

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Odhadovanie okamžitej úrokovej miery v CKLS modeli

Diplomová práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Odhadovanie okamžitej úrokovej miery
v CKLS modeli

Diplomová práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Vladimír Mosný
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Odhadovanie okamžitej úrokovej miery v CKLS modeli

Cieľ: Diplomová práca Zuzany Bouškovéj z roku 2010 sa zaoberala Vašíčkovým modelom úrokových mier, pričom sa pri kalibrácii okrem parametrov odhadovala aj okamžitá úroková miera. V práci sa navrhol a testoval iteračný algoritmus na riešenie tejto úlohy. V diplomovej práci Jany Hlagašovej sa (v kontexte kalibrácie iných modelov) ukázalo, že problém odhadovania okamžitej úrokovej miery sa pre Vašíčkov model dá riešiť aj jednoduchšie – pomocou riešenia systému lineárnych rovníc. Toto však nie je možné už ani pre CIR model, v ktorom je síce explicitné riešenie pre výnosové krivky, ale je zložitejšie. Cieľom tejto diplomovej práce je navrhnúť a aplikovať algoritmus na odhadovanie okamžitej úrokovej miery vo všeobecnom CKLS modeli, ktorý predstavuje zovšeobecnenie Vašíčkovho a CIR modelu.

Vedúci: RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFIKAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Dátum zadania: 13.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie:

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu s názvom *Odhadovanie okamžitej úrokovej miery v CKLS modeli* vypracoval samostatne pod vedením školiteľa a s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 18. 4. 2012

.....

Pod'akovanie:

Touto cestou by som sa chcel poďakovať vedúcej diplomovej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. predovšetkým za všestrannú odbornú pomoc s vypracovaním diplomovej práce, za ochotu, trpezlivosť a cenné pripomienky a rady pri písaní práce.

MOSNÝ, Vladimír: *Odhadovanie okamžitej úrokovej miery v CKLS modeli* [Diplomová práca].

Univerzita Komenského v Bratislave, Mlynská dolina, 84248 Bratislava, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Vedúci práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD

Bratislava, 2012. /48 s./

Abstrakt

V jednofaktorových modeloch úrokových mier sa predpokladá, že okamžitá úroková miera je charakterizovaná pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice. Táto práca je venovaná jednofaktorovému modelu Chan-Karolyi-Longstaff-Sandersovho typu (CKLS). Tento model bol navrhnutý ako zovšeobecnenie viacerých modelov svojej triedy a predpokladajú sa v ňom nekonštantné volatility úmerné mocnine krátkodobej úrokovej miery. Nakoľko presné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu vo všeobecnom CKLS modeli nie je známe používame analytickú aproximačnú formulu podľa článku B. Stehlíkovej o aproximácii ceny dlhopisu na základe Vašíčkovho modelu. Podľa tejto aproximácie navrhujeme metódu, ktorou na základe pozorovaných výnosových kriviek odhadneme parametre CKLS modelu ako aj priebeh okamžitej úrokovej miery, ktorú považujeme za nepozorovateľnú veličinu. Postup kalibrácie modelu testujeme na simulovaných a reálnych dátach.

Kľúčové slová: úroková miera, jednofaktorové modely, CKLS model, Vašíčkov model, CIR model, analytická aproximácia, kalibrácia

MOSNÝ, Vladimír: *Short rate estimation in CKLS model* [Master's thesis].

Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics,
Department of Applied Mathematics and Statistics.

Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD

Bratislava, 2012. /48 p./

Abstract

One-factor interest rate models assume that short-rate is characterized by stochastic differential equation. We study the one-factor Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders model (CKLS). This model was designed as generalization of models of a certain class and assumed non-constant volatility which is proportional to power of short-rate. Because exact solution of partial differential equation for the bond price based on the general CKLS model is not known we use analytic approximation formula according to article Approximation formula for the bond price based on the Vasicek model written by B. Stehlikova. According to this approximation we designed method which, based on the observed yield curves, estimates parameters of CKLS model and the evolution of short-rate that we consider to be an unobservable We tested variable. the calibration procedure on simulated and real data.

Keywords: interest rate, one-factor models, CKLS model, Vasicek model, CIR model, analytic approximation, calibration.

Obsah

Úvod	1
1 Základné pojmy	3
1.1 Dlhopis ako derivát úrokovej miery	3
1.2 Výnosové krivky	4
2 Stochastický kalkulus	8
2.1 Brownov pohyb a Wienerov proces	8
2.2 Itóva lema	10
3 CKLS model a aproximácia ceny dlhopisu	11
3.1 Modely okamžitej úrokovej miery a CKLS model	11
3.2 Jednofaktorový rovnovážny model ocenenia derivátov	14
3.3 Princíp zmeny miery	16
3.4 Aproximačná formula pre CKLS model	18
4 Kalibrácia jednofaktorového CKLS modelu a odhadovanie okamžitej úrokovej miery	21
4.1 Metódy kalibrácie modelu	22
4.2 Kalibrácia modelu CKLS so vstupom okamžitej úrokovej miery	22
4.3 Kalibrácia Vašíčkovho modelu bez vstupu okamžitej úrokovej miery	25
4.4 Kalibrácia modelu CKLS bez vstupu okamžitej úrokovej miery	27
4.5 Upravená kalibrácia modelu CKLS bez vstupu okamžitej úrokovej miery ..	34
5 Zhrnutie výsledkov zo simulovaných dát a ich aplikácia na reálne dáta	38
Záver.....	43
Literatúra.....	44
Príloha.....	46

Úvod

V súčasnom svete finančných trhov sa dnes len ťažko zaobídeme bez využitia matematiky a jej aplikovania do výpočtových algoritmov. Medzi jedny z najčastejších oblastí skúmaných na finančných trhoch je vývoj úrokových mier. Modelovaním úrokových mier sa dnes vo veľkej miere zaoberá finančná matematika, nakoľko správne ocenenie ľubovoľného finančného aktíva sa zakladá na informácii o hodnote úrokovej miery.

Opísanie dynamiky okamžitej úrokovej miery ako teoretický začiatok výnosovej krivky môžeme považovať za základný stavebný kameň modelovania úrokových mier. Podľa toho, aký model na opísanie tejto dynamiky zvolíme, dostaneme aj množinu výnosových kriviek. Modely úrokových mier sú definované stochastickou diferenciálnou rovnicou. Počet týchto stochastických diferenciálnych rovníc nám určuje o koľko faktorový model sa jedná. Ak je napríklad model definovaný jednou stochastickou diferenciálnou rovnicou, hovoríme o jednofaktorovom modeli, ak dvomi tak o dvojfaktorovom modeli. V našej práci sa budeme zaoberať jednofaktorovým modelom Chan-Karolyi-Longstaff-Sandersovho typu (CKLS). Tento model bol navrhnutý ako zovšeobecnenie viacerých modelov svojej triedy, do ktorej patrí aj Vašíčkov model s konštantnou volatilitou úrokových mier a CIR model s nekonštantnou volatilitou úmernou druhej odmocnine krátkodobej úrokovej miery. CKLS model predpokladá nekonštantné volatility úmerné mocnine krátkodobej úrokovej miery. Na základe článku B. Stehlíkovej o aproximácii ceny dlhopisu na základe Vašíčkovho modelu. Navrhujeme metódu, ktorou na základe pozorovaných výnosových kriviek odhadneme parametre CKLS modelu a priebeh okamžitej úrokovej miery.

Prácu sme rozdelili na päť kapitol, ktoré sa delia do dvoch častí. Do prvej časti patria prvé tri kapitoly a tvoria teoretický základ pre druhú časť. Prvá kapitola definuje základné pojmy, ako dlhopis, výnosová krivka, časová štruktúra úrokových mier. V druhej definujeme základné pojmy stochastického kalkulu, ktoré sú kľúčom k modelovaniu procesov úrokových mier. V tretej kapitole urobíme prehľad známych modelov opisujúcich okamžitú úrokovú mieru, ako aj ich zovšeobecnenie v podobe modelu CKLS. Ďalej vysvetlíme spôsob oceňovania derivátov úrokovej miery. Na záver kapitoly

ukážeme prehľad aproximácií riešenia pre model CKLS a vlastnosti čo s nimi súvisia. Štvrtá kapitola sa venuje kalibrácii modelu CKLS. Navrhujeme v nej algoritmy na základe aproximačnej formuly, ktorých efektívnosť testujeme na simulovaných dátach. Výsledky zo simulovaných dát v poslednej piatej kapitole zhrnieme a aplikujeme na reálne trhové dáta, t.j. úrokové sadzby na medzibankovom trhu.

Kapitola 1

Základné pojmy

V tejto kapitole definujeme dlhopis ako derivát úrokovej miery. Vysvetlíme pojem výnosovej krivky a okamžitej úrokovej miery, s ktorými budeme v práci ďalej pracovať. Podrobnejšie informácie k témam tejto kapitoly je možné nájsť v knihách [7], [8], [9] a [15], z ktorých táto kapitola vychádza.

1.1 Dlhopis ako derivát úrokovej miery

Deriváty odvodené od úrokových mier sú v posledných rokoch obchodované na finančných trhoch po celom svete. Medzi najznámejšie deriváty patria dlhopisy, swapy, capy, floory a ďalšie. V tejto práci sa budeme bližšie zaoberať dlhopismi.

Dlhopis je dohoda, v ktorej sa emitent (predávajúci) zaväzuje kupujúcemu, že mu v pevne stanovenom čase vyplatí vopred stanovenú sumu. Ak navyše emitent kupujúcemu pravidelne vypláca v dohodnutých obdobiach úrok (tzv. kupón), nazývame tento dlhopis kupónový. Ak kupón vyplácaný nie je, hovoríme o bezkupónovom dlhopise. Nakoľko pod kupónovým dlhopisom sa dá rozumieť portfólio bezkupónových dlhopisov, budeme sa ďalej zaoberať len bezkupónovými dlhopismi (angl. *zero-coupon bonds*). Dlhopis je základným finančným nástrojom používaným firmami alebo vládami na navýšenie kapitálu, pričom vopred vyplatená prémie kupujúcim môže byť považovaná za pôžičku emitentovi. Dlhopisy sú obvykle emitované (vypisované) verejne a predávané rôznym investorom. Nominálna hodnota dlhopisu sa nazýva par value a predstavuje hodnotu dlhopisu, ktorá musí byť vyplatená v čase vypršania dlhopisu. Tento čas sa nazýva maturita (angl. *maturity date*). Maturita dlhopisu je teda určený dátum, v ktorom nominálna hodnota dlhopisu musí byť vyplatená.

Označme cenu bezkupónového dlhopisu ako $P(t, T)$ v čase $t < T$, pričom v čase T je nominálna hodnota dlhopisu $P(T, T) = 1$, ďalej pre jednoduchosť budeme uvažovať len takýto dlhopis. Pre bližší výpočet ceny dlhopisu musíme najskôr definovať niektoré pojmy, ktoré budeme využívať.

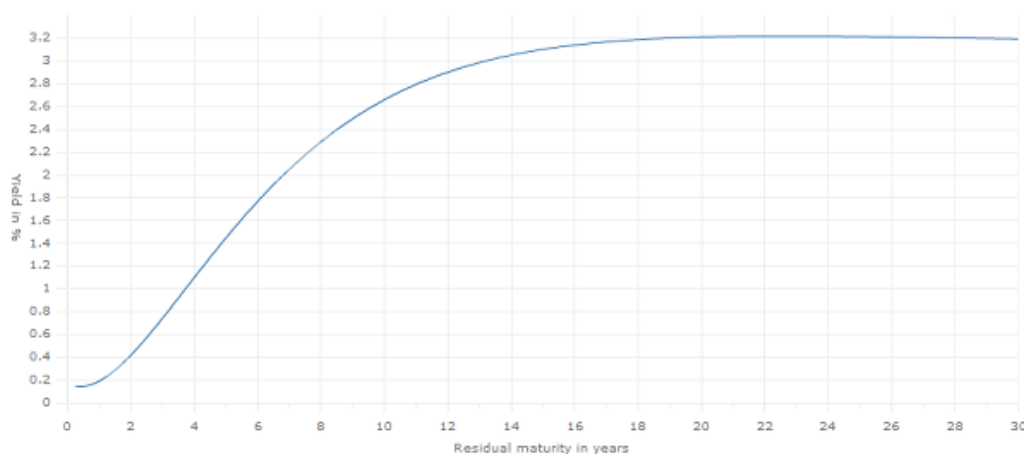
1.2 Výnosové krivky

Aby sme vedeli hovoriť o modeloch úrokových mier, musíme definovať pojmy ako výnos do doby splatnosti (angl. *yield to maturity*), výnosová krivka (angl. *yield curve*), časová štruktúra úrokových mier (angl. *term structure of interest rate*), forwardová úroková miera (angl. *forward rate*) a okamžitá úroková miera (angl. *spot rate* alebo *short rate*). Na záver tejto časti sa vrátíme k výpočtu ceny dlhopisu.

Nech $P(t, T)$ určuje cenu bezkupónového dlhopisu v čase t s maturitou v čase T . Trhové ceny $P(t, T)$ ukazujú trhové očakávania na úrokovú mieru v budúcnosti. *Výnos do doby splatnosti* $R(t, T)$ je definovaný nasledovne:

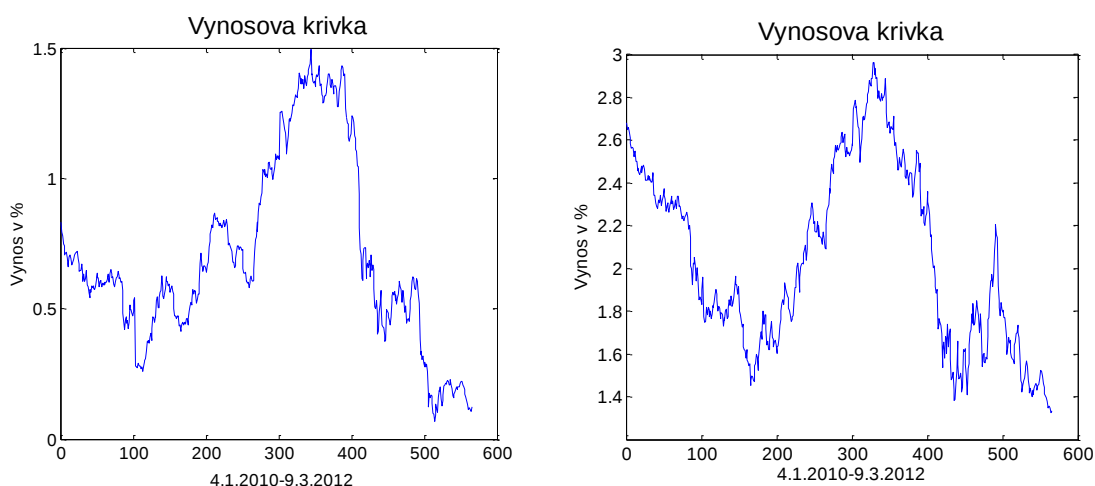
$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln(P(t, T)), \quad (1.1)$$

ako vnútorná miera výnosnosti dlhopisu v čase t . *Výnosová krivka* je graf $R(t, T)$ od T , ktorého príklad môžeme vidieť na obrázku 1.1. Závislosť výnosovej krivky od času do maturity $T - t$ sa nazýva *časová štruktúra úrokových mier*.



Obr.1.1: Výnosová krivka centrálnych štátnych dlhopisov eurozóny zo dňa 10.2.2012 EUR podľa [17]

Graf $P(t, T)$ v závislosti od maturity T je podľa knihy [7] nevyhnutne klesajúca krivka, dlhopisy s dlhšou maturitou majú vždy nižšiu cenu. Avšak, *výnosová krivka* (graf závislosti $R(t, T)$ od T) môže byť rastúca alebo klesajúca krivka, čo odhaľuje priemernú návratnosť dlhopisu. Z toho dôvodu výnosové krivky poskytujú viac vizuálnych informácií v porovnaní s krivkami cien dlhopisov.



Obr. 1.2: Výnosové krivky centrálnych štátnych dlhopisov eurozóny za obdobie od 4.1.2010 do 9.3.2012, vľavo $T = 1$, vpravo $T = 5$ (ukážka z reálnych dát z [17])

Ďalej uvažujme cenu forwardového kontraktu v čase t , kde držiteľ súhlasí s nákupom v neskoršom čase ako T_1 jeden bezkupónový dlhopis s maturitou $T_2 > T_1$. Cena forwardu podľa knihy [8] bude $P(t, T_2)/P(t, T_1)$.

Prirodzene *forward rate* $f(t, T_1, T_2)$ v čase t pre periódu medzi T_1 a T_2 bude súvisieť s cenami bezkupónových dlhopisov s maturitami T_1 a T_2 . Definujeme ju:

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \ln \left(\frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} \right). \quad (1.2)$$

Okamžitá forward rate v čase t pre dlhopis s maturitou v čase T je definovaná ako

$$F(t, T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\ln(P(t, T)) - \ln(P(t, T + \Delta T))}{\Delta T} = -\frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P}{\partial T}(t, T). \quad (1.3)$$

Integrovaním s ohľadom na T , cena dlhopisu $P(t, T)$ sa dá vyjadriť

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T F(t, u) du\right). \quad (1.4)$$

Okrem toho z rovností (1.1) a (1.3) môžeme vyjadriť nasledovne

$$F(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} [R(t, T)(T - t)] = R(t, T) + (T - t) \frac{\partial}{\partial T} R(t, T), \quad (1.5)$$

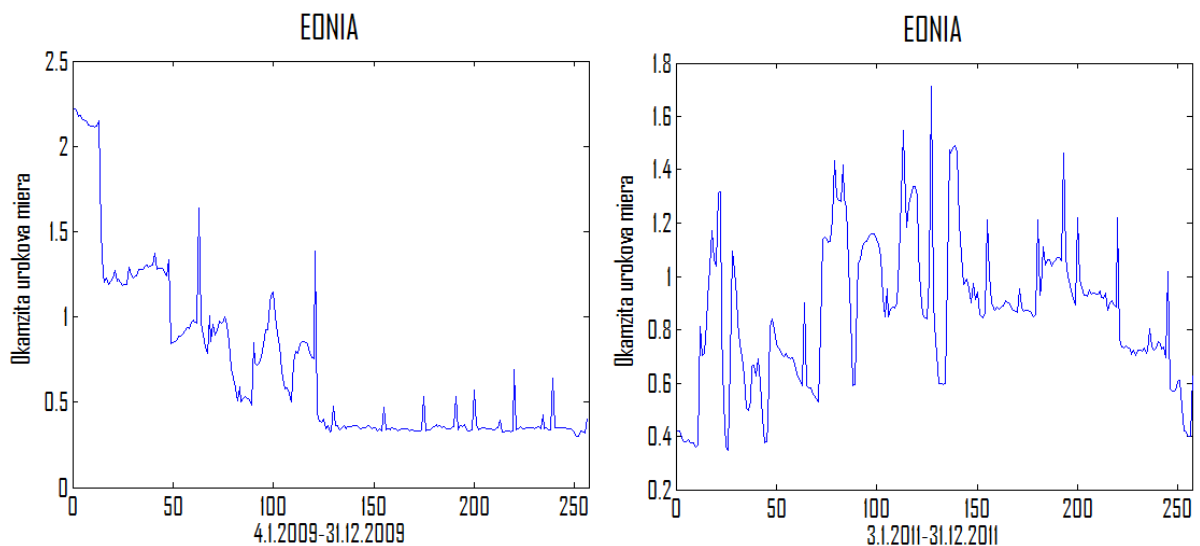
alebo ekvivalentne,

$$R(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T F(t, u) du. \quad (1.6)$$

Rovnosti (1.4) a (1.6) ukazujú, že cena alebo výnos dlhopisu možno spätne získať z vedomosti o časovej štruktúre *forward rate*. Z (1.5) môžeme odvodiť, že krivka *forward rate* (graf závislosti $F(t, T)$ od T) bude nad *výnosovou* krivkou ak *výnosová* krivka rastie a ak klesá bude pod ňou.

Pomocou *výnosov do doby splatnosti* a okamžitej *forward rate* môžeme definovať *okamžitú úrokovú mieru* $r(t)$ ako

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) = R(t, t) = F(t, t). \quad (1.7)$$



Obr.1.3: Priebeh okamžitej úrokovej miery – vľavo EONIA z roku 2009, vpravo EONIA z roku 2011 podľa [18]

Výpočet ceny $P(t, T)$ bezkupónového dlhopisu je založený na základe okamžitej úrokovej miery. Rozlišujeme tri rôzne situácie (podľa [9] sa dá realizovať):

- a) Okamžitá úroková miera je deterministickou konštantou $r > 0$.

V tomto prípade, by $P(t, T)$ malo spĺňať rovnicu:

$$e^{r(T-t)}P(t, T) = P(T, T) = 1, \quad (1.8)$$

z ktorej vyplýva:

$$P(t, T) = e^{-r(T-t)}, 0 \leq t \leq T. \quad (1.9)$$

- b) Okamžitá úroková miera je deterministickou funkciou $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ závislou od času.

V tomto prípade:

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}, 0 \leq t \leq T. \quad (1.10)$$

- c) Okamžitá úroková miera je stochastický proces $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Takýto prípad môžeme vidieť na obrázku 1.2, ktorý zobrazuje reálne dáta. V tomto prípade sa cena nedá vyjadriť tak jednoducho ako v predchádzajúcich dvoch prípadoch, ale je potrebná zložitejšia teória. Touto teóriou sa budeme zaoberať v nasledujúcich kapitolách.

Kapitola 2

Stochastický kalkulus

V tejto kapitole definujeme základné pojmy stochastického kalkulu, ktoré sú kľúčom k modelovaniu procesov úrokových mier. Pre jednoduchosť spomenieme iba základné definície a vety bez dôkazov a odvodení. Podrobnejšie informácie o tejto téme môže čitateľ nájsť napríklad v knihách [2], [7], [8], [9], [15], ktoré slúžili ako podklad k tejto kapitole.

2.1 Brownov pohyb a Wienerov proces

Na popísanie stochastického vývoja ceny aktíva sa používa Wienerov proces, ktorý je špeciálnym prípadom Brownovho pohybu. Na definovanie Wienerovho procesu musíme najprv definovať, čo je stochastický proces vo všeobecnosti.

Nech (Ω, F, P) je pravdepodobnostný priestor, kde F je σ -algebra merateľných množín na množine Ω a P je pravdepodobnostná miera na množine Ω . Pomocou neho môžeme napísať definíciu stochastického procesu podľa [8]:

Definícia 2.1.1. *Stochastický proces je súbor náhodných premenných $X = \{X_t; 0 \leq t < \infty\}$ na pravdepodobnostnom priestore (Ω, F, P) s hodnotami v $\mathbb{R}^d$. Pre každé t je*

$$\omega \rightarrow X_t(\omega); \omega \in \Omega$$

náhodná premenná. Ak fixujeme $\omega \in \Omega$, dostávame funkciu

$$t \rightarrow X_t(\omega); 0 \leq t < \infty,$$

ktorá sa nazýva trajektória X priradená ω .

Následne môžeme definovať Brownov pohyb podľa [9]:

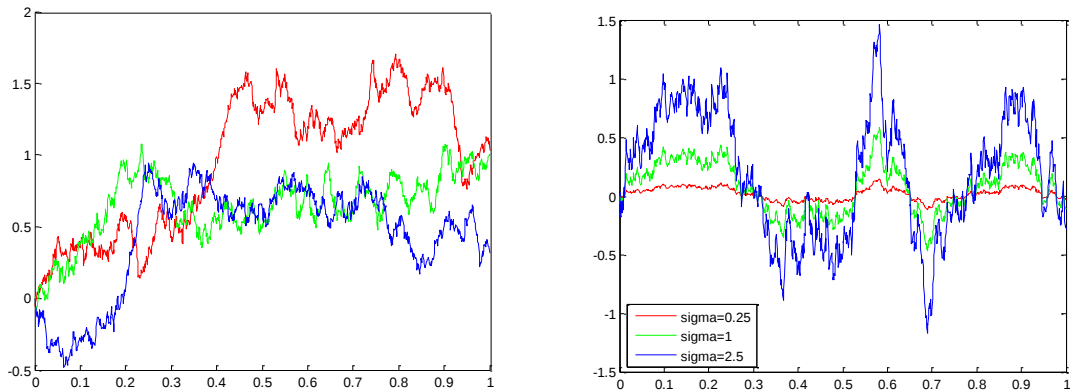
Definícia 2.1.2. Brownov pohyb je stochastický proces $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ taký, že

1. $W_0 = 0$ takmer iste,
2. Trajektórie $t \rightarrow W_t$ sú (takmer iste) spojité.
3. Pre všetky konečné delenia $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ časového intervalu $[t_0, t_n]$, sú prírastky

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

nezávislé.

4. Pre ľubovoľné časy $0 \leq s < t$ je $W_t - W_s$ normálne rozdelená náhodná premenná so strednou hodnotou nula a disperziou $t - s$.



Obr.2.1: Realizácie Wienerovho a Brownovho pohybu s $\mu = 0$

Poznamenajme, že v niektorej literatúre (napríklad kniha [15]) sa pod pojmom Brownov pohyb myslí proces $X_t = \mu t + \sigma W_t$, kde μ, σ sú konštanty, $\sigma > 0$. Proces W_t z definície sa potom nazýva Wienerov proces. V tejto práci však budeme využívať iba Wienerov proces ako je uvedený v definícii 2.1.2 a budeme ho značiť W_t . V ďalšom texte budeme značiť $\{X(t), t \geq 0\} = (X_t)_{\mathbb{R}_+}$. Realizácie Brownovho pohybu s parametrom $\mu = 0$ sú zobrazené na obrázku 2.1. Na ľavom obrázku je Wienerov proces a na pravom je Brownov pohyb s parametrami $\sigma = 0.25, \sigma = 1, \sigma = 2.5$. Z obrázku môžeme vidieť, že

pridaním parametra σ , t. j. vynásobením Wienerovho procesu konštantou σ , sa zmenil charakter fluktuácií procesu. Pričom platí, čím menšia hodnota σ , tým menšie kmitanie.

Brownov pohyb $\{X(t), t \geq 0\}$ podľa [15] môžeme analyzovať aj z hľadiska prírastkov, ktoré môžeme vyjadriť v tvare totálneho diferenciálu

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dw(t), \quad (2.1)$$

kde $\{w(t), t \geq 0\}$ je Wienerov proces. Rovnicu (2.1) nazývame *stochastická diferenciálna rovnica*.

2.2 Itóva lema

Itóva lema je vo finančnej matematike jednou z najdôležitejších. Predstavuje základný kameň k analýze stochastických diferenciálnych rovníc a dáva odpoveď na otázku, či je možné zostaviť stochastickú diferenciálnu rovnicu z ľubovoľnej hladkej funkcie $f(x, t)$, pričom premenná x je riešením zadanej stochastickej diferenciálnej rovnice. My využijeme Itóvu lemu v ďalšej kapitole, kde pomocou nej odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu ceny dlhopisu vo všeobecnom modeli okamžitej úrokovej miery. Itóva lema podľa [15] znie nasledovne:

Lema 2.2.1. *Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw,$$

kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt.$$

Dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw.$$

Kapitola 3

CKLS model a aproximácia ceny dlhopisu

V tejto kapitole si uvedieme niekoľko známych modelov opisujúcich okamžitú úrokovú mieru, ako aj ich zovšeobecnenie v podobe modelu CKLS. Ďalej vysvetlíme spôsob oceňovania derivátov úrokovej miery a ukážeme, ako v niektorých prípadoch explicitne vypočítať cenu dlhopisu. Na záver kapitoly ukážeme aproximácie riešenia pre model CKLS (v ktorom vo všeobecnosti explicitné riešenie nie je známe) a vlastnosti súvisiace s touto aproximáciou.

3.1 Modely okamžitej úrokovej miery a CKLS model

Modely, ktorými sa budeme zaoberať, patria medzi tzv. jednofaktorové modely. V jednofaktorových modeloch sa vo všeobecnosti predpokladá, že okamžitá úroková miera r je charakterizovaná pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice, ktorá môže mať vo všeobecnosti tvar

$$dr = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dw. \quad (3.1)$$

Túto stochastickú diferenciálnu rovnicu (3.1) môžeme rozdeliť na deterministickú časť procesu $dr = \mu(t, r)dt$, ktorá určuje trend (alebo drift) vo vývoji úrokovej miery a volatilitu $\sigma(t, r)$, ktorá určuje charakter náhodných fluktuácií úrokovej miery v okolí trendovej, t.j. deterministickej zložky.

Funkcia $\mu(t, r)$ sa často volí tak, aby modelovala konvergencie úrokovej miery v určitej rovnovážnej hodnote. Stochastické procesy, ktorých deterministická časť je vo forme $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r)$, sa zvyknú označovať ako *mean reversion procesy*. Zápis

takejto driftovej funkcie $\mu(t, r)$ je uvádzaný pomocou rôznych parametrizácií. V tejto kapitole budeme vychádzať z knihy [8], kde driftová funkcia nadobúda všeobecný tvar $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r)$, kde κ, θ sú kladné konštanty. Parameter θ nazývame limitnou úrokovou mierou a parameter κ určuje rýchlosť návratu k limitnej úrokovej miere. To sa dá ľahko ukázať nasledovne:

$$dE(r_t) = E(dr_t) = \kappa(\theta - E(r_t))dt + E(\sigma(t, r)dw) = \kappa(\theta - E(r_t))dt. \quad (3.2)$$

Z rovnice (3.2) potom dostávame diferenciálnu rovnicu

$$\frac{d}{dt}E(r_t) = \kappa(\theta - E(r_t)). \quad (3.3)$$

Keďže $\sigma(t, r)$ je hodnota volatility v čase t a dw je prírastok Wienerovho procesu na intervale $(t, t+dt)$ (vyplýva to z konštrukcie Itóvhov integrálu, pozri napr. [15]), tieto dve veličiny sú nezávislé a teda platí $E(\sigma(t, r)dw) = 0$. Potom riešenie diferenciálnej rovnice (3.3) má tvar

$$E(r_t) = \theta + (E(r_0) - \theta)e^{-\kappa t}. \quad (3.4)$$

To ale znamená, že $\lim_{t \rightarrow \infty} E(r_t) = \theta$ a κ určuje rýchlosť konvergencie k tejto limitnej hodnote.

Mean reversion procesy vytvárajú skupinu modelov okamžitej úrokovej miery, ktoré sa líšia v tvare funkcie volatility $\sigma(t, r)$. Podľa rôznych tvarov funkcie volatility budeme v nasledovnom texte rozlišovať jednotlivé modely patriace do tejto skupiny. Medzi historicky prvé a najjednoduchšie modely vývoja okamžitej úrokovej miery patrí *Vašíčkov model*, pri ktorom uvažujeme konštantnú volatilitu $\sigma(t, r) = \sigma$, t.j.

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw. \quad (3.5)$$

Takýto proces sa nazýva aj *Ornstein-Uhlenbeckov mean reversion proces*. Jeho nevýhodou je, že pripúšťa záporné hodnoty okamžitej úrokovej miery r .

Aby bola možnosť zápornosti okamžitých úrokových mier odstránená, bol vymyslený nový model. V tomto modeli už volatilitu nevolíme konštantnú, ale $\sigma(t, r) = \sigma\sqrt{r}$. Tento model sa nazýva tzv. *Cox-Ingersoll-Rossov model* (skrátene *CIR model*). V ňom sa teda úroková miera modeluje stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw. \quad (3.6)$$

Voľba volatility v tvare odmocniny z r znamená, že pri malých hodnotách úrokovej miery je volatilita malá a pri nulovej hodnote je aj volatilita nulová. Ak je $r = 0$, ďalší vývoj je určený driftom $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r)$, ktorý je vzhľadom na konštanty pre $r = 0$ kladný, čo znamená, že sa úroková miera zvýši a nadobudne kladnú hodnotu. Stochastickému procesu pre vývoj náhodnej veličiny, ktorý má tvar (3.6), hovoríme aj *Besselov odmocninový proces*.

Zovšeobecnením uvedených dvoch modelov je populárny model navrhnutý Chan, Karolyi, Longstaff a Sandersom. Má tvar

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw, \quad (3.7)$$

kde $\gamma \geq 0$ je konštanta. Skrátene ho budeme označovať ako *CKLS model*. Ľahko nahliadnuť, že pri voľbe $\gamma = 0$ dostaneme *Vašíčkov model* a pri voľbe $\gamma = 0.5$ dostaneme *CIR model*.

Model	Stochastická diferenciálna rovnica pre r
Dothan (1978)	$dr = \sigma r dw$
Brennan-Schwarz (1979)	$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r dw$
Cox-Ross (1976)	$dr = \beta r dt + \sigma r^\gamma dw$
Cox-Ingersoll-Ross s variabilnou sadzbou (1980)	$dr = \sigma r^{\frac{3}{2}} dw$
Ho&Lee (1986)	$dr = \theta(t)dt + \sigma dw$

Tab. 3.1: Prehľad jednofaktorových modelov

V tabuľke 3.1 uvádzame ďalšie jednofaktorové modely okamžitej úrokovej miery v tvare (3.7) a model Ho&Lee, ktorého drift nie je v tvare *Mean reversion procesu*, ale v tvare

všeobecnej deterministickej funkcie $\theta(t)$. Týmto sa dá dosiahnuť zhoda teoretickej výnosovej krivky s reálnou výnosovou krivkou, ktorú dnes pozorujeme na trhu (pozri [17]).

3.2 Jednofaktorový rovnovážny model ocenenia derivátov

Jednofaktorový rovnovážny model vychádza z opisu okamžitej úrokovej miery r , ktorá slúži ako podkladové aktívum pre jej derivát - bezkupónový dlhopis. Pre vývoj r budeme uvažovať všeobecný jednofaktorový model (3.1), t.j.

$$dr = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dw.$$

Ak označíme cenu dlhopisu s maturitou T ako $P = P(r, t; T)$, kde táto cena závisí od času t a od okamžitej úrokovej miery r , potom z Itóvej lemy v kapitole 2 dostávame nasledovnú stochastickú diferenciálnu rovnicu pre P :

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw, \quad (3.8)$$

Túto stochastickú diferenciálnu rovnicu prepíšeme do tvaru:

$$\frac{dP}{P} = \mu_B(r, t)dt + \sigma_B(r, t)dw. \quad (3.9)$$

kde

$$\mu_B(r, t) = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_B(r, t) = \frac{1}{P} \sigma \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (3.10)$$

Následne zostrojíme portfólio, ktoré sa bude skladať z dvoch rôznych typov (alebo druhov) dlhopisov. Kúpime dlhopisy v celkovej hodnote V_1 s maturitou T_1 a predáme dlhopisy v hodnote V_2 s maturitou T_2 . Hodnotu portfólia označíme π , bude vyzeráť nasledovne:

$$\pi = V_1 - V_2. \quad (3.11)$$

V súlade so vzťahom (3.9) je zmena hodnoty portfólia $d\pi$ daná ako

$$d\pi = [V_1 \mu_B(r, t, T_1) - V_2 \mu_B(r, t, T_2)]dt + [V_1 \sigma_B(r, t, T_1) - V_2 \sigma_B(r, t, T_2)]dw. \quad (3.12)$$

Zvoľme V_1 a V_2 v tvare:

$$V_1 = \frac{\sigma_B(r, t, T_2)}{\sigma_B(r, t, T_2) - \sigma_B(r, t, T_1)} \pi \quad \text{a} \quad V_2 = \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2) - \sigma_B(r, t, T_1)} \pi. \quad (3.13)$$

Potom nám stochastický člen v rovnici (3.12) zmizne. Vznikne teda bezrizikové portfólio, ktoré má iba deterministickú časť

$$d\pi = \pi \frac{\mu_B(r, t, T_1) \sigma_B(r, t, T_2) - \mu_B(r, t, T_2) \sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2) - \sigma_B(r, t, T_1)} dt. \quad (3.14)$$

Aby nedošlo k arbitráži, výnos takéhoto portfólia sa musí rovnať okamžitej bezrizikovej úrokovej miere r , t.j. $d\pi = r\pi dt$. Teda podľa (3.14):

$$\frac{\mu_B(r, t, T_1) \sigma_B(r, t, T_2) - \mu_B(r, t, T_2) \sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2) - \sigma_B(r, t, T_1)} \pi = r\pi. \quad (3.15)$$

Po úpravách získame vzťah:

$$\frac{\mu_B(r, t, T_1) - r(t)}{\sigma_B(r, t, T_1)} = \frac{\mu_B(r, t, T_2) - r(t)}{\sigma_B(r, t, T_2)}. \quad (3.16)$$

Vyššie uvedený vzťah (3.16) je platný pre ľubovoľné maturity T_1 a T_2 , preto zlomok

$\frac{\mu_B(r, t, T) - r(t)}{\sigma_B(r, t, T)}$ musí byť nezávislý od maturity T . Môžeme teda definovať funkciu

$$\lambda(r, t) = \frac{\mu_B(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\sigma_B(r, t, T)}, \quad (3.17)$$

kde T je ľubovoľná maturita. Táto funkcia $\lambda(r, t)$ sa nazýva *trhová cena rizika*, nakoľko vyjadruje očakávaný nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika. Ak dosadíme funkcie $\mu_B(r, t)$ a $\sigma_B(r, t)$ z (3.10) do vzťahu (3.17) dostávame hľadanú parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu $P(r, t, T)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r, t) - \lambda(r, t) \sigma(r, t)) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r, t)}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0. \quad (3.18)$$

Funkcia $P(r, t, T)$ musí spĺňať koncovú podmienku $P(r, T, T) = 1$ pre každé $r > 0$. Teda v okamihu splatnosti je hodnota dlhopisu rovná jednotke a to bez ohľadu na okamžitú úrokovú mieru. Ak máme teda proces r opísaný jednou stochastickou diferenciálnou rovnicou a trhovú cenu rizika špecifikovanú, hodnotu dlhopisu môžeme získať riešením rovnice (3.18).

3.3 Princíp zmeny miery

Stochastickú diferenciálnu rovnicu pre popis okamžitej úrokovej miery môžeme zapísať dvomi základnými spôsobmi. Prvý z nich sme používali doteraz a je to zápis v reálnej pravdepodobnostnej miere. Jeho výhodou je možnosť porovnať vlastnosti procesu s pozorovanými dátami. Pri oceňovaní derivátov je však často výhodnejšie používať vyjadrenie v rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere. Popísanie zmeny miery je však pomerne zložité, preto sa obmedzíme len na stručné popísanie zmeny miery v zápise okamžitej úrokovej miery. Podrobnejšie sa tejto problematike venuje kniha [8], z ktorej v tejto podkapitole vychádzame.

Zmenu miery v zápise okamžitej úrokovej miery môžeme veľmi zjednodušene popísať ako prechod od vychýleného Wienerovho procesu v reálnej pravdepodobnostnej miere P ku štandardnému Wienerovmu procesu (pozri definíciu 2.1.2). Uvedme vetu podľa [8] :

Veta 3.3.1. (Girsanova veta) *Nech $W_t(w)$, $0 \leq t \leq T$, je Brownov pohyb na (Ω, F, P) . Nech $\gamma_t(w)$ je F_t^W – adaptovaný proces, pre ktorý*

$$E_P \left(\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right) < \infty.$$

Potom existuje miera Q na (Ω, F) taká, že

$$(i) \quad Q \sim P$$

$$(ii) \quad \frac{dQ}{dP}(w) = \exp \left(- \int_0^T \gamma_t(w) dW_t(w) - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2(w) dt \right)$$

$$(iii) \quad W_t(w) = W_t(w) + \int_0^t \gamma_s(w) ds$$

Podľa Girsanovej vety 3.3.1 platí:

$$d\tilde{w} = dw + \lambda(r)dt \quad \text{alebo} \quad dw = d\tilde{w} + \lambda(r)dt, \quad (3.19)$$

kde rizikovo neutrálna pravdepodobnostná miera je označená vlnovkou. Rovnicu pre vývoj okamžitej úrokovej miery v CKLS modeli $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw$, ktorá je definovaná v reálnej pravdepodobnostnej miere P , môžeme potom prepísať na tvar v rizikovo neutrálnnej pravdepodobnostnej miere Q nasledovne

$$dr = (\kappa(\theta - r) - \lambda(r)\sigma r^\gamma)dt + \sigma r^\gamma d\tilde{w}. \quad (3.20)$$

Všimnite si, že volatilita zostala rovnaká a drift sa presne rovná koeficientu pri parciálnej derivácii $\partial P / \partial r$ v rovnici (3.18) pre cenu dlhopisu.

Štandardnou voľbou trhovej ceny rizika vo Vašíčkovom modeli je $\lambda(r, t) \equiv \lambda$ a v CIR modeli $\lambda(r, t) \equiv \lambda\sqrt{r}$, pozri [15]. V rizikovo neutrálnnej miere potom pre Vašíčkov model dostávame

$$dr = (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma)dt + \sigma d\tilde{w}. \quad (3.21)$$

Analogicky pre CIR model

$$dr = (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma r)dt + \sigma\sqrt{r}d\tilde{w}. \quad (3.22)$$

V oboch prípadoch môžeme stochastickú diferenciálnu rovnicu (3.20) upraviť na tvar

$$dr = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r)dt + \sigma r^\gamma d\tilde{w}, \quad (3.23)$$

pričom vo Vašíčkovom modeli $\tilde{\alpha} = \kappa\theta - \lambda\sigma$, $\tilde{\beta} = -\kappa$ a v CIR modeli $\tilde{\alpha} = \kappa\theta$, $\tilde{\beta} = -\kappa - \lambda\sigma$. Uvedené trhové ceny rizika teda vedú k lineárnemu driftu v rizikovo neutrálnnej miere. V ďalšom texte pre väčšiu prehľadnosť použijeme zápis v rizikovo neutrálnnej miere bez vlnoviek.

3.4 Aproximačná formula pre CKLS model

Predpokladajme, že vývoj okamžitej úrokovej miery r v rizikovo neutrálnej miere je daný stochastickou diferenciálnou rovnicou $dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^\gamma dw$. Pripomeňme, že ide o zovšeobecnenie Vašíčkovho a CIR modelu. Cena P bezkupónového dlhopisu s časom do doby splatnosti $\tau = T - t$, keď súčasná úroveň okamžitej úrokovej miery je r , je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice vyplývajúcej z (3.18) a vzťahu medzi reálnymi a rizikovo neutrálnymi parametrami:

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\alpha + \beta r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad r > 0, \quad \tau \in (0, \infty), \quad (3.24)$$

pričom je splnená počiatočná podmienka $P(0, r) = 1$ pre všetky $r > 0$. V prípade Vašíčkovho modelu, kedy by sa v (3.24) rovnalo $\gamma = 0$ má táto parciálna a diferenciálna rovnica riešenie P_{vas} , ktoré vieme vyjadriť v tzv. uzavretej forme nasledovne (pozri [12])

$$\ln P_{vas}(\tau, r) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \right) \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right) + \frac{\sigma^2}{4\beta^3} (1 - e^{\beta\tau})^2 + \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} r. \quad (3.25)$$

Teraz môžeme predstaviť aproximáciu riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice (3.24) podľa článku [4]. Autori navrhujú hľadanú aproximáciu P_{ap1} pre presné riešenie P_{ex} rovnice (3.24) v tvare:

$$\ln P_{ap1}(\tau, r) = \left[-rB + \frac{\alpha}{\beta}(\tau - B) + (r^{2\gamma} + q\tau) \frac{\sigma^2}{4\beta} \left(B^2 + \frac{2}{\beta}(\tau - B) \right) - q \frac{\sigma^2}{8\beta^2} \left(B^2(2\beta\tau - 1) - 2B \left(2\tau - \frac{3}{\beta} \right) + 2\tau^2 - \frac{6\tau}{\beta} \right) \right], \quad (3.26)$$

kde $q(r) = \gamma(2\gamma - 1)\sigma^2 r^{2(2\gamma-1)} + 2\gamma r^{2\gamma-1}(\alpha + \beta r)$ a $B(\tau) = \frac{(e^{\beta\tau} - 1)}{\beta}$.

Chyba, ktorá vzniká týmto analytickým aproximačným riešením, je uvedená v článku [11] formou vety:

Veta 3.4.2: Nech P_{ap1} je analytické aproximačné riešenie dané (3.26) a P_{ex} je presná cena dlhopisu daná ako riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (3.24). Potom

$$\ln P_{ap1}(\tau, r) - \ln P_{ex}(\tau, r) = c_5(r) \tau^5 + o(\tau^5),$$

ak $\tau \rightarrow 0^+$, kde

$$c_5(r) = -\frac{1}{120} \gamma r^{2(\gamma-2)} \sigma^2 \left[+4\beta^2 \gamma r^4 - 8r^{3+2\gamma} \sigma^2 + 2\beta(1-5\gamma+6\gamma^2) r^{2(\gamma+1)} \sigma^2 \right. \\ \left. + 2\alpha^2 (2\gamma-1) r^2 + \sigma^4 r^{4\gamma} (2\gamma-1)^2 (4\gamma-3) \right. \\ \left. + 2\alpha r (\beta(-1+4\gamma) r^2 + (2\gamma-1)(3\gamma-2) r^{2\gamma} \sigma^2) \right].$$

Dôkaz tejto vety môžeme nájsť v knihe [4] alebo článku [11]. Analytické aproximačné riešenie (3.26) je navyše porovnávané s numerickým riešením, pričom sa medzi nimi dosahuje rozdiel rádovo 10^{-11} . V tomto článku je aproximácia (3.26) navyše vylepšená, kvôli zložitosti zápisu však toto spresnenie uvádzať nebudeme. Pri vylepšenej aproximácii sa rozdiel medzi presným riešením a touto aproximáciou mení na $o(\tau^6)$.

V článku [12], na ktorý bude táto práca ďalej nadväzovať, sa uvažuje aproximácia ceny dlhopisu v CKLS modeli P_{ap} získaná substitúciou volatility σr^γ za σ v riešení P_{vas} Vašíčkovho modelu z (3.25), t.j.

$$\ln P_{ap}(\tau, r) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{2\beta^2} \right) \left(\frac{1-e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right) + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{4\beta^3} (1-e^{\beta\tau})^2 + \frac{1-e^{\beta\tau}}{\beta} r. \quad (3.27)$$

Pre túto aproximáciu je v [12] odvodený nasledovný odhad chyby

Veta 3.4.3: Nech P_{ap} je aproximačné riešenie (3.27) a P_{ex} je presné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (3.24). Potom

$$\ln P_{ap}(\tau, r) - \ln P_{ex}(\tau, r) = c_4(r) \tau^4 + o(\tau^4),$$

ako $\tau \rightarrow 0^+$ kde

$$c_4(r) = -\frac{1}{24} \gamma r^{2\gamma-2} \sigma^2 \left[2r(\alpha + \beta r) + (2\gamma-1) r^{2\gamma} \sigma^2 \right].$$

Dôsledok 3.4.4: Z vety 3.4.3 vyplýva

1. *Relatívna chyba v P je daná ako*

$$\frac{P_{ap}(\tau, r) - P_{ex}(\tau, r)}{P_{ex}(\tau, r)} = c_4(r)\tau^4 + o(\tau^4) \text{ ak } \tau \rightarrow 0^+;$$

2. *Chyba vo výnosových krivkách môže byť vyjadrená ako*

$$R_{ap}(\tau, r) - R_{ex}(\tau, r) = -c_4(r)\tau^3 + o(\tau^3) \text{ ak } \tau \rightarrow 0^+.$$

Dôkaz (podľa [12]): K dokázaniu prvej časti dôsledku využijeme vzťah z Vety 3.4.3 $\ln P_{ap}(\tau, r) - \ln P_{ex}(\tau, r) = c_4(r)\tau^4 + o(\tau^4)$. S využitím vlastností logaritmu a následným rozpísaním do Taylorovho polynómu dostávame $P_{ap}/P_{ex} = e^{c_4(r)\tau^4 + o(\tau^4)} = 1 + c_4(r)\tau^4 + o(\tau^4)$ a preto bod jedna platí. Druhý bod bezprostredne vyplýva zo vzťahu $R(\tau, r) = -\ln P(\tau, r)/\tau$ spomenutom v prvej kapitole (1.4).

□

Dôkaz vety 3.4.3 môže čitateľ nájsť stručne napísaný napríklad v článku [12].

Kapitola 4

Kalibrácia jednofaktorového CKLS modelu a odhadovanie okamžitej úrokovej miery

Prvú časť tejto kapitoly venujeme všeobecnému postupu, na ktorom môže byť kalibrácia modelov okamžitej úrokovej miery založená. Povieme si, ako prebiehala kalibrácia v článku [12], v ktorom bola navrhnutá efektívna kalibrácia CKLS modelu pomocou analytickej aproximácie výnosových kriviek. Okamžitá úroková miera je ale teoretická veličina a teda nie je pozorovateľná, preto ju autori niekedy aproximujú reálnymi krátkodobými výnosmi. Jednou z možností je použitie hodnôt overnightu (úroku na pôžičku na jeden deň) ako napríklad v práci [13]. Iný prístup bol použitý napríklad v práci [3], kde sa okamžitá úroková miera aproximuje jednomesačnými výnosmi. Význam okamžitej úrokovej miery ako limity úrokových mier pre nulovú splatnosť je však v rozpore s použitím jednomesačných výnosov. Vzniká tu aj problém s interpretáciou splatností ostatných výnosov, ak jednomesačný výnos je short rate, čo je potom dvojmesačný výnos? Sú to dvojmesačné výnosy alebo jednomesačné? Použitie hodnôt overnightu však tiež nie je celkom správne, nakoľko môžu byť príliš ovplyvnené špekuláciami na finančných trhoch. Preto budeme okamžitú úrokovú mieru považovať za neznámu a budeme ju odhadovať spolu s parametrami modelu. Otázkou odhadovania okamžitej úrokovej miery sa zaoberá J. Halgašová v diplomovej práci [6]. Ukázala, že v prípade Vašíčkovho modelu sa dá odhadovanie okamžitej úrokovej miery realizovať súčasne s odhadovaním parametrov, pričom táto úloha vedie na riešenie systému lineárnych rovníc. Vysvetlíme tento postup a ukážeme, prečo sa nedá priamo použiť na všeobecnejší CKLS model. Zvyšok kapitoly je potom venovaný úpravám algoritmu a návrhom metód na odhad short rate v CKLS modeli. Jednotlivé metódy kalibrácie otestujeme na simulovaných dátach a vzájomne ich porovnáme.

4.1 Metódy kalibrácie modelu

Metódy kalibrácie modelov okamžitej úrokovej miery vieme vo všeobecnosti rozdeliť podľa toho, či sa zameriavajú na zhodu teoretických a trhových výnosových kriviek (napríklad už spomínaný článok [12]), na štatistickú analýzu časového radu okamžitej úrokovej miery (pozri článok [3], v ktorom bola použitá zovšeobecnená metóda momentov), alebo kombináciou týchto dvoch prístupov (príkladom je napríklad práca [14], kde sa v prvej fáze minimalizovali rozdiely teoretických a reálnych výnosov a v následnej druhej fáze sa maximalizovala funkcia vierohodnosti okamžitej úrokovej miery). My sa budeme bližšie zaoberať metódou založenou na minimalizácii teoretických a trhových výnosových kriviek.

Nech R_{ij} označuje výnos pre maturitu τ_j ($j=1, \dots, m$) získaný v i -tom dni, $R(\tau_j, r_i)$ výnos vypočítaný pre j -tu ($j=1, \dots, m$) maturitu τ_j a príslušnú okamžitú úrokovú mieru r_i ($i=1, \dots, n$) získanú v i -tom dni. ω_{ij} budú označovať váhy. Našou úlohou bude teraz vybrať vhodné parametre a hodnoty okamžitej úrokovej miery, ktoré budú minimalizovať nasledovnú funkciu:

$$F(\alpha, \beta, \sigma, \gamma, r_i) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \left(R(\tau_j, r_i) - R_{ij} \right)^2. \quad (4.1)$$

Keďže v CKLS modeli nepoznáme presné riešenie $R(\tau_j, r_i)$, nahradíme ho aproximáciou $R_{ap}(\tau_j, r_i)$ (podľa [12]), ktorú vypočítame pomocou vzťahu (1.1) a vzťahu (3.27). Minimalizujeme teda v tomto prípade účelovú funkciu:

$$F(\alpha, \beta, \sigma, \gamma, r_i) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \left(R_{ap}(\tau_j, r_i) - R_{ij} \right)^2. \quad (4.2)$$

4.2 Kalibrácia modelu CKLS so vstupom okamžitej úrokovej miery

V tejto časti práce popíšeme kalibráciu CKLS modelu, ktorú navrhuje autorka článku [12]. V článku autorka ilustruje kalibráciu na jednej sade simulovaných dát. My spravíme viac simulácií a z nich urobíme priemerné hodnoty.

Vzt'ah (3.27) vieme prepísať do tvaru lineárnej funkcie vzhľadom na parametre α a σ^2 :

$$\ln P_{op}(\tau, r) = c_0(\tau, r) + c_1(\tau, r)\alpha + c_2(\tau, r)\sigma^2, \quad (4.3)$$

kde

$$c_0(\tau, r) = \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} r, \quad c_1(\tau, r) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right), \quad c_2(\tau, r) = \frac{r^{2\gamma}}{2\beta^2} \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta\tau})^2}{2\beta} \right).$$

Ak potom zoberieme parciálne derivácie účelovej funkcie F podľa α a σ^2 a položíme ich rovné nule, získame sústavu dvoch lineárnych rovníc pre tieto dva parametre:

$$\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} (c_0 + R_{ij} \tau_j) c_1, \quad (4.4a)$$

$$\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_2^2 = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} (c_0 + R_{ij} \tau_j) c_2. \quad (4.4b)$$

Parameter r vo funkciách c_0, c_1, c_2 budeme aproximovať hodnotami overnightu a váhy zvolíme $\omega_{ij} = \tau_j^2$ podľa práce Ševčoviča a Urbánovej Csajkovovej [14]. To znamená, že pre fixovaný parameter γ a zvolený parameter β vieme získať optimálne hodnoty α a σ^2 . Substituujeme tieto parametre do (4.1) a dostávame jednorozmernú optimalizačnú úlohu v ktorej optimalizujeme vzhľadom na β . Opakovanie vo vhodnom rozsahu parametra γ nám umožňuje nájsť optimálnu hodnotu pre parameter γ .

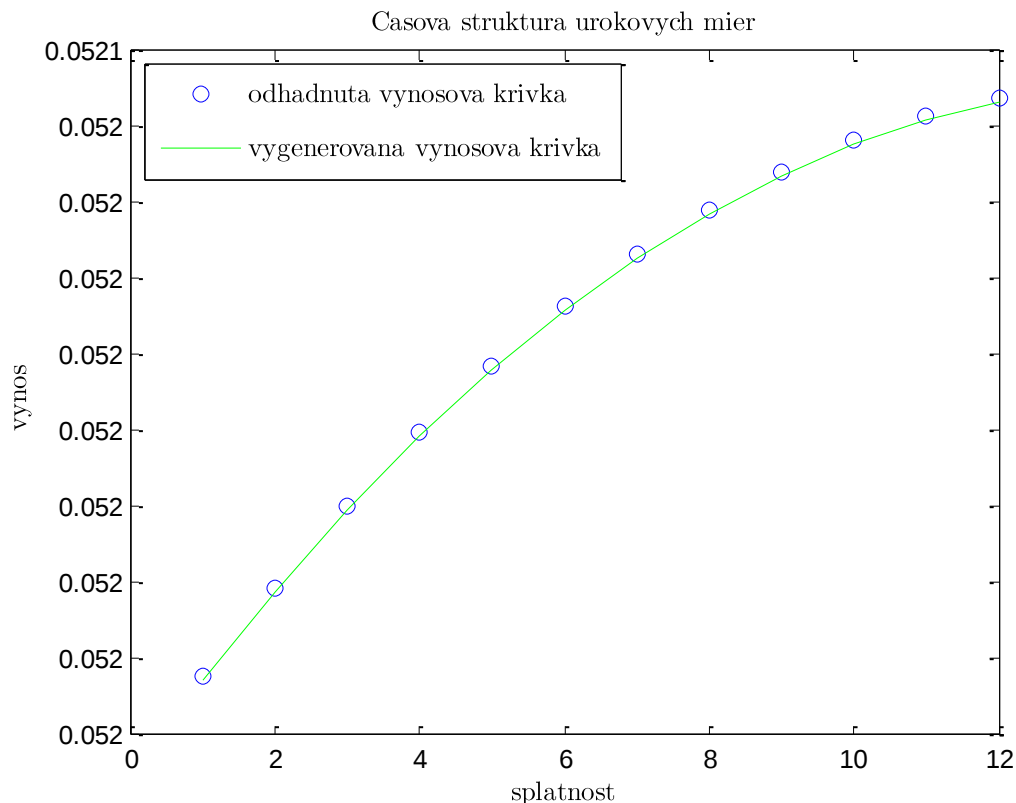
Navrhnutú metódu kalibrácie otestujeme na simulovaných dátach. Výhodou testovania na simulovaných dátach je, že odhadnuté parametre vieme spätne skontrolovať so známymi hodnotami, pomocou ktorých sme dáta generovali. V našom prípade budeme generovať presné výnosové krivky CIR modelu ($\gamma = 0,5$) s parametrami $\alpha = 0.0032$, $\beta = -0.0555$, $\sigma = 0.0894$ v rizikovo neutrálnej miere prevzaté z práce Choi, Wirjanto [4]. Budeme uvažovať denné dáta jedného roka pre 12 rôznych dôb splatností od jedného po dvanásť mesiacov rovnako ako napríklad v [12]. Ako sme spomenuli vyššie, váhy

zvolíme $\omega_{ij} = \tau_j^2$. Model budeme testovať pre 5 rôznych vstupných parametrov γ , $\{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$. Nakoľko nemáme zaručenú konvexnosť účelovej funkcie vzhľadom na parameter β , preto jej optimálnu hodnotu určujeme prehľadávaním funkčných hodnôt účelovej funkcie na dostatočne veľkom intervale. Pri týchto simuláciách volíme interval $\langle -1, 1 \rangle$ s dostatočne jemným delením. Kalibráciu budeme opakovať štyritisíc krát.

γ	α	β	σ	Optimálna hodnota F
0	0,003131	-0,0550	0,01553	$1,14 \times 10^{-3}$
0,25	0,003177	-0,0555	0,03023	$2,76 \times 10^{-5}$
0,5	0,003199	-0,0555	0,08601	$1,57 \times 10^{-9}$
0,75	0,003197	-0,0580	0,02614	$3,03 \times 10^{-6}$
1	0,003074	-0,0585	0,01248	$2,09 \times 10^{-4}$

Tab. 4.1: Priemerné hodnoty odhadov jednotlivých parametrov a priemerné optimálne hodnoty účelovej funkcie pre simulované dáta CIR modelu ($\gamma = 0.5$) s parametrami $\alpha = 0.0032$, $\beta = -0.0555$, $\sigma = 0.0894$

Odhadnuté hodnoty parametrov modelu a optimálna hodnota účelovej funkcie sú zobrazené v tabuľke 4.1. Ľahko nahliadnuť, že najlepšie odhady ako aj optimálnu hodnotu účelovej funkcie sme dosiahli pre $\gamma = 0,5$, čo zodpovedá generovanému CIR modelu. Vygenerované výnosové krivky a odhadnuté výnosy pre rôzne doby splatnosti pre jednu simuláciu sú zobrazené na obrázku 4.2.



Obr.4.2: Porovnanie vygenerovanej a odhadnutej časovej štruktúry úrokových mier pre simulované dáta CIR modelu ($\gamma = 0.5$) s parametrami $\alpha = 0.0032$, $\beta = -0.0555$, $\sigma = 0.0894$

4.3 Kalibrácia Vašíčkovho modelu bez vstupu okamžitej úrokovej miery

Vašíčkov model je značne jednoduchší ako model CKLS a jeho kalibrácia je preto omnoho jednoduchšia. V tejto podkapitole prebratej z [6] ukážeme ako možno jednoducho odhadnúť parametre a zároveň okamžitú úrokovú mieru v prípade jednofaktorového Vašíčkovho modelu pomocou sústavy lineárnych rovníc. Uvádžeme celý postup, pretože pomocou tejto úvahy potom v ďalšej časti práce rozšírime túto myšlienku na zložitejší CKLS model. V ďalšom navrhnutom algoritme budeme zase túto metódu priamo využívať.

Vzťah (4.3) upravíme na tvar, v ktorom vo funkciách c_0, c_1, c_2 nebude vystupovať okamžitá úroková miera r . Zmenený vzťah (4.3) nadobudne nasledovný tvar, ktorý je lineárny vzhľadom na α, σ^2, r

$$\ln P(\tau, r) = c_0(\tau, \beta)r + c_1(\tau, \beta)\alpha + c_2(\tau, \beta)\sigma^2, \quad (4.5)$$

kde

$$c_0(\tau, \beta) = \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta}, \quad c_1(\tau, \beta) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right), \quad c_2(\tau, \beta) = \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta\tau})^2}{2\beta} \right).$$

Ak potom pomocou vzťahov (1.1) a (4.5) dopočítame výnosy $R(\tau_j, r_i)$ a dosadíme ich do účelovej funkcie F , dostaneme konvexnú funkciu vzhľadom na α, σ^2 a aj vzhľadom na okamžitú úrokovú mieru $r_1, \dots, r_n$. Funkcia F nadobúda pre dané γ tvar

$$F(\alpha, \beta, \sigma^2, r_1, \dots, r_n) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} (c_0 r_i + c_1 \alpha + c_2 \sigma^2 - R_{ij} \tau_j)^2 \quad (4.6)$$

a jej optimálne hodnoty vieme explicitne vyjadriť pre každé β . Riešením jednorozmernej optimalizácie nájdeme optimálnu hodnotu parametra β . Opakovanie vo vhodnom rozsahu parametra γ nám umožňuje nájsť optimálnu hodnotu aj pre parameter γ .

Účelová funkcia (4.6) je teda po fixovaní β konvexná a jej derivovaním vieme získať optimálne hodnoty všetkých jej premenných. Keď položíme parciálne derivácie účelovej funkcie rovné nule, dostávame sústavu $n+2$ lineárnych rovníc, ktorú dokážeme efektívne riešiť. Túto sústavu môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Pričom jednotlivé bloky sú nasledovné:

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1^2 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_2^2 \end{bmatrix}, \quad B' = C = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_0 c_1 & \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_0 c_2 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_0 c_1 & \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_0 c_2 \end{bmatrix},$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_0^2 \end{bmatrix},$$

$$x' = [\alpha, \sigma^2], \quad y' = [r_1, \dots, r_n],$$

$$a = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_1 R_{ij} \\ -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} c_2 R_{ij} \end{bmatrix}, \quad b' = \left[\sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j}}{\tau_j^2} c_0 R_{1j}, \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{2j}}{\tau_j^2} c_0 R_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{nj}}{\tau_j^2} c_0 R_{nj} \right].$$

Takýto systém lineárnych rovníc sa vďaka jeho štruktúre dá redukovať. Vďaka tomu, že blok D je diagonálny, vieme k nemu ľahko nájsť inverznú maticu D^{-1} a vyjadriť tak vektor premenných y nasledovne

$$y = D^{-1}(b - Cx). \quad (4.8)$$

Z rovnice $Ax + By = a$ dosadením za y dostávame:

$$(A - BD^{-1}C)x = a - BD^{-1}b.$$

Takýto systém má rozmer 2×2 a jeho riešenie sa podstatne zjednodušilo. Po nájdení optimálnych hodnôt parametrov α a σ^2 ich dosadíme do vzťahu (4.8) a dopočítame zvyšné hodnoty parametrov $r_1, \dots, r_n$. Pre danú hodnotu β riešime jednorozmernú optimalizačnú úlohu, ktorej výsledkom je optimálna hodnota β . V nasledujúcej podkapitole sa tento postup pokúsime zovšeobecniť na model CKLS.

4.4 Kalibrácia modelu CKLS bez vstupu okamžitej úrokovej miery

Táto a nasledujúca podkapitola spolu s následným použitím uvedených metód bude tvoriť hlavný prínos tejto práce. V tejto kapitole sa pokúsime zovšeobecniť prístup

ku kalibrácii Vašíčkovho modelu bez vstupu okamžitej úrokovej miery, ktorým sa podrobnejšie zaoberala J. Halgašová v práci [6] a popísali sme ho vyššie v podkapitole 4.3.

S využitím úvahy v podkapitole 4.3 pre Vašíčkov model vzťah (4.3) upravíme na tvar, v ktorom vo funkciách c_0, c_1, c_2 nebude vystupovať okamžitá úroková miera r , aby hodnoty short rate neboli vstupom do kalibrácie. Zmenený vzťah (4.3) nadobudne nasledovný tvar

$$\ln P_{ap}(\tau, r) = c_0(\tau, \beta)r + c_1(\tau, \beta)\alpha + c_2(\tau, \beta)\sigma^2 r^{2\gamma}, \quad (4.9)$$

kde

$$c_0(\tau, \beta) = \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta}, \quad c_1(\tau, \beta) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right), \quad c_2(\tau, \beta) = \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta\tau})^2}{2\beta} \right).$$

Ak potom pomocou vzťahov (1.1) a (4.9) dopočítame aproximácie $R_{ap*}(\tau_j, r_i)$, ktoré dosadíme do účelovej funkcie F , funkcia F nadobudne pre dané γ tvar

$$F(\alpha, \beta, \sigma^2, r_1, \dots, r_n) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} (c_0 r_i + c_1 \alpha + c_2 \sigma^2 r_i^{2\gamma} - R_{ij} \tau_j)^2. \quad (4.10)$$

Táto účelová funkcia už nie je pre $\gamma \neq 0$ kvadratickou funkciou pre parametre $\alpha, \sigma^2, r_1, \dots, r_n$. Bolo by možné riešiť ju metódami nelineárnej optimalizácie, my sa však chceme pokúsiť nájsť iný jednoduchší spôsob. Ak označíme $y_i = \sigma^2 r_i^{2\gamma}$, účelová funkcia

$$F(\alpha, \beta, r_1, \dots, r_n, y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{ij}}{\tau_j^2} (c_0 r_i + c_1 \alpha + c_2 y_i - R_{ij} \tau_j)^2 \quad (4.11)$$

je už kvadratická funkcia s premennými $\alpha, r_1, \dots, r_n, y_1, \dots, y_n$ a ich optimálne hodnoty vieme explicitne vyjadriť pre každé β . Hodnoty r_i a y_i však nie sú nezávislé, platí

$$\frac{y_i}{r_i^{2\gamma}} = \sigma^2. \text{ Pre dáta vygenerované pomocou použitej aproximačnej formuly by podiely } \frac{y_i}{r_i^{2\gamma}}$$

vyšli konštantné. Vzhľadom na presnosť tejto aproximácie očakávame, že pri presných výnosoch by tieto podiely mali byť „skoro konštantné“. Z tohto dôvodu zoberieme ich priemer alebo medián (kvôli prípadným extrémnym hodnotám) ako odhad σ^2 . Dosadením

tohto σ^2 a ostatných odhadnutých parametrov $\alpha, r_1, \dots, r_n$ do účelovej funkcie dostaneme optimálnu hodnotu účelovej funkcie pre danú β . Ak toto spravíme pre každé β , vieme nájsť jeho optimálnu hodnotu. Opakovanie vo vhodnom rozsahu parametra γ nám umožňuje nájsť optimálnu hodnotu aj pre parameter γ .

Ako sme už povedali, účelová funkcia (4.11) je po fixovaní β kvadratická funkcia, a teda jej derivovaním vieme získať optimálne hodnoty všetkých ostatných premenných. Keď položíme parciálne derivácie účelovej funkcie rovné nule, dostávame sústavu $2n+1$ lineárnych rovníc, ktorú dokážeme efektívne riešiť. Túto sústavu môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ C' & D_1 & D_2 \\ B' & D_3 & D_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ r \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Pričom jednotlivé bloky sú nasledovné:

$$A = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_1^2 \right], \quad B = \left[\sum_{j=1}^m c_0 c_1, \dots, \sum_{j=1}^m c_0 c_1 \right],$$

$$C = \left[\sum_{j=1}^m c_1 c_2, \dots, \sum_{j=1}^m c_1 c_2 \right], \quad D_1 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_0 c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{j=1}^m c_0 c_2 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{j=1}^m c_2^2 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum_{j=1}^m c_0^2 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = [\alpha], r' = [r_1, \dots, r_n], y' = [y_1, \dots, y_n], a = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_1 R_{ij} \tau_j \right],$$

$$b' = \left[\sum_{j=1}^m c_2 R_{1j} \tau_j, \sum_{j=1}^m c_2 R_{2j} \tau_j, \dots, \sum_{j=1}^m c_2 R_{nj} \tau_j \right], c' = \left[\sum_{j=1}^m c_0 R_{1j} \tau_j, \sum_{j=1}^m c_0 R_{2j} \tau_j, \dots, \sum_{j=1}^m c_0 R_{nj} \tau_j \right].$$

Takýto systém lineárnych rovníc sa vďaka jeho štruktúre dá redukovať. Vďaka tomu, že blok D_1 je diagonálny, vieme k nemu ľahko nájsť inverznú maticu D_1^{-1} a vyjadriť tak vektor premenných y nasledovne

$$B' \alpha + D_3 r + D_1 y = c$$

$$y = D_1^{-1} (c - D_3 r - B' \alpha). \quad (4.13)$$

Po dosadení vyjadreného vektora y sa nám systém redukuje na

$$(A - CD_1^{-1}B') \alpha + (B - CD_1^{-1}D_3) r = a - CD_1^{-1}c$$

$$(C' - D_2 D_1^{-1} B') \alpha + (D_1 - D_2 D_1^{-1} D_3) r = b - D_2 D_1^{-1} c.$$

Z tohto redukovaného systému opäť vieme vybrať maticu $(D_1 - D_2 D_1^{-1} D_3)$, ktorá je diagonálna a pomocou inverznej matice $K = (D_1 - D_2 D_1^{-1} D_3)^{-1}$ vieme vyjadriť vektor premenných r nasledovne:

$$r = K (b - D_2 D_1^{-1} c) - K (C' - D_2 D_1^{-1} B') \alpha. \quad (4.14)$$

Po dosadení vyjadreného vektora r do redukovaného systému a označení matice $S = B - CD_1^{-1}D_3$ dostaneme finálnu redukciu nášho pôvodného systému, ktorá vyzerá nasledovne:

$$(A - CD_1^{-1}B' - SK(C' - D_2 D_1^{-1}B')) \alpha = a - CD_1^{-1}c - SK(b - D_2 D_1^{-1}c).$$

Takýto systém má rozmer 1×1 , ide teda o explicitné vyjadrenie odhadu parametra α :

$$\alpha = (a - CD_1^{-1}c - SK(b - D_2 D_1^{-1}c)) / (A - CD_1^{-1}B' - SK(C' - D_2 D_1^{-1}B')), \quad (4.15)$$

lebo v čitateli aj menovateli tohto výrazu dostávame skalár. Po jeho výpočte vieme zo vzťahu (4.14) určiť optimálne hodnoty $r_1, \dots, r_n$ a následne z (4.13) aj $y_1, \dots, y_n$. Po nájdení optimálnych hodnôt parametrov $\alpha, r_1, \dots, r_n, y_1, \dots, y_n$ pre danú hodnotu β dostávame hodnotu účelovej funkcie pre túto β . Potom riešime jednorozmernú optimalizačnú úlohu, ktorej výsledkom je optimálna hodnota β .

Algoritmus kalibrácie CKLS modelu

Vstupy

- Vektor dôb splatností τ dĺžky m
- Trhové výnosy $R_{ij}; i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$ z n dní a pre m dôb splatností
- Hodnota parametra γ

Kalibrácia CKLS modelu

- Pre každú β :
 - α, r_i, y_i ako riešenie sústavy lineárnych rovníc (4.12)
 - σ^2 ako priemer, resp. medián hodnôt $\frac{y_i}{r_i^{2\gamma}}$
 - F - optimálna hodnota účelovej funkcie – dosadením α, r_i, y_i do účelovej funkcie (4.10)
- Výber optimálnej hodnoty β

Výstupy

- Odhady parametrov α, β, σ^2 a priebehu okamžitej úrokovej miery $r_1, \dots, r_n$
-

Efektívnosť takto navrhnutého algoritmu budeme testovať na rovnakých simulovaných dátach CIR modelu ($\gamma=0.5$) s parametrami $\alpha=0.0032$, $\beta=-0.0555$, $\sigma=0.0894$ ako v podkapitole 4.2. Všetky ostatné vstupy budú rovnaké ako v podkapitole 4.2.

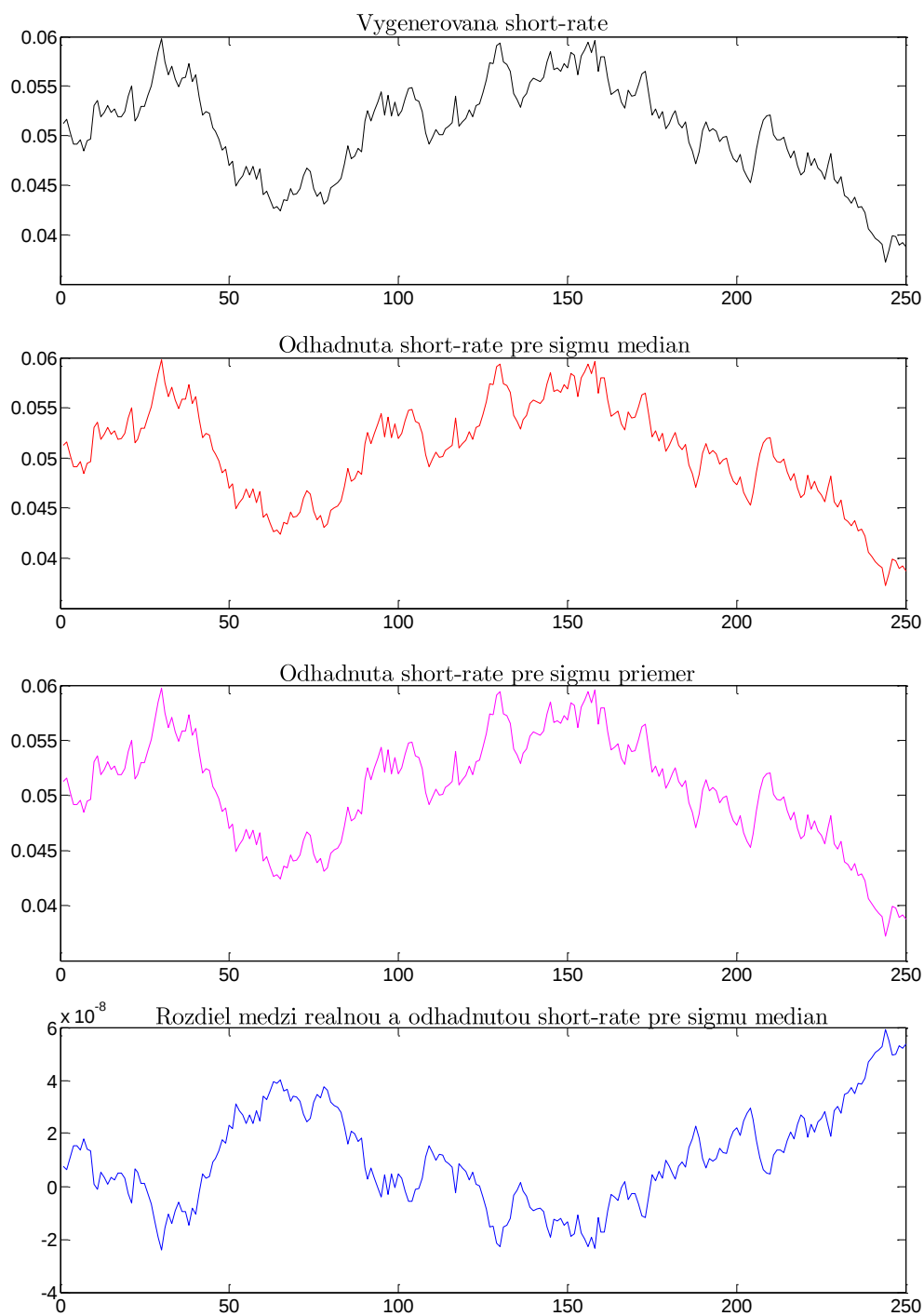
γ	α	β	σ_{med}	σ_{mean}	Optimálna hodnota F_{med}	Optimálna hodnota F_{mean}
0	0,003301	-0,0590	0,014436	0,014503	$1,37 \times 10^{-15}$	$1,34 \times 10^{-15}$
0,25	0,003293	-0,0575	0,042364	0,042412	$4,84 \times 10^{-16}$	$5,12 \times 10^{-16}$
0,5	0,003199	-0,0555	0,089394	0,089375	$3,23 \times 10^{-18}$	$3,25 \times 10^{-18}$
0,75	0,003099	-0,0535	0,188383	0,188129	$5,02 \times 10^{-17}$	$5,18 \times 10^{-17}$
1	0,003023	-0,0520	0,396746	0,395838	$2,05 \times 10^{-16}$	$2,41 \times 10^{-16}$

Tab. 4.2: Priemerné hodnoty odhadov jednotlivých parametrov a priemerné optimálne hodnoty účelových funkcií pre simulované dáta CIR modelu

V tabuľke 4.2 sú zobrazené odhady parametrov a optimálne hodnoty účelových funkcií. Označenie indexov pri parametroch σ a účelových funkciách značí spôsob ako sme počítali sigma z odhadnutých parametrov y_i a r_i . V prípade označenia *med* sme sigma počítali ako medián z vektora $\sigma_i = \sqrt{y_i / r_i^{2\gamma}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), pri označení *mean* sme sigma počítali ako priemer. Výpočet parametra σ pomocou mediánu nám dáva o niečo presnejšie hodnoty odhadu sigma ako aj optimálnej hodnoty účelovej funkcie. V tabuľke 4.3 sú zobrazené štatistické ukazovatele pre účelové funkcie a chyby odhadov okamžitej úrokovej miery r_{med} a r_{mean} po zopakovaní kalibrácie štyritisíckrát pre rovnaký súbor dát pre optimálnu gamu ($\gamma = 0.5$).

	Účelová funkcia F_{med}	Účelová funkcia F_{mean}	Chyba odhadu r_{med}	Chyba odhadu r_{mean}
Minimum	$3,23 \times 10^{-18}$	$3,25 \times 10^{-18}$	$2,05 \times 10^{-9}$	$2,65 \times 10^{-9}$
Maximum	$4,18 \times 10^{-15}$	$4,26 \times 10^{-15}$	$1,28 \times 10^{-7}$	$1,20 \times 10^{-7}$
Priemer	$2,48 \times 10^{-16}$	$2,54 \times 10^{-16}$	$3,68 \times 10^{-8}$	$3,84 \times 10^{-8}$
Medián	$2,47 \times 10^{-16}$	$2,52 \times 10^{-16}$	$4,51 \times 10^{-8}$	$4,62 \times 10^{-8}$
Štandardná odchýlka	$1,32 \times 10^{-16}$	$1,47 \times 10^{-16}$	$7,66 \times 10^{-8}$	$8,01 \times 10^{-8}$

Tab. 4.3: Štatistické ukazovatele pre účelové funkcie a chyby odhadov okamžitej úrokovej miery pre simulované dáta CIR modelu

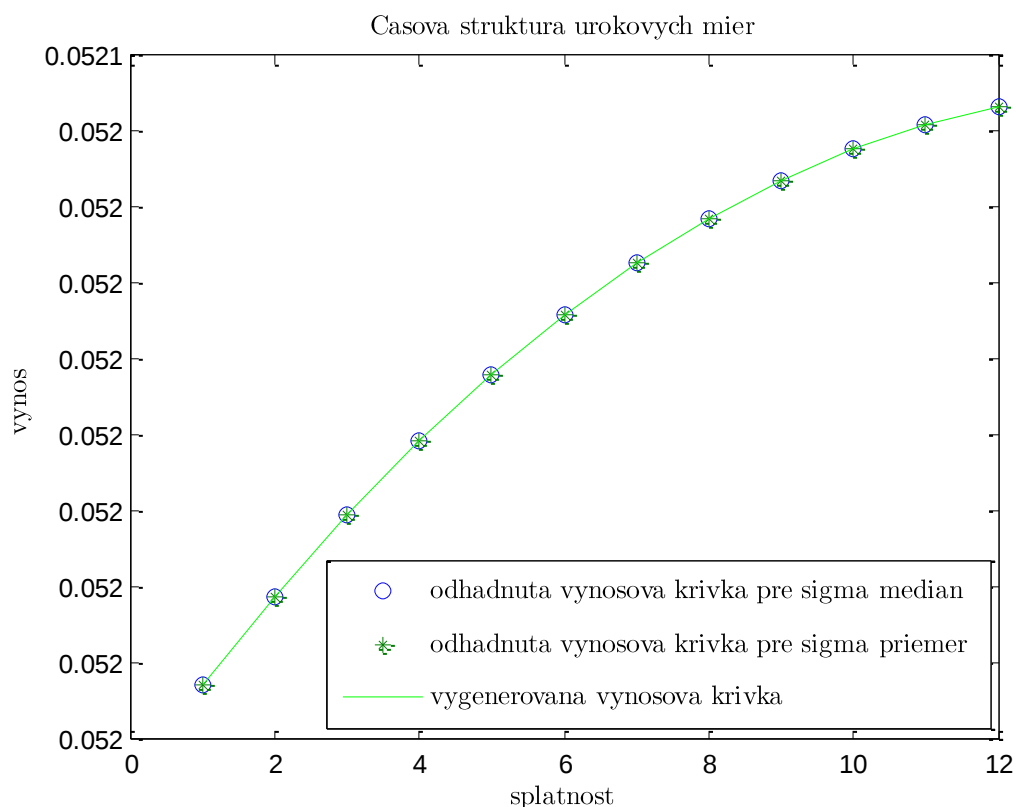


Obr.4.3: Porovnanie vygenerovaného a odhadnutého priebehu okamžitej úrokovej miery pre simulované dáta CIR modelu

Na obrázku 4.3 sú zobrazené odhadnuté a vygenerované okamžité úrokové miery. V tabuľke 4.4 je zobrazených prvých 5 presných hodnôt a ich priemerné odhady. Na obrázku 4.4 sú zobrazené porovnania presných a odhadnutých výnosových kriviek.

Presné r	0,051254353	0,051613444	0,050355371	0,049162118	0,049147675
Odhadnuté	0,051254345	0,051613437	0,050355363	0,049162110	0,049147664
r_{med}					
Odhadnuté	0,051254343	0,051613434	0,050355359	0,049162107	0,049147661
r_{mean}					

Tab.4.4: Prvých päť vygenerovaných hodnôt okamžitej úrokovej miery a jej odhady



Obr.4.4: Porovnanie vygenerovanej a odhadnutej časovej štruktúry úrokových mier pre simulované dáta CIR modelu

4.5 Upravená kalibrácia modelu CKLS bez vstupu okamžitej úrokovej miery

V tejto podkapitole sa pokúsime skombinovať postup kalibrácie z článku [12] a práce [6]. Túto kalibráciu si rozdelíme na dve fázy. V prvej fáze využijeme odhad Vašíčkovho modelu z DP [6] vysvetlený v podkapitole 4.3 na odhadnutie okamžitej úrokovej miery. Túto odhadnutú okamžitú úrokovú mieru použijeme ako vstup do kalibrácie v druhej fáze, ktorá bude prebiehať podľa podkapitoly 4.2. Navrhovaný algoritmus bude vyzeráť nasledovne.

Algoritmus upravenej kalibrácie CKLS modelu

Prvá fáza

Vstupy

- Vektor dôb splatností τ dĺžky m
- Trhové výnosy $R_{ij}; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ z n dní a pre m dôb splatností
- Hodnota parametra γ

Kalibrácia Vašíčkovho modelu bez vstupu short rate

- $\alpha, \beta, \sigma^2, r_1, \dots, r_n$ riešením sústavy (4.7)

Výstupy

- Odhady okamžitej úrokovej miery $r_1, \dots, r_n$

Druhá fáza

Vstupy

- τ, R, γ rovnaké ako v prvej fáze
- Odhady parametrov $r_1, \dots, r_n$ z prvej fázy

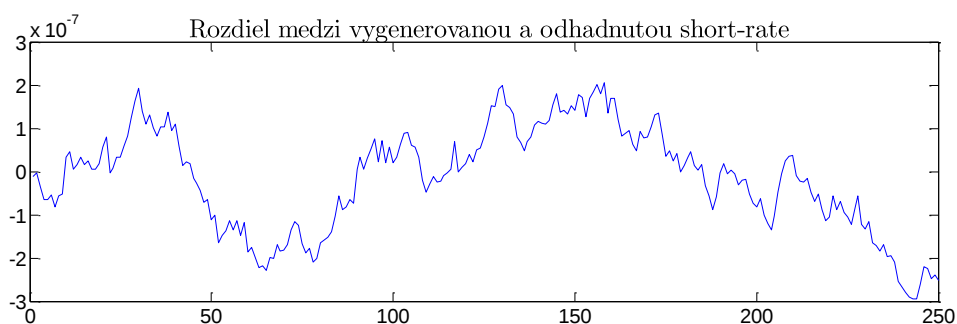
Kalibrácia CKLS modelu so vstupom short rate

- Pre každú β :
 - α, σ^2 riešením sústavy (4.4a) a (4.4b)
 - F - optimálna hodnota účelovej funkcie – dosadením α, σ^2 do účelovej funkcie
- Výber optimálnej hodnoty β

Výstupy

- Odhady parametrov α, σ^2 a β
-

Posledné testovanie kalibrácie budeme robiť skombinovaním ako sme už spomenuli obidvoch použitých prístupov z podkapitol 4.2 a 4.3. Budeme testovať s rovnakým súborom simulovaných dát CIR modelu ($\gamma = 0.5$) ako v podkapitolách (4.2) a (4.4) s rovnakými parametrami. Ostatné vstupné parametre rovnako použijeme nezmenené ako v podkapitolách 4.2 a 4.4. V prvej fáze pomocou kalibrácie Vašíčkovho modelu bez vstupu okamžitej úrokovej miery z podkapitoly 4.3 odhadneme okamžitú úrokovú mieru pre simulované dáta CIR modelu s parametrami $\alpha = 0.0032$, $\beta = -0.0555$, $\sigma = 0.0894$ v rizikovo neutrálnej miere a sigma budeme počítat' ako medián. V druhej fáze potom odhadnutú okamžitú úrokovú mieru použijeme ako vstup pre kalibráciu CKLS modelu s vstupom okamžitej úrokovej miery a získame tak zvyšné odhady parametrov. V druhej fáze budeme model testovať pre rovnaké vstupy ako v podkapitolách 4.2 a 4.4.

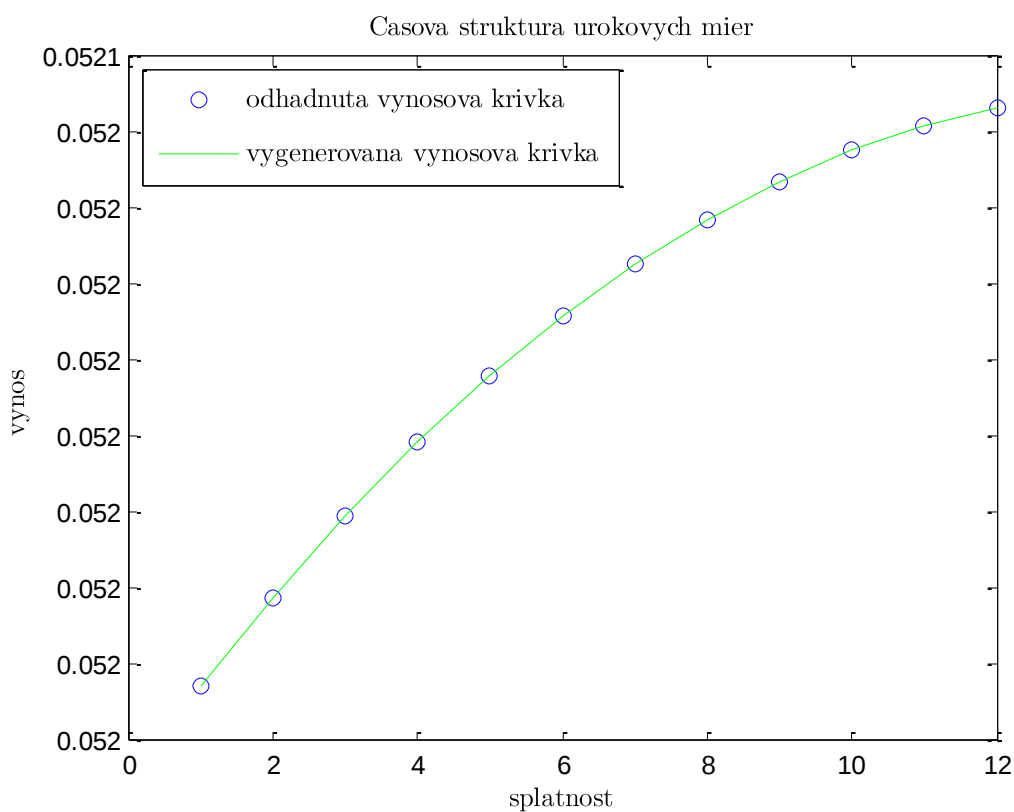


Obr.4.5: Rozdiel medzi vygenerovanou okamžitou úrokovou mierou pre simulované dáta CIR modelu a okamžitou úrokovou mierou odhadnutou pomocou Vašíčkovho modelu

Na obrázku 4.5 máme zobrazený rozdiel medzi odhadnutou a vygenerovanou okamžitou úrokovou mierou pre simulované dáta Vašíčkovho modelu. Túto odhadnutú okamžitú úrokovú mieru použijeme ako vstup do druhej fázy kalibrácie na odhad parametrov. Odhady parametrov a optimálne hodnoty účelovej funkcie z druhej časti kalibrácie máme uvedené v tabuľke 4.5.

γ	α	β	σ	Optimálna hodnota F
0	0,00294	-0,0525	0,01754	$1,27 \times 10^{-3}$
0,25	0,003041	-0,0540	0,04281	$2,62 \times 10^{-5}$
0,5	0,003197	-0,0555	0,08766	$1,46 \times 10^{-9}$
0,75	0,003177	-0,0565	0,03614	$3,05 \times 10^{-6}$
1	0,003037	-0,0570	0,01983	$1,98 \times 10^{-4}$

Tab.4.5: Priemerné hodnoty odhadov jednotlivých parametrov a priemerné optimálne hodnoty účelovej funkcie pre simulované dáta CIR modelu



Obr.4.6: : Porovnanie vygenerovanej a odhadnutej časovej štruktúry úrokových mier pre simulované dáta CIR modelu

Na obrázku 4.6 sú odhadnuté výnosy pre rôzne doby splatnosti porovnané s presnou výnosovou krivkou.

Kapitola 5

Zhrnutie výsledkov zo simulovaných dát a ich aplikácia na reálne dáta

Kapitolu 4 sme vo veľkej miere venovali kalibrácii jednofaktorového CKLS modelu okamžitej úrokovej miery na simulovaných dátach CIR modelu. Naším cieľom bolo zistiť efektívnosť aproximačnej formuly (3.27), vyskúšať rôzne metódy jej použitia na kalibráciu a navrhnúť efektívnu metódu kalibrácie CKLS modelu. Nami navrhnuté dve metódy v podkapitolách 4.4 a 4.5 nám na simulovaných dátach dosahovali veľmi uspokojivé výsledky. Optimálne hodnoty účelovej funkcie pre metódu v podkapitole 4.4 boli rádovo 10^{-18} . Napriek vyšším optimálnym hodnotám účelovej funkcie použitej kalibrácie v podkapitole 4.5 sa nám výsledky odhadov príliš nezhoršili, čo môžeme pozorovať na vygenerovanej a odhadnutej časovej štruktúre úrokových mier pre obe metódy. Pozorovania z teoretických testov na simulovaných dátach v podkapitolách 4.4 a 4.5 aplikujeme teraz na reálne dáta. Časovú štruktúru úrokových mier Euribor a hodnoty Eonia pre všetky pracovné dni v roku 2010 nájdeme na www.euribor-ebf.eu [18].

Odhadovať parametre modelu ako aj okamžitú úrokovú mieru budeme po štvrtrokoch. Budeme používať denné dáta jedného roka pre 12 rôznych dôb splatností od jedného po dvanásť mesiacov. Váhy ω_{ij} budeme voliť $\omega_{ij} = \tau_j$. Parameter γ zvolíme $\gamma = 0,5$. Odhady parametrov modelu v rizikovo neutrálnej miere a optimálne hodnoty účelových funkcií uvádzame pre obidva navrhnuté spôsoby kalibrácií z podkapitol 4.4 a 4.5.

Pri kalibrácii z podkapitoly 4.4, ktorej odhady parametrov a optimálne hodnoty účelovej funkcie máme zobrazené v tabuľke 5.1 budeme sigma vyberať ako medián, nakoľko sme pre ňu mali mierne presnejšie výsledky. Odhady parametrov a optimálne hodnoty účelovej funkcie pre kalibráciu z podkapitoly 4.5 máme zobrazené v tabuľke 5.2.

Štvrťrok	α	β	σ^2	Optimálna hodnota F
1.	5,3185	-3,3251	2,6597	$6,7917 \times 10^{-3}$
2.	5,3975	-3,1505	3,8576	$1,6471 \times 10^{-2}$
3.	4,3856	-3,2473	2,1769	$1,0250 \times 10^{-2}$
4.	4,4903	-2,5754	2,0285	$7,2396 \times 10^{-3}$

Tab.5.1: Odhady parametrov a optimálne hodnoty účelovej funkcie pre reálne dáta z roku 2010 podľa metódy navrhutej v tejto práci v podkapitole 4.4

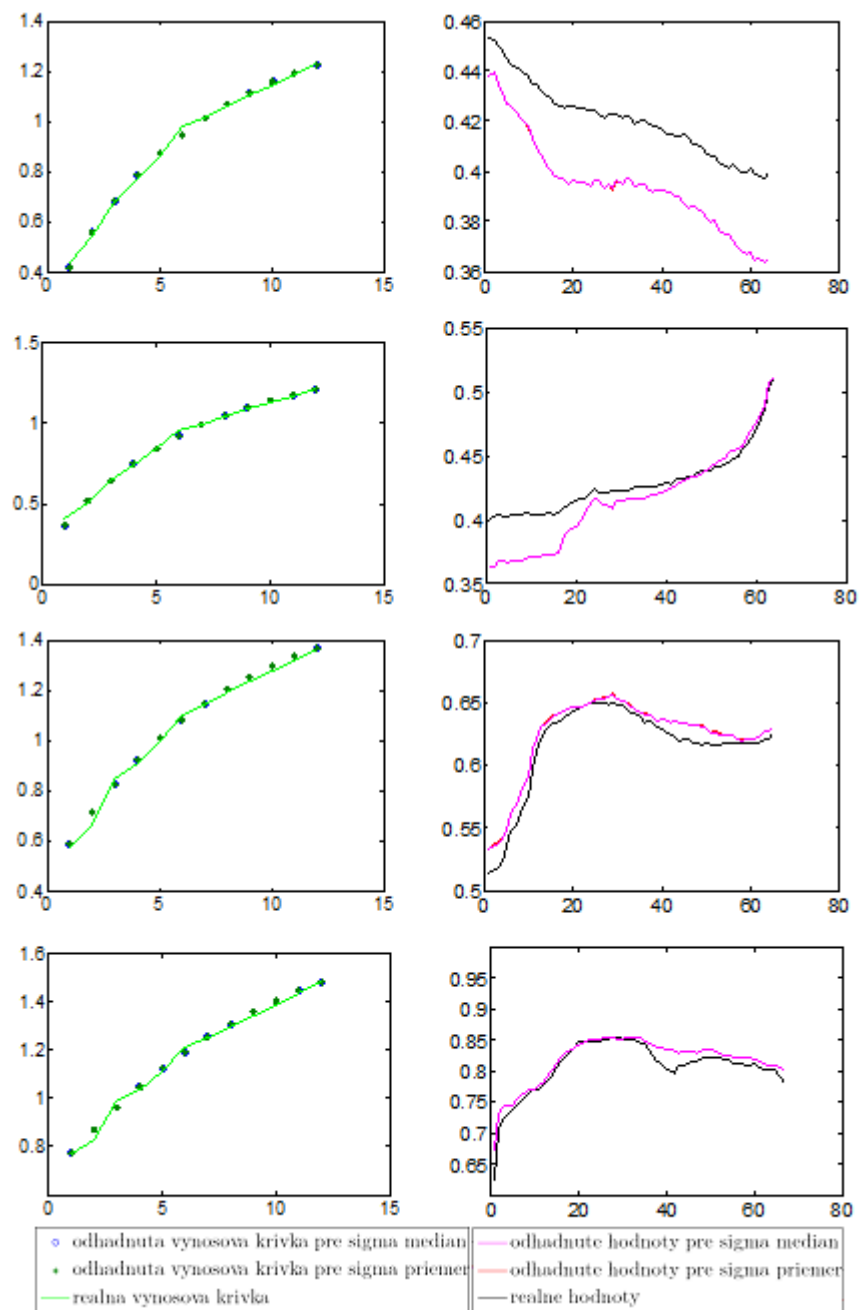
Štvrťrok	α	β	σ^2	Optimálna hodnota F
1.	4,2246	2,4250	0,2852	$6,7351 \times 10^{-3}$
2.	3,72088	-1,9500	0,1208	$1,5307 \times 10^{-2}$
3.	3,41399	-1,5500	0,05330	$1,4728 \times 10^{-2}$
4.	2,97896	-1,1750	0,0163	$7,1424 \times 10^{-3}$

Tab.5.2: Odhady parametrov a optimálne hodnoty účelovej funkcie pre reálne dáta z roku 2010 podľa metódy navrhutej v tejto práci v podkapitole 4.5

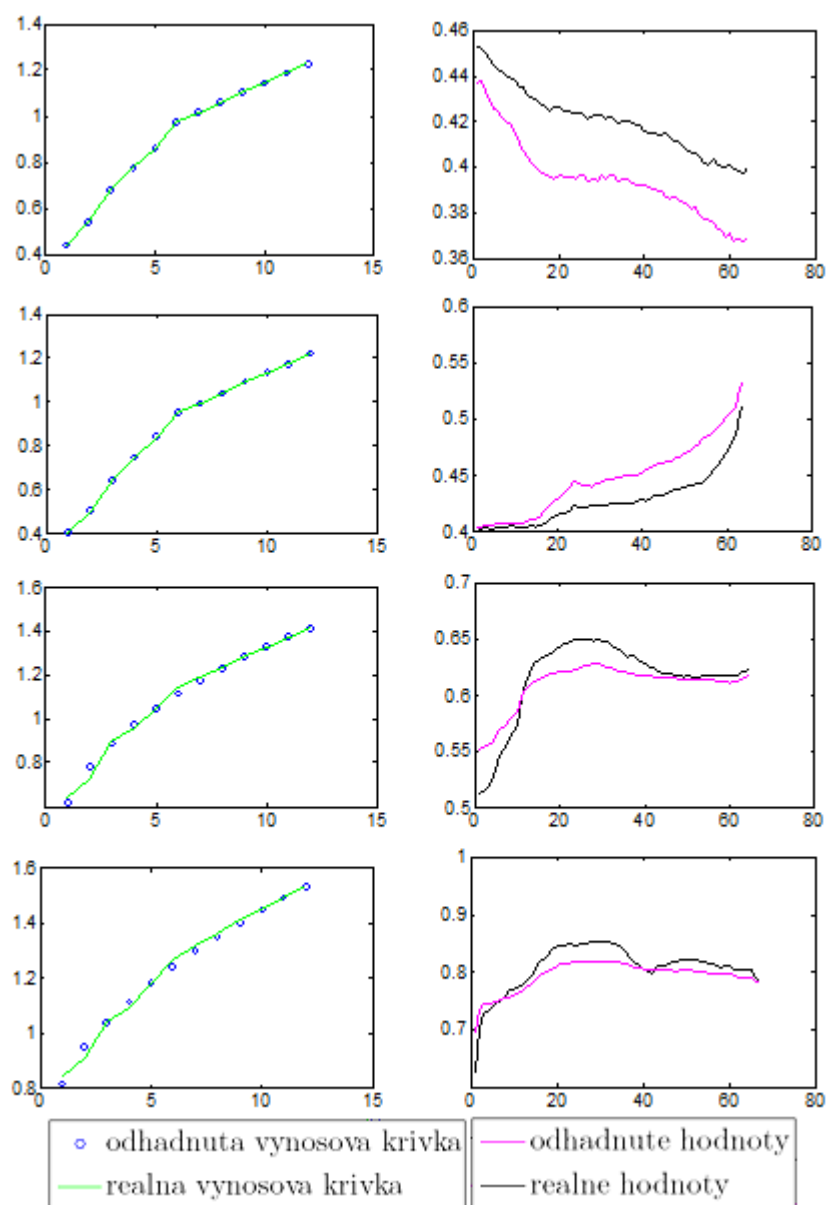
V obidvoch tabuľkách 5.1 a 5.2 nám vyšli hodnoty optimálnych účelových funkcií rádovo 10^{-3} až 10^{-2} . Napriek tomu, že tieto výsledky nedosahujú takú presnosť ako pri simulovaných dátach, obrázky 5.1 a 5.2 nám ilustrujú, že zhoda odhadnutých a pozorovaných výnosových kriviek je veľmi dobrá.

Na obrázku 5.1 uvádzame porovnanie skutočnej a odhadnutej časovej štruktúry úrokových mier nami navrhnutým algoritmom podľa podkapitoly 4.4 pre začiatky kvartálov v roku 2010. Zároveň máme na obrázku 5.1 zobrazené porovnanie reálnej úrokovej miery overnight s nami odhadnutou okamžitou úrokovou mierou podľa algoritmu navrhnutého v podkapitoly 4.4.

Na obrázku 5.2 je zobrazené porovnanie reálnej odhadnutej časovej štruktúry úrokových mier pre začiatky jednotlivých kvartálov pre rok 2010 metódou z podkapitoly 4.5 v ktorej sme najprv pomocou Vašíčkovho modelu odhadli short rate a následne parametre modelu. Na obrázku je tiež zobrazené porovnanie reálnej úrokovej miery overnight s nami odhadnutou okamžitou úrokovou mierou podľa algoritmu navrhnutého v podkapitoly 4.3.



Obr.5.1: Vľavo porovnanie reálnej a odhadnutej časovej štruktúry úrokových mier pre začiatky jednotlivých kvartálov pre rok 2010 metódou z podkapitoly 4.4 a vpravo porovnanie reálnej úrokovej miery overnight s odhadnutým priebehom short rate pre jednotlivé kvartály v roku 2010 metódou z podkapitoly 4.4.



Obr.5.2: Porovnanie reálnej a odhadnutej časovej štruktúry úrokových mier pre začiatky jednotlivých kvartálov pre rok 2010 metódou z podkapitoly 4.5 a vpravo porovnanie reálnej úrokovej miery overnight s odhadnutým priebehom short rate pre jednotlivé kvartály v roku 2010 metódou z podkapitoly 4.3.

Odhady pri reálnych dátach nedosahujú takú presnosť ako pri simulovaných dátach, čo sa dalo očakávať. Napriek tomu zhoda reálnych a odhadnutých výnosových kriviek podľa obidvoch nami navrhnutých metód je dobrá, čo nám ilustrujú aj obrázky 5.1 a 5.2. Odhady short rate majú podobný priebeh ako reálne hodnoty overnightu. Časové obdobia, kedy rastú a kedy klesajú sú si podobné. Priebeh odhadnutých short rate sa ale celkom nezhodujú s reálnymi hodnotami overnightu. Úplná zhoda odhadnutých hodnôt short rate

s reálnymi hodnotami overnightu by znamenala, že by nám stačilo odhadovať iba parametre modelu, na čo by nám postačoval aj jednoduchší model ako napríklad model z podkapitoly 4.2, ktorý odhaduje iba parametre modelu. Priebeh odhadnutej okamžitej úrokovej miery v porovnaní s reálnou sa absolútne líši u oboch nami navrhnutých metód rádovo o 10^{-1} až 10^{-2} . Tieto výsledky nám dávajú dobrý základ pre správne ocenenie derivátov úrokových mier.

Záver

V tejto diplomovej práci sme sa venovali jednofaktorovému modelu typu CKLS. Short rate v takomto modeli je vyjadrená jednou stochastickou diferenciálnou rovnicou. CKLS model predpokladá nekonštantné volatility úmerné mocnine short rate. Cieľom tejto diplomovej práce bolo navrhnúť a aplikovať algoritmus na odhadovanie okamžitej úrokovej miery vo všeobecnom CKLS modeli, ktorý predstavuje zovšeobecnenie Vašíčkovho a CIR modelu.

Prvú časť práce sme venovali teoretickým základom, ktoré tvorili základný stavebný kameň pre ďalšiu časť práce. V druhej časti práce sme sa potom zaoberali kalibráciou modelu CKLS. Nakoľko využitie jednomesačných výnosov alebo overnightu ako vstupu short rate do modelu CKLS, čo predošlé algoritmy využívali, nemusí byť korektné, bolo našim cieľom odhadnúť okamžitú úrokovú mieru podľa reálnych výnosových kriviek. Ukázali sme, že tento problém sa dá veľmi dobre obísť riešením sústavy lineárnych rovníc, ktorej výstupom bola okrem parametrov modelu aj short rate. V druhom nami navrhnutom algoritme kalibrujeme CKLS model pomocou kombinácie dvoch algoritmov. Prvým algoritmom sme najprv podľa Vašíčkovho modelu z výnosových kriviek odhadli okamžitú úrokovú mieru. Odhadnutú okamžitú úrokovú mieru sme potom použili ako vstup do druhého algoritmu, ktorý parametre modelu odhaduje so vstupom okamžitej úrokovej miery. Obidva tieto algoritmy sme testovali na simulovaných dátach CIR modelu. Na záver práce sme ukázali, že zhoda teoretických a pozorovaných reálnych výnosových kriviek bola pre obidva nami navrhnuté algoritmy veľmi dobrá.

Literatúra

- [1] Boušková, Z. (2010): Odhadovanie okamžitej úrokovej miery z výnosových kriviek, Diplomová práca FMFI UK
- [2] Brigo D., Mercurio F. (2007): Interest rate models – Theory and practise. Springer. Second edition.
- [3] Chan K. C., Karolyi G. A., Longstaff F. and Sanders A. (1992): The volatility of short term interest rates: an empirical comparison of alternative models of the term structures of interest rates, *Journal of Finance* 47, 1209-1227
- [4] Choi Y., Wirjanto T. S. (2007): An analytic approximation formula for pricing zero coupon bonds, *Finance Research Letters* 4(2), 116-126
- [5] Cox J., Ingersoll JR. J. E., Ross S. A. (1985): A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* 53(2), 385-407
- [6] Halgašova J. (2011): Aproximácia cien dlhopisov v dvojfaktorových modeloch úrokových mier, Diplomová práca FMFI UK
- [7] Kwok, Y. K. (1998): *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer, First edition
- [8] Melicherčík I., Olšárová L., Úradníček V. (2005): *Kapitoly z finančnej matematiky*. Epos.
- [9] Privault N. (2008): *An elementary introduction to stochastic interest rate modeling*. World scientific.
- [10] Stehlíková B. (2008): *Matematical analysis of term structure models*, Dissertation Thesis FMFI UK

- [11] Stehlíková B., Ševčovič D. (2009): Approximate formula for pricing zero-coupon bonds and their asymptotic analysis, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 6(2), 274-283
- [12] Stehlíková B. (2010): Approximate formula for the bond price based on the Vasicek model. preprint
- [13] Sutóris I. (2009): Odhady parametrov modelov časovej štruktúry úrokových mier, Diplomová práca FMFI UK
- [14] Ševčovič D., Urbánová Csajková A. (2005): On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model, *Central European J. of Operation Research*, 13, 169-188
- [15] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K. (2009): Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Nakladateľstvo STU.
- [16] Zíková Z. (2011): Konvergenčné modely úrokových mier, Diplomová práca FMFI UK
- [17] <http://www.ecb.int/home/html/index.en.html>
- [18] <http://www.euribor-ebf.eu/>

Príloha

Program k nami navrhnutému algoritmu z podkapitoly 4.4

```
function []=kalibraciaDP1(R,beta,tau,gama)

[m,n]=size(R);

alfa=zeros(length(beta),1);

sigma=zeros(length(beta),m);

sigmamedian=zeros(length(beta),1);

rPREMENNA=zeros(length(beta),m);

yPREMENNA=zeros(length(beta),m);

rpom=zeros(m,length(tau),length(beta));

F=zeros(length(beta),1);

rpom2=zeros(m,length(tau),length(beta));

F2=zeros(length(beta),1);

for k=1:length(beta)
    for i=1:length(tau)
        for j=1:m
            c0(i,j)=(1-exp(beta(k)*tau(i)))/beta(k)
            c1(i,j)=(1/beta(k)) * (tau(i) + (1-exp(beta(k)*tau(i)))/beta(k));
            c2(i,j)=(1/(2*beta(k)^2)) * ((1-exp(beta(k)*tau(i)))/beta(k) +
                tau(i) + ((1-exp(beta(k)*tau(i)))^2)/(2*beta(k)));
        end
    end
    a1=sum((c1.^2));
    a2=sum((c0.*c1));
    a3=sum((c1.*c2));
    a4=sum((c0.*c2));
    a5=sum((c0.^2));
```

```

a6=sum((c2.^2));
B1=[sum(a1),a2,a3
B2=(a2)'
B3=(a3)'
D1=diag(a4);
D2=diag(a6);
D3=diag(a5);
D4=diag(a4);
A=[B1;B3,D1,D2;B2,D3,D4];
Rpom=R.*(ones(m,1)*tau');
b1=(sum(sum(Rpom.*c1')));
for i=1:m
    Rpom1=[];
    Rpom2=[];
    for q=1:length(tau)
        Rpom1=[Rpom1,R(i,q).*tau(q)*c2(q,i)];
        Rpom2=[Rpom2,R(i,q).*tau(q)*c0(q,i)];
    end
    b2(i)=sum(Rpom1);
    b3(i)=sum(Rpom2);
end
b=[-b1;-b2';-b3'];

vysledok=(A\b);

alfa(k)=vysledok(1);
for l=1:m
    rPREMENNA(k,l)=vysledok(1+l);
    yPREMENNA(k,l)= vysledok(1+m+l);
    sigma(k,l)=yPREMENNA(k,l)/(rPREMENNA(k,l))^(2*gama);
end
sigmamedian(k)=median(sigma(k);
sigmamean(k)=mean(sigma(k,:));

```

```

for i=1:n
    for j=1:m
        rpom(j,i,k)=(c0(i,j)*rPREMENNA(k,j)+c1(i,j)*alfa(k)+c2(i,j)*
            sigmamedian(k)*rPREMENNA(k,j)^(2*gama))/(-tau(i)) ;
        rpom2(j,i,k)=(c0(i,j)*rPREMENNA(k,j)+c1(i,j)*alfa(k)+c2(i,j)*
            sigmamean(k)*rPREMENNA(k,j)^(2*gama))/(-tau(i)) ;
    end
end

F(k)=(1/m*n)*sum((tau'.^2)*((rpom(:, :, k)-R)'.^2)
F2(k)=(1/m*n)*sum((tau'.^2)*((rpom2(:, :, k)-R)'.^2));

end

indexmin=0;
for k=1:length(beta)
    if min(F)==F(k)
        indexmin=k;
    end
    if min(F2)==F2(k)
        indexmin2=k;
    end
end

r=rpom(:, :, indexmin);
r2=rpom2(:, :, indexmin2);

```