

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



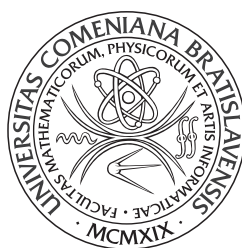
**MODELY SPOREANIA
S CRRA FUNKCIAMI UŽITOČNOSTI**

Diplomová práca

Bratislava 2012

Bc. Martin Podolák

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MODELY SPOREŇIA S CRRA FUNKCIAMI UŽITOČNOSTI

Diplomová práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: Aplikovaná matematika 1114

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci diplomovej práce: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2012

Bc. Martin Podolák



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Martin Podolák
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Modely sporenia s CRRA funkciami užitočnosti

Cieľ: Práca sa bude zaoberať modelmi, ktorých základom je maximalizácia očakávanej užitočnosti. Modely vývoja aktív budú reprezentované vo všeobecnosti Lévyho procesmi. Pri klasickej maximalizácii očakávanej užitočnosti často vychádzajú riešenia, ktoré sú z praktického hľadiska nerealizovateľné (napr. záporné pozície v niektorých aktívach). Budeme sa preto zaoberať aj implementáciou vhodných obmedzení.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Dátum zadania: 13.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že túto diplomovú prácu som vypracoval samostatne pod odborným vedením doc. Mgr. Igora Melicherčíka, PhD., s použitím uvedenej literatúry a vedomostí získaných počas štúdia.

V Bratislave, apríl 2012

.....

Martin Podolák

Ďakujem môjmu vedúcemu doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za vzácnu spoluprácu. Veľmi si vážim prejavenu dôveru, podporu kreativity, venovaný čas a ústretovosť. Bol mi nielen výborným vedúcim, ale aj dobrým príkladom v prístupe k ľuďom a v životných postojoch.

Som vďačný mojim rodičom a sestre, ktorí ma zaopatrujú láskou a mnohou praktickou pomocou. Ďakujem aj za ohľaduplnosť, mal som doma výborné prostredie na písanie práce.

Ďakujem môjmu Bohu za to, že mi dal vybrať si tú správnu tému a vedúceho. Za to, že bol počas písania práce so mnou a dával mi múdrosť. Je pravdou, že *Hospodin dáva múdrosť, z Jeho úst je poznanie i rozvaha* (Biblia, Príslovia 2,6). A z Jeho milosti som stihol prácu včas dokončiť.

Abstrakt

PODOLÁK, Martin: *Modely sporenia s CRRA funkciami užitočnosti* [diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúci diplomovej práce: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD. Bratislava, 2012, 75 strán.

V diplomovej práci riešime úlohu o optimálnom investovaní. Ide o spojitú úlohu stochastického optimálneho riadenia. V úlohe sú zahrnuté ohraňovania, ktoré zakazujú krátke pozície v rizikových aktívach aj v bezrizikovom aktíve. Zohľadnené sú aj priebežné príspevky klienta. Pri riešení využívame transformáciu úlohy pomocou súčasnej hodnoty budúcich príspevkov. Na základe tejto transformácie uvádzame možnú aproximáciu optimálnej stratégie. Pretože optimálna stratégia závisí od relatívnej rizikovej averzie, odvodzame parciálne diferenciálne rovnice popisujúce priebeh relatívnej rizikovej averzie. Pri daných hodnotách parametrov sme vypočítali numerické riešenie pre relatívnu rizikovú averziu, zodpovedajúce optimálne stratégie a hodnotovú funkciu. Na základe týchto výpočtov hodnotíme efektívnosť navrhnutej aproximatívnej stratégie.

Kľúčové slová: optimálne investovanie, priebežné príspevky, funkcia užitočnosti, stochastické optimálne riadenie, Bellmanova rovnica, relatívna riziková averzia

Abstract

PODOLÁK, Martin: *Models of investment savings using CRRA utility functions* [master thesis]. Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics; Department of Applied Mathematics and Statistics. Supervisor: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD. Bratislava, 2012, 75 pages.

In this thesis we investigate optimal investment problem. It is a continuous-time stochastic optimal control problem. Constrains forbidding short positions in risky assets as well as in risk-free asset are included. We take into account also client's gradual contributions. We apply transformation based on present value of future contributions. The transformation imply possible approximation of optimal strategy. Optimal strategy depends on relative risk aversion, therefore we derive partial differential equation describing evolution of relative risk aversion. For a given set of parameter values, we calculated numerical solution for relative risk aversion, corresponding optimal strategies and value function. Using these calculations, we evaluate performance of stated approximate strategy.

Key words: optimal investment, gradual contributions, utility function, stochastic optimal control, Bellman equation, relative risk aversion

Obsah

Úvod	10
1 Úloha bez príspevkov	12
1.1 Úloha z praxe	12
1.2 Modelovanie aktív	12
1.3 Stochastická diferenciálna rovnica pre hodnotu portfólia	13
1.4 Ohraničenia	14
1.5 CRRA funkcie užitočnosti	14
1.6 Formulácia úlohy	15
1.7 Úvaha o prenasobenom majetku	18
1.8 Riešenie úlohy bez príspevkov	20
2 Úloha s príspevkami	22
2.1 Zavedenie príspevkov	22
2.2 Transformácia	23
2.3 Interpretácia transformovanej úlohy	26
2.4 Návrh aproximácie optimálnej stratégie	27
2.5 Úloha so zjednodušeným a so zanedbaným ohraničením	29
3 Jednorozmerná úloha	31
3.1 Deterministická úloha	31
3.2 Rovnica pre relatívnu rizikovú averziu	33
3.3 Numerická schéma na výpočet relatívnej rizikovej averzie	39
3.4 Numerické výsledky	41
4 Dvojrozmerná úloha	43
4.1 Analógia s Markowitzovou úlohou	43
4.2 Efektívna hranica	44
4.3 Maximalizácia na efektívnej hranici	47
4.4 Hodnoty dôležitých derivácií parabol	49
4.5 Rovnica pre relatívnu rizikovú averziu	52
4.6 Numerické výsledky	59
4.7 Presnejšia aproximácia optimálnej stratégie	62

4.8	Numerická schéma na výpočet hodnotovej funkcie . . .	66
4.9	Porovnanie efektívnosti stratégií	68
	Záver	72
	Literatúra	74

Úvod

Je viacero finančných inštitúcií (budeme ich nazývať investičné fondy), ktoré spravujú a investujú klientami vložené peniaze. Pre ne je užitočný matematický aparát, pomocou ktorého je možné zohľadniť minulý priebeh rizikových aktív a na základe toho navrhnúť takú stratégiu investovania, ktorá prinesie klientovi čo najväčší možný zisk, avšak zároveň chráni vklad od príliš veľkého rizika.

Jedným z prístupov je jednoperiódový Markowitzov model (časť 2.2 v [10]). Jeho výstupom je množina portfólií, ktoré pri danom očakávanom výnose minimalizujú riziko. Výber portfólia z tejto množiny je však ponechaný na používateľa, ktorý pri tomto výbere musí sám zohľadniť svoju averziu k riziku. Jednoperiódový Markowitzov model taktiež neukazuje, ako sa riziková averzia (a tým aj optimálne stratégie investovania) v priebehu času mení, aby sa prispôsobila rizikovej averzii v koncovom čase investovania.

Alternatívnym prístupom je použitie princípu maximalizácie očakávanej užitočnosti. Táto diplomová práca analyzuje jeden z takýchto modelov sporenia, v ktorom sa využívajú tzv. CRRA funkcie užitočnosti. Tie majú viaceré dobré matematické vlastnosti a aj z praktického hľadiska prináša ich používanie výhody. Uvažujeme model spojitý v čase, ktorý zohľadňuje, že optimálne stratégie investovania sa v priebehu času môžu meniť.

Spomenutý model s CRRA funkciami užitočnosti, pričom rizikové aktíva sú modelované pomocou Lévyho procesov (špeciálnym prípadom je viacrozmerý geometrický Brownov pohyb), je analyzovaný v článku [1] od M. Nutza (analýza v širšom kontexte je v jeho dizertačnej práci [2]). Rozoberané úlohy majú niektoré veľmi dobré matematické vlastnosti, ich výsledkom je takmer explicitné riešenie. Avšak to vo všeobecnosti platí iba pre úlohy bez priebežných príspevkov, t. j. v ktorých sa uvažuje iba počiatočný vklad klienta.

Úlohy s priebežnými príspevkami v sebe spravidla zahŕňajú matematické komplikácie, kvôli ktorým nie je možné určiť riešenie nejakým jednoduchým vzťahom. Jednu z takýchto úloh rozoberajú v článku [3] Z. Macová a D. Ševčovič. V ich úlohe je zohľadnené ohraničenie, ktoré

vyjadruje, že pri investovaní do rizikovejšieho aktíva (trhové portfólio) nie je možné ísť do krátkych pozícií. Medzi výsledkami článku sú analytické horné a dolné odhady optimálnej stratégie. Z matematických dôvodov (aby bolo možné odvodiť horný a dolný odhad) je však zanedbané ohraničenie, ktoré vyjadruje, že pri praktickej aplikácii často ani v menej rizikovom aktíve (dlhopisy) nie je možné ísť do krátkych pozícií.

Cieľom diplomovej práce je zohľadniť práve toto ohraničenie (avšak na rozdiel od článku [3], úlohu dlhopisového portfólia má bezrizikové aktívum).

V kapitole 1 je formulovaná úloha bez príspevkov ako úloha stochastického optimálneho riadenia. Pre úlohu je odvodená zodpovedajúca Bellmanova rovnica a riešením úlohy je optimálna stratégia vyjadrená ako výsledok jednoduchej maximalizácie.

V kapitole 2 je formulovaná úloha s priebežnými príspevkami. Je uvedená transformácia tejto úlohy, ktorá zohľadňuje priebežné príspevky iným spôsobom. Transformácia nám umožní zaviesť ľahko vypočítateľnú aproximáciu optimálnej stratégie. Výhodu transformovanej úlohy možno pozorovať aj v tom, že pri zjednodušenom ohraničení je úloha matematicky ekvivalentná s úlohou bez príspevkov, má teda riešenie v rovnakom tvare.

V kapitolách 3 a 4 je odvodený matematický aparát pre hľadanie riešenia jednorozmernej, resp. dvojrozmernej úlohy bez príspevkov pomocou numerických metód. Následne sa pri zvolených nastaveniach parametrov porovnávajú rozdiely optimálnej stratégie oproti navrhnutým aproximatívnym stratégiám. Na záver je pre prípad dvojrozmernej úlohy odhad reálnej straty pri používaní aproximatívnych stratégií namiesto optimálnej stratégie.

Kapitola 1

Úloha bez príspevkov

1.1 Úloha z praxe

V práci sa budeme zaoberať nasledovnou úlohou z praxe. Klient s danou rizikovou averziou (reprezentovanou funkciou užitočnosti) vloží svoje peniaze do investičného fondu a úlohou fondu bude počas dohodnutého obdobia (časový interval $[0, T]$) investovať peniaze tak, aby očakávanie o hodnote vkladu v čase T čo najlepšie uspokojovalo záujmy klienta.

Budeme predpokladať, že investičný fond môže peniaze investovať do portfólia obsahujúceho jedno bezrizikové aktívum a niekoľko rizikových aktív, ktorých hodnota v čase sa správa podľa daného stochastického procesu. Fond môže portfólio aktív spojito v čase dynamicky prerovnávať, t. j. podiely investované do jednotlivých aktív sa môžu meniť v závislosti od času aj od aktuálnej hodnoty portfólia.

V úlohe budeme uvažovať aj ohraničenia. V portfóliu budú zakázané krátke pozície v rizikových aktívach aj bezrizikovom aktíve, čo zodpovedá reálnej situácii.

Najprv sa budeme zaoberať úlohou bez príspevkov, t. j. úloha, v ktorej klient vloží všetky peniaze do fondu hneď na začiatku. Neskôr budeme riešiť aj úlohu s príspevkami, ktorá zohľadňuje, že klient okrem začiatočného vkladu vkladá aj priebežné príspevky.

1.2 Modelovanie aktív

Pre bezrizikové aktívum budeme uvažovať spojitú úročenie s úrokom r .

O d rizikových aktívach budeme predpokladať, že ich ceny sa správajú podľa viacrozmerného geometrického Brownovho pohybu (jednorozmerný geometrický Brownov pohyb je popísaný v [9], časti 2.1.1 a 2.2.1), t. j.

$$\begin{pmatrix} dS_t^1/S_t^1 \\ dS_t^2/S_t^2 \\ \vdots \\ dS_t^d/S_t^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_d \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,d} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \dots & \sigma_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{d,1} & \sigma_{d,2} & \dots & \sigma_{d,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \\ \vdots \\ dW_t^d \end{pmatrix},$$

skrátene (s využitím pozložkového delenia vektorov)

$$(d\mathbf{S}_t) ./ (\mathbf{S}_t) = \boldsymbol{\mu} dt + \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{W}_t,$$

kde \mathbf{S}_t je vektor priebehov cien aktív v čase, $\boldsymbol{\mu}$ je vektor driftov, $\boldsymbol{\sigma}$ je maticou popisujúcou volatilitu aktív a \mathbf{W}_t je vektor d nezávislých Wienerových procesov.

Viacrozmerný geometrický Brownov pohyb cien rizikových aktív je limitným prípadom viacrozmerného normálneho rozdelenia výnosov zodpovedajúcich obdobiu Δt

$$\begin{pmatrix} \frac{S_{t+\Delta t}^1 - S_t^1}{S_t^1} \\ \frac{S_{t+\Delta t}^2 - S_t^2}{S_t^2} \\ \vdots \\ \frac{S_{t+\Delta t}^d - S_t^d}{S_t^d} \end{pmatrix} \sim N_d(\boldsymbol{\mu} \cdot \Delta t, \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \Delta t)$$

pre $\Delta t \rightarrow 0$.

Všeobecnejšou možnosťou je modelovať ceny rizikových aktív pomocou Lévyho procesov, ako napríklad v článku [1] od M. Nutza.

1.3 Stochastická diferenciálna rovnica pre hodnotu portfólia

Investičný fond investuje peniaze klienta do portfólia aktív, ktorého hodnota X_t sa v čase mení, v závislosti od stratégie investovania a pohybu cien aktív.

Dynamickú stratégiu investovania kvatifikujeme pomocou d -rozmerného vektora $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_t(X_t)$, ktorého i -ta zložka π^i označuje, aká čiastka hodnoty X_t je investovaná do i -teho rizikového aktíva. Hodnota vektora $\boldsymbol{\pi}$ sa môže meniť v závislosti od času t aj od hodnoty portfólia X_t .

Na základe vzťahov pre drift a volatilitu portfólia (analogických ako vzťahy pre výnos a smerodajnú odchýlku portfólia v [10], časť 2.1) platí

$$\frac{dX_t}{X_t} = \left(\left(1 - \sum_{i=1}^d \pi^i \right) r + \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\mu} \right) dt + \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{W}_t,$$

po úprave

$$\frac{dX_t}{X_t} = (r + \boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{\mu} - r)) dt + \left(\sqrt{\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}} \right) dW_t, \quad (1.1)$$

kde W_t vo vzťahu (1.1) označuje už nie viacrozmerový, ale jednorozmerový Wienerov proces.

1.4 Ohraničenia

V praxi, investičný fond spravidla nemá dovolené ísť do krátkych pozícií v rizikových aktívach ani v bezrizikovom aktíve.

Zakázané krátke pozície v rizikových aktívach implikujú ohraničenia

$$\pi^i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Zakázaná krátka pozícia v bezrizikovom aktíve implikuje ohraničenie

$$1 - \sum_{i=1}^d \pi^i \geq 0,$$

po úprave

$$\sum_{i=1}^d \pi^i \leq 1.$$

Tieto ohraničenia pre úlohu bez príspevkov budeme označovať

$$\mathcal{C}^0 = \left\{ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^d ; \pi^i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, d \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^d \pi^i \leq 1 \right\}.$$

1.5 CRRA funkcie užitočnosti

Úlohou investičného fondu je investovať peniaze tak, aby očakávanie o hodnote portfólia v čase T čo najlepšie uspokojovalo záujmy klienta. Matematicky to kvantifikujeme tak, že je úlohou nájsť takú dynamickú stratégiu investovania $\boldsymbol{\pi}_t(X_t)$, ktorá maximalizuje výraz $E[U(X_T)]$, kde $U(x)$ je funkciou užitočnosti klienta.

My budeme používať CRRA funkcie užitočnosti, ktoré sú v tvare

$$U(x) = \frac{1}{p} x^p, \quad p < 1, p \neq 0. \quad (1.2)$$

Podmienka $p < 1$ zodpovedá rizikovo averzným klientom.

Mimochodom, pri tvare CRRA funkcie užitočnosti posunutom iba o konštantu

$$U(x) = (x^p - 1)/p,$$

limitným prípadom pre $p \rightarrow 0$ je funkcia $U(x) = \ln x$, ktorá tiež patrí medzi CRRA funkcie užitočnosti. Pre jednoduchosť však budeme uvažovať iba prípad $p \neq 0$.

Skratka CRRA znamená *constant relative risk aversion*. Pre tzv. Arrow-Prattov koeficient relatívnej rizikovej averzie platí

$$-x \frac{U''(x)}{U'(x)} \equiv 1 - p,$$

t. j. pre danú CRRA funkciu užitočnosti je koeficient relatívnej rizikovej averzie konštantný.

Výhodou a aj čiastočným zdôvodnením CRRA funkcií užitočnosti je, že nastavenie parametra p nezávisí od toho, v akých peňažných jednotkách sú kvantifikované peniaze. Pre ľubovoľnú náhodnú premennú Z a konštantu $k > 0$, pri CRRA funkcii užitočnosti v tvare (1.2) platí

$$E[U(k \cdot Z)] = k^p \cdot E[U(Z)], \quad (1.3)$$

teda maximalizácia výrazu $E[U(k \cdot Z)]$ je ekvivalentná s maximalizáciou výrazu $E[U(Z)]$. Napríklad pre $k = 100$, náhodná premenná Z môže vyjadrovať hodnotu v eurách, po prenásobení je $100 \cdot Z$ hodnota v centoch. Podľa vzťahu (1.3) je možné pre úlohu v eurách aj v centoch použiť rovnakú CRRA funkciu užitočnosti.

Ďalšou interpretáciou je, že pre investora s CRRA funkciou užitočnosti je optimálne investovať svoj majetok do zvolených aktív v pevných pomeroch, bez ohľadu na to, či má veľa alebo málo peňazí. Samozrejme, tento predpoklad v praxi nemusí byť presne splnený.

1.6 Formulácia úlohy

Spojením predpokladov dostaneme úlohu stochastického optimálneho riadenia

$$\begin{aligned} & \max E \left[\frac{1}{p} X_T^p \right], \quad T \text{ pevné} \\ & \frac{dX_t}{X_t} = (r + \boldsymbol{\pi}^T (\boldsymbol{\mu} - r)) dt + \left(\sqrt{\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}} \right) dW_t \\ & X_0 = x_0 \\ & \boldsymbol{\pi} \in \mathcal{C}^0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Pre hodnotovú funkciu

$$V(t, x) = \max_{\{\boldsymbol{\pi}_s \in \mathcal{C}^0\}_{s \in [t, T)}} E[U(X_T) | X_t = x]$$

odvodíme Bellmanovu rovnicu (t. j. Hamiltonovu–Jacobiho–Bellmanovu rovnicu).

Podľa Bellmanovho princípu optimality (pre úlohu bez ohraničení je Bellmanov princíp optimality uvedený v [11], kapitola 4, tvrdenie 3.3) platí

$$V(t, x) = \max_{\{\boldsymbol{\pi}_s \in \mathcal{C}^0\}_{s \in [t, t+\Delta t)}} E[V(t + \Delta t, X_{t+\Delta t}) | X_t = x],$$

po úprave

$$0 = \max_{\{\boldsymbol{\pi}_s \in \mathcal{C}^0\}_{s \in [t, t+\Delta t)}} E[V(t + \Delta t, X_{t+\Delta t}) - V(t, X_t) | X_t = x].$$

Podľa Itôvej lemy v zmysle prvého diferenciálu (časť 2.1.2 v [9]), pre $\Delta t \rightarrow 0$ (na limitne krátkom časovom úseku, pre čas $s \in [t, t + \Delta t)$, môžeme hodnotu vektora $\boldsymbol{\pi}_s$ považovať za konštantnú, t. j. $\boldsymbol{\pi}_s \equiv \boldsymbol{\pi}$) platí

$$0 = \max_{\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{C}^0} E \left[\frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V}{\partial x} \Delta X_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} X_t^2 (\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}) \Delta t + o(\Delta t) | X_t = x \right].$$

Využitím vzťahu (1.1) na rozpísanie ΔX_t dostaneme

$$0 = \max_{\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{C}^0} E \left[\frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V}{\partial x} X_t \left((r + \boldsymbol{\pi}^T (\boldsymbol{\mu} - r)) \Delta t + \left(\sqrt{\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}} \right) \Delta W_t \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} X_t^2 (\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}) \Delta t + o(\Delta t) | X_t = x \right].$$

Na vyjadrenie strednej hodnoty môžeme využiť $E[\Delta W_t] = 0$, na základe čoho platí

$$0 = \max_{\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{C}^0} \left[\frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V}{\partial x} x (r + \boldsymbol{\pi}^T (\boldsymbol{\mu} - r)) \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} x^2 (\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}) \Delta t + o(\Delta t) \right].$$

Pretože $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, po predelení výrazom Δt a uplatnení limity dostaneme

$$0 = \max_{\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{C}^0} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} x (r + \boldsymbol{\pi}^T (\boldsymbol{\mu} - r)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} x^2 (\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}) \right].$$

Tým sme dostali Bellmanovu rovnicu, ktorú môžeme upraviť do tvaru

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \max_{\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{C}^0} \left[(r + \boldsymbol{\pi}^T (\boldsymbol{\mu} - r)) x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}) x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right]. \quad (1.5)$$

Rovnica platí na oblasti $0 < t < T$, $0 < x < \infty$. Koncovou podmienkou je

$$V(T, x) = \frac{1}{p} x^p. \quad (1.6)$$

Podobne ako v článku [6], v rovnici (1.5) je pri derivácii $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ člen $\gamma(x, t) = (\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}) x^2$, ktorého limitou pre $x \rightarrow 0$ je nula. Podľa teórie od G. Ficheru, za platnosti kritéria

$$\lim_{x \searrow 0} \left(\beta(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, t) \right) \geq 0 \quad (1.7)$$

(kde $\beta(x, t)$ je koeficient pri $\frac{\partial V}{\partial x}$) platí, že rovnica (1.5) nepotrebuje na hranici $x = 0$ okrajovú podmienku a koncovou podmienkou (1.6) je riešenie rovnice jednoznačne určené. Podrobnejšie spísanie teórie ohľadom takýchto rovníc je v [8].

V našom prípade,

$$\beta(x, t) = (r + \hat{\boldsymbol{\pi}}(\boldsymbol{\mu} - r)) x \quad \text{a} \quad \gamma(x, t) = (\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}) x^2.$$

Ak označíme maximálny drift rizikových aktív μ_{\max} , platí

$$0 \leq \beta(x, t) \leq x \mu_{\max},$$

na základe čoho

$$\lim_{x \searrow 0} \beta(x, t) = 0. \quad (1.8)$$

Ak označíme maximálnu volatilitu rizikových aktív σ_{\max} , platí

$$0 = \gamma(0, t) = 0^2 \sigma_{\max}^2$$

a

$$0 \leq \gamma(x, t) \leq x^2 \sigma_{\max}^2,$$

preto

$$0 \leq \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, t) \leq 2x \sigma_{\max}^2,$$

na základe čoho

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, t) = 0. \quad (1.9)$$

Vzťahy (1.8) a (1.9) implikujú platnosť kritéria (1.7). Rovnica (1.5) teda na hranici $x = 0$ okrajovú podmienku nepotrebuje a koncovou podmienkou (1.6) je riešenie rovnice jednoznačne určené.

Intuitívnejším argumentom môže byť, že stochastické úlohy, v ktorých sa dolná hranica ($x = 0$) dosahuje s nulovou pravdepodobnosťou, okrajovú podmienku pre túto hranicu nepotrebujú (napríklad podľa článku [7]).

Optimálna stratégia $\hat{\pi}_t(x)$ je argumentom maxima Bellmanovej rovnice, po úprave dostaneme

$$\hat{\pi}_t(x) \in \arg \max_{\pi \in \mathcal{C}^0} \left[r + \pi^T (\boldsymbol{\mu} - r) + \frac{1}{2} (\pi^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \pi) x \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x)}{\frac{\partial V}{\partial x}(t, x)} \right]. \quad (1.10)$$

Vo výsledku (1.10) vystupuje hodnotová funkcia iba v rámci výrazu, ktorý budeme označovať

$$\psi(t, x) = -x \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x)}{\frac{\partial V}{\partial x}(t, x)}$$

a budeme ho nazývať relatívna riziková averzia. Relatívna riziková averzia ψ je zovšeobecnením koeficientu relatívnej rizikovej averzie

$$-x \frac{U''(x)}{U'(x)}$$

uvedeného v predchádzajúcej časti o CRRA funkciách užitočnosti. Presnejšie, koeficient relatívnej rizikovej averzie je špeciálnym prípadom relatívnej rizikovej averzie pre čas $t = T$.

1.7 Úvaha o prenášobnom majetku

Nasledujúca úvaha nám pomôže riešenie Bellmanovej rovnice (1.5) s koncovou podmienkou (1.6) uhádnuť.

Uvažujme dve rovnaké úlohy (rovnaké parametre $p, T, r, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}$) typu (1.4) so začiatkom v čase t_0 , rozdiel bude iba v počiatočných podmienkach. Počiatočnou podmienkou prvej z úloh bude $X_{t_0} = 1$, počiatočnou podmienkou druhej z úloh bude $X_{t_0} = 100$.

Tieto úlohy môžu reprezentovať úplne rovnakú situáciu. Prvá môže riešiť ako investovať 1 euro, druhá ako investovať 100 centov. Parametre $r, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}$ popisujú relatívny nárast majetku, sú teda nezávislé od použitých peňažných jednotiek. Rovnako, CRRA funkcia užitočnosti sa podľa vzťahu (1.3) môže používať s rovnakým parametrom p bez

ohľadu na použitú peňažnú jednotku. Taktiež ohraničenia

$$\mathcal{C}^0 = \left\{ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^d ; \pi^i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, d \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^d \pi^i \leq 1 \right\}$$

sú pre obe úlohy rovnaké.

Optimálne stratégie $\tilde{\boldsymbol{\pi}}, \tilde{\tilde{\boldsymbol{\pi}}}$ pre úlohu v eurách a v centoch sú preto rovnaké, avšak X_t sa meria v rôznych jednotkách, t. j. $\tilde{\tilde{\boldsymbol{\pi}}}_t(x) = \tilde{\boldsymbol{\pi}}_t(100x)$.

Pri použití týchto zodpovedajúcich si optimálnych stratégií majú úlohy rovnaké rozdelenie majetku na konci, rozdiel je iba v použitých jednotkách, t. j.

$$X_T \Big|_{\{X_{t_0}=100 \wedge \boldsymbol{\pi}=\tilde{\tilde{\boldsymbol{\pi}}}\}} = 100 \cdot X_T \Big|_{\{X_{t_0}=1 \wedge \boldsymbol{\pi}=\tilde{\boldsymbol{\pi}}\}} \quad (1.11)$$

(resp. náhodné veličiny z ľavej a pravej strany rovnosti majú rovnaké rozdelenie).

Pretože obe úlohy používajú rovnaké hodnoty parametrov (okrem začiatkovej hodnoty X_{t_0}), zodpovedá úlohám spoločná hodnotová funkcia $V(t, x)$. Počiatočnou podmienkou prvej z úloh je $X_{t_0} = 1$, optimálnej hodnote účelovej funkcie prvej úlohy preto zodpovedá hodnota $V(t_0, 1)$. Podobne, optimálnej hodnote účelovej funkcie druhej úlohy zodpovedá hodnota $V(t_0, 100)$. S využitím vzťahu (1.11) platí

$$\begin{aligned} V(t_0, 100) &= E \left[\frac{1}{p} X_T^p \Big|_{X_{t_0} = 100 \wedge \boldsymbol{\pi} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{\pi}}}} \right] = \\ &= E \left[\frac{1}{p} (100 \cdot X_T)^p \Big|_{X_{t_0} = 1 \wedge \boldsymbol{\pi} = \tilde{\boldsymbol{\pi}}} \right] = \\ &= 100^p \cdot E \left[\frac{1}{p} X_T^p \Big|_{X_{t_0} = 1 \wedge \boldsymbol{\pi} = \tilde{\boldsymbol{\pi}}} \right] = 100^p \cdot V(t_0, 1). \end{aligned}$$

Podobne platí aj vo všeobecnosti

$$V(t, x) = x^p \cdot V(t, 1) = (p \cdot V(t, 1)) \cdot \left(\frac{1}{p} x^p \right) = L(t) \cdot U(x). \quad (1.12)$$

Funkciu $L(t)$, z ktorej po prenasobení funkciou užitočnosti dostaneme hodnotovú funkciu, budeme nazývať príležitostný proces (podľa článku [1], kde sa označuje ako *opportunity process*). Pre všeobecnú úlohu často platí, že príležitostný proces závisí nielen od t , ale aj od x , t. j.

$$V(t, x) = L(t, x) \cdot U(x).$$

To, že pre úlohu bez príspevkov závisí iba od t , veľmi zjednoduší riešenie úlohy.

1.8 Riešenie úlohy bez príspevkov

Pretože podľa vzťahu (1.12) platí

$$V(t, x) = L(t) \cdot U(x),$$

pre relatívnu rizikovú averziu ψ platí

$$\psi(t, x) = -x \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x)}{\frac{\partial V}{\partial x}(t, x)} = -x \frac{L(t) \cdot U''(x)}{L(t) \cdot U'(x)} = -x \frac{U''(x)}{U'(x)} \equiv 1 - p.$$

Podľa vzťahu (1.10) preto platí

$$\hat{\pi}_t(x) \in \arg \max_{\pi \in \mathcal{C}^0} \left[r + \pi^T (\boldsymbol{\mu} - r) - \frac{1}{2} (1 - p) (\pi^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \pi) \right]. \quad (1.13)$$

To je zaujímavý výsledok. Ukazuje, že v úlohe bez príspevkov optimálna stratégia investovania nezávisí od času zostávajúceho do konca investovania ani od veľkosti majetku. Je to v rozpore s názorom, že ak je do konca investovania T veľa času, malo by sa viac investovať do rizikových aktív, pretože dlhý časový horizont v súlade so zákonom veľkých čísel dostatočne zníži riziko.

Tento názor už rozoberali napríklad P. A. Samuelson v článku [4] a Z. Bodie v článku [5] a aj oni prišli k záveru, že vo všeobecnosti neplatí. Zákon veľkých čísel pri dlhodobom investovaní nie je možné automaticky prijať ako dostatočný argument pre zvýšené investovanie do rizikových aktív (oproti krátkodobému investovaniu).

Pre úplnosť ešte môžeme zistiť tvar hodnotovej funkcie, resp. príležitostného procesu $L(t)$.

S využitím vzťahu (1.12) môžeme Bellmanovu rovnicu (1.5) prepísať na

$$0 = L'(t)U(x) + \max_{\pi \in \mathcal{C}^0} \left[(r + \pi^T (\boldsymbol{\mu} - r)) x L(t) U'(x) + \frac{1}{2} (\pi^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \pi) x^2 L(t) U''(x) \right].$$

Po predelení výrazom $xL(t)U'(x)$ dostaneme

$$0 = \frac{1}{p} \frac{L'(t)}{L(t)} + M,$$

kde

$$M = \max_{\pi \in \mathcal{C}^0} \left[r + \pi^T (\boldsymbol{\mu} - r) - \frac{1}{2} (1 - p) (\pi^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \pi) \right].$$

Spolu s koncovou podmienkou (1.6) prepísanou do tvaru $L(T) = 1$ má táto rovnica riešenie

$$L(t) = \exp(pM(T - t)). \quad (1.14)$$

K analogickému výsledku prišiel M. Nutz v článku [1] (tvrdenie 3.2). V článku sa používajú odúročené ceny aktív (t. j. $r = 0$) a sú modelované pomocou Lévyho procesov. Článok je časťou Nutzovej dizertačnej práce [2], v ktorej možno nájsť aj podrobnejšie výsledky.

Spomenieme ešte, že úvaha o prenásobenom majetku s dôsledkom (1.12) sa dá uplatniť nielen pre úlohu s uvedenými ohraničeniami

$$\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{C}^0,$$

ale aj pre úlohy typu (1.4) s ľubovoľnými ohraničeniami

$$\boldsymbol{\pi}_t \in \mathcal{C}_t,$$

ktoré môžu byť závislé od času t . Pre takéto úlohy platí prirodzené rozšírenie vzťahu (1.13):

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}_t(x) \in \arg \max_{\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{C}_t} \left[\boldsymbol{\pi}^T (\boldsymbol{\mu} - r) - \frac{1}{2} (1 - p) (\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}) \right].$$

Príležitostný proces $L(t)$ však vtedy nemusí byť v tvare zo vzťahu (1.14).

Pre úlohy s ohraničeniami závislými nielen od času t , ale aj od (stochastickej) hodnoty portfólia X_t však úvaha o prenásobenom majetku ani vzťah (1.12) vo všeobecnosti neplatia a treba ich riešiť inak.

Kapitola 2

Úloha s príspevkami

2.1 Zavedenie príspevkov

Úlohu (1.4) doplníme o predpoklad, že klient okrem začiatočného vkladu vkladá aj priebežné príspevky. Budeme uvažovať spojité príspevky: klient bude počas obdobia $[0, T)$ prispievať konštantnou rýchlosťou c peňažných jednotiek za jednotku času. Stochastická diferenciálna rovnica (1.1) pre hodnotu portfólia sa tým zmení na

$$\frac{dX_t}{X_t} = \left(r + \boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{\mu} - r) + \frac{c}{X_t} \right) dt + \left(\sqrt{\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}} \right) dW_t \quad (2.1)$$

a vznikne upravená úloha stochastického optimálneho riadenia

$$\begin{aligned} & \max E \left[\frac{1}{p} X_T^p \right], \quad T \text{ pevné} \\ & \frac{dX_t}{X_t} = \left(r + \boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{\mu} - r) + \frac{c}{X_t} \right) dt + \left(\sqrt{\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}} \right) dW_t \\ & X_0 = x_0 \\ & \boldsymbol{\pi} \in \mathcal{C}^0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pre hodnotovú funkciu

$$V(t, x) = \max_{\{\boldsymbol{\pi}_s \in \mathcal{C}^0\}_{s \in [t, T)}} E[U(X_T) | X_t = x]$$

je možné analogicky ako v pôvodnej úlohe odvodiť Bellmanovu rovnicu

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + c \frac{\partial V}{\partial x} + \max_{\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{C}^0} \left[(r + \boldsymbol{\pi}^T(\boldsymbol{\mu} - r)) x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}) x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right]. \quad (2.3)$$

Rovnica platí na oblasti $0 < t < T$, $0 < x < \infty$. Koncovou podmienkou je

$$V(T, x) = \frac{1}{p}x^p. \quad (2.4)$$

Rovnako ako pre rovnicu (1.5) zodpovedajúcu úlohe bez príspevkov, pre hranicu $x = 0$ nie je potrebná okrajová podmienka a koncovou podmienkou je riešenie rovnice jednoznačne určené (v tomto prípade, nerovnosť (1.7) sa realizuje ako

$$\lim_{x \searrow 0} \left(\beta(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, t) \right) = c > 0,$$

t. j. kritérium, na základe ktorého nie je potrebná okrajová podmienka, je opäť splnené).

Optimálna stratégia $\hat{\pi}_t(x)$ je argumentom maxima Bellmanovej rovnice, po úprave dostaneme rovnaký vzťah ako (1.10):

$$\hat{\pi}_t(x) \in \arg \max_{\pi \in \mathcal{C}^0} \left[r + \pi^T (\boldsymbol{\mu} - r) - \frac{1}{2} \psi(t, x) (\pi^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \pi) \right],$$

kde

$$\psi(t, x) = -x \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x)}{\frac{\partial V}{\partial x}(t, x)}$$

je relatívna riziková averzia.

Problémom oproti úlohe (1.4) bez príspevkov je, že neplatí úvaha o prenášobnom majetku. Pri úlohách v eurách a v centoch je totiž parameter c rôzny, hodnota rýchlosti prispievania závisí na použitej peňažnej jednotke. To znamená, že pre tieto dve úlohy nie je možné použiť spoločnú hodnotovú funkciu $V(t, x)$, odvodenie vzťahu (1.12) tak pre úlohu (2.2) s príspevkami neplatí. Pre úlohu s príspevkami neplatí ani vzťah pre relatívnu rizikovú averziu, t. j.

$$\psi(t, x) = -x \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x)}{\frac{\partial V}{\partial x}(t, x)} \neq 1 - p.$$

Bez poznania relatívnej rizikovej averzie ψ , hodnoty optimálnej stratégie $\hat{\pi}$ priamo zo vzťahu (1.10) určiť nevieme.

2.2 Transformácia

Problém v úlohe (2.2) spôsobuje parameter c rýchlosti prispievania, vystupujúci v stochastickej diferenciálnej rovnici (2.1). Pomocou nasledujúcej transformácie sa tento parameter z rovnice eliminuje.

Transformácia využíva súčasnú hodnotu (*present value*) PV_t budúcich príspevkov, vzhľadom na bezrizikový úrok r . Príspevok jednej peňažnej jednotky v čase $s > t$ má v čase t po odúročení hodnotu $e^{-r(s-t)}$, preto príspevky od času t do času T rýchlosťou c peňažných jednotiek za jednotku času majú v čase t hodnotu

$$PV_t = \int_t^T c \cdot e^{-r(s-t)} ds = \frac{c}{r} (1 - e^{-r(T-t)}). \quad (2.5)$$

V úlohe (2.2) transformujeme stochastický proces X_t na proces

$$Y_t = X_t + PV_t \quad (2.6)$$

a stratégia investovania bude namiesto vektora $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_t(X_t)$ reprezentovaná vektorom $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_t(Y_t)$, ktorého i -ta zložka θ^i označuje čiastku hodnoty Y_t investovanú do i -teho rizikového aktíva. Platí teda

$$(\text{peňazí v rizikovom aktíve } i) = \pi^i \cdot X_t = \theta^i \cdot Y_t,$$

po úprave

$$\boldsymbol{\pi} = \left(1 + \frac{PV_t}{X_t}\right) \boldsymbol{\theta}. \quad (2.7)$$

S použitím Itôvej lemy (Lema 4.3 v [10]), rovnice (2.1) a vzťahov (2.5), (2.6), (2.7) odvodíme pre stochastický proces

$$Y_t = g(t, X_t) = X_t + PV_t$$

stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)X_t^2 (\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}) dt = \\ &= (PV_t)' dt + (r + \boldsymbol{\pi}^T (\boldsymbol{\mu} - r)) X_t dt + c \cdot dt + \left(\sqrt{\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\pi}}\right) X_t dW_t = \\ &= \left[(PV_t)' + \left(r + \left(1 + \frac{PV_t}{X_t}\right) \boldsymbol{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r)\right) X_t + c \right] dt + \left(\sqrt{\left(1 + \frac{PV_t}{X_t}\right)^2 \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta}}\right) X_t dW_t = \\ &= \left[(PV_t)' + (r + \boldsymbol{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r)) X_t + PV_t \cdot \boldsymbol{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r) + c \right] dt + \sqrt{\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta}} \left(1 + \frac{PV_t}{X_t}\right) X_t dW_t = \\ &= \left[(PV_t)' + (r + \boldsymbol{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r)) (Y_t - PV_t) + PV_t \cdot \boldsymbol{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r) + c \right] dt + \left(\sqrt{\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta}}\right) Y_t dW_t = \\ &= (r + \boldsymbol{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r)) Y_t dt + \left(\sqrt{\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta}}\right) Y_t dW_t + ((PV_t)' - rPV_t + c) dt = \\ &= (r + \boldsymbol{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r)) Y_t dt + \left(\sqrt{\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta}}\right) Y_t dW_t. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Vidíme, že vo výslednej rovnici (2.8) už parameter c nevystupuje. Dostali sme rovnicu analogickú ako v úlohe (1.4) bez príspevkov.

Ohraničenia

$$\mathcal{E}^0 = \left\{ \boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^d ; \pi^i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, d \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^d \pi^i \leq 1 \right\}$$

sa transformujú nasledovne: zakázané krátke pozície v rizikových aktívach implikujú podmienky

$$\pi^i = \left(1 + \frac{PV_t}{X_t} \right) \theta^i \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \theta^i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Zakázaná krátka pozícia v bezrizikovom aktíve implikuje podmienku

$$\sum_{i=1}^d \pi^i = \left(1 + \frac{PV_t}{X_t} \right) \sum_{i=1}^d \theta^i \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^d \theta^i \leq \frac{1}{1 + \frac{PV_t}{Y_t - PV_t}} = 1 - \frac{PV_t}{Y_t}.$$

Tieto transformované ohraničenia, závislé od času t (resp. od hodnoty PV_t) aj od stochastickej hodnoty procesu Y_t , budeme označovať

$$\mathcal{E}^{PV_t} = \left\{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d ; \theta^i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, d \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^d \theta^i \leq 1 - \frac{PV_t}{Y_t} \right\}.$$

V čase T platí $Y_T = X_T$, preto namiesto účelovej funkcie $E \left[\frac{1}{p} X_T^p \right]$ pôvodnej úlohy môžeme maximalizovať funkciu $E \left[\frac{1}{p} Y_T^p \right]$.

Dostali sme tak transformovanú úlohu

$$\begin{aligned} & \max E \left[\frac{1}{p} Y_T^p \right], \quad T \text{ pevné} \\ & \frac{dY_t}{Y_t} = (r + \boldsymbol{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r)) dt + \left(\sqrt{\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta}} \right) dW_t \quad (2.9) \\ & Y_0 = x_0 + PV_0 = y_0 \\ & \boldsymbol{\theta}_t \in \mathcal{E}^{PV_t}. \end{aligned}$$

Pre hodnotovú funkciu

$$V(t, y) = \max_{\{\boldsymbol{\theta}_s \in \mathcal{E}^{PV_t}\}_{s \in [t, T)}} E[U(Y_T) | Y_t = y]$$

je možné analogicky ako v úlohe (1.4) bez príspevkov odvodiť Bellmanovu rovnicu

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \max_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{E}^{PV_t}} \left[(r + \boldsymbol{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r)) y \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta}) y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right]. \quad (2.10)$$

Rovnica platí na oblasti $0 < t < T$, $PV_t < y < \infty$. Koncovou podmienkou je

$$V(T, y) = \frac{1}{p} y^p. \quad (2.11)$$

Pretože rovnicu (2.10) by bolo možné získať aj transformáciou rovnice (2.3), pre hranicu $y = PV_t$ (zodpovedajúcu hranici $x = 0$) nie je potrebná okrajová podmienka a koncovou podmienkou je riešenie rovnice jednoznačne určené.

Optimálna stratégia $\hat{\theta}_t(y)$ je argumentom maxima Bellmanovej rovnice, platí analogický vzťah ako (1.10) pre úlohu bez príspevkov:

$$\hat{\theta}_t(y) \in \arg \max_{\theta \in \mathcal{L}^{PV_t}} \left[r + \theta^T (\mu - r) - \frac{1}{2} \psi(t, y) (\theta^T \sigma \sigma^T \theta) \right], \quad (2.12)$$

kde

$$\psi(t, y) = -y \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(t, y)}{\frac{\partial V}{\partial y}(t, y)}$$

je relatívna riziková averzia.

2.3 Interpretácia transformovanej úlohy

Transformovaná úloha (2.9) má nasledovnú interpretáciu. Pôvodnú úlohu (2.2) s priebežnými príspevkami sme previedli na ekvivalentnú situáciu, v ktorej klient na začiatku (v čase $t = 0$) vloží do investičného fondu hodnotu x_0 a súčasnú hodnotu budúcich príspevkov

$$PV_0 = \frac{c}{r} (1 - e^{-rT})$$

vloží na bezrizikový účet (s úrokom r). Budúce príspevky do investičného fondu bude hradíť z uvedeného bezrizikového účtu. Za týchto predpokladov, hodnota B_t na bezrizikovom účte spĺňa diferenciálnu rovnicu

$$dB_t = (rB_t - c)dt$$

s počiatočnou podmienkou

$$B_0 = PV_0 = \frac{c}{r} (1 - e^{-rT}).$$

Riešením diferenciálnej rovnice je

$$B_t = \frac{c}{r} (1 - e^{-r(T-t)}) = PV_t,$$

t. j. celý čas bude na bezrizikovom účte uložená súčasná hodnota budúcich príspevkov. V čase T bude hodnota účtu rovná nule.

V úlohe (2.9), hodnota $Y_t = X_t + PV_t$ zodpovedá celkovému investovanému vkladu klienta (v investičnom fonde aj na bezrizikovom účte). Hodnota θ^i zodpovedá čiastke tohoto majetku investovanej do i -teho rizikového aktíva. Pretože budúce príspevky sú v tomto prístupe zohľadnené ako investované peniaze, v stochastickej diferenciálnej rovnici (2.8) celkového majetku už nevystupujú (parameter c z rovnice (2.1) sa eliminoval). Súčasná hodnota budúcich príspevkov PV_t však vystupuje v ohraničeniach \mathcal{C}^{PV_t} . Do rizikových aktív totiž môže investičný fond investovať iba tie peniaze, ktoré sú uložené vo fonde (a nie na bezrizikovom účte). Hodnota $\left(\sum_{i=1}^d \theta^i\right) Y_t$ investovaná do rizikových aktív preto nesmie prekročiť hodnotu $Y_t - PV_t$ peňazí vo fonde. Po úprave dostaneme transformované ohraničenie

$$\sum_{i=1}^d \theta^i \leq 1 - \frac{PV_t}{Y_t}.$$

Pre transformovanú úlohu (2.9) platí, že v stochastickej diferenciálnej rovnici (2.8) už nevystupuje parameter rýchlosti prispievania c . Avšak nové ohraničenia \mathcal{C}^{PV_t} sú už závislé nielen od času t , ale aj od stochastickej hodnoty procesu Y_t . Úvaha o prenásobenom majetku sa preto ani pri transformovanej úlohe nemôže uplatniť. Ani dôsledok o relatívnej rizikovej averzii neplatí, t. j.

$$\psi(t, y) = -y \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(t, y)}{\frac{\partial V}{\partial y}(t, y)} \neq 1 - p.$$

Určiť hodnoty optimálnej stratégie $\hat{\theta}$ priamo zo vzťahu (2.12) preto nevieme.

2.4 Návrh aproximácie optimálnej stratégie

Transformovaná úloha (2.9) má oproti netransformovanej úlohe (2.2) nasledujúcu výhodu. Stala sa v istom zmysle viac podobná úlohe (1.4) bez príspevkov. Proces X_t z úlohy (2.2) nenesie žiadnu informáciu o budúcich príspevkoch, avšak proces $Y_t = X_t + PV_t$ z transformovanej úlohy (2.9) ich zohľadňuje.

Uvažujme takú hodnotu Y_t , pri ktorej ohraničenie

$$\sum_{i=1}^d \theta^i \leq 1 - \frac{PV_t}{Y_t} \tag{2.13}$$

nie je aktívne. Znamená to, že pre investičný fond je optimálne investovať nejakú čiastku z hodnoty $X_t = Y_t - PV_t$ aj do bezrizikového aktíva. Investičný fond sa vtedy môže pri investovaní do rizikových aktív správať tak, ako keby mal celú hodnotu $Y_t = X_t + PV_t$ k dispozícii, t. j. rovnako ako pri úlohe bez príspevkov. Jediný rozdiel bude v zohľadňovaní možnosti, že neskôr sa hodnota Y_t (výrazne) zmenší a ohraničenie (2.13) sa stane aktívnym. Ako sa však neskôr ukáže, toto spôsobuje iba veľmi malú zmenu oproti úlohe bez príspevkov. Platí, že ak ohraničenie (2.13) nie je aktívne, relatívna riziková averzia $\psi(t, Y_t)$ je veľmi podobná ako pri úlohe bez príspevkov, t. j.

$$\psi(t, Y_t) \doteq 1 - p.$$

Neskôr sa ukáže aj to, že v prípade takej hodnoty Y_t , pri ktorej je ohraničenie (2.13) aktívne, sa koeficient relatívnej rizikovej averzie $\psi(t, Y_t)$ oveľa výraznejšie odchyľuje od hodnoty $1 - p$. Tieto úvahy sú kvantifikované v časti 3.2, v ktorej sú odvodené parciálne diferenciálne rovnice pre relatívnu rizikovú averziu ψ v prípade aktívneho aj neaktívneho ohraničenia (2.13).

Pre optimálnu stratégiu investovania $\hat{\theta}$ podľa vzťahu (2.12) platí

$$\hat{\theta}_t(Y_t) \in \arg \max_{\theta \in \mathcal{C}^{PV_t}} \left[r + \theta^T (\mu - r) - \frac{1}{2} \psi(t, Y_t) (\theta^T \sigma \sigma^T \theta) \right].$$

V prípade hodnoty Y_t , pre ktorú ohraničenie (2.13) nie je aktívne, platí

$$\psi(t, Y_t) \doteq 1 - p,$$

preto dobrou aproximáciou $\tilde{\theta}$ optimálnej stratégie na zodpovedajúcom úseku môže byť

$$\tilde{\theta}_t(Y_t) \in \arg \max_{\theta \in \mathcal{C}^{PV_t}} \left[r + \theta^T (\mu - r) - \frac{1}{2} (1 - p) (\theta^T \sigma \sigma^T \theta) \right]. \quad (2.14)$$

V prípade aktívneho ohraničenia (2.13) platí, že do rizikových aktív sa investuje maximálna čiastka $1 - \frac{PV_t}{Y_t}$. To znamená, že aj keď sa hodnota $\psi(t, Y_t)$ nezanedbateľne líši od $1 - p$, aproximáciou $\tilde{\theta}$ optimálnej stratégie definovanou vzťahom (2.14) sa nezmení celková čiastka investovaná do rizikových aktív (pri maximalizáciách (2.12), (2.14) býva ohraničenie (2.13) aktívne na približne rovnakom úseku hodnôt Y_t). Nezanedbateľný rozdiel aproximatívnej stratégie oproti optimálnej však môže byť v tom, ako sa celková čiastka $1 - \frac{PV_t}{Y_t}$ investovaná do rizikových aktív rozdelí medzi jednotlivé rizikové aktíva.

Napriek tomuto nedostatku, stratégia $\tilde{\theta}$ môže byť dobrou aproximáciou optimálnej stratégie, resp. môže klientovi priniesť takmer optimálnu užitočnosť. V kapitolách 3 a 4 sa pokúsime efektívnosť stratégie $\tilde{\theta}$ odhadnúť.

2.5 Úloha so zjednodušeným a so zanedbaným ohra- ničením

Kvôli ohraničeniu

$$\sum_{i=1}^d \theta^i \leq 1 - \frac{PV_t}{Y_t}$$

závislému aj od stochastickej hodnoty procesu Y_t nie je možné v transformovanej úlohe (2.9) použiť úvahu o prenasobenom majetku. Jedným z prístupov je toto problémové ohraničenie zanedbať, resp. nahradiť ho menej prísnyim ohraničením

$$\sum_{i=1}^d \theta^i \leq 1, \quad (2.15)$$

ktoré nie je závislé od hodnoty Y_t . Zanedbanie ohraničenia zodpovedá povoleniu krátkej pozície v bezrizikovom aktívu. To znamená, že pre fond bude prípustné požičať si za úrok r neobmedzenú sumu peňazí a investovať ju do rizikových aktív. Zjednodušenie na ohraničenie (2.15) zodpovedá povoleniu fondu požičať si za úrok r takú sumu, aby pôžička aj s úrokmi išla splatiť pomocou budúcich príspevkov.

Pri použití ohraničenia (2.15) vznikne z úlohy (2.9) úloha so zjednodušeným ohraničením

$$\begin{aligned} & \max E \left[\frac{1}{p} Y_T^p \right], \quad T \text{ pevné} \\ & \frac{dY_t}{Y_t} = (r + \boldsymbol{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r)) dt + \left(\sqrt{\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta}} \right) dW_t \\ & Y_0 = y_0 \\ & \theta^i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, d \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^d \theta^i \leq 1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Úloha (2.16) je matematicky ekvivalentná s úlohou (1.4) bez príspevkov. To znamená, že optimálna stratégia je určená analogickým vzťahom ako (1.13) v úlohe bez príspevkov

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_t(Y_t) \in \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^0} \left[r + \boldsymbol{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r) - \frac{1}{2} (1 - p) (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta}) \right]. \quad (2.17)$$

Hodnotová funkcia

$$V(t, y) = \max_{\{\boldsymbol{\theta}_s \in \mathcal{C}^0\}_{s \in [t, T)}} E[U(Y_T) | Y_t = y]$$

je určená vzťahom

$$V(t, y) = L(t) \frac{y^p}{p},$$

pričom pre opportunity process $L(t)$ rovnako ako pri úlohe (1.4) bez príspevkov platí

$$L(t) = \exp(pM(T - t)),$$

kde

$$M = \max_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^0} \left[r + \boldsymbol{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r) - \frac{1}{2} (1 - p) (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta}) \right]. \quad (2.18)$$

Pretože úlohe (2.16) zodpovedajú menej prísne ohraničenia ako úlohe (2.9), je uvedená hodnotová funkcia horným odhadom pre hodnotovú funkciu úlohy (2.9).

Úloha so zanedbaným ohraničením má analogické výsledky, avšak namiesto ohraničenia

$$\mathcal{C}^0 = \left\{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d ; \theta^i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, d \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^d \theta^i \leq 1 \right\}$$

vystupuje vo vzťahoch (2.17), (2.18) ohraničenie

$$\mathcal{C}^- = \{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d ; \theta^i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, d \}.$$

Špeciálne, pre $d = 1$ rizikové aktívum s driftom $\mu > r$ a volatilitou $\sigma > 0$, pre úlohu so zanedbaným ohraničením dostaneme

$$\hat{\theta}_t(y) = \frac{\mu - r}{(1 - p)\sigma^2}$$

a

$$V(t, y) = \exp(pM(T - t)) \cdot \frac{1}{p} y^p,$$

kde

$$M = r + \frac{(\mu - r)^2}{2(1 - p)\sigma^2}.$$

Po spätnom transformovaní na premenné úlohy (2.2) dostaneme

$$\hat{\pi}_t(x) = \left(1 + \frac{PV_t}{x} \right) \cdot \frac{\mu - r}{(1 - p)\sigma^2}$$

$$V(t, x) = \exp \left(p \left(r + \frac{(\mu - r)^2}{2(1 - p)\sigma^2} \right) (T - t) \right) \cdot \frac{1}{p} (x + PV_t)^p.$$

Úlohu so zanedbaným ohraničením s dvoma aktívami (avšak oboma rizikovými, t. j. uvedená jednorozmerná úloha so zanedbaným ohraničením je degenerovaným prípadom ich úlohy) riešili v článku [3] Z. Macová a D. Ševčovič. Z tvrdenia 5 v [3] je možné pre optimálnu stratégiu $\hat{\pi}_t(x)$ limitne dostať rovnaký výsledok.

Kapitola 3

Jednorozmerná úloha

3.1 Deterministická úloha

Vrátíme sa k transformovanej úlohe (2.9). Triviálnym prípadom je úloha, v ktorej je okrem bezrizikového aktíva s driftom r ešte jedno aktívum s driftom $\mu > r$ a volatilitou $\sigma = 0$, t. j. ďalšie bezrizikové aktívum. Takáto úloha samozrejme nezodpovedá realite, avšak dá sa zistiť jej explicitné riešenie, ktoré nám môže dať istú predstavu o tvare riešenia všeobecnej úlohy (2.9).

Najprv nájdeme riešenie pre proces X_t z netransformovanej úlohy (2.2). Pri hodnote $\sigma = 0$, proces spĺňa už nie stochastickú, ale obyčajnú diferenciálnu rovnicu

$$dX_t = ((r + \pi(\mu - r))X_t + c) dt.$$

Optimálnou stratégiou $\hat{\pi}$ pri netransformovanej deterministickej úlohe je $\hat{\pi}_t(X_t) \equiv 1$, t. j. investovať všetko do aktíva s driftom $\mu > r$ (pri transformovanej úlohe tomu zodpovedá stratégia $\hat{\theta}_t(Y_t) = 1 - \frac{PV_t}{Y_t}$). Pri použití tejto stratégie, proces X_t spĺňa obyčajnú diferenciálnu rovnicu

$$dX_t = (\mu X_t + c) dt.$$

Jej všeobecným riešením je

$$X_t = -\frac{c}{\mu} + K e^{\mu t},$$

kde konštanta K závisí od dodatočnej podmienky.

Pri použití optimálnej stratégie je preto všeobecným riešením procesu

$$Y_t = X_t + PV_t = X_t + \frac{c}{r} (1 - e^{-r(T-t)})$$

riešenie

$$Y_t = -\frac{c}{\mu} + Ke^{\mu t} + \frac{c}{r} (1 - e^{-r(T-t)}).$$

Na vyjadrenie hodnotovej funkcie budeme potrebovať poznať hodnotu Y_T za podmienky $Y_t = y$. Pre hodnotu Y_T platí

$$Y_T = -\frac{c}{\mu} + Ke^{\mu T} = -\frac{c}{\mu} + Ke^{\mu t} e^{\mu(T-t)}, \quad (3.1)$$

pričom hodnotu výrazu $Ke^{\mu t}$ môžeme určiť z podmienky

$$Y_t = -\frac{c}{\mu} + Ke^{\mu t} + \frac{c}{r} (1 - e^{-r(T-t)}) = y.$$

Na základe podmienky platí

$$Ke^{\mu t} = y + \frac{c}{\mu} - \frac{c}{r} (1 - e^{-r(T-t)}),$$

s využitím toho vo vzťahu (3.1) dostaneme

$$\begin{aligned} Y_T|_{Y_t=y} &= -\frac{c}{\mu} + \left(y + \frac{c}{\mu} - \frac{c}{r} (1 - e^{-r(T-t)}) \right) e^{\mu(T-t)} = \\ &= e^{\mu(T-t)} \left[y - c \left(\frac{1}{r} (1 - e^{-r(T-t)}) - \frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu(T-t)}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Hodnotovú funkciu $V(t, y)$ preto môžeme vyjadriť ako

$$\begin{aligned} V(t, y) &= U(Y_T)|_{\{Y_t=y \wedge \theta=1-\frac{pV_t}{Y_t}\}} = \\ &= \frac{1}{p} \left\{ e^{\mu(T-t)} \left[y - c \left(\frac{1}{r} (1 - e^{-r(T-t)}) - \frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu(T-t)}) \right) \right] \right\}^p. \end{aligned}$$

Z hodnotovej funkcie môžeme vypočítať relatívnu rizikóvu averziu

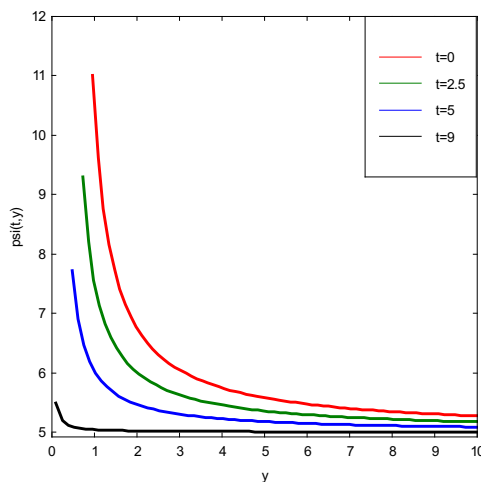
$$\psi(t, y) = -y \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(t, y)}{\frac{\partial V}{\partial y}(t, y)}.$$

Po vyjadrení parciálnych derivácií a zjednodušení dostaneme

$$\psi(t, y) = \frac{1-p}{1 - \frac{c}{y} \left(\frac{1}{r} (1 - e^{-r(T-t)}) - \frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu(T-t)}) \right)}. \quad (3.2)$$

Príklad priebehu $\psi(t, y)$ pri deterministickej úlohe je na Obr. 3.1. Môžeme všimnúť, že funkcia $\psi(t, y)$ je klesajúca v t , t. j. pre $t < T$ platí

$$\psi(t, y) > \psi(T, y) = 1 - p.$$



Obr. 3.1: Príklad priebehu $\psi(t, y)$ pri nastavení parametrov $\mu = 0.2$, $r = 0.01$, $c = 0.1$, $T = 10$, $1 - p = 5$.

Vidno tiež, že limitou pre $y \rightarrow \infty$ je hodnota $1 - p$. Ďalšími vlastnosťami funkcie $\psi(t, y)$ v prípade deterministickej úlohy sú klesajúcosť a konvexnosť v premennej y . Spomenuté vlastnosti pravdepodobne budú platiť aj pre relatívnu rizikóvu averziu všeobecnej transformovanej úlohy (2.9).

V nasledujúcich častiach sa budeme snažiť zistiť priebeh relatívnej rizikovej averzie aj pre niektoré stochastické úlohy. Pomôže nám to vyhodnotiť efektívnosť stratégie $\tilde{\theta}$ navrhutej v časti 2.4, prípadne navrhnúť nejaké lepšie aproximácie optimálnej stratégie.

3.2 Rovnica pre relatívnu rizikóvu averziu

Jednorozmernou úlohou budeme nazývať úlohu (2.9) s $d = 1$ rizikóvým aktívom s driftom μ a volatilitou σ . Úlohu zodpovedá Bellmanova rovnica

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \max_{\theta \in [0, 1 - \frac{pV_t}{y}]} \left[(r + \theta(\mu - r))y \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \theta^2 \sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right] \quad (3.3)$$

s koncovou podmienkou

$$V(T, y) = \frac{1}{p} y^p.$$

Optimálna stratégia $\hat{\theta}_t(y)$ je argumentom maxima Bellmanovej rovnice, platí

$$\hat{\theta}_t(y) \in \arg \max_{\theta \in [0, 1 - \frac{PV_t}{y}]} \left[r + \theta(\mu - r) - \frac{1}{2} \psi(t, y) \theta^2 \sigma^2 \right]. \quad (3.4)$$

Aby sme odvodili parciálnu diferenciálnu rovnicu pre relatívnu rizikovú averziu ψ , optimálnu stratégiu $\hat{\theta} = \hat{\theta}_t(y)$ vyjadríme explicitne v závislosti od $\psi = \psi(t, y)$.

Predpokladajme $\mu > r$, $\psi > 0$ (predpoklad $\psi > 0$ sa v ďalších častiach za podmienky $1 - p > 0$ ukazoval splnený). Pri maximalizácii (3.4) nastáva voľný extrém v bode

$$\theta = \frac{\mu - r}{\psi \sigma^2} > 0.$$

V prípade

$$\frac{\mu - r}{\psi \sigma^2} \leq 1 - \frac{PV_t}{y} \iff \psi \geq \frac{\mu - r}{\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \sigma^2}$$

nadobúda optimálna stratégia $\hat{\theta}$ voľný extrém, v opačnom prípade leží extrém na hranici. Platí

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \frac{\mu - r}{\psi \sigma^2} & \text{ak } \psi \geq \frac{\mu - r}{\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \sigma^2}, \\ 1 - \frac{PV_t}{y} & \text{ak } \psi < \frac{\mu - r}{\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \sigma^2}. \end{cases}$$

Rovnicu pre relatívnu rizikovú averziu ψ odvodíme najprv pre prípad

$$\psi \geq \frac{\mu - r}{\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \sigma^2}, \quad \text{t. j.} \quad \hat{\theta} = \frac{\mu - r}{\psi \sigma^2}.$$

Budeme vychádzať z Bellmanovej rovnice (3.3)

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \max_{\theta \in [0, 1 - \frac{PV_t}{y}]} \left[(r + \theta(\mu - r))y \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \theta^2 \sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right].$$

Pretože

$$\hat{\theta} = \frac{\mu - r}{\psi \sigma^2} = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}},$$

môžeme rovnicu prepísať na

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(r - \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}} \right) y \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}} \right)^2 \sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

po úprave

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[ry - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}} \right] \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (3.5)$$

Podľa prístupu z článku [3] od Z. Macovej a D. Ševčoviča, rovnicu najprv transformujeme na rovnicu pre funkciu

$$\varphi(t, y) = -\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(t, y)}{\frac{\partial V}{\partial y}(t, y)}$$

(tzv. *Riccati-like transformation*). Rovnicu (3.5) môžeme zapísať ako

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t}(t, y) + g(t, y) \frac{\partial V}{\partial y}(t, y),$$

kde

$$g(t, y) = ry - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \frac{\frac{\partial V}{\partial y}(t, y)}{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(t, y)} = ry + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \varphi(t, y). \quad (3.6)$$

Rovnicu v takomto tvare môžeme (rovnako ako v článku [3]) prepísať na nasledujúcu rovnicu pre funkciu $\varphi(t, y)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y}(t, y) - \varphi(t, y)g(t, y) \right).$$

Na základe tejto rovnice, pre relatívnu rizikovú averziu

$$\psi(t, y) = -y \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(t, y)}{\frac{\partial V}{\partial y}(t, y)} = y\varphi(t, y)$$

platí rovnica

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) = y \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, y) = y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y}(t, y) - \frac{\psi(t, y)}{y} g(t, y) \right), \quad (3.7)$$

kde funkciu $g(t, y)$ zo vzťahu (3.6) môžeme vyjadriť pomocou $\psi(t, y)$ ako

$$g(t, y) = ry + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \frac{\psi(t, y)}{y}.$$

Po uplatnení derivácií dostaneme z rovnice (3.7) rovnicu

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -ry \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \left[\frac{2y}{\psi^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2y^2}{\psi^3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{y^2}{\psi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right], \quad (3.8)$$

ktorá je hľadanou rovnicou pre relatívnu rizikovú averziu ψ v prípade

$$\psi(t, y) \geq \frac{\mu - r}{\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \sigma^2}.$$

Ďalej odvodíme rovnicu o relatívnej rizikovej averzii pre prípad

$$\psi(t, y) < \frac{\mu - r}{\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \sigma^2}, \quad \text{t. j.} \quad \hat{\theta} = 1 - \frac{PV_t}{y}.$$

Po dosadení výrazu $\hat{\theta}$ do Bellmanovej rovnice (3.3) dostaneme

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(r + \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)(\mu - r)\right) y \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)^2 \sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

po úprave

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \left[\mu y - PV_t(\mu - r) + \frac{1}{2} \sigma^2 (y - PV_t)^2 \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}{\frac{\partial V}{\partial y}} \right] \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (3.9)$$

Dostali sme tak rovnicu v tvare

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t}(t, y) + g(t, y) \frac{\partial V}{\partial y}(t, y),$$

kde

$$\begin{aligned} g(t, y) &= \mu y - PV_t(\mu - r) + \frac{1}{2} \sigma^2 (y - PV_t)^2 \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(t, y)}{\frac{\partial V}{\partial y}(t, y)} = \\ &= \mu y - PV_t(\mu - r) - \frac{1}{2} \sigma^2 (y - PV_t)^2 \frac{\psi(t, y)}{y}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Rovnako ako pri odvodzovaní pre prípad $\psi \geq \frac{\mu - r}{\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \sigma^2}$, takúto rovnicu môžeme previesť na rovnicu (3.7)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) = y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y}(t, y) - \frac{\psi(t, y)}{y} g(t, y) \right).$$

Pri použití funkcie $g(t, y)$ zo vzťahu (3.10), po uplatnení derivácii do-

staneme z rovnice (3.7) rovnicu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} = & -\frac{PV_t}{y} \left[(\mu - r) - \sigma^2 \left(\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \psi - \frac{PV_t}{y} \right) \right] \psi - \\ & - \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \mu + r \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \\ & + \sigma^2 \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) (\psi - 1) - 2 \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial \psi}{\partial y} - \\ & - \frac{\sigma^2}{2} \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)^2 y^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

ktorá je hľadanou rovnicou pre relatívnu rizikovú averziu ψ v prípade

$$\psi(t, y) < \frac{\mu - r}{\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \sigma^2}.$$

Pre jednorozmernú úlohu sme tak dostali nasledujúcu parciálnu diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = f \left(t, y, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad (3.12)$$

kde v prípade $\psi \geq \frac{\mu - r}{\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \sigma^2}$ je funkcia f je definovaná ako

$$f \left(t, y, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -ry \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \left[\frac{2y}{\psi^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2y^2}{\psi^3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{y^2}{\psi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right]$$

a v prípade $\psi < \frac{\mu - r}{\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \sigma^2}$ je definovaná ako

$$\begin{aligned} f \left(t, y, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = & -\frac{PV_t}{y} \left[(\mu - r) - \sigma^2 \left(\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \psi - \frac{PV_t}{y} \right) \right] \psi - \\ & - \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \mu + r \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \\ & + \sigma^2 \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) (\psi - 1) - 2 \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial \psi}{\partial y} - \\ & - \frac{\sigma^2}{2} \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)^2 y^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Rovnica (3.12) platí na oblasti $0 < t < T$, $PV_t < y < \infty$. Z koncovej podmienky (2.11) pre hodnotovú funkciu dostaneme pre relatívnu rizikovú averziu ψ koncovú podmienku

$$\psi(T, y) = 1 - p.$$

Rovnica vznikla transformáciou jednorozmerného prípadu rovnice (2.10), preto pre hranicu $y = PV_t$ nie je potrebná okrajová podmienka a koncovou podmienkou je riešenie rovnice jednoznačne určené.

Rovnice (3.8), (3.11) potvrdzujú úvahy z časti 2.4. Rovnica (3.8), platiaca na úseku, na ktorom ohraničenie

$$\theta \leq 1 - \frac{PV_t}{y} \quad (3.13)$$

nie je aktívne, obsahuje na pravej strane iba členy s deriváciami $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ a $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$, ktoré sú v časovej vrstve T rovné nule a v časových vrstvách pre $t < T$ sa menia iba postupne. Hodnota $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ je preto na úseku s neaktívnym ohraňčením približne rovná nule a funkcia $\psi(t, y)$ sa od hodnoty $1 - p$ odchyľuje iba veľmi pomaly.

Naopak, rovnica (3.11), platiaca na úseku s aktívnym ohraňčením (3.13), obsahuje na pravej strane člen

$$k_1(t, y, \psi) = -\frac{PV_t}{y} \left[(\mu - r) - \sigma^2 \left(\left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) \psi - \frac{PV_t}{y} \right) \right] \psi,$$

pre ktorý za podmienky aktívneho ohraňčenia

$$\psi < \frac{\mu - r}{\left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) \sigma^2}$$

platí

$$k_1(t, y, \psi) < - \left(\frac{\sigma PV_t}{y} \right)^2 \psi < 0.$$

Člen $k_1(t, y, \psi)$ spôsobuje, že hodnota ψ s klesajúcou časovou vrstvou t na úseku s aktívnym ohraňčením (3.13) nezanedbateľne rastie.

Pokiaľ naozaj bude platiť, že na úseku s neaktívnym ohraňčením (3.13) je hodnota $\psi(t, y)$ veľmi blízka $1 - p$, pre jednorozmernú úlohu by aproximatívna stratégia

$$\tilde{\theta}_t(y) \in \arg \max_{\theta \in [0, 1 - \frac{PV_t}{y}]} \left[r + \theta(\mu - r) - \frac{1}{2}(1 - p)\theta^2\sigma^2 \right]$$

podľa úvah z časti 2.4 mala byť veľmi dobrou aproximáciou optimálnej stratégie.

3.3 Numerická schéma na výpočet relatívnej rizikovej averzie

Na numerické riešenie rovnice (3.12)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = f \left(t, y, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)$$

použijeme explicitnú schému, založenú na podobných myšlienkach ako časť 10.1 v [9].

Premennú t na intervale $[0, T]$ diskretizujeme ekvidištantne rozmiestnenými bodmi, t. j.

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T,$$

$$t_{i+1} - t_i = \Delta t = \frac{T}{m} \quad \text{pre } i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Premennú y na intervale $[y_{\min}, y_{\max}]$ diskretizujeme ekvidištantne rozmiestnenými bodmi, t. j.

$$y_{\min} = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = y_{\max},$$

$$y_{j+1} - y_j = \Delta y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{n} \quad \text{pre } j = 0, 1, \dots, n-1.$$

V čase t sú pre premennú y prípustné iba hodnoty z intervalu $[PV_t, \infty)$, preto pre časovú vrstvu t_i má významnú úlohu prvý (t. j. najmenší) bod y_j s hodnotou väčšou rovnou PV_{t_i} . Jeho index budeme označovať $j_0(i)$.

Numerickú aproximáciu riešenia $\psi(t, y)$ v bodoch diskretizácie budeme označovať

$$\psi_{i,j} \approx \psi(t_i, y_j), \quad \text{pre } i = 0, 1, \dots, m \quad j = j_0(i), \dots, n.$$

Parciálne derivácie z rovnice (3.12) vo „vnútorných“ bodoch diskretizácie

$$(t_i, y_j), \quad \text{pre } i = 1, \dots, m \quad j = j_0(i) + 1, \dots, n-1$$

aproximujeme pomocou konečných diferencií, ktoré budeme označovať

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{\Delta t} \approx \frac{\partial \psi}{\partial t}(t_i, y_j)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \approx \frac{\partial \psi}{\partial y}(t_i, y_j)$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \approx \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(t_i, y_j).$$

S využitím týchto aproximácií spolu s rovnicou (3.12) môžeme vyjadriť hodnotu $\psi_{i-1,j}$ pomocou hodnôt z časovej vrstvy i ako

$$\psi_{i-1,j} = \psi_{i,j} - \Delta t \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{i,j} = \psi_{i,j} - \Delta t \cdot f\left(t_i, y_j, \psi_{i,j}, \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,j}, \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,j}\right) \quad (3.14)$$

pre $i = 1, 2, \dots, m$ $j = j_0(i) + 1, \dots, n - 1$.

Na určenie hodnoty $\psi_{i-1,n}$ môžeme využiť približnú okrajovú podmienku

$$\psi_{i-1,n} = 1 - p.$$

Pokiaľ $j_0(i-1) = j_0(i) \equiv j_0$, môžeme na určenie hodnoty ψ_{i-1,j_0} použiť analogický vzťah ako (3.14), t. j.

$$\psi_{i-1,j_0} = \psi_{i,j_0} - \Delta t \cdot f\left(t_i, y_{j_0}, \psi_{i,j_0}, \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,j_0}, 0\right), \quad (3.15)$$

kde aproximáciu $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,j_0}$ derivácie $\frac{\partial\psi}{\partial y}(t_i, y_{j_0})$ získame pomocou konečnej diferencie

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,j_0} = \frac{\psi_{i,j_0+1} - \psi_{i,j_0}}{\Delta y} \approx \frac{\partial\psi}{\partial y}(t_i, y_{j_0}).$$

Vo vzťahu (3.15) sme zanedbali efekt derivácie $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(t_i, y_{j_0})$. To si pri vhodne zvolených parametroch diskretizácie môžeme dovoliť, pretože pre hodnotu y_{j_0} blízku PV_{t_i} okrem niekoľkých časových vrstiev pri koncovom čase T platí

$$\psi(t_i, y_{j_0}) < \frac{\mu - r}{\left(1 - \frac{PV_{t_i}}{y_{j_0}}\right) \sigma^2},$$

t. j. platí rovnica (3.11), v ktorej je pri derivácii $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(t_i, y_{j_0})$ výraz

$$\left(1 - \frac{PV_{t_i}}{y_{j_0}}\right)^2 y_{j_0}^2 = (y_{j_0} - PV_{t_i})^2 \approx 0,$$

ktorý môžeme zanedbať. V časových vrstvách pri koncovom čase T , pri ktorých (kvôli malej hodnote PV_{t_i}) môže platiť

$$\psi(t_i, y_{j_0}) \geq \frac{\mu - r}{\left(1 - \frac{PV_{t_i}}{y_{j_0}}\right) \sigma^2}$$

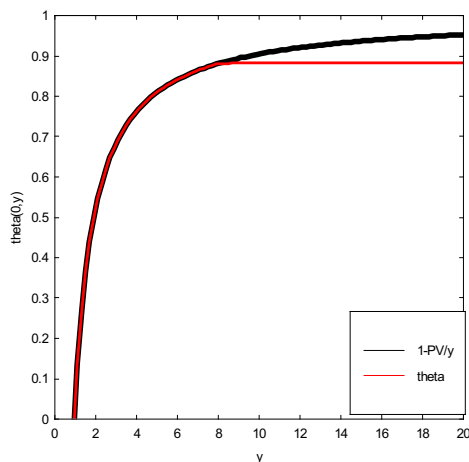
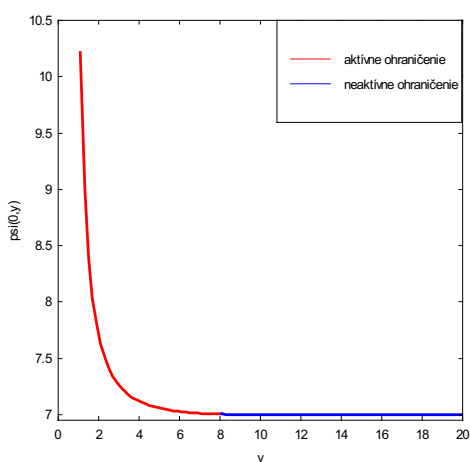
(t. j. vtedy platí rovnica (3.8)), býva hodnota derivácie $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(t_i, y_{j_0})$ blízka nule, teda aj v tomto prípade môžeme jej efekt zanedbať.

3.4 Numerické výsledky

Hodnoty parametrov $\mu = 0.21$, $\sigma = 0.18$ rizikového aktíva boli naka-librované podľa historických cien indexu S&P 500 z obdobia 1. 4. 2009–30. 6. 2011, v ktorom sa výnosy indexu správali ustálene. Ostatné parametre boli nastavené na $r = 0.01$, $T = 10$, $1 - p = 7$, $c = 0.1$.

Na numerické výpočty bola použitá numerická schéma popísaná v časti 3.3. Parametre diskretizácie boli nastavené na $m = 2500$ (diskretizácia času t), $n = 100$ (diskretizácia y), $y_{\min} = 0.1$, $y_{\max} = 20.1$.

Hodnoty relatívnej rizikovej averzie $\psi(t, y)$ pre začiatočnú časovú vrstvu $t = 0$ sú zobrazené na Obr. 3.2. Hodnoty optimálnej stratégie $\hat{\theta}_t(y)$ pre začiatočnú časovú vrstvu $t = 0$ sú zobrazené na Obr. 3.3.



Obr. 3.2: Závislosť ψ od y v časovej vrstve $t = 0$. Hodnoty sú farebne odlišené podľa toho, či je ohraničenie $\theta \leq 1 - \frac{PV_t}{y}$ aktívne.

Obr. 3.3: Závislosť optimálnej stratégie od y v časovej vrstve $t = 0$.

Z Obr. 3.2 si môžeme všimnúť, že na úseku, na ktorom ohraničenie $\theta \leq 1 - \frac{PV_t}{y}$ pre optimálnu stratégiu nie je aktívne, naozaj s veľkou presnosťou platí

$$\psi(t, y) \doteq 1 - p = 7.$$

To zodpovedá úvahám z časti 2.4 a zo záveru časti 3.2. Pre optimálnu stratégiu

$$\hat{\theta}_t(y) \in \arg \max_{\theta \in [0, 1 - \frac{PV_t}{y}]} \left[(\mu - r)\theta - \frac{1}{2}\psi(t, y)\sigma^2\theta^2 \right]$$

je preto na tomto úseku stratégia $\tilde{\theta}$ z časti 2.4

$$\tilde{\theta}_t(y) \in \arg \max_{\theta \in [0, 1 - \frac{PV_t}{y}]} \left[(\mu - r)\theta - \frac{1}{2}(1 - p)\sigma^2\theta^2 \right]$$

veľmi dobrou aproximáciou.

Na úseku, na ktorom je ohraňenie $\theta \leq 1 - \frac{PV_t}{y}$ pre optimálnu stratégiu aktívne, dochádza k veľkým odchýlkam $\psi(t, y)$ od hodnoty $1 - p = 7$. Ale pretože na tomto úseku platí $\hat{\theta} = 1 - \frac{PV_t}{y}$ (t. j. optimálna stratégia nezávisí od ψ), napriek odchýlkam ψ od hodnoty $1 - p$ je stratégia $\tilde{\theta}$ takmer na celom úseku rovná hodnote $\hat{\theta} = 1 - \frac{PV_t}{y}$ (ohraňenie $\theta \leq 1 - \frac{PV_t}{y}$ je pre stratégie $\hat{\theta}$ a $\tilde{\theta}$ aktívne na približne rovnakých úsekoch).

Z Obr. 3.3 môžeme vidieť, že na úseku s neaktívnym ohraňením optimálnej stratégie (t. j. pre $\hat{\theta} < 1 - \frac{PV_t}{y}$) je hodnota optimálnych stratégií

$$\hat{\theta} = \frac{\mu - r}{\psi\sigma^2}$$

takmer konštantná (približne rovná hodnote $\frac{\mu - r}{(1 - p)\sigma^2}$). Na úseku s aktívnym ohraňením sú optimálne stratégie rovné hodnote $1 - \frac{PV_t}{y}$. Výsledky Obr. 3.3 možno zhrnúť aj tak, že veľmi dobrou aproximáciou optimálnej stratégie $\hat{\theta}$ je

$$\min \left\{ 1 - \frac{PV_t}{y}, \frac{\mu - r}{(1 - p)\sigma^2} \right\} = \arg \max_{\theta \in [0, 1 - \frac{PV_t}{y}]} \left[(\mu - r)\theta - \frac{1}{2}(1 - p)\sigma^2\theta^2 \right] = \tilde{\theta}.$$

Takto možno ešte názornejšie vidno, že stratégia $\tilde{\theta}$ z časti 2.4 by mala byť pre jednorozmernú úlohu veľmi presnou aproximáciou optimálnej stratégie.

Číselne, na úseku s neaktívnym ohraňením $\theta \leq 1 - \frac{PV_t}{y}$ optimálnej stratégie, maximálna odchýlka numericky vypočítanej hodnoty relatívnej rizikovej averzie $\psi(0, y)$ od hodnoty $1 - p = 7$ nastáva v bode $y = 8.1$ (t. j. na začiatku úseku s neaktívnym ohraňením), v ktorom platí

$$\psi(0, 8.1) \doteq 7.00335.$$

V bode $y = 8.1$ nastáva aj maximálna odchýlka aproximatívnej stratégie $\tilde{\theta}$ od numericky vypočítanej hodnoty optimálnej stratégie $\hat{\theta}$:

$$\tilde{\theta}_0(8.1) \doteq 0.881834 \quad \text{a} \quad \hat{\theta}_0(8.1) \doteq 0.881412.$$

Maximálny rozdiel stratégií v časovom horizonte 10 rokov je teda rovný približne 0.000422. To je výborný výsledok, pre jednorozmernú úlohu sa aproximácia $\tilde{\theta}$ optimálnej stratégie $\hat{\theta}$ ukazuje ako veľmi presná.

Kapitola 4

Dvojrozmerná úloha

4.1 Analógia s Markowitzovou úlohou

Podobne ako pre jednorozmernú úlohu v kapitole 3, aj pre dvojrozmernú úlohu budeme odvodzovať parciálne diferenciálne rovnice pre relatívnu rizikovú averziu ψ .

Pre úlohu (2.9) s $d = 2$ rizikovými aktívami s parametrami

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

je už náročnejšie zo vzťahu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_t(y) \in \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{E}^{PV_t}} \left[r + \boldsymbol{\theta}^T(\boldsymbol{\mu} - r) - \frac{1}{2}\psi(t, y) (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta}) \right] \quad (4.1)$$

vyjadriť optimálnu stratégiu $\hat{\boldsymbol{\theta}}_t(y)$ explicitne v závislosti od ψ .

Pomôže nám, keď použijeme geometrický prístup, podobný ako v Markowitzovej úlohe (časť 2.2 v [10]).

Maximalizáciu (4.1) cez premennú $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$ môžeme previesť na maximalizáciu cez drift μ_P a volatilitu σ_P zodpovedajúceho portfólia. Použitím nových premenných

$$\mu_P(\boldsymbol{\theta}) = r + \boldsymbol{\theta}^T(\boldsymbol{\mu} - r)$$

$$\sigma_P(\boldsymbol{\theta}) = \sqrt{\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta}}$$

prevedieme vzťah (4.1) na

$$\begin{pmatrix} \mu_P(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ \sigma_P(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{pmatrix} \in \arg \max_{(\mu_P, \sigma_P) \in E^{PV_t}} \left[\mu_P - \frac{1}{2}\psi\sigma_P^2 \right], \quad (4.2)$$

kde E^{PV_t} je množinou všetkých dvojíc $(\mu_P(\boldsymbol{\theta}), \sigma_P(\boldsymbol{\theta}))$, dosiahnuteľných pomocou stratégií $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^{PV_t}$. Rovnako ako v Markowitzovej úlohe môžeme množinu E^{PV_t} zredukovať na jej „efektívnu hranicu“ \mathcal{E}^{PV_t} , t. j. pre každú možnú hodnotu driftu μ_P budeme uvažovať iba portfólio s minimálnou volatilitou σ_P (za predpokladu $\psi > 0$, ktorý sa vo zvyšných častiach práce za podmienky $1 - p > 0$ ukazoval splnený, podľa vzťahu (4.2) musia optimálne hodnoty $\mu_P(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ a $\sigma_P(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ ležať na takto definovanej efektívnej hranici). V nasledujúcom texte efektívnu hranicu \mathcal{E}^{PV_t} presnejšie popíšeme.

4.2 Efektívna hranica

Pre jednoduchosť najprv uvedieme, ako vyzerá efektívna hranica \mathcal{E}^0 zodpovedajúca stratégiám $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^0$. Efektívnu hranicu \mathcal{E}^{PV_t} zodpovedajúcu stratégiám $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{C}^{PV_t}$ z nej následne dostaneme pomocou jednoduchšej transformácie.

Uvažujme najprv investovanie celého majetku $Y_t = y$ do rizikových aktív (t. j. $\theta^1 + \theta^2 = 1$). Podobne ako v Markowitzovej úlohe, rôznymi pomermi investovania do každého z rizikových aktív môžeme (za predpokladu rôznych driftov a nenulových volatilit rizikových aktív) na grafe s osami σ_P, μ_P dosiahnuť časť hyperboly.

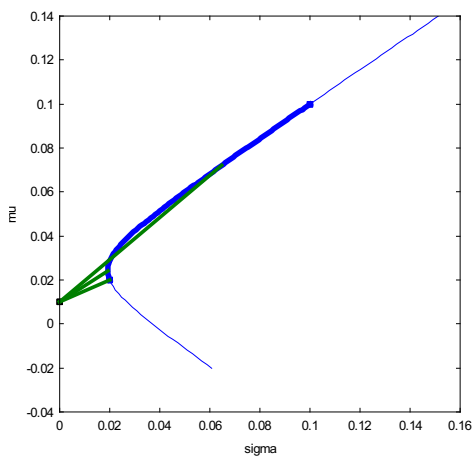
Kombináciou bodov (σ_P, μ_P) spomenutej časti hyperboly s bezrizikovým aktívom môžeme dosiahnuť ľubovoľný bod patriaci niektorej spojnici (úsečke) bezrizikového aktíva s bodmi hyperboly (na analogickej vlastnosti je založená *Veta o jednom fonde*, uvedená v [10], časť 2.2). Situácia je znázornená na Obr. 4.1 (na obrázku sú zobrazené tri takéto spojnice hrubými zelenými úsečkami).

Podobne ako v Markowitzovej úlohe spojenej s bezrizikovým aktívom, pri určovaní efektívnej hranice \mathcal{E}^0 bude mať významnú úlohu „dotykové portfólio“, ktorému zodpovedá dotykový bod dotyčnice k hyperbole cez bezrizikové aktívum (dotykové portfólio má kľúčovú úlohu vo *Vete o jednom fonde* aj v *CAPM modeli*, uvedených v [10], časti 2.2 a 2.3). Dá sa ukázať, že pomery θ_D^1, θ_D^2 investované do rizikových aktív v dotykovom portfóliu sú dané vzťahmi

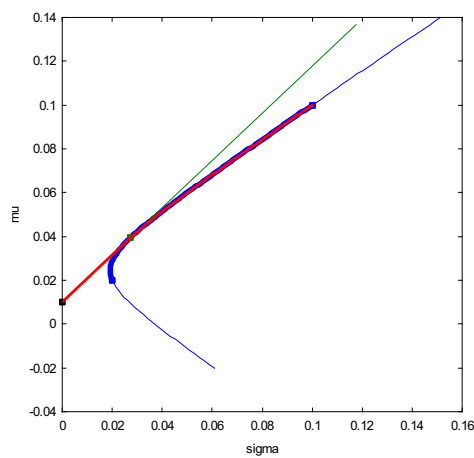
$$\begin{aligned} c_1 \theta_D^1 + c_2 \theta_D^2 &= 0 \\ \theta_D^1 + \theta_D^2 &= 1, \end{aligned}$$

kde

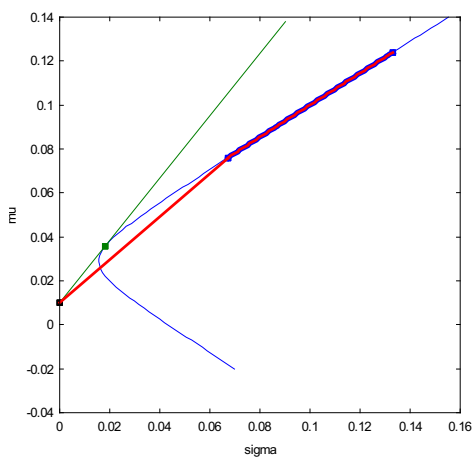
$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\sigma_1^2}{\mu_1 - r} - \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\mu_2 - r} \\ c_2 &= \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\mu_1 - r} - \frac{\sigma_2^2}{\mu_2 - r}. \end{aligned}$$



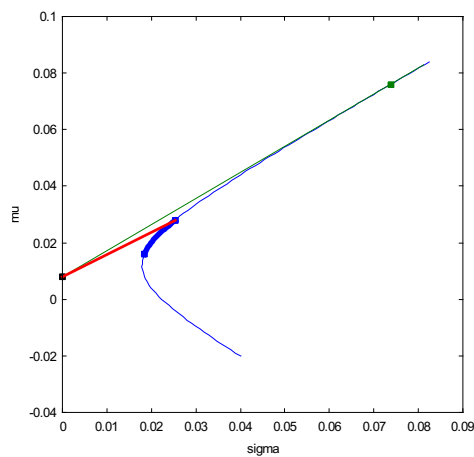
Obr. 4.1: Spojnice bezrizikového aktíva s bodmi hrubej modrej časti hyperboly.



Obr. 4.2: Možnosť (1), dotykové portfólio je prípustné.



Obr. 4.3: Možnosť (2), druhé rizikové aktívum je v krátkej pozícii.



Obr. 4.4: Možnosť (3), prvé rizikové aktívum je v krátkej pozícii.

Na Obr. 4.2, Obr. 4.3 a Obr. 4.4 sú prípustné kombinácie rizikových aktív znázornené hrubou modrou čiarou, dotyčnica k hyperbole zelenou čiarou a efektívna hranica \mathcal{E}^0 červenou čiarou.

Bez ujmy na všeobecnosti, nech prvé rizikové aktívum je rizikové aktívum s nižším driftom. Za predpokladu, že druhé rizikové aktívum má vyšší drift ako bezrizikové aktívum, pre efektívnu hranicu \mathcal{E}^0 sú tri základné možnosti:

(1) Dotykové portfólio je prípustné, t. j. nie sú v ňom krátke pozície rizikových aktív (Obr. 4.2). Efektívnou hranicou \mathcal{E}^0 je zjednotenie

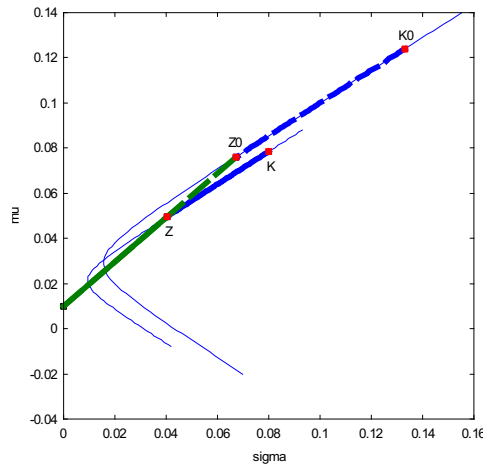
úsečky a časti hyperboly, pričom hyperbola je na úsečku „hladko“ (t. j. diferencovateľne) napojená.

(2) Dotykové portfólio je „pod“ rizikovými aktívami, t. j. druhé rizikové aktívum je v krátkej pozícii (Obr. 4.3). Efektívnou hranicou \mathcal{E}^0 je zjednotenie úsečky a časti hyperboly, pričom hyperbola už na úsečku nie je diferencovateľne napojená.

(3) Dotykové portfólio je „nad“ rizikovými aktívami, t. j. prvé rizikové aktívum je v krátkej pozícii (Obr. 4.4). Do tohoto prípadu patria aj všetky také, v ktorých je vrchol hyperboly pod bezrizikovým aktívom. Efektívnou hranicou \mathcal{E}^0 je úsečka.

Tým sme určili efektívnu hranicu \mathcal{E}^0 zodpovedajúcu stratégiám z množiny

$$\mathcal{E}^0 = \{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d ; \theta^1 \geq 0 \wedge \theta^2 \geq 0 \wedge \theta^1 + \theta^2 \leq 1 \}.$$



Obr. 4.5: Efektívna hranica \mathcal{E}^0 znázornená hrubými prerušovanými čiarami (okrem spoločného úseku, na ktorom je neprerušovaná zelená čiara) sa spomenutou rovnoľahlosťou zobrazí na efektívnu hranicu \mathcal{E}^{PV_t} znázornenú hrubými súvislými čiarami. Na obrázku sú zvýraznené zlomové a koncové body týchto efektívnych hraníc.

Efektívna hranica \mathcal{E}^{PV_t} zodpovedajúca stratégiám z množiny

$$\mathcal{E}^{PV_t} = \left\{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d ; \theta^1 \geq 0 \wedge \theta^2 \geq 0 \wedge \theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y} \right\}$$

sa zmení v tom, že do akcií už nemôžeme investovať 100% majetku $Y_t = y$, ale najviac čiastku $\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)$. Na obrázkoch sa to prejaví tak,

že z úsečky, ktorá spája bezrizikové aktívum s čisto rizikovým portfóliom budú prípustné iba body, ktoré majú v rizikových aktívach čiastku najviac $\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)$. Každá takáto úsečka sa tak skrúti na $\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)$ -násobok svojej dĺžky.

Presnejšie vyjadrené, spomenuté úsečky sa zobrazia rovnoľahlosťou so stredom v bode zodpovedajúcom bezrizikovému aktívu a koeficientom $\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)$. Dôsledkom je, že aj efektívnu hranicu \mathcal{E}^{PV_t} získame zobrazením efektívnej hranice \mathcal{E}^0 uvedenou rovnoľahlosťou.

Príklad pre $1 - \frac{PV_t}{y} = 0.6$ je na Obr. 4.5.

Rovnoľahlosť nemení tvar (iba rozmery) efektívnej hranice, preto všetky možné tvary efektívnych hraníc \mathcal{E}^{PV_t} sú obsiahnuté v možnostiach (1), (2) a (3) na Obr. 4.2, Obr. 4.3 a Obr. 4.4.

Efektívna hranica \mathcal{E}^{PV_t} v tvare zodpovedajúcom možnosti (3) obsahuje iba kombinácie bezrizikového aktíva s jediným rizikovým aktívom. Na základe toho sa dá vidieť, že takáto úloha má analogické riešenie ako jednorozmerná úloha ($d = 1$) s parametrami μ, σ zodpovedajúcimi jedinému používanému rizikovému aktívu.

Tvary efektívnych hraníc z možností (1) a (2) sa dajú zahrnúť do jednej možnosti: efektívnou hranicou je úsečka a na ňu spojitou napojená časť hyperboly. Pritom platí, že s rastúcim driftom je na efektívnej hranici rastúca volatilita a sklon efektívnej hranice (t. j. $\frac{\partial \mu_P}{\partial \sigma_P}$) je s rastúcou volatilitou nerastúci.

Bodom prechodu z úsečky do paraboly je v možnosti (1) bod zodpovedajúci dotykovému portfóliu, v možnosti (2) je ním bod zodpovedajúci rizikovému aktívum s menším driftom. V oboch prípadoch, tento bod budeme nazývať zlomovým bodom. V prípade efektívnej hranice \mathcal{E}^0 budeme zlomový bod označovať Z_0 , jeho drift μ_{Z_0} a jeho volatilitu σ_{Z_0} . V prípade efektívnej hranice \mathcal{E}^{PV_t} budeme zlomový bod označovať Z , jeho drift μ_Z a jeho volatilitu σ_Z . Opačný koniec časti hyperboly, ktorý v oboch prípadoch zodpovedá rizikovému aktívu s vyšším driftom, budeme nazývať koncovým bodom. V prípade efektívnej hranice \mathcal{E}^0 budeme koncový bod označovať K_0 , jeho drift μ_{K_0} a jeho volatilitu σ_{K_0} . V prípade efektívnej hranice \mathcal{E}^{PV_t} budeme koncový bod označovať K , jeho drift μ_K a jeho volatilitu σ_K .

Na Obr. 4.5 sú body Z_0, K_0, Z a K zvýraznené červenou farbou.

4.3 Maximalizácia na efektívnej hranici

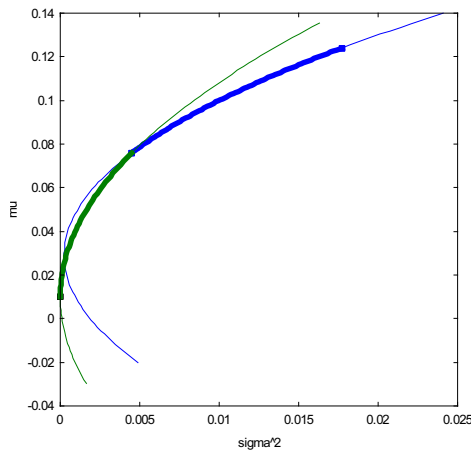
Podľa vzťahu (4.2), s využitím zúženia množiny E^{PV_t} na efektívnu hranicu, našou úlohou je na efektívnej hranici \mathcal{E}^{PV_t} bodov (μ_P, σ_P) maximalizovať výraz $\mu_P - \frac{1}{2}\psi\sigma_P^2$. Opäť pomôže geometrický prístup, avšak

aby bola účelová funkcia lineárna, na vodorovnej osi obrázkov bude namiesto volatility σ_P hodnota σ_P^2 . Namiesto efektívnej hranice \mathcal{E}^{PV_t} bodov (μ_P, σ_P) nás preto bude zaujímať efektívna hranica $\mathcal{E}_2^{PV_t}$ bodov (μ_P, σ_P^2) . Po umocnení vodorovnej osi sa z úsečky aj časti hyperboly stanú časti paraboly (Obr. 4.6).

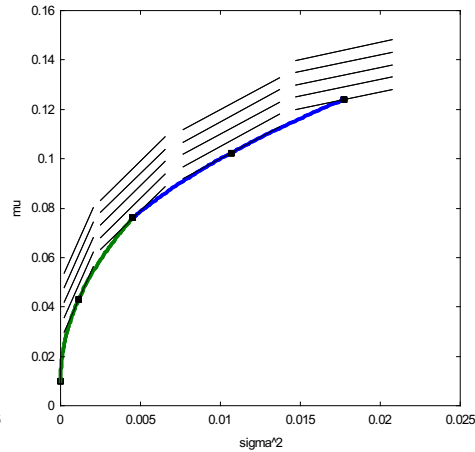
Na efektívnej hranici $\mathcal{E}_2^{PV_t}$ bodov (μ_P, σ_P^2) máme maximalizovať výraz

$$\mu_P - \frac{1}{2}\psi\sigma_P^2,$$

ktorý je lineárnou funkciou premenných μ_P, σ_P^2 . Maximalizácia lineárnej funkcie geometricky zodpovedá nájdeniu priamky (izolínie, t. j. „vrstevnice“ účelovej funkcie) s daným sklonom, ktorá prechádza množinou prípustných riešení a je čo najviac posunutá v smere maximalizácie. Pre efektívnu hranicu typu (2), základné štyri možnosti pre výsledok maximalizácie sú zobrazené na Obr. 4.7.



Obr. 4.6: Efektívnou hranicou $\mathcal{E}_2^{PV_t}$ pre (μ_P, σ_P^2) budú dve na seba spojitاً napojené časti parabol (zobrazené hrubými čiarami).



Obr. 4.7: Maximalizácia lineárnej funkcie na efektívnej hranici $\mathcal{E}_2^{PV_t}$ typu (2) (dotykové portfólio je „pod“ rizikovými aktívami) má štyri základné možnosti.

Množina \mathcal{C}^{PV_t} v sebe zahŕňa tri ohraničenia:

$$\theta^1 \geq 0, \quad \theta^2 \geq 0 \quad \text{a} \quad \theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y}.$$

Na Obr. 4.7, ohraničenie $\theta^1 \geq 0$ je aktívne vtedy, keď optimálne riešenie leží na koncovom (t. j. najvyššom) bode hrubej modrej časti hyperboly. Ohraničenie $\theta^2 \geq 0$ je aktívne vtedy, keď optimálne riešenie leží na zelenej časti hyperboly spájajúcej prvé rizikové aktívum s bezrizikovým.

Ohraničenie $\theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y}$ je aktívne vtedy, keď optimálne riešenie leží na modrej hyperbole.

Každá zo štyroch možností na Obr. 4.7 zodpovedá situácii s rôznymi aktívnymi ohraničeniami. V prvej možnosti (zľava) je jediným aktívnym ohraničením $\theta^2 \geq 0$. V druhej možnosti sú aktívne ohraničenia

$$\theta^2 \geq 0 \text{ a } \theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y},$$

vtedy sa do prvého rizikového aktíva investuje maximálna prípustná čiastka $1 - \frac{PV_t}{y}$. V tretej možnosti je jediným aktívnym ohraničením

$$\theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y}.$$

V štvrtej možnosti sú aktívne ohraničenia

$$\theta^1 \geq 0 \text{ a } \theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y},$$

vtedy sa do druhého rizikového aktíva investuje maximálna prípustná čiastka $1 - \frac{PV_t}{y}$.

Pre efektívnu hranicu typu (2), situácia je podobná, avšak druhá možnosť (maximálna prípustná čiastka do menej rizikového aktíva) nenastáva. V prvej možnosti nie je aktívne žiadne z ohraničení, ide o voľný extrém. Ostatné možnosti majú ohľadom aktívnych ohraničení rovnaké vlastnosti.

Z Obr. 4.7 vidno, že prvá možnosť (voľný extrém) nastáva pri najväčšom sklone izolínií účelovej funkcie — t. j. pri najväčšej hodnote ψ . Pri menšej hodnote ψ nastáva druhá možnosť, pri ešte menšej tretia a pri najmenšej štvrtá možnosť.

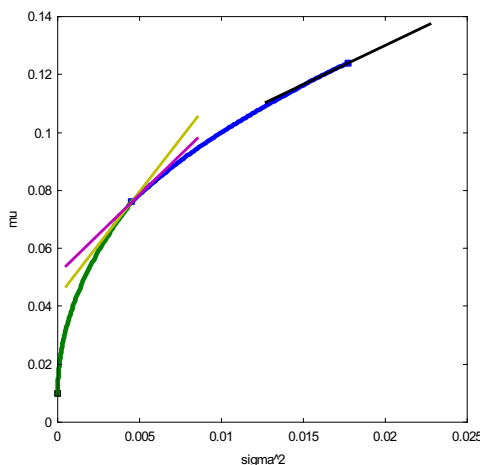
Presnejšie, spomenuté možnosti nastávajú podľa toho, do ktorého z intervalov patrí hodnota $\psi/2$ (sklon izolínií účelovej funkcie), pričom hranice intervalov sú podľa geometrického pohľadu určené deriváciou $\frac{d\mu_P}{d\sigma_P^2}$ prvej, resp. druhej paraboly efektívnej hranice $\mathcal{E}_2^{PV_t}$ v zlomovom bode (σ_Z^2, μ_Z) , resp. v koncovom bode (σ_Z^2, μ_Z) . Hodnoty derivácií sú určované v nasledujúcom texte.

4.4 Hodnoty dôležitých derivácií parabol

K určeniu, ktoré z ohraničení

$$\theta^1 \geq 0, \quad \theta^2 \geq 0 \text{ a } \theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y}$$

sú aktívne, sú podľa predchádzajúcej časti dôležité derivácie $\frac{d\mu_P}{d\sigma_P^2}$ prvej, resp. druhej paraboly efektívnej hranice $\mathcal{E}_2^{PV_t}$ v zlomovom bode (σ_Z^2, μ_Z) , resp. v koncovom bode (σ_Z^2, μ_Z) . Zodpovedajúce dotyčnice sú zobrazené na Obr. 4.8.



Obr. 4.8: Dotyčnice v zlomovom a koncovom bode.

Prvá, t. j. zelená parabola zodpovedá kombinovaniu zlomového bodu (zodpovedajúce portfólio obsahuje s váhou $\frac{PV_t}{y}$ aj bezrizikové aktívum) s bezrizikovým aktívom. Môžeme ju parametrizovať podľa váhy bezrizikového aktíva, ktorú označíme θ^0 :

$$\mu_P = \theta^0 r + (1 - \theta^0) \mu_Z$$

$$\sigma_P^2 = (1 - \theta^0)^2 \sigma_Z^2.$$

Hodnota derivácie $\frac{d\mu_P}{d\sigma_P^2}$ je rovná podielu derivácií premenných μ_P, σ_P^2 podľa parametra θ^0 :

$$\frac{d\mu_P}{d\sigma_P^2} = \frac{d\mu_P/d\theta^0}{d\sigma_P^2/d\theta^0} = \frac{r - \mu_Z}{-2\sigma_Z^2(1 - \theta^0)}.$$

Zlomovému bodu (σ_Z^2, μ_Z) zodpovedá hodnota $\theta^0 = 0$ (zlomový bod Z má váhu 1 a bezrizikové aktívum váhu 0). Hodnota derivácie $\frac{d\mu_P}{d\sigma_P^2}$ prvej paraboly v zlomovom bode (na Obr. 4.8 zodpovedá derivácii sklon tmavožltej dotyčnice) je rovná

$$D_1 = \frac{d\mu_P}{d\sigma_P^2}(\mu_Z, \sigma_Z^2) = \frac{\mu_Z - r}{2\sigma_Z^2}.$$

Druhá, t. j. modrá parabola zodpovedá aktívnemu ohraničeniu

$$\theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y}.$$

Môžeme ju nasledovne parametrizovať podľa váhy θ^1 prvého rizikového portfólia:

$$\mu_P = \frac{PV_t}{y}r + \theta^1\mu_1 + \left(1 - \frac{PV_t}{y} - \theta^1\right)\mu_2$$

$$\sigma_P^2 = (\theta^1)^2\sigma_1^2 + \left(1 - \frac{PV_t}{y} - \theta^1\right)^2\sigma_2^2 + 2\theta^1\left(1 - \frac{PV_t}{y} - \theta^1\right)\rho\sigma_1\sigma_2.$$

Hodnota derivácie $\frac{d\mu_P}{d\sigma_P^2}$ je rovná podielu derivácií premenných μ_P , σ_P^2 podľa parametra θ^1 :

$$\frac{d\mu_P}{d\sigma_P^2} = \frac{d\mu_P/d\theta^1}{d\sigma_P^2/d\theta^1} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)\theta^1 + 2\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)}.$$

Derivácia druhej paraboly v zlomovom bode je v prípade efektívnej hranice typu (1) rovná hodnote D_1 , vypočítame ju preto už iba pre efektívnu hranicu typu (2). Pri efektívnej hranici typu (2), zlomovému bodu zodpovedá hodnota $\theta^1 = 1 - \frac{PV_t}{y}$ (maximálna čiastka do prvého rizikového aktíva, ktoré je zlomovým bodom).

Pri oboch typoch efektívnej hranice, koncovému bodu zodpovedá hodnota $\theta^1 = 0$ (maximálna čiastka do druhého rizikového aktíva, ktoré je koncovým bodom).

Hodnota derivácie $\frac{d\mu_P}{d\sigma_P^2}$ druhej paraboly v zlomovom bode (na Obr. 4.8 zodpovedá derivácii sklon purpurovej dotyčnice) v prípade efektívnej hranice typu (2) je rovná

$$D_2 = \frac{d\mu_P}{d\sigma_P^2}(\mu_Z, \sigma_Z^2) = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)}.$$

Hodnota derivácie $\frac{d\mu_P}{d\sigma_P^2}$ druhej paraboly v koncovom bode (na Obr. 4.8 zodpovedá derivácii sklon čiernej dotyčnice) je rovná

$$D_3 = \frac{d\mu_P}{d\sigma_P^2}(\mu_K, \sigma_K^2) = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2)}.$$

V súlade s Obr. 4.8, pre efektívnu hranicu typov (1) a (2) môžeme nasledovným spôsobom určiť, ktoré z ohraničení pre optimálnu stratégiu sú aktívne.

Ak hodnota $\psi/2$ (ktorá zodpovedá sklonu izolínií účelovej funkcie $\mu_P - \frac{1}{2}\psi\sigma_P^2$) patrí intervalu (D_1, ∞) , tak optimálne riešenie leží na zelenej časti paraboly. Optimálnou stratégiou je investovať do optimálnej kombinácie bezrizikového aktíva s portfóliom zodpovedajúcim zlomovému bodu Z . V prípade efektívnej hranice typu (1) nie je aktívne žiadne z ohraničení. V prípade efektívnej hranice typu (2) je jediným aktívnym ohraničením

$$\theta^2 \geq 0.$$

Ak hodnota $\psi/2$ patrí intervalu (D_2, D_1) , tak optimálnou stratégiou je investovať do portfólia zodpovedajúceho zlomovému bodu Z . Tento prípad nastáva iba pri efektívnej hranici typu (2) a vtedy fond optimálne investuje do prvého rizikového aktíva maximálnu čiastku $1 - \frac{PV_t}{y}$. Aktívnymi ohraničeniami sú

$$\theta^2 \geq 0 \text{ a } \theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y}.$$

Ak hodnota $\psi/2$ patrí intervalu (D_3, D_2) , tak optimálne riešenie leží na modrej časti paraboly. Jediným aktívnym ohraničením je

$$\theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y}.$$

Ak hodnota $\psi/2$ patrí intervalu $(0, D_3)$, tak optimálnym riešením je koncový bod. Vtedy fond optimálne investuje do druhého rizikového aktíva maximálnu čiastku $1 - \frac{PV_t}{y}$. Aktívnymi ohraničeniami sú

$$\theta^1 \geq 0 \text{ a } \theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y}.$$

4.5 Rovnica pre relatívnu rizikovú averziu

Na základe predchádzajúceho textu, pre optimálnu stratégiu $\hat{\theta}_t(y)$ platí:

Ak $\psi(t, y)/2$ patrí intervalu $(0, D_3)$, tak do druhého rizikového aktíva investujeme maximálnu čiastku $1 - \frac{PV_t}{y}$, t. j.

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{PV_t}{y} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Investovanie maximálnej čiastky $1 - \frac{PV_t}{y}$ do druhého rizikového aktíva je ekvivalentné s prípadom $\hat{\theta} = 1 - \frac{PV_t}{y}$ v jednorozmernej úlohe s parametrami $\mu = \mu_2, \sigma = \sigma_2$. Uplatnenie vzťahu (4.3) v Bellmanovej rovnici

(2.10) a následná transformácia na rovnicu pre relatívnu rizikovú averziu ψ má preto rovnaký výsledok ako rovnica (3.11) s parametrami $\mu = \mu_2, \sigma = \sigma_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} = & -\frac{PV_t}{y} \left[(\mu_2 - r) - \sigma_2^2 \left(\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \psi - \frac{PV_t}{y} \right) \right] \psi - \\ & - \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \mu_2 + r \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \\ & + \sigma_2^2 \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) (\psi - 1) - 2 \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial \psi}{\partial y} - \\ & - \frac{\sigma_2^2}{2} \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)^2 y^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Ak $\psi(t, y)/2$ patrí intervalu (D_2, D_1) , tak do prvého rizikového aktíva investujeme maximálnu čiastku $1 - \frac{PV_t}{y}$, t. j.

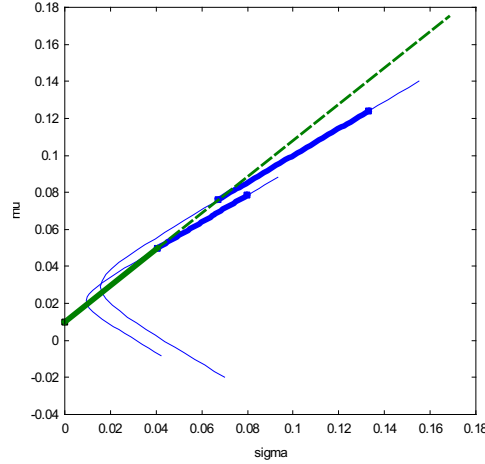
$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{PV_t}{y} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Podobne ako v predchádzajúcom prípade, uplatnenie vzťahu (4.4) v Bellmanovej rovnici (2.10) a následná transformácia na rovnicu pre ψ má rovnaký výsledok ako rovnica (3.11) s parametrami $\mu = \mu_1, \sigma = \sigma_1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} = & -\frac{PV_t}{y} \left[(\mu_1 - r) - \sigma_1^2 \left(\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \psi - \frac{PV_t}{y} \right) \right] \psi - \\ & - \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \mu_1 + r \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \\ & + \sigma_1^2 \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) (\psi - 1) - 2 \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial \psi}{\partial y} - \\ & - \frac{\sigma_1^2}{2} \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)^2 y^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Ak $\psi(t, y)/2$ patrí intervalu (D_1, ∞) , tak optimálne portfólio je optimálnou kombináciou bezrizikového aktíva s portfóliom zodpovedajúcim zlomovému bodu Z . Pritom ohraňenie $\theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y}$ nie je aktívne. Optimálne portfólio preto môžeme nájsť ako voľný extrém na zelenej polpriamke z Obr. 4.9.

Zelená polpriamka z Obr. 4.9 je spojnicou bodu zodpovedajúceho bezrizikovému aktívu so zlomovým bodom Z efektívnej hranice \mathcal{E}^{PV_t} , resp. so zlomovým bodom Z_0 efektívnej hranice \mathcal{E}^0 . Na nájdenie optimálneho portfólia využijeme bod Z_0 , ktorého poloha nezávisí od hodnoty $\frac{PV_t}{y}$.



Obr. 4.9: Namiesto hľadania viazaného extrémumu na hrubej zelenej úsečke (ktorej koniec zodpovedá zlomovému bodu Z efektívnej hranice \mathcal{E}^{PV_t}) môžeme hľadať voľný extrém na zelenej polpriamke (jej doplnená časť je zobrazená prerušovanou čiarou), ktorá prechádza aj zlomovým bodom Z_0 efektívnej hranice \mathcal{E}^0 .

Váhy rizikových aktív v portfóliu zodpovedajúcejmu bodu Z_0 označme $\theta_{Z_0}^1$ a $\theta_{Z_0}^2$. Ak váhu prislúchajúcu portfóliu zodpovedajúceho bodu Z_0 označíme w , voľným extrémom pre kombináciu s bezrizikovým portfóliom je

$$\hat{w} = \frac{\mu_{Z_0} - r}{\sigma_{Z_0}^2 \psi}.$$

Zodpovedajúcou optimálnou stratégiou je

$$\hat{\theta} = \hat{w} \begin{pmatrix} \theta_{Z_0}^1 \\ \theta_{Z_0}^2 \end{pmatrix}.$$

Kombinovanie portfólia zodpovedajúceho bodu Z_0 s bezrizikovým aktívom (pričom ohraničenie $\theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y}$ nie je aktívne) je ekvivalentné s prípadom $\hat{\theta} = \frac{\mu - r}{\psi \sigma^2}$ v jednorozmernej úlohe s parametrami $\mu = \mu_{Z_0}$, $\sigma = \sigma_{Z_0}$. Uplatnenie vzťahu (4.3) v Bellmanovej rovnici (2.10) a následná transformácia na rovnicu pre ψ má preto rovnaký výsledok ako rovnica (3.8) s parametrami $\mu = \mu_{Z_0}$, $\sigma = \sigma_{Z_0}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -ry \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_{Z_0} - r}{\sigma_{Z_0}} \right)^2 \left[\frac{2y}{\psi^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2y^2}{\psi^3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{y^2}{\psi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right].$$

Nakoniec rozoberieme najkomplikovanejšiu možnosť, v ktorej $\psi(t, y)/2$ patrí intervalu (D_3, D_2) . Využijeme analogický prístup ako Z. Macová

a D. Ševčovič v článku [3]. V nasledujúcich úpravách vznikajú veľmi podobné výrazy ako v ich článku.

V prípade $\psi(t, y) \in (D_3, D_2)$, jediným aktívnym ohraničením je

$$\theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y}.$$

Platí teda $\theta^2 = 1 - \frac{PV_t}{y} - \theta^1$, maximalizáciu (4.1)

$$\hat{\theta}_t(y) \in \arg \max_{\theta \in \mathcal{L}^{PV_t}} \left[r + \theta^T (\mu - r) - \frac{1}{2} \psi(t, y) (\theta^T \sigma \sigma^T \theta) \right]$$

preto môžeme previesť na maximalizáciu cez θ^1 .

Eliminovaním premennej θ^2 z výrazov

$$\theta^T (\mu - r) \quad \text{a} \quad \theta^T \sigma \sigma^T \theta = \theta^T \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \theta$$

dostaneme

$$\theta^T (\mu - r) = \Delta \mu \cdot \theta^1 + \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) (\mu_2 - r) \quad (4.5)$$

a

$$\theta^T \sigma \sigma^T \theta = a (\theta^1)^2 - 2b \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) \theta^1 + \sigma_2^2 \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right)^2, \quad (4.6)$$

kde

$$\begin{aligned} \Delta \mu &= \mu_1 - \mu_2 < 0 \\ a &= \sigma_1^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 > 0 \\ b &= \sigma_2^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2. \end{aligned}$$

Z maximalizácie (4.1) tak dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_t^1(y) \in \arg \max_{\theta^1 \in [0, 1 - \frac{PV_t}{y}]} & \left[r + \Delta \mu \cdot \theta^1 + \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) (\mu_2 - r) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \psi(t, y) \left(a (\theta^1)^2 - 2b \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) \theta^1 + \sigma_2^2 \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Voľný a zároveň aj viazaný extrém nastáva v bode

$$\hat{\theta}^1 = \frac{\Delta \mu}{a} \frac{1}{\psi} + \frac{b}{a} \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right). \quad (4.7)$$

Výrazy

$$\boldsymbol{\theta}^T(\boldsymbol{\mu} - r) \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^T \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}$$

v bode $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ môžeme s využitím vzťahov (4.5), (4.6) a (4.7) prepísať na

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^T(\boldsymbol{\mu} - r) = \frac{(\Delta\mu)^2}{a} \frac{1}{\psi} + \left(\mu_2 + \frac{b}{a} \Delta\mu - r \right) \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right)$$

a

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{(\Delta\mu)^2}{a} \frac{1}{\psi^2} + \left(\sigma_2^2 - \frac{b^2}{a} \right) \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right)^2,$$

pričom konštantu

$$\sigma_2^2 - \frac{b^2}{a} = \frac{(\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)\sigma_2^2 - (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)^2}{a} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho^2)}{a} > 0$$

budeme označovať s^2 .

S využitím toho, Bellmanovu rovnicu (2.10) môžeme prepísať na

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{(\Delta\mu)^2}{a} \frac{y}{\psi} + \left(\mu_2 + \frac{b}{a} \Delta\mu \right) \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) y + rPV_t \right) \frac{\partial V}{\partial y} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{(\Delta\mu)^2}{a} \frac{y^2}{\psi^2} + s^2 \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right)^2 y^2 \right) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Pretože

$$\psi = -y \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}{\frac{\partial V}{\partial y}},$$

platí

$$\frac{y}{\psi} \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2}{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}} \quad \text{a} \quad \frac{y^2}{\psi^2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2}{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}.$$

Uplatnením toho v rovnici (4.8) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\left(\mu_2 + \frac{b}{a} \Delta\mu \right) (y - PV_t) + rPV_t \right) \frac{\partial V}{\partial y} + \\ & + \frac{s^2}{2} (y - PV_t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{(\Delta\mu)^2}{2a} \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2}{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}. \end{aligned}$$

Dostali sme tak rovnicu, ktorú môžeme zapísať ako

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t}(t, y) + g(t, y) \frac{\partial V}{\partial y}(t, y),$$

kde

$$\begin{aligned} g(t, y) &= \left(\mu_2 + \frac{b}{a} \Delta\mu \right) (y - PV_t) + rPV_t + \frac{s^2}{2} (y - PV_t)^2 \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}{\frac{\partial V}{\partial y}} - \frac{(\Delta\mu)^2}{2a} \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}} = \\ &= \left(\mu_2 + \frac{b}{a} \Delta\mu \right) (y - PV_t) + rPV_t - \frac{s^2}{2} (y - PV_t)^2 \frac{\psi(t, y)}{y} + \frac{(\Delta\mu)^2}{2a} \frac{y}{\psi(t, y)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Rovnako ako pri odvodzovaní rovníc pre ψ pri jednorozmernej úlohe môžeme rovnicu v takomto tvare previesť na rovnicu (3.7)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) = y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y}(t, y) - \frac{\psi(t, y)}{y} g(t, y) \right).$$

Pri použití funkcie $g(t, y)$ zo vzťahu (4.9), po uplatnení derivácii dostaneme z rovnice (3.7) rovnicu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{PV_t}{y} \left[\left(\mu_2 + \frac{b}{a} \Delta\mu - r \right) - s^2 \left(\left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) \psi - \frac{PV_t}{y} \right) \right] \psi - \\ &\quad - \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) \left(\mu_2 + \frac{b}{a} \Delta\mu \right) + \frac{(\Delta\mu)^2}{a} \frac{1}{\psi^2} + r \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \\ &\quad + s^2 \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) (\psi - 1) - 2 \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \\ &\quad + \frac{(\Delta\mu)^2}{a} \frac{y^2}{\psi^3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \left[\frac{(\Delta\mu)^2}{a} \frac{1}{\psi^2} + \frac{s^2}{2} \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right)^2 \right] y^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

ktorá je hľadanou rovnicou pre ψ v prípade $\psi(t, y) \in (D_3, D_2)$.

Pre dvojrozmernú úlohu sme tak dostali nasledujúcu parciálnu diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = f \left(t, y, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad (4.11)$$

kde v prípade $\frac{\psi}{2} \in (0, D_3)$ je funkcia f je definovaná ako

$$\begin{aligned} f\left(t, y, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = & -\frac{PV_t}{y} \left[(\mu_2 - r) - \sigma_2^2 \left(\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \psi - \frac{PV_t}{y} \right) \right] \psi - \\ & - \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \mu_2 + r \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial\psi}{\partial y} + \\ & + \sigma_2^2 \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) (\psi - 1) - 2 \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial\psi}{\partial y} - \\ & - \frac{\sigma_2^2}{2} \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)^2 y^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

v prípade $\frac{\psi}{2} \in (D_3, D_2)$ (pri efektívnej hranici typu (1) počítame D_2 podľa vzťahu pre D_1) je definovaná ako

$$\begin{aligned} f\left(t, y, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = & -\frac{PV_t}{y} \left[\left(\mu_2 + \frac{b}{a} \Delta\mu - r\right) - s^2 \left(\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \psi - \frac{PV_t}{y} \right) \right] \psi - \\ & - \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \left(\mu_2 + \frac{b}{a} \Delta\mu\right) + \frac{(\Delta\mu)^2}{a} \frac{1}{\psi^2} + r \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial\psi}{\partial y} + \\ & + s^2 \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) (\psi - 1) - 2 \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial\psi}{\partial y} + \\ & + \frac{(\Delta\mu)^2}{a} \frac{y^2}{\psi^3} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 - \left[\frac{(\Delta\mu)^2}{a} \frac{1}{\psi^2} + \frac{s^2}{2} \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)^2 \right] y^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

v prípade $\frac{\psi}{2} \in (D_2, D_1)$ (ktorý nastáva iba pri efektívnej hranici typu (2)) je definovaná ako

$$\begin{aligned} f\left(t, y, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = & -\frac{PV_t}{y} \left[(\mu_1 - r) - \sigma_1^2 \left(\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \psi - \frac{PV_t}{y} \right) \right] \psi - \\ & - \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \mu_1 + r \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial\psi}{\partial y} + \\ & + \sigma_1^2 \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right) (\psi - 1) - 2 \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial\psi}{\partial y} - \\ & - \frac{\sigma_1^2}{2} \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)^2 y^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \end{aligned}$$

a v prípade $\frac{\psi}{2} \in (D_1, \infty)$ je definovaná ako

$$f\left(t, y, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = -ry \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_{z_0} - r}{\sigma_{z_0}} \right)^2 \left[\frac{2y}{\psi^2} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{2y^2}{\psi^3} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \frac{y^2}{\psi^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right].$$

Rovnica (4.11) platí na oblasti $0 \leq t \leq T$, $PV_t \leq y \leq \infty$. Z koncovej podmienky (2.11) pre hodnotovú funkciu dostaneme pre relatívnu rizikovú averziu koncovú podmienku

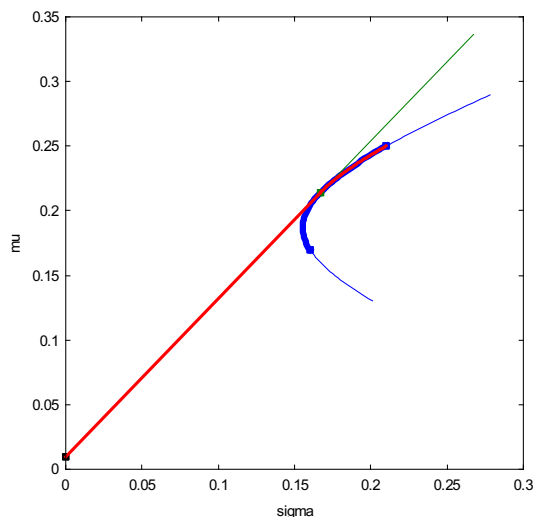
$$\psi(T, y) = 1 - p.$$

Rovnica vznikla transformáciou dvojrozmerného prípadu rovnice (2.10), preto pre hranicu $y = PV_t$ nie je potrebná okrajová podmienka a koncovou podmienkou je riešenie rovnice jednoznačne určené.

4.6 Numerické výsledky

Hodnoty parametrov $\mu_1 = 0.17$, $\sigma_1 = 0.16$, $\mu_2 = 0.25$, $\sigma_2 = 0.21$, $\rho = 0.56$ boli nakalibrované podľa historických cien indexu S&P 500 (prvé rizikové aktívum) prevedených na eurá (pri zohľadňovanom meniacom sa kurze) a podľa historických cien indexu DAX (druhé rizikové aktívum). Boli použité historické ceny sú z obdobia 1. 4. 2009–30. 6. 2011, v ktorom sa výnosy cien oboch indexov správajú ustálené. Ďalšie parametre boli nastavené na $r = 0.01$, $T = 10$, $c = 0.1$. Parameter p bol nastavený prvýkrát na $1 - p = 6$ a druhýkrát na $1 - p = 9$, čím vznikli dve typovo rozdielne situácie.

Efektívna hranica \mathcal{E}^0 zodpovedajúca parametrom aktív je na Obr. 4.10. Podľa časti 4.2, ide o efektívnu hranicu typu (1) (dotykové portfólio je prípustné).



Obr. 4.10: Efektívna hranica \mathcal{E}^0 zodpovedajúca parametrom aktív je zobrazená červenou čiarou.

Na numerické výpočty bola použitá podobná numerická schéma ako pre jednorozmernú úlohu (časť 3.3). Pri nastavení parametrov diskretizácie $m = 2500$ (diskretizácia času t), $n = 100$ (diskretizácia y), $y_{\min} = 0.1$, $y_{\max} = 20.1$, numericky vypočítané hodnoty ψ pre začiatočnú časovú vrstvu $t = 0$ sú zobrazené na Obr. 4.11 a Obr. 4.12.

V oboch prípadoch nastavenia parametra p nastáva úsek, na ktorom je pre optimálnu stratégiu jediným aktívnym ohraničením

$$\theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y}. \quad (4.12)$$

Na tomto úseku je hodnota ψ nezanedbateľne zmenená oproti $1 - p$ a zároveň optimálna stratégia daná vzťahom (4.7)

$$\hat{\theta}^1 = \frac{\Delta\mu}{a} \frac{1}{\psi} + \frac{b}{a} \left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)$$

(pre druhú zložku platí $\hat{\theta}^2 = 1 - \frac{PV_t}{y} - \hat{\theta}^1$) závisí od hodnoty ψ .

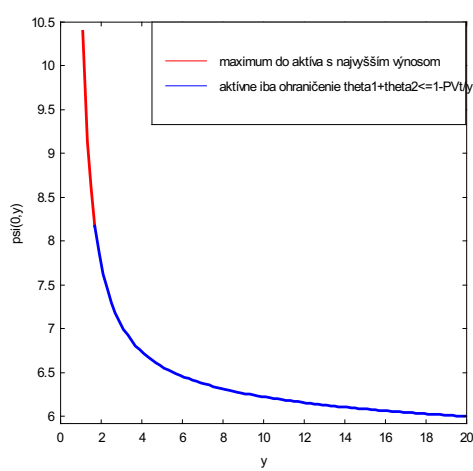
Aproximatívna stratégia $\tilde{\theta}$ z časti 2.4

$$\tilde{\theta} \in \arg \max_{\theta \in \mathcal{C}^{PV_t}} \left[\theta^T (\mu - r) - \frac{1}{2} (1 - p) (\theta^T \sigma \sigma^T \theta) \right]$$

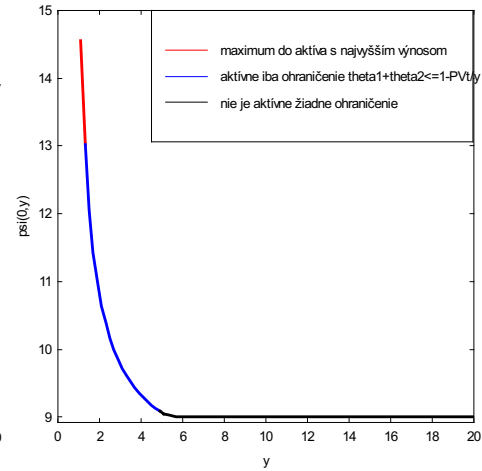
bude preto na tomto úseku od optimálnej stratégie $\hat{\theta}$ nezanedbateľne vzdialená. To môžeme pozorovať na Obr. 4.13 a Obr. 4.14, na ktorých sú zobrazené hodnoty optimálnych stratégií pre začiatočnú časovú vrstvu $t = 0$. Pre porovnanie je zobrazená aj druhá zložka $\tilde{\theta}^2$ aproximatívnej stratégie $\tilde{\theta}$.

Na Obr. 4.13 a Obr. 4.14 vidíme, že na úsekoch, na ktorých sa optimálnou stratégiou $\hat{\theta}$ investuje maximálna čiastka $1 - \frac{PV_t}{y}$ do druhého rizikového aktíva, a aj na úseku bez aktívnych ohraničení pre $\hat{\theta}$, je aproximatívna stratégia $\tilde{\theta}$ dobrou aproximáciou optimálnej stratégie. Avšak na úseku, na ktorom je pre $\hat{\theta}$ jediným aktívnym ohraničením (4.12), sa aproximatívna stratégia od optimálnej nezanedbateľne odlišuje.

Inak vyjadrené, z obrázkov sa potvrdzujú úvahy z časti 2.4. Celkové podiely $\hat{\theta}^1 + \hat{\theta}^2$ (zobrazené modrou čiarou) investované do rizikových aktív optimálnou stratégiou sú korešpondujúcimi podielmi $\tilde{\theta}^1 + \tilde{\theta}^2$ aproximatívnej stratégie dobre aproximované. Avšak na úseku, na ktorom sa optimálnou stratégiou $\hat{\theta}$ investuje do rizikových aktív maximálna čiastka $1 - \frac{PV_t}{y}$ a rozdeľuje medzi ne v nenulových pomeroch, nie sú podiely investované do jednotlivých rizikových aktív dobre aproximované. V ďalšej časti uvedieme aproximáciu, ktorá je za istých podmienok oveľa presnejšia.

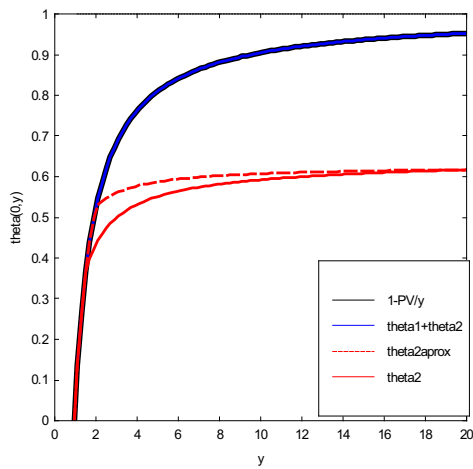


Obr. 4.11: Parameter p nastavený na $1 - p = 6$.

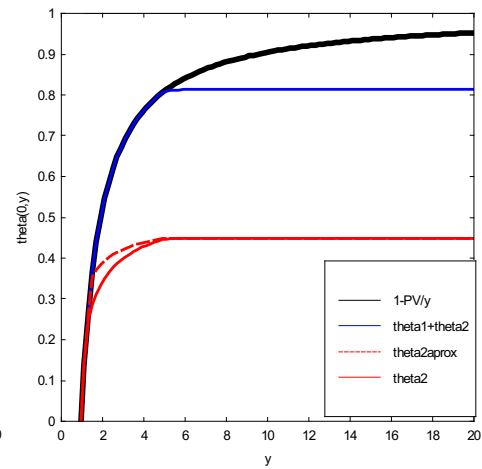


Obr. 4.12: Parameter p nastavený na $1 - p = 9$.

Na Obr. 4.11 a Obr. 4.12 sú zobrazené hodnoty ψ v časovej vrstve $t = 0$. Hodnoty sú farebne odlišené podľa toho, ktoré z ohraničení pre $\hat{\theta}$ sú aktívne.



Obr. 4.13: Parameter p nastavený na $1 - p = 6$.



Obr. 4.14: Parameter p nastavený na $1 - p = 9$.

Na Obr. 4.13 a Obr. 4.14 sú zobrazené hodnoty optimálnych stratégií $\hat{\theta}$ v časovej vrstve $t = 0$. Pre porovnanie je zobrazená aj druhá zložka $\hat{\theta}^2$ aproximatívnej stratégie $\hat{\theta}$.

4.7 Presnejšia aproximácia optimálnej stratégie

Pokračujeme v analýze numerických výsledkov z predchádzajúcej časti.

V prípade $1 - p = 6$, takmer na celej oblasti $PV_t < y < \infty$ platí rovnica (4.10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} = & -\frac{PV_t}{y} \left[\left(\mu_2 + \frac{b}{a} \Delta \mu - r \right) - s^2 \left(\left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) \psi - \frac{PV_t}{y} \right) \right] \psi - \\ & - \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) \left(\mu_2 + \frac{b}{a} \Delta \mu \right) + \frac{(\Delta \mu)^2}{a} \frac{1}{\psi^2} + r \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \\ & + s^2 \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) (\psi - 1) - 2 \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \\ & + \frac{(\Delta \mu)^2}{a} \frac{y^2}{\psi^3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \left[\frac{(\Delta \mu)^2}{a} \frac{1}{\psi^2} + \frac{s^2}{2} \left(1 - \frac{PV_t}{y} \right)^2 \right] y^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Pritom na pravej strane rovnice má najväčší význam člen

$$k_2(t, y, \psi) = -\frac{PV_t}{y} \left[\left(\mu_2 + \frac{b}{a} \Delta \mu - r \right) - s^2 \left(\left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) \psi - \frac{PV_t}{y} \right) \right] \psi,$$

pretože derivácie $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ sú v časovej vrstve T rovné nule a v časových vrstvách pre $t < T$ sa menia iba postupne. Podobný člen je možné dosiahnuť v rovnici

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{PV_t}{y} (\mu_{\text{det}} - r) \psi - \left[\left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) \mu + r \frac{PV_t}{y} \right] y \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.13)$$

zodpovedajúcej deterministickej úlohe (rovnica (3.11) so zvolením parametrov $\mu = \mu_{\text{det}}$ a $\sigma = 0$). Pri nastavení parametra

$$\mu_{\text{det}} = \mu_2 + \frac{b}{a} \Delta \mu - s^2 (1 - p) \quad (4.14)$$

platí, že pre $y \rightarrow \infty$ sa hranatá zátvorka vo výraze

$$k_2(t, y, \psi) = -\frac{PV_t}{y} \left[\left(\mu_2 + \frac{b}{a} \Delta \mu - r \right) - s^2 \left(\left(1 - \frac{PV_t}{y} \right) \psi - \frac{PV_t}{y} \right) \right] \psi,$$

limitne blíži zátvorke vo výraze

$$k_3(t, y, \psi) = -\frac{PV_t}{y} (\mu_{\text{det}} - r) \psi$$

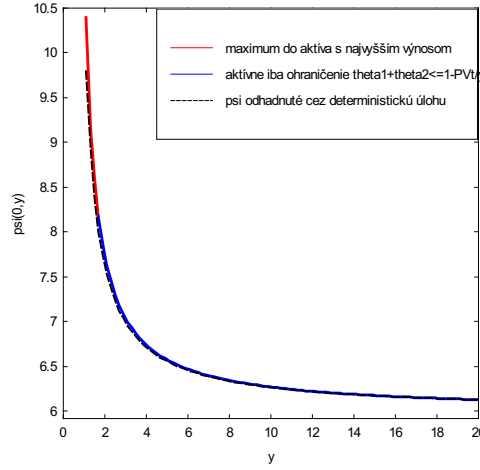
z rovnice (4.13).

Hodnotu $\psi(t, y)$ by sme preto podľa vzťahu (3.2) odvodeného pre deterministickú úlohu mohli aproximovať ako

$$\psi(t, y) \approx \tilde{\psi}(t, y) = \frac{1 - p}{1 - \frac{c}{y} \left(\frac{1}{r} (1 - e^{-r(T-t)}) - \frac{1}{\mu_{\text{det}}} (1 - e^{-\mu_{\text{det}}(T-t)}) \right)}, \quad (4.15)$$

kde hodnota μ_{det} je určená vzťahom (4.14).

Porovnanie tejto aproximácie s numericky vypočítanými hodnotami ψ pre začiatočnú časovú vrstvu $t = 0$ (pričom okrajová podmienka pre $y = y_{\text{max}}$ sa prispôsobila aproximácii (4.15)) je na Obr. 4.15.



Obr. 4.15: Porovnanie numericky vypočítaných hodnôt $\psi(0, y)$ s aproximáciou $\tilde{\psi}(0, y)$ podľa deterministickej úlohy.

Podľa Obr. 4.15 sa aproximácia $\tilde{\psi}(t, y)$ relatívnej rizikovej averzie ukazuje pre situáciu, v ktorej je takmer na celej oblasti $PV_t < y < \infty$ jediným aktívnym ohraňením

$$\theta^1 + \theta^2 \leq 1 - \frac{PV_t}{y} \quad (4.16)$$

(resp. chýba úsek bez aktívnych ohraňení), veľmi presnou. Táto aproximácia relatívnej rizikovej averzie implikuje aproximáciu $\tilde{\theta}$ optimálnej stratégie

$$\tilde{\theta} \in \arg \max_{\theta \in \mathcal{E}^{PV_t}} \left[\theta^T (\mu - r) - \frac{1}{2} \tilde{\psi} (\theta^T \sigma \sigma^T \theta) \right],$$

ktorá by tiež mala byť veľmi presnou.

Číselne, na úseku s jediným aktívnym ohraňčením (4.16), maximálna odchýlka aproximácie $\tilde{\psi}(0, y)$ od numericly vypočítanej hodnoty relativnej rizikovej averzie $\psi(0, y)$ nastáva v bode $y = 1.7$ (t. j. na začiatku uvedeného úseku), v ktorom platí

$$\tilde{\psi}(0, y) \doteq 8.005 \quad \text{a} \quad \psi(0, 8.1) \doteq 8.171.$$

Maximálny rozdiel teda nadobúda hodnotu približne 0.166.

V bode $y = 1.7$ nastáva tiež maximálna odchýlka prvej zložky aproximatívnej stratégie $\tilde{\theta}^1$ od numericly vypočítanej hodnoty $\hat{\theta}^1$:

$$\tilde{\theta}_0^1(1.7) \doteq 0.0355 \quad \text{a} \quad \hat{\theta}_0^1(1.7) \doteq 0.0418.$$

Maximálny rozdiel stratégií v časovom horizonte 10 rokov je teda rovný približne 0.0063 (na úseku s aktívnym ohraňčením (4.16) je súčet zložiek daný, v druhých zložkách stratégií teda nastávajú rovnako veľké rozdiely). Aproximácie $\tilde{\psi}$ a $\tilde{\theta}$ sa teda naozaj pre situáciu z Obr. 4.11 ukazujú ako veľmi dobré.

Pre situáciu z Obr. 4.12, v ktorej je veľký úsek bez aktívnych ohraňčení pre optimálnu stratégiu, je však aproximácia typu (4.15) málo presná. Pre takú situáciu je lepšie používať aproximáciu $\hat{\theta}$.

Aby sme v prípade efektívnej hranice typu (1) rozlíšili, pre ktorú situáciu je aproximácia (4.15) dobre použiteľná, ukážeme si, pri akých hodnotách parametrov nastáva úsek bez aktívnych ohraňčení pre $\hat{\theta}$.

Vieme, že na začiatku \bar{y} takého úseku približne platí $\psi(t, \bar{y}) \approx 1 - p$ a zároveň

$$D_1 = \frac{\mu_{Z_0} - r}{2 \left(1 - \frac{PV_t}{\bar{y}}\right) \sigma_{Z_0}^2} = \frac{\psi}{2},$$

t. j.

$$\frac{\mu_{Z_0} - r}{2 \left(1 - \frac{PV_t}{\bar{y}}\right) \sigma_{Z_0}^2} \approx \frac{1 - p}{2}.$$

Na základe toho by malo platiť

$$\frac{\mu_{Z_0} - r}{(1 - p)\sigma_{Z_0}^2} \approx 1 - \frac{PV_t}{\bar{y}} < 1.$$

Ukážeme si, že podmienka

$$\frac{\mu_{Z_0} - r}{(1 - p)\sigma_{Z_0}^2} < 1 \tag{4.17}$$

je naozaj približným kritériom, pri akých hodnotách parametrov nastáva úsek bez aktívnych ohraňčení.

Ak podmienka (4.17) platí, potom

$$\frac{\mu_{Z_0} - r}{2\sigma_{Z_0}^2} < \frac{1-p}{2} < \frac{\psi(t, y)}{2}.$$

Na základe toho, aj pre dostatočne veľkú hodnotu \mathcal{Y} platí

$$D_1 = \frac{\mu_{Z_0} - r}{2\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)\sigma_{Z_0}^2} < \frac{1-p}{2} < \frac{\psi(t, \mathcal{Y})}{2},$$

t. j. v bod \mathcal{Y} patrí úseku bez aktívnych ohraničení.

Naopak, ak podmienka (4.17) výrazne neplatí, t. j.

$$\frac{\mu_{Z_0} - r}{(1-p)\sigma_{Z_0}^2} \gg 1, \quad (4.18)$$

potom pre ľubovoľný bod $y > 0$ platí

$$D_1 = \frac{\mu_{Z_0} - r}{2\left(1 - \frac{PV_t}{y}\right)\sigma_{Z_0}^2} > \frac{\mu_{Z_0} - r}{2\sigma_{Z_0}^2} \gg \frac{1-p}{2} \approx \frac{\psi(t, y)}{2}. \quad (4.19)$$

Pre začiatok \bar{y} úseku bez aktívnych ohraničení by však malo platiť

$$D_1 = \frac{\psi(t, \bar{y})}{2} \approx \frac{1-p}{2},$$

čo je v rozpore s (4.19). Preto za platnosti približného kritéria (4.18) môžeme očakávať, že úseku bez aktívnych ohraničení nenastáva.

Výsledky zodpovedajú aj Obr. 4.11 a Obr. 4.12. Pre $1-p=6$ platí

$$\frac{\mu_{Z_0} - r}{(1-p)\sigma_{Z_0}^2} \doteq 1.22 > 1$$

a aproximácia (4.15) je výborne použiteľná. Pre $1-p=9$ platí

$$\frac{\mu_{Z_0} - r}{(1-p)\sigma_{Z_0}^2} \doteq 0.81 < 1$$

a nastáva úsek bez aktívnych ohraničení, aproximácia (4.15) nie je vhodná.

Záverom je, že pri dvojrozmernej úlohe s efektívnou hranicou typu (1), za platnosti kritéria (4.18)

$$\frac{\mu_{Z_0} - r}{(1-p)\sigma_{Z_0}^2} \gg 1$$

(resp. ak je výraz na ľavej strane aspoň o niečo väčší ako 1) je vhodné používať aproximáciu optimálnej stratégie

$$\tilde{\theta}_t(y) \in \arg \max_{\theta \in \mathcal{C}^{PV_t}} \left[\theta^T (\mu - r) - \frac{1}{2} \tilde{\psi}(t, y) (\theta^T \sigma \sigma^T \theta) \right],$$

kde hodnota $\tilde{\psi}$ je daná vzťahom (4.15)

$$\tilde{\psi}(t, y) = \frac{1 - p}{1 - \frac{c}{y} \left(\frac{1}{r} (1 - e^{-r(T-t)}) - \frac{1}{\mu_{\det}} (1 - e^{-\mu_{\det}(T-t)}) \right)}.$$

Ak kritérium (4.18) neplatí (ak platí opačná nerovnosť), je vhodnejšie použiť napríklad aproximáciu

$$\tilde{\theta} \in \arg \max_{\theta \in \mathcal{C}^{PV_t}} \left[\theta^T (\mu - r) - \frac{1}{2} (1 - p) (\theta^T \sigma \sigma^T \theta) \right].$$

4.8 Numerická schéma na výpočet hodnotovej funkcie

Naším záujmom je určiť efektívnosť aproximatívnej stratégie $\tilde{\theta}$, určenej vzťahom (2.14)

$$\tilde{\theta}_t(y) \in \arg \max_{\theta \in \mathcal{C}^{PV_t}} \left[\theta^T (\mu - r) - \frac{1}{2} (1 - p) (\theta^T \sigma \sigma^T \theta) \right].$$

Efektívnosť stratégie budeme merať na základe toho, o koľko jej používanie zníži očakávanú užitočnosť $E(U(Y_T))$ oproti optimálnej. Preto chceme pomocou numerických metód počítať hodnotovú funkciu

$$V_{\tilde{\theta}}(t, x) = E[U(X_T) | X_t = x \wedge \theta = \tilde{\theta}]$$

zodpovedajúcu používaniu aproximatívnej stratégie $\tilde{\theta}$. Jej hodnotu budeme porovnávať s hodnotovou funkciou $V(t, x)$ zodpovedajúcou používaniu optimálnej stratégie $\hat{\theta}$, na výpočet ktorej uplatníme analogické numerické výpočty.

Hodnotová funkcia $V_{\tilde{\theta}}(t, x)$ je určená analógiou Bellmanovej rovnice (2.10)

$$0 = \frac{\partial V_{\tilde{\theta}}}{\partial t} + \left(r + \tilde{\theta}^T (\mu - r) \right) y \frac{\partial V_{\tilde{\theta}}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\tilde{\theta}^T \sigma \sigma^T \tilde{\theta} \right) y^2 \frac{\partial^2 V_{\tilde{\theta}}}{\partial y^2} \quad (4.20)$$

s koncovou podmienkou

$$V_{\tilde{\theta}}(T, y) = \frac{y^p}{p}. \quad (4.21)$$

Ako sa však ukáže, rozdiely hodnotových funkcií $V(t, x)$ a $V_{\tilde{\theta}}(t, x)$ budú veľmi malé. Priame použitie explicitnej schémy na rovnicu (4.20) by bolo málo presné a pravdepodobne by neukázalo pozorovateľné rozdiely.

Na presnejšie výpočty využijeme, že vieme numericky vypočítať hodnoty výrazu

$$\psi(t, y) = -y \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(t, y)}{\frac{\partial V}{\partial y}(t, y)}.$$

Budeme predpokladať, že pri použití stratégie $\tilde{\theta}$ je hodnota výrazu

$$\psi_{\tilde{\theta}}(t, y) = -y \frac{\frac{\partial^2 V_{\tilde{\theta}}}{\partial y^2}(t, y)}{\frac{\partial V_{\tilde{\theta}}}{\partial y}(t, y)}$$

veľmi podobná hodnote $\psi(t, y)$, preto ju pri numerických výpočtoch budeme nahradzovať touto hodnotou. Tento prístup by mal byť výrazne presnejší ako odhadovanie derivácie $\frac{\partial^2 V_{\tilde{\theta}}}{\partial y^2}$ pomocou konečných diferencií a zároveň veľmi názorne zohľadňuje rozdiely medzi stratégiami $\hat{\theta}$ a $\tilde{\theta}$.

S využitím funkcie $\psi_{\tilde{\theta}}(t, y)$, ktorej hodnoty budeme pri numerických výpočtoch budeme nahradzovať numericky vypočítanými hodnotami $\psi(t, y)$, môžeme rovnicu (4.20) previesť na

$$0 = \frac{\partial V_{\tilde{\theta}}}{\partial t} + \left[r + \tilde{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r) - \frac{1}{2} \psi_{\tilde{\theta}} \left(\tilde{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \tilde{\theta} \right) \right] y \frac{\partial V_{\tilde{\theta}}}{\partial y}. \quad (4.22)$$

Na numerické riešenie rovnice (4.22) by sme mohli použiť explicitnú schému, pričom deriváciu $\frac{\partial V_{\tilde{\theta}}}{\partial y}$ by sme aproximovali pomocou konečných diferencií. Avšak pre časovú vrstvu T platí

$$\frac{\partial V_{\tilde{\theta}}}{\partial y}(T, y) = y^{p-1},$$

t. j. pre $1 - p > 0$ a $y \rightarrow 0$ platí

$$\frac{\partial V_{\tilde{\theta}}}{\partial y}(T, y) \rightarrow \infty,$$

čo by spôsobovalo numerické problémy. Preto rovnicu prevedieme na rovnicu o príležitostnom procese (*opportunity process*) $L_{\tilde{\theta}}(t, y)$, ktorý je určený vzťahom

$$V_{\tilde{\theta}}(t, y) = L_{\tilde{\theta}}(t, y) \frac{y^p}{p}.$$

Pre parciálne derivácie platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{\tilde{\theta}}}{\partial t}(t, y) &= \frac{\partial L_{\tilde{\theta}}}{\partial t}(t, y) \frac{y^p}{p} \\ \frac{\partial V_{\tilde{\theta}}}{\partial y}(t, y) &= \frac{\partial L_{\tilde{\theta}}}{\partial y}(t, y) \frac{y^p}{p} + L_{\tilde{\theta}}(t, y) y^{p-1}.\end{aligned}$$

Rovnicu (4.22) preto môžeme previesť na

$$\frac{\partial L_{\tilde{\theta}}}{\partial t} = - \left(y \frac{\partial L_{\tilde{\theta}}}{\partial y} + p L_{\tilde{\theta}} \right) \left(r + \tilde{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r) - \frac{1}{2} \psi_{\tilde{\theta}} \left(\tilde{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \tilde{\theta} \right) \right). \quad (4.23)$$

Koncová podmienka (4.21) sa prevedie na podmienku

$$L_{\tilde{\theta}}(T, y) = 1, \quad (4.24)$$

t. j. problém s veľkými hodnotami parciálnej derivácie sa eliminoval.

Rovnicu (4.23) s koncovou podmienkou (4.24), s využitím nahradzovania hodnôt $\psi_{\tilde{\theta}}(t, y)$ numericky vypočítanými hodnotami $\psi(t, y)$ budeme riešiť explicitnou schémou, podobnou ako je uvedená v časti 3.3. Na určenie hodnôt v bodoch y_{\max} na okraji diskretizácie použijeme približnú okrajovú podmienku podľa úlohy so zjednodušeným ohraničením z časti 2.5, t. j.

$$L_{\tilde{\theta}}(t_i, y_{\max}) \approx L_{i,n} = \exp(pM(T - t_i)),$$

kde

$$M = \max_{\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{E}^0} \left[r + \boldsymbol{\theta}^T (\boldsymbol{\mu} - r) - \frac{1}{2} (1 - p) (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\theta}) \right].$$

Na určenie hodnôt v bodoch $y_{j_0(i)}$ uplatníme podobný postup ako je uvedený v časti 3.3.

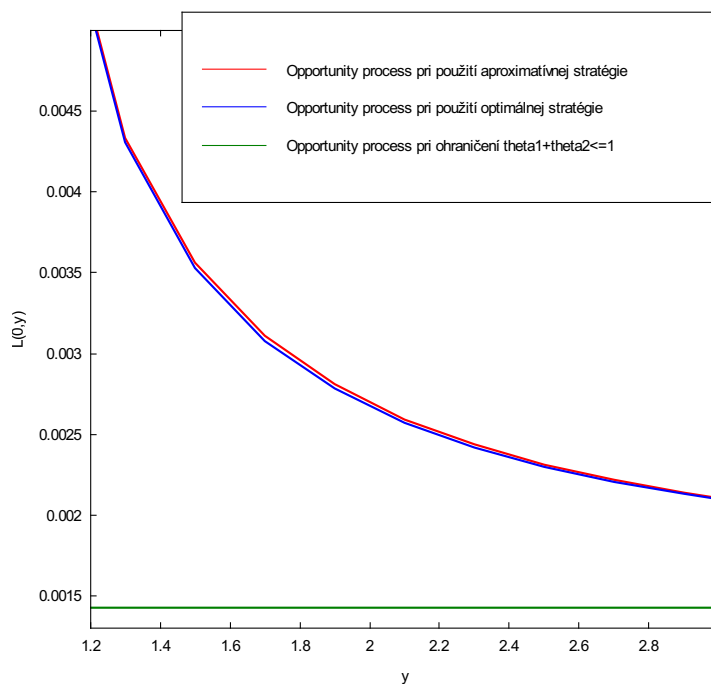
4.9 Porovnanie efektívnosti stratégií

Použili sme rovnaké hodnoty parametrov ako v časti 4.6, t. j.

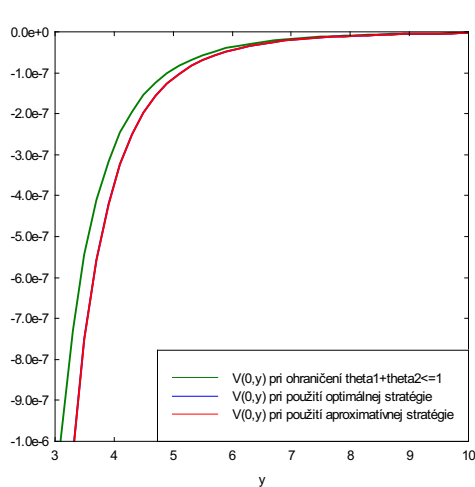
$$\mu_1 = 0.17, \sigma_1 = 0.16, \mu_2 = 0.25, \sigma_2 = 0.21, \rho = 0.56,$$

$$r = 0.01, T = 10, c = 0.1, 1 - p = 6.$$

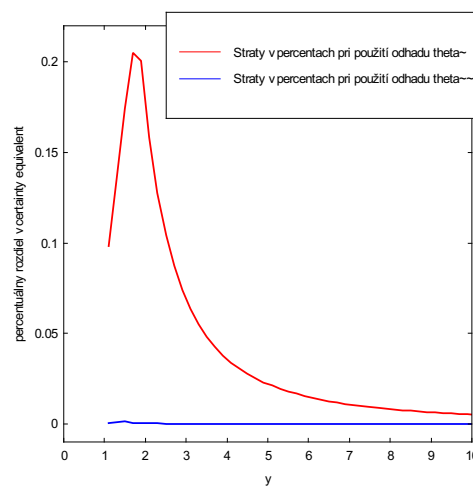
Aplikovaním numerickej schémy uvedenej v časti 4.8 sme vypočítali hodnoty príležitostných procesov $L(0, y)$ a $L_{\tilde{\theta}}(0, y)$. Výsledky sú zobrazené na Obr. 4.16. Pre porovnanie je zobrazená aj hodnota $L^*(0)$ zodpovedajúca úlohe so zjednodušeným ohraničením $\theta^1 + \theta^2 \leq 1$ z časti 2.5, ktorá je pre $p < 0$ dolným odhadom hodnôt $L(t, y)$ a $L_{\tilde{\theta}}(t, y)$.



Obr. 4.16: Numerické výsledky pre $L(0, y)$, $L_{\tilde{\theta}}(0, y)$ a $L^*(0, y)$.



Obr. 4.17: Numerické výsledky pre $V(0, y)$, $V_{\tilde{\theta}}(0, y)$ a $V^*(0, y)$.



Obr. 4.18: Percentuálne rozdiely hodnôt určitostných ekvivalentov pri použití aproximativných stratégií $\tilde{\theta}$, $\hat{\theta}$ oproti hodnotám určitostného ekvivalentu pri použití optimalnej stratégie.

Po prenasobení príležitostných procesov $L(t, y)$, $L_{\hat{\theta}}(t, y)$ a $L^*(0)$ funkciou užitočnosti

$$U(y) = \frac{1}{p}y^p$$

dostaneme zodpovedajúce hodnotové funkcie, ktoré sú zobrazené na Obr. (4.17). Na obrázku je rozdiel hodnotových funkcií $V(t, y)$ a $V_{\hat{\theta}}(t, y)$ nepozorovateľný, grafy sa prekrývajú. To potvrdzuje, že sme si mohli dovoliť aproximovať odhadovať výraz

$$\psi_{\hat{\theta}}(t, y) = -y \frac{\frac{\partial^2 V_{\hat{\theta}}}{\partial y^2}(t, y)}{\frac{\partial V_{\hat{\theta}}}{\partial y}(t, y)}$$

relatívnou rizikovou averziou $\psi(t, y)$ zodpovedajúcou používaniu optimálnej stratégie $\tilde{\theta}$.

Aby sme vyhodnotili, aké veľké straty (v peňažných jednotkách) vznikajú pri použití aproximatívnych stratégií oproti použitiu optimálnej stratégie, použijeme porovnanie pomocou určitosného ekvivalentu (je spomenutý napríklad v [10], časť 2.1, Príklad 2.5).

Určitosný ekvivalent (*certainty equivalent*) je taká nenáhodná hodnota $C_{\theta}(y_0)$ vkladu v čase T , ktorá má pre klienta rovnakú očakávanú užitočnosť ako investovanie hodnoty y_0 (vrátane súčasnej hodnoty budúcich príspevkov) v čase $t = 0$ do fondu, ktorý používa danú stratégiu θ . Platí teda

$$U(C_{\theta}(y_0)) = E[U(Y_T)|Y_0 = y_0] = V_{\theta}(0, y_0), \quad (4.25)$$

kde $V_{\theta}(t, y)$ je hodnotová funkcia zodpovedajúca používaniu danej stratégie θ . Hodnotu $C_{\theta}(y_0)$ môžeme zo vzťahu (4.25) vyjadriť ako

$$C_{\theta}(y_0) = U^{-1}(V_{\theta}(0, y_0)) = \left(p L_{\theta}(0, y_0) \frac{y_0^p}{p} \right)^{\frac{1}{p}} = y_0 (L_{\theta}(0, y_0))^{\frac{1}{p}},$$

kde $L_{\theta}(t, y)$ je príležitostný proces zodpovedajúci používaniu danej stratégie θ .

Pre uvažované stratégie $\theta = \hat{\theta}$ a $\theta = \tilde{\theta}$ sme na základe numericky vypočítaných hodnôt príležitostných procesov $L(t, y)$ a $L_{\hat{\theta}}(t, y)$ vypočítali hodnoty určitosných ekvivalentov $C_{\hat{\theta}}(y)$ a $C_{\tilde{\theta}}(y)$. Analogickým spôsobom sme vypočítali aj hodnoty určitosného ekvivalentu $C_{\tilde{\tilde{\theta}}}(y)$ zodpovedajúcemu používaniu aproximatívnej stratégie $\tilde{\tilde{\theta}}$ z časti 4.7.

Percentuálne rozdiely hodnôt určitosných ekvivalentov pri použití aproximatívnych stratégií $\tilde{\theta}$, $\tilde{\tilde{\theta}}$ oproti hodnotám určitosného ekvivalentu pri použití optimálnej stratégií $\hat{\theta}$ sú zobrazené na Obr. 4.18.

Hodnoty zobrazené na Obr. 4.18 zodpovedajú odhadom reálnych percentuálnych strát klienta v prípade, že fond používa aproximatívnu stratégiu $\tilde{\theta}$, resp. $\tilde{\tilde{\theta}}$ namiesto optimálnej.

Rozdiely pri používaní stratégie $\tilde{\tilde{\theta}}$ (znázornené modrou čiarou) sú úplne zanedbateľné (najviac okolo 0.00126 percenta), t. j. za platnosti podmienky (4.18) sa ukazuje úplne postačujúce používať tento odhad.

Maximálny percentuálny rozdiel pri používaní stratégie $\tilde{\theta}$ sme vypočítali pri hodnote $y_0 = 1.7$, kedy je určitostný ekvivalent odhadnutý na 5.394, namiesto odhadnutej optimálnej hodnoty 5.405. To znamená, že pri našom nastavení parametrov je vtedy maximálna strata oproti optimálnej hodnote rovná približne 0.011 peňažných jednotiek, čo je okolo 0.2 percenta (alebo 2 promile) optimálnej hodnoty určitostného ekvivalentu. Strata dvoch tisícín majetku v časovom horizonte 10 rokov je v praxi tiež zanedbateľná, význam môže nadobudnúť pri investovaní obrovských čiastok.

Záver

V diplomovej práci riešime úlohu, ako má investičný fond počas daného obdobia investovať peniaze vložené klientom, aby maximalizoval jeho očakávanú užitočnosť na konci obdobia investovania. Pritom používame CRRA funkcie užitočnosti a rizikové aktíva sú modelované viacrozmer-ným geometrickým Brownovým pohybom. Na stratégie investovania uvažujeme ohraničenia, ktoré vyjadrujú zákaz krátkych pozícií v rizikových aktívach aj v bezrizikovom aktíve. Navyiac zohľadňujeme, že klient okrem počiatočného vkladu vkladá aj priebežné príspevky.

Jedným zo základných vzťahov v riešenej úlohe je, že optimálna stratégia závisí od relatívnej rizikovej averzie. Preto podstatnou úlohou v diplomovej práci bolo určovanie priebehu relatívnej rizikovej averzie.

Úloha bez príspevkov z kapitoly 1 a transformované úlohy so zjednodušeným, resp. zanedbaným ohraničením z kapitoly 2 majú jednoduché riešenie, pretože v nich je relatívna riziková averzia konštantne rovná hodnote $1 - p$.

Pre transformovanú úlohu s nezanedbaným ohraničením ale platí, že relatívna riziková averzia je závislá od premenných reprezentujúcich čas aj hodnotu vkladu.

V časti 2.4 máme definovanú aproximatívnu stratégiu $\tilde{\theta}$, ktorá vznikne tak, že do vzťahu (2.12) na určenie optimálnej stratégie dosadíme namiesto relatívnej rizikovej averzie ψ hodnotu $1 - p$. To nie je presná hodnota relatívnej rizikovej averzie, ale aj tak má táto aproximácia celkom dobré zdôvodnenie.

V kapitole 3 sme pri zvolenom nastavení parametrov jednorozmernej úlohy pomocou parciálnych diferenciálnych rovníc pre relatívnu rizikovú averziu numericky vypočítali hodnoty relatívnej rizikovej averzie a na základe nich aj hodnoty optimálnej stratégie. Hodnoty aproximatívnej stratégie $\tilde{\theta}$ vyšli veľmi podobné numericky vypočítaným hodnotám optimálnej stratégie. Na časovom horizonte 10 rokov vyšiel maximálny rozdiel v hodnotách stratégií okolo 0.3 percenta. To potvrdilo úvahy z časti 2.4, že pre jednorozmernú úlohu je aproximatívna stratégia $\tilde{\theta}$ veľmi presným odhadom optimálnej stratégie.

V kapitole 4 sme urobili podobné porovnanie pre dvojrozmernú úlohu. V tomto prípade však na úseku, v ktorom sa investuje do rizikových aktív maximálna čiastka a rozdelí sa medzi ne v nenulových pomeroch, nastáva v časovom horizonte 10 rokov výrazná odchýlka aproximatívnej stratégie $\tilde{\theta}$ od optimálnej. Kvôli tejto odchýlke sme pre istý typ situácie zaviedli presnejšiu aproximáciu $\tilde{\tilde{\theta}}$ optimálnej stratégie, ktorá je založená na aproximácii relatívnej rizikovej averzie podľa deterministickej úlohy. Za platnosti kritéria (4.18) bola stratégia $\tilde{\tilde{\theta}}$ veľmi dobrou aproximáciou optimálnej stratégie.

Na záver sme na základe princípu určitosného ekvivalentu porovnali porovnali efektívnosť aproximatívnej stratégie $\tilde{\theta}$ oproti optimálnej. Výsledkom bolo, že aj keď sa tieto stratégie na istom úseku nezanedbateľne líšia, na časovom horizonte 10 rokov vzniká oproti používaniu optimálnej stratégie rozdiel okolo 0.2 percenta hodnoty určitosného ekvivalentu, čo je zanedbateľné.

Záverom je, že pri jednorozmernej úlohe je rozdiel medzi aproximatívnu stratégiou θ a optimálnou stratégiou úplne zanedbateľný. Pri dvojrozmernej sú hodnoty aproximatívnych stratégií na istom úseku nezanedbateľne rozdielne oproti hodnotám optimálnej stratégie, avšak celková strata pri používaní aproximatívnej stratégie je iba veľmi malá.

Pri viacrozmerných úlohách predpokladáme podobné správanie relatívnej rizikovej averzie ako pri dvojrozmernej úlohe. Naším očakávaním je, že aj pri viacrozmerných úlohách je používanie aproximatívnej stratégie $\tilde{\theta}$ pomerne efektívne.

Literatúra

- [1] Nutz M. (2010): *Power Utility Maximization in Constrained Exponential Lévy Models*.
- [2] Nutz M. (2010): *Optimal Consumption and Investment with Power Utility*, PhD Thesis ETH Zurich, Diss. ETH No. 19272.
- [3] Macová Z., Ševčovič D. (2009): *Weakly nonlinear analysis of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation arising from pension savings management*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Vol. 7, No. 4, 619–638.
- [4] Samuelson P. A. (1969): *Lifetime Portfolio Selection By Dynamic Stochastic Programming*, Review of Economics and Statistics, Vol. 51, 239-246.
- [5] Bodie, Z. (1995): *On The Risk of Stocks in the Long Run*, Financial Analysts Journal, May-June 1995, 18-22.
- [6] Ekström E., Lötstedt P., Tysk J. (2009): *Boundary values and finite difference methods for the single factor term structure equation*, Appl. Math. Finance 16 (3), 253-259.
- [7] Ekström E., Tysk J. (2011): *Boundary conditions for the single-factor term structure equation*, Ann. Appl. Probab. 21(1), 332–350
- [8] Oleinik, O. A., Radkevich, E. V. (1973): *Second order equations with nonnegative characteristic form*, Rhode Island and Plenum Press, New York, American Mathematical Society.
- [9] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K. (2009): *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, STU, ISBN 978-80-227-3014-3.
- [10] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V. (2005): *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, ISBN 80-8057-651-3.

- [11] Yong J., Zhou. X. Y. (1999): *Stochastic Controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations*, Springer-Verlag, New York, ISBN 0-387-98723-1.