

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ANALÝZA A NÁVRH NUMERICKÝCH ALGORITMOV NA  
RIEŠENIE NELINEÁRNYCH ROVNÍC  
BLACK - SCHOLESOVHO TYPU

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**ANALÝZA A NÁVRH NUMERICKÝCH ALGORITMOV NA  
RIEŠENIE NELINEÁRNYCH ROVNÍC BLACK -  
SCHOLESOVHO TYPU**

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Študijný odbor: Aplikovaná matematika 1114  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: prof. RNDr. Daniel ŠEVČOVIČ, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Jana Sekerová  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Analýza a návrh numerických algoritmov na riešenie nelineárnych rovníc Black-Scholesovho typu

**Cieľ:** Práca sa bude zaoberať možnosťami analýzy a návrhu stabilnej numerickej schémy pre riešenie nelineárneho zovšeobecnenia Black-Scholesovej rovnice, v ktorom lokálna volatilita môže závisieť od ceny samotného derivátu. Tieto modely sa vyskytujú o.i. v situáciách, kde je potrebné modelovať efekty spätnej väzby obchodnej stratégie dominantného investora na cenu samotného podkladového aktíva.

**Vedúci:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Dátum zadania:** 13.01.2011

**Dátum schválenia:** 14.01.2011  
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Pod'akovanie** Touto cestou sa chcem poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za ochotu, pomoc, odborné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.

**Čestné vyhlásenie** Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne len s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 26.4.2012

.....  
Bc. Jana SEKEROVÁ

## Abstrakt

SEKEROVÁ, Jana: Analýza a návrh numerických algoritmov na riešenie nelineárnych rovníc Black - Scholesovho typu [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. RNDr Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2012, 66 strán

V našej práci sa zaoberáme analýzou nelineárnych modelov Black - Scholesovho typu a návrhom ich numerického riešenia. Modely ktorým sa venujeme, slúžia na oceneňovanie finančných derivátov Európskeho typu. Ich hodnota závisí od ceny podkladového aktíva a času do expirácie. Zameriavame sa na riziko zahrňujúcu metodológiu a model nelikvidného trhu. V oboch modeloch volatilita závisí okrem iného aj od ceny podkladového aktíva. Výhoda nelineárnych modelov je, že nám umožňujú modelovanie spätnej väzby dominantného investora pri kúpe alebo predaji opcií, alebo zahrnúť transakčné náklady a možné straty z nechráneného portfólia. Na určenie hodnoty aktuálnej ceny finančného derivátu neexistuje všeobecný explicitný vzorec a preto pri hľadaní riešenia využívame numerické schémy. Existuje niekoľko explicitných vzorcov, ktoré vyhovujú jednotlivým nelineárnym modelom, ale nedajú sa využiť pri reálnom oceňovaní derivátov. Tieto explicitné riešenia nám v práci slúžia na určenie presnosti numerického výsledku navrhnutého algoritmu.

**Kľúčové slová:** finančné deriváty, hedžovanie portfólia, Black - Scholesova rovnica, RAPM model, model nelikvidného trhu, Gama rovnica,

## Abstract

SEKEROVÁ, Jana: Analysis and numeric algorithm design for solving nonlinear Black - Scholes equations. [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2012, 66p.

In our work we investigate non-linear Black - Scholes equations and introduce numeric algorithm. We concern in models which serves to price financial derivatives of European type. Its value depends on the price of the underlying asset and the time to expiration. We focus on the risk - adjusted pricing methodology and illiquid market model. In both models volatility depends i.a. on price of the underlying asset. Advantages of non-linear models are, that they enable us to model back-coupling, when dominant investor buys or sells options, or include transaction costs and possible loss of non-protected portfolio. There is no general explicit solution to enumerate actual price of financial derivative, that's why we use numerical schemes to obtain it. Nevertheless there exist a couple of explicit equations which satisfy those non-linear models but they are unable to use in real pricing. These explicit solutions serves us in our work to find accuracy of algorithm design of numerical solution.

**Keywords:** financial derivatives, portfolio hedging, Black - Scholes equation, RAPM model, Illiquid market model, Gamma equation

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>9</b>
<b>1 Základný pohľad do problematiky finančných derivátov</b>	<b>10</b>
1.1 Lineárny model . . . . .	13
1.2 Príklady nelineárnych modelov . . . . .	17
<b>2 Odvodenie nelineárnych modelov</b>	<b>20</b>
2.1 RAPM model . . . . .	20
2.2 Transformácia RAPM modelu na Gama rovnicu . . . . .	25
2.3 Model nelikvidného trhu . . . . .	28
2.4 Transformácia modelu nelikvidného trhu na Gama rovnicu . . . . .	30
<b>3 Explicitné riešenie nelineárnych modelov</b>	<b>33</b>
3.1 RAPM model bez zahrnutia dividend . . . . .	33
3.2 Zovšeobecnenie explicitného riešenia . . . . .	35
<b>4 Numerická schéma na riešenie nelineárnych modelov</b>	<b>40</b>
4.1 Explicitná metóda . . . . .	43
4.2 Implicitná metóda . . . . .	44
4.3 Semi - implicitná metóda . . . . .	45
<b>5 Numerické výsledky výpočtov</b>	<b>47</b>
5.1 RAPM model . . . . .	47
5.2 Model nelikvidného trhu . . . . .	48
<b>Záver</b>	<b>53</b>
<b>Príloha 1</b>	<b>57</b>
<b>Príloha 2</b>	<b>60</b>



## Úvod

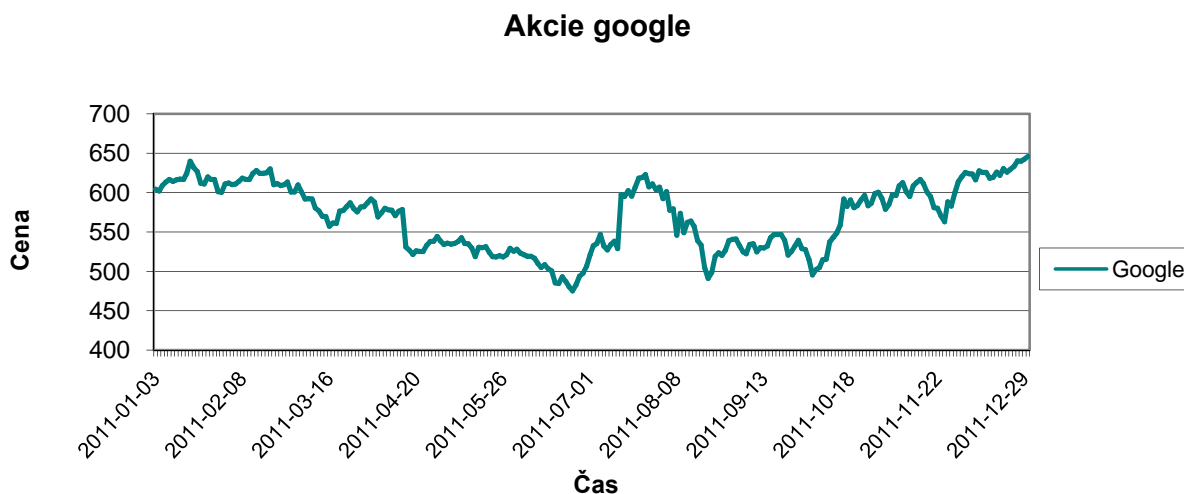
V súčasnosti existuje obrovský počet finančných nástrojov, s ktorými sa denno denne obchoduje na finančnom trhu. Medzi nimi sú aj finančné deriváty, ktorých cena závisí od ceny podkladového aktíva a ich primárny cieľ je poistenie portfólia voči možným stratám spôsobených nestabilitou trhu. Existuje viacero druhov finančných derivátov, ale my sa v práci zaoberáme len opciami Európskeho typu. Hlavnú myšlienku a model oceňovania finančných derivátov priniesli Black a Scholes, ktorí vytvorili lineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu, známu ako Black - Scholesova rovnica. Ich model je základom všetkých ďalších nelineárnych modelov ktoré boli neskôr odvodené. Nelineárne modely vo všeobecnosti nemajú explicitné riešenie a preto sa na nájdenie riešenia využívajú numerické schémy. Hoci je výpočet pomocou týchto modelov značne zložitejší, riešia niektoré nedostatky a obmedzenia základného modelu.

Na začiatku priblížime problematiku finančných nástrojov, matematické odvodenie stochastických procesov a základný lineárny model. Ďalej sa podrobne venujeme dvom nelineárnym modelom - riziko zahrňujúcej metodológie a modelu neúplného trhu. Na základe numerických poznatkov sa snažíme navrhnúť efektívne algoritmy, ktoré nám dané modely riešia. Numerické výsledky algoritmov porovnáme s explicitnými riešeniami, ktoré síce vyhovujú jednotlivým modelom, pre reálne oceňovanie však majú diskutabilný charakter. Vďaka tomu môžeme zhodnotiť presnosť a efektívnosť navrhovanej metódy riešenia.

---

# 1 Základný pohľad do problematiky finančných derivátov

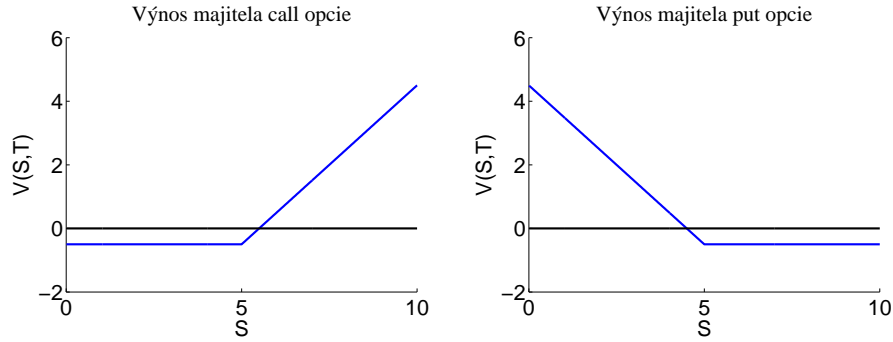
Rozvoj finančného trhu v posledných desaťročiach prináša mnoho možností pri investovaní a obchodovaní s finančnými nástrojmi. Na trhu sa stretneme s mnohými aktívami, ako sú napríklad akcie a dlhopisy. Akcia je cenný papier, ktorý umožňuje jeho majiteľovi podieľať sa na majetku príslušnej akciovej spoločnosti, jej riadení a zisku. Cena sa denno denne mení v závislosti od dopytu a ponuky. Ponuka finančného aktíva na predaj (*ask price*) je vždy vyššia ako ponuka na kúpu (*bid price*) pričom trhovacia cena je výsledkom hľadania rovnováhy medzi týmito ponukami. Ak sa spoločnosť rozvíja a vytvára zisk, je po nej vyšší dopyt a cena akcií rastie. Niektoré akcie môžu prinášať pravidelný výnos svojim majiteľom vo forme dividend, ktorých výška závisí od hospodárenia spoločnosti za uplynulé obdobie. Pri zlom hospodárení a vytvorenej peňažnej strate nemá akcionár nárok na vyplatenie dividend. Akcie sú bežne obchodovateľné na burzách cenných papierov, ako napríklad New Yorkská burza cenných papierov (NYSE), burza v Štuttgarte (STU), vo Viedni (Wiener Börse AG) a mnohé ďalšie. Keďže ceny sa neustále menia v závislosti od pôsobenia burzového a mimoburzového trhu, dopytu a ponuky, ich časový vývoj sa nedá predpovedať. V matematickom ponímaní hovoríme, že má stochastický (náhodný) charakter. Z dlhodobého hľadiska má vývoj cien akcií rastúci trend alebo klesajúci. Z krátkodobého hľadiska zvyčajne výrazne fluktuujú, ako môžeme vidieť na obrázku 1.1, ktorý zobrazuje pohyby cien akcií spoločnosti Google za obdobie jedného roka. Podľa výkyvov cien rozdeľujeme akcie na rizikové, pričom kompenzáciou za podstúpené riziko môže byť vysoký zisk ale taktiež možnosť straty je vysoká. Menej rizikové sú také, ktorých cena je stabilnejšia a preto sa zisk sa dosiahne s väčšou pravdepodobnosťou. Takéto akcie neprinášajú vysoký výnos. Za bezpečné finančné aktíva sa považujú dlhopisy, ktoré sa dajú chápať ako pôžička s presne stanoveným ročným úrokom. Za bezrizikovú úrokovú mieru berieme úrok štátnych dlhopisov, ktoré sú brané ako bezrizikové, hoci sme v nedávnom období boli svedkami krachu Islandského štátu (rok 2008) a nie moc priaznivej situácie v Grécku, Španielsku, či Taliansku (roky 2008 - 2012). Na trhu sa okrem iného obchoduje aj s burzovými indexami alebo úrokovými mierami.



**Obr. 1.1:** Časový vývoj ceny akcií spoločnosti Google

Rozvojom finančného trhu vznikla potreba ochrany investovaných peňazí. Snaha o elimináciu straty z investovaných peňazí do finančných aktív sa nazýva hedžing. Finančné deriváty predstavujú určitý druh poisťky voči poklesu, nárastu, alebo nezmenenej cene akcii. Základným a najjednoduchším derivátom je forward, ktorý je zároveň aj historicky prvým. Je to právo a súčasne povinnosť realizácie obchodu medzi vypisovateľom a kupujúcim na kúpu, respektíve predaj aktíva v presne stanovenom čase za vopred dohodnutú expiračnú cenu. Ak predpokladáme, že cena aktíva je v čase expirácie  $T$  rovná  $F$ , súčasná cena forwardu (v čase  $t = 0$ ) sa získa odúročením budúcej očakávanej hodnoty  $F$  podkladového aktíva,  $P = Fe^{-r(T-t)}$ . Obe strany musia tento obchod uskutočniť nezávisle od vývoja ceny akcie.

Medzi ďalšie finančné deriváty patria opcie, ktoré dávajú vlastníčkovi právo, ale nie povinnosť kúpiť alebo predať dané aktívum, za vopred dohodnutú cenu vo vopred stanovenom expiračnom čase. Ak sa jedná o práve kúpiť, hovoríme o *call opcii* a ak o práve predať, potom o *put opcii*. Vlastník opcie je v takzvanej dlhej pozícii (*long position*), vypisovateľ (predajca) opcie je v krátkej pozícii (*short position*). Majiteľ opcie má voči vypisovateľovi výhodu výberu, či si opciu uplatní alebo nie a za túto výhodu si musí priplatiť takzvanú *opčnú prémiiu*. Držiteľ opcie si ju uplatní len vtedy, ak mu uplatnenie prinesie zisk. V súčasnosti existuje niekoľko druhov opcií, najjednoduchšie z nich sú *Európske (vanilla) opcie*. *Európsku call* opciu si vlastník uplatní len vtedy, ak je



Obr. 1.2: Ziskový diagram majiteľa opcie

cena aktíva  $S$  v čase expirácie  $T$  vyššia ako dohodnutá cena  $E$ , pretože akciu predá za drahšie, ako ju vďaka uplatnenej opcii kúpi. Pri *put opcii* má investor zisk, ak je cena aktíva  $S$  v stanovenom čase nižšia ako dohodnutá cena  $E$ . Hodnota opcií v expiračnom čase teda predstavuje výšku zisku, ktorú majiteľ môže dosiahnuť v závislosti od ceny  $S$ :

- *call opcia*

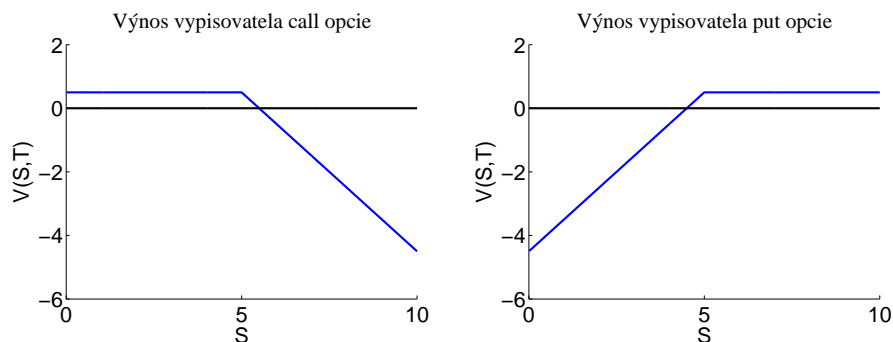
$$V^c(S, T) = \max \{S - E, 0\},$$

- *put opcia*

$$V^p(S, T) = \max \{E - S, 0\},$$

kde  $S$  je cena podkladového aktíva,  $T$  je dátum expirácie a  $E$  je dohodnutá expiračná cena. Celkový výplatný diagram majiteľa je ešte znížený o cenu opcie, ktorá predstavuje zaplatenú opčnú prémie. Zisk, ktorý majiteľ dosiahne v závislosti od ceny  $S$  v čase expiráciemôžeme vidieť na obrázku 1.2. Predaná opcia, alebo taktiež opcia v *short pozícii* prinesie vypisovateľovi zisk, iba ak si ju jej držiteľ neuplatní. Výnos vtedy predstavuje cenu samotnej opcie, ktorú vypisovateľ zinkasuje jej predajom. Inými slovami, zisk vypisovateľa je záporná hodnota zisku majiteľa, ako vidieť aj na obrázku 1.3.

Kombináciou kúpy a predaja opcií s rôznymi expiračnými cenami vznikajú rôzne hedžovacie stratégie, či už proti nárastu, poklesu, alebo nezmennej ceny akcie. Základnými a najjednoduchšími stratégiami sú *bullish spread* a *bearish spread*. *Bullish spread* vznikne kúpou opcie s expiračnou cenou  $E_1$  a predajom s expiračnou cenou  $E_2$ ,



Obr. 1.3: Ziskový diagram vypisovateľa opcie

pričom  $E_1 < E_2$ . Pri stratégii *bearish spread* je kombinácia opačná, čiže držíme opciu s expiračnou cenou  $E_2$  a predáme s  $E_1$ , kde  $E_1 < E_2$ . Výplatný diagram v čase  $T$  pre obe stratégie sú zobrazené na obrázku 1.4 a sú nasledovné:

- *Bullish spread*

$$V(S, T) = \max(S - E_1, 0) - \max(S - E_2, 0), \quad E_1 < E_2,$$

- *Bearish spread*

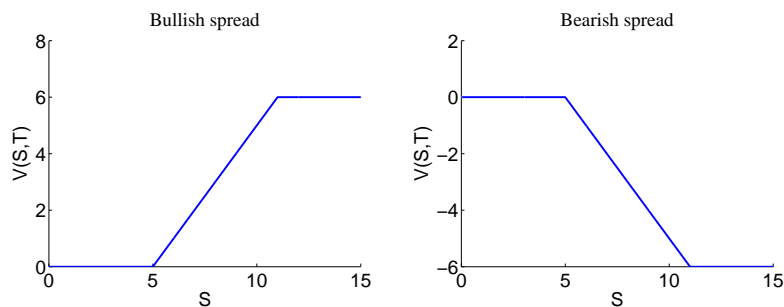
$$V(S, T) = -\max(S - E_1, 0) + \max(S - E_2, 0), \quad E_1 < E_2.$$

Ostatné stratégie vzniknú ďalšími ľubovoľnými kombináciami kúpy a predaja *call* a *put* opcií.

Okrem *vanilla opcií* poznáme aj *Americké opcie*, *path-dependent opcie* a ďalšie. *Americkú opciu* si môže vlastník uplatniť hocikedy do času expirácie, teda pre ľubovoľné  $t \in (0, T)$ . Hodnota *path-dependent opcií* závisí nie len od súčasnej hodnoty podkladového aktíva, ale aj od vývoja jeho historickej ceny na celom intervale  $t \in [0, T]$ . Príkladom takýchto opcií sú *Ázijské opcie*, *Bariérové opcie* a *Look-back opcie*. V práci sa ďalej zaoberáme len *Európskymi opciami*.

## 1.1 Lineárny model

Hodnota opcie v čase expirácie je známa, otázne zostáva, akú hodnotu má opcia pre  $t = 0$  teda v čase jej kúpy. Cena musí byť stanovená tak, aby nenastala arbitráž. Cena akcie má náhodný pohyb, ktorý dopredu nevieme presne predikovať. Hovoríme, že cena



**Obr. 1.4:** Porovnanie stratégií bullish a bearish spread

akcie sa riadi geometrickým Brownovým pohybom s parametrami  $\mu$  a  $\sigma$ . Keďže pohyb ceny akcie  $S = S(t)$  je náhodný, potrebujeme využiť Itoovu lemu, vďaka ktorej vieme určiť stochastickú diferenciálnu rovnicu opisujúcu tento náhodný vývoj.

**Lema 1.1** (Itoóva lema). [15] *Nech  $f(x, t)$  je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná  $x$  je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw,$$

kde  $W(t)$  je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie  $f$  je daný vzťahom

$$df = \partial_x f dx + \left( \partial_t f + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \partial_x^2 f \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia  $f$  vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left( \partial_t f + \partial_x f \mu(x, t) + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \partial_x^2 f \right) dt + \partial_x f \sigma(x, t) dw.$$

Wienerov proces je náhodný proces, ktorý má normálne rozdelenie s parametrami  $W(t) \sim N(0, 1)$ . Vývoj ceny akcie modelujeme pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dS = \mu(S, t)Sdt + \sigma(S, t)Sdw. \quad (1.1)$$

kde  $\mu(S, t)$  je očakávaný výnos akcie,  $\sigma(S, t)$  je jej volatilita,  $dS$  je zmena ceny akcie za časový okamih  $dt$  a  $dw$  je diferenciál Wienerovho procesu. Cena opcie  $V(S, t)$  je funkcia dvoch premenných - ceny podkladového aktíva  $S$  a času  $t$ . Na vyjadrenie diferenciálu využijeme Itoóvu lemu.

$$dV(S, t) = \left( \partial_t V + \partial_S V S \mu(S, t) + \frac{1}{2} \sigma^2(S, t) S^2 \partial_S^2 V \right) dt + \partial_S V S \sigma(S, t) dw. \quad (1.2)$$

Odvodenie ceny derivátu  $V(S, t)$  spočíva v odvodení lineárnej Black - Scholesovej rovnice, pričom využijeme Mertonovu myšlienku, kde máme portfólio  $\Pi$  pozostávajúce z  $Q_S$  množstva akcií vyplácajúcich dividendy,  $Q_V$  opcií a bezrizikových dlhopisov vyplácajúcich dividendy ([15], str. 34-37).

$$\Pi = SQ_S + VQ_V + B$$

Dané portfólio chceme mať zaistené voči možným výkyvom cien akcií a s nulovým rastom investícií. Na zaistenie voči výkyvom ho musíme dynamicky v čase prerozdeľovať, pričom využijeme zdroje zo samotného portfólia. Nulové investície nám vytvárajú prvú podmienku

$$\Pi = SQ_S + VQ_V + B = 0 \quad (1.3)$$

a zároveň nám z toho vyplýva, že hodnota portfólia sa v čase nemení, preto zároveň platí aj

$$d\Pi = d(SQ_S + VQ_V + B) = 0. \quad (1.4)$$

Prefinancovanie daného portfólia nám hovorí o zmene množstva  $Q_V$  opcií,  $Q_S$  akcií a  $\delta$  dlhopisov, čo matematicky vieme vyjadriť:

$$SdQ_S + VdQ_V + \delta B = 0. \quad (1.5)$$

Na oceňovanie bezkupónových dlhopisov využívame jednoduchý vzťah  $B(t) = B(0)e^{tr}$  kde  $r$  je bezriziková miera úročenia. Tento úrok sa zvyčajne udáva ako výnos zo štátnych dlhopisov, ktoré sú vo všeobecnosti považované za bezpečné aktívum. Zmena  $dB(t) = rB(t)$  vyjadruje úročenie dlhopisu, no nesmieme zabúdať, že dlhopisy sú zároveň možné prostriedky na prerozdeľovanie portfólia, pričom na toto prerozdelenie využijeme  $\delta B$  dlhopisov, preto zmena peňažného objemu je  $dB(t) = rB(t) + \delta B$ . Derivovaním (1.4) a využitím podmienky (1.5) dostaneme

$$\begin{aligned} d\Pi &= d(SQ_S + VQ_V + B) \\ &= dSQ_S + dVQ_V + rB + SdQ_S + VdQ_V + \delta B \\ &= dSQ_S + dVQ_V + rB. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Keď dlhopisy  $B$  vyjadríme za pomoci (1.3), získame vzťah

$$dSQ_S + dVQ_V - rSQ_S dt - rVQ_V dt = 0. \quad (1.7)$$

Po dosadení (1.1) a (1.2) do vzťahu (1.7) a definovaním  $\Delta = -\frac{Q_S}{Q_V}$ , kde  $\Delta$  predstavuje pomer počtu  $Q_S$  akcií a počtu  $Q_V$  opcií držaných v portfóliu, dostaneme rovnicu

$$\left( \partial_t V + \mu(S, t) S \partial_S V + \frac{1}{2} \sigma^2(S, t) S^2 \partial_S^2 V - \Delta \mu(S, t) S + \Delta r S - rV \right) dt - (\Delta \sigma(S, t) S - \sigma(S, t) S \partial_S V) dw = 0 \quad (1.8)$$

Keďže berieme do úvahy akciu vyplácajúcu dividendy, stredná hodnota stochastického procesu je v tvare  $\mu - q$ . Volatilitu  $\sigma = \sigma(S, t)$  môžeme určiť rôznymi spôsobmi, jedným z nich je uvažovať pevnú volatilitu na základe historických dát, prípadne ju vypočítať implicitne. Odstránenie rizikového stochastického faktora  $dw$  zabezpečíme výberom

$$\Delta = \partial_S V.$$

Ak stále udržujeme takýto pomer akcií a opcií, zabezpečíme si tým elimináciu rizika, pretože nám v procese vystupujú len deterministické členy  $dt$  a žiadne stochastické  $dw$ . Pomocou tohoto pomeru vieme zistiť cenu opcie  $V(S, t)$  závislú od ceny akcie  $S$  pre čas  $t \in [0, T]$ , ktorá je riešením lineárnej parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\partial_t V + (r - q) S \partial_S V + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_S^2 V - rV = 0, \quad (1.9)$$

s počiatočnými podmienkami  $V(S, T) = \max(S - E, 0)$  pre *Call opciu* a  $V(S, T) = \max(E - S, 0)$  pre *Put opciu*. V rovnici  $\sigma$  predstavuje volatilitu procesu,  $r > 0$  je úroková miera bezkupónového dlhopisu,  $q$  je výnos z dividend. Pre konštantnú  $\sigma > 0$  sa rovnica (1.9) nazýva lineárna Black-Scholesova diferenciálna rovnica. Predpokladom fungovania tohto modelu sú dosť obmedzujúce požiadavky:

- úplnosť trhu,
- trh je dokonale likvidný,
- investor môže obchodovať s ľubovoľným počtom akcií bez ovplyvnenia jeho ceny,
- žiadne obmedzenia na shortselling
- žiadne transakčné náklady,
- dokonalá deliteľnosť cenných papierov
- lognormálne rozdelenie cien, ...



Takýto model je nerealistický. Môžeme však zmeniť konštantnú hodnotu  $\sigma > 0$  na funkciu závislú od viacerých parametrov, pričom dostaneme nelineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu. Volatilita  $\sigma$  zapísaná vo všeobecnom tvare vyzerá:

$$\sigma = \sigma(S^2 \partial_S^2 V, S, T - t).$$

Pre Black-Scholesovu rovnicu s takouto volatilitou vieme do modelu zahrnúť napríklad transakčné náklady, neúplnosť trhu, likviditu, alebo riziko z nestability portfólia.

## 1.2 Príklady nelineárnych modelov

Vytvorenie modelu, ktorý by splňal predpoklady reálneho trhu je prakticky nemožné. Každý nelineárny model sa snaží zabezpečiť splnenie zvyčajne jedného alebo dvoch reálnych požiadaviek. Funkcia volatilita je pre každý model rôzna, finančný derivát každého nelineárneho modelu spĺňa Black - Scholesovu rovnicu.

### Lelandov model

Lelandov model [13] bol vytvorený na oceňovanie put a call opcie za prítomnosti transakčných nákladov pri kúpe a predaji opcií. Burzy si pri každom obchodovaní účtujú poplatky, preto uvažujeme, že akcie sa nakupujú za cenu *ask*, ktorá je od skutočnej rovnovážnej ceny akcie navýšená o transakčný poplatok, cena *bid* za ktorú aktívum predávame je oň znížená. Lineárny model je založený na spojitom prerovnávaní portfólia, to by však viedlo k nekonečným nákladom. Predpokladom Lelandovho modelu je, že prerozdeľujeme portfólio každých  $\Delta t$  časových jednotiek. Volatilita nadobúda tvar

$$\sigma(S^2 \partial_S^2 V, S, T - t) = \hat{\sigma}^2 (1 - Le \operatorname{sign}(\partial_S^2 V)) \quad (1.10)$$

kde  $\hat{\sigma} > 0$  predstavuje konštantnú historickú volatilitu vypočítanú na základe dát,  $Le$  je takzvaná Lelandova konštanta

$$Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}} C \frac{1}{\hat{\sigma} \sqrt{\Delta t}}, \quad (1.11)$$

$C$  predstavuje chybu zo zaokrúhlenia transakčných nákladov na 1\$ transakcie, t.j.  $C = \frac{S^{ask} - S^{bid}}{S}$ ,  $\Delta t > 0$  je nami určená frekvencia prerozdeľovania portfólia. V praxi to znamená to, že čím častejšie prerozdeľujeme portfólio, tým sú poplatky vyššie. Ak akciu vlastnime, vtedy je hodnota  $\partial_S^2 V > 0$  a volatilita daná ako  $\sigma = \hat{\sigma}^2 (1 - Le \operatorname{sign}(\partial_S^2 V))$

je menšia ako pri klasickom Black - Scholesovom modeli, pričom cena takéhoto finančného derivátu je pri ostatných nezmenených parametroch nižšia. Ak akciu nevlastníme a je v tzv. krátkej pozícii, vtedy je cena derivátu konkávna funkcia,  $\partial_S^2 V < 0$  a volatilita nadobúda vyššiu hodnotu.

### RAPM model

RAPM, alebo *Riziko zahrňujúca metodológia* je nelineárny model, ktorý vytvoril Kratka [9] a neskôr bol zovšeobecnený Jandačkom a Ševčovičom [11]. Tento model zahŕňa transakčné náklady podobne ako *Lelandov model*, no taktiež berie do úvahy rastúce riziko neprerozdeľovaného portfólia. Ak uvažujeme opciu v dlhej pozícii, potom je volatilita v tvare

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 (1 + \bar{\mu}(S\partial_S^2 V)^{1/3}), \quad (1.12)$$

ak v krátkej, potom

$$\sigma^2 = \hat{\sigma}^2 (1 - \bar{\mu}(S\partial_S^2 V)^{1/3}), \quad (1.13)$$

kde  $\hat{\sigma}^2$  je volatilita vypočítaná na základe historických dát,  $\bar{\mu} = 3(\frac{C^2 R}{2\pi})^{1/3}$ ,  $C$  predstavujú relatívne náklady na 1\$ transakcie pri kúpe, alebo predaji akcií  $S$  a  $R$  koeficient prémie za riziko. Tomuto modelu sa viac venujeme v ďalšej kapitole.

### Model so skákajúcimi volatilitami

Týmto modelom sa zaoberali Avellaneda a kol. [1], pričom uvažovali s možnosť neúplnosti trhu. Volatilita nie je presne určená a je viazaná.

$$\sigma^2(S^2\partial_S^2 V, S, T-t) \begin{cases} \hat{\sigma}_1^2, & \text{ak } \partial_S^2 V < 0, \\ \hat{\sigma}_2^2, & \text{ak } \partial_S^2 V > 0, \end{cases}$$

$\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  je určitá horná a dolná apriórna hranica, ktorá môže byť určená na základe historických dát.

### Model nelikvidného trhu

Existuje aj model, ktorý sa zaoberá vplyvom veľkého investora na cenu podkladového aktíva. Tento model zovšeobecnil Frey a kol. [8] a volatilita podkladového aktíva má tvar:

$$\sigma^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{(1 - \rho S \partial_S^2 V)^2}.$$

V tomto modeli vystupuje parameter  $\rho$ , ktorý je parametrom likvidity. Likvidita hovorí o tom, ako dlho trvá, kým sa podarí zameniť akciu za iný tovar alebo peniaze. Peniaze sú vo všeobecnosti dokonale likvidné, lebo výmena za tovar je možná vždy a okamžite. Ak je parameter  $\rho$  nulový, akcia je dokonale likvidná rovnako ako peniaze a máme lineárnu Black - Scholesovu rovnicu (1.9). Ak je  $\rho < 0$ , znamená to, že je po tovare väčší dopyt ako ponuka, akcia sa ľahko predá a vďaka tomu cena môže byť vyššia. Naopak, ak je  $\rho > 0$ , vtedy ponuka prevyšuje dopyt, cena akcie je nižšia a je ťažšie ju predať.

### Model so zahrnutou preferenciou investora

Model s nelineárnou volatilitou, ktorý vytvorili Barles a Soner [3], vyjadruje preferencie investora pomocou exponenciálnej funkcie užitočnosti:

$$\sigma^2(S^2\partial_S^2V, S, T - t) = \hat{\sigma}^2(1 + \Psi(a^2e^{r\tau}S^2\partial_S^2V, S, \tau)),$$

kde  $\Psi(x)$  je riešením diferenciálnej rovnice:

$$\Psi'(x) = (\Psi(x) + 1) \frac{1}{2\sqrt{x\Psi(x)} - x}, \text{ pričom } \Psi(0) = 0.$$

---

## 2 Odvodenie nelineárnych modelov

Hoci je lineárny model jednoduchý na riešenie a vieme ho explicitne riešiť, kvôli obmedzujúcim predpokladom vznikajú vo výsledkoch v porovnaní s reálnymi dátami značné odchýlky. Preto, ako už bolo spomenuté vyššie, vznikali zložitejšie modely, ktoré boli kvôli svojej nelinearite náročnejšie na nájdenie riešenia, ale zahrňujú aspoň jeden reálny predpoklad navyše. V kapitole bližšie predstavíme riziko zahrňujúcu metodológiu (ďalej ako RAPM) a model nelikvidného trhu.

### 2.1 RAPM model

RAPM model [11] je nelineárny model, ktorý zahŕňa okrem transakčných nákladov vzniknutých pri kúpe a predaji podkladového aktíva, aj riziko spojené s nechráneným portfóliom. Čím častejšie sa portfólio prerozdeľuje, tým sú celkové náklady vyššie a naopak, čím menej sa portfólio prerozdeľuje, tým sa stáva portfólio nechránené, volatilita portfólia je vyššia a stáva sa rizikovejším. Cieľom modelu je nájdenie optimálnej frekvencie prerozdeľovania portfólia tak, aby sa minimalizovali celkové straty z možného rizika alebo prerozdeľovania. Odvodenie modelu je založené na nasledovných predpokladoch.

1. Uvažujme portfólio zložené z jednej opcie a delta prislúchajúcich akcií  $\Pi = V + \delta S$ , pričom prerozdeľujeme každých  $\Delta t$  časových jednotiek.
2. Cena akcie opisuje geometrický Brownov pohyb v diskkrétnej forme  $\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Phi \sqrt{\Delta t}$ , a  $\Phi$  je náhodná premenná z  $N(0, 1)$ .
3. Opcia je v dlhej pozícii, čiže akciu vlastníme.
4. Transakčné náklady sú dané relatívne k cene akcie. Akciu kupujeme za drahšiu cenu  $S_{ask} = S(1 + \frac{c}{2})$  a predávame za lacnejšiu  $S_{bid} = S(1 - \frac{c}{2})$ , pričom  $S = \frac{S_{ask} + S_{bid}}{2}$ .

Uvažujme samofinancovaciú stratégiu, takže prostriedky, ktoré chceme využiť na kúpu (predaj) opcií, musíme vykryť z predaja (kúpy) akcií. Zmena portfólia v čase vyjadruje rozdiel medzi novou hodnotou po prerozdeľovaní a pôvodnou hodnotou  $\Delta \Pi = \Pi(t + \Delta t) - \Pi(t)$ . V portfóliu chceme prerozdeľovaním minimalizovať riziko. Ak je riziko portfólia

nulové, na to aby nevznikla arbitráž, hodnota portfólia by mala v čase rásť rovnakou úrokovou mierou  $r$  ako bezrizikové portfólio,  $\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$ . Akcie sa za bezrizikové nepovažujú, preto žiadame za podstúpenie rizika pri investovaní vyšší výnos. Rozdiel výnosu rizikovej akcie oproti výnosu bezrizikových aktív je prémie za riziko a je tým vyššia, čím sú akcie rizikovejšie. Ako už bolo vyššie spomenuté, daná odmena za riziko je kompenzáciou za transakčné náklady a volatilitu portfólia, preto si investor za podstúpenie oboch rizík výnos vo výške  $r_R = r_{TC} + r_{VP}$ . Keďže vo všeobecnosti môžu akcie vyplácať dividendy vo výške  $qS$ , celková zmena hodnoty nášho portfólia za čas  $\Delta t$  je vyjadrená nasledovne:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t - \delta qS\Delta t + r_R S\Delta t \quad (2.1)$$

Ako uvádzajú Jandačka so Ševčovičom v [11], na získanie jednotlivých rizík môžeme uvažovať dve samostatné úlohy. Najskôr chvíľu uvažujeme nulové straty z volatility portfólia  $r_{VP} = 0$ . Chceme prerozdeliť portfólio predaním alebo kúpou akcií. Za čas  $\Delta t$  súčasne dochádza k zmene hodnôt opcie a akcie. Celková zmena hodnoty portfólia predstavuje zmenu hodnoty opcie ktorú držíme, zmenu hodnoty delta držaných akcií  $\delta\Delta S$  a to celé je ešte znížené o náklady vynaložené na prerozdelenie portfólia. Kúpa jednej akcie predstavuje náklady vo výške  $S\frac{C}{2}$ , pre celkovú zmenu  $\Delta\delta$  počtu akcií to je  $S\frac{C}{2} |\Delta\delta|$ . Zmenu hodnoty portfólia  $\Delta\Pi$  matematicky vyjadríme ako

$$\Delta\Pi = \Delta V + \delta\Delta S - S\frac{C}{2} |\Delta\delta|, \quad (2.2)$$

kde  $\frac{C}{2}S$  predstavuje stratu, ktorá vzniká pri kúpe a predaji jednej akcie. Ak na naše portfólio aplikujeme *Itoóvu lemu* a spojíme vzťahy (2.1) a (2.2), dostaneme

$$(\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V)\Delta t + (\partial_S V + \delta)\Delta S - S\frac{C}{2} |\Delta\delta| = (r\Pi - \delta qS - r_{TC}S)\Delta t. \quad (2.3)$$

Podobne ako v kapitole 1.1 chceme minimalizovať straty odstránením stochastických členov v rovnici. Keďže  $dS$  má náhodný charakter kvôli stochastickému členu  $dw$ , definovaním počtu držaných akcií  $\delta = -\partial_S V$  tento náhodný člen eliminujeme a dostaneme vzťah

$$(\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V)\Delta t - S\frac{C}{2} |\Delta\delta| = (r(V - S\partial_S V) + \partial_S V qS - r_{TC}S)\Delta t. \quad (2.4)$$

Aplikovaním *Itoóvej lemy* na  $\Delta\delta$  a zanedbaním  $\Delta t$  a členov vyšších rádov získame aproximáciu  $\Delta\delta \approx \sigma S \partial_S^2 V \Delta W$ . Očakávaná hodnota stochastického člena  $\Delta W$  potom je

$$E[|\Delta W|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta t.$$

Z kapitoly 1.1 vieme, že rovnica  $(\partial_t V + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_S^2 V) \Delta t - r(V - \partial_S V) \Delta t + \partial_S V q S \Delta t = 0$  je Black - Scholesova rovnica bez transakčných nákladov. Zahrnutím transakčných nákladov do vzťahu (1.9) nám pribudli členy  $S \frac{C}{2} |\Delta\delta|$  a  $r_{TC} S \Delta t$ . Následným využitím aproximácie pre  $\Delta\delta$  získavame určenie výšky odmeny  $r_{TC}$  za riziko z transakčných nákladov:

$$r_{TC} = \frac{C \sigma S}{\sqrt{2\pi}} |\partial_S^2 V| \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (2.5)$$

Nie je náhoda, že náklady vyšli totožné ako sú uvedené v Lelandovom modeli, pretože model RAPM vychádza pri odvodení práve z myšlienky tohoto modelu.

Druhá úloha pozostáva v nájdení odmeny  $r_{VP}$  za riziko nechráneného portfólia, pričom tentokrát zanedbáme transakčné náklady. Čím je volatilita portfólia vyššia, tým si investor žiada vyššiu finančnú odmenu ako kompenzáciu za vyššie riziko. Mieru tohto rizika je vhodné merať ako varianciu zmeny hodnoty portfólia pripadajúci na hodnotu akcie za časový interval  $\Delta t$ :

$$r_{VP} = R \frac{\text{var}(\frac{\Delta\Pi}{S})}{\Delta t}, \quad (2.6)$$

kde konštanta  $R$  reprezentuje krajnú hodnotu, kedy je ešte investor ochotný vystaviť sa riziku. Inak povedané je to koeficient prémie za riziko. Aplikovaním *Itoóvej lemy* na  $\Delta\Pi = \Delta V + \delta \Delta S$  dostaneme

$$\Delta\Pi = (\partial_S V + \delta) \sigma S \Delta W + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_S^2 V (\Delta W)^2 + \mathcal{G} \quad (2.7)$$

kde  $\mathcal{G} = (\partial_S V + \delta) \mu S \Delta t + \partial_t V \Delta t$ . Keďže  $\mathcal{G}$  obsahuje len deterministické členy, platí  $E(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ . Vieme, že  $W$  predstavuje Wienerov proces v diskkrétnej forme, pričom  $\Delta W = \Phi \sqrt{\Delta t}$  a  $\Phi$  je náhodná premenná z normálneho rozdelenia s parametrami  $N(0, 1)$ , preto platí  $E[\Delta W] = 0$  a  $E[\Delta W]^2 = 1$ . Nás zaujíma hodnota variancie  $\text{var}(\Delta\Pi) = E[(\Delta\Pi - E(\Delta\Pi))^2]$ , preto najskôr vypočítame  $\Delta\Pi - E[\Delta\Pi]$ :

$$\Delta\Pi - E[\Delta\Pi] = (\partial_S V + \delta) \sigma S \Phi \sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_S^2 V (\Phi^2 - 1) \Delta t. \quad (2.8)$$

Pri odvodzovaní transakčných nákladov sme stanovili podmienku  $\delta = -\partial_S V$ . Zo štatistiky platí  $E[(\Phi^2 - 1)^2] = 2$ . Variancia zmeny hodnoty portfólia je preto rovná:

$$\begin{aligned} \text{var}(\Delta\Pi) &= E[(\Delta\Pi - E(\Delta\Pi))^2] \\ &= E\left[\left((\partial_S V + \delta)\sigma S\Phi\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V(\Phi^2 - 1)\right)^2\right] \\ &= E\left[\frac{1}{2}\sigma^4 S^4 (\partial_S^2 V)^2 \Delta t^2\right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pre zjednodušenie zápisu si definujeme  $\Gamma = \partial_S^2 V$ . S využitím (2.6) a (2.9) dostaneme

$$r_{VP} = \frac{1}{2}R\sigma^4 S^2 \Gamma^2 \Delta t. \quad (2.10)$$

Získali sme vyjadrenie pre prémie za obe riziká; riziko z transakčných nákladov  $r_{TC}$  a riziko z volatility portfólia  $r_{VP}$ . Uvažujme, že investor je rizikovo averzný a preto sa snažíme dané riziko minimalizovať. Hľadáme minimum nasledovnej  $r_R(\Delta t)$  funkcie:

$$r_R = r_{TC} + r_{VP} = \frac{C\sigma S}{\sqrt{2\pi}} |\Gamma| \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} + \frac{1}{2}R\sigma^4 S^2 \Gamma^2 \Delta t. \quad (2.11)$$

Minimum nájdeme derivovaním (2.11) podľa  $\Delta t$  a výsledok položíme rovný nule:

$$0 = -\frac{C\sigma S}{\sqrt{2\pi}} |\Gamma| \frac{1}{(\Delta t)^{3/2}} + \frac{1}{2}R\sigma^4 S^2 \Gamma^2. \quad (2.12)$$

Minimálnu hodnotu celkového rizika dosiahneme stanovením optimálnej frekvencie  $\Delta t_{\text{opt}}$  prerozdelenia:

$$\Delta t_{\text{opt}} = \frac{K^2}{\sigma^2 |S\Gamma|^{2/3}}, \quad (2.13)$$

pričom  $K = \left(\frac{C}{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/3}$ . Spätným dosadením (2.13) do (2.11) získame

$$r_R(\Delta t_{\text{opt}}) = \frac{3}{2} \left(\frac{C^2 R}{2\pi}\right)^{1/3} \sigma^2 |S\Gamma|^{4/3}. \quad (2.14)$$

Týmto sme dostali vyjadrenie optimálnej frekvencie prerozdelenia portfólia a zároveň očakávanú hodnotu prémie za riziko. Zo vzorca (2.11) vidieť, ako sme aj v úvode kapitoly spomínali, že pre  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $r_{TC} \rightarrow \infty$  teda rastú náklady z prerozdelenia portfólia a pre  $\Delta t \rightarrow \infty$   $r_{VP} \rightarrow \infty$ , teda znižovaním frekvencie prerozdeľovania zvyšujeme rizikovosť portfólia a tým možné straty.

Teraz nám ostáva už len odvodiť parciálnu diferenciálnu rovnicu, ktorá vyhovuje RAPM modelu. Vychádzame z rovnice (2.1). Po aplikovaní *Itoóvej lemy* a stanovením podmienky  $\delta = -\partial_S V$  dostaneme:

$$\partial_t V + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \partial_S^2 V + (r - q)S\partial_S V - rV + r_R S = 0. \quad (2.15)$$

Po dosadení (2.14) do (2.15) a následnou úpravou dostaneme nelineárnu Black - Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\partial_t V + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \Gamma (1 + \bar{\mu} (S\Gamma)^{1/3}) + (r - q) S \partial_S V - rV = 0, \quad (2.16)$$

kde  $\Gamma = \partial_S^2 V$ ,  $\bar{\mu} = 3 \left( \frac{C^2 R}{2\pi} \right)^{1/3}$ ,  $r$  je bezriziková miera bezkupónového dlhopisu a  $q$  je dividendova sadzba. Na zabezpečenie jednoznačného riešenia je dôležité, aby bola splnená podmienka  $\beta'(H) \geq 0$ . Tá je zaručená, ak

$$S\Gamma \geq (-3/4\bar{\mu})^3. \quad (2.17)$$

Jandačka a Ševčovič [11, strana 242] sa tiež venovali analýze správania sa ceny opcie  $V = V(S, t)$  v čase blízkej do expirácie  $T$ . Ak definujeme  $\tau = T - t$ , tak za čas blízky do expirácie považujeme  $\tau > 0$ , pričom  $\tau$  je malé. Lelandov model predpokladá, že frekvencia prerozdelenia je oveľa menšia ako  $\tau$  [12,13]. Na to, aby bolo zaručené  $\Delta t_{opt} \ll \tau$ , stačí pridať podmienku, že sa portfólio prerozdeľuje v čase blízko expirácie  $T$ . Tým pádom sme dostali dva intervaly; interval  $(0, t^*)$ , kde sa portfólio nemôže prerozdeľovať a  $(t^*, T)$ , kde sa prerozdeľovať môže. Na intervale kde neprerozdeľujeme sú transakčné náklady nulové, preto  $\bar{\mu} = 0$  a platí lineárna Black - Scholesova rovnica (1.9). Danú lineárnu rovnicu vieme explicitne riešiť (pozri [15], strany 47 - 57), pričom hodnota opcie pre čas  $t^*$  je daná

$$\begin{aligned} V(S, t^*)^c &= SN(d_1) e^{-q(T-t^*)} - EN(d_2) e^{-r(T-t^*)}, \\ V(S, t^*)^p &= EN(-d_2) e^{-r(T-t^*)} - SN(-d_1) e^{-q(T-t^*)}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

kde  $N(d)$  je kumulatívna distribučná funkcia,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(S/E) + (r - q + \sigma^2/2)(T - t^*)}{\sigma \sqrt{T - t^*}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma \sqrt{T - t^*}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

pričom  $S$  je cena akcie,  $E$  je expiračná cena,  $r$  je bezriziková miera úročenia,  $q$  sú vyplácané dividendy,  $\sigma$  je variancia portfólia,  $T$  je čas do expirácie a  $t^*$  je takzvaný *switching time*.  $V(S, t^*)^c$  je vzorec na získanie hodnoty *call opcie* a  $V(S, t^*)^p$  na vyčíslenie hodnoty *put opcie*. *Switching time* môžeme stanoviť ako minimálnu frekvenciu pri ktorej prerozdeľujeme portfólio:

$$T - t^* = \min_{S>0} \Delta t_{opt}(S, t^*). \quad (2.20)$$



Ak dostaníme hodnotu  $\Delta t_{opt}$ , ktorú máme vyjadrenú ako (2.14) do (2.20), následnou úpravou dostaneme

$$T - t^* = \frac{C}{R\sigma^2}, \quad (2.21)$$

Čas  $t$  berieme do úvahy len na intervale  $t \in [0, T]$ , a  $t < t^* < T$ . Vidíme, že  $T - t^* > 0$ . Týmto sme získali podmienku

$$C < R\sigma^2, \quad (2.22)$$

ktorú musíme pri riešení úlohy uvažovať. Na intervale  $t \in [0, t^*]$  riešime nelineárnu diferenciálnu rovnicu (2.16). Keďže explicitné riešenie vo všeobecnosti nepoznáme, musíme ju riešiť numericky.

## 2.2 Transformácia RAPM modelu na Gama rovniciu

Predtým ako začneme samotnú nelineárnu parabolickú rovnicu (2.16) riešiť, najskôr si ju upravíme na vhodnejší tvar. Ako prvé zavedieme substitúciu na nezávislé premenné:

$$x := \ln\left(\frac{S}{E}\right), \quad x \in R, \quad \tau = T - t, \quad \tau \in (0, T). \quad (2.23)$$

Ukázalo sa, že je veľmi výhodné využiť aj transformáciu

$$H(x, \tau) = S\Gamma = S\partial_S^2 V(S, t), \quad (2.24)$$

a zdefinovať si pomocnú funkciu

$$\beta(H) = \frac{1}{2}\sigma^2 H(1 + \bar{\mu}(H)^{1/3}). \quad (2.25)$$

Na základe daných substitúcií platí:

$$\begin{aligned} \partial_x S &= (Ee^x)'_x = Ee^x = S, \\ \partial_x V(S, t) &= \partial_S V(S, t) \partial_x S = S \partial_S V(S, t), \\ \partial_x^2 V(S, t) &= S \partial_S V(S, t) + S^2 \partial_S^2 V(S, t) = S \partial_S V(S, t) + SH(x, t), \\ \partial_\tau H(x, \tau) &= \partial_t (S \partial_S^2 V(S, t)) \partial \tau t = -\partial_t (S \partial_S^2 V(S, t)), \end{aligned} \quad (2.26)$$

Tieto vzťahy pre derivácie využijeme pri odvodzovaní Gama rovnice. Rovnicu (2.16) dvakrát zderivujeme podľa premennej  $x$ . Po prvej derivácii dostávame rovnicu

$$\begin{aligned} \partial_t (S \partial_x V) + S \beta(H) + S \partial_x \beta(H) + (r - q)(S \partial_S V + S^2 \partial_S^2 V) - r S \partial_S V &= 0, \\ S (\partial_t (\partial_x V) + \beta(H) + \partial_x \beta(H) + (r - q)(\partial_S V + SH) - r \partial_S V) &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Hodnota opcií pre ktoré je cena  $S$  podkladového aktíva nulová, je taktiež nulová. Zaujímajú nás netriviálne riešenia, preto rovnicu (2.27) môžeme danou premennou  $S$  predeliť. Druhou deriváciou už predelenej rovnice (2.27) dostaneme

$$\partial_t(S\partial_x^2V) + \partial_x\beta(H) + \partial_x^2\beta(H) + (r - q)(S\partial_S^2V + \partial_xH) - rS\partial_S^2V = 0. \quad (2.28)$$

Definovali sme si  $H(x, \tau) = S\partial_S^2V(S, t)$  a po úprave dostaneme takzvanú Gama rovniciu, ktorú neskôr využijeme pri numerickom výpočte:

$$\partial_\tau H(x, \tau) = \partial_x^2\beta(H(x, \tau)) + \partial_x\beta(H(x, \tau)) + (r - q)\partial_xH(x, \tau) - qH(x, \tau), \quad (2.29)$$

kde  $\tau \in (\tau^*, T)$ ,  $x \in R$ . Daná rovnica je narozdiel od nelineárnej parabolickej Black - Scholesovej rovnice (2.16) kvázilineárna parabolická rovnica a túto vieme pomerne jednoducho numericky riešiť. Pre *call* aj *put* opciu môžeme všeobecne vyjadriť počiatočnú podmienku

$$H(x, 0) = \hat{H}(x), \quad x \in R, \quad (2.30)$$

kde  $\hat{H}(x)$  je Diracova delta funkcia  $\hat{H}(x) = \delta(x)$  v tvare

$$H(x, 0) = \hat{H}(x), \quad x \in R. \quad (2.31)$$

Pripomeňme, že Diracova funkcia je funkcia distribučného charakteru taká, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\Phi(x)dx = \Phi(x_0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1, \quad (2.32)$$

pre ľubovoľnú hladkú funkciu  $\Phi$ . Ako už bolo v predchádzajúcej časti povedané, riešenie hľadáme na dvoch intervaloch. Najskôr riešime lineárnu Black - Scholesovu rovnicu na intervale  $\tau \in (0, \tau^*)$  pomocou explicitného riešenia (2.18). Na intervale  $\tau \in (\tau^*, T)$  explicitné riešenie nepoznáme, ale vieme, že nájdené riešenie funkcie  $V(S, t)$  spĺňaajúce nelineárnu Black - Scholesovu rovnicu (2.16) vyhovuje aj odvodenej beta rovnici (2.25). Ostáva nám už len určiť okrajové a počiatočné podmienky  $H(-\infty, \tau)$ ,  $H(\infty, \tau)$  a  $H(x, \tau^*)$  pričom vieme, že platí  $H(x, \tau) = S\partial_S^2V(S, t)$ . Keďže na hranici *switching time*  $\tau^*$  ešte platí explicitné riešenie vyhovujúce lineárnej Black - Scholesovej rovnici (2.18), využijeme to, že z explicitného riešenia vieme vyjadriť nasledovné parciálne derivácie:

$$\begin{aligned} \partial_S V(S, t) &= e^{-q(T-t)} N(d_1), \\ \partial_S^2 V(S, t) &= \frac{e^{-q(T-t)} N'(d_1)}{S\sqrt{T-t}}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

kde  $S \geq 0$ ,  $t \in (t^*, T - t^*)$ ,  $r$  je výnos derivátu,  $q$  dividendová sadzba a

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T - t^*)}{\sqrt{T - t^*}}.$$

Z tohoto ľahko vidieť, že poznáme počiatočnú podmienku pre čas  $\tau^*$ :

$$\hat{H}(x) = H(x, \tau^*) = \frac{e^{-q\tau^*} N'(d_1)}{\sqrt{T - \tau^*}}, \quad (2.34)$$

pričom  $\tau^* > 0$  je dostatočne malé. Okrajové podmienky

$$H(+\infty, \tau) = H(-\infty, \tau) = 0 \quad (2.35)$$

vieme odvodiť z nasledovných limitných vzťahov:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} d_1 = +\infty,$$

$$\lim_{S \rightarrow -\infty} d_1 = -\infty,$$

$$\lim_{S \rightarrow \pm\infty} N'(d_1) = 0.$$

Keď numericky nájdeme riešenie  $H(x, T)$ , musíme ho spätne transformovať, aby sme dostali naše hľadané riešenie  $V(S, 0)$ . Z definície  $\partial_S^2 V(S, t) = \frac{1}{S} H(\ln(S/E), \tau)$  prvou integráciou dostaneme

$$\begin{aligned} \partial_S V(S, t) &= \int_0^S \frac{1}{s} H(\ln(S/E), T - t) ds + K_1(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\ln(S/E)} \frac{Ee^x}{Ee^x} H(x, T - t) dx + K_1(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\ln(S/E)} H(x, T - t) dx + K_1(t). \end{aligned}$$

Následnou integráciou odvodíme:

$$\begin{aligned} V(S, t) &= \int_0^S \left( \int_{-\infty}^{\ln(s/E)} H(x, T - t) dx \right) ds + SK_1(t) + K_2(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\ln(S/E)} \left( \int_{Ee^x}^S H(x, T - t) ds \right) dx + SK_1(t) + K_2(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(S - Ee^x, 0) H(x, T - t) dx + SK_1(t) + K_2(t), \end{aligned} \quad (2.36)$$

kde  $K_1(t) = \partial_S V(0, t)$ ,  $K_2(t) = V(0, t)$  sú premenné nezávislé od  $S$  a v  $V(0, t) = \partial_S V(0, t) = 0$ . Po úprave získame vzorec pre *Call opciu*

$$V(S, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \max(S - Ee^x, 0) H(x, T - t) dx. \quad (2.37)$$

Analogickým postupom vieme získať vzorec pre *Put opciu*

$$V(S, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \max(Ee^x - S, 0)H(x, T - t)dx. \quad (2.38)$$

Ako ukážeme v práci neskôr, ak integrujeme na inom intervale ako  $[0, S]$ , premenné  $K_1(t)$  a  $K_2(t)$  môžu byť nenulové. Budú to také prípady, kedy  $\partial_S V(S, t)$  a  $\partial_S^2 V(S, t)$  nebudú mať riešenie pre  $S = 0$ .

Doteraz sme sa zaoberali myšlienkou, že opcia je v dlhej pozícii a v čase expirácie jej tvar je  $V(S, T)$ . V prípade, že opciu dlhujeme (teda je v krátkej pozícii), hodnota  $\bar{V}(S, T)$  v čase expirácie je opačná k držanej opcii  $\bar{V}(S, T) = -V(S, T)$ . Pretože majiteľ nadodúba zisk uplatnením opcie na úkor dlhovateľa, celý proces  $\bar{V}(S, t)$  je opačný k  $V(S, t)$ . Z tohto nám vyplýva, že všetky derivácie sú taktiež s opačným znamienkom a  $\bar{V}(S, T)$  vyhovuje Black- Scholesovej rovnici

$$-\partial_t \bar{V} - \frac{\sigma^2}{2} S \Gamma (1 - \bar{\mu} (S \Gamma)^{1/3}) - (r - q) S \partial_S \bar{V} + r \bar{V} = 0.$$

Keď prenásobíme celú rovnicu hodnotou  $-1$ , dostávame tvar

$$\partial_t \bar{V} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \Gamma (1 - \bar{\mu} (S \Gamma)^{1/3}) + (r - q) S \partial_S \bar{V} - r \bar{V} = 0, \quad (2.39)$$

pričom  $\bar{V}(S, t) = -V(S, t)$  rieši (2.39). Netreba zabudnúť na podmienku parabolicnosti, pretože rovnica (2.39) má riešenie len vtedy, ak

$$S \Gamma \leq (3/4 \bar{\mu})^3. \quad (2.40)$$

## 2.3 Model nelikvidného trhu

Na rozdiel od klasického lineárneho modelu, model ktorý odvodil Frey [8], berie do úvahy nelikvidnosť na trhu. Táto nelikvidita trhu hovorí, že ak investor nakúpi veľké množstvo akcií, cena týchto akcií sa určite zmení. Pre investora je vtedy oveľa náročnejšie predať veľké množstvo akcií za trhovú cenu, pretože dopyt po nich môže byť malý. Predpokladáme, že cieľom investora je replikácia derivátu dynamickou stratégiou založenou na dvoch adaptovaných procesoch  $(\alpha_t, \beta_t)$  [16]. Výraz  $\alpha_t(\beta_t)$  predstavuje počet rizikových podielov v portfóliu v čase  $t$  (ďalej označujeme len  $\alpha(\beta)$ ). V tomto modeli predpokladáme, že zmena ceny podkladového aktíva sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw + \rho S d\alpha, \quad (2.41)$$

kde  $\mu$  je stredná hodnota náhodného procesu,  $\sigma$  je volatilita daného procesu,  $0 \leq \rho \leq \hat{\rho}$  je parameter likvidity a  $W(t)$  predstavuje Wienerov proces. Uvažujeme, že dynamická hedžovacia stratégia investora  $\alpha(\beta)$  je hladká funkcia  $\Phi(S, t)$ , ktorá závisí od ceny podkladového aktíva  $S$  a času  $t$ . Diferenciál ceny podkladovej akcie  $dS$  je daný implicitne (2.41), pretože  $d\alpha$  znovu obsahuje diferenciál ceny  $dS$ . Postupne ukážeme, že ho vieme vyjadriť aj explicitne. Uvažujme  $dS$  v tvare

$$dS = b(S, t)Sdt + v(S, t)Sdw. \quad (2.42)$$

Z Itoóvej lemy, rovnakým postupom ako sme odvodili diferenciál  $dV(S, t)$  v (1.2) vieme odvodiť, že diferenciál hedžovacej stratégie je v tvare

$$d\alpha = \partial_S \Phi dS + \left( \partial_t \Phi + \frac{v^2(S, t)}{2} \partial_S^2 \Phi \right) dt. \quad (2.43)$$

Ak tento diferenciál dosadíme do (2.41), dostaneme

$$(1 - \rho S \partial_S \Phi) dS = b(S, t)Sdt + v(S, t)Sdw + \rho S \left( \partial_t \Phi + \frac{v^2(S, t)}{2} \partial_S^2 \Phi \right) dt. \quad (2.44)$$

Z tohoto vieme ľahko určiť strednú hodnotu a varianciu procesu  $dS$  ako

$$\begin{aligned} v(S, t) &= \frac{\sigma}{1 - \rho S \partial_S \Phi}, \\ b(S, t) &= \frac{1}{1 - \rho S \partial_S \Phi} \left( \mu + \rho \left( \frac{v^2(S, t)}{2} \partial_S^2 \Phi \right) \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Získali sme explicitné vyjadrenie pre  $dS$  v tvare

$$dS = \frac{1}{1 - \rho S \partial_S \Phi} \left( \mu + \rho \left( \frac{v^2(S, t)}{2 \partial_S^2 \Phi} \right) \right) Sdt + \frac{\sigma}{1 - \rho S \partial_S \Phi} Sdw. \quad (2.46)$$

Odvodenie diferenciálu ceny opcie  $dV(S, t)$  a Black - Scholesovej rovnice pre model nelikvidného trhu je analogické, ako sme odvodili v kapitole 1.1, s tým rozdielom, že namiesto  $\mu$  uvažujeme  $b(S, t)$  a namiesto volatility  $\sigma(S, t)$  uvažujeme  $v(S, t)$ . Cena opcie  $V(S, t)$  vyhovuje diferenciálnej rovnici

$$\partial_t V + \frac{v^2(S, t)}{2} S^2 \partial_S^2 V + (r - q) S \partial_S V - rV = 0, \quad (2.47)$$

kde  $r$  je bezrizikový úrok a  $q$  výnos z dividend. Koeficienty  $r$  a  $q$  zvyknú zanedbať, aby sa zjednodušil výpočet riešenia. V práci taktiež hľadáme riešenie nelineárnej Black -

Scholesovej rovnice s nulovými hodnotami pre  $r$  a  $q$ . Naša úloha na nájdenie riešenia ceny opcie  $V(S, 0)$  sa nám zjednodušila, pričom  $V(S, t)$  vyhovuje diferenciálnej rovnici

$$\partial_t V + \frac{v^2(S, t)}{2} S^2 \partial_S^2 V = 0, \quad (2.48)$$

počiatočná podmienka  $V(S, T)$  je  $V^c(S, T) = \max\{S - E, 0\}$ , ak sa jedná o *call* opciu a  $V^p(S, T) = \max\{E - S, 0\}$ , ak o put opciu. Zostáva nám ešte vyjadriť funkciu  $\Phi$ . Myšlienka spočíva v stratégii minimalizovania takzvaného "zero tracking erroru", inak povedané uhlovej chyby. Nulová odchýlka podľa [8] nastane vtedy, ak funkcia  $\alpha = \Phi(S, t)$  je definovaná ako delta ceny opcie  $V(S, t)$ , ktorá rieši nelineárnu Black-Scholesovu rovnicu (2.48):

$$\Phi(S, t) = \partial_S V(S, t), \quad (2.49)$$

a volatilita  $v(S, t)$  riešenia  $V(S, t)$  je v tvare

$$v(S, t) = \frac{\sigma}{1 - \rho S \partial_S^2 V}. \quad (2.50)$$

Potom hľadáme funkciu  $V(S, t)$ , ktorá je riešením nelineárnej Black - Scholesovej rovnice

$$\partial_t V + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1 - \rho S \partial_S^2 V)^2} S^2 \partial_S^2 V = 0, \quad (2.51)$$

kde  $S > 0$ ,  $t \in [0, T]$ . Oproti lineárnemu modelu nastal rozdiel vo variancii procesu  $dS$ . Variancia v nelineárnom modeli nadobúda tvar  $\frac{\sigma^2}{(1 - \rho S \partial_S^2 V)^2}$ , pričom v lineárnom hodnotu  $\sigma^2$ . Pre  $\rho > 0$ ,  $\frac{\sigma^2}{(1 - \rho S \partial_S^2 V)^2} > \sigma^2$ , variancia v nelineárnom modeli vychádza vyššia, čo negatívne ovplyvní aj cenu opcie - je drahšia. Na trhu, kde nie je dokonalá likvidita, si musí dominantný investor priplatiť.

## 2.4 Transformácia modelu nelikvidného trhu na Gama rovniciu

Ak chceme riešiť diferenciálnu rovnicu 2.51 pre model nelikvidného trhu, musíme podobne ako pre RAPM model v Kapitole 2.2 danú rovnicu transformovať na Gama rovnicu. Postup je analogický. Zavedieme substitúciu na nezávislé premenné:

$$x := \ln\left(\frac{S}{E}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau = T - t, \quad \tau \in (0, T). \quad (2.52)$$

Využijeme transformáciu  $V(S, t)$  na funkciu  $H(x, \tau)$  v tvare

$$H(x, \tau) = S \partial_S^2 V(S, t), \quad (2.53)$$

a definujeme pomocnú funkciu beta

$$\beta(H) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{H}{(1 - \rho H)^2}. \quad (2.54)$$

Využitím (2.54) a dosadením do (2.51) dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$\partial_t V + \beta(H)S = 0. \quad (2.55)$$

Funkcia  $V(S, t)$  je závisí od premenných  $S$  a  $t$ , pričom  $H(x, \tau)$  od  $x$  a  $\tau$ . Aby sme dostali Gama rovnicu, ktorá obsahuje len premenné  $x$  a  $\tau$ , musíme danú rovnicu zderivovať podľa premennej  $x$ . S využitím vzťahov(2.26), ktoré sme odvodili v Kapitole 2.2, dostaneme

$$\partial_t(\partial_S V)S + \partial_x \beta(H)S + \beta(H)S = 0. \quad (2.56)$$

Cena opcie, ktorej podkladové aktívum má hodnotu  $S = 0$ , je taktiež nulová, pre  $S > 0$  môžeme rovnicu (2.56) predeliť  $S$  a následnou druhou deriváciou podľa  $x$  získame Gama rovnicu v tvare

$$\partial_\tau H = \partial_x^2 \beta(H) + \partial_x \beta(H). \quad (2.57)$$

Dostali sme kvázilineárnu diferenciálnu rovnicu, ktorú vieme numericky riešiť. Hodnota opcie v čase expirácie je výsledkom rovnakej funkcie, ako pre RAPM model. Pretože  $V^c(S, T) = \max\{S - E, 0\}$  je výplatná funkcia pre *call opciu* a  $V^p(S, T) = \max\{E - S, 0\}$  pre *put opciu*, počiatočná podmienka je opäť výsledkom Diracovej funkcie v tvare

$$H(x, 0) = \hat{H}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.58)$$

pričom

$$\hat{H}(x) = H(x, \tau^*) = \frac{e^{-q\tau^*} N'(d_1)}{\sqrt{T - \tau^*}}, \quad (2.59)$$

kde  $\tau^* > 0$  je dostatočne malé číslo. Ako vidíme, pre  $\tau = 0$  by funkcia nebola spojitá, preto sme znovu museli využiť *switching time*  $\tau^*$ . Pre okrajové hodnoty platí  $H(-\infty, \tau) = H(\infty, \tau) = 0$ . Pre nájdené riešenie  $H(x, T)$  vieme spraviť spätnú integráciu a získame riešenie pre *call opciu*

$$V(S, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \max(S - Ee^x, 0)H(x, T - t)dx. \quad (2.60)$$

Analogicky, vzorec pre *Put opciu* má tvar

$$V(S, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \max(Ee^x - S, 0)H(x, T - t)dx. \quad (2.61)$$



---

### 3 Explicitné riešenie nelineárnych modelov

Doteraz sme sa zaoberali riešením RAPM modelu implicitne pomocou numerického výpočtu. L.A. Borgadová sa zaoberala týmto modelom [6] a aj ďalšími modelmi pomocou metódy geometrickej analýzy. Použitím tejto metódy sa dajú nájsť viaceré explicitné riešenia ktoré budú vyhovovať RAPM modelu. Ako neskôr ukážeme, prevodom na Gama rovnicu a hľadaním  $H(x, \tau)$  sa dajú odhaliť niektoré explicitné riešenia. Hoci majú dané riešenia diskutabilný charakter, môžu nám poslúžiť pri skúmaní vlastností RAPM modelu, presnosti numerických výpočtov a testov.

#### 3.1 RAPM model bez zahrnutia dividend

Jedným z riešení, ktoré Bordagová [6] uvádza, je v tvare

$$V(S, t) = \frac{k_i^3}{r} S \ln S - (k_i^3 - \beta)tS + c_1 S + c_2 e^{rt}, \quad (3.1)$$

kde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $r \neq 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\phi \neq \pi/2$  a  $k_i$  musí byť koreňom rovnice

$$k_i^3(1 - \bar{\mu}r^{-\frac{1}{3}}k_i) + \frac{2r\beta}{\sigma^2} = 0, \quad (3.2)$$

pričom berieme do úvahy iba reálne korene. Podľa znamienka mínus v zátvorke vieme, že sa jedná o model, kde je opcia v krátkej pozícii. Overíme, či dané explicitné riešenie je naozaj riešením nelineárnej Black - Scholesovej rovnice (2.16) pre RAPM model bez zahrnutia dividend, ktorá je v tvare

$$\partial_t V + rS\partial_S V + \frac{\sigma^2}{2}S^2\Gamma(1 - \bar{\mu}\Gamma^{1/3}) - rV = 0. \quad (3.3)$$

Najskôr odvodíme jednotlivé parciálne derivácie, ktoré nám vystupujú v diferenciálnej rovnici:

$$\begin{aligned} \partial_t V &= -(k_i^3 - \beta)S + c_2 r e^{rt}, \\ \partial_S V &= \frac{k_i^3}{r} \ln S + \frac{k_i^3}{r} - (k_i^3 - \beta)t + c_1, \\ \partial_S^2 V &= \frac{k_i^3}{r} \frac{1}{S}. \end{aligned}$$

Ak dosadíme tieto členy do (3.3), dostaneme

$$\begin{aligned} & - (k_i^3 - \beta)S + c_2 r e^{rt} + rS \left( \frac{k_i^3}{r} \ln S + \frac{k_i^3}{r} - (k_i^3 - \beta)t + c_1 \right) \\ & + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{k_i^3}{r} \frac{1}{S} \left( 1 - \bar{\mu} \left( \frac{k_i^3}{r} \right)^{1/3} \right) - r \left( \frac{k_i^3}{r} S \ln S - (k_i^3 - \beta)tS + c_1 S + c_2 e^{rt} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Po úprave naozaj dostaneme podmienku pre  $k_i$  (3.1) v tvare

$$k_i^3 (1 - \bar{\mu} r^{-\frac{1}{3}} k_i) + \frac{2r\beta}{\sigma^2} = 0.$$

Uvedené riešenie je naozaj riešením RAPM modelu. Zaujímá nás, či výsledok numerického spôsobu riešenia je totožný s explicitným riešením. Keď chceme získať riešenie numericky, musíme rovnicu (3.3) transformovať na Gama rovnicu

$$\partial_\tau H(x, \tau) = \partial_x^2 \beta(H(x, \tau)) + \partial_x \beta(H(x, \tau)) + r \partial_x H(x, \tau), \quad (3.5)$$

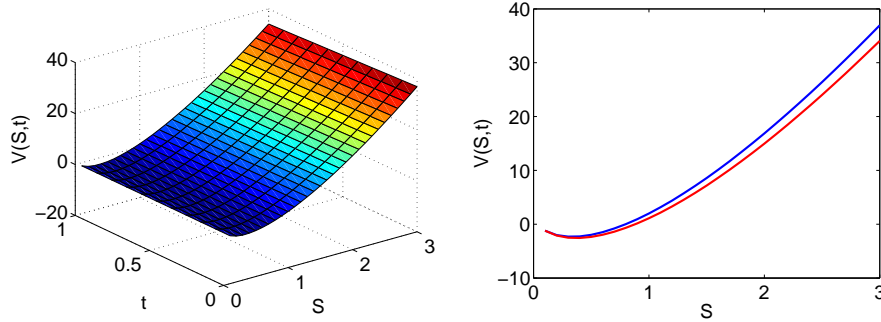
kde  $H(x, \tau) = S \partial_S^2 V$ ,  $x = \ln(S/E)$  a  $\tau = T - t$ . Z explicitného riešenia (3.1) vieme ľahko nájsť tvar funkcie  $H(x, \tau)$ . Keďže  $\partial_S^2 V = \frac{k_i^3}{r} \frac{1}{S}$  a zároveň vieme, že  $H(x, \tau) = S \partial_S^2 V$ , vidíme, že  $H$  je konštantné a teda je nezávislé od  $\tau$  a ani od  $x$ :

$$H(x, \tau) = H = \frac{k_i^3}{r}.$$

Ak funkciu  $H(x, \tau)$  dosadíme do gama rovnice (3.5), dostaneme na oboch stranách nulovú hodnotu. To znamená, že vstupom a výstupom je tá istá konštanta  $H = \frac{k_i^3}{r}$ . V porovnaní s funkciou  $H(x, \tau)$  z Kapitoly 2.2, daná transformácia nadobúdala nekonštantný tvar, pričom platilo

$$\begin{aligned} H(x, \tau^*) &= \frac{e^{\tau^*} N'(d_1)}{\sqrt{T - \tau^*}}, \quad \tau^* > 0, \\ H(-\infty, \tau) &= H(+\infty, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Vidíme, že pre explicitné riešenie, kde  $H = \frac{k_i^3}{r}$ , nulové okrajové podmienky nikdy nedosiahneme. Taktiež derivácie  $\partial_S V(S, t)$  a  $\partial_S^2 V(S, t)$  nie sú definované pre  $S = 0$ . Na to, aby bola úloha riešiteľná, musíme brať do úvahy len nezáporné ceny akcií. Na obrázku 3.1 môžeme vidieť priebeh funkcie  $V(S, t)$  pre parametre  $k_i = 1$ ,  $r = 0.1$ ,  $\bar{\mu} = 0.1^3$ ,  $\beta = 0$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$ .



Obr. 3.1: Priebeh funkcie  $V(S, t)$  Bordagovej riešenia

Otázna ešte ostáva spätná transformácia z  $H(x, \tau)$  na  $V(S, t)$ . Funkciu  $H(x, \tau)$  postupne zintegrujeme. Keďže derivácie nie sú pre  $S = 0$  definované, za oblasť, na ktorej integrujeme si zvolíme interval  $[1, S]$ .

$$\begin{aligned} \partial_S V(S, t) &= \int_1^S \frac{1}{s} \frac{k_i^3}{r} ds + K_1(t) = \int_0^{\ln(S/E)} \frac{k_i^3}{r} dx + K_1(t) \\ &= \ln(S/E) \frac{k_i^3}{r} + K_1(t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

kde  $K_1(t) \in R$  je integračná konštanta. Na získanie  $V(S, t)$  musíme spraviť ešte jednu integráciu.

$$\begin{aligned} V(S, t) &= \int_1^S \ln(s) \frac{k_i^3}{r} ds + K_1(t)S + K_2(t), \\ V(S, t) &= \int_0^{\ln(S/E)} x E e^x \frac{k_i^3}{r} dx + K_1(t)S + K_2(t), \\ V(S, t) &= S (\ln(S) - \ln(E)) \frac{k_i^3}{r} - (S - 1) \frac{k_i^3}{r} + K_1(t)S + K_2(t), \end{aligned} \quad (3.8)$$

pričom  $K_1(t) = \beta + c_1 + \ln(E) \frac{k_i^3}{r}$  a  $K_2(t) = -\frac{k_i^3}{r} + c_2 e^{rt}$ . Vidieť, že jednotlivé metódy riešenia sú ekvivalentné.

### 3.2 Zovšeobecnenie explicitného riešenia

Skúsme sa najskôr zamyslieť sa nad tým, čo nám hovorí spätná integrácia z  $H(x, \tau)$  na  $V(S, t)$  v predchádzajúcej časti. Integráciou nám vznikli koeficienty  $K_1(t)$  a  $K_2(t)$ , ktoré vieme vždy určiť tak, aby numerické riešenie vyhovovalo explicitnému riešeniu. Nastoluje sa otázka, či je riešenie invariantné voči posunutiu. Dokážeme nasledovné tvrdenie:

**Tvrdenie 3.1.** *Nech platí*

$$\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V (1 - \bar{\mu}(S \partial_S^2 V)^{\frac{1}{3}}) + (r - q)S \partial_S V - rV = 0. \quad (3.9)$$

Ak  $V(S, t)$  rieši (3.9), potom

$$\tilde{V}(S, T) = V(S, T) + k_1(t)S + k_2(t) \quad (3.10)$$

je opäť riešenie, pričom  $k_1(t)$  a  $k_2(t)$  riešia obyčajné diferenciálne rovnice v tvare

$$\dot{k}_1(t) = -qk_1(t), \quad \dot{k}_2(t) = -rk_2(t).$$

*Dôkaz:* Zo vzťahu (3.10) najskôr určíme parciálne derivácie pre  $\tilde{V}(S, t)$ .

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{V} &= V_t + \dot{k}_1(t)S + \dot{k}_2(t), \\ \partial_S \tilde{V} &= \partial_S V + k_1(t), \\ \partial_S^2 \tilde{V} &= \partial_S^2 V. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Po dosadení do nelineárnej Black - Scholesovej rovnice (2.16) a využitím predpokladu (3.9) dostaneme:

$$\dot{k}_1(t)S + \dot{k}_2(t) + (r - q)Sk_1(t) + k_2(t) = 0. \quad (3.12)$$

Zo vzťahu 3.12 získavame dve diferenciálne rovnice

$$\begin{aligned} \dot{k}_1(t) &= -qk_1(t), \\ \dot{k}_2(t) &= -rk_2(t) \end{aligned}$$

a teda  $\tilde{V}(S, T) = V(S, T) + k_1(T)e^{-q(T-t)}S + k_2(T)e^{-r(T-t)}$  taktiež rieši nelineárnu Black - Scholesovu rovnicu (2.16). Každé riešenie nelineárnej Black - Scholesovej rovnice je invariantné voči posunutiu.

V predchádzajúcom explicitnom riešení RAPM modelu nebola zahrnutá miera výnosu z dividend  $q$ , preto zovšeobecníme Bordagovej riešenie (3.1) o túto mieru. Predpokladajme, že riešenie existuje v tvare

$$V(S, t) = A(t)S \ln S + B(t)S + C(t), \quad (3.13)$$

kde  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  sú koeficienty závislé od času  $t$ .

$$\begin{aligned} \partial_t V &= \dot{A}(t)S \ln S + \dot{B}(t)S + \dot{C}(t), \\ \partial_S V &= A(t) \ln S + A(t) + B(t), \\ \partial_S^2 V &= \frac{A(t)}{S}. \end{aligned}$$

Získané členy dosadíme do nelineárnej Black - Scholesovej rovnice (2.16), aby sme našli podmienky, ktoré musia premenné  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  spĺňať. Dostávame vzťah

$$\begin{aligned} & \dot{A}(t)S \ln S + \dot{B}(t)S + \dot{C}(t) + \frac{\sigma^2}{2}SA(t)(1 - \bar{\mu}(A(t))^{1/3}) \\ & + (r - q)S(A(t) \ln S + A(t) + B(t)) - r(A(t)S \ln S + B(t)S + C(t)) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Po úpraveme dostaneme:

$$\begin{aligned} & \dot{A}(t)S \ln S + \dot{B}(t)S + \dot{C}(t) + \frac{\sigma^2}{2}SA(t)(1 - \bar{\mu}(A(t))^{1/3}) \\ & + rSA(t) - q(S(A(t) \ln S + A(t) + B(t)) + rC(t)) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ak premenné  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  spĺňajú rovnicu (3.15), potom zovšeobecnené riešenie (3.13) spĺňa nelineárnu Black-Scholesovu rovnicu pre RAPM model (2.16). Rovnicu (3.15) si môžeme rozdeliť na tri jednoduché diferenciálne rovnice

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= qA(t), \\ \dot{B}(t) &= qB(T) - \frac{\sigma^2}{2}A(t)(1 - \bar{\mu}(A(t))^{1/3}) - (r - q)A(t), \\ \dot{C}(t) &= rC(t). \end{aligned}$$

Riešením prvej a tretej diferenciálnej rovnice zo sústavy dostaneme

$$A(t) = A_T e^{-q(T-t)}, \quad (3.16)$$

$$C(t) = C_T e^{-r(T-t)}. \quad (3.17)$$

Riešenie druhej diferenciálnej rovnice je o niečo zložitejšie. Najskôr si dosadíme riešenie  $A(t) = A_T e^{-q(T-t)}$ :

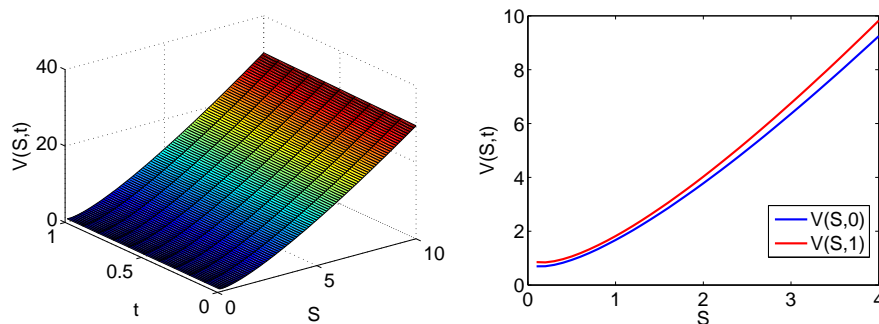
$$\dot{B}(t) = qB(T) - \frac{\sigma^2}{2}A_T e^{-q(T-t)}(1 - \bar{\mu}(A_T e^{-q(T-t)})^{1/3}) - (r - q)A_T e^{-q(T-t)}.$$

Následne integráciou získame riešenie

$$\begin{aligned} B(t) &= B_T e^{-q(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2}A_T e^{-q(T-t)}((T-t) - \bar{\mu} \frac{3}{q}(A_T^{1/3})) \\ &+ (T-t)(r - q)A_T e^{-q(T-t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 \bar{\mu} A_T^{4/3} \frac{3}{q} e^{-4/3q(T-t)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Zovšeobecnené explicitné riešenie RAPM modelu teda môžeme napísať v tvare:

$$V(S, t) = A(t)S \ln S + B(t)S + C(t), \quad (3.19)$$



**Obr. 3.2:** Priebeh funkcie  $V(S, t)$  zovšeobecneného riešenia

kde  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  sú (3.16), (3.18), (3.17),  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $C_T$  sú ľubovoľné koncové podmienky,  $r$  je úroková miera a  $q$  je miera výnosu dividend. Aj tentokrát chceme zistiť okrajové a počiatkové podmienky  $H(x, t)$  pre numerické riešenie. Postup je rovnaký ako v Kapitole 3.1. Chceme nájsť transformáciu

$$H(x, \tau) = S \partial_S^2 V,$$

pričom  $x = \ln(S/E)$ ,  $\tau = T - t$ .

$$H(x, \tau) = A_T e^{-q(\tau)}. \quad (3.20)$$

Tentokrát je  $H(x, \tau)$  konštantné iba vzhľadom k  $x$ , v čase sa mení. Chceme nájsť spätnú transformáciu pre  $\tau = T$ . Dosadením do Gama rovnice (2.29) dostávame

$$V(S, t) = S (\ln(S) - \ln(E)) A_T e^{-q(T-t)} - A_T e^{-q(T-t)} S + K_1(t) S + K_2(t), \quad (3.21)$$

kde

$$K_1(t) = A_T e^{-q(T-t)} + B(t) + A_T e^{-q(T-t)} \ln E,$$

$$K_2(t) = C_T e^{-r(T-t)},$$

$B(t)$  je v tvare

$$\begin{aligned} B(t) = & B_T e^{-q(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2} A_T e^{-q(T-t)} \left( (T-t) - \bar{\mu} \frac{3}{q} (A_T^{1/3}) \right) \\ & + (T-t)(r-q) A_T e^{-q(T-t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 \bar{\mu} A_T^{4/3} \frac{3}{q} e^{-4/3q(T-t)}. \end{aligned}$$

a  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $C_T$  ľubovoľné konštanty z  $\mathbb{R}$ . Získali sme explicitné riešenie, ktoré vyhovuje nelineárnej Black - Scholesovej rovnici pre model RAPM, pričom je v modeli zahrnutý

aj výnos z dividend. Priebeh funkcie  $V(S, t)$  môžeme vidieť na obrázku ???. Počiatočná podmienka  $V(S, T)$  nie je v tvare výnosovej funkcie pre *call* alebo *put* opciu ako sme to uviedli v Kapitole 2

$$\begin{aligned}V(S, t^*)^c &= SN(d_1)e^{-q(T-t^*)} - EN(d_2)e^{-r(T-t^*)}, \\V(S, t^*)^p &= EN(-d_2)e^{-r(T-t^*)} - SN(-d_1)e^{-q(T-t^*)}.\end{aligned}$$

Napriek tomu je to jedno z riešení vyhovujúcich RAPM modelu.

---

## 4 Numerická schéma na riešenie nelineárnych modelov

Všeobecné explicitné riešenie, ktoré by splňalo Gama rovnicu s počiatočnou podmienkou  $V(S, T)$  vyjadrujúce hodnotu *call* a *put* v čase expirácie nepoznáme. Poznáme možnosti [pozri 16], ako nájsť hodnotu finančného derivátu numerickým výpočtom. Pomocou numerickej metódy vznikne odchýlka spôsobená diskretizáciou priestoru, pretože priestor, v ktorom hľadáme riešenie je spojitý a taktiež hľadané riešenie je spojitá funkcia. Napriek tomu, vhodnou diskretizáciou a vhodne zvolenou numerickou metódou sa dá nájsť hľadané riešenie s minimálnou nepresnosťou. Hľadáme riešenie Gama rovnice pre RAPM model a pre model nelikvidného trhu v tvare

$$\partial_x H(x, \tau) = \partial_x^2 \beta(H(x, \tau)) + \partial_x \beta(H(x, \tau)) + (r - q) \partial_x H(x, \tau) - qH(x, \tau), \quad (4.1)$$

kde  $x = \ln(S/E)$ ,  $\tau = T - t$ ,  $r$  je bezriziková miera úročenia, a  $q$  je miera výnosu dividend. Tento tvar Gama rovnice sa dá v závislosti od definovania funkcie beta použiť aj na riešenie RAPM modelu a po stanovení nulového úroku  $r$  a výnosu z dividend  $q$  aj na model nelikvidného trhu. Vieme, že riešenie jednotlivých modelov nájdeme tak, že využijeme počiatočnú podmienku v tvare

$$H(x, \tau^*) = \hat{H}(x) = \frac{e^{-q\tau^*} N'(d_1)}{\sqrt{T - \tau^*}}, \quad (4.2)$$

kde  $\tau^* > 0$  je malé,  $d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r - q + \sigma^2/2)(\tau^*)}{\sigma\sqrt{\tau^*}}$  a zvolíme nasledovné okrajové podmienky

$$H(+\infty, \tau) = H(-\infty, \tau) = 0. \quad (4.3)$$

Pre naše testovanie využívame koncovú podmienku a okrajové podmienky z explicitných riešení, aby sme mohli v závere porovnať presnosť jednotlivých numerických metód.

Ako prvé pristúpime k diskretizácii priestoru. Vieme, že  $x$  môže byť vo všeobecnosti z intervalu  $x \in (-\infty, +\infty)$ , ale pre naše explicitné riešenia uvažujeme ceny akcií  $S > 1$ , pretože diferencie  $V(S, t)$  explicitných riešení v bode  $S = 0$  neexistujú. Pre numerické výpočty berieme do úvahy len hodnoty pre  $x \in [0, L]$ , kde  $L$  je dostatočne veľké číslo. Vo všeobecnosti sa ukazuje ako postačujúce zvoliť  $L \approx 1.5$ . Interval



$[0, L]$  rozdelíme na  $n$  rovnomerných dielov pričom každý má krok o veľkosti  $h$ , ktorý si zvolíme. Potom počet dielov je  $n = L/h + 1$ . Pre toto delenie je premenná  $x$  diskretizovaná na tvar  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1, n$ . Pre časový krok urobíme taktiež rovnomernú diskretizáciu na intervale  $[0, T]$ , tentokrát na  $m$  dielov o veľkosti kroku  $k$ , pričom  $m = T/k + 1$  a pre  $\tau$  platí diskretizácia  $\tau_j = jk$ ,  $j = 0, \dots, m$ . Správna diskretizácia je pri numerických výpočtoch veľmi dôležitá a zároveň platí, že čím menší časový krok, tým presnejšie riešenie. Nevýhoda veľmi malých krokov je, že výpočet je časovo veľmi náročný. Mnohokrát sa však dosahuje vynikajúca presnosť aj pri krokoch veľkosti  $\approx 0.001$ . V numerickej schéme budeme zapisovať diskretizáciu v tvare

$$H_i^j \approx H(ih, jk). \quad (4.4)$$

Pri numerickom výpočte sú počiatočné podmienky a okrajové veľmi dôležité. Poznáme počiatočné podmienky pre  $\tau = 0$  v tvare  $H(x, 0)$  a našou úlohou je nájsť riešenie pre  $\tau = T$  v tvare  $H(x, T)$ . Postupne vyratávame riešenie  $H(x, \tau)$  na jednotlivých časových vrstvách. V numerike poznáme dve základné metódy výpočtu. Prvou je explicitná metóda, ktorá využíva na výpočet novej vrstvy jedine prvky z predchádzajúcej časovej vrstvy. Čo sa týka algoritmu je veľmi jednoduchá, ale pri výpočte musíme rátať s istými obmedzeniami. Ďalším základným typom je implicitná metóda, ktorá na výpočet novej časovej vrstvy využíva všetky prvky z novej časovej vrstvy. Pri implicitnej metóde sa hľadá riešenie v sústave rovníc alebo nerovníc v závislosti od typu diferenciálnej rovnice, na ktorej chceme nájsť riešenie. Pri hľadaní riešenia v lineárnom modeli je použitie pomerne jednoduché. Pri Gama rovnici vznikne pri implicitnej schéme systém nelineárnych rovníc, ktorých výpočet je značne komplikovaný a v práci túto metódu nevyužijeme. Existujú však aj ďalšie metódy, ktoré sú kombináciou explicitnej a implicitnej metódy alebo ich modifikáciami ([?]). My využijeme okrem explicitnej metódy aj takzvanú semi - implicitnú metódu, v ktorej sa všetky nelineárne prvky vypočítajú explicitne z predchádzajúcej časovej vrstvy a lineárne prvky sa vypočítavajú implicitne z novej časovej vrstvy. Z numeriky ([2]) poznáme tri druhy aproximácií derivácií:

- dopredná diferenciacia s chybou rádu  $O(h)$  :

$$\partial_x f(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} + O(h) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h);$$

- spätná diferencia s chybou rádu  $O(h)$  :

$$\partial_x f(x_{i+1}) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} + O(h) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h);$$

- a centrálna, ktorá je s chybou rádu  $O(h^2)$  :

$$\partial_x f(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + O(h^2) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2).$$

Centrálna diferencia dáva najmenšiu chybu, pretože hodnotu derivácie počítame v strednom bode a nie v krajnom, ako je to v predošlých dvoch uvedených. Pre aproximáciu druhej derivácie platí:

$$\partial_x^2 f \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(x_{i+1} - x_i)^2} + O(h^2) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2).$$

Ako vidíme, aproximáciou druhej derivácie vzniká chyba rádu  $O(h^2)$ , čo je rovnaká, ako vzniknutá chyba pri centrálnej diferencii prvej derivácie. Aby sme zabezpečili veľkosť chyby metódy maximálne  $O(h^2)$ , pre priestorovú diferenciu  $x$  využívame centrálnu diferenciu. Časovú diferenciu aproximujeme buď spätnou diferenciou, čím získame explicitnú schému, alebo doprednou diferenciou a riešime semi - implicitnú schému. Časová diferencia spôsobí chybu rádu  $O(\tau)$ .

Ostáva otázne, ako najlepšie aproximovať prvú a druhú deriváciu  $\partial_x \beta(H)$  a  $\partial_x^2 \beta(H)$  beta funkcií jednotlivých modelov. Jedna možnosť je derivácie numericky vypočítať ako

$$\begin{aligned} \partial_x \beta(H) &\approx \frac{\beta(H_{i+1}) - \beta(H_{i-1})}{2h} + O(h^2), \\ \partial_x^2 \beta(H) &\approx \frac{\beta(H_{i+1}) - 2\beta(H_i) + \beta(H_{i-1}))}{h^2} + O(h^2). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Kedže funkcie  $\beta(H)$  sú pre oba modely známe, vieme ich zderivovať, pričom platia nasledovné vzťahy

$$\begin{aligned} \partial_x \beta(H) &\approx \beta'_H(H) \frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2h} + O(h^2), \\ \partial_x^2 \beta(H) &\approx \left( \beta'_H(H_{i+1/2}) \frac{H_{i+1} - H_i}{h} - \beta'_H(H_{i-1/2}) \frac{H_i - H_{i-1}}{h} \right) \frac{1}{h} + O(h^2). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Takáto aproximácia by mala znížiť počet možných nepresností pri výpočtoch oproti využitiu aproximácie (4.5). Hodnoty funkcie  $H$  v bodoch  $x_{i+1/2}$  a  $x_{i-1/2}$  vypočítame pomocou lineárnej interpolácie ako  $H_{i+1/2} = \frac{H_{i+1} + H_{i-1}}{2}$  a  $H_{i-1/2} = \frac{H_i + H_{i-1}}{2}$ . Ak by sme

v postupe pre aproximáciu  $\partial_x^2 \beta(H)$  pokračovali ďalej a zderivovali by sme ju, dostali by sme

$$\partial_x^2 \beta(H) \approx \beta_H''(H_i) \frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{(2h)^2} + \beta_H'(H_i) \frac{(H_{i+1} - 2H_i + H_{i-1}))}{h^2} + O(h^2). \quad (4.7)$$

Táto aproximácia sa nedá použiť pri numerickom riešení RAPM modelu s počiatočnou podmienkou  $H(x, \tau^*) = \frac{e^{-q\tau^*} N'(d_1)}{\sqrt{T-\tau^*}}$ , lebo  $\beta_H''(H)$  je v tvare

$$\beta_H''(H) = \frac{4}{9} \mu H^{-2/3}$$

Daná aproximácia nie je pre model vhodná, lebo  $H$  je na okrajoch intervalu rovné nule a preto by nám numerický výpočet zlyhal. Pri hľadaní riešenia v RAPM modeli sa zvyčajne využívajú aproximácie druhej derivácie v tvare (4.6).

*Poznámka:* Existujú však modely, kde v beta funkcii môže priamo vystupovať aj samotné  $x$  alebo  $\tau$ , preto by mal všeobecný zápis pre beta funkciu vyzeráť  $\beta(H(x, \tau), x, \tau)$ . V modeloch ako RAPM a model nelikvidného trhu, beta funkcia priamo závisí len od  $H$ , vďaka tomu nám stačilo uvádzať beta funkciu v tvare  $\beta(H(x, \tau)) = \beta(H)$ . Deriváciu  $\partial_x \beta(H)$  sme zjednodušene aproximovali ako  $\beta_H'(H) \partial_x H$ , ale vo všeobecnosti by sme mali použiť aproximáciu  $\partial_x \beta(H(x, \tau), x, \tau) = \beta_H'(H(x, \tau), x, \tau) \partial_x H + \beta_x'(H(x, \tau), x, \tau)$ .

Diferenciálna rovnica, ktorú chceme numericky riešiť, je v tvare

$$\partial_\tau H(x, \tau) = \partial_x^2 \beta(H(x, \tau)) + \partial_x \beta(H(x, \tau)) + (r - q) \partial_x H(x, \tau) - qH(x, \tau), \quad (4.8)$$

pre RAPM model a pre  $r = q = 0$  riešime model nelikvidného trhu. V závislosti využitia jednotlivých aproximácií pre derivácie funkcie  $\beta(H)$  a zvolenia si explicitnej alebo semi-implicitnej metódy riešenia, získame rôzne numerické schémy pre naše výpočty, ktorých výsledky môžeme porovnávať. Celková chyba každej z metód je rádu  $O(h^2) + O(\tau)$ .

## 4.1 Explicitná metóda

Pre explicitnú metódu je veľmi jednoduché vytvoriť algoritmus, ale funguje len za obmedzených podmienok. Na základe odvodených možností aproximácie nám vznikajú nasledovné schémy výpočtu. Ak berieme do úvahy aproximáciu (4.5), potom riešime

schému

$$\begin{aligned} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} &= \frac{1}{h^2} (\beta(H_{i+1}^j) - 2\beta(H_i^j) + \beta(H_{i-1}^j)) \\ &+ \frac{1}{2h} (\beta(H_{i+1}^j) - \beta(H_{i-1}^j)) + (r - q) \frac{1}{2h} (H_{i+1}^j - H_{i-1}^j) - qH_i^j. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Všetky prvky starej časovej vrstvy poznáme, jedinou neznámou je hodnota  $H_i^{j+1}$ . Ak využijeme aproximáciu (4.6), potom numericky riešime

$$\begin{aligned} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} &= \frac{1}{h^2} (\beta'_H(H_{i+1/2}^j)(H_{i+1}^j - H_i^j) - \beta'_H(H_{i-1/2}^j)(H_i^j - H_{i-1}^j)) \\ &+ \frac{1}{2h} (\beta'_H(H_i^j)(H_{i+1}^j - H_{i-1}^j)) + (r - q) \frac{1}{2h} (H_{i+1}^j - H_{i-1}^j) - qH_i^j. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Pre aproximáciu (4.7) dostávame

$$\begin{aligned} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} &= \frac{1}{h^2} (\beta''_H(H_i^j)((H_{i+1}^j - H_{i-1}^j)^2) + \beta'_H(H_i^j)(H_{i+1}^j - 2H_i^j + H_{i-1}^j)) \\ &+ \frac{1}{2h} (\beta'_H(H_i^j)(H_{i+1}^j - H_{i-1}^j)) + (r - q) \frac{1}{2h} (H_{i+1}^j - H_{i-1}^j) - qH_i^j. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Získali sme tri rôzne explicitné schémy, pomocou ktorých môžeme hľadať riešenie daných nelineárnych modelov. Aby bola zaručená stabilita, musí byť splnená Courant-Lewy-Fridrichova podmienka (ďalej ako CLF) v tvare

$$\frac{k\sigma^2}{h^2} \leq 1.$$

Táto je veľmi nevýhodná, pretože pri nami zvolenom priestorovom kroku  $h = 0.01$ , variancii  $\sigma^2 = 0.16$  musíme zvoliť časový krok najviac  $t = 0.000625$ . Kvôli tomu je hľadanie riešenia pomocou explicitnej metódy hlavne pri veľmi malých krokoch z časového hľadiska značne zdĺhavé.

## 4.2 Implicitná metóda

Pri voľbe implicitnej schémy sú všetky členy v rovnici vypočítavané priamo z novej časovej vrstvy. Ak by sme volili aproximáciu derivácií ako (4.6), riešili by sme schému

$$\begin{aligned} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} &= \frac{1}{h^2} (\beta'_H(H_{i+1/2}^{j+1})(H_{i+1}^{j+1} - H_i^{j+1}) - \beta'_H(H_{i-1/2}^{j+1})(H_i^{j+1} - H_{i-1}^{j+1})) \\ &+ \frac{1}{2h} (\beta'_H(H_i^{j+1})(H_{i+1}^{j+1} - H_{i-1}^{j+1})) + (r - q) \frac{1}{2h} (H_{i+1}^{j+1} - H_{i-1}^{j+1}) - qH_i^{j+1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Jedinou známou hodnotou v schéme je  $H_i^j$ . Postup výpočtu je založený na iteračnom procese [pozri aj ??]. Najskôr by sa ako štartovací vektor zvolil vektor zložený z hodnôt starej časovej vrstvy a postupnými iteráciami by sa hľadali lineárne prvky a nelineárne prvky z novej časovej vrstvy pomocou projekcií. Hľadanie by sa ukončilo, ak by naše riešenie bolo dostatočne blízko k skutočnému. Výhodou schémy je, že nemá obmedzenie na priestorový a časový krok. Nevýhodou je jej značne komplikované riešenie a preto riešenie pomocou implicitnej schémy vynecháme.

### 4.3 Semi - implicitná metóda

Semi - implicitná metóda je kombináciou explicitnej a implicitnej metódy. Nelineárne členy berieme explicitne zo starej časovej vrstvy a lineárne členy implicitne z novej. Ak by sme chceli semi-implicitne riešiť numerickú schému založenú na aproximácii derivácii  $\beta_x(H)$  ako (4.5), pravá strana rovnice by obsahovala len nelineárne členy a dostali by sme schému totožnú s explicitnou schémou (4.9). Môžeme však využiť aproximáciu (4.6) a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} &= \frac{1}{h^2} \left( \beta'_H(H_{i+1/2}^j)(H_{i+1}^{j+1} - H_i^{j+1}) - \beta'_H(H_{i-1/2}^j)(H_i^{j+1} - H_{i-1}^{j+1}) \right) \\ &+ \frac{1}{2h} \left( \beta'_H(H_i^j)(H_{i+1}^{j+1} - H_{i-1}^{j+1}) \right) + (r - q) \frac{1}{2h} (H_{i+1}^{j+1} - H_{i-1}^{j+1}) - qH_i^{j+1}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Aby sme mohli pristúpiť k numerickému počítaniu schémy, definujeme si

$$\begin{aligned} a(i) &= -\frac{k}{h^2} \beta'_H(H_{i-1/2}^j) + \frac{k}{2h} \beta'_H(H_i^j) + (r - q) \frac{k}{2h}, \quad i = 2, 3, \dots, n - 1 \\ c(i) &= -\frac{k}{h^2} \beta'_H(H_{i+1/2}^j) - \frac{k}{2h} \beta'_H(H_i^j) - (r - q) \frac{k}{2h}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 2 \\ b(i) &= (1 - kq) - (a(i) + c(i)), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \\ d(i) &= H_i^j, \quad i = 2, 3, \dots, n - 2. \end{aligned}$$

Prvky  $H_{i+1/2}^j$  a  $H_{i-1/2}^j$  sa aproximujú pomocou lineárnej interpolácie. Zároveň platí

$$\begin{aligned} a(1) &= -\frac{k}{h^2} \beta'_H(H_{i-1/2}^j) + \frac{k}{2h} \beta'_H(H_i^j) + (r - q) \frac{k}{2h}, \\ d(1) &= H_1^j - a(1)H_0^j, \\ c(n - 1) &= -\frac{k}{h^2} \beta'_H(H_{i+1/2}^j) - \frac{k}{2h} \beta'_H(H_i^j) - (r - q) \frac{k}{2h}, \\ d(n - 1) &= H_{n-1}^j - c(n - 1)H_n^j, \end{aligned}$$

pričom  $H_0^j$  je dolná okrajová podmienka pre  $x = 0$  a  $H_n^j$  je horná pre  $x = L$ . Ak si definujeme vektor  $H^{j+1} = (H_1^{j+1}, H_2^{j+1}, \dots, H_{n-1}^{j+1})^T$ , potom hľadáme riešenie  $H^{j+1}$  v tvare  $AH^{j+1} = d$ , kde  $A$  je tridiagonálna matica s prvkami  $b(i)$  na diagonále,  $a(i)$  pod a  $c(i)$  nad diagonálou. Vstupným vektorom  $H^0$  je počiatočná podmienka, ktorú poznáme. Na riešenie je výhodné využiť metódu riešenia trojdiagonálneho systému.

Podobným postupom riešime schému, v ktorej aproximujeme druhú deriváciu pomocou (4.7):

$$\begin{aligned} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} &= \frac{1}{h^2} (\beta_H''(H_i^j)((H_{i+1}^j - H_{i-1}^j)^2) + \beta_H'(H_i^j)(H_{i+1}^{j+1} - 2H_i^{j+1} + H_{i-1}^{j+1})) \\ &+ \frac{1}{2h} (\beta_H'(H_i^j)(H_{i+1}^{j+1} - H_{i-1}^{j+1})) + (r - q) \frac{1}{2h} (H_{i+1}^{j+1} - H_{i-1}^{j+1}) - qH_i^{j+1}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Tentokrát si definujeme

$$\begin{aligned} a(i) &= -\frac{k}{h^2} \beta_H'(H_i^j) + \frac{k}{2h} \beta_H'(H_i^j) + (r - q) \frac{k}{2h}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \\ c(i) &= -\frac{k}{h^2} \beta_H'(H_i^j) - \frac{k}{2h} \beta_H'(H_i^j) - (r - q) \frac{k}{2h}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \\ b(i) &= (1 - kq) - (a(i) + c(i)), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ d(i) &= H_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Ak  $i = 1$  alebo  $i = n$  definujeme

$$\begin{aligned} a(1) &= -\frac{k}{h^2} \beta_H'(H_1^j) + \frac{k}{2h} \beta_H'(H_1^j) + (r - q) \frac{k}{2h}, \\ d(1) &= H_1^j - a(1)H_0^j, \\ c(n-1) &= -\frac{k}{h^2} \beta_H'(H_{n-1}^j) - \frac{k}{2h} \beta_H'(H_{n-1}^j) - (r - q) \frac{k}{2h}, \\ d(n-1) &= H_{n-1}^j - c(n-1)H_n^j, \end{aligned}$$

pričom opäť  $H_0^j$  je dolná okrajová podmienka pre  $x = 0$  a  $H_n^j$  je horná pre  $x = L$ . Hľadáme riešenie  $H^{j+1}$  v tvare  $AH^{j+1} = d$ , kde  $A$  je tridiagonálna matica s prvkami  $b(i)$  na diagonále,  $a(i)$  pod a  $c(i)$  nad diagonálou. Vstupným vektorom  $H^0$  je počiatočná podmienka ktorú poznáme. Opäť na riešenie využijeme metódu riešenia trojdiagonálneho systému. V implicitnej schéme vidíme, že matica  $A$  je diagonálne dominantná, pretože prvky  $a(i)$  a  $c(i)$  sú záporné čísla. Vďaka tomu sa nemusíme obmedzovať na podmienku pomeru priestorového a časového kroku  $k \approx h^2$  a výsledok nám konverguje aj pre zvolené  $k = h$ .

## 5 Numerické výsledky výpočtov

Cieľom tejto kapitoly je porovnanie výsledkov numerických riešení so známymi explicitnými riešeniami, ktoré vyhovujú RAPM modelu alebo modelu nelikvidného trhu. Na základe toho môžeme vyhodnotiť rýchlosť a presnosť jednotlivých výpočtov.

### 5.1 RAPM model

V kapitole 3 sme uviedli riešenie

$$\begin{aligned}
 V(S, t) &= A_T e^{-q(T-t)} S \ln S + B(t) S + C_T e^{-r(T-t)}, \\
 B(t) &= B_T e^{-q(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2} A_T e^{-q(T-t)} ((T-t) - \bar{\mu} \frac{3}{q} (A_T^{1/3})) \\
 &\quad + (T-t)(r-q) A_T e^{-q(T-t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 \bar{\mu} A_T^{4/3} \frac{3}{q} e^{-4/3q(T-t)}. \\
 &\quad \frac{1}{2} \sigma^2 \mu A(t)^{4/3} \frac{3}{q} e^{-4/3q(T-t)}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde  $A_T, B_T, C_T, \in R$ . Pri transformácii na  $H(x, \tau) = S \partial_S^2 V(S, t)$  sme dostali

$$H(x, \tau) = A_T e^{-q\tau}.$$

V Gama rovnici nám ostalo riešiť rovnicu jednoduchú diferenciálnu rovnicu

$$\partial_\tau H(x, \tau) = -qH(x, \tau). \tag{5.2}$$

Kedže pre počiatočné riešenie  $H(x, 0)$  vieme nájsť riešenie  $H(x, T)$  analyticky ako

$$\partial_\tau H(x, T) = H(x, 0) e^{-q\tau}, \tag{5.3}$$

je zbytočné pri výpočte využívať numerický výpočet. Využijeme spätnú transformáciu a pomocou integrovania dostaneme riešenie  $V(S, t)$ , ktoré sme už odvodili v Kapitole 3.2.

$$V(S, t) = S (\ln(S) - \ln(E)) A_T e^{-q(T-t)} - A_T e^{-q(T-t)} S + K_1(t) S + K_2(t), \tag{5.4}$$

kde

$$\begin{aligned}
 K_1(t) &= A_T e^{-q(T-t)} + B(t) + A_T e^{-q(T-t)} \ln E, \\
 K_2(t) &= C_T e^{-r(T-t)}.
 \end{aligned}$$

## 5.2 Model nelikvidného trhu

Explicitné riešenie modelu nelikvidného trhu sme čerpali z odvodenia Bordagovej a Freya v [3.1]. Riešenie  $V(S, t)$  pozostáva z dvoch riešení

$$\begin{aligned}
V_1(S, t) = & -\frac{1}{\rho}S \left( \log S - \frac{\sigma^2}{8}t \right) \\
& - \frac{2}{\rho}S \cosh \left( \frac{2}{3} \operatorname{arccosh} \left( -1 + |c| S^{-2/3} e^{\frac{3\sigma^2}{16}t} \right) \right) \\
& - \frac{16}{3\rho}S \log \left( \cosh \left( \frac{1}{6} \operatorname{arccosh} \left( -1 + |c| S^{-2/3} e^{\frac{3\sigma^2}{16}t} \right) \right) \right) \\
& - \frac{4}{3\rho}S \log \left( -1 + 2 \cosh \left( \frac{1}{3} \operatorname{arccosh} \left( -1 + |c| S^{-2/3} e^{\frac{3\sigma^2}{16}t} \right) \right) \right) \\
& + d_1 S + d_2,
\end{aligned} \tag{5.5}$$

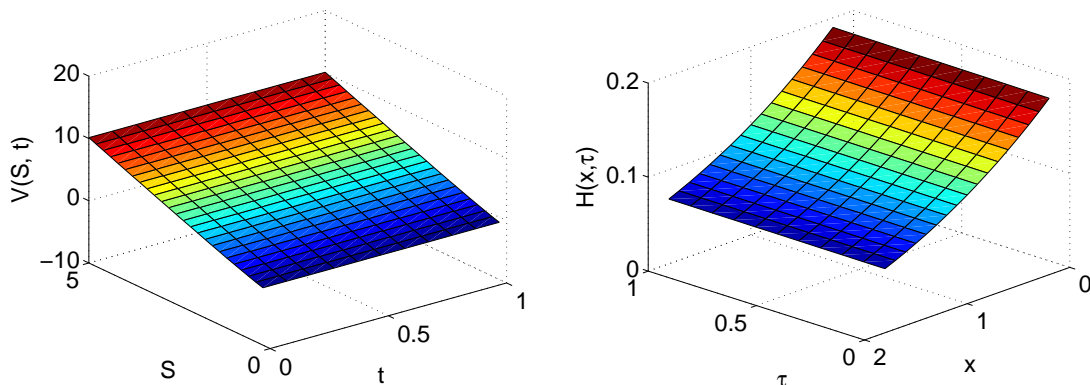
kde  $S \geq \left( \frac{|c|}{S} \right)^{2/3} e^{\frac{\sigma^2}{8}t}$  a

$$\begin{aligned}
V_2(S, t) = & -\frac{1}{\rho}S \left( \log S - \frac{\sigma^2}{8}t \right) \\
& - \frac{2}{\rho}S \cos \left( \frac{2}{3} \operatorname{arccos} \left( -1 + |c| S^{-2/3} e^{\frac{3\sigma^2}{16}t} \right) \right) \\
& - \frac{16}{3\rho}S \log \left( \cos \left( \frac{1}{6} \operatorname{arccos} \left( -1 + |c| S^{-2/3} e^{\frac{3\sigma^2}{16}t} \right) \right) \right) \\
& - \frac{4}{3\rho}S \log \left( -1 + 2 \cos \left( \frac{1}{3} \operatorname{arccos} \left( -1 + |c| S^{-2/3} e^{\frac{3\sigma^2}{16}t} \right) \right) \right) \\
& + d_1 S + d_2,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

pričom  $0 < S < \left( \frac{|c|}{S} \right)^{2/3} e^{\frac{\sigma^2}{8}t}$ ,  $\rho$  je parameter likvidity,  $d_1$  a  $d_2$  ľubovoľné koštanty, ktoré definujú posunutie. Riešenia  $V_1(S, t)$  a  $V_2(S, t)$  sa na seba hladko napájajú a riešenie  $V(S, t)$  je hladké aj v prvej a druhej derivácii. Priebeh funkcie  $V(S, t)$  môžeme vidieť na obrázku 5.1 vľavo. Pre numerický výpočet potrebujeme vedieť hodnoty  $H(x, \tau)$  v počiatočnom čase  $\tau = 0$ , na hornej a dolnej hranici  $x = 0$  a  $x = L$  definovaného priestoru a pre porovnanie výsledkov aj v čase  $\tau = T$ . Priebeh funkcie  $H(x, \tau)$  môžeme vidieť na obrázku 5.1 vpravo.

Keď máme všetky potrebné hodnoty vypočítané, môžeme pristúpiť k testovaniu jednotlivých schém. Ako chybu schémy, takzvaný *error* je braná maximálna odchýlka numerického riešenia  $H_{num}$  od presného riešenia  $H_p$  teda  $error_{max} = \max(|H_p(x, T) - H_{num}(x, T)|)$ . Sledujeme aj čas potrebný na nájdenie riešenia pomocou



Obr. 5.1: Priebeh funkcií  $V(S, t)$  a  $H(x, \tau)$ 

príslušnej schémy a *EOC*, ktorý nám hovorí o rýchlosti konvergencii. Najskôr sa zameriame na jednotlivé explicitné schémy, ktoré sme numericky riešili:

**Explicitná schéma č.1**, ktorá je v tvare:

$$\frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} = \frac{1}{h^2} (\beta(H_{i+1}^j) - 2\beta(H_i^j) + \beta(H_{i-1}^j)) + \frac{1}{2h} (\beta(H_{i+1}^j) - \beta(H_{i-1}^j)). \quad (5.7)$$

**Explicitná schéma č.2:**

$$\begin{aligned} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} = & \frac{1}{h^2} \left( \beta'_H(H_{i+1/2}^j)(H_{i+1}^j - H_i^j) - \beta'_H(H_{i-1/2}^j)(H_i^j - H_{i-1}^j) \right) \\ & + \frac{1}{2h} (\beta'_H(H_i^j)(H_{i+1}^j - H_{i-1}^j)). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Využili sme presný výpočet  $\beta'_H(H) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{1+\rho H}{(1-\rho H)^3}$ .

**Explicitná schéma č.3:**

$$\begin{aligned} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} = & \frac{1}{h^2} (\beta''_H(H_i^j)((H_{i+1}^j - H_{i-1}^j)^2) + \beta'_H(H_i^j)(H_{i+1}^j - 2H_i^j + H_{i-1}^j)) \\ & + \frac{1}{2h} (\beta'_H(H_i^j)(H_{i+1}^j - H_{i-1}^j)), \end{aligned} \quad (5.9)$$

pričom okrem  $\beta'_H(H)$ , ktoré je totožné ako pri schéme č.2 máme aj presný výpočet  $\beta''_H(H) = (\sigma^2 \rho) \frac{2+\rho H}{(1-\rho H)^4}$ .

Výsledky numerických výpočtov môžeme vidieť v tabuľkách 1, 2, a 3. Všetky metódy vykazujú veľmi dobrú presnosť aj pri pomerne veľkom kroku  $h = 0.1$ . Aby sme zaručili konvergenciu, museli sme splniť podmienku CLF, pričom sme stanovili veľkosť kroku  $k = h^2$ . Pri znižujúcom sa kroku sa presnosť takmer kvadraticky zvyšuje. Pre schému č.2 vyšla chyba vo všetkých prípadoch najmenšia, zároveň je aj časovo

najpomalšia. Najrýchlejšia a zároveň najmenej presná sa javí schéma č.1. Ostáva nám porovnať semi-implicitné schémy.

**Tabuľka 1:** Výsledky explicitnej schémy č.1

$h$	$k = h^2$	$error$	čas	EOC
0.1	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$5.64 \cdot 10^{-4}$	-
0.05	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$3.42 \cdot 10^{-6}$	0.0088	1.86
0.025	$6.25 \cdot 10^{-4}$	$8.96 \cdot 10^{-6}$	0.0322	1.93
0.0125	$1.56 \cdot 10^{-4}$	$2.29 \cdot 10^{-7}$	0.2596	1.97
0.00625	$3.91 \cdot 10^{-5}$	$5.80 \cdot 10^{-8}$	2.2835	1.98
0.003125	$9.77 \cdot 10^{-6}$	$1.47 \cdot 10^{-8}$	17.5238	1.98

**Tabuľka 2:** Výsledky explicitnej schémy č.2

$h$	$k = h^2$	$error$	čas	EOC
0.1	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$2.82 \cdot 10^{-6}$	0.0024	-
0.05	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$7.41 \cdot 10^{-7}$	0.0212	1.93
0.025	$6.25 \cdot 10^{-4}$	$1.89 \cdot 10^{-7}$	0.1964	1.97
0.0125	$1.56 \cdot 10^{-4}$	$4.78 \cdot 10^{-8}$	1.5272	1.98
0.00625	$3.91 \cdot 10^{-5}$	$1.20 \cdot 10^{-8}$	12.7144	1.98
0.003125	$9.77 \cdot 10^{-6}$	$3.09 \cdot 10^{-9}$	99.7713	1.97

**Semi - implicitná schéma č.1** Daná schéma je odvodená rovnako ako explicitná schéma č.1, preto ju neuvádzame.

**Semi - implicitná schéma č.2:**

$$\begin{aligned} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} &= \frac{1}{h^2} \left( \beta'_H(H_{i+1/2}^j)(H_{i+1}^{j+1} - H_i^{j+1}) - \beta'_H(H_{i-1/2}^j)(H_i^{j+1} - H_{i-1}^{j+1}) \right) \\ &+ \frac{1}{2h} \left( \beta'_H(H_i)(H_{i+1}^{j+1} - H_{i-1}^{j+1}) \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Tak isto, ako pri explicitnej schéme č.2 sme využili presné riešenie  $\beta'_H(H)$  v tvare  $\frac{\sigma^2}{2} \frac{1+\rho H}{(1-\rho H)^3}$ .

Tabuľka 3: Výsledky explicitnej schémy č.3

$h$	$k = h^2$	$error$	čas	EOC
0.1	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$7.82 \cdot 10^{-6}$	0.0024	-
0.05	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.16 \cdot 10^{-6}$	0.0216	1.86
0.025	$6.25 \cdot 10^{-4}$	$5.67 \cdot 10^{-7}$	0.1837	1.93
0.0125	$1.56 \cdot 10^{-4}$	$1.45 \cdot 10^{-7}$	1.5766	1.97
0.00625	$3.91 \cdot 10^{-5}$	$3.67 \cdot 10^{-8}$	14.6265	1.98
0.003125	$9.77 \cdot 10^{-6}$	$9.32 \cdot 10^{-9}$	101.5984	1.98

**Semi - implicitná schéma č.3:**

$$\begin{aligned} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} &= \frac{1}{h^2} (\beta_H''(H_i^j)((H_{i+1}^j - H_{i-1}^j)^2) + \beta_H'(H_i^j)(H_{i+1}^{j+1} - 2H_i^{j+1} + H_{i-1}^{j+1})) \\ &+ \frac{1}{2h} (\beta_H'(H_i)(H_{i+1}^{j+1} - H_{i-1}^{j+1})). \end{aligned} \quad (5.11)$$

V danej schéme berieme do úvahy presné riešenia pre  $\beta_H'(H)$  ako v predchádzajúcej schéme a  $\beta_H''(H) = \rho\sigma^2 \frac{2+\rho H}{(1-\rho H)^4}$ .

Na základe tabuliek 4 a 5 môžeme vidieť, že metóda konverguje pre rovnaký časový a priestorový krok. Presnosť je pre obe metódy veľmi dobrá. Keď porovnáme jednotlivé schémy výpočtu, tak isto ako pre explicitné schémy, aj pre semi - implicitné vyšla schéma č.2 ako presnejšia a zároveň najpomalšia. V oboch prípadoch sme mohli v rozumnom čase nájsť aj také riešenie, kde  $h = k = 0.000781$ . Pri zmenšovaní kroku rastie presnosť pre oba prípady približne lineárne.

**Tabuľka 4:** Výsledky semi - implicitnej schémy č.2

$h = k$	<i>error</i>	čas	EOC
0.1	$3.94 \cdot 10^{-6}$	$5.17 \cdot 10^{-4}$	-
0.05	$1.04 \cdot 10^{-6}$	0.0017	1.92
0.025	$7.32 \cdot 10^{-7}$	0.0076	0.51
0.0125	$4.47 \cdot 10^{-7}$	0.0287	0.71
0.00625	$2.45 \cdot 10^{-7}$	0.1262	0.84
0.003125	$1.28 \cdot 10^{-8}$	0.5097	0.94
0.001563	$6.55 \cdot 10^{-8}$	2.0927	0.96
0.000781	$3.48 \cdot 10^{-8}$	8.4701	0.91

**Tabuľka 5:** Výsledky semi - implicitnej schémy č.3

$h = k$	<i>error</i>	čas	EOC
0.1	$8.71 \cdot 10^{-6}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	-
0.05	$2.23 \cdot 10^{-6}$	0.0014	1.97
0.025	$1.24 \cdot 10^{-6}$	0.0107	0.85
0.0125	$8.21 \cdot 10^{-7}$	0.0232	0.59
0.00625	$4.65 \cdot 10^{-7}$	0.1051	0.82
0.003125	$2.47 \cdot 10^{-7}$	0.3386	0.91
0.001563	$1.27 \cdot 10^{-7}$	1.7565	0.96
0.000781	$6.61 \cdot 10^{-8}$	6.7823	0.94

## Záver

Cieľom práce bola analýza a návrh numerických schém, ktoré slúžia na riešenie nelineárnych rovníc Black - Scholesovho typu. Využívali sme explicitné riešenia ktoré vyhovovali modelu RAPM a modelu nelikvidného trhu. Pre RAPM model sme odvodili explicitný vzorec, ktorý spĺňa nelineárnu Black - Scholesovu rovnicu, no nedá sa využiť na oceňovanie reálnych opcií. Cenu opcie pre nelikvidný model sme transformovali na funkciu, ktorá vystupuje v Gama rovnici, vďaka čomu sme mohli porovnávať presnosť riešenia a rýchlosť jednotlivých numerických schém.

V prvej kapitole sme priblížili tematiku finančných derivátov a predstavili lineárnu Black - Scholesovu rovnicu, ktorá je základom pre všetky nelineárne modely. Spomedzi nelineárnych modelov sme sa v ďalšej kapitole podrobnejšie zamerali na riziko zahrňujúcu metodológiu, známu ako RAPM model a model nelikvidného trhu. Odvodili sme k nim diferenciálnu rovnicu známu ako Gama rovnica, pomocou ktorej je možné vytvoriť numerickú schému na nájdenie riešenia.

V tretej kapitole sme sa snažili nájsť všeobecné explicitné riešenie RAPM modelu. Inšpirovali sme sa odvodeným explicitným vzorcom Bordagovej, ktorý je síce riešením RAPM modelu, ale nie je možné ho využiť na výpočet reálnej ceny opcie. Riešenie je triviálne, keďže do Gama rovnice ktorú chceme numericky riešiť, vstupuje namiesto funkcie konštantná hodnota. Dané riešenie sa nám podarilo zovšeobecniť na tvar, ktorý zahrňuje aj možné vyplácajúce dividendy. Aj napriek zovšeobecneniu sme dostali triviálne riešenie funkcie vstupujúcej do Gama rovnice, ktoré nemá zmysel numericky riešiť. V nasledovnej kapitole sme odvodili rôzne numerické schémy, ktoré sa môžu využiť pri hľadaní riešenia RAPM modelu alebo modelu nelikvidného trhu. Rozdiel medzi jednotlivými schémami spočíval v rôznej aproximácii derivácie beta funkcie, ktorá vystupuje v Gama rovnici. Pre každú aproximáciu derivácie sme na výpočet využili explicitnú a semi-implicitnú metódu. Explicitná metóda je intuitívnejšia, ale narozdiel od semi-implicitnej metódy má obmedzenie pomeru veľkosti časového a priestorového kroku, ktorý musí spĺňať CLF podmienku pre konvergenciu riešenia. Výsledky jednotlivých schém sme porovnali v kapitole 5.

Zistili sme, že každá numerická schéma použitá na nájdenie riešenia dosahuje veľmi dobré výsledky v porovnaní s presným riešením. Vyskytli sa len nepatrné od-

chýlky výsledkov jednotlivých schém. Ak by sme však chceli zvoliť veľmi malý krok, riešenie by sme rýchlejšie našli vďaka semi-implicitnej metóde.

## Literatúra

- [1] AVELANEDA M., LEVY A, PARAS A.: *Pricing and hedging derivate securities in markets with uncertain volatilities*, Applied Mathematical Finance, 1998,
- [2] BABUŠÍKOVÁ, J., SLODIČKA, H., WEISZ, J. :*Numerické metódy*,  
<http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/~babusikova/skripta.pdf>
- [3] BARLES G., SONER H. M.: *Option pricing and transaction cost and a nonlinear Black - Scholes equation*, Finance Stoch. 2, 4, 1998, 369 - 397
- [4] BLACK F., SCHOLES M.: *The pricing of options and corporate liabilities*, The Journal of Political Economy 81. 3, 1973, 637 - 654
- [5] BOKES T.: *Probabilistic and analytic methods for pricing American style of Asian options*, Dissertation Thesis, Department of Applied Mathematics and Statistics, 2011
- [6] BORDAG L.A.: *Study of the risk - adjusted pricing methodology model with methods of geometrical Analysis*, Stochastics: An international Journal of Probability and Stochastic Processes, Vol. 00, N0. 00, January 2009, 1-11
- [7] BORDAG L. A., FREY R: *Nonlinear option pricing models for illiquid markets"scaling properties and explicit solutions*, The Journal of Political Economy 81. 3, 1973, 637 - 654
- [8] FREY, R.:*Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging in model risk*. In RISK Publications. R. Gibson Ed., Londov
- [9] KRATKA M.: *No mystery behind the smile*, Risk 9, 1998, 67 - 71
- [10] JANDAČKA M.: *Uplatnenie parciálnych diferenciálnych rovníc v oceňovaní finančných derivátov*, Univerzita komenského v bratislave; Fakulta Matematiky, fyziky a informatiky, 2001

- [11] M. JANDAČKA, D. ŠEVČOVIČ: *On the risk adjusted pricing methodology based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile*, Journal of Applied Mathematics, 3, 2005, 235-258
- [12] KWOK Y. K.: *Mathematical Models of Financial Derivates*, Springer Finance, Singapore, 1998
- [13] LELAND, H. E.: *Option pricing and replication with transaction cost*, J. Finance 40 (1985), 1283 - 1301.
- [14] MOTIEFAR, E.: *Analysis and Application of Lie Group Theory on a certain type of PDEs in Finance*, MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM, 2012 - No 4
- [15] ŠEVČOVIČ D., STEHLÍKOVÁ B., MIKULA K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. Nakladateľstvo STU, Bratislava 2009, 200 str.
- [16] ŠEVČOVIČ D.: *Transformation methods for evaluating approximations to the optimal exercise boundary for linear and nonlinear Black-Scholes equations*. In: M. Ehrhardt (ed.), *Nonlinear Models in Mathematical Finance: New Research Trends in Option Pricing*, 2008 Nova Science Publishers, Inc., Hauppauge, pp. 153-198
- [17] ŽITŇANSKÁ M.: *Kvalitatívna a kvantitatívna analýza modelov oceňovania derivátov aktív Black - Scholesovho typu so všeobecnou funkciou volatility*, Univerzita komenského v Bratislave; Fakulta Matematiky, fyziky a informatiky, 2012



## Príloha 1

### Výpočet explicitného vzorca

$$\begin{aligned}
 u(S, t) = & -\frac{1}{b}S \left( \log S - \frac{\sigma^2}{8}t \right) \\
 & - \frac{2}{b}S \cosh \left( \frac{2}{3} \operatorname{arccosh} \left( -1 + |c| S^{-2/3} e^{\frac{3\sigma^2}{16}t} \right) \right) \\
 & - \frac{16}{3b}S \log \left( \cosh \left( \frac{1}{6} \operatorname{arccosh} \left( -1 + |c| S^{-2/3} e^{\frac{3\sigma^2}{16}t} \right) \right) \right) \\
 & - \frac{4}{3b}S \log \left( -1 + 2 \cosh \left( \frac{1}{3} \operatorname{arccosh} \left( -1 + |c| S^{-2/3} e^{\frac{3\sigma^2}{16}t} \right) \right) \right) + d_1 S + d_2
 \end{aligned}$$

Kód na výpočet numerického vzorca

```

c=0.5; rho=1; d1=0; d2=0; sigma=0.4;%vstupne parametre
h=0.01; \%volba priestoroveho kroku
k=h^2; \%pre explicitnu schemu
\%k=h; \%pre implicitnu schemu
x=0:h:2; S=exp(x');
tt=0:k:1;
n(1,1)=length(S);
n(1,2)=length(tt);
N=floor(1/k)+1;
u=zeros(n(1,1),1);
v1=zeros(5,n(1,2)); \%dolna vrstva
v2=zeros(5,n(1,2)); \%horna vrstva
u0=zeros(n(1,1),1); \%pociatocna vrstva
uT=zeros(n(1,1),1); \%konecna vrstva
for i=1:1:n(1,2)
    t=(i-1)*k;
    \%vypocet funkcie u(S,t)
    u = - 1/rho.*S.*(log(S) - (sigma^2./8).*t) - ...
        2/rho.*S.*cosh(2./3.*acosh(-1 + ...
            abs(c).*S.^(-3/2).*exp(3.*sigma^2.*t/16))) - ...

```

```
4/(3.* rho) .*S.* log(-1 + 2.*cosh (1/3 .* acosh (-1 + ...
    abs (c).* S.^(-3/2) .*exp (3.*sigma^2 .*t/16)))) -...
16/(3.* rho) .* S .* log (cosh (1/6 .* acosh (-1 + ...
    abs (c).* S.^(-3/2).* exp (3*sigma^2 .*t/16)))) + ...
d1 .*S + d2;
if i==1
    u0(:,1)=u;
elseif i==n(1,2)
    uT(:,1)=u;
end
v1(:,i)=[u(1); u(2); u(3); u(4); u(5)];
v2(:,i)=[u(end-4); u(end-3); u(end-2); u(end-1); u(end)];
end
%vypocet derivacii
dv1=du(v1, S([1, 2, 3, 4, 5],1), h);
ddv1=du(dv1, S([2,3,4],1), h);
dv2=du(v2, S([end-4, end-3, end-2,end-1,end],1), h);
ddv2=du(dv2, S([end-3,end-2,end-1],1), h);
ddu0=du(du(u0, S(:,1), h), S(2:end-1,1), h);
dduT=du(du(uT, S(:,1), h), S(2:end-1,1), h);
%vypocet pociatocnych a koncovych hodnot funkcie H
H0=ddu0.*S(3:end-2,1);
HT=dduT.*S(3:end-2,1);
%vypocet okrajovych podmienok funkcie H
up=ddv2*S(end-2,1);
down=ddv1*S(3,1);

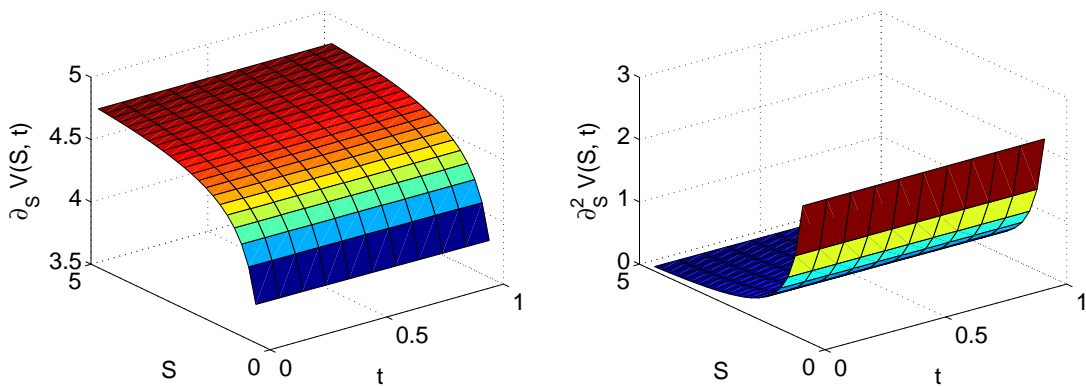
Numerický výpočet derivácie

function duu = du(u, S, h)
n(1,1)=length(u(:,1));
n(1,2)=length(u(1,:));
duu=zeros(n(1,1)-2,n(1,2));
```

```

\% definovanie si pomocnych premennych
duu1=duu;
duu2=duu;
N=n(1,2);
for i=1:N
    for j=1:n(1,1)-2
        \% duu1 je odchylena vpravo
        duu1(j,i) = (u(j+2,i)-u(j,i))/(2*h)/S(j+1,1);
        \% duu2 je odchylena vlavo
        duu2(j,i) = (u(j+2,i)-u(j,i))/(S(j+2,1)-S(j,1));
        \% priemerna hodnota zarucila najpresnejsiu aproximaciu
        duu(j,i)=(duu1(j,i)+duu2(j,i))/2;
    end
end
end

```



Obr. .2: Výpočet hodnôt  $\partial_S V(S, t)$  a  $\partial_S^2 V(S, t)$

## Príloha 2

### Numerický algoritmus č.1 na riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice

Analytická schéma výpočtu:

$$\partial_\tau H = \partial_x \beta(H) + \partial_x^2 \beta(H),$$

pričom  $\beta(H) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{H}{(1-\rho H)^2}$ . K nej prislúchajúci zdrojový kód výpočtu - explicitná metóda:

```
function [H, e_max, t]= Expl1(sigma, h, H0, HT, up, down, rho, k)
tic; n1=size(HT); m=round(1/k)+1;
H=zeros(n1(1,1),2); H(:,1)=HT(:,1);
for j=m-1:-1:1
    for i=1:n1(1,1)
        if i==1
            H(i,2)=down(j);
        elseif i==n1(1,1)
            H(i,2)=up(j);
        else
            H1=H(i-1,1); H3=H(i+1,1);H2=H(i,1);
            H(i,2)=+sigma^2/2*(H3/(1-rho*H3)^2-H1/(1-rho*H1)^2)/(2*h)*k +...
                sigma^2/2*(H3/(1-rho*H3)^2-2*H2/(1-rho*H2)^2+...
                H1/(1-rho*H1)^2)/h^2*k+H2;
        end
    end
    H(:,1)=H(:,2);
end
toc
t=toc; e_max=max(abs(H(:,2)-H0));
end
```

## Numerický algoritmus č.2 na riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice

Analytická schéma výpočtu:

$$\partial_{\tau}H = \beta'(H)\partial_x H + \partial_x(\beta'(H)\partial_x H),$$

kde  $\beta'(H) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{1+\rho H}{(1-\rho H)^3}$  Numerický kód - explicitné riešenie:

```
function [H, e_max, t]= Expl2(sigma, h, H0, HT, up, down, rho, k)
tic
n1=size(HT);
m=round(1/k)+1;
H=zeros(n1(1,1),2);
H(:,1)=HT(:,1);
for j=m-1:-1:1
    for i=1:n1(1,1)
        if i==1
            H(i,2)=down(j);
        elseif i==n1(1,1)
            H(i,2)=up(j);
        else
            H1=H(i-1,1); H3=H(i+1,1); H2=H(i,1);
            H12=(H1+H2)/2; H23=(H2+H3)/2;
            H(i,2)=+sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*(H3-H1)*k/(2*h) +...
                sigma^2/2*((1+rho*H23)/(1-rho*H23)^3*(H3-H2)-...
                (1+rho*H12)/(1-rho*H12)^3*(H2-H1))*k/h^2+H2;
        end
    end
    H(:,1)=H(:,2);
end
toc
t=toc;
e_max=max(abs(H(:,2)-H0));
```

end

Numerický kód výpočtu - semi-implicitná metóda:

```
function [H, e_maxi, t]= Impl2(sigma, h, H0, HT, up, down, rho, k)
tic; n=length(H0(1:end,1));
n=n-2; m=floor(1/k)+1;
a=zeros(n,1); c=zeros(n,1); b=zeros(n,1);
d=zeros(n,1); H=zeros(n,2);
H(:,1)=HT(2:end-1,1); A=zeros(n,n);
for j=m-1:-1:1
    for i=1:n
        if i==1
            H1=down(j); H2=H(i,1); H3=H(i+1,1);
            H12=(H1+H2)/2; H23=(H3+H2)/2;
            a(i)= sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*k/(2*h) - ...
                sigma^2/2*(1+rho*H12)/(1-rho*H12)^3*k/(h^2) ;
            c(i)= - sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*k/(2*h) - ...
                sigma^2/2*(1+rho*H23)/(1-rho*H23)^3*k/(h^2);
            A(i,i+1)=c(i);
            d(i)=H2-a(i)*down(j);
        elseif i==n
            H3=up(j); H2=H(i,1); H1=H(i-1,1);
            H12=(H1+H2)/2; H23=(H3+H2)/2;
            a(i)= sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*k/(2*h) - ...
                sigma^2/2*(1+rho*H12)/(1-rho*H12)^3*k/(h^2) ;
            c(i)= - sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*k/(2*h) - ...
                sigma^2/2*(1+rho*H23)/(1-rho*H23)^3*k/(h^2);
            A(i,i-1)=a(i);
            d(i)=H2-c(i)*up(j);
        else
            H3=H(i+1,1); H2=H(i,1); H1=H(i-1,1);
            H12=(H1+H2)/2; H23=(H3+H2)/2;
```

```
a(i)= sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*k/(2*h) - ...
sigma^2/2*(1+rho*H12)/(1-rho*H12)^3*k/(h^2) ;
c(i)= - sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*k/(2*h) -...
sigma^2/2*(1+rho*H23)/(1-rho*H23)^3*k/(h^2);
A(i,i-1)=a(i);
A(i,i+1)=c(i);
d(i)=H2;
end
b(i)=1-(a(i)+c(i));
A(i,i)=b(i);
end
% riesenie trojdiagonalneho systemu
n = length(b);
c(1) = c(1) / b(1);
d(1) = d(1) / b(1);
for i = 2:n-1
    pom = b(i) - a(i) * c(i-1);
    c(i) = c(i) / pom;
    d(i) = (d(i) - a(i) * d(i-1))/pom;
end
d(n) = (d(n) - a(n) * d(n-1))/( b(n) - a(n) * c(n-1));
H(n,2) = d(n);
for i = n-1:-1:1
    H(i,2) = d(i) - c(i) * H(i + 1,2);
end
H(:,1)=H(:,2);
end
toc;
t=toc;
H(:,1)=[ ]; H=[0; H; 0];
H(1,:)=down(1); H(end,:)=up(1);
```

```
e_maxi=max(abs(H(:,1)-H0));  
end
```

## Numerický algoritmus č.3 na riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice

Analytická schéma výpočtu:

$$\partial_{\tau}H = \beta'_H(H)\partial_xH + (\beta''_H(H)(\partial_xH)^2 + \beta'_H(H)\partial_x^2H,)$$

pričom  $\beta''_H = \rho\sigma^2 \frac{2+\rho H}{(1-\rho H)^4}$ . K tomu prislúchajúci kód pre explicitnú numerickú schému výpočtu:

```
function [H, e_max, t]= Expl_Frey_v2(sigma, h, H0, HT, up, down, rho, k)  
tic  
n1=size(HT); m=round(1/k)+1;  
H=zeros(n1(1,1),2); H(:,1)=HT(:,1);  
for j=m-1:-1:1  
    for i=1:n1(1,1)  
        if i==1  
            H(i,2)=down(j);  
        elseif i==n1(1,1)  
            H(i,2)=up(j);  
        else  
            H1=H(i-1,1); H3=H(i+1,1); H2=H(i,1);  
            H(i,2)=sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*(H3-H1)*k/(2*h) + ...  
                sigma^2/2*(2*rho)*(2+rho*H2)/(1-rho*H2)^4*(H3 - H1)^2*k/4/h^2 + ...  
                sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*(H3-2*H2+H1)*k/(h^2)+H2;  
        end  
    end  
    H(:,1)=H(:,2);  
end  
toc  
t=toc;
```



```
e_max=max(abs(H(:,2)-H0));
end
```

K taktiež kód prislúchajúci danej schéme výpočtu - semi -implicitná metóda:

```
function [H, e_maxi, t]= Impl_Frey_v2(sigma, h, H0, HT, up, down, rho, k)
tic
n=length(H0(1:end,1)); n=n-2;
m=floor(1/k)+1; a=zeros(n,1); c=zeros(n,1); b=zeros(n,1);
d=zeros(n,1); H=zeros(n,2); H(:,1)=HT(2:end-1,1);
A=zeros(n,n);
for j=m-1:-1:1
    for i=1:n
        if i==1
            H1=down(j); H2=H(i,1); H3=H(i+1,1);
            a(i)= - sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*(k/h^2 - k/(2*h));
            c(i)= - sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*(k/h^2 + k/(2*h));
            A(i,i+1)=c(i);
            d(i)=sigma^2/2*(2*rho)*(2+rho*H2)/(1-rho*H2)^4*(H3 - H1)^2*k/4/h^2-...
            a(i)*down(j)+H2;
        elseif i==n
            H3=up(j); H2=H(i,1); H1=H(i-1,1);
            a(i)= - sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*(k/h^2 - k/(2*h));
            c(i)= - sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*(k/h^2 + k/(2*h));
            A(i,i-1)=a(i);
            d(i)=sigma^2/2*(2*rho)*(2+rho*H2)/(1-rho*H2)^4*(H3 - H1)^2*k/4/h^2 - ...
            c(i)*up(j)+H2;;
        else
            H3=H(i+1,1); H2=H(i,1); H1=H(i-1,1);
            a(i)= - sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*(k/h^2 - k/(2*h));
            c(i)= - sigma^2/2*(1+rho*H2)/(1-rho*H2)^3*(k/h^2 + k/(2*h));
            A(i,i-1)=a(i);
            A(i,i+1)=c(i);
```

```
        d(i)=sigma^2/2*(2*rho)*(2+rho*H2)/(1-rho*H2)^4*(H3 - H1)^2*k/4/h^2+H2;
    end
    b(i)=1-(a(i)+c(i));
    A(i,i)=b(i);
end
n = length(b);
\%riesenie tridiagonalnej matice
c(1) = c(1) / b(1);
d(1) = d(1) / b(1);
for i = 2:n-1
    temp = b(i) - a(i) * c(i-1);
    c(i) = c(i) / temp;
    d(i) = (d(i) - a(i) * d(i-1))/temp;
end
d(n) = (d(n) - a(n) * d(n-1))/( b(n) - a(n) * c(n-1));
H(n,2) = d(n);
for i = n-1:-1:1
    H(i,2) = d(i) - c(i) * H(i + 1,2);
end
H(:,1)=H(:,2);
end
toc;
t=toc;
H(:,1)=[]; H=[0; H; 0];
H(1,:)=down(1); H(end,:)=up(1);
e_maxi=max(abs(H(:,1)-H0));
end
```