Analýza investičného rozhodovania pri uplatnení reálnej opcie*, Bratislava, 2008

[12] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K., *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU, Bratislava, 2009

[13] Black F., Scholes M. S., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3, p. 637-654, 1973

[14] Merton R. C., *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, No. 1, p. 141-183, 1973

[15] Barone-Adesi G., Whaley R., E., *Efficient analytic approximations of American option values* Journal of Finance, Vol. 42, p. 301-320, 1987

[16] Zhu S., P., *A new analytical approximation formula for the optimal exercise boundary of American put options*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol. 9, p. 1141-1177, 2006

[17] Chadam J., *Free Boundary Problems in Mathematical Finance*, Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2006, Vol. 12, Springer Berlin Heidelberg, 2008

[18] Copeland T. E., Antikarov V., *Real Options: A Practitioner's Guide*, Texere, New York, 2001

[19] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V., *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005

[20] Metropolis N., Ulam S., *The Monte Carlo Method*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 44, p. 335-341, 1949

[21] Metropolis N., *The beginning of the Monte Carlo method*, Los Alamos Science, p. 125-130, 1987

[22] Boyle P., *Options: A Monte Carlo Approach*, Journal of Financial Economics, Vol. 4, p. 323-338, 1977

[23] Broadie M., Glasserman P., *Estimating Security Price Derivatives Using Simulation*, Management Science, Vol. 42, No. 2, p. 269-285, 1996

[24] Longstaff F. A., Schwartz E. S., *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*, Review of Financial Studies, Vol. 14, p. 113-147, 2001

[25] Šimko M., *Stochastické úlohy optimálneho riadenia*, Bratislava, 2010

[26] Halická M., Brunovský P., Jurča P., *Optimálne riadenie - Viacetapové rozhodovacie procesy v ekonómii a financiách*, Epos, 2009

[27] Chladná Z., *Real options applications for strategic investment decisions*, Viedeň, 2007

[28] Bellman R., E., *The theory of dynamic programming*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 60, No. 6, p. 503-516, 1954

[29] Euler L., *Institutiones, calculi integralis*, St. Petersburg, 1768-1770

[30] Smith G., D., *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford University Press, Third Edition, p. 67-68, 1985

[31] Lax P., D., Richtmyer R., D., *Survey of the stability of linear finite difference equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 9, p. 267-293, 1956

[32] Ševčovič D., *Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie*, Bratislava, IRIS, 2008

[33] Horváthová J., *Analýza voľnej hranice amerických opcií*, Bratislava, 1999

[34] Mikula K., *Metódy oceňovania finančných derivátov*, Bratislava, Dostupné na: *http://math.sk/mpm/otazka_28.pdf*