

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

RÝCHLA ČASOVÁ ŠKÁLA VOLATILITY VO
FONG-VAŠÍČKOVOM MODELI
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2012

Bc. Radka Selečéniová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



**RÝCHLA ČASOVÁ ŠKÁLA VOLATILITY VO
FONG-VAŠÍČKOVOM MODELI**
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika, 1114
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky,
FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
Školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2012

Bc. Radka Selečéniová



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Radka Seleckéniová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Rýchla časová škála volatility vo Fong-Vašíčkovom modeli

Cieľ: Fong-Vašíčkov model patrí medzi modely so stochastickou volatilitou. To znamená, že máme stochastickú diferenciálnu rovnicu pre okamžitú úrokovú mieru, v ktorej je volatilita náhodná a riadi sa ďalšou stochastickou diferenciálnou rovnicou. Dlhopisy, z ktorých sa počítajú výnosové krivky, sú potom riešením parabolickej PDR (premenné sú čas, okamžitá úroková miera, volatilita). Volatilita sa však pohybuje v inej časovej škále ako úroková miera. Týmto sa zaobera článok B. Stehlíková, D. Ševčovič: On the singular limit of solutions to the Cox-Ingersoll-Ross interest rate model with stochastic volatility pdf, kde je spravená všeobecná analýza. V diplomovej práci sa zoberie Fong-Vašíčkov model (kvôli možnosti jednoduchšieho výpočtu cien dlhopisov), kde je predpoklad, že sa toho o cenách dlhopisov dá odvodiť viac, aproximácie sa môžu porovnávať s presným riešením atď. Motiváciou je, že takéto výsledky pre konkrétny model sú užitočné pri analýze zložitejších alebo všeobecnejších modelov.

Vedúci: RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Dátum zadania: 13.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne, s pomocou literatúry uvedenej v zozname, konzultácií s vedúcou diplomovej práce a s využitím teoretických vedomostí.

V Bratislave, apríl 2012

.....
Radka Selečéniová

Podakovanie

Touto cestou by som sa rada poďakovala vedúcej diplomovej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za cenné rady a pripomienky, za poskytnutie literatúry ale hlavne za podporu a motiváciu pri písaní diplomovej práce.

SELEČENIOVÁ, Radka: *Rýchla časová škála volatility vo Fong-Vašíčkovom modeli* [diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúca diplomovej práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2012, 59 s.

Abstrakt

Medzi významné oblasti modernej finančnej matematiky patrí modelovanie úrokových mier. Hodnota úrokovej miery je nevyhnutnou súčasťou ocenenia mnohých finančných derivátov. Jeden zo spôsobov ako opísať dynamiku krátkodobej úrokovej miery je pomocou dvojfaktorových modelov so stochastickou volatilitou. Medzi takéto modely patrí aj Fong-Vašíčkov model. V diplomovej práci uvádzame jeho podrobný opis, výpočet ceny dlhopisov, výnosových kriviek a tiež kalibráciu trhových cien rizika. Proces volatility krátkodobej úrokovej miery sa pohybuje v rýchlejšej časovej škále ako samotná úroková miera ([6]). Zohľadnením tejto informácie a použitím asymptotickej metódy odvodíme aproximáciu ceny dlhopisu. Závislosť tejto aproximácie od parametrov skrytého procesu volatility bude v porovnaní s presnou cenou dlhopisu zredukovaná, čím sa napríklad eliminuje náročná kalibrácia aktuálnej hodnoty volatility úrokovej miery potrebnej na výpočet presnej ceny dlhopisu. Od cien dlhopisu sa odvíjajú výnosové krivky. Porovnanie aproximácie ceny dlhopisu s presnou cenou a porovnanie príslušných výnosových kriviek prinesie možnosť predstavy o presnosti a kvalite aproximácie.

Kľúčové slová: stochastická volatilita, rýchla časová škála, Fong-Vašíčkov model, asymptotická metóda, aproximácia ceny dlhopisu

SELEČENIOVÁ, Radka: *Fast time scale of volatility in the Fong-Vasicek model* [master thesis]. Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics. Supervisor of the thesis: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2012, 59 p.

Abstract

Modeling short-rate process is one of the most important part of modern financial mathematics. It is necessary to know the value of interest rate in pricing financial derivatives. There are several ways of modeling instantaneous interest rate. Two-factor model with stochastic volatility is one of them. In this master thesis we focus our attention on the Fong-Vasicek model for which we calculate the bond price, yield curves and we calibrate the market prices of risk. It was observed that stochastic volatility evolves in a different time scale, which is faster than the scale of short rate ([6]). We present an asymptotic analysis which corrects the classic formula for bond price. The key assumption of this method is fast time scale of volatility. The approximation reduces the dependence of bond price on the details of underlying volatility process, which is unknown. The present volatility level is not need to be calibrated yet. The yield curves are derived from the bond prices. A comparison of classic bond price and yield curves with approximations given by asymptotic method give us an idea of quality and accuracy of approximation.

Key words: stochastic volatility, fast time scale, Fong-Vasicek model, asymptotic analysis, correction of bond price

Obsah

Úvod	1
1 Modelovanie okamžitej úrokovej miery a ocenenie dlhopisov	2
1.1 Základné pojmy	2
1.2 Stochastický kalkulus	4
1.3 Modely okamžitej úrokovej miery	6
1.3.1 Jednofaktorové modely	6
1.3.2 Cena dlhopisu v jednofaktorovom modeli	10
1.3.3 Dvojfaktorové modely	12
1.3.4 Cena dlhopisu v dvojfaktorovom modeli	14
2 Pojem stochastickej volatility a Fong-Vašíčkov model	16
2.1 Hustota rozdelenia stochastického procesu	16
2.2 Stochastická volatility	19
2.2.1 Modelovanie stochastickej volatility	20
2.3 Rýchla časová škála volatility	21
2.4 Fong-Vašíčkov model so stochastickou volatilitou	22
2.4.1 Ceny dlhopisov a výnosové krivky	23
2.4.2 Limita výnosových kriviek	27
2.4.3 Kalibrácia trhových cien rizika	29
3 Asymptotická metóda a odvodenie aproximácie ceny dlhopisu	33
3.1 Asymptotická metóda	34
3.1.1 Odvodenie aproximovanej ceny dlhopisu	35
3.1.2 Výpočet konštanty $\langle y\Phi' \rangle$	42
3.2 Zhrnutie	45

4 Porovnanie aproximácie riešenia s presným riešením	48
4.1 Porovnanie cien dlhopisov	49
4.2 Porovnanie výnosových kriviek	51
Záver	54
Literatúra	55
Príloha	58

Úvod

V posledných desaťročiach nastala výrazná expanzia trhu s úrokovými derivátmi. Kľúčovú úlohu v správnom oceňovaní týchto derivátov hrá hodnota okamžitej úrokovej miery. Jej stochastický charakter podnietil vznik mnohých modelov. Spočiatku to boli jednofaktorové modely, avšak škála výnosových kriviek, ktorú nimi bolo možné popísať nebola postačujúca. Tak vznikli dvojfaktorové modely, medzi ktoré patria aj modely so stochastickou volatilitou.

V práci sa budeme venovať Fong-Vašíčkovmu modelu. V ňom je dynamika úrokovej miery popísaná dvojicou stochastických diferenciálnych rovníc pre samotnú úrokovú mieru a pre volatilitu úrokovej miery. Proces volatility nie je na trhu pozorovateľný, preto je kalibrácia jeho parametrov náročná. Cena dlhopisu je však od aktuálnej hodnoty volatility a parametrov popisujúcich jej vývoj závislá. Jedným z riešení ako sa vyhnúť kalibrácii aktuálnej hodnoty volatility je pomocou asymptotickej metódy odvodiť aproximáciu ceny dlhopisu, ktorej závislosť od volatility bude oproti klasickej cene zredukovaná. Základným prvkom tejto metódy je predpoklad o rýchlej časovej škále volatility. Aplikáciami tohto konceptu na viaceré typy dvojfaktorových modelov sa zaoberajú články [1], [6], [12], [26].

V diplomovej práci odvodíme aproximáciu ceny dlhopisu pre Fong-Vašíčkov model. Vzhľadom na existenciu explicitného riešenia tohto modelu, budeme mať možnosť porovnania aproximácie s presným riešením a tým získame predstavu o presnosti aproximácie. Výsledky pre konkrétny model môžu byť užitočné pri analýzach zložitejších modelov.

Práca je rozdelená na štyri kapitoly. V prvej kapitole sa venujeme stručnému úvodu do problematiky modelovania okamžitej úrokovej miery a oceňovaniu dlhopisov. V druhej kapitole rozoberieme proces stochastickej volatility a vysvetlíme pojem rýchlej časovej škály. Podrobne sa budeme venovať aj Fong-Vašíčkovmu modelu, pre ktorý odvodíme cenu dlhopisu, výnosové krivky a rôznymi metódami odhadneme trhové ceny rizika. Detailným odvodením aproximácie ceny dlhopisu pomocou asymptotickej metódy sa zaoberá tretia kapitola. Nakoniec v štvrtej kapitole pre konkrétne hodnoty parametrov porovnáme aproximácie ceny dlhopisov a výnosových kriviek s presným riešením.

Kapitola 1

Modelovanie okamžitej úrokovej miery a ocenenie dlhopisov

Na úvod zdefinujeme základné pojmy ako dlhopis, časová štruktúra úrokových mier, okamžitá úroková miera a stručne spomenieme teóriu stochastického kalkulu. Budeme vychádzať z [17], [18] a [27]. V ďalšej časti kapitoly predstavíme jeden zo spôsobov modelovania vývoja úrokových mier, a to *short-rate* modely. V skratke uvedieme aj ocenenia dlhopisov, pre ktoré je okamžitá úroková miera podkladovým aktívom.

1.1 Základné pojmy

Dlhopis je dlhodobý cenný papier obchodovateľný na burze. Dlžník sa v ňom zaväzuje, že v stanovenom termíne vyplatí nominálnu hodnotu a v dohodnutých intervaloch bude vyplácať pravidelný kupón. Dlhopis, ktorého nominálna hodnota je rovná 1 nazývame diskontný dlhopis. Dlhopisy rozdeľujeme na dva typy, kupónové a bezkupónové, podľa toho, či kupóny vyplácajú alebo nie. My sa ďalej budeme zaoberať najjednoduchším typom dlhopisu a to bezkupónovým diskontným dlhopisom. Pri spojitom úročení sa súčasná cena dlhopisu $P(t, T)$ vypočíta podľa vzorca

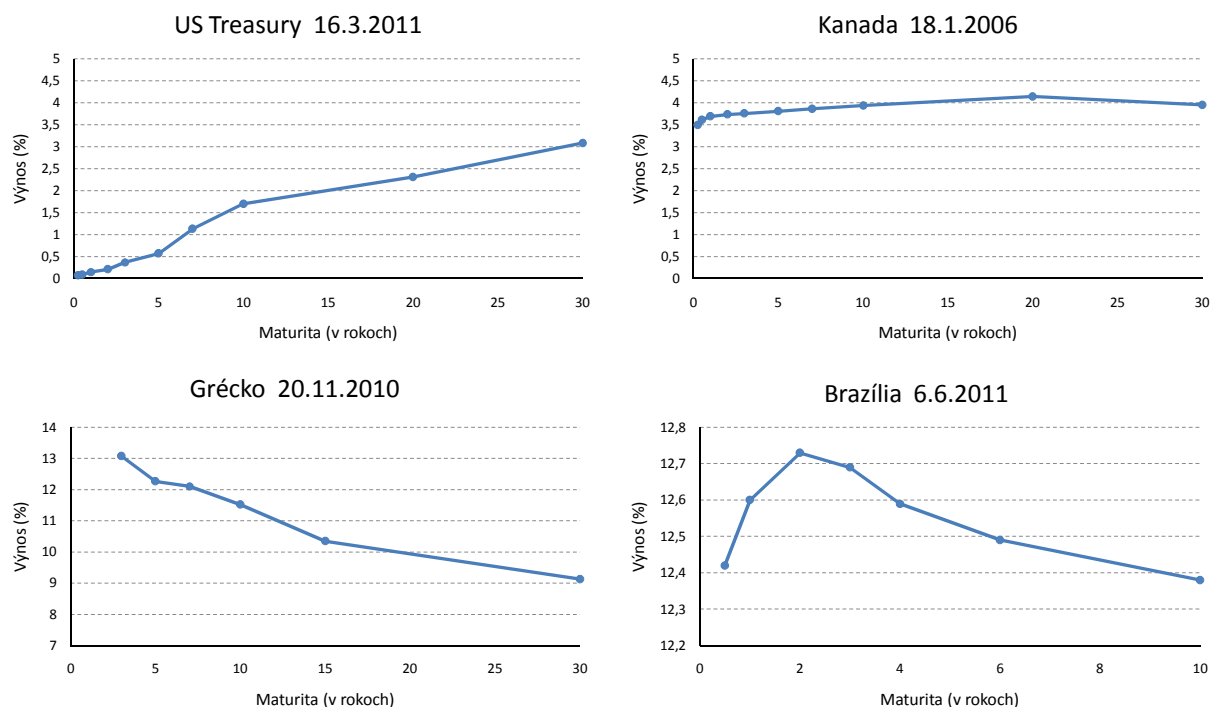
$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad (1.1)$$

kde t je okamžitý čas a T je doba splatnosti dlhopisu, tzv. maturita. Výrazom $R(t, T)$ označujeme úrokovú mieru, ktorá vyjadruje mieru zhodnotenia dlhopisu oproti kúpnej cene. Vyjadrením $R(t, T)$ z uvedeného vzťahu môžeme na základe známych cien dlhopisov

určiť časovú štruktúru úrokových mier

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T). \quad (1.2)$$

Tá vyjadruje funkčnú závislosť medzi časom do maturity a výnosom $R(t, T)$. Graf, zobrazujúci jednotlivé $R(t, T)$ pre fixný čas t , sa nazýva výnosová krivka. Tvary výnosových kriviek sú predmetom rozsiahleho skúmania. V praxi sa ukazuje, že môžu byť rôzne, rozlišujú sa však štyri základné typy: rastúca, klesajúca, plochá a tzv. *humped*¹ krivka. Rastúca (normálna) výnosová krivka sa vyskytuje, ak trh neočakáva významné zmeny, alebo ak očakáva rast trhových úrokových mier (vtedy jej sklon rastie). Klesajúca (inverzná) krivka sa na trhu vyskytuje relatívne vzácne, napr. keď centrálna banka z určitých dôvodov výrazne zvýši hodnoty úrokových sadzieb. Plochá výnosová krivka je tzv. prechodovou krivkou medzi klesajúcou a rastúcou krivkou a spravidla očakáva pokles úrokových mier. *Humped* krivka môže signalizovať prechod ku inverznej, ale aj opačne, návrat k normálnej výnosovej krivke. Všetky štyri tvary sú zobrazené na obr.1.1.



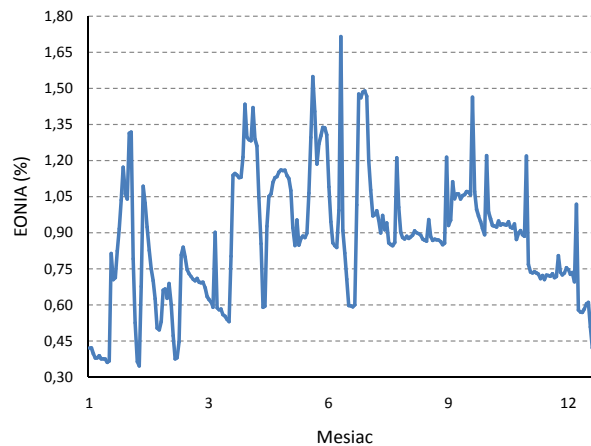
Obr. 1.1: Rôzne tvary kriviek časovej štruktúry úrokových mier. Zdroj: www.treasury.gov, www.bankofgreece.gr, www.bankofcanada.ca, www.bloomberg.com

¹krivka s práve jedným lokálnym maximom a bez minima na intervale $(0, \infty)$

Úroková miera pre dlhopis s okamžitou splatnosťou, t. j. $T = t$ sa nazýva okamžitá úroková miera, alebo aj *short rate*. Získame ju pomocou vzťahu

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) = R(t, t). \quad (1.3)$$

Short rate predstavuje začiatok výnosovej krivky a poskytuje informáciu o jej ďalšom priebehu. Je teoretickou veličinou, v praxi má k nej najbližšie tzv. *overnight*, t. j. jednoduchá úroková miera, za ktorú si medzi sebou požičiavajú banky. Časový vývoj úrokovej miery má stochastický charakter. Na nasledujúcom obrázku je znázornený reálny priebeh referenčnej sadzby EONIA, ktorá je sadzbou pre skutočne zrealizované jednoduchové obchody v mene euro.



Obr. 1.2: Časový priebeh okamžitej úrokovej miery EONIA v roku 2011. Zdroj: www.euribor-ebf.eu

Z obrázka je zrejмый náhodný charakter úrokovej miery, ktorá sa v priebehu roku 2011 pohybovala v škále medzi 0.347% a 1.715%. V nasledujúcej časti uvedieme základné informácie týkajúce sa teórie stochastického kalkulu.

1.2 Stochastický kalkulus

Stochastický proces je t -parametrický systém náhodných premenných $\{X(t), t \in I\}$, kde I je interval alebo diskretná množina indexov. Medzi základné stochastické procesy patria Markovovské náhodné procesy, ktorých charakteristickou črtou je fakt, že budúca hodnota procesu závisí len od súčasnej hodnoty, nie minulej. Špeciálnym typom Markovovského

procesu je vo finančnej matematike široko využívaný proces - Wienerov proces a jeho zovšeobecnenie Brownov pohyb. Uvedieme ich definície.

Definícia 1. ([27], str. 22)

Brownov pohyb $\{X(t), t \geq 0\}$ je t -parametrický systém náhodných veličín, pričom

- (i) *všetky prírastky $X(t + \Delta) - X(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a disperziou $\sigma^2\Delta$,*
- (ii) *pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ sú prírastky $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa bodu (i),*
- (iii) *$X(0) = 0$.*

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ nazývame Wienerov proces.

Náhodný proces zvyčajne modelujeme ako riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dX(t) = \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dw, \quad (1.4)$$

kde w je Wienerov proces, zabezpečujúci stochastickosť procesu. Napr. okamžitá úroková miera sa modeluje ako stochastický proces $r(t)$. Na ocenenie jej derivátov, funkcií okamžitej úrokovej miery, potrebujeme nástroj stochastickej analýzy - Itóovu lemu. Itóova lema je kľúčovou v teórii oceňovania finančných derivátov.

Lema 1. (Itóova lema) ([27], str. 27)

Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw,$$

kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t)\frac{\partial f}{\partial x}dw.$$

Rozšírenie Itóovej lemy pre vektorové náhodné premenné, ktoré budeme neskôr pri oceňovaní dlhopisov v dvojfaktorových modeloch využívať nebudeme uvádzať, ale čitateľ ho nájde v knihe [27]. V nasledujúcej časti si stručne predstavíme jedno a dvojfaktorové modely, ktoré sa používajú pri modelovaní okamžitej úrokovej miery. Uvedieme aj postup odvodenia ceny dlhopisu.

1.3 Modely okamžitej úrokovej miery

Modely okamžitej, resp. krátkodobej úrokovej miery opisujú vývoj okamžitej úrokovej miery a závislosť výnosovej krivky od nej. Okamžitú úrokovú mieru budeme v jednofaktorových modeloch modelovať ako riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice, v dvojfaktorových modeloch ako riešenie systému dvoch takýchto rovníc.

1.3.1 Jednofaktorové modely

V jednofaktorových modeloch je dynamika okamžitej úrokovej miery opísaná len pomocou jedného faktora, jedného zdroja náhodnosti. Týmto zdrojom je samotná okamžitá úroková miera r . Jej vývoj sa modeluje pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice, ktorá má vo všeobecnosti tvar

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw, \quad (1.5)$$

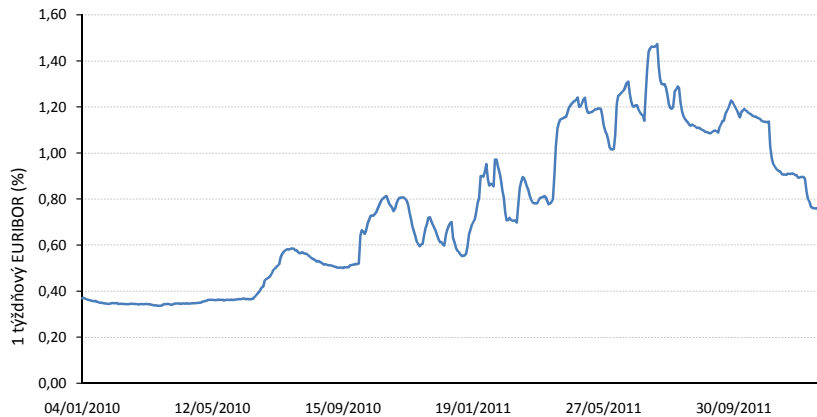
kde w je štandardný Wienerov proces. V teórii modelovania okamžitej úrokovej miery rozlišujeme dve hlavné triedy modelov, a to rovnovážne a bezarbitrážne modely. Každý z týchto prístupov modelovania využíva iný typ informácie. Zatiaľ čo v rovnovážnych modeloch je výstupom časová štruktúra úrokových mier, v bezarbitrážnych je táto krivka vstupom. Rovnovážne modely nedokážu presne zachytiť súčasnú výnosovú krivku, pretože obsahujú len niekoľko parametrov modelu. Bezarbitrážne modely sú skonštruované tak, aby presne opisovali dennú časovú štruktúru úrokových mier. Avšak cena za takúto vlastnosť sa prejaví v potrebe zavedenia časovo závislých koeficientov - driftu a volatility. V mnohých modeloch potom nastáva nemarkovovosť a aj preto sú častokrát analyticky neriešiteľné. Bezarbitrážnymi modelmi sa v tejto práci zaoberať nebudeme, a preto len v krátkosti vymenujeme tie najznámejšie. Patria medzi ne Ho-Leeho model z roku 1986 a Hull-Whiteov model z roku 1990. Ďalej sa budeme zaoberať len rovnovážnymi modelmi.

Proces (1.5) obsahuje dve zložky. Deterministická časť procesu - drift $\mu(r, t)$ reprezentuje trend vývoja *short rate*, stochastická časť - volatilita $\sigma(r, t)$ určuje veľkosť fluktuácií v okolí deterministickej časti. Jedným z najčastejšie používaných tvarov driftovej časti je

tzv. *mean reversion* drift

$$\mu(r, t) = \kappa(\theta - r), \quad (1.6)$$

kde parametre κ, θ sú kladné konštanty. Kľúčovou vlastnosťou takejto voľby je, že stredná hodnota úrokovej miery je priťahovaná rýchlosťou κ ku rovnovážnej (limitnej) hodnote, ktorou je hodnota parametra θ . Takýto predpoklad o správaní sa úrokovej miery nie je síce istým javom pozorovaným na reálnych trhoch ale je v súlade s ekonomickou teóriou. Ak zaznamenáme nárast úrokových mier, ekonomika spomalí a nastane pokles dopytu po pôžičkách. Tým pádom majú úrokové miery opäť tendenciu klesnúť. Podobne v opačnom smere. Na obr.1.3 je znázornený priebeh úrokovej miery EURIBOR v rokoch 2010 až 2011. Vidíme, že v prvej polovici roka 2010 je úroková miera takmer konštantná. Môže teda nastať situácia, že vývoj úrokovej miery nie je možné popísať *mean reversion* procesom. Avšak pre niektoré sady parametrov *mean reversion* proces nie vždy vyzerá „ideálne“ a aj procesy, ktoré na prvý pohľad možno nevyzerajú ako *mean reversion* nimi sú. Vývoj v roku 2011 už viac pripomína proces, v ktorom je úroková miera priťahovaná k limitnej hodnote.



Obr. 1.3: Časový priebeh úrokovej miery EURIBOR v rokoch 2010-2011. Zdroj: www.euribor-ebf.eu

Stochastická časť modelu je často v tvare

$$\sigma(r, t) = \sigma r^\gamma, \quad (1.7)$$

kde parametre $\sigma > 0$ a $\gamma \geq 0$ sú konštanty. V závislosti od voľby parametrov potom rozoznávame rôzne modely.

Vašíčkov model

Voľbou $\gamma = 0$ dostávame jeden z prvých modelov okamžitej úrokovej miery - Vašíčkov model. Bol publikovaný v roku 1977 v článku [29]. Okamžitá úroková miera sa v ňom riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou

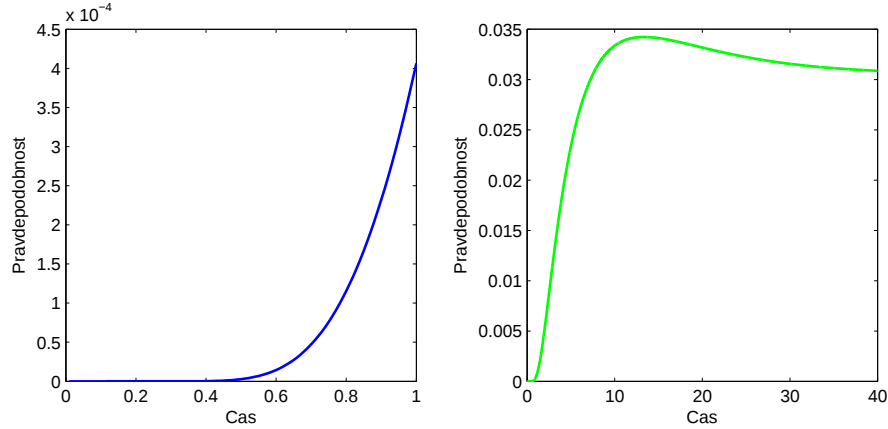
$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw. \quad (1.8)$$

Proces v takomto tvare sa zvykne označovať ako Ornstein-Uhlenbeckov proces. Vašíčkov model bol prvým modelom, ktorý dokázal popísať vlastnosť *mean reversion*. Vzhľadom na prvenstvo v oblasti modelovania úrokovej miery má však model niekoľko nedostatkov. Prvým z nich je konštantná volatilita, ktorá nezávisí od hodnoty úrokovej miery. Druhým je, že rozdelenie úrokovej miery r je normálne a tým pádom dovoľuje aj záporné hodnoty. Pozrime sa však na to, či je tento nedostatok až taký významný. Veľkosť pravdepodobnosti nadobudnutia záporných hodnôt r závisí od voľby parametrov. Vypočítajme jej hodnotu.²

$$\begin{aligned} P(r_{t+\Delta t} < 0) &= P\left(\mathcal{N}(\theta(1 - e^{-\kappa t}) + r_0 e^{-\kappa t}, \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})) < 0\right) \\ &= P\left(\mathcal{N}(0, 1) < \frac{-\theta(1 - e^{-\kappa t}) - r_0 e^{-\kappa t}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{-\theta(1 - e^{-\kappa t}) - r_0 e^{-\kappa t}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})}}\right) \end{aligned}$$

Funkcia $\Phi(\cdot)$ je distribučnou funkciou normovaného normálneho rozdelenia. Na nasledujúcom obrázku je znázornený priebeh hodnoty pravdepodobnosti v závislosti od času pre hodnoty parametrov $\kappa = 0.109, \theta = 0.0652, \sigma = \sqrt{2.64} \cdot 10^{-2}$, prebraté z článku [9] a pre počiatočnú hodnotu $r_0 = 0.05$. Vidíme, že pravdepodobnosť, že krátkodobá úroková miera o rok pri daných parametroch nadobudne zápornú hodnotu je prakticky nulová (obrázok vľavo). Aj keď pravdepodobnosť s rastúcim časom rastie, je stále veľmi nízka. Nakoniec sa však ustáli na limitnej hodnote, ktorá je pre naše hodnoty parametrov rovná 0.0305 (obrázok vpravo). Problém nadobudnutia záporných hodnôt úrokovej miery nie je teda vždy až taký závažný, ako sa na prvý pohľad môže zdať, nakoľko pri vhodných hodnotách parametrov je táto pravdepodobnosť veľmi nízka.

²Pri výpočte je potrebné poznať podmienenú hustotu rozdelenia r a jej štatistiky - strednú hodnotu a disperziu. Týmto sa zaoberá kapitola 2.



Obr. 1.4: Priebeh pravdepodobnosti nadobudnutia zápornej hodnoty r pre Vašíčkov model v čase s s počiatočnou hodnotou $r_0 = 0.05$ a parametrami $\kappa = 0.109, \theta = 0.0652, \sigma = \sqrt{2.64} \cdot 10^{-2}$.

Cox-Ingersoll-Rossov model (CIR)

Cox-Ingersoll-Rossov model bol prvýkrát publikovaný v roku 1985 v článku [8]. Voľbou parametra $\gamma = \frac{1}{2}$ dostávame stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw, \quad (1.9)$$

ktorej sa zvykne hovoriť aj Besselov odmocninový proces, z dôvodu, že stochastický člen dw je násobený odmocninou z náhodnej premennej r . Významným prínosom CIR modelu je fakt, že ak proces okamžitej úrokovej miery začína z kladnej počiatočnej hodnoty r_0 a je splnený predpoklad o parametroch modelu $2\kappa\theta \geq \sigma^2$, tak r_t už nikdy nenadobudne nulové alebo záporné hodnoty. Intuitívne, ak sa okamžitá úroková miera blíži k nulovým hodnotám, jej volatilita je tiež malá a ak by r nadobudlo nulovú hodnotu, volatilita bude tiež nulová a ďalší vývoj okamžitej úrokovej miery je riadený trendovou zložkou, ktorá je v tomto prípade kladná. Preto sa hodnota r opäť zvýši ([27]).

Medzi ďalšie známe jednofaktorové modely patrí aj Dothanov model (1978), Black-Karasinského model (1991) a Chan-Karolyi-Longstaff-Sandersov model (1992). O nich sa čitateľ môže dočítať napr. aj v [4].

1.3.2 Cena dlhopisu v jednofaktorovom modeli

Okamžitá úroková miera slúži ako podkladové aktívum pre bezkupónový dlhopis. Popíšeme si odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice (PDR) pre cenu dlhopisu $P(t, r; T)$, ktorá je závislá od času t , okamžitej úrokovej miery r a parametra T , ktorý predstavuje čas splatnosti. Uvádžeme len stručné odvodenie bez príslušných konkrétnych výpočtov, podrobné odvodenie čitateľ môže nájsť napríklad v [18].

- Predpokladajme, že okamžitá úroková miera sa riadi jednofaktorovým modelom (1.5).
- Podľa Itóovej lemy pre cenu dlhopisu $P(t, r; T)$ platí

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw. \quad (1.10)$$

- Vytvoríme portfólio $\Pi = V_1 - V_2$ pozostávajúce z dvoch typov dlhopisov s rôznymi maturitami T_1 a T_2 v množstvách V_1 a V_2 .
- Zvoľme hodnoty V_1 a V_2 tak, aby stochastický proces zmeny hodnoty portfólia $d\Pi$ bol bezrizikový, t. j. aby obsahoval len deterministickú časť.
- Vylúčením možnosti arbitráže a teda využitím faktu, že výnos bezrizikového portfólia musí byť rovný r , t. j. $d\Pi = r\Pi dt$, dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r, t) - \lambda(r, t)\sigma(r, t)) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2(r, t) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (1.11)$$

s koncovou podmienkou $P(T, r; T) = 1$. Funkcia $\lambda(r, t)$ sa nazýva trhovú cenu rizika a vyjadruje očakávaný nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika, resp. dá sa interpretovať ako prémie pre investora, z dôvodu podstupovania rizika.

Ak teda určíme parametre stochastickej rovnice pre $r(t)$ a hodnotu trhovej ceny rizika $\lambda(r, t)$, vyriešením parciálnej diferenciálnej rovnice (1.11) dostaneme cenu dlhopisu. V nasledujúcej časti uvedieme výpočet ceny dlhopisu pre Vašíčkov model, ktorú budeme v ďalšej časti práce potrebovať.

Cena dlhopisu vo Vašíčkovom modeli

Cenu dlhopisu pre Vašíčkov model (1.8) budeme hľadať v tvare $P(\tau, r)$. Nová premenná $\tau = T - t$ vyjadruje čas zostávajúci do expirácie dlhopisu. V takomto zápise potom parciálna diferenciálna rovnica pre Vašíčkov model s konštantnou trhovou cenou rizika $\lambda(r, t) = \lambda$ má podľa (1.11) tvar

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (1.12)$$

s počiatočnou podmienkou $P(0, r) = 1$. Predpokladajme riešenie v separovanom tvare

$$P(\tau, r) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}, \quad (1.13)$$

potom príslušné derivácie vystupujúce v (1.12) sú

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau} &= A'e^{-Br} - AB'e^{-Br}, \\ \frac{\partial P}{\partial r} &= -ABe^{-Br}, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} &= AB^2e^{-Br}. \end{aligned}$$

Dosadením derivácií do (1.12) dostávame systém obyčajných diferenciálnych rovníc pre funkcie A, B :

$$B' = 1 - \kappa B, \quad (1.14)$$

$$A' = AB(\lambda\sigma - \kappa\theta) + \frac{1}{2}\sigma^2 AB^2, \quad (1.15)$$

s počiatočnými podmienkami $A(0) = 1$ a $B(0) = 0$. Rovnica pre funkciu B je obyčajnou lineárnou diferenciálnou rovnicou a preto s využitím počiatočnej podmienky poľahky dostávame

$$B = \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau}). \quad (1.16)$$

Dosadením explicitného tvaru funkcie B do rovnice (1.15), následnou integráciou a využitím počiatočnej podmienky dostávame

$$A = \exp\left[(B(\tau) - \tau)R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\kappa}B^2(\tau)\right], \quad (1.17)$$

kde sme symbolom R_∞ označili

$$R_\infty = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}. \quad (1.18)$$

Toto označenie vychádza z toho, že hodnota R_∞ je limitou výnosových kriviek pre $\tau \rightarrow \infty$.

Cena dlhopisu v CIR modeli

Postup výpočtu ceny dlhopisu v CIR modeli je analogický postupu vo Vašíčkovom modeli. Predpokladaním tvaru (1.13) pre cenu dlhopisu a hodnoty trhovej ceny rizika $\lambda(r, t) = \lambda\sqrt{r}$ s konštantou λ , vyčíslením jednotlivých derivácií a dosadením do príslušnej parciálnej diferenciálnej rovnice dostávame systém obyčajných diferenciálnych rovníc pre funkcie A, B . Explicitným riešením tohto systému je:

$$A(\tau) = \left[\frac{2\phi e^{\frac{\tau}{2}(\phi+\psi)}}{(\phi+\psi)[e^{\phi\tau}-1] + 2\phi} \right]^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}, \quad (1.19)$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\phi\tau}-1)}{(\phi+\psi)[e^{\phi\tau}-1] + 2\phi}, \quad (1.20)$$

$$\phi = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2}, \quad \psi = \kappa + \lambda\sigma. \quad (1.21)$$

Veľkou výhodou a aj jedným z dôvodov popularity Vašíčkovho a CIR modelu je okrem iného aj fakt, že pre oba modely je možné analyticky nájsť explicitné riešenie pre cenu dlhopisu. Niektoré modely, napr. exponenciálny Vašíčkov model (1990), bezarbitrážny Black-Karasinského model (1991), CKLS model (1992) alebo Mercurio-Moraledov model (2000) takúto vlastnosť nemajú. Cena dlhopisu sa dá vypočítať pomocou numerických metód, napr. pomocou Crank-Nicolsonovej schémy ([7]) alebo Box metódy ([22]), alebo pomocou aproximácií v analytickom tvare (napr. [15], [24]).

1.3.3 Dvojfaktorové modely

V predchádzajúcej časti práce sme si predstavili jednofaktorové modely. Dynamika úrokovej miery je v týchto modeloch opísaná len pomocou jedného stochastického faktora. Jednoduchosť takéhoto modelovania na jednej strane môže pre niektoré modely prinášať výhodu v možnosti nájdania explicitného riešenia pre cenu dlhopisu, na strane druhej však stojí niekoľko nedostatkov. Jedným z nich je fakt, že akonáhle je hodnota úrokovej miery známa,

celá krivka časovej štruktúry úrokových mier je určená. Avšak, aj v realite môžu výnosové krivky s rovnakým začiatkom nadobúdať rôzne tvary. Takýto prístup modelovania je veľkým zjednodušením skutočného správania sa úrokovej miery. Jedným z riešení týchto problémov je konštrukcia dvojfaktorových modelov, ktoré prinášajú väčšiu voľnosť pri modelovaní úrokovej miery. Pri použití takýchto modelov môžu výnosové krivky nadobúdať širšiu škálu tvarov. Úroková miera je v dvojfaktorových modeloch funkciou dvoch faktorov, t. j. $r = r(x, y)$, a jej dynamika je potom vo všeobecnom prípade opísaná pomocou systému dvoch stochastických rovníc:

$$\begin{aligned} dx &= \mu_x(x, y)dt + \sigma_x(x, y)dw_1, \\ dy &= \mu_y(x, y)dt + \sigma_y(x, y)dw_2. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Prírastky dw_1, dw_2 Wienerových procesov môžu byť korelované, t. j. $\mathbb{E}(dw_1 dw_2) = \rho dt$. V závislosti od voľby faktorov potom rozlišujeme rôzne typy dvojfaktorových modelov. Uvedieme len niektoré z nich, čitateľ sa podrobnejšie informácie môže dozvedieť napr. z [4] a [18].

Dvojfaktorový Vašíčkov a CIR model

V dvojfaktorovej verzii Vašíčkovho a CIR modelu je okamžitá úroková miera súčtom dvoch nezávislých faktorov, t. j. $r = r_1 + r_2$, kde r_1, r_2 sú popísané stochastickou diferenciálnou rovnicou typu (1.8) vo Vašíčkovom modeli a (1.9) v CIR modeli.

Modely s inou ekonomickou veličinou

V modeloch tohto typu je dynamika úrokovej miery popísaná dvomi stavovými premennými, ktoré môžu ale nemusia byť na trhu pozorovateľné, môžu alebo nemusia byť korelované. V modeli Brennana a Schwartza (1982) sú týmito premennými krátkodobá a dlhodobá úroková miera. Model Corzovej a Schwartza (2003), patriaci do triedy konvergenčných modelov, bol vyvinutý pre krajiny vstupujúce do Európskej menovej únie. V tomto modeli je úroková miera krajiny vstupujúcej do Európskej únie závislá od európskej miery, pričom obe sú modelované pomocou stochastických diferenciálnych rovníc.

Dvojfaktorové modely so stochastickou volatilitou

Inou triedou dvojfaktorových modelov sú modely, v ktorých sa niektorý z konštantných parametrov jednofaktorového modelu modeluje ako náhodný proces. Týmto parametrom

môže byť napríklad trhovú cenu rizika alebo volatilita úrokovej miery. Medzi modely so stochastickou volatilitou patrí napríklad model Andersona a Lunda (1996) alebo Fong-Vašíčkov model (1991). Druhým z nich sa budeme v tejto práci zaoberať a jeho podrobnú analýzu uvádzame v nasledujúcej kapitole.

1.3.4 Cena dlhopisu v dvojfaktorovom modeli

Odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu $P(t, x, y; T)$, kde t je čas a T je čas splatnosti. Odvodenie je analogické odvodeniu pre jednofaktorové modely. Uvádzame preto len stručný postup bez uvedenia príslušných výpočtov. Podrobné odvodenie čitateľ môže nájsť napr. v [18].

- Predpokladajme, že vývoj úrokovej miery je popísaný dvojfaktorovým modelom (1.22).
- Využitím viacrozmernej Itóovej lemy pre cenu dlhopisu $P(t, x, y; T)$ dostávame

$$dP = \mu dt + \sigma_1 dw_1 + \sigma_2 dw_2,$$

kde

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_x \frac{\partial P}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_1 &= \sigma_x \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \sigma_2 &= \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y}.\end{aligned}$$

- Zostrojme portfólio Π pozostávajúce z troch typov dlhopisov s rôznymi maturitami T_1, T_2 a T_3 v množstvách V_1, V_2 a V_3 .
- Zvoľme hodnoty V_1, V_2 a V_3 tak, aby stochastický proces zmeny hodnoty portfólia $d\Pi$ bol bezrizikový.
- Vylúčením možnosti arbitráže a teda využitím faktu, že výnos bezrizikového portfólia musí byť rovný r , t. j. $d\Pi = r\Pi dt$, dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_x - \lambda_1 \sigma_x) \frac{\partial P}{\partial x} + (\mu_y - \lambda_2 \sigma_y) \frac{\partial P}{\partial y} + \\
& + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - r(x, y)P = 0
\end{aligned} \tag{1.23}$$

s koncovou podmienkou $P(T, x, y; T) = 1$. Funkcie $\lambda_1(x, y, t)$ a $\lambda_2(x, y, t)$ sú tzv. trhové ceny rizika príslušných faktorov a nezávisia od maturity T .

Kapitola 2

Pojem stochastickej volatility a Fong-Vašíčkov model

V kapitole 2 sa zoznámime s niekoľkými pojmami, ktoré budeme potrebovať v ďalšej časti diplomovej práce. Ako prvé popíšeme Fokker-Planckovu rovnicu, pomocou ktorej je možné určiť hustotu rozdelenia náhodnej premennej riadacej sa stochastickou diferenciálnou rovnicou. Spomenieme dôležitý koncept limitnej hustoty a predstavíme pojmy stochastická volatilita, vlastnosť zhlukovania a rýchla časová škála volatility. Na záver podrobne opíšeme Fong-Vašíčkov model, odvodíme cenu dlhopisu a zaoberať sa budeme aj kalibráciou trhových cien rizika.

2.1 Hustota rozdelenia stochastického procesu

Uvažujme náhodnú premennú $x = x(t)$, ktorá sa riadi všeobecným stochastickým procesom v tvare

$$dx(t) = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw \quad (2.1)$$

a začína v bode $x(0) = x_0$. Najprv si ukážeme, ako určiť pravdepodobnostné rozdelenie takejto premennej a potom nás bude zaujímať rozdelenie pre veľký čas $t \rightarrow \infty$, tzv. limitné rozdelenie premennej x .

Označme hustotu pravdepodobnostného rozdelenia procesu $x(t)$ v čase t ako

$$f = f(x, t | x(0) = x_0). \quad (2.2)$$

Funkcia hustoty okrem času t závisí aj od počiatočnej hodnoty x_0 . Ďalej, ak označíme

kumulatívnu distribučnú funkciu ako

$$F = F(x, t) = P(x(t) < x | x(0) = x_0), \quad (2.3)$$

potom na jej výpočet môžeme použiť vzťah $f = \frac{\partial F}{\partial x}$. Funkcia hustoty spĺňa tzv. Fokker-Planckovu rovnicu¹

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2 f) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu f) \quad (2.4)$$

s počiatočnou podmienkou $f(x, 0) = \delta(x - x_0)$. Funkciou $\delta(x - x_0)$ sme označili tzv. Diracovu delta funkciu v bode x_0 . Diracova funkcia predstavuje distribúciu, t. j. nie je to funkcia v pravom slova zmysle. Platí

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \neq x_0 \\ +\infty & \text{ak } x = x_0 \end{cases} \quad a \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1,$$

čo pre proces $x(t)$ v čase $t = 0$ znamená, že sa takmer isto nachádza v bode x_0 . Z matematického hľadiska je Fokker-Planckova rovnica lineárnou parciálnou diferenciálnou rovnicou druhého rádu parabolického typu. Okrem využitia na výpočet pravdepodobnostného rozdelenia náhodnej premennej sa pomocou nej môže opisovať napr. pozícia a rýchlosť malej častice pohybujúcej sa Brownovým pohybom, prúd v elektrickom obvode alebo elektrické pole v laseri ([21]). Je známe (pozri [18]), že napr. rozdelenie riešenia $r(t)$ Vašíčkovho stochastického procesu (1.8) v čase t pri štartovacej hodnote r_0 pochádza z normálneho rozdelenia s parametrami²

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r_t) &= \theta(1 - e^{-\kappa t}) + r_0 e^{-\kappa t}, \\ \mathbb{D}(r_t) &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}). \end{aligned}$$

Hustotu $f(x, t)$ je možné explicitne vyjadriť len pre niektoré špeciálne tvary stochastického procesu. Avšak, ak predpokladáme, že proces trvá dostatočne dlho, t. j. t je dostatočne veľké, môžeme hustotu rozdelenia $f(x, t)$ aproximovať pomocou tzv. limitného rozdelenia. Toto limitné rozdelenie existuje ak existuje $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, x)$ a limitné rozdelenie je funkciou hustoty. Uvažujme teda prípad, keď $t \rightarrow \infty$ a limitné rozdelenie existuje. Očakávame, že v takomto prípade už rozdelenie nebude závisieť od štartovacej hodnoty x_0 a že hustota $f(x, t)$ sa stabilizuje na limitnej hustote $\tilde{f}(x)$. Keďže potom $\tilde{f} = \tilde{f}(x)$ a $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = 0$, limitná

¹Intuitívny dôkaz možno nájsť v [27].

²Výpočet založený na Fokker-Planckovej rovnici je napr. uvedený v [27].

hustota spĺňa tzv. stacionárnu Fokker-Planckovu rovnicu

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2 \tilde{f}) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu \tilde{f}) = 0 \quad (2.5)$$

a podmienku na hustotu rozdelenia pravdepodobnosti $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) dx = 1$. Limitným rozdelením Vašíčkovho modelu je normálne rozdelenie $r_{lim} \sim \mathcal{N}(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa})$. V ďalšej časti sa zameriame na rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej, ktorá je riešením Besselovho odmocninového procesu, t. j.

$$dx = \kappa(\theta - x)dt + \sigma\sqrt{x}dw. \quad (2.6)$$

Limitné rozdelenie náhodnej premennej, ktorá je riešením procesu (2.6) budeme vo veľkej miere využívať v kapitole 3 pri odvodzaní aproximovanej ceny dlhopisu vo Fong-Vašíčkovom modeli. Fokker-Planckova rovnica pre uvedený proces má tvar

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (xf) - \frac{\partial}{\partial x} (\kappa(\theta - x)f). \quad (2.7)$$

Autori v článku [8] uvádzajú, že pravdepodobnostné rozdelenie x je necentralizovaný chí-kvadrát. Parametre tohto rozdelenia nebudeme z dôvodu zložitosti uvádzať. V našej práci budeme využívať len limitné rozdelenie, teda rozdelenie pre $t \rightarrow \infty$. Stacionárna Fokker-Planckova rovnica má potom tvar

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x\tilde{f}) - \frac{\partial}{\partial x} (\kappa(\theta - x)\tilde{f}) = 0. \quad (2.8)$$

Za podmienky $\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} > 1$ integráciou (2.8) dostávame, že náhodná premenná $x(t)$ má limitné rozdelenie v tvare

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} & \text{ak } x > 0 \\ 0 & \text{ak } x \leq 0 \end{cases}$$

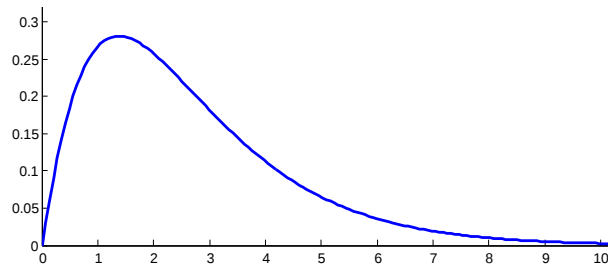
kde $\alpha = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}$, $\beta = \frac{2\kappa}{\sigma^2}$ a Γ je gama funkcia. Takéto pravdepodobnostné rozdelenie zodpovedá gama rozdeleniu $\Gamma(\alpha, \beta)$. Uvedieme aj základné štatistiky rozdelenia, t. j. strednú hodnotu

a disperziu ([31]).

$$\mathbb{E}(x) = \frac{\alpha}{\beta} = \theta \quad (2.9)$$

$$\mathbb{D}(x) = \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa} \quad (2.10)$$

Na nasledujúcom obrázku je zobrazené limitné rozdelenie náhodnej premennej riadiacej sa podľa Besselovho odmocninového procesu.



Obr. 2.1: Limitné rozdelenie Besselovho odmocninového procesu s hodnotami parametrov $\kappa = 1.482$, $\theta = 2.640$, $\sigma = 1.934$. Parametre prebraté z [9].

2.2 Stochastická volatilita

V roku 1973 bol prvýkrát publikovaný známy Black-Scholesov model na oceňovanie derivátov akcií. Stal sa základným kameňom tejto teórie a aj napriek množstvu reštriktívnych predpokladov je dodnes uznávaný a často používaným modelom. Jedným z predpokladov tohto modelu je aj predpoklad o konštantnej volatilitě. Už samotní autori v roku 1972 v časopise *Journal of Political Economy*³ napísali: „...there is evidence of non-stacionarity in the variance. More work must be done to predict variances using the information available.“ Premennivosť volatility stochastického procesu pre vývoj cien akcií v čase potvrdzujú aj ďalšie známe fakty, napríklad *volatility smile*. Aj volatilita úrokovej miery má charakter náhodného procesu a tento fakt je známy už niekoľko desaťročí. Longstaff a Schwartz v článku [20] hovoria o existencii empirických dôkazov o náhodnom charaktere volatility úrokovej miery a poukazujú na jej dôležitosť pri určovaní cien derivátov. Je známych mnoho modelov, v ktorých volatilita vystupuje ako ďalší stochastický faktor. Patria medzi ne

³BLACK, F., SCHOLLES, M.: *The Valuation of Option Contracts and Test of Market Efficiency*, Journal of Political Economy, Vol.27, No.2. p.416

napríklad všeobecný dvojfaktorový CIR model, ktorý sa dá do tvaru modelu stochastickej volatility prepísať (Longstaff a Schwartz 1992, Duffie a Kan 1996), stochastický Vašíčkov model, model odvodený Trollem a Schwartzom ([28]) alebo Brennerov model ([3]). Chen ako prvý v článku [14] uviedol trojfaktorový model so stochastickou volatilitou. Vznik modelov úrokovej miery so stochastickou volatilitou je častokrát motivovaný aj tým, že pomocou nich je možné vysvetliť tvar výnosových kriviek a ich pohyb ([20]).

2.2.1 Modelovanie stochastickej volatility

Vlastnosť clustering

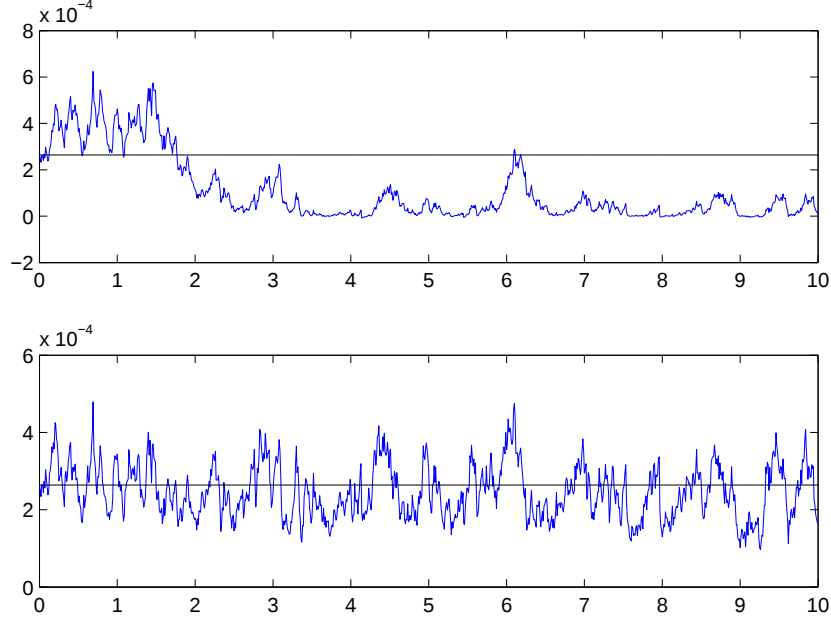
Proces volatility úrokovej miery nie je priamo pozorovateľný na trhu. Predstavu o jeho priebehu si môžeme napríklad urobiť z odhadov získaných z pozorovateľných cien dlhopisov. Ukazuje sa, že charakteristickou črtou procesu volatility je tzv. *volatility clustering*⁴, niekedy známou aj pod názvom *volatility burstiness*⁵ ([12]). V slovenčine by sme túto vlastnosť mohli voľne preložiť ako zhľukovanie volatility. Na obr. 2.2 sú znázornené dva simulované priebehy procesu volatility. Na vrchnom obrázku je proces volatility na začiatku nad limitnou hodnotu, potom však dlhodobo nadobúda nízke hodnoty. Takýto priebeh nie je veľmi typický, na rozdiel od priebehu na spodnom obrázku. Tu je pozorovateľná vlastnosť *volatility clustering*. Volatilita fluktuuje medzi nízkymi a vysokými hodnotami, pričom ostáva na nízkych, resp. na vysokých hodnotách len niekoľko dní, potom sa rýchlo zmení. Zdá sa, že hodnoty volatility sú nízke určitú (krátku) periódu, potom rýchlo, v návale nadobudnú vysoké hodnoty, opäť ostanú vysokými niekoľko dní a vrátia sa späť na nízke hodnoty.

Táto vlastnosť je úzko spätá s pojmom *mean reversion*, ktorý sme spomínali v kapitole 1. Pripomeňme, že drift v tvare $\mu(x, t) = \kappa(\theta - x)$ stochastického procesu hovorí, že stredná hodnota náhodnej premennej x je rýchlosťou κ priťahovaná k limitnej hodnote θ . Hodnota parametra $\frac{1}{\kappa}$ potom intuitívne súvisí s pojmom *holding period*, to znamená, s dobou, počas ktorej ostáva volatilita na približne rovnakých hodnotách. Čím je táto perióda menšia, tým častejšie sa volatilita vracia k strednej hodnote ([12]). Spojitosť medzi vlastnosťami *volatility clustering* a *mean reversion* naznačuje, že spomínaný tvar driftu by mohol byť správnou voľbou pre modelovanie stochastickej volatility. Je ešte potrebné spomenúť, že v modeli, ktorý popisuje volatilitu by mala byť zaručená nezápornosť tejto premennej. Je intuitívne zrejmé, že záporné hodnoty volatility nedávajú zmysel. Vzhľadom na spomenuté

⁴z ang. *cluster*- zhľuk, zoskupenie

⁵z ang. *burst*- nával, výbuch, prepuknutie

požiadavky sa ako vhodný kandidát na popis stochastického charakteru volatility ukazuje Besselov odmocninový proces (2.6).



Obr. 2.2: Simulácie priebehu procesu volatility, ktorý sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou (2.6). Hodnoty parametrov sú: $\theta = 2.640 \cdot 10^{-4}$, $\sigma = 0.01934$, $T = 10$ rokov a parameter $\kappa = 0.5$ pre vrchný obrázok a $\kappa = 10$ pre spodný obrázok.

2.3 Rýchla časová škála volatility

Empirické štúdie ukazujú (pozri [6]), že na finančných trhoch sa procesy úroková miera a volatilita úrokovej miery pohybujú v odlišných časových škálach, presnejšie, časová škála volatility je rýchlejšia. Uvedieme dva rôzne prístupy, ako pojem rýchlej časovej škály zakomponovať do modelu popisujúceho proces volatility. Predpokladajme, že proces volatility je modelovaný pomocou Besselovho odmocninového procesu (2.6) a nech pojem časovej škály reprezentuje hodnota parametra ϵ . Prvý zo spôsobov škálovania je prebrať z [26]. Pri tomto type škálovania sa akokeby volatilita úrokovej miery nepohybovala v časovej škále t ale v škále $t\epsilon$, kde hodnota parametra ϵ je malá a platí $0 < \epsilon \ll 1$. Škálovaním stochastickej diferenciálnej rovnice (2.6) dostaneme

$$dy = \frac{\kappa(\theta - y)}{\epsilon} dt + \frac{\sigma\sqrt{y}}{\sqrt{\epsilon}} dw. \quad (2.11)$$

Parameter σ je škálovaný hodnotou $\sqrt{\epsilon}$ z toho dôvodu, že pre stochastický člen dw platí $dw = \Phi\sqrt{dt}$, kde $\Phi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Rýchla časová škála je potom reprezentovaná malými hodnotami ϵ a limitou $\epsilon \rightarrow 0$. Druhý spôsob je prebrať z článku [12]. Rýchla časová škála volatility zodpovedá veľkej hodnote parametra κ . Ak zadefinujeme $\epsilon := \frac{1}{\kappa}$, potom je opäť rýchla časová škála reprezentovaná malými hodnotami ϵ a preškálovaný model vyzerá nasledovne:

$$dy = \frac{1}{\epsilon}(\theta - y)dt + \frac{\sigma\sqrt{y}}{\sqrt{\epsilon}}dw. \quad (2.12)$$

Koeficient pri volatilitě procesu y sa určí tak, aby sa dosiahla konštantná hodnota disperzie limitného rozdelenia y , ktorej hodnota potom je

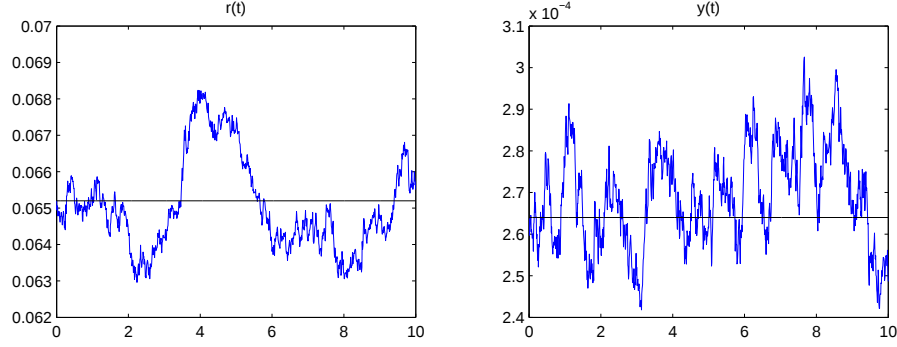
$$\mathbb{D}(y) = \frac{\theta\sigma^2}{2}. \quad (2.13)$$

2.4 Fong-Vašíčkov model so stochastickou volatilitou

Fong-Vašíčkov model bol prvýkrát publikovaný v článku *Fixed - Income Volatility Management* ([11]) v roku 1991 autormi Fongom a Vašíčkom. Patrí medzi dvojfaktorové modely so stochastickou volatilitou a vznikol rozšírením Vašíčkovho jednofaktorového modelu. Je založený na pozorovaniach týkajúcich sa volatility krátkodobej úrokovej miery. Ako sme spomenuli v predchádzajúcej podkapitole 2.2, volatilita krátkodobej úrokovej miery nie je nutne konštantná, tak ako napr. predpokladá Vašíčkov model (1.8). Fong-Vašíčkov model teda zahŕňa stochastickosť volatility a opisuje okamžitú úrokovú mieru prostredníctvom systému dvoch stochastických rovníc

$$\begin{aligned} dr(t) &= \kappa_1(\theta_1 - r(t))dt + \sqrt{y(t)}dw_1, \\ dy(t) &= \kappa_2(\theta_2 - y(t))dt + v\sqrt{y(t)}dw_2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

kde prírastky dw_1 a dw_2 Wienerových procesov môžu byť korelované, t. j. $\mathbb{E}(dw_1dw_2) = \rho dt$. Pre korelačný koeficient ρ platí $\rho \in (-1, 1)$. Parametre modelu $\kappa_1, \kappa_2, \theta_1, \theta_2$ a v sú kladné konštanty. Dynamiku *short rate* teda popisujú dva faktory - okamžitá úroková miera a volatilita okamžitej úrokovej miery, ktoré sú modelované *mean reversion* procesmi. Na nasledujúcom obrázku je znázornená simulácia dvojrozmerného náhodného procesu $\{r(t), y(t), t \in [0, T]\}$, ktorý sa riadi Fong-Vašíčkovým modelom (2.14).



Obr. 2.3: Simulácia riešenia (r, y) systému stochastických rovníc (2.14) s hodnotami parametrov z tab. 2.1 a $T=10$.

Vidíme, že ako krátkodobá úroková miera, tak aj volatilita sú priťahované k limitným hodnotám $\theta_1 = 0.0652$, resp. $\theta_2 = 2.640 \cdot 10^{-4}$. Navyše vidíme, že volatilita je nezáporná. Krátkodobá úroková miera z teoretického hľadiska môže nadobúdať aj záporné hodnoty, avšak zo simulácií sa zdá, že pravdepodobnosť nadobudnutia záporných hodnôt je veľmi nízka.

2.4.1 Ceny dlhopisov a výnosové krivky

V kapitole 1 sme odvodili oceňovaciu parciálnu diferenciálnu rovnicu (1.23) pre všeobecný dvojfaktorový model. Predpokladajme, že trhové ceny rizika majú tvar $\lambda_1 \sqrt{y}$, resp. $\lambda_2 \sqrt{y}$, kde λ_1, λ_2 sú konštanty. Potom PDR pre Fong-Vašíčkov model pre cenu dlhopisu $P(\tau, r, y)$ má nasledovný tvar:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 y) \frac{\partial P}{\partial r} + (\kappa_2(\theta_2 - y) - \lambda_2 v y) \frac{\partial P}{\partial y} + \\
 & + \frac{y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{v^2 y}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho v y \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} - rP = 0,
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

pričom počiatočná podmienka ceny dlhopisu je $P(0, r, y) = 1$. Riešenie rovnice (2.15) sa dá vyjadriť v separovanom tvare (pozri [11])

$$P(\tau, r, y) = A(\tau) e^{-B(\tau)r - C(\tau)y}, \tag{2.16}$$

pričom, aby bola splnená počiatočná podmienka $P(0, r, y) = 1$, pre funkcie A, B a C musí platiť $A(0) = 1, B(0) = 0$ a $C(0) = 0$. Vyčíslením jednotlivých parciálnych derivácií vystupujúcich v rovnici (2.15), následným spätným dosadením do (2.15) a zlúčením jednotlivých výrazov prislúchajúcich k r a y dostávame, že $P(\tau, r, y)$ je riešením (2.15) v tvare (2.16) práve vtedy keď funkcie $A(\tau), B(\tau)$ a $C(\tau)$ spĺňajú systém obyčajných diferenciálnych rovníc

$$A' = -A(\kappa_1\theta_1B + \kappa_2\theta_2C), \quad (2.17)$$

$$B' = -\kappa_1B + 1, \quad (2.18)$$

$$C' = -\lambda_1B - \kappa_2C - \lambda_2vC - \frac{B^2}{2} - \frac{v^2C^2}{2} - v\rho BC, \quad (2.19)$$

s počiatočnými podmienkami $A(0) = 1, B(0) = 0, C(0) = 0$. Pozrime sa bližšie na tento systém rovníc. Obyčajná diferenciálna rovnica (2.18) pre funkciu $B(\tau)$ je lineárna a preto jej riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $B(0) = 0$ možno ľahko analyticky vypočítať. Explicitný tvar riešenia je

$$B = \frac{1}{\kappa_1}(1 - e^{-\kappa_1\tau}). \quad (2.20)$$

Všimnime si, že funkcia B má presne taký istý tvar ako (1.16), vystupujúca vo Vašíčkovom modeli. Rovnica (2.19) pre funkciu $C(\tau)$ má už zložitejší tvar, avšak ak dosadíme explicitný tvar riešenia (2.20),

$$C' = -\frac{v^2}{2}C^2 - (\kappa_2 + \lambda_2v + v\rho B)C - \lambda_1B - \frac{B^2}{2}, \quad C(0) = 0 \quad (2.21)$$

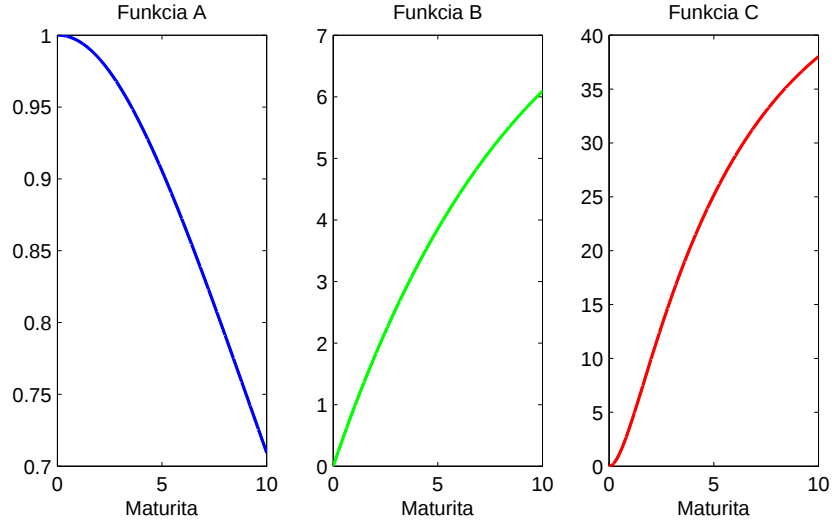
vieme ju numericky, napríklad pomocou implementovanej explicitnej Runge-Kutta metódy štvrtého a piateho rádu⁶, vypočítať. Potom už len dosadením do poslednej rovnice (2.17) a následnou integráciou dostávame aj riešenie pre funkciu $A(\tau)$,

$$A = \exp\left(-\theta_1\tau + \theta_1B - \kappa_2\theta_2 \int_0^\tau C(s)ds\right). \quad (2.22)$$

Na obr. 2.4 sú zobrazené priebehy funkcií A, B a C pre hodnoty parametrov z tab. 2.1.

Ešte predtým, ako sa budeme zaoberať samotnými vlastnosťami funkcií A, B a C , spomenieme jeden zásadný predpoklad týkajúci sa parametrov Fong-Vašíčkovho modelu. Stehlíková a Ševčovič sa v článku [25] okrem iného zaoberajú aj prípustnosťou ceny dlhopisu $P(\tau, r, y)$. Presnejšie, aby sme funkciu (2.16) mohli chápať ako cenu dlhopisu, mala

⁶V Matlabe je to funkcia ode45.



Obr. 2.4: Priebehy funkcií A, B a C pre hodnoty parametrov z tab. 2.1, $\lambda_1 = -12, \lambda_2 = -5, \tau \in (0, 10]$.

by spĺňať isté vlastnosti. Sú to:

1. $0 < P(\tau, r, y) < 1$ pre $\tau \in (0, T]$,
2. funkcia $r \mapsto P(\tau, r, y)$ je klesajúca,
3. funkcia $y \mapsto P(\tau, r, y)$ je klesajúca.

Prvá z vlastností hovorí o tom, že cena dlhopisu by mala byť kladná a nemala by presiahnuť svoju nominálnu hodnotu⁷. V druhej vlastnosti požadujeme, aby pri vyšších krátkodobých úrokových mierach bola hodnota dlhopisu nižšia a pri poslednej, aby so zväčšujúcou sa volatilitou krátkodobej úrokovej miery klesala cena dlhopisu. Všetky tieto tri vlastnosti sú prirodzené a intuitívne a teda je rozumné, aby ich cena dlhopisu spĺňala. V článku [25] autori ukázali, že ak parametre modelu spĺňajú nerovnosť

$$\lambda_1 \leq -\frac{1}{2\kappa_1}, \quad (2.23)$$

potom cena dlhopisu $P(\tau, r, y)$ spĺňa vlastnosti 1-3. Preto budeme v ďalšej časti práce predpokladať, že parametre modelu spĺňajú (2.23).

V krátkosti spomenieme niekoľko vlastností funkcií A, B a C , ktoré sú podmienené štruktúrnym predpokladom o parametroch modelu (2.23) a ktoré sa využívajú pri odvodení vlastností cien dlhopisov a výnosových kriviek.

⁷V našom prípade sme uvažovali diskontný dlhopis, touto hodnotou je teda 1.

Veta 1. ([23], Veta 19.)

Za predpokladu (2.23) funkcie A , B , a C majú nasledovné vlastnosti:

1. $C'(0) = 0, C''(0) = -\lambda_1$,
2. $\forall \tau > 0 : 0 < A(\tau) < 1, B(\tau) > 0, C(\tau) > 0$.

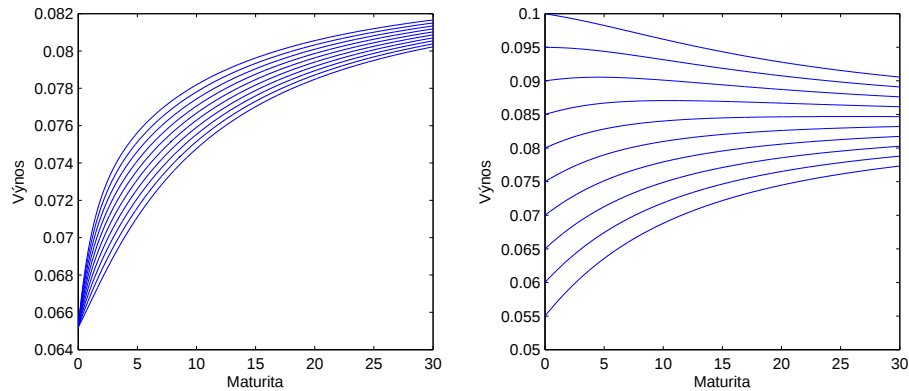
Ukážeme, že z podmienok uvedených vo Vete 1 vyplývajú vlastnosti 1-3. Pripomeňme, že cena dlhopisu je v tvare (2.16). Pretože pre funkciu $A(\tau)$ platí $A(\tau) \in (0, 1), \forall \tau > 0$ dostávame $P(\tau, r, y) \in (0, 1)$ pre $\tau \in (0, T]$. Ak zderivujeme cenu dlhopisu $P(\tau, r, y)$ postupne podľa premenných r a y a využijeme $P(\tau, r, y) \in (0, 1)$ a $B(\tau) > 0, C(\tau) > 0, \forall \tau > 0$ dostávame

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial r} &= -B(\tau)P(\tau, r, y) < 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -C(\tau)P(\tau, r, y) < 0.\end{aligned}$$

Záporné hodnoty derivácií dokazujú vlastnosti 2 a 3. Pozrime sa, aký tvar môže nadobúdať krivka časovej štruktúry úrokových mier pri použití Fong-Vašíčkovho modelu. Použijúc separovaný tvar riešenia ceny dlhopisu (2.16) a vzorec (1.2) na výpočet úrokovej miery $R(\tau, r, y)$ dostávame

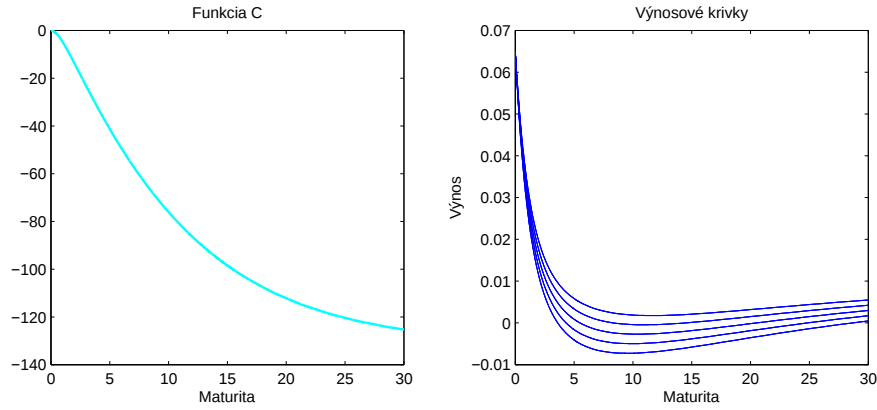
$$R(\tau, r, y) = -\frac{1}{\tau} \ln A(\tau) + \frac{1}{\tau} B(\tau)r + \frac{1}{\tau} C(\tau)y. \quad (2.24)$$

Obrázok 2.5 zobrazuje krivky časovej štruktúry úrokových mier.



Obr. 2.5: Krivky časovej štruktúry úrokových mier. Hodnoty parametrov modelu sú z tab. 2.1, $\lambda_1 = -12$, $\lambda_2 = -5, \tau \in (0, 30]$. Vľavo: $r = 0.0652, y \in [0.0001, 0.0011]$. Vpravo: $y = 2.64 \cdot 10^{-4}, r \in [0.05, 0.10]$.

Na obrázku vľavo sú vykreslené výnosové krivky pre fixnú hodnotu úrokovej miery $r = 0.0652$ a meniace sa hodnoty volatility. Vpravo je naopak zafixovaná hodnota volatility úrokovej miery na $y = 2.64 \cdot 10^{-4}$, zatiaľ čo úroková miera sa mení. Na záver si ukážeme ešte jeden dôvod, prečo je štrukturálna podmienka (2.23) dôležitá. Predpokladajme na teraz, že parametre modelu nespĺňajú predpoklad (2.23), konkrétne uvažujme $\lambda_1 > 0$. Podľa prvej podmienky vo Vete 1 potom platí $C'''(0) = -\lambda_1 < 0$, $C''(0) = 0$ a navyše $C(0) = 0$. Preto pre nejaký malý čas do expirácie $\tau > 0$ nadobúda funkcia C záporné hodnoty, čo má za následok fakt, že úrokové miery môžu byť pre vysoké hodnoty volatility záporné. Túto situáciu ilustruje obr. 2.6, kde sme pre trhovú cenu rizika λ_1 zvolili hodnotu 15 a pre volatilitu hodnoty z intervalu $[0.006, 0.0075]$. Vidíme, že funkcia C je na celom intervale záporná a hodnoty úrokových mier nadobúdajú aj záporné hodnoty, čo nie je v súlade s realitou.



Obr. 2.6: Funkcia C a výnosové krivky pri porušení predpokladu (2.23). Hodnoty parametrov modelu sú z tab. 2.1, $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = -5$, $\tau \in (0, 30]$.

2.4.2 Limita výnosových kriviek

Vráťme sa naspäť k obr. 2.5, ktorý zobrazuje výnosové krivky. Pri pohľade naň nás môže napadnúť otázka, či existuje limita výnosových kriviek pre $\tau \rightarrow \infty$ a v prípade ak existuje, aká je jej hodnota. Touto otázkou sa teraz budeme zaoberať. Hodnoty krivky časovej štruktúry úrokových mier sa vypočítajú pomocou vzorca (2.24), v ktorom vystupujú funkcie A , B a C . Podľa Vety 1 je funkcia A ohraničená a z explicitného tvaru (2.20) funkcie B dostávame

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} B(\tau) = \frac{1}{\kappa_1}. \quad (2.25)$$

Zaujímáť nás teda bude priebeh funkcie C . Predpokladajme, že existuje limita funkcie C . Použitím Vety 1 je potom táto limita nezáporná a teda nech

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau) =: \tilde{C} \geq 0. \quad (2.26)$$

Intuitívne, ak má funkcia limitu, potom aj jej derivácia má limitu a navyše hodnota tejto limity je nula. Podrobný dôkaz tohto tvrdenia môže čitateľ nájsť napríklad v [19]. Stručne, predpokladajme sporom, že $\lim_{\tau \rightarrow \infty} C'(\tau) = L \neq 0$. Potom z Lagrangeovej vety o strednej hodnote⁸ a definície limity platí $\forall s, t \in (K, \infty) : C(s) - C(t) \geq \frac{L}{2}(s - t)$, čo pre $s \rightarrow \infty$ dáva spor. Z (2.19) dostávame kvadratickú rovnicu pre $\tilde{C}$

$$0 = \frac{v^2}{2}\tilde{C}^2 + \left(\kappa_2 + \lambda_2 v + \frac{v\rho}{\kappa_1}\right)\tilde{C} + \frac{\lambda_1}{\kappa_1} + \frac{1}{2\kappa_1^2}. \quad (2.27)$$

Ak predpokladáme platnosť štruktúrálnej podmienky (2.23), potom pre absolútny člen v kvadratickej rovnici (2.27) platí

$$\frac{1 + 2\lambda_1\kappa_1}{2\kappa_1^2} \leq 0. \quad (2.28)$$

Pre potreby existencie práve jednej nezápornej limity $\tilde{C}$ potrebujeme, aby rovnica (2.27) mala dva reálne korene, jeden kladný a jeden záporný. Toto môžeme dosiahnuť zosilnením predpokladu (2.23) na ostrú nerovnosť. Využitím platnosti Vietových vzťahov⁹ pre kvadratické rovnice potom dostávame, že (2.27) má práve jeden kladný koreň a hodnota limity $\tilde{C}$ sa rovná práve tomuto koreňu. Vypočítajme teraz hodnotu limity výnosových kriviek.

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau, r, y) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} -\frac{\ln A(\tau)}{\tau} + \frac{B(\tau)}{\tau}r + \frac{C(\tau)}{\tau}y \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} -\frac{\ln A(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} -\frac{A'}{A} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \kappa_1\theta_1 B + \kappa_2\theta_2\tilde{C} \\ &= \theta_1 + \kappa_2\theta_2\tilde{C} \end{aligned} \quad (2.29)$$

⁸mathworld.wolfram.com/Mean-ValueTheorem.html

⁹mathworld.wolfram.com/VietasFormulas.html

Vo výpočte sme využili nasledovné. V prvej rovnosti vzťah (2.24), v druhej sme využili, že funkcie B a C sú kladné pre $\tau \rightarrow \infty$ a majú konečnú limitu. Preto

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{B(\tau)}{\tau} r = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{C(\tau)}{\tau} y = 0. \quad (2.30)$$

V tretej rovnosti sme použili L'Hospitalovo pravidlo a v posledných dvoch vzťahy (2.17) a (2.25). V nasledujúcej časti sa budeme venovať kalibrácii niektorých parametrov Fong-Vašíčkovho modelu.

2.4.3 Kalibrácia trhových cien rizika

O kalibrácii modelov krátkodobej úrokovej miery sa vedú široké diskusie. Existuje množstvo sofistikovaných metód na odhadnutie parametrov, napr. zovšeobecnená metóda momentov (GMM), efektívna metóda momentov Gallanta a Tauchena (EMM of Gallant and Tauchen), rozšírený Kalmanov filter (EKF) a iné. Nie je jednoduché určiť, ktorá metóda je pre daný model najvhodnejšia. Kalibrácia Fong-Vašíčkovho modelu nepatrí do náplne našej diplomovej práce, avšak odhady parametrov modelu budeme v kapitole 4 potrebovať. Snažili sme sa preto v dostupnej literatúre nájsť odhady týchto parametrov. Vhodnými článkami, ktoré sa nám podarilo získať boli články [9] a [10], oba od Danilova a Mandala. V nich autori pomocou EMM odhadli parametre $\kappa_1, \kappa_2, \theta_1, \theta_2$ a v . Dáta, z ktorých parametre odhadli boli vyjadrené v percentách. My však potrebujeme odhady v desatinných číslach a preto je potrebné preškálovanie. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené originálne hodnoty parametrov prevzaté z [9] a taktiež preškálované hodnoty, s ktorými budeme ďalej pracovať.

Parameter	Odhad prebratý z [9]	Preškálovaný odhad
κ_1	0.109	0.109000
κ_2	1.482	1.482000
θ_1	6.520	0.065200
θ_2	2.640	0.000264
v	1.934	0.019340

Tabuľka 2.1: Hodnoty odhadnutých parametrov Fong-Vašíčkovho modelu (zdroj: [9]) a preškálované hodnoty.

V článku sa autori vôbec nezaoberajú koreláciou medzi prírastkami Wienerových procesov, preto budeme predpokladať, že $\rho = 0$. Ostávajú nám teda už len hodnoty trhových cien rizika λ_1, λ_2 . Odhady týchto parametrov však už v článku nie sú, preto ich musíme

odhadnúť sami. Na odhad použijeme dáta uvedené v nasledujúcej tabuľke. Jedná sa o spriemerované výnosy dlhopisov s maturitami od 1 do 10 rokov a spriemerovanú hodnotu výnosu trojmesačného dlhopisu, ktorú budeme považovať za aktuálnu hodnotu krátkodobej úrokovej miery.

Maturita	3m	1r	2r	3r	4r	5r	6r	7r	8r	9r	10r
Výnosy (%)	5.84	6.30	6.49	6.61	6.69	6.75	6.81	6.84	6.87	6.88	6.90

Tabuľka 2.2: Spriemerované hodnoty výnosov dlhopisov s rôznymi maturitami. Zdroj: [9]

Odhad pomocou limity výnosových kriviek

V predchádzajúcej časti sme vypočítali teoretickú hodnotu limity výnosových kriviek. Na základe dát uvedených v tab. 2.2 nastavíme túto hodnotu na 7.00%. Z rovnice (2.29) potom môžeme vyjadriť hodnotu $\tilde{C}$ a dosadiť ju do (2.27). V rovnici (2.27) sú potom dve neznáme - λ_1 a λ_2 . Navyiac, z tejto rovnice vieme vyjadriť λ_2 pomocou λ_1 a tak dostávame jednorozmernú optimalizáciu pre neznámu λ_1 . Odhad trhovej ceny rizika λ_1 potom dostaneme ako výsledok optimalizačnej úlohy

$$\begin{aligned} \min_{\lambda_1} \quad & \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} (R_i^{real} - R_i^{mod})^2 \\ & \lim_{\tau \rightarrow \infty} R^{mod} = 0.07 \\ & \lambda_1 < -\frac{1}{2\kappa_1}, \end{aligned}$$

kde R^{real} , resp. R^{mod} sú hodnoty reálnych výnosov uvedených v tab. 2.2, resp. výnosy s príslušnými maturitami vypočítané Fong-Vašíčkovým modelom. Hodnotu trhovej ceny rizika λ_2 potom dopočítame z hodnoty λ_1 .

Dvojrozmerná optimalizácia

Druhým spôsobom odhadnutia trhových cien rizika je dvojrozmerná optimalizácia. V nej budeme optimalizovať cez oba neznáme parametre tak, aby sa dosiahla zhoda s výnosovými krivkami. Rozlíšime dva prípady - optimalizácia s rovnakými váhami a optimalizácia s rôznymi váhami maturít. Rovnaké váhy maturít znamenajú, že váhy pre jednotlivé výnosy sú rovnaké bez ohľadu na to, k akej maturite dlhopisu prislúchajú. Naopak,

v druhom prípade budú váhy jednotlivých výnosov závisieť od maturity dlhopisu, ku ktorej prislúchajú. Presnejšie, váhou bude τ^2 . Účelová funkcia minimalizácie má potom tvar

$$\min_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} (R_i^{real} - R_i^{mod})^2$$

pre prvý prípad a tvar

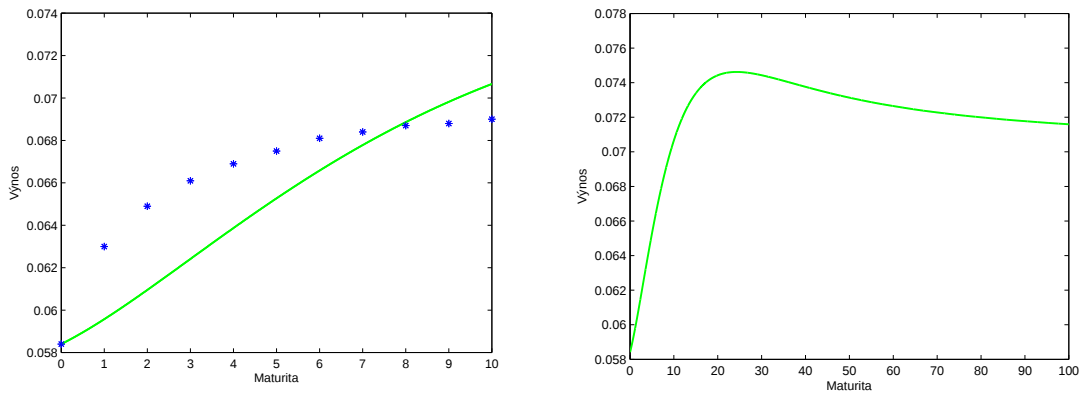
$$\min_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{i=1}^{10} \frac{i^2}{10} (R_i^{real} - R_i^{mod})^2$$

pre druhý prípad. V oboch prípadoch musí byť splnené ohraňenie $\lambda_1 < -\frac{1}{2\kappa_1}$. V nasledujúcej tabuľke sú výsledky optimalizácie pre všetky tri spôsoby odhadovania.

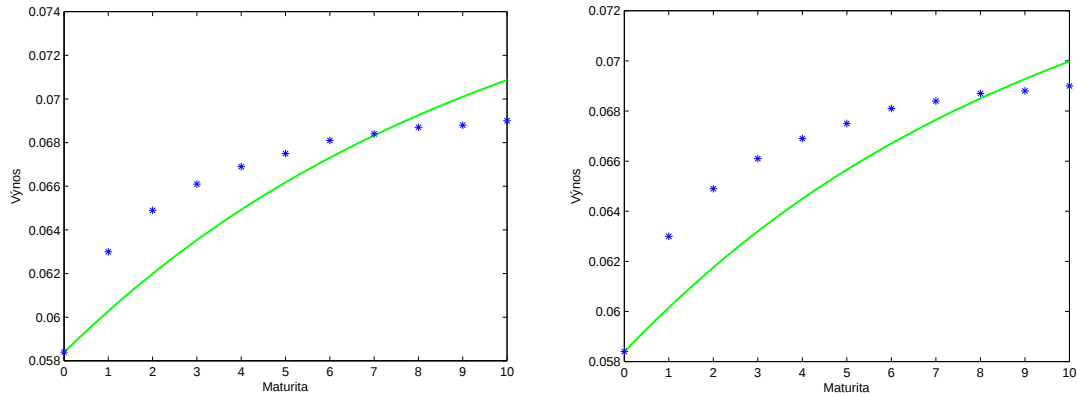
Metóda	λ_1	λ_2
Odhad pomocou limity výnosových kriviek	-4.94	-63.1044
Dvojrozmerná optimalizácia s rovnakými váhami maturít	-12	-5
Dvojrozmerná optimalizácia s rôznymi váhami maturít	-11	-6

Tabuľka 2.3: Odhady trhových cien rizika

Na obr. 2.7 je vľavo porovnanie výnosovej krivky s hodnotami $\lambda_1 = -4.94, \lambda_2 = -63.1044$ s reálnymi dátami a vpravo samotná výnosová krivka pre $\tau \in (0, 100)$. Vidíme, že konvergencia výnosovej krivky k limitnej hodnote je veľmi pomalá, z čoho môžeme usúdiť, že odhady trhových cien rizika v tomto prípade nemusia byť až také dobré. Aj z tohto dôvodu sme uvažovali dvojrozmernú optimalizáciu. Porovnania výnosových kriviek s reálnymi dátami pre oba prípady tejto metódy sú vykreslené na obr. 2.8.



Obr. 2.7: Vľavo: Porovnanie výnosovej krivky s reálnymi dátami pre odhad pomocou limity výnosových kriviek. Vpravo: Výnosová krivka pre $\tau \in (0, 100)$



Obr. 2.8: Porovnanie výnosovej krivky s reálnymi dátami pre dvojrozmernú optimalizáciu s rovnakými váhami (vľavo) a s rôznymi váhami (vpravo).

Aj keď z obrázkov je zrejmé, že sa nejedná o extrémne dobré fitovanie reálnych dát, výnosové krivky ako také majú rozumný tvar. V kapitole 4, kde budeme porovnávať presné riešenie s aproximovaným, budeme preto pri porovnávaní využívať všetky tri sady parametrov λ_1 a λ_2 .

Kapitola 3

Asymptotická metóda a odvodenie aproximácie ceny dlhopisu

Náplňou tejto kapitoly bude predstavenie asymptotickej metódy, pomocou ktorej určíme aproximáciu ceny dlhopisu. Metóda zahŕňa koncept rýchlej časovej škály volatility úrokovej miery. Fouque, Papanicolaou a Sircar v článkoch [12] a [6]¹ aplikovali túto metódu na dvojrozmerné modely so stochastickou volatilitou dané rovnicami

$$\begin{aligned}dr(t) &= \kappa_1(\theta_1 - r(t))dt + f(y(t))dw_1, \\dy(t) &= \kappa_2(\theta_2 - y(t))dt + \beta(\rho dw_1 + \sqrt{1 - \rho^2}dw_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dr(t) &= \kappa_1(\theta_1 - r(t))dt + \sqrt{c_{11}r(t) + c_{12}y(t)}dw_1, \\dy(t) &= \kappa_2(\theta_2 - y(t))dt + \sqrt{c_{21}r(t) + c_{22}y(t)}dw_2,\end{aligned}$$

kde f je kladná funkcia a vypočítali aproximované ceny opcií, resp. dlhopisov. Stehlíková a Ševčovič v [26] pomocou tejto metódy vypočítali aproximovanú cenu dlhopisu pre model

$$\begin{aligned}dr(t) &= \kappa(\theta - r(t))dt + \sqrt{y(t)}\sqrt{r(t)}dw_1, \\dy(t) &= \alpha(y)dt + v\sqrt{y(t)}dw_2,\end{aligned}$$

kde diferenciálna rovnica $\frac{dy}{dt} = \alpha(y)$ pre funkciu $\alpha(y)$ má dve stabilné stacionárne riešenia. Nakoniec Aldberg v [1] aplikoval asymptotickú metódu na model, kde sa volatilita úrokovej

¹v spolupráci s Cottonom

miery riadi Vašíčkovým modelom

$$\begin{aligned}dr(t) &= \kappa_1(\theta_1 - r(t))dt + y(t)dw_1, \\ dy(t) &= \kappa_2(\theta_2 - y(t))dt + \sigma dw_2.\end{aligned}$$

Vo všetkých štyroch prípadoch sú w_1 a w_2 nezávislé Wienerove procesy. V našej práci aplikujeme asymptotickú metódu na Fong-Vašíčkov model so stochastickou volatilitou. Výhodou, v porovnaní s aplikáciami na iné modely je to, že pre Fong-Vašíčkov model vieme nájsť dostatočne presné riešenie ceny dlhopisu. Máme teda možnosť porovnania aproximácie riešenia s presným riešením. Týmto sa bude zaoberať kapitola 4.

3.1 Asymptotická metóda

Jednou z hlavných úloh diplomovej práce je pomocou asymptotickej metódy odvodiť aproximáciu ceny dlhopisu pre Fong-Vašíčkov model. Kľúčovým predpokladom použitia tejto metódy je predpoklad, že volatilita úrokovej miery sa pohybuje v rýchlej časovej škále, t. j. v našom prípade teda predpokladáme, že κ_2 je veľké. Princíp metódy spočíva v asymptotickom rozvoji presného riešenia. Ukončenie tohto rozvoja v rozumnom bode, t. j. aproximácia na určitej úrovni presnosti, redukuje závislosť aproximovanej ceny na detailoch podkladového modelu. V tomto zmysle je asymptotická metóda robustná a teda vhodná pre širokú škálu modelov ([6]). Pre modely ako Fong-Vašíčkov model, ktorého druhým náhodným faktorom je volatilita úrokovej miery, teda proces, ktorý nie je priamo pozorovateľný na trhu, je tento fakt veľmi podstatný. Pre výpočet ceny dlhopisu totiž nebudeme nutne potrebovať odhady všetkých parametrov modelu popisujúceho skrytý proces volatility. Inak povedané, proces krátkodobej úrokovej miery môžeme považovať za pozorovateľný, zatiaľ čo aktuálna hodnota volatility pozorovateľná nie je. Asymptotická metóda výpočtu ceny dlhopisu zredukuje priamu závislosť tejto ceny na parametroch procesu y ale ostane dostatočne závislá na parametroch procesu úrokovej miery.

3.1.1 Odvodenie aproximovanej ceny dlhopisu

Preškálovanie modelu

Uvažujme Fong-Vašíčkov model (2.14). Za podmienky $\frac{2\kappa_2\theta_2}{v^2} > 1$ je limitné rozdelenie náhodnej premennej $y(t)$ podľa 2.1 gama rozdelenie $\Gamma(\alpha, \beta)$ s parametrami

$$\alpha = \frac{2\kappa_2\theta_2}{v^2}, \quad (3.1)$$

$$\beta = \frac{2\kappa_2}{v^2}. \quad (3.2)$$

Ak použijeme druhý z prístupov škálovania uvedených v predchádzajúcej kapitole, pre jednotku rýchlej časovej škály ϵ dostávame $\epsilon = \frac{1}{\kappa_2}$. Zafixovaním variance limitného rozdelenia premennej y potom dostávame preškálovaný Fong-Vašíčkov model v tvare

$$dr(t) = \kappa_1(\theta_1 - r(t))dt + \sqrt{y(t)}dw_1, \quad (3.3)$$

$$dy(t) = \frac{1}{\epsilon}(\theta_2 - y(t))dt + \frac{v\sqrt{y(t)}}{\sqrt{\epsilon}}dw_2. \quad (3.4)$$

Parametre α, β gama rozdelenia potom sú

$$\alpha = \frac{2\theta_2}{v^2}, \quad (3.5)$$

$$\beta = \frac{2}{v^2}. \quad (3.6)$$

Nech sa trhové ceny rizika dajú vyjadriť v tvare $\lambda_1\sqrt{y}$, resp. $\lambda_2\sqrt{y}$, kde λ_1, λ_2 sú konštanty, potom parciálna diferenciálna rovnica pre horeuvedený model má nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^\epsilon}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 y) \frac{\partial P^\epsilon}{\partial r} + \left(\frac{1}{\epsilon}(\theta_2 - y) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\lambda_2 v y \right) \frac{\partial P^\epsilon}{\partial y} \\ + \frac{y}{2} \frac{\partial^2 P^\epsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{\epsilon} \frac{v^2 y}{2} \frac{\partial^2 P^\epsilon}{\partial y^2} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \rho v y \frac{\partial^2 P^\epsilon}{\partial r \partial y} - r P^\epsilon = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

s koncovou podmienkou $P^\epsilon(T, r, y) = 1$.²

² $P^\epsilon(t, r, y)$ označuje cenu dlhopisu vzhľadom na parameter ϵ .

Prepis PDR pomocou operátorov

Zápis parciálnej diferenciálnej rovnice v tvare (3.7) je veľmi neprehľadný. Môžeme si všimnúť, že vzhľadom na parameter ϵ obsahuje členy troch rádov: $\frac{1}{\epsilon}$, $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ a 1. Ak zoskupíme výrazy prislúchajúce k týmto jednotlivým rádom, môžeme (3.7) prepísať do zjednodušeného tvaru pomocou zavedenia nového vhodného označenia $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$. PDR (3.7) potom vyzerá nasledovne:

$$\left(\frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \right) P^\epsilon = 0, \quad (3.8)$$

kde

$$\mathcal{L}_0 = (\theta_2 - y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{v^2 y}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{L}_1 = -\lambda_2 v y \frac{\partial}{\partial y} + \rho v y \frac{\partial^2}{\partial r \partial y}, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\partial}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 y) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{y}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - r. \quad (3.11)$$

Pozrime sa bližšie na jednotlivé operátory. Operátor $\mathcal{L}_0$ obsahuje len parciálne derivácie vzhľadom na volatilitu y , $\mathcal{L}_1$ obsahuje zmiešané parciálne derivácie vzhľadom na obe stochastické premenné³. Nakoniec, operátor $\mathcal{L}_2$ je Vašíčkov operátor pre stochastický proces (3.3).

Asymptotický rozvoj P^ϵ

Asymptotický rozvoj presného riešenia P^ϵ spočíva v tom, že toto riešenie rozvineme do radu vzhľadom na mocniny $\sqrt{\epsilon}$, t. j.

$$P^\epsilon = P_0 + \sqrt{\epsilon} P_1 + \epsilon P_2 + \epsilon \sqrt{\epsilon} P_3 + \dots, \quad (3.12)$$

kde $P_0, P_1, \dots$ sú funkcie premenných t, r, y spĺňajúce koncové podmienky $P_0(T, r, y) = 1$ a $P_i(T, r, y) = 0$ pre $i \geq 1$. Substitúciou (3.12) do (3.8) a zoskupením členov jednotlivých

³Ak by sme predpokladali, že Wienerove procesy w_1 a w_2 sú nekorelované, t. j. $\rho = 0$, operátor $\mathcal{L}_1$ by obsahoval len parciálnu deriváciu vzhľadom na y .

řádov parametra ϵ dostávame

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L}_0 P_0 &+ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0) \\
 &+ (\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0) \\
 &+ \sqrt{\epsilon} (\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1) \\
 &+ \dots \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Keďže sa jedná o aproximačnú metódu, postup riešenia spočíva v postupnom aproximovaní riešenia. Presnejšie, najprv zoberieme člen prislúchajúci rádu $\frac{1}{\epsilon}$ a položíme ho rovný nule. V druhom kroku položíme rovný nule člen pri $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$, atď. V každom kroku takto dostaneme parciálnu diferenciálnu rovnicu, z ktorej sa snažíme získať čo najviac informácií o funkciách P_i a napokon tieto funkcie explicitne vyjadriť. Presnosť aproximácie, ale aj náročnosť výpočtu bude závisieť od počtu funkcií P_i , ktoré budeme chcieť explicitne vyjadriť. Čím viac členov rozvoja (3.13) budeme brať do úvahy, tým náročnejší bude výpočet aproximácií a tým viac bude výsledná aproximácia závislá od špecifik konkrétného modelu. Avšak ak zoberieme do úvahy málo členov, môže sa stať, že nezachytíme dôležité charakteristiky, napr. *humps* výnosových kriviek ([6]).

Člen rádu $\frac{1}{\epsilon}$

Položíme člen rádu $\frac{1}{\epsilon}$ rovný nule, t. j.

$$\mathcal{L}_0 P_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left((\theta_2 - y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{v^2 y}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) P_0 = 0. \tag{3.14}$$

Ako sme už spomenuli, operátor $\mathcal{L}_0$ obsahuje len parciálne derivácie vzhľadom na $y(t)$ a preto P_0 nezávisí od premennej $y(t)$, je vzhľadom na ňu konštantné, t. j.

$$P_0 = P_0(t, r). \tag{3.15}$$

Člen rádu $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$

Uvažujme teraz člen rádu $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$, t. j.

$$\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0 = 0. \tag{3.16}$$

Operátor $\mathcal{L}_1$ obsahuje v oboch svojich členoch parciálne derivácie vzhľadom na $y(t)$ a ako sme už ukázali, P_0 od tejto premennej nezávisí, preto nutne $\mathcal{L}_1 P_0 = 0$. Z toho však dostávame, že aj $\mathcal{L}_0 P_1 = 0$ a použijúc rovnaký argument ako pri predchádzajúcom člene dostávame

$$P_1 = P_1(t, r). \quad (3.17)$$

Ukázali sme, že prvé dva členy rozvoja, $P_0 + \sqrt{\epsilon} P_1$, nezávisia od volatility úrokovej miery.

Člen rádu 1

V predchádzajúcej časti sme eliminovali prvé dva členy rozvoja. Pokračovať budeme ďalšími dvomi krokmi, a to eliminovaním členov rádu 1 a $\sqrt{\epsilon}$. Položme teda člen prvého rádu rovný nule, t. j.

$$\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0. \quad (3.18)$$

Pretože $P_1 = P_1(t, r)$ a teda nezávisí od y tak $\mathcal{L}_1 P_1 = 0$ a preto

$$\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0. \quad (3.19)$$

Ak zafixujeme r a sústredíme sa len na závislosť od y dostaneme, že (3.19) je v tvare Poissonovej rovnice pre operátor $\mathcal{L}_0$ a premennú y . Poissonove rovnice patria medzi eliptické parciálne diferenciálne rovnice. Pre potreby ďalších výpočtov uvedieme vo forme lemy podmienku riešiteľnosti Poissonových rovníc. Čitateľ sa podrobnejšie informácie môže dozvedieť napr. v [13].

Lema 2.

Uvažujme rovnicu $\mathcal{L}_0 P + g = 0$, kde $\mathcal{L}_0$ je operátor definovaný vzťahom (3.9) a g je daná funkcia. Nutnou podmienkou existencie riešenia P je, že funkcia g splňa $\langle g \rangle = 0$, t. j.

$$\langle g \rangle = \int g(y) f(y) dy = 0,$$

kde $f(y)$ je limitné rozdelenie procesu $y(t)$.

Podmienka riešiteľnosti pre rovnicu (3.19) má podľa Lemy 2 tvar $\langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle = 0$. Pretože P_0 nezávisí od $y(t)$ dostávame $\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0 = 0$ kde

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \frac{\partial}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 \langle y \rangle) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\langle y \rangle}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - r. \quad (3.20)$$

Podľa (2.9) platí

$$\langle y \rangle = \theta_2. \quad (3.21)$$

Dosadením tejto hodnoty do podmienky riešiteľnosti Poissonovej rovnice dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0 = \frac{\partial P_0}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - (\lambda_1 \sqrt{\theta_2}) \sqrt{\theta_2}) \frac{\partial P_0}{\partial r} + \frac{\theta_2}{2} \frac{\partial^2 P_0}{\partial r^2} - r P_0 = 0. \quad (3.22)$$

PDR (3.22) prislúcha Vašíčkovmu modelu (1.8) s volatilitou $\sigma(r, t) = \sqrt{\theta_2}$ a konštantnou trhovou cenou rizika $\lambda(r, t) = \lambda_1 \sqrt{\theta_2}$. Ak teda použijeme postup odvodenia ceny dlhopisu vo Vašíčkovom modeli, dostávame

$$P_0(\tau, r) = A(\tau) e^{-B(\tau)r}, \quad (3.23)$$

$$B' = 1 - \kappa_1 B, \quad (3.24)$$

$$A' = AB(\lambda_1 \theta_2 - \kappa_1 \theta_1) + \frac{\theta_2}{2} AB^2, \quad (3.25)$$

s počiatočnými podmienkami $A(0) = 1$ a $B(0) = 0$. Explicitné riešenia pre funkcie A, B sú:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1 \tau}), \\ A &= \exp \left[(B - \tau) \left(\theta_1 - \frac{\lambda_1 \theta_2}{\kappa_1} - \frac{\theta_2}{2\kappa_1^2} \right) - \frac{\theta_2}{4\kappa_1} B^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Cenu dlhopisu $P_0(\tau, r)$ budeme nazývať cena aproximovaná Vašíčkom. Vráťme sa späť k podmienke riešiteľnosti. Ak využijeme jej platnosť, t. j. $\langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle = 0$, môžeme napísať

$$\mathcal{L}_2 P_0 = \mathcal{L}_2 P_0 - \langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle = (\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) P_0, \quad (3.27)$$

kde pre rozdiel operátorov $\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle$ na základe (3.11) a (3.20) platí

$$\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle = \frac{1}{2} (y - \langle y \rangle) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \lambda_1 (y - \langle y \rangle) \frac{\partial}{\partial r}. \quad (3.28)$$

Vyjadrením P_2 z rovnice (3.19) a použitím vzťahu (3.27) dostávame riešenie Poissonovej rovnice

$$P_2(t, r, y) = -\mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2 P_0) = -\mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) P_0 + c(t, r), \quad (3.29)$$

kde funkcia $c(t, r)$, konštanta vzhľadom na premennú y , pochádza z riešenia Poissonovej rovnice. Poďme sa teraz pozrieť na ďalší člen rozvoja.

Člen rádu $\sqrt{\epsilon}$

Položme štvrtý člen rozvoja (3.13) rovný nule, t. j.

$$\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 = 0. \quad (3.30)$$

Rovnica (3.30) je opäť v tvare Poissonovej rovnice pre funkciu P_3 vzhľadom na operátor $\mathcal{L}_0$. Preto, použijúc podmienku riešiteľnosti z Lemy 2, dostávame, že rovnica (3.30) má riešenie ak platí

$$\langle \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 \rangle = 0. \quad (3.31)$$

Z lineárnosti strednej hodnoty vyplýva

$$\langle \mathcal{L}_2 P_1 \rangle = -\langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle \quad (3.32)$$

a teda

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_1 &= \langle \mathcal{L}_2 P_1 \rangle = -\langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle = \langle \mathcal{L}_1 (\mathcal{L}_0^{-1} (\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) P_0 + c(t, r)) \rangle \\ &= \langle \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-1} (\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) \rangle P_0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Pri odvodení vzťahu (3.33) sme využili niekoľko faktov. V prvej rovnosti sme použili informáciu, že funkcia P_1 nezávisí od premennej y , v druhej rovnosti sme použili vzťah (3.32), v tretej (3.29) a v poslednej sme opäť využili, že P_0 je konštantné vzhľadom na y a že $\mathcal{L}_1 c(t, r) = 0$, pretože operátor $\mathcal{L}_1$ obsahuje v oboch členoch parciálne derivácie vzhľadom na y . Pre zjednodušenie zápisu použijeme označenie

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_1 = \langle \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-1} (\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) \rangle P_0 = \mathcal{A} P_0. \quad (3.34)$$

Na tomto mieste je vhodné zaviesť novú pomocnú funkciu $\Phi(y)$, ktorá je riešením Poissonovej rovnice

$$\mathcal{L}_0 \Phi = y - \langle y \rangle. \quad (3.35)$$

Poznamenajme, že podmienka riešiteľnosti z Lemy 2 platí, keďže $\langle y - \langle y \rangle \rangle = \langle y \rangle - \langle y \rangle = 0$.

Substitúciou (3.35) do (3.28) a dosadením do $\mathcal{A}$ dostávame

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \langle \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-1} (\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) \rangle \\ &= \left\langle \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_0 \Phi \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\rangle \\ &= \langle \mathcal{L}_1 \Phi \rangle \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} \right).\end{aligned}$$

Ak teraz za operátor $\mathcal{L}_1$ dosadíme (3.10) dostávame

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left\langle \left(-\lambda_2 v y \frac{\partial}{\partial y} + \rho v y \frac{\partial^2}{\partial r \partial y} \right) \Phi \right\rangle \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 v \langle y \Phi' \rangle \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{1}{2} \lambda_2 v + \lambda_1 \rho v \right) \langle y \Phi' \rangle \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \rho v \langle y \Phi' \rangle \frac{\partial^3}{\partial r^3}.\end{aligned}$$

Výraz pre $\mathcal{A}$ obsahuje prvú, druhú a tretiu parciálnu deriváciu vzhľadom na r . Ak označíme jednotlivé členy pri týchto deriváciách V_1, V_2 a V_3 , dostávame

$$\mathcal{A} = V_1 \frac{\partial}{\partial r} + V_2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + V_3 \frac{\partial^3}{\partial r^3}, \quad (3.36)$$

kde V_1, V_2 a V_3 označujú skupinové parametre

$$\begin{aligned}V_1 &= \lambda_1 \lambda_2 v \langle y \Phi' \rangle, \\ V_2 &= - \left(\frac{1}{2} \lambda_2 v + \lambda_1 \rho v \right) \langle y \Phi' \rangle, \\ V_3 &= \frac{1}{2} \rho v \langle y \Phi' \rangle.\end{aligned}$$

Pripomíname, že naším cieľom je vypočítať aproximáciu P_1 , ktorá vyhovuje rovnosti (3.34). Ak teda využijeme vzťahy (3.11), (3.23), (3.36) pre $\mathcal{L}_2, P_0, \mathcal{A}$ a dosadíme ich do (3.34) dostaneme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre $P_1(\tau, r)$

$$-\frac{\partial P_1}{\partial \tau} + (\kappa_1(\theta_1 - r) - \lambda_1 \sigma^2) \frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} - r P_1 - A e^{-Br} (-V_1 B + V_2 B^2 - V_3 B^3) = 0,$$

kde funkcie A a B spĺňajú (3.25) a (3.24). Predpokladajme, že riešenie predchádzajúcej

rovnice budeme hľadať v separovanom tvare

$$P_1(\tau, r) = D(\tau)A(\tau)e^{-B(\tau)r}, \quad (3.37)$$

kde funkcie A, B vyhovujú (3.25) a (3.24). Pretože $P_1(0, r) = 0$, pre počiatočnú podmienku funkcie D platí $D(0) = 0$. Vyčíslením a dosadením jednotlivých derivácií vystupujúcich v parciálnej diferenciálnej rovnici a využitím (3.25) a (3.24) dostaneme, že funkcia $D(\tau)$ spĺňa obyčajnú diferenciálnu rovnicu

$$D' = V_1B - V_2B^2 + V_3B^3. \quad (3.38)$$

Ak použijeme explicitný tvar funkcie B , tak integráciou predchádzajúcej rovnice dostávame

$$D(\tau) = \frac{V_1}{\kappa_1} \int (1 - e^{-\kappa_1\tau}) d\tau - \frac{V_2}{\kappa_1^2} \int (1 - e^{-\kappa_1\tau})^2 d\tau + \frac{V_3}{\kappa_1^3} \int (1 - e^{-\kappa_1\tau})^3 d\tau,$$

a po výpočte integrálov a využití počiatočnej podmienky dostávame explicitný výraz pre funkciu D

$$D(\tau) = \frac{V_1}{\kappa_1}(-B + \tau) - \frac{V_2}{\kappa_1^2}(-B - \frac{\kappa_1}{2}B^2 + \tau) + \frac{V_3}{\kappa_1^3}(-B - \frac{\kappa_1}{2}B^2 - \frac{\kappa_1^2}{3}B^3 + \tau). \quad (3.39)$$

Aproximovaná cena dlhopisu teda bude mať tvar

$$P^\epsilon(\tau, r, y) \approx P_0(\tau, r) + \sqrt{\epsilon}P_1(\tau, r) = (1 + \sqrt{\epsilon}D(\tau))A(\tau)e^{-B(\tau)r}, \quad (3.40)$$

kde funkcie $A(\tau), B(\tau), D(\tau)$ vyhovujú (3.26) a (3.39).

3.1.2 Výpočet konštanty $\langle y\Phi' \rangle$

V priebehu odvodzovania aproximovanej ceny dlhopisu sa objavila nová konštanta, ktorej sme sa doposiaľ nevenovali. Je ňou výraz $\langle y\Phi' \rangle$, ktorý vystupuje v členoch V_1, V_2 a V_3 . Funkcia $\Phi(y)$ spĺňa rovnosť (3.35) a ak využijeme (3.21), pre funkciu $\Phi(y)$ dostávame lineárnu nehomogénnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$\Phi'' + \frac{2(\theta_2 - y)}{v^2y}\Phi' + \frac{2(\theta_2 - y)}{v^2y} = 0. \quad (3.41)$$

Na výpočet konštanty nám postačuje vedieť hodnotu derivácie funkcie $\Phi(y)$, a teda ak zavedieme substitúciu $\Phi' = \Psi$ dostávame nehomogénnu lineárnu obyčajnú diferenciálnu rovnicu pre $\Psi(y)$

$$\Psi' + \frac{2(\theta_2 - y)}{v^2 y} \Psi + \frac{2(\theta_2 - y)}{v^2 y} = 0. \quad (3.42)$$

Rovnica sa dá vyriešiť napríklad metódou variácie konštánt. Riešením potom je

$$\Phi'(y) = \frac{2}{v^2 y f(y)} \int_0^y (\xi - \langle \xi \rangle) f(\xi) d\xi. \quad (3.43)$$

Pre hodnotu konštanty $\langle y \Phi' \rangle$ platí

$$\langle y \Phi' \rangle = \left\langle \frac{2}{v^2 f(y)} \int_0^y (\xi - \langle \xi \rangle) f(\xi) d\xi \right\rangle = \frac{2}{v^2} \int_0^\infty \int_0^y (\xi - \langle \xi \rangle) f(\xi) d\xi dy. \quad (3.44)$$

Ešte pred samotným výpočtom integrálov je potrebné zadať dva nové pojmy. Sú nimi horná a dolná neúplná gama funkcia. Uvedieme naviac ešte lemu, týkajúcu sa hornej neúplnej gama funkcie, ktorú pri výpočte integrálu využijeme.

Definícia 2. ([32])

Funkciu $\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ nazývame hornou neúplnou gama funkciou.

Funkciu $\gamma(a, z) = \int_0^z t^{a-1} e^{-t} dt$ nazývame dolnou neúplnou gama funkciou.

Z definície naviac priamo vyplýva vzťah

$$\Gamma(a, z) + \gamma(a, z) = \Gamma(a). \quad (3.45)$$

Platí nasledujúca lema.

Lema 3. ([30])

Pre neurčitý integrál z hornej neúplnej gama funkcie platí:

$$\int \Gamma(a, z) dz = z \Gamma(a, z) - \Gamma(a + 1, z).$$

Vypočítajme teraz hodnotu vnútorného integrálu:

$$\begin{aligned}
\int_0^y (\xi - \langle \xi \rangle) f(\xi) d\xi &= \int_0^y (\xi - \theta_2) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \xi^{\alpha-1} e^{-\beta\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \int_0^{\beta y} t^\alpha e^{-t} dt - \frac{\alpha}{\beta\Gamma(\alpha)} \int_0^{\beta y} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\
&= \frac{\gamma(\alpha+1, \beta y) - \alpha\gamma(\alpha, \beta y)}{\beta\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1) - \Gamma(\alpha+1, \beta y) - \alpha\Gamma(\alpha) + \alpha\Gamma(\alpha, \beta y)}{\beta\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\alpha\Gamma(\alpha, \beta y) - \Gamma(\alpha+1, \beta y)}{\beta\Gamma(\alpha)}. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

V prvej rovnosti sme využili vzťahy (2.1) a (3.21) pre hustotu $f(y)$ a $\langle y \rangle$. V druhej rovnosti sme zaviedli substitúciu $t = \beta\xi$ a v tretej sme využili definíciu dolnej neúplnej gama funkcie $\gamma(a, z)$. V štvrtej rovnosti sme využili vzťah (3.45) a v poslednej známou vlastnosť gama funkcie (pozri [32])

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1). \tag{3.47}$$

Nakoniec vypočítajme hodnotu konštanty $\langle y\Phi' \rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle y\Phi' \rangle &= \frac{2}{v^2} \int_0^\infty \frac{\alpha\Gamma(\alpha, \beta y) - \Gamma(\alpha+1, \beta y)}{\beta\Gamma(\alpha)} dy \\
&= \frac{2}{v^2\beta^2\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \alpha\Gamma(\alpha, x) - \Gamma(\alpha+1, x) dx \\
&= \frac{2}{v^2\beta^2\Gamma(\alpha)} \left[\alpha(x\Gamma(\alpha, x) - \Gamma(\alpha+1, x)) - (x\Gamma(\alpha+1, x) - \Gamma(\alpha+2, x)) \right]_0^\infty \\
&= \frac{2}{v^2\beta^2\Gamma(\alpha)} [\alpha\Gamma(\alpha+1) - \Gamma(\alpha+2)] \\
&= \frac{2}{v^2\beta^2\Gamma(\alpha)} [\alpha\Gamma(\alpha+1) - (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)] \\
&= -\frac{2\Gamma(\alpha+1)}{v^2\beta^2\Gamma(\alpha)} = -\frac{2\alpha}{v^2\beta^2} = -\theta_2 \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Pri predchádzajúcom výpočte sme použili nasledujúce vzťahy a fakty. V prvej rovnosti sme dosadili vzťah (3.46), v druhej sme použili substitúciu $x = \beta y$. V tretej rovnosti sme

využili platnosť Lemy 3 a v štvrtej nasledujúce výpočty limit⁴.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(a, x) &= \Gamma(a), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(a, x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} x\Gamma(a, x) &= 0 \cdot \Gamma(a) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x\Gamma(a, x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(a, x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{a+1} e^{-x} = 0.\end{aligned}$$

V ďalších dvoch rovnostiach sme využili (3.47) a nakoniec vzťahy (3.5), (3.6) pre parametre α, β .

3.2 Zhrnutie

Predmetom tejto kapitoly bol výpočet aproximovanej ceny dlhopisu, ktorý sme uskutočnili na základe predpokladu o rýchlej časovej škále volatility úrokovej miery. Na záver, kvôli prehľadnosti, uvádzame stručné zhrnutie. Predpokladajme, že krátkodobá úroková miera sa riadi Fong-Vašíčkovým modelom

$$\begin{aligned}dr(t) &= \kappa_1(\theta_1 - r(t))dt + \sqrt{y(t)}dw_1, \\ dy(t) &= \kappa_2(\theta_2 - y(t))dt + v\sqrt{y(t)}dw_2,\end{aligned}$$

a že hodnoty trhových cien rizika sú $\lambda_1\sqrt{y}, \lambda_2\sqrt{y}$. Aproximovanú cenu dlhopisu potom vypočítame podľa vzorca

$$P^\epsilon(\tau, r, y) \approx P_0(\tau, r) + \sqrt{\epsilon}P_1(\tau, r),$$

kde pre funkcie P_0, P_1 platí

$$\begin{aligned}P_0(\tau, r) &= A(\tau)e^{-B(\tau)r}, \\ P_1(\tau, r) &= D(\tau)A(\tau)e^{-B(\tau)r}.\end{aligned}$$

⁴Pri výpočte poslednej limity sme použili L'Hospitalovo pravidlo.

Funkcie B , A a D sú dané nasledovne:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{1}{\kappa_1}(1 - e^{-\kappa_1\tau}), \\ A(\tau) &= \exp \left[(B - \tau) \left(\theta_1 - \frac{\lambda_1\theta_2}{\kappa_1} - \frac{\theta_2}{2\kappa_1^2} \right) - \frac{\theta_2}{4\kappa_1} B^2 \right], \\ D(\tau) &= \frac{V_1}{\kappa_1}(-B + \tau) - \frac{V_2}{\kappa_1^2}(-B - \frac{\kappa_1}{2}B^2 + \tau) + \frac{V_3}{\kappa_1^3}(-B - \frac{\kappa_1}{2}B^2 - \frac{\kappa_1^2}{3}B^3 + \tau), \end{aligned}$$

kde pre skupinové parametre V_1, V_2 a V_3 platí

$$\begin{aligned} V_1 &= -\lambda_1\lambda_2v\theta_2, \\ V_2 &= \frac{1}{2}\lambda_2v\theta_2 + \lambda_1\rho v\theta_2, \\ V_3 &= -\frac{1}{2}\rho v\theta_2. \end{aligned}$$

Zamyslime sa nad otázkou, v čom spočíva rozdiel medzi cenou dlhopisu $P(\tau, r, y)$ a cenou vypočítanou pomocou asymptotickej metódy. Hlavný a podstatný rozdiel je v parametroch, ktoré je na výpočet cien dlhopisov potrebné odhadnúť. V ľavom stĺpci nasledujúcej tabuľky je zoznam parametrov potrebných na výpočet ceny dlhopisu $P(\tau, r, y)$, v pravom stĺpci pre cenu dlhopisu $P^\epsilon(\tau, r)$. Kým pre výpočet ceny dlhopisu klasickým spôsobom je potrebné odhadnúť aj koreláciu medzi Wienerovými procesmi, parameter v pre proces volatility a obe trhovú cenu rizika, pre aproximáciu ceny tieto odhady nie sú potrebné, postačuje odhad skupinových parametrov V_1, V_2, V_3 získaný z výnosových kriviek ([6]).

$P(\tau, r, y)$	$P^\epsilon(\tau, r)$
κ_1	κ_1
θ_1	θ_1
κ_2	θ_2
θ_2	V_1
v	V_2
ρ	V_3
λ_1	
λ_2	

Tabuľka 3.1: Parametre, ktoré je potrebné odhadnúť pri výpočte jednotlivých cien dlhopisov

Ďalším rozdielom je fakt, že pre aproximovanú cenu dlhopisu nie je potrebné poznať aktuálnu hodnotu volatility úrokovej miery y , čo je vzhľadom na to, že volatilita nie je na trhu pozorovateľná výhodou. Podrobnejšie sa téme odhadov parametrov venovať

nebudeme. Čitateľa však môžeme odkázať na prácu [5], v ktorej Cotton okrem iného rozoberá aj stabilitu a odhad skupinových parametrov V_1, V_2, V_3 .

V nasledujúcej kapitole porovnáme presné riešenie $P(\tau, r, y)$ Fong-Vašíčkovho modelu s aproximovanou cenou dlhopisu $P^\epsilon(\tau, r)$ a pozrieme sa na to, aký dopad bude mať aproximácia ceny na výnosové krivky.

Kapitola 4

Porovnanie aproximácie riešenia s presným riešením

Náplňou tejto kapitoly bude porovnanie presného riešenia Fong-Vašíčkovho modelu s aproximovanou cenou dlhopisu vypočítanou v kapitole 3. Od ceny dlhopisu sa odvíja krivka časovej štruktúry úrokových mier - výnosová krivka. Preto sa v druhej časti kapitoly pozrieme na to, aký vplyv bude mať aproximácia ceny dlhopisu na tvar a hodnoty výnosovej krivky. K uskutočneniu tohto porovnania je potrebné poznať dostatočne presné riešenie modelu, pomocou ktorého modelujeme vývoj krátkodobej úrokovej miery. V našom prípade je to Fong-Vašíčkov model a toto riešenie sme vypočítali v kapitole 2. Autori, ktorí aplikovali asymptotickú metódu na iné modely¹ túto možnosť nemali. Preto v porovnaní s nimi máme výhodu a môžeme sa bližšie pozrieť na rozdiely medzi cenami dlhopisov a výnosovými krivkami.

V podkapitole 2.4 o Fong-Vašíčkovom modeli sme uviedli hodnoty parametrov tohto modelu prevzaté z [9], ktoré sme neskôr preškoľovali a rôznymi metódami sme odhadli chýbajúce hodnoty trhových cien rizika. Dostali sme tri dvojice parametrov λ_1, λ_2 . Porovnanie presného riešenia ceny dlhopisu, resp. výnosových kriviek s aproximovanými preto budeme robiť pre všetky tri skupiny parametrov. Kvôli prehľadnosti v tab. 4.1 uvádzame všetky hodnoty parametrov, ktoré budú použité v nasledujúcom porovnávaní.

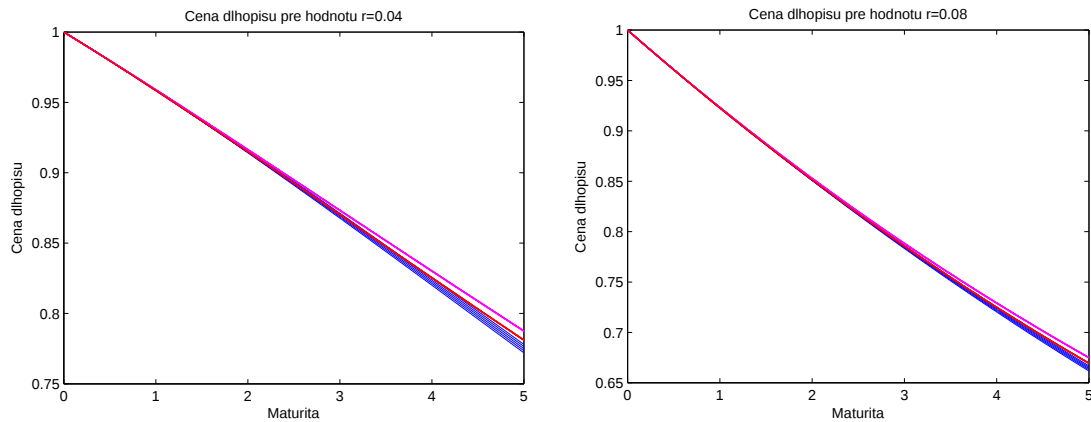
¹pozri úvod kapitoly 3

Skupina	κ_1	κ_2	θ_1	θ_2	v	λ_1	λ_2
I	0.109	1.482	0.0652	0.000264	0.01934	-4.94	-63.1044
II						-12	-5
III						-11	-6

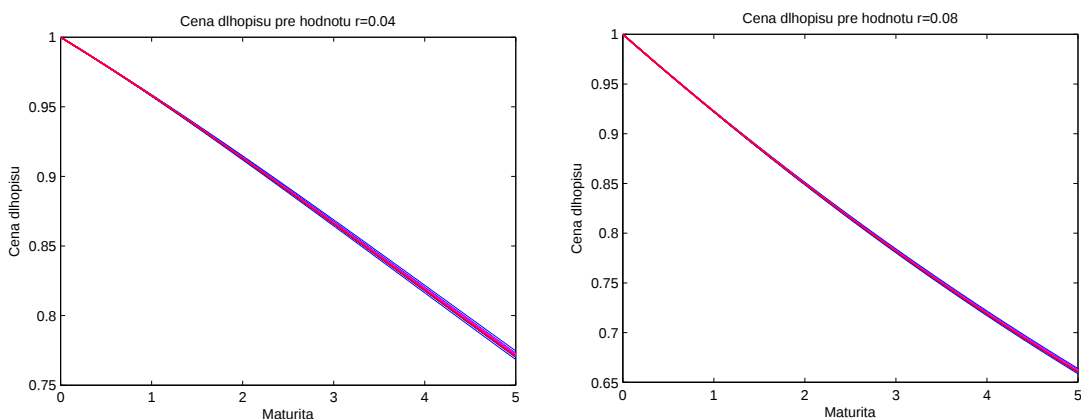
Tabuľka 4.1: Tabuľka hodnôt parametrov.

4.1 Porovnanie cien dlhopisov

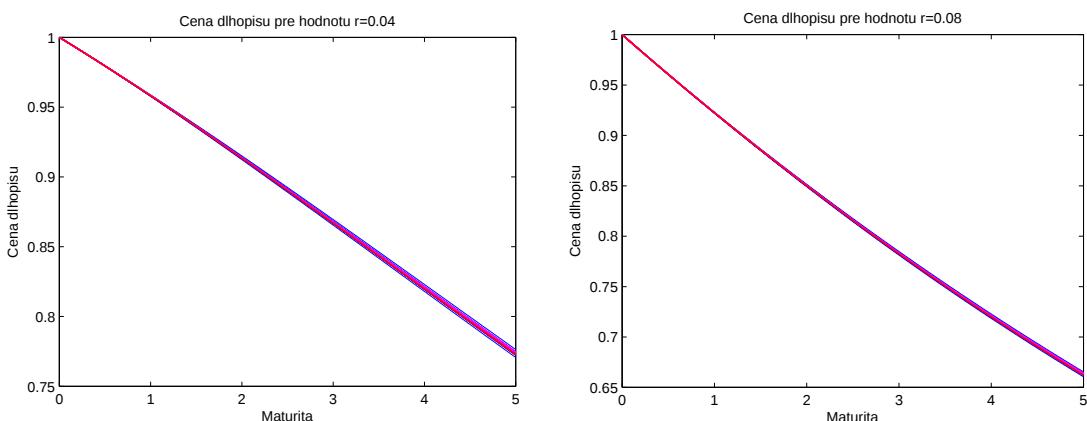
V tejto časti sa budeme zaoberať porovnaním cien dlhopisov pre Fong-Vašíčkov model. Porovnávať budeme klasickú cenu dlhopisu (2.16), ktorú sme vypočítali v kapitole 2 a označili sme ju $P(\tau, r, y)$ (na grafoch bude zakreslená modrou farbou), cenu dlhopisu aproximovanú Vašíčkom, t. j. cenu $P_0(\tau, r)$ vypočítaná v kapitole 3 a daná vzťahom (3.23) (cyklámenová farba) a cenu dlhopisu aproximovanú aj druhým členom $P^\epsilon(\tau, r)$ danú vzťahom (3.40) (červená farba). Podstatným bude porovnanie prvej a poslednej spomínanej ceny dlhopisu, cena aproximovaná Vašíčkom je len menej presnou aproximáciou získanou na základe asymptotickej metódy. Na nasledujúcich obrázkoch sú zobrazené priebehy cien dlhopisov pre jednotlivé skupiny parametrov I, II a III. Pre lepšiu viditeľnosť rozdielov sme zvolili kratšiu maturitu $T = 5$ rokov, hodnota aktuálnej krátkodobej úrokovej miery je na ľavých grafoch obrázkov 4.1, 4.2 a 4.3 rovná $r = 0.04$, t. j. je pod limitnou hodnotou a na pravých grafoch rovná $r = 0.08$, t. j. je nad limitnou hodnotou úrokovej miery. Hodnota aktuálnej volatility úrokovej miery je postupne $0.8 \cdot 10^{-4}$, $1.6 \cdot 10^{-4}$, $2.4 \cdot 10^{-4}$, $3.2 \cdot 10^{-4}$, $4 \cdot 10^{-4}$. Tento rozsah hodnôt vychádza z limitného rozdelenia volatility. Vzhľadom na to, že ceny dlhopisov $P_0(\tau, r)$ a $P^\epsilon(\tau, r)$ nie sú závislé od volatility y , pre všetky spomínané hodnoty volatility dostaneme len jednu cenu.



Obr. 4.1: Cena dlhopisu s hodnotami parametrov z tab. 4.1, skupina I.

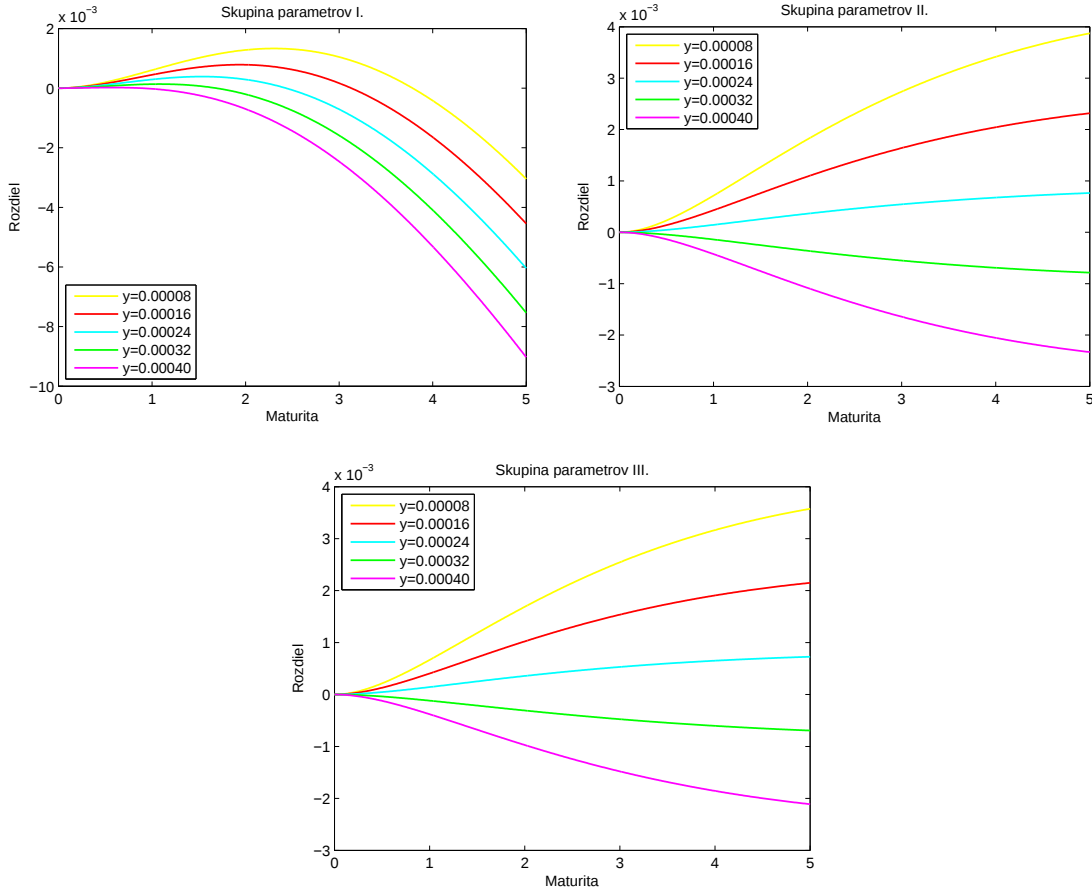


Obr. 4.2: Cena dlhopisu s hodnotami parametrov z tab. 4.1, skupina II.



Obr. 4.3: Cena dlhopisu s hodnotami parametrov z tab. 4.1, skupina III.

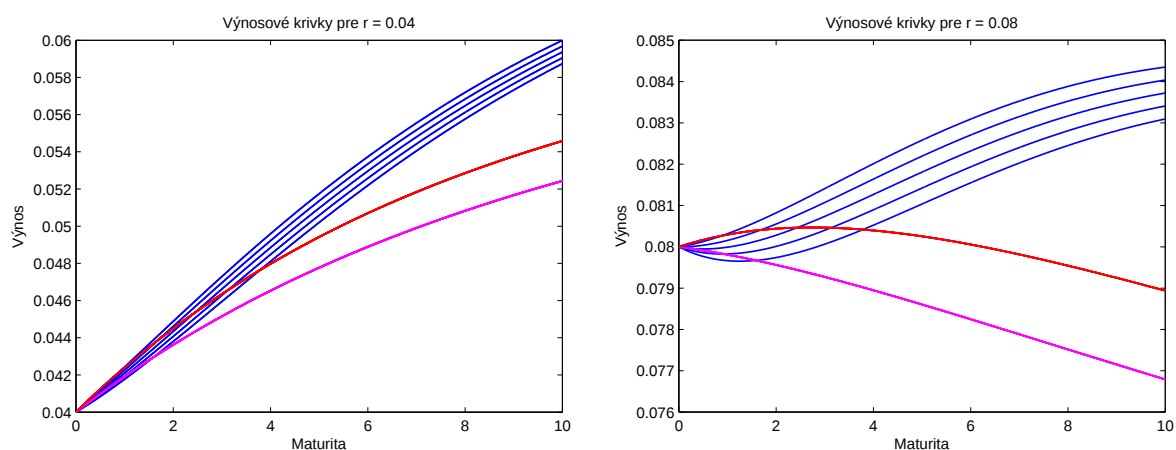
Z predchádzajúcich grafov je vidieť, že aproximovaná cena dlhopisu P^ϵ pre skupinu parametrov I leží prevažne nad pôvodnými cenami dlhopisov, na rozdiel od skupín II a III, kde je aproximácia v strede medzi pôvodnými cenami dlhopisu pre rôzne hodnoty y . Z grafov nie sú veľmi viditeľné rozdiely, nakoľko sú veľmi malé, preto sme na obrázku 4.4 vykreslili rozdiely medzi pôvodnou cenou dlhopisu P pre rôzne hodnoty volatility y a aproximovanou cenou dlhopisu P^ϵ , ktoré sme vypočítali pre hodnotu aktuálnej úrokovej miery $r = 0.04$. Z prvého grafu vidíme, že pre skupinu parametrov I a pre väčšie hodnoty maturity je aproximovaná cena P^ϵ väčšia ako cena P bez ohľadu na hodnotu y . Pre skupiny II a III je rozdiel najmenší pre hodnotu volatility $y = 2.4 \cdot 10^{-4}$. Aproximovaná cena dlhopisu sa preto pre skupiny parametrov II a III zdá byť dobrá. Pozrime sa teraz na porovnanie výnosových kriviek.

Obr. 4.4: Rozdiel cien dlhopisov $P - P^e$ pre hodnotu $r = 0.04$.

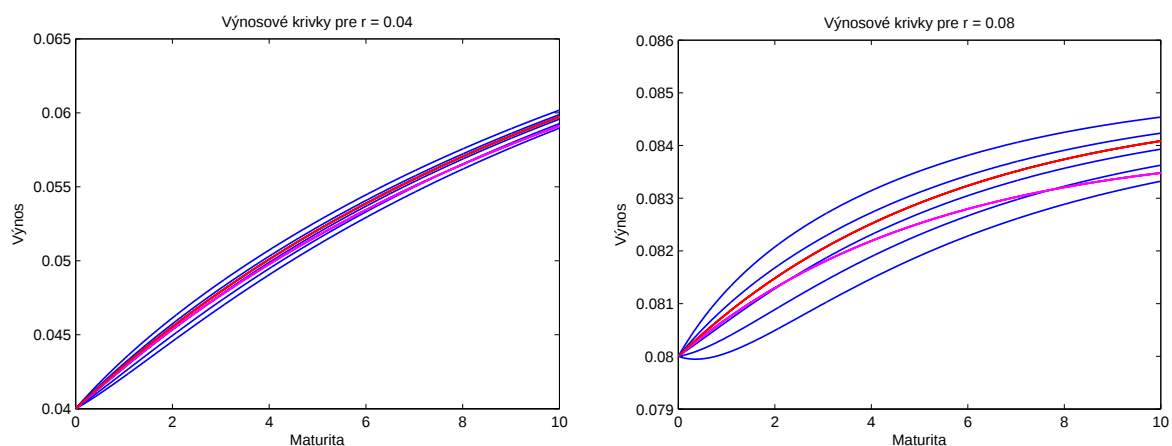
4.2 Porovnanie výnosových kriviek

V tejto časti sa pozrieme na to, ako sa zmení tvar a hodnoty výnosových kriviek. Výnosovú krivku odvodenú od klasickej ceny dlhopisu sme označili $R(\tau, r, y)$. Výnosovú krivku prislúchajúcu aproximovanej cene P_0 označíme $R_0(\tau, r)$ a cene P^e označíme $R^e(\tau, r)$. Na nasledujúcich grafoch sú zobrazené výnosové krivky² pre maturitu $T = 10$. Hodnoty aktuálnej úrokovej miery a volatility úrokovej miery sú rovnaké ako v predchádzajúcej podkapitole 4.1. Na prvom obrázku sú zobrazené výnosové krivky pre skupinu parametrov I. Vidíme, že zatiaľ čo krivky R sú rastúce, pre $r = 0.08$ majú aproximované krivky R_0 a R^e klesajúci charakter. Pre skupiny parametrov II a III ležia výnosové krivky v strede medzi pôvodnými, či už pre hodnotu $r = 0.04$ alebo $r = 0.08$. Presné hodnoty výnosov pre parametre zo skupín II a III sú uvedené v tabuľkách v prílohe.

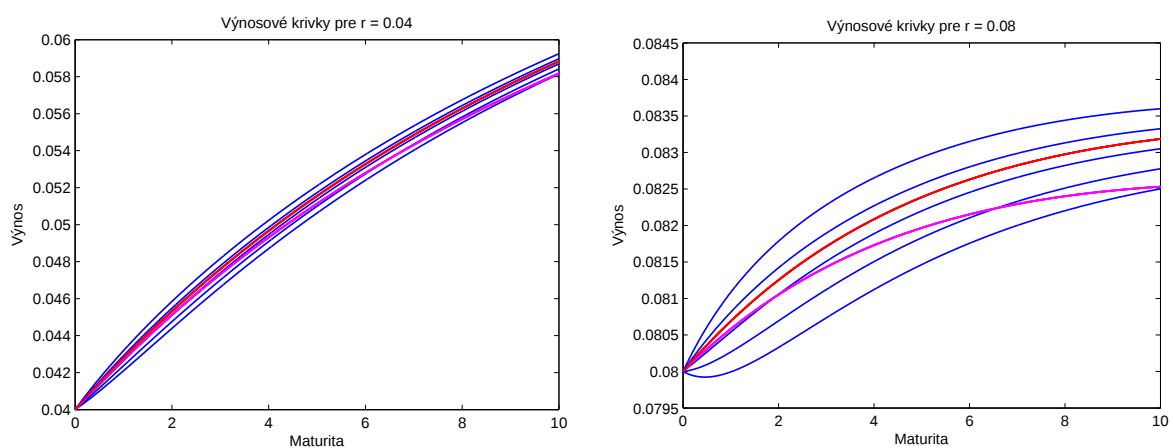
²Jednotlivé farby sú analogické ako v podkapitole 4.1, t. j. R -modrá, R_0 -cyklámenová, R^e -červená.



Obr. 4.5: Výnosové krivky s hodnotami parametrov z tab. 4.1, skupina I.



Obr. 4.6: Výnosové krivky s hodnotami parametrov z tab. 4.1, skupina II.



Obr. 4.7: Výnosové krivky s hodnotami parametrov z tab. 4.1, skupina III.

Ak by sme teda chceli zhrnúť výsledky porovnania, mohli by sme povedať, že kvalita odvodenej aproximácie je dobrá, rozdiely medzi cenami dlhopisov sú rádovo 10^{-3} , aproximácie výnosových kriviek sa z grafov taktiež zdajú byť dobré. Čo sa týka nepresností odvodenej aproximácie pre skupinu parametrov I, nepovažujeme ich za významné, nakoľko myšlienka odhadu trhových cien rizika pre Fong-Vašíčkov model pomocou limity výnosových kriviek nedala výsledky podľa našich predstáv.

Záver

V diplomovej práci sme sa venovali Fong-Vašíčkovmu modelu. Fong-Vašíčkov model patrí do triedy dvojfaktorových modelov so stochastickou volatilitou. Vznikol rozšírením Vašíčkovho modelu a to pridaním stochastickej diferenciálnej rovnice pre volatilitu úrokovej miery. V práci sme uviedli jeho podrobnú analýzu a navyše sme vypočítali teoretickú hodnotu limity výnosových kriviek.

Cieľom našej práce bolo odvodenie aproximácie ceny dlhopisu. Princíp odvodenia spočíval v asymptotickom rozvoji presného riešenia vzhľadom na parameter rýchlej časovej škály volatility. Odlišné časové škály, v ktorých sa úroková miera a volatilita úrokovej miery pohybujú, sú na viacerých finančných trhoch empiricky potvrdené ([6]) a sú kľúčovým predpokladom použitej metódy. Aproximáciou sme získali cenu dlhopisu, ktorá na rozdiel od presnej ceny dlhopisu nie je závislá od aktuálnej hodnoty volatility. Tento fakt je vzhľadom na to, že proces volatility nie je možné pozorovať veľmi podstatný a výrazne zjednodušuje kalibráciu modelu. Navyše, zatiaľ čo pri pôvodnej cene dlhopisu bolo potrebné odhadnúť všetky parametre modelu a trhové ceny rizika, t. j. $\kappa_1, \theta_1, \kappa_2, \theta_2, \nu, \rho, \lambda_1, \lambda_2$, pri aproximovanej cene postačuje kalibrácia parametrov $\kappa_1, \theta_1, \theta_2$ a skupinových parametrov V_1, V_2, V_3 , ktoré vznikli aproximáciou. Ich odhad je možný z výnosových kriviek ([6]).

Existencia explicitného riešenia Fong-Vašíčkovho modelu nám poskytla možnosť porovnania. Pre konkrétne hodnoty parametrov, ktoré sme prebrali z článku [9] sme preto navrhnutú aproximáciu porovnali s presným riešením. K dispozícii sme však nemali hodnoty trhových cien rizika, ktoré sme preto museli odhadnúť. Využitím limity výnosových kriviek a dvojrozmernej optimalizácie sme získali tri sady parametrov. Výsledky porovnaní boli uspokojujúce. Rozdiely medzi presnou a aproximovanou cenou dlhopisu boli rádovo 10^{-3} . Aproximácia výnosových kriviek ležala v strede medzi pôvodnými krivkami. Navrhnutú aproximáciu ceny dlhopisu preto môžeme považovať za dostatočne kvalitnú.

Pri práci sme našli priestor aj pre ďalšiu činnosť v tejto oblasti. Venovať by sa dalo kalibrácii skupinových parametrov alebo aj ďalšiemu spresneniu samotnej aproximácie.

Literatúra

- [1] ALDBERG, H.: *Bond Pricing in Stochastic Volatility Models*, Uppsala University, Project Report, 2008.
- [2] BLACK, F., SCHOLES, M.: *The Valuation of Option Contracts and Test of Market Efficiency*, Journal of Political Economy, Vol.27, No.2. p.416, 1973.
- [3] BRENNER, R.J., HARJES, R.H., KRONER, K.F.: *An-other Look at Models of the Short-Term Interest Rate*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 35, p.191-215, 2000.
- [4] BRIGO, D., MERCURIO, F.: *Interest Rate Models-Theory and Practice*, Springer, 2006.
- [5] COTTON, P.: *An analytic approach to Ornstein-Uhlenbeck processes with fluctuating parameters and applications in the modeling of fixed income securities*, PhD thesis, Stanford University, 2001.
- [6] COTTON, P., FOUQUE, J.-P., PAPANICOLAOU, G., SIRCAR, R.: *Stochastic Volatility Corrections for Interest Rate Derivatives*, 2003.
- [7] COURTADON, G.: *The Pricing Options on Default-Free Bonds*, Journal of Finance and Quantitative Analysis 17, p.75-100, 1982.
- [8] COX, J.C., INGERSOLL, J.E., ROSS, A.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, Vol. 53, p.385-408, 1985.
- [9] DANILOV, D., MANDAL, P.K.: *Cross sectional efficient estimation of stochastic volatility short rate models*, University of Twente, Memorandum No.1614, 2002.
- [10] DANILOV, D., MANDAL, P.K.: *Estimation of the volatility component in two-factor stochastic volatility short rate models*, Eurandom Preprint, 2000.

-
- [11] FONG, H.G., VASICEK, O.A.: *Fixed-Income Volatility Management*, Journal of Portfolio Management, p.41-46, 1991.
- [12] FOUQUE, J.-P., PAPANICOLAOU, G., SIRCAR, K.R.: *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press, 2000.
- [13] GILBARG, D., TRUDINGER, N.S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2001.
- [14] CHEN, L.: *Stochastic Mean and Stochastic Volatility - A Three-Factor Model of Term Structure of Interest Rates and its Application to the Pricing of Interest Rate Derivatives*, Blackwell Publishers, Oxford, 1996.
- [15] CHOI, Y., WIRJANTO, T.S.: *An analytic approximation formula for pricing zero coupon bonds*, Finance Research Letters 4(2), p.116-126, 2007.
- [16] KELLER-RESSEL, M., STEINER, T.: *Yield curve shapes and the asymptotic short rate distribution in affine one-factor models*, Vienna University of Technology, 2007.
- [17] KOHOUT, P.: *Ekonomická analýza výnosových křivek*, PPF a.s, 2005.
- [18] KWOK, Y.K.: *Mathematical models of financial derivatives*, Springer, 1998.
- [19] LACKO, V.: *Two-factor Convergence Model of Cox-Ingersoll-Ross Type*, Master's Thesis, FMFI, UK, 2010.
- [20] LONGSTAFF, F., SCHWARTZ, E.: *Interest rate volatility and the term structure: a two factor general equilibrium model*, Journal of Finance, p.1259-1282, 1992.
- [21] RISKEN, H.: *The Fokker-Planck equation: Methods of solution and applications*, 2nd edition, Springer, 1989.
- [22] SORWAR, G., BARONE-ADESI, G., ALLEGRETTO, W.: *Valuation of derivatives based on single-factor interest rate models*, Global Finance Journal 18, p.251-269, 2007.
- [23] STEHLÍKOVÁ, B.: *Mathematical analysis of term structure models*, Dissertation Thesis, FMFI, UK, 2008.
- [24] STEHLÍKOVÁ, B., ŠEVČOVIČ, D.: *Approximate formula for pricing zero coupon bonds and their asymptotic analysis*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, p.274-283, 2009.

-
- [25] STEHLÍKOVÁ, B., ŠEVČOVIČ, D.: *On a volatility averaging in a two-factor interest rate model*, Algoritmy, p.325-333, 2005.
- [26] STEHLÍKOVÁ, B., ŠEVČOVIČ, D.: *On the singular limit of solutions to the Cox-Ingersoll-Ross interest rate model with stochastic volatility*, Kybernetika, Vol. 40, 2008.
- [27] ŠEVČOVIČ, D., STEHLÍKOVÁ, B., MIKULA, K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2009.
- [28] TROLLE, A.B., SCHWARTZ, E.: *A General Stochastic Volatility Model for the Pricing of Interest Rate Derivatives*, The Review of Financial studies, 2009.
- [29] VASICEK, O.A.: *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics 5, p.177-188, 1977.
- [30] functions.wolfram.com/GammaBetaErf/Gamma2/21/01/01
- [31] mathworld.wolfram.com/GammaDistribution.html
- [32] mathworld.wolfram.com/IncompleteGammaFunction.html

Príloha

Maturita	Presný výnos R			Aproximácia R_0	Aproximácia R^e
	$y = 1.6 \cdot 10^{-4}$	$y = 2.4 \cdot 10^{-4}$	$y = 3.2 \cdot 10^{-4}$		
1r	0.0425	0.0428	0.0431	0.0428	0.0434
2r	0.0449	0.0453	0.0457	0.0454	0.0461
3r	0.0473	0.0477	0.0481	0.0477	0.0486
4r	0.0495	0.0499	0.0503	0.0498	0.0507
5r	0.0515	0.0519	0.0523	0.0517	0.0527
6r	0.0533	0.0537	0.0541	0.0534	0.0545
7r	0.0550	0.0553	0.0557	0.0550	0.0561
8r	0.0565	0.0569	0.0572	0.0565	0.0576
9r	0.0580	0.0583	0.0586	0.0579	0.0589
10r	0.0593	0.0596	0.0599	0.0591	0.0602

Tabuľka 4.2: Skupina parametrov II., hodnota $r=0.04$

Maturita	Presný výnos R			Aproximácia R_0	Aproximácia R^e
	$y = 1.6 \cdot 10^{-4}$	$y = 2.4 \cdot 10^{-4}$	$y = 3.2 \cdot 10^{-4}$		
1r	0.0424	0.0426	0.0429	0.0427	0.0432
2r	0.0448	0.0451	0.0455	0.0451	0.0458
3r	0.0470	0.0474	0.0478	0.0473	0.0482
4r	0.0491	0.0495	0.0498	0.0493	0.0502
5r	0.0510	0.0514	0.0517	0.0511	0.0521
6r	0.0527	0.0531	0.0534	0.0528	0.0538
7r	0.0543	0.0547	0.0550	0.0543	0.0553
8r	0.0558	0.0561	0.0564	0.0557	0.0567
9r	0.0572	0.0575	0.0578	0.0570	0.0580
10r	0.0584	0.0587	0.0590	0.0582	0.0592

Tabuľka 4.3: Skupina parametrov III., hodnota $r=0.04$

Maturita	Presný výnos R			Aproximácia R_0	Aproximácia R^ϵ
	$y = 1.6 \cdot 10^{-4}$	$y = 2.4 \cdot 10^{-4}$	$y = 3.2 \cdot 10^{-4}$		
$1r$	0.0804	0.0807	0.0810	0.0807	0.0812
$2r$	0.0809	0.0813	0.0817	0.0813	0.0821
$3r$	0.0814	0.0818	0.0823	0.0818	0.0827
$4r$	0.0819	0.0823	0.0827	0.0822	0.0831
$5r$	0.0823	0.0827	0.0831	0.0825	0.0835
$6r$	0.0827	0.0830	0.0834	0.0828	0.0838
$7r$	0.0830	0.0833	0.0837	0.0830	0.0841
$8r$	0.0832	0.0836	0.0839	0.0832	0.0843
$9r$	0.0834	0.0838	0.0841	0.0834	0.0844
$10r$	0.0836	0.0839	0.0842	0.0835	0.0845

Tabuľka 4.4: Skupina parametrov II., hodnota $r=0.08$

Maturita	Presný výnos R			Aproximácia R_0	Aproximácia R^ϵ
	$y = 1.6 \cdot 10^{-4}$	$y = 2.4 \cdot 10^{-4}$	$y = 3.2 \cdot 10^{-4}$		
$1r$	0.0803	0.0805	0.0808	0.0806	0.0811
$2r$	0.0807	0.0811	0.0814	0.0811	0.0818
$3r$	0.0811	0.0815	0.0819	0.0814	0.0823
$4r$	0.0815	0.0819	0.0823	0.0817	0.0827
$5r$	0.0818	0.0822	0.0826	0.0820	0.0829
$6r$	0.0821	0.0825	0.0828	0.0822	0.0832
$7r$	0.0823	0.0827	0.0830	0.0823	0.0833
$8r$	0.0825	0.0828	0.0831	0.0824	0.0834
$9r$	0.0827	0.0830	0.0832	0.0825	0.0835
$10r$	0.0828	0.0831	0.0833	0.0825	0.0836

Tabuľka 4.5: Skupina parametrov III., hodnota $r=0.08$