

Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



# Analýza vývoja produkčných medzier v krízovom období vo vybraných krajinách strednej a východnej Európy

Diplomová práca

Bratislava 2012

Bc. Peter Silanič

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



Analýza vývoja produkčných medzier v krízovom období  
vo vybraných krajinách strednej a východnej Európy

Diplomová práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Študijný odbor: Aplikovaná matematika 1114  
Vedúci práce: Ing. Marek Radvanský

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Peter Silanič  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Analýza vývoja produkčných medzier v krízovom období vo vybraných krajinách strednej a východnej Európy

**Cieľ:** Správne určenie potenciálneho produktu dáva podnet pre rozhodnutia týkajúce sa fiškálnej politiky (štrukturálne saldo VF), menovej politiky (identifikácia prípadných inflačných tlakov a stanovenie úrokových sadzieb – Taylorovo pravidlo) a štrukturálnej politiky (napr. opatrenia na trhu práce alebo v podnikateľskom prostredí). Finančná a hospodárska kríza nám umožňuje analyzovať vývoj produkčnej medzery v podmienkach zvýšeného rizika a neistoty. Práca bude zameraná na analýzu a odhad produkčnej medzery vo vybraných krajinách strednej a východnej Európy s cieľom porovnať tento vývoj. Metódy odhadu budú nadväzovať na publikované odborné a diplomové práce v tejto oblasti.

**Vedúci:** Ing. Marek Radvanský  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

**Dátum zadania:** 13.01.2011

**Dátum schválenia:** 14.01.2011

doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
Vedúci

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

.....  
Vedúci

# Pod'akovanie

Ďakujem svojmu diplomovému vedúcemu Ing. Marekovi Radvanskému za odborné vedenie, cenné rady a usmernenia, ktoré mi poskytol pri vypracovaní diplomovej práce.

Bratislava, 18. apríla 2012

.....

# Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že na diplomovej práci som pracoval samostatne na základe vlastných teoretických a praktických poznatkov, konzultácií a štúdiá odbornej literatúry, ktorej úplný prehľad je uvedený v zozname použitej literatúry.

Bratislava, 18. apríla 2012

.....

# Abstrakt

Bc. Peter Silanič

Analýza vývoja produkčných medzier v krízovom období vo vybraných krajinách strednej a východnej Európy

Diplomová práca

Univerzita Komenského v Bratislave

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci diplomovej práce: Ing. Marek Radvanský

Správne určenie potenciálneho produktu a následne produkčnej medzery dáva podnet pre rozhodnutia v mnohých oblastiach hospodárskej politiky. Ide najmä o monetárnu politiku, fiškálnu politiku a ďalšie štrukturálne politiky. V tejto práci sa budeme venovať hlavne metodológii odhadovania potenciálneho produktu ekonomiky. Rozpracovanú metodológiu použijeme na odhad potenciálneho produktu vybraných ekonomík v krízovom období.

**Kľúčové slová:** produkčná medzera, potenciálny produkt, HP filter, produkčná funkcia, Kalmanov filter, NAIRU

# Abstract

Bc. Peter Silanič

Analysis of output gaps in the crisis period in selected countries of Central and Eastern Europe

Diploma thesis

Comenius University, Bratislava

Faculty of mathematics, physics and informatics

Department of Applied Mathematics and Statistics

Supervisor: Ing. Marek Radvanský

Correct determination of potential output and output gap gives rise to decisions in many areas of economic policies. In particular, monetary policy, fiscal policy and other structural policies. In this paper we will focus mainly on the methodology for estimating potential output of economy. The developed methodology we use to estimate the potential output of selected economies in times of crisis.

**Keywords:** output gap, potential product, HP filter, production function, Kalman's filter, NAIRU

# Obsah

<b>Abstrakt</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Podstata a význam produkčnej medzery</b>	<b>3</b>
1.1 Základný model fluktuácií ekonomiky . . . . .	5
1.2 Význam poznania produkčnej medzery . . . . .	7
<b>2 Metódy odhadovania produkčnej medzery</b>	<b>9</b>
2.1 Hodrick-Prescottov filter . . . . .	9
2.2 Koncept NAIRU . . . . .	13
2.3 Odhadovanie pomocou produkčnej funkcie . . . . .	17
2.4 Kalmanov filter . . . . .	18
2.4.1 Základný koncept Kalmanovho filtra . . . . .	18
2.4.2 Ilustračný príklad . . . . .	22
2.4.3 Kalmanov filter v prípade viacrozmerných premenných . .	27
<b>3 Odhad produkčných medzier pre vybrané krajiny</b>	<b>30</b>
3.1 Hodrick-Prescottov filter . . . . .	31
3.2 Koncept NAIRU . . . . .	33
3.3 Kalmanov filter . . . . .	38
3.3.1 Prognóza produkčnej medzery pomocou Kalmanovho filtra	41
<b>Záver</b>	<b>43</b>
<b>A Testy stacionarity</b>	<b>45</b>
<b>B Výstupy regresí pri odhade NAIRU</b>	<b>47</b>
<b>C Výstupy pre Kalmanov filter</b>	<b>49</b>
<b>Literatúra</b>	<b>51</b>



# Úvod

Všeobecne sa prijíma názor, že každá ekonomika sa vyvíja cyklicky. To znamená, že počas určitého časového obdobia ekonomika postupne prechádza fázou expanzie, konjunktúry (vrcholu), recesie a dna, po ktorom znova nasleduje fáza oživenia (expanzie). Dôvodom, prečo ekonomický vývoj takto kolíše, je viacero a touto oblasťou sa zaoberá teória ekonomického cyklu. Výkyvy môžu byť spôsobené jednak sezónnym charakterom niektorých ekonomických činností (sezónne výkyvy), môže ísť o proces opotrebovania a nahrádzania strojov a zariadení (krátkodobé cykly), prípadne o rôzne technologické a iné ekonomické šoky (strednodobé a dlhodobé cykly).

Počas tohto vývoja sa ekonomika v niektorých fázach nachádza pod svojim potenciálom a inokedy dochádza k prehrievaniu ekonomiky, čo znamená, že ekonomika sa nachádza nad svojim potenciálom. Ak sa ekonomika nachádza pod svojim potenciálom, tak to znamená, že v ekonomike existujú nevyužitú kapacitu a výrobné faktory sa nevyužívajú v plnej miere. Dôsledkom tohto stavu je napríklad rastúca nezamestnanosť so všetkými svojimi negatívnymi sprievodnými javmi, ako sú rastúci tlak na verejný rozpočet, sociálne napätie, klesajúci domáci dopyt a podobne.

K prehrievaniu ekonomiky dochádza vtedy, keď sa nachádza nad svojim potenciálom. Prehrievanie ekonomiky sa prejavuje silnejúcimi inflačnými tlakmi, nadmerne využitými výrobnými kapacitami, skreslenými očakávaniami o budúcom vývoji a podobne. Nezamestnanosť sa dostáva pod svoju prirodzenú úroveň, vzniká nedostatok pracovnej sily požadovanej štruktúry a tým aj tlak na rast miezd presahujúci rast produktivity práce.

Z uvedeného vyplýva, že výrazné vychýlenie sa od potenciálneho stavu ekonomiky je negatívnym javom bez ohľadu na to, o vychýlenie ktorým smerom ide. Potenciálny produkt je definovaný ako výstup ekonomiky, ktorý sa vyprodukuje pri plnom využití všetkých výrobných faktorov bez toho, aby dochádzalo k prehrievaniu ekonomiky a vzniku inflačných tlakov. Produkčná medzera predstavuje rozdiel medzi skutočným a potenciálnym výstupom ekonomiky.

Správne určenie potenciálneho produktu a následne produkčnej medzery dáva podnet pre rozhodnutia v mnohých oblastiach hospodárskej politiky. Ide najmä o monetárnu politiku, fiškálnu politiku a ďalšie štrukturálne politiky. Súbor opatrení hospodárskej politiky, ktorých úlohou je udržiavať ekonomiku na úrovni svojho potenciálu, sa nazýva stabilizačnou hospodárskou politikou. Keďže väčšina týchto nástrojov pôsobí s určitým oneskorením, je dôležité poznať odhad budúcej úrovne produkčnej medzery. Z tohto dôvodu chceme časť práce zamerať aj na prognózovanie produkčnej medzery.

Základným cieľom tejto práce je priblížiť viacero metód, ktoré sa dajú použiť pri odhade produkčnej medzery. V druhej kapitole preto ponúkame hlbšie

teoretické pozadie niekoľkých najznámejších a najpoužívanějších metód. Pôjde o Hodrick-Prescottov filter, prístup pomocou produkčnej funkcie, koncept NA-IRU a Kalmanov filter. Ešte predtým však v prvej kapitole vysvetlíme význam produkčnej medzery a jej ekonomické pozadie.

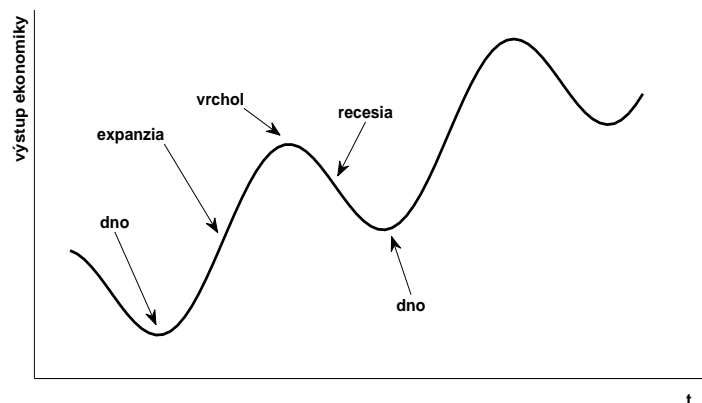
V tretej kapitole potom určíme skupinu krajín, pre ktoré odhadneme veľkosť produkčnej medzery, pričom sa zameriame hlavne na obdobie hospodárskej krízy, ktorá prepukla v druhej polovici roku 2008. Využijeme pritom poznatky o jednotlivých metódach odhadu z druhej kapitoly. V tejto empirickej časti práce sa zároveň pokúsime aj o prognózovanie produkčnej medzery pre analyzované ekonomiky.

V závere práce sa budeme venovať porovnaniu jednotlivých metód a naznačeniu ich silnejších a slabších stránok, s ktorými sa počas písania práce stretneme.

# Kapitola 1

## Podstata a význam produkčnej medzery

Ako sme už v úvode spomenuli, ekonomický vývoj žiadnej krajiny nie je rovnomerný. Každá ekonomika sa vyvíja cyklicky tak, ako je to znázornené na obrázku 1.1. Počas tohto cyklického vývoja sa ekonomika nachádza niekedy pod svojím potenciálom a niekedy nad ním.



Obr. 1.1: Cyklický vývoj ekonomiky

Produkčná medzera predstavuje rozdiel medzi potenciálnym výstupom ekonomiky a skutočným výstupom ekonomiky. Potenciálny výstup (produkt) môžeme charakterizovať ako maximálny možný výstup, ktorý dokáže ekonomika vyprodukovať pri plnom použití všetkých výrobných faktorov bez toho, aby dochádzalo k nadmerným inflačným tlakom. Skutočným výstupom rozumieme ten výstup ekonomiky, ktorý je zachytený v príslušných štatistikách. Štandardne sa ako ukazovateľ výstupu ekonomiky používa hrubý domáci produkt (HDP), a to aj napriek jeho viacerým nedostatkom.

Podľa definície, ktorú môžeme nájsť v metodike národných účtov, HDP

vyjadruje trhovú hodnotu výrobkov a služieb vyprodukovaných v krajine [a]. Z tejto definície napríklad vyplýva aj to, že aj tovary a služby, ktoré v našej krajine vyprodukuje zahraničný kapitál alebo cudzinci (výrobné faktory pochádzajúce zo zahraničia), sa započítavajú do nášho HDP. Aj tento fakt je potrebné mať na pamäti, keď budeme hovoriť o dôsledkoch produkčnej medzery meranej pomocou HDP. Pri relatívne voľnom a rýchlom pohybe kapitálu, aký môžeme v súčasnosti vo svete pozorovať, je potom dosť problematické určiť, čo znamená plné využitie kapitálu, ak tým chápeme jeho využitie pri tvorbe HDP. O ďalších nevýhodách a nedostatkoch ukazovateľa HDP sa môžeme dočítať takmer v každej učebnici ekonomickej teórie alebo hospodárskej politiky.

Ako sme už v úvode načrtli, žiadna ekonomika sa nevyvíja rovnomerne, ale osciluje okolo svojho potenciálu. Vychýlenie či už jedným, alebo druhým smerom spôsobuje určité ťažkosti, aj keď rôzneho charakteru. Na vysvetlenie týchto krátkodobých výkyvov okolo dlhodobého potenciálu ekonomiky sa zvyčajne používa model agregátneho dopytu a agregátnej ponuky (AS-AD model).

Pri vysvetľovaní krátkodobých fluktuácií uvádza Mankiw [1] ich tri najdôležitejšie vlastnosti:

- *Fluktuácie ekonomiky sú nepravidelné a nepredikovateľné.* Fluktuácie ekonomiky sa často nazývajú ekonomickým cyklom. Výraz cyklus je v tomto prípade čiastočne mätúci, pretože zvyčajne označuje opakovanie sa určitého javu s rovnakou frekvenciou. Ekonomické cykly sa však opakujú s rôznymi frekvenciami a rôznou intenzitou. Ich vývoj sa preto nedá úplne presne predikovať.
- *Viacero makroekonomických ukazovateľov fluktuuje synchronizovane.* Reálny HDP je premenná, ktorá sa najčastejšie používa na monitorovanie zmien v ekonomike, pretože relatívne komplexne odzrkadľuje ekonomickú aktivitu. Ako sme už spomínali, HDP predstavuje trhovú hodnotu všetkých tovarov a služieb vyprodukovaných vo vnútri krajiny za určité časové obdobie. Rovnako sa však na HDP dá dívať ako na príjmy za tieto tovary a služby. Ak klesá HDP, tak taktiež klesajú príjmy obyvateľstva, zisky firiem, výdavky na konečnú spotrebu, investície, priemyselná produkcia, predaje a pod.<sup>1</sup> Aj keď intenzita, s akou kolíšu tieto jednotlivé premenné, je odlišná, tendencie ich vývoja sú spravidla zachované.
- *Keď výstup klesá, nezamestnanosť rastie.* Produkcia tovarov a služieb je výrazne korelovaná s využitím pracovných síl danej ekonomiky. Keď sa podniky rozhodnú vyrábať menej tovarov a poskytovať menší objem služieb, potrebujú na to menší počet pracovníkov. Tých prebytočných prepustia a nezamestnanosť narastá. Konkrétnejšia formulácia tohto vzťahu je známa ako Okunov zákon.

K týmto trom vlastnostiam fluktuácií pridáva Romer [2] ešte ďalšiu. Uvádza, že jednotlivé komponenty sa na fluktuáciách výstupu podieľajú rôzne. Všeobecne je známe, že napríklad spotreba domácností a konečná spotreba vlády pôsobia skôr stabilizačne. To znamená, že v porovnaní s celkovým výstupom kolíšu menej. Naopak, investície pôsobia procyklicky. Firmy veľmi citlivo reagujú na signály trhu. Keď očakávajú recesiu, tak svoje investície výrazne znižia. Pri

<sup>1</sup>Keďže hovoríme o reálnom HDP, tak pri vývoji týchto veličín v čase je potrebné vziať do úvahy infláciu a teda ich nominálne hodnoty upraviť deflačným faktorom.

očekávaní expanzie rozširujú svoje kapacity a investujú vo väčšej miere ako je očakávaný rast výstupu. Okrem tejto vlastnosti poukazuje ešte na určitú asymetriu v zmenách výstupu. Na jednej strane podľa neho existujú dlhé obdobia pomalého a relatívne stabilného rastu a na strane druhej krátke obdobia výrazného prepadu výstupu. Práve tieto obdobia výrazného prepadu vytvárajú produkčné medzery, ktorými sa chceme v tejto práci ďalej zaoberať. Rovnako aj obdobie od roku 2008 by malo predstavovať práve takéto obdobie výrazného prepadu, čo sa týka výstupu ekonomík.

V ďalšej časti načrtujeme základný model, ktorý sa zvyčajne používa na vysvetlenie krátkodobých fluktuácií ekonomiky.

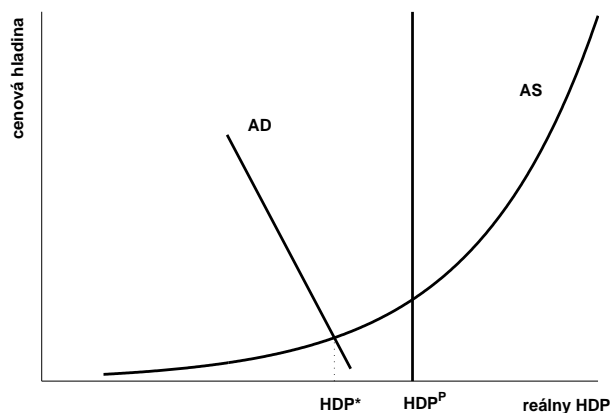
## 1.1 Základný model fluktuácií ekonomiky

Ako sme už spomenuli vyššie, na vysvetlenie krátkodobých fluktuácií ekonomiky sa zvyčajne používa model agregátnej ponuky a agregátneho dopytu (AS-AD model). V tomto modeli vystupujú dve hlavné premenné. Prvou je výstup ekonomiky, ktorý je meraný reálnym HDP. Druhou premennou je cenová hladina. Cenovú hladinu meriame zvyčajne pomocou indexu spotrebiteľských cien (CPI) alebo pomocou deflátoru HDP. Ďalej je dobré si uvedomiť, že v zmysle klasickej dichotómie<sup>2</sup> je reálny HDP reálnou premennou a cenová hladina je nominálnou premennou.

Princíp AS-AD modelu je zobrazený na obrázku 1.2. Na horizontálnej osi je reálny HDP a na vertikálnej je cenová hladina. Krivka AD je krivkou agregátneho dopytu a hovorí, aké množstvá tovarov a služieb sú domácnosti, vláda, firmy a zahraničie ochotní nakúpiť pri danej cenovej hladine. Krivka AS predstavuje krivku agregátnej ponuky a hovorí, aké množstvá tovarov a služieb sú firmy a zahraničie ochotní poskytnúť pri danej cenovej hladine. Vertikálna krivka na úrovni  $HDP^P$  predstavuje potenciálny produkt v danom časovom okamihu. Bod, v ktorom sa pretína krivka AS s krivkou AD je bodom ekonomickej rovnováhy. Vidíme, že tá sa môže vytvoriť na úrovni nižšej ako je potenciálny produkt, ale aj na úrovni presahujúcej potenciálny produkt. V našom prípade predstavuje rozdiel medzi rovnovážnym produktom ( $HDP^*$ ) a potenciálnym produktom ( $HDP^P$ ) produkčnú medzeru.

---

<sup>2</sup>Klasická dichotómia predstavuje rozdelenie ekonomických premenných na dve skupiny: reálne a nominálne. Reálne premenné sú napríklad miera nezamestnanosti a peňažné premenné vyjadrené v stálych cenách, ako napríklad reálny HDP. Hlavným znakom tejto skupiny premenných je fakt, že podľa klasickej ekonomickej školy na ich veľkosť nevyplýva množstvo peňazí v obeh. Premenné, ktoré sa dajú ovplyvniť množstvom peňazí v obeh, ako napríklad cenová hladina, sú nominálnymi premennými.

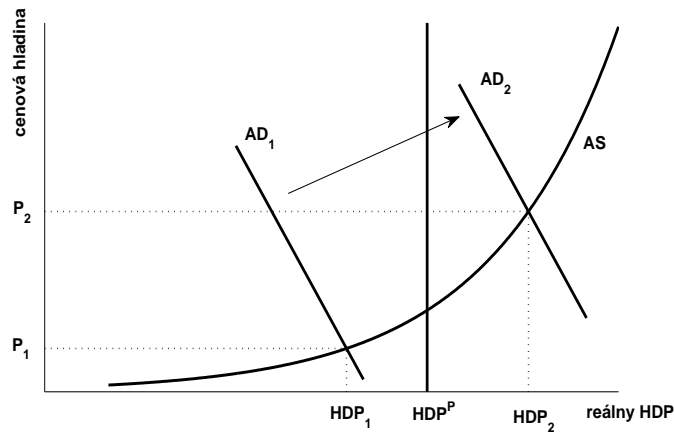


Obr. 1.2: AS - AD model

Na obrázku 1.2 môžeme teda vidieť vzťah medzi reálnym výstupom a cenovou hladinou, resp. ich zmenami. Predpokladajme, že dôjde k nejakému kladnému dopytovému šoku. Môže ísť, napríklad, o zvýšenie vládnych výdavkov, prípadne o nárast exportu vplyvom devalvácie domácej meny. To by znamenalo, že krivka dopytu sa posunie vpravo hore. Túto situáciu môžeme vidieť na obrázku 1.3.

Pri pôvodnom dopyte ( $AD_1$ ) bol rovnovážny výstup na úrovni  $HDP_1$  a rovnovážna cenová hladina na úrovni  $P_1$ . Platilo pritom, že skutočný produkt ležal pod svojou potenciálnou hodnotou. Vplyvom dopytového šoku došlo k posunu agregátneho dopytu na úroveň  $AD_2$ . Táto zmena spôsobila, že skutočný produkt sa dostal na úroveň  $HDP_2$ , a teda aj nad svoju potenciálnu hodnotu. Tento jav je však sprevádzaný nárastom cenovej hladiny z úrovne  $P_1$  na úroveň  $P_2$ .

Na základe tohto modelu teda platí, že pokiaľ výstup ekonomiky narastá nad svoju potenciálnu úroveň, dochádza zároveň k nárastu cenovej hladiny, resp. k inflačným tlakom. Ak k tejto myšlienke pridáme vyššie uvedený predpoklad o väzbe medzi výstupom a nezamestnanosťou, dostávame sa k jednej z metód odhadu produkčnej medzery, a to ku konceptu NAIRU. Tento koncept, spolu s ďalšími metódami, bude bližšie vysvetlený v druhej kapitole tejto práce.



Obr. 1.3: Vplyv dopytového šoku na reálny HDP a cenovú hladinu

## 1.2 Význam poznania produkčnej medzery

V tejto časti sa pokúsime zodpovedať niekoľko dôležitých otázok. Prečo je dôležité poznať veľkosť produkčnej medzery? Koho zaujíma veľkosť produkčnej medzery? Ako môžu dané subjekty využiť informácie o veľkosti produkčnej medzery?

O veľkosť produkčnej medzery sa zaujímajú predovšetkým tvorcovia rôznych segmentov hospodárskej politiky. Pre tvorcov menovej politiky má poznanie jej veľkosti význam hlavne preto, že produkčná medzera priamo súvisí s inflačnými tlakmi, pričom udržanie inflácie v stanovených hraniciach je základným cieľom monetárnej politiky vyspelých krajín. Na základe predikcií produkčnej medzery sa robia následne rozhodnutia o realizácii expanzívnej alebo reštriktívnej menovej politiky. Ak je produkčná medzera záporná (potenciálny produkt je vyšší ako skutočný produkt), v ekonomike existujú nevyužitú kapacitu a to pôsobí na pokles cien, teda vytvárajú sa deflačné tlaky. Deflácia je pre ekonomiku rovnako škodlivá ako inflácia. Aby tvorcovia menovej politiky zabránili tomuto javu, realizujú expanzívnu menovú politiku pomocou rôznych nástrojov, ktoré majú k dispozícii.

Ak, naopak, predikcie naznačujú vznik kladnej produkčnej medzery (potenciálny produkt je nižší ako skutočný produkt), kapacity ekonomiky sú viac než plne využitú a dochádza k prehrievaniu ekonomiky. Keďže dopyt prevyšuje potenciálny produkt, vznikajú inflačné tlaky. Ak im chce centrálna banka predísť, realizuje reštriktívnu menovú politiku.

Odhady produkčnej medzery a potenciálneho produktu sú dôležité aj v oblasti fiškálnej politiky. Význam fiškálnej politiky vzrástol najmä v krajinách, ktoré po vstupe do Eurozóny stratili suverenitu v oblasti menovej politiky. Fiškálna politika sa pre ne stala hlavným nástrojom hospodárskej politiky. Rovnakým spôsobom ako v prípade menovej politiky, dokáže fiškálna politika prostredníctvom svojej expanzívnej alebo reštriktívnej formy podporiť alebo tmiť

agregátny dopyt, a tým ho priblížiť k odhadnutému potenciálnemu produktu.<sup>3</sup>

V súvislosti s fiškálnou politikou a potenciálnym produktom je taktiež veľmi dôležité členenie skutočného deficitu verejných financií na štruktúrny a cyklický deficit. Cyklický deficit je ovplyvnený ekonomickým cyklom, presnejšie fázou ekonomického cyklu, v ktorej sa daná ekonomika práve nachádza. Ak sa skutočný produkt rovná potenciálnemu, tak cyklický deficit je nulový. Ak sa skutočný produkt nachádza pod potenciálnym, tak vzniká cyklický deficit a to jednak kvôli výpadku príjmov verejných financií a jednak kvôli zvýšeniu výdavkov (napr. dávky v nezamestnanosti).

Štruktúrny deficit je potom tá časť skutočného deficitu, ktorá by existovala, ak by sa skutočný produkt rovnal potenciálnemu. Všeobecne sa to potom chápe tak, že štruktúrny deficit predstavuje tú časť skutočného deficitu, za ktorú je zodpovedná vláda svojou fiškálnou politikou. Naopak, cyklický deficit je ovplyvnený fázou ekonomického cyklu a tvorcovia fiškálnej politiky za neho priamo nemôžu. Podobne by sa dali uvádzať príklady ďalších čiastkových politík, ktorých použitie si vyžaduje poznať veľkosť produkčnej medzery.

O odhady produkčnej medzery môže mať záujem aj súkromná sféra. Na základe týchto informácií môžu podniky realizovať svoju zásobovaciu politiku, prispôbovať investičné rozhodnutia, plánovať objednávky a využitie výrobných kapacít, prispôbovať zamestnaneckú politiku a podobne.

---

<sup>3</sup>Takéto pôsobenie fiškálnej politiky nie je neobmedzené. Množstvo výdavkov, ktoré sa môže použiť na účel stabilizácie ekonomiky, je dané príjmovou stránkou štátneho rozpočtu a záväzkami vyplývajúcimi z účasti krajín Eurozóny na Pakte stability a rastu, ktorý ohraničuje veľkosť deficitu verejných financií. Bližšie pozri [b].



## Kapitola 2

# Metódy odhadovania produkčnej medzery

V tejto kapitole uvedieme niektoré z metód, ktoré sa používajú na odhad potenciálneho produktu a produkčnej medzery. Pri každej z nich sa pokúsime vysvetliť základnú myšlienku, na ktorej je daná metóda založená a uviesť jej výhody a nevýhody.

### 2.1 Hodrick-Prescottov filter

Hodrick-Prescottov filter (HP filter) je veľmi obľúbeným nástrojom hlavne kvôli svojej jednoduchosti. Jeho autormi sú Robert J. Hodrick a Edward C. Prescott, ktorí ho publikovali v článku z roku 1980 [3]. HP filter rozkladá časový rad na dve zložky, trendovú a cyklickú. V zmysle odhadu produkčnej medzery potom považujeme trendovú zložku za potenciálny produkt a cyklickú zložku za odhad produkčnej medzery. Tento spôsob uvažovania je založený na myšlienke, že skutočný produkt v čase kolíše okolo potenciálneho produktu. To znamená, že časový rad, ktorý máme k dispozícii, sa skladá z dvoch nepozorovateľných zložiek, ktoré sa snažíme odhadnúť.

Ako uvádzajú autori v [3], HP filter je založený na myšlienke, že daný časový rad  $y_t$  je sumou trendového komponentu  $g_t$  a cyklického komponentu  $c_t$ :

$$y_t = g_t + c_t \quad \text{pre } t = 1, \dots, T \quad (2.1)$$

Mierou hladkosti trendového komponentu  $g_t$  je suma štvorcov jeho druhých diferencií

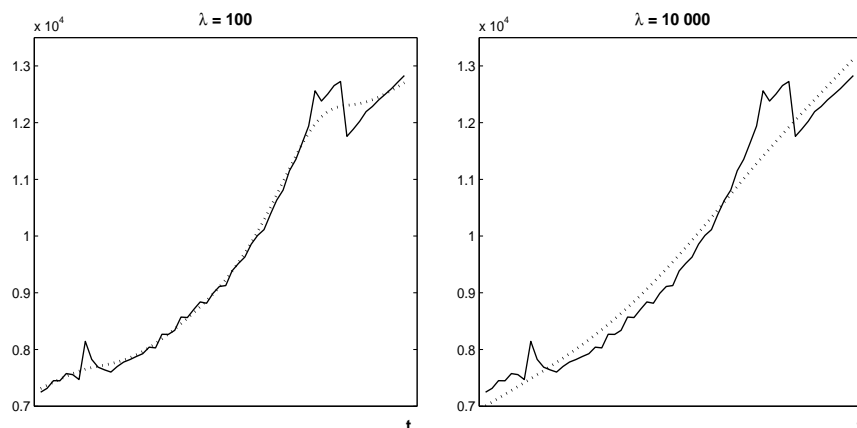
$$\Delta^2 g_t = (g_t - g_{t-1}) - (g_{t-1} - g_{t-2}).$$

Komponent  $c_t$  predstavuje odchýlky od  $g_t$  a autori predpokladajú, že pre dostatočne dlhé časové rady je priemer tejto zložky blízky nule. HP filter je potom riešením nasledujúcej úlohy nelineárneho programovania pre určenie trendovej zložky  $g_t$ :

$$\min_{\{g_t\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^T (y_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(g_{t+1} - g_t) - (g_t - g_{t-1})]^2 \quad (2.2)$$

Parameter  $\lambda$  je kladné číslo a slúži ako penalizácia variability trendovej zložky. Čím vyššia je hodnota parametra  $\lambda$ , tým hladšia je výsledná trendová čiara. Zároveň platí, že ak sa hodnota  $\lambda$  blíži limitne k nekonečnu, tak výsledná trendová čiara konverguje k lineárnemu trendu odhadnutému metódou najmenších štvorcov.

Na obrázku 2.1 môžeme vidieť použitie HP filtra s dvomi rôznymi hodnotami parametra  $\lambda$ . Dáta, ktoré sme filtrovali, sú údaje o štvrtročnom HDP Slovenska. K podrobnejšej špecifikácii týchto dát sa ešte vrátíme neskôr. Na tomto mieste slúžia len na porovnanie trendových čiar vypočítaných pomocou HP filtra.



Obr. 2.1: HP filter pre rôzne hodnoty parametra  $\lambda$ , zdroj: ŠÚ SR, vlastné výpočty

Plnou čiarou sú znázornené skutočné hodnoty HDP a prerušovanou čiarou je znázornená trendová zložka určená pomocou HP filtra. Na grafe vľavo bola zvolená hodnota parametra  $\lambda = 100$ , zatiaľ čo na grafe vpravo je  $\lambda = 10\,000$ . Môžeme vidieť, že trend vľavo presnejšie kopíruje skutočné dáta, ale deje sa to na úkor "hladkosti" trendovej zložky. Na grafe vpravo vidíme, že trendová čiara je "rovnejšia", čo je spôsobené tým, že v minimalizačnej úlohe (2.2) bola priradená prostredníctvom parametra  $\lambda$  väčšia váha druhej sume, ktorá predstavuje penalizáciu za "krivosť" trendovej čiary.

Pri určení parametra  $\lambda$  vychádzali autori [3] z nasledujúceho pravdepodobnostného modelu:

$\Delta^2 g_t$  a  $c_t$  sú nezávislé a rovnako rozdelené náhodné premenné pre každé  $t$ , pričom platí:

$$c_t \sim N(0, \sigma_1) \quad (2.3)$$

$$\Delta^2 g_t \sim N(0, \sigma_2) \quad (2.4)$$

Podmienná stredná hodnota  $g_t$  pri daných pozorovaniach  $y_t$  je riešením úlohy (2.2), ak  $\sqrt{\lambda} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ . Následne Hodrick a Prescott odhadli zo štvrtročných dát rôznych makroekonomických ukazovateľov hodnoty  $\sigma_1 = 5$  a  $\sigma_2 = \frac{1}{8}$ , odkiaľ dostali  $\sqrt{\lambda} = \frac{5}{1/8} = 40$  a teda  $\lambda = 1600$ .

Na tomto mieste ešte môžeme spomenúť jeden zaujímavý fakt, ktorý je dobre si všimnúť. Je ním skutočnosť, že v rovnici (2.1) sa neuvažuje so žiadnou náhod-

nou zložkou. Rozklad časového radu na trendovú a cyklickú zložku je teda tzv. rovnicou identity a prípadné náhodné výkyvy sú považované za súčasť cyklickej zložky.<sup>1</sup>

Štandardne sa používaajú nasledovné hodnoty tohto vyhladzovacieho parametra  $\lambda$  podľa frekvencie analyzovaných dát:

$$\begin{aligned}\lambda &= 100 \text{ pre ročné dáta,} \\ \lambda &= 1600 \text{ pre štvrtročné dáta,} \\ \lambda &= 14400 \text{ pre mesačné dáta.}\end{aligned}$$

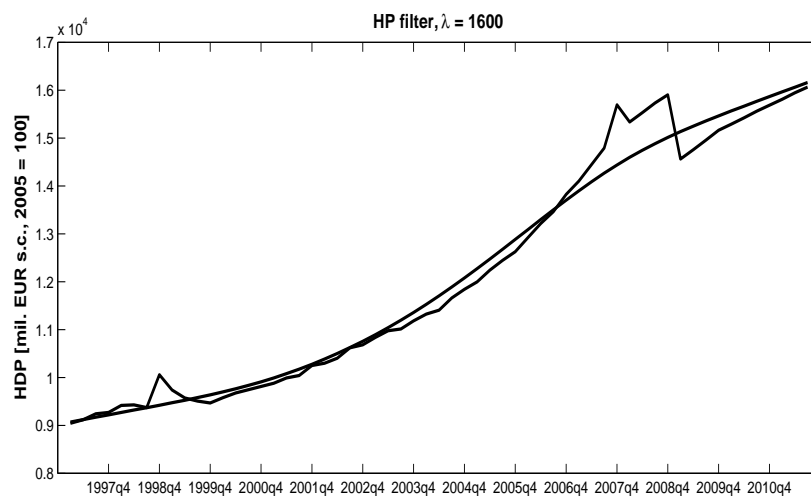
Platí teda pravidlo, že  $\lambda = 100 \times (\text{frekvencia dát})^2$ . Tieto hodnoty nie sú nejak zvlášť analyticky odvodené. Boli skôr určené na základe empirických pozorovaní a práce s viacerými časovými radmi za americkú ekonomiku. Takéto subjektívne stanovenie tohto vyhladzovacieho parametra sa stalo neskôr terčom kritiky HP filtra. Neskôr vzniklo viacero prác, ktoré sa snažili určiť parameter  $\lambda$  na základe objektívnych kritérií (pozri napr. [4], [5]).

Napriek tomu, že používanie HP filtra sa v ostatnej dobe veľmi rozšírilo, vzniká v súvislosti s ním niekoľko teoretických aj praktických problémov. Kritika používania HP filtra spočíva hlavne v nie dostatočne analyticky odvodenej voľbe vyhladzovacieho parametra  $\lambda$ , v meniacej sa variabilite a nestálosti, v detekovaní nepravých (spurious) cyklov a koreláciách náhodných zložiek [6]. Autori v tejto spomínanej práci [6] venujú jednu celú časť prehľadu prác, ktoré sa zaoberajú kritikou HP filtra. Nakoniec však uzatvárajú, že žiadna z uvádzaných nevýhod a slabých stránok nie je natoľko vážna, aby odvodnila úplné vylúčenie používania tohto jednoduchého, ale užitočného nástroja.

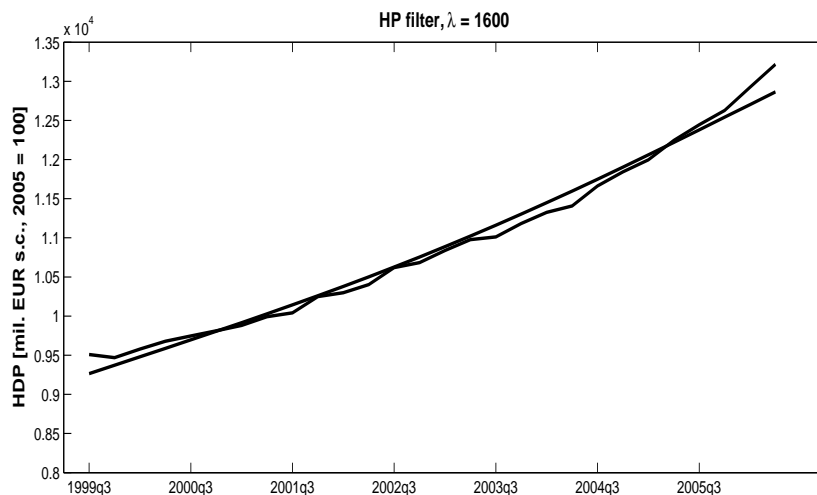
Často uvádzanou a z nášho pohľadu aj veľmi podstatnou nevýhodou HP filtra je silná závislosť tejto metódy od dĺžky analyzovaného časového radu. Filter je konštruovaný tak, že hodnoty, ktoré sú riešením úlohy (2.2) prechádzajú cez skutočné dáta a súčet odchýliek skutočných hodnôt od tých filtrovaných je približne nula. Uvažujme prípad, že filter aplikujeme na nejaký dostatočne dlhý časový rad. Odtiaľ dostaneme nejaké cyklické správanie skutočných hodnôt. Ak následne vyberieme len určitý úsek pôvodného časového radu, kde skutočné hodnoty sa nachádzali napríklad nad filtrovanými hodnotami a znova použijeme HP filter na tento kratší časový rad, tak dostaneme kvalitatívne iné výsledky. Túto situáciu si znázorníme na údajoch o HDP za SR.

Na obrázku 2.2 vidíme HP filter aplikovaný na štvrtročné HDP za SR od roku 1997 po tretí štvrtrok 2011. Pozrime sa napríklad na obdobie zhruba od tretieho štvrtroku 1999 až do polovice roku 2006. Na základe obr. 2.2 by sme tvrdili, že počas celého tohto obdobia bol skutočný produkt pod svojou potenciálnou úrovňou a teda na Slovensku existovala záporná produkčná medzera. Čo by sa však stalo, ak by sme mali k dispozícii údaje iba za toto obdobie (1999q3 - 2006q2)? Takúto situáciu sme znázornili na obrázku 2.3

<sup>1</sup>Tento rozklad taktiež neuvažuje so sezónnou zložkou. Z tohto dôvodu by sa na analýzu pomocou HP filtra mali používať časové rady, ktoré sú už sezónne očistené.



Obr. 2.2: HP filter pre HDP SR od 1997q1 do 2011q3 zdroj: ŠŮ SR, vlastné výpočty



Obr. 2.3: HP filter pre HDP SR od 1999q3 do 2006q2 zdroj: ŠŮ SR, vlastné výpočty

Hoci na obr. 2.2 ležali skutočné hodnoty HDP na celom úseku 1999q3 - 2006q2 pod filtrovanými hodnotami (pod potenciálnym produktom), na obr. 2.3 už tomu tak nie je. Vidíme, že na začiatku a na konci tohto skráteného časového radu sa skutočné hodnoty dostali nad hodnoty vypočítané HP filtrom. Kvalitatívne sme tak dostali pre toto obdobie opačný výsledok ako pri predchádzajúcej analýze a tvrdili by sme, že v danom období dochádzalo k prehrievaniu

ekonomiky namiesto recesie.

Na základe tohto príkladu môžeme tvrdiť, že odhadovanie produkčnej medzery pomocou HP filtra je veľmi málo robustné vzhľadom na dĺžku analyzovaného časového radu.

## 2.2 Koncept NAIRU

NAIRU je skratka z anglického *the nonaccelerating inflation rate of unemployment*, čo v preklade znamená takú mieru nezamestnanosti, ktorá nevedie k nárastu inflačných tlakov. Dalo by sa zhruba povedať, že NAIRU je synonymom prirodzenej miery nezamestnanosti. Tento koncept vychádza z teórie tzv. krátkodobej Phillipsovej krivky, ktorá hovorí o negatívnej korelácii medzi infláciou a mierou nezamestnanosti.<sup>2</sup> To znamená, že podľa tejto teórie, keď klesá nezamestnanosť, rastú mzdy rýchlejšie ako produktivita práce a to vytvára inflačné tlaky. Naopak, ak nezamestnanosť rastie, je stále viac voľných pracovných síl a to pri pružných mzdách tlačí na ich zníženie.

Podľa tradičnej makroekonomickej teórie je protichodné pôsobenie medzi infláciou a nezamestnanosťou základom pre pochopenie nielen účinkov monetárnej politiky, ale aj ďalších politik a nástrojov, ktoré ovplyvňujú agregátny dopyt. Tieto ďalšie politiky a nástroje pôsobia často na ekonomiku viacerými kanálmi. Napríklad daňovou politikou je možné ovplyvniť jednak agregátny dopyt prostredníctvom disponibilného príjmu a jednak agregátnu ponuku prostredníctvom motivácie pracovať [7]. Ako ďalší príklad môžeme uviesť pôsobenie menovej politiky na zamestnanosť.

Podľa klasickej školy ekonómie sú však peniaze neutrálne. Ide len o číselné vyjadrenie cien. Zmeny v objeme peňazí môžu zmeniť len nominálne ceny a všeobecnú cenovú hladinu, ale nie reálne veličiny, akými sú relatívne ceny, zamestnanosť alebo produkcia. Kľúčovou otázkou, ktorou sa dlho zaoberala teória hospodárskeho cyklu, je, prečo táto hypotéza klasickej ekonómie v praxi zlyháva. Odpoveď na túto otázku môžeme nájsť v mnohých prácach. Zvyčajne to zdôvodňujú nesplnením niektorých z predpokladov dokonalej konkurencie, z ktorej klasická ekonómia vychádza. Uvádzajú sa hlavne nedokonalosť informácií, tranzakčné náklady, nepružnosť trhu práce, náklady na úpravu cien, nesplnenie predpokladu racionality a pod. Ich spoločným výsledkom je, že kvôli nesplneniu predpokladov dokonalej konkurencie, teória úplnej neutrality peňazí v praxi zlyháva. Z toho potom vyplýva, že minimálne z krátkodobého hľadiska zmeny v objeme peňazí spôsobujú protichodný pohyb medzi infláciou a nezamestnanosťou.

Ak prijmeme tento predpoklad o negatívnej korelácii medzi infláciou a nezamestnanosťou z krátkodobého hľadiska, tak potom musí existovať taká miera nezamestnanosti, pri ktorej je inflácia stabilná [7]. Bez výraznej straty na všeobecnosti, môžeme na základe predchádzajúcich úvah zapísať vzťah medzi infláciou  $\Pi$  a nezamestnanosťou  $U$  nasledovne:

$$\Pi = k - aU,$$

---

<sup>2</sup>Polemika ohľadom Phillipsovej krivky je predmetom takmer každej učebnice makroekonómie. Z tohto dôvodu sa jej nebudeme na tomto mieste bližšie venovať a obmedzíme sa len na základné výsledky, ktoré bezprostredne súvisia s predmetom tejto práce. V prípade záujmu o hlbšie pochopenie teoretického pozadia, historického vývoja a následnej kritiky Phillipsovej krivky odporúčame napr. [1] alebo [2].

kde  $k$  a  $a$  sú kladné parametre. Táto rovnica v skutočnosti nehovorí nič viac ako to, že inflácia a nezamestnanosť sú v protichodnom vzťahu. Mnohé empirické práce v minulosti potvrdili, že tento vzťah nie je v čase konštantný. Ak by tomu tak bolo, tak na základe dát o inflácii a nezamestnanosti by sa dali parametre  $k$  a  $a$  ľahko určiť.

Nestabilita tohto vzťahu v čase nie je vôbec prekvapivá. Už Samuelson a Solow v roku 1960 vo svojej práci týkajúcej sa Phillipsovej krivky naznačujú, že vzťah medzi infláciou a nezamestnanosťou sa v čase mení. Napokon tento fakt potvrdzujú aj údaje zo 70. rokov, teda z čias ropných kríz. Odporcovia Phillipsovej krivky tento fakt používajú ako argument proti platnosti krátkodobého protichodného pôsobenia inflácie a nezamestnanosti. Prevláda však názor, že v každom čase ekonomika čelí tomuto protichodnému pôsobeniu, ale parametre tohto vzťahu sa v čase menia.

Podľa významných prác Friedmana [18] a Phelps [19] má kľúčovú úlohu pri vysvetlení posunov Phillipsovej krivky v čase očakávaná inflácia. Za predpokladu *ceteris paribus*, ak sa zvýši očakávaná miera inflácie, tak sa automaticky zvýši aj skutočná inflácia. Tento jav nastáva kvôli tomu, že všetci zapracujú novú výšku očakávanej inflácie do svojich očakávaní (mzdových, cenových a pod.). Dôvodom, prečo dokáže zmena očakávanej inflácie posunúť Phillipsovu krivku, je neplatnosť neutrality peňazí v krátkodobom časovom horizonte.

Na základe väčšiny štandardných teórií môžeme tento vzťah zapísať nasledovne:

$$\Pi = \Pi^e - a(U - U^*),^3 \quad (2.5)$$

kde  $\Pi^e$  je očakávaná inflácia a  $U^*$  je tzv. prirodzená miera nezamestnanosti. Prirodzená miera nezamestnanosti predstavuje teda takú mieru nezamestnanosti, pri ktorej sa naplnia očakávania ohľadom inflácie,  $\Pi = \Pi^e$ . Ak nezamestnanosť klesne pod svoju prirodzenú mieru ( $U < U^*$ ), tak podľa vzťahu (2.5) skutočná inflácia presiahne jej očakávanú hodnotu ( $\Pi > \Pi^e$ ). Naopak, ak je skutočná nezamestnanosť vyššia ako prirodzená miera ( $U > U^*$ ), tak zo vzťahu (2.5) vyplýva, že skutočná inflácia bude nižšia, ako sa očakávalo.

Na prirodzenú mieru nezamestnanosti sa môžeme dívať ako na takú mieru, ktorú ekonomika dosahuje z dlhodobého hľadiska. Tento pohľad vychádza z predpokladu racionality očakávaní. To znamená, že sa predpokladá, že v dostatočne dlhom období sa priemerná očakávaná inflácia rovná priemeru skutočnej inflácie. Z toho dôvodu sa preto aj priemerná nezamestnanosť v dostatočne dlhom časovom období musí rovnať priemeru prirodzenej miery nezamestnanosti.

Nič z uvedeného nenaznačuje, že prirodzená miera nezamestnanosti je v čase nemenná, alebo že jej zmeny sú len veľmi pomalé. Napriek tomu sa v praxi tento predpoklad používa a na zachytenie tzv. ponukových šokov sa do rovnice (2.5) pridá náhodný člen. Rovnica potom vyzerá nasledovne:

$$\Pi = \Pi^e - a(U - U^*) + \nu, \quad (2.6)$$

kde  $\nu$  zachytáva ponukové šoky.

Pred odhadovaním tejto rovnice je potrebné povedať ešte niečo o očakávanej inflácii. Často používaným prístupom sú adaptívne očakávania. V tomto prípade

<sup>3</sup>V rôznej literatúre sa môžeme často stretnúť s logaritmicou transformáciou premenných, hlavne nezamestnanosti ( $u = \ln(U)$ ). Pozri napr. [8]. K tejto transformácii podľa potreby pristúpime pri konkrétnom odhade parametrov vzťahu (2.5). V tejto časti to zatiaľ nie je potrebné.

je očakávaná inflácia váženým priemerom predchádzajúcich hodnôt inflácie. Najjednoduchším prípadom je, ak predpokladáme, že očakávaná inflácia pre nasledujúce obdobie má hodnotu terajšej inflácie,  $\Pi^e = \Pi_{-1}$ . Dostávame teda:

$$\Pi = \Pi_{-1} - a(U - U^*) + \nu. \quad (2.7)$$

Predpoklad adaptívnych očakávaní pre infláciu nie je vôbec zlý, pretože v ostatnom období sa ukazuje, že priebeh inflácie sa správa ako náhodná prechádzka (random walk)<sup>4</sup>. Na základe týchto predpokladov budeme teda  $U^*$  považovať za NAIRU. Ak máme k dispozícii časové rady pre infláciu a nezamestnanosť a rovnicu (2.7) upravíme do tvaru

$$\Pi_t - \Pi_{t-1} = aU^* - aU_t + \nu_t, \quad (2.8)$$

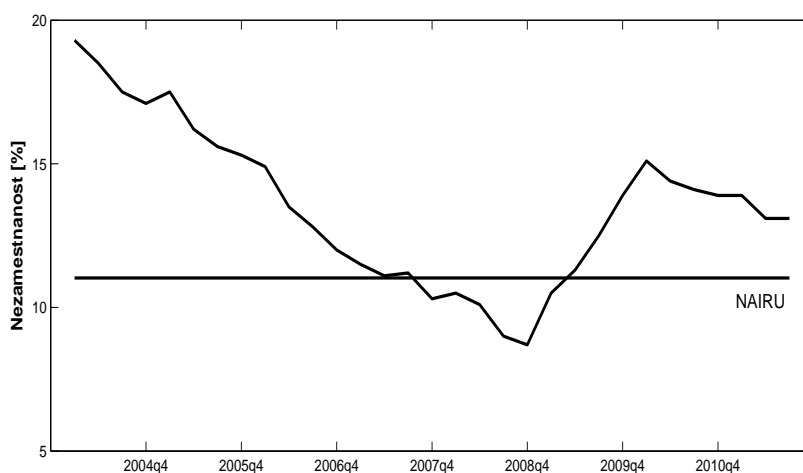
tak môžeme spraviť OLSE odhad v tvare

$$d(\Pi_t) = \delta + \gamma U_t + \nu_t \quad (2.9)$$

Pomocou odhadnutých koeficientov  $\delta$  a  $\gamma$  z rovnice (2.9) potom vyjadríme pôvodné parametre ako

$$a = -\gamma \quad U^* = -\frac{\delta}{\gamma}. \quad (2.10)$$

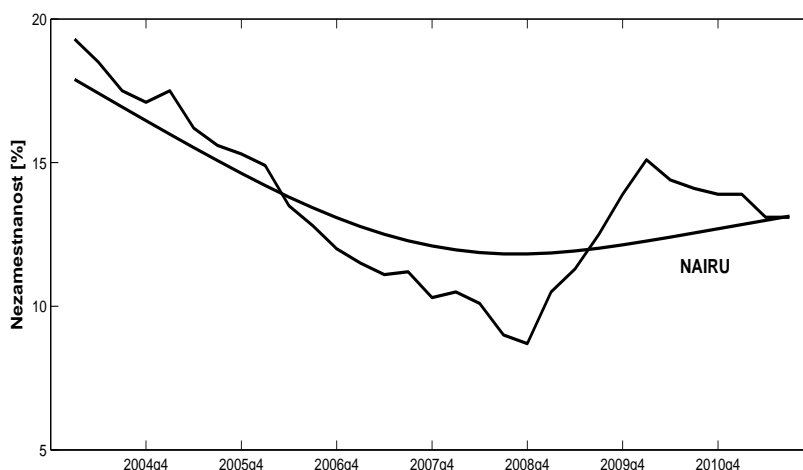
V prípade, že robíme odhady pre veľmi dlhé obdobie, je málo pravdepodobné, že NAIRU je v tomto dlhom časovom období konštantná. Autori [7] uvádzajú, že medzi hlavné faktory, ktoré spôsobujú zmeny NAIRU, patria hlavne zmeny na trhu práce, jeho flexibilita a taktiež aj demografický vývoj a zmeny vo vekovej štruktúre obyvateľstva. Ak chceme uvažovať prípad meniacej sa NAIRU v čase, môžeme napríklad na historické dáta o nezamestnanosti aplikovať už spomínaný Hodrick-Prescottov filter. Porovnanie hodnôt NAIRU pre SR, vypočítaných oboma spôsobmi, môžeme vidieť na nasledujúcich obrázkoch.



Obr. 2.4: Konštantná NAIRU pre SR, zdroj: ŠÚ SR, vlastné výpočty

<sup>4</sup>Hovoríme, že premenná  $x_t$  je náhodná prechádzka, ak platí  $x_t = x_{t-1} + u_t$ , kde  $u_t$  sú  $iid(0, \sigma^2)$  [9].

Na obrázku 2.4 vidíme vývoj skutočnej nezamestnanosti na Slovensku podľa výberového zisťovania pracovných síl (VZPS)<sup>5</sup> a taktiež odhad konštantnej NAIRU podľa vzťahov (2.9) a (2.10). Takto odhadnutá NAIRU má hodnotu 11.03 %. Na základe toho, by potom k prehrievaniu slovenskej ekonomiky dochádzalo zhruba v období štvrtý kvartál 2007 až druhý kvartál 2009, pretože v tomto období je skutočná nezamestnanosť pod úrovňou NAIRU. Vo zvyšku obdobia na obrázku 2.4 dochádzalo k existencii zápornej produkčnej medzery.



Obr. 2.5: V čase sa mení NAIUR pre SR (odhad HP filtrom), zdroj: ŠÚ SR, vlastné výpočty

Na obrázku 2.5 je odhadnutá NAIRU pomocou HP filtra. V tomto prípade sme už upustili od predpokladu konštantnosti prirodzenej miery nezamestnanosti. V porovnaní s obrázkom 2.4 dostávame teraz kvalitatívne iný výsledok. K prehrievaniu slovenskej ekonomiky podľa tohto postupu dochádzalo približne v období od roku 2006 až do polovice roku 2009. Toto konštatovanie je podoprené aj faktom, že v tomto období dochádzalo k realizácii expanzívnej fiškálnej politiky, ktorá mohla k prehrievaniu výrazne napomôcť.

A aký je teda súvis medzi NAIRU a potenciálnym produktom, resp. produkčnou medzerou? Pripomeňme ešte raz, že v prípade potenciálneho produktu ide o taký výstup ekonomiky, pri ktorom sú všetky výrobné faktory plne využité, ale zároveň nedochádza k prehrievaniu ekonomiky, čoho prejavom zvyčajne býva rastúca inflácia. Na druhej strane, NAIRU predstavuje takú mieru nezamestnanosti, ktorá nezrýchľuje infláciu. Práca je jeden z hlavných výrobných faktorov a v súčasnosti je výrazne menej mobilná v porovnaní s kapitálom, čo znamená, že lepšie odráža využívanie výrobných vstupov danou ekonomikou. Na základe týchto predpokladov môžeme potom odchýlky skutočnej nezamestnanosti od NAIRU považovať za dobrú aproximáciu produkčnej medzery. Bližšie sa ku kon-

<sup>5</sup>Ide o metodiku, ktorú používa Štatistický úrad SR a je potrebné odlišovať túto mieru nezamestnanosti od evidovanej miery nezamestnanosti, ktorú vykazujú Úrady práce, sociálnych vecí a rodiny.



krátnym odhadom produkčnej medzery pomocou tohto prístupu dostaneme v tretej kapitole tejto práce.

## 2.3 Odhadovanie pomocou produkčnej funkcie

Tento prístup modeluje potenciálny produkt ako funkciu potenciálnych objemov výrobných vstupov. V prípade, že uvažujeme Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu, tak potenciálny produkt modelujeme ako funkciu potenciálnych objemov práce, kapitálu a potenciálnej celkovej produktivity faktorov (TFP) [10]. Všeobecne teda platí

$$Y^* = f(x_1^*, x_2^* \dots, x_n^*)$$

a špeciálne pre Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu

$$Y^* = A^* \times L^{*\alpha} \times K^{*(1-\alpha)}, \quad (2.11)$$

kde  $Y^*$  je potenciálny produkt,  $L^*$  je potenciálne množstvo práce (zodpovedajúce napr. prirodzenej miere nezamestnanosti alebo NAIRU),  $K^*$  je potenciálny objem kapitálu,  $A^*$  je potenciálna TFP a  $\alpha$  je koeficient elasticity produktu vzhľadom na prácu. Za predpokladu, že mzdy sú na úrovni príjmov z hraničného produktu práce, tak parameter  $\alpha$  predstavuje zároveň podiel miezd na celkovom vytvorenom produkte.

Hoci prístup merania potenciálneho produktu pomocou produkčnej funkcie má oporu v ekonomickej teórii, stále nerieši problém odhadu trendovej zložky, ktorý sme naznačili v časti o Hodrick-Prescottovom filtri. Tento problém sa len presúva z odhadovania trendu výstupu ekonomiky (napr. HDP) na dekompozíciu časových radov výrobných vstupov.

Tento prístup použil vo svojej práci aj T. Konuki [10] na odhad potenciálneho produktu Slovenska. Za potenciálne množstvo pracovnej sily považoval trendovú zložku HP filtra aplikovaného na skutočný počet pracujúcich získaný z národných účtov.

Pomerne veľkým problémom tohto prístupu je odhad veľkosti kapitálových vstupov ekonomiky. Tetsuya Konuki v už spomínanej práci použil na odhad kapitálových zásob nasledujúci postup. V prvom rade predpokladal, že potenciálne množstvo kapitálu sa rovná skutočnému objemu kapitálu. Tento predpoklad môže byť podporený veľkou mobilitou kapitálu v ostatnom období. Samotný odhad objemu kapitálu realizoval v dvoch krokoch. Najprv metódou perpetuity určil počiatočný stav kapitálu v roku 1995 ako podiel  $\frac{THK_{95}}{(g+\delta)}$ , kde  $THK_{95}$  je tvorba hrubého kapitálu za rok 1995,  $g$  predstavuje priemerné tempo rastu tvorby hrubého kapitálu v rokoch 1996 - 2004 a  $\delta$  predstavuje ročnú mieru amortizácie, o ktorej predpokladá, že je na úrovni štyroch percent. Následne ďalšie hodnoty kapitálových zásob získal metódou priebežného bilancovania podľa vzťahu:

$$K_{t+1} = K_t + I_{t+1} - D_{t+1},$$

kde  $K$  je objem kapitálových zásob,  $I$  predstavuje ročnú tvorbu hrubého kapitálu a  $D$  je ročná amortizácia.

V použití tejto metódy vidíme viaceré komplikácie a nepresnosti, nehovoriac už o odhade potenciálnej celkovej produktivity faktorov (TFP) zo vzťahu (2.11). Zároveň sa domnievame, že predpoklad o rovnosti potenciálneho a skutočného objemu kapitálu spôsobí to, že na odhad produkčnej medzery bude mať vplyv

iba kolísanie výrobného faktora práca okolo svojho potenciálu. Z tohto dôvodu sa potom odhad týmto prístupom a odhad pomocou NAIRU nemôžu výrazne odlišovať, k čomu nakoniec dospel aj Tetsuya Konuki vo svojej práci [10].

## 2.4 Kalmanov filter

Nedostatky vyššie uvádzaných metód (Hodrick-Prescottov filter a odhad pomocou produkčnej funkcie) na odhad potenciálneho produktu a produkčnej medzery čiastočne odstraňuje táto metóda. V roku 1960 publikoval R. E. Kalman svoj slávny článok *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems* [11], v ktorom popísal rekurzívne riešenie lineárneho problému filtrácie diskretných dát [12]. Odvtedy sa Kalmanov filter stal veľmi používaným nástrojom nielen ekonomickej analýzy. S rozvojom výpočtovej techniky sa jeho využívanie značne rozšírilo a dnes existuje veľké množstvo prác, kde je Kalmanov filter aplikovaný na riešenie rôznych problémov. V ďalšej časti sa preto budeme trochu podrobnejšie venovať konceptu Kalmanovho filtra a to aj z dôvodu, že počas štúdia sme sa s týmto nástrojom takmer nestretli.

### 2.4.1 Základný koncept Kalmanovho filtra

Ako uvádza Peter S. Maybeck [13], Kalmanov filter predstavuje optimálny rekurzívny algoritmus na spracovanie dát. Existuje veľa spôsobov, ako definovať *optimálny*. Závisí to od zvoleného kritéria na posudzovanie kvality algoritmu. Jedným z aspektov optimality Kalmanovho filtra je, že využíva všetky informácie, ktoré sú pre daný problém relevantné. Odhaduje teda hodnotu skúmanej premennej s použitím

- znalostí o danom systéme a spôsobe merania prvkov systému,
- predpokladov o štatistickom rozdelení náhodných prvkoch systému, rozdelení chýb meraní a o neurčitosti (neistote) dynamického modelu a
- všetkých dostupných informácií o počiatočnom stave systému a jednotlivých jeho premenných.

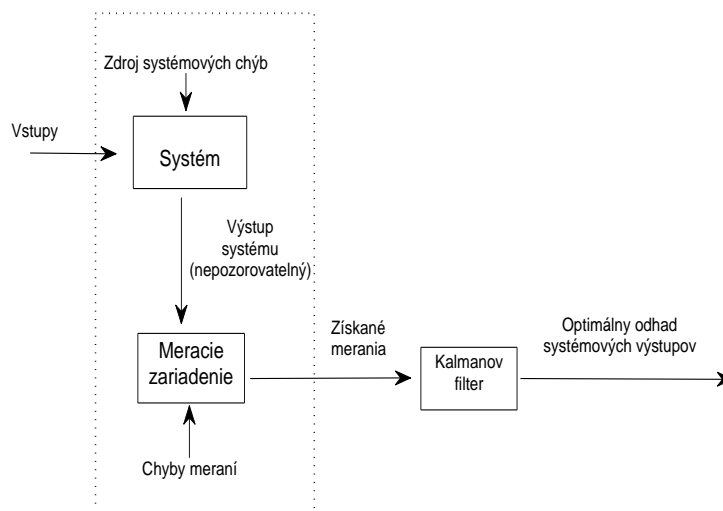
Maybeck [13] ako príklad uvádza určenie rýchlosti lietadla. Na jeho meranie je možné použiť Dopplerov radar<sup>6</sup>, vlastný navigačný systém lietadla, informácie o tlaku a rýchlosti vetra a pod. Namiesto zanedbania niektorých týchto informácií a zamerania sa len na jeden údaj, Kalmanov filter využije všetky tieto odhady a informácie a skombinuje z nich najlepší odhad rýchlosti lietadla.

Slovo *rekurzívny* v predchádzajúcom popise znamená, že Kalmanov filter nepotrebuje na výpočet aktuálnej hodnoty sledovanej premennej držať v pamäti všetky minulé hodnoty, ale využije informáciu zachytenú v predchádzajúcej hodnote. Tento fakt je veľmi dôležitý hlavne z hľadiska praktickej aplikácie filtra.

Princíp fungovania Kalmanovho filtra si môžeme znázorniť na obrázku 2.6. Systém je riadený nejakým známym vstupom a meracie zariadenie poskytuje hodnotu nejakej sledovanej premennej. Znalosť týchto systémových vstupov a

<sup>6</sup>Dopplerov radar využíva na meranie rýchlosti tzv. Dopplerov efekt. Funguje tak, že vyšle signál k pozorovanému objektu a následne zachytáva odrazený signál, ktorého frekvencia sa mení podľa rýchlosti pohybu daného objektu.

výstupov je všetko, čo máme z daného systému explicitne k dispozícii na účely jeho odhadovania.



Obr. 2.6: Princíp Kalmanovho filtra, zdroj: [13]

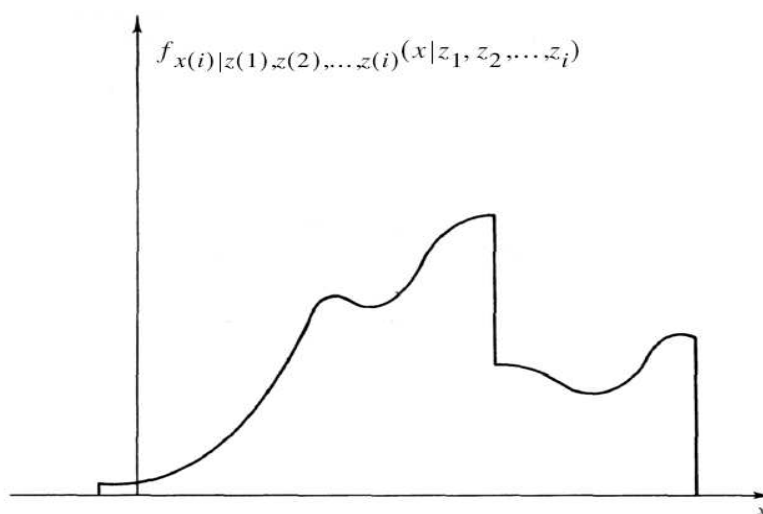
Zmysel a využitie takéhoto filtra sa teraz stáva zjavnejším. Často totiž premenné, ktoré nás zaujímajú a popisujú stav určitého systému (napr. národnej ekonomiky), nie sú priamo pozorovateľné alebo merateľné a my potrebujeme ich hodnotu odhadnúť z iných dostupných údajov (do tejto kategórie spadajú aj produkčná medzera ekonomiky). Napríklad na základe údajov o trhu práce a peňažnom trhu odhadujeme veľkosť produkčnej medzery. Tento odhad je komplikovaný, pretože daný systém (národná ekonomika) má veľké množstvo ďalších vstupov a taktiež transmisné mechanizmy medzi vstupmi a výstupmi poznáme len s určitým stupňom neistoty (nepresnosti). Navyše, mnohé informácie o výstupoch systému môžu byť poškodené určitým šumom, alebo získané s danou mierou nepresnosti v závislosti od meracích zariadení. Z tohto dôvodu musia byť získané informácie odfiltrované od rôznych druhov šumov. Taktiež môže byť k dispozícii viacero meracích zariadení, z ktorých každé poskytuje určitú informáciu o nami sledovanej premennej. Potom je žiaduce skombinovať všetky tieto výstupy a získať tak čo najpresnejší odhad tejto premennej. Kalmanov filter kombinuje všetky dostupné namerané relevantné dáta plus apriórnu informáciu o danom systéme a meracích zariadeniach na tvorbu odhadu požadovanej premennej, pričom minimalizuje strednú šandardnú chybu (MSE - mean square error).

Koncepcne väčšina podobných filtrov robí to, že sa pokúša získať optimálny odhad požadovanej premennej na základe nejakých pozorovaných dát, ktoré sú však získané s určitým šumom (noisy data). Optimálny sa tu myslí tak, že minimalizuje chybu v určitom zmysle. Existuje viacero spôsobov, ako dosiahnuť tento cieľ. Ak by sme sa pozerali na tento problém pohľadom Bayesovskej šta-

tistiky, tak chceme filter, ktorý by reprodukoval funkciu podmienenej hustoty sledovanej premennej. Táto hustota by bola podmienená našimi napozorovanými dátami.

Pre lepšie pochopenie tohto konceptu uvádza autor [13] takýto príklad. Uvažujme funkciu hustoty na obrázku 2.7, znázorňujúcu podmienenú hustotu premennej  $x$  v časovom okamihu  $i$ , teda  $x(i)$  za predpokladu, že premenná  $z$  nadobudla v čase 1 hodnotu  $z_1$  ( $z(1) = z_1$ ), v čase 2 hodnotu  $z_2$  a tak ďalej až do času  $i$ , kedy nadobudla hodnotu  $z_i$ . Túto funkciu potom zapíšeme ako

$$f_{x(i)|z(1),z(2),\dots,z(i)}(x|z_1, z_2, \dots, z_i).$$



Obr. 2.7: Podmienená funkcia hustoty, zdroj: [13]

Ako konkrétny príklad potom uvádza, že nech  $x(i)$  je jednorozmerný vektor (skalár), udávajúci skutočnú polohu (na priamke) nejakého vozidla v čase  $i$  a nech  $z(j)$  je dvozmerný vektor, udávajúci polohu tohto vozidla nameranú dvoma nezávislými radarmi v čase  $j$ . Podmienená funkcia hustoty potom obsahuje všetky dostupné informácie o  $x(i)$ . Pre dané merania  $z(1) \dots z(i)$  nám hovorí, aké je pravdepodobnostné rozdelenie skutočnej polohy  $x(i)$ .

Keď už je vytvorená príslušná podmienená funkcia hustoty, môžeme jasne zdefinovať *optimálny* odhad. Do úvahy prichádzajú viaceré možnosti:

- stredná hodnota,
- medián,
- modus.

Kalmanov filter vykonáva konštrukciu tejto podmienenej funkcie hustoty za predpokladu, že systém môže byť popísaný pomocou lineárneho modelu a že systémové šумы a chyby meraní majú vlastnosti bieleho šumu a sú navyše gaussovské. Za týchto podmienok sa stredná hodnota, medián a modus navzájom

rovnajú. Dá sa ukázať, že za platnosti týchto troch reštrikcií, dáva Kalmanov filter najlepší odhad. Pri porušení predpokladu normality chýb, zostáva Kalmanov filter najlepším filtrom spomedzi lineárnych nevychýlených filtrov.

Pozrime sa teraz trochu bližšie na tieto tri základné predpoklady, ktoré sú potom neskôr použité pri formulácii Kalmanovho filtra. Na prvý pohľad sa môžu zdať príliš reštriktívne a nereálne. Aby sme trochu zmiernili tieto pochybnosti, uvedieme niektoré fyzikálne implikácie týchto predpokladov, ako sú rozpracované v [13].

Lineárny model je častokrát vhodný z viacerých dôvodov. Lineárny model zvyčajne postačuje účelu, za ktorým bol konštruovaný. V prípade, že existujú nelinearity, tak štandardný prístup je linearizácia v danom bode. Lineárne modely sú žiaduce aj z dôvodu ich nenáročnosti na výpočtovú techniku a taktiež teória lineárnych modelov je ďaleko prepracovanejšia ako v prípade nelineárnych modelov. Existujú však aj rôzne rozšírenia Kalmanovho filtra s nelineárnymi aplikáciami, prípadne priamo rôzne nelineárne filtre. Tie sa však používajú najmä v prípadoch, keď sa ukážu lineárne modely ako nepostačujúce.

Náhodná premenná  $\epsilon_t$  je bielym šumom, ak platia nasledujúce podmienky [14]:

- $E[\epsilon_t] = 0$
- $E[\epsilon_t^2] = \sigma^2$
- $Cov[\epsilon_t, \epsilon_s] = 0 \quad \forall s \neq t$

Tieto podmienky hovoria, že náhodná premenná je rovnomerne rozmiestnená okolo nuly, má všade konštantnú varianciu a jej jednotlivé zložky sú nekorelované. To znamená, že ak máme informáciu o veľkosti šumu v niektorom časovom okamihu, nevieme z toho povedať vôbec nič o hodnote chyby v hociktorom inom časovom okamihu. Táto chyba sa teda nedá predpovedať. V takejto podobe zrejme nemôže biely šum reálne existovať. Môžeme si teda položiť otázku, prečo sa uvažuje s predpokladom, ktorý nemôže byť reálne splnený? Maybeck v [13] uvádza zhruba takéto zdôvodnenie. Každý fyzikálny systém má určitý rozsah vstupov, v rámci ktorého dokáže reagovať. Ak vstupy presiahnu tento rozsah, tak buď nemajú žiadny vplyv, alebo je ich vplyv podstatne znížený. Vo vnútri tohto rozsahu sa však systém naozaj riadi bielym šumom, resp. veľmi podobným procesom. Nahradenie skutočného šumu bielym predstavuje taktiež výrazné matematické zjednodušenie, aj keď v rámci daného rozsahu systému sú takmer identické.

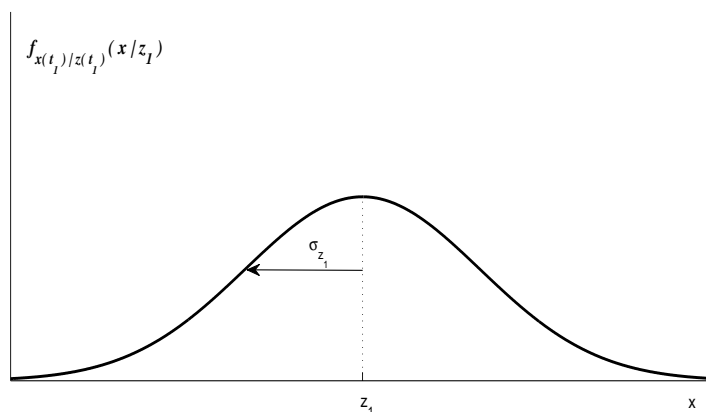
Kým predpoklad bieleho šumu sa vzťahuje na časové alebo frekvenčné vlastnosti šumu, predpoklad normality sa týka jeho amplitúdy. To znamená, že v každom časovom okamihu má šum sledovaného systému funkciu hustoty normálneho (gaussovského) rozdelenia. Zdôvodnenie tohto predpokladu sa zakladá na centrálnej limitnej vete a na predpoklade, že systémový šum je súčtom chýb pochádzajúcich z viacerých zdrojov. Podľa centrálnej limitnej vety konverguje súčet nezávislých náhodných premenných k normálnemu rozdeleniu bez ohľadu na to, aké bolo rozdelenie pôvodných náhodných premenných.<sup>7</sup> Použitie predpokladu normality má tiež praktický význam. Ak prijmeme tento predpoklad

<sup>7</sup>V teórii pravdepodobnosti je známych viacero verzií centrálnej limitnej vety. Myslíme si, že na tomto mieste nie je potrebné uvádzať ich v presnom znení. Išlo nám len o základnú myšlienku zdôvodňujúcu použitie predpokladu normality pre reziduálny systém. V prípade väčšieho záujmu o túto problematiku odkazujeme čitateľa napr. na [15] alebo [16].

a následne odhadneme prvé dva momenty tohto rozdelenia (strednú hodnotu a disperziu), získavame úplný popis štatistického rozdelenia chýb systému, pretože normálne rozdelenie je týmito dvoma parametrami jednoznačne determinované.

## 2.4.2 Ilustračný príklad

Aby sme lepšie pochopili princíp fungovania Kalmanovho filtra, uvedieme jednoduchý príklad prevzatý z [13]. Predstavme si, že sme sa stratili na mori a je noc. Nemáme pritom žiadne tušenie, kde sa nachádzame. Pokúsime sa odhadnúť svoju polohu pomocou hviezd. Pre jednoduchosť budeme uvažovať len jednorozmerný priestor, teda poloha je daná jediným číslom. V čase  $t_1$  určíme svoju vlastnú polohu ako  $z_1$ . Mieru neistoty, ktorú máme voči tomuto odhadu, vyjadríme štandardnou odchýlkou  $\sigma_{z_1}$ . Môžeme teda vytvoriť podmienenú funkciu hustoty svojej polohy v čase  $t_1$ ,  $x(t_1)$ , podmienenej naším odhadom  $z_1$  tak, ako je to znázornené na nasledujúcom obrázku.



Obr. 2.8: Podmienená funkcia hustoty pozície  $x$ , založená na nameranej hodnote  $z_1$ , zdroj: [13]

Na obrázku 2.8 vidíme funkciu  $f_{(x(t_1)|z(t_1))}(x|z_1)$ , ktorá nám vyjadruje rozdelenie pravdepodobnosti našej pozície na mori v čase  $t_1$  danej naším odhadom polohy  $z_1$ . Na základe tejto podmienenej funkcie hustoty je najlepším odhadom našej polohy

$$\hat{x}(t_1) = z_1 \quad (2.12)$$

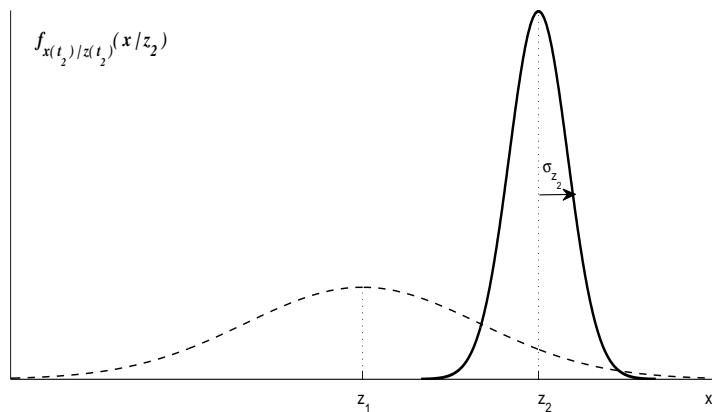
a najlepším odhadom variancie nášho odhadu je

$$\hat{\sigma}_x^2(t_1) = \sigma_{z_1}^2. \quad (2.13)$$

Môžeme si všimnúť, že  $\hat{x}$  je mediánom a zároveň aj strednou hodnotou.

Teraz predpokladajme, že vzápätí po nás spravil odhad našej polohy náš navigátor. Jeho odhad vznikol v čase  $t_2 \cong t_1$  (časový rozdiel medzi  $t_2$  a  $t_1$  je natoľko malý, že skutočná poloha lode sa prakticky nezmenila). Podľa neho je naša poloha  $z_2$  a neistota jeho odhadu je daná štandardnou odchýlkou  $\sigma_2$ . Keďže ide o vyškoleného navigátora, predpokladáme, že jeho odhad je presnejší

ako náš ( $\sigma_2 < \sigma_1$ ). Obrázok 2.9 znázorňuje podmienenú funkciu hustoty našej polohy v čase  $t_2$ , danej odhadom  $z_2$  nášho navigátora.



Obr. 2.9: Podmienená funkcia hustoty pozície  $x$ , založená na nameranej hodnote  $z_2$ , zdroj: [13]

V tejto chvíli teda máme dve nezávislé merania (odhady) našej pozície na mori, pomocou ktorých máme určiť (odhadnúť) našu skutočnú polohu. Otázkou je, ako skombinovať tieto dve merania  $z_1$  a  $z_2$ ? Dá sa ukázať, že za predpokladov, ktoré sme prijali, má naša podmienená poloha v čase  $t_2 \cong t_1$ ,  $x(t_2)$ , daná obidvomi meraniami  $z_1$  a  $z_2$  normálne podmienené rozdelenie so strednou hodnotou  $\mu$  a varianciou  $\sigma^2$ , pričom platí:

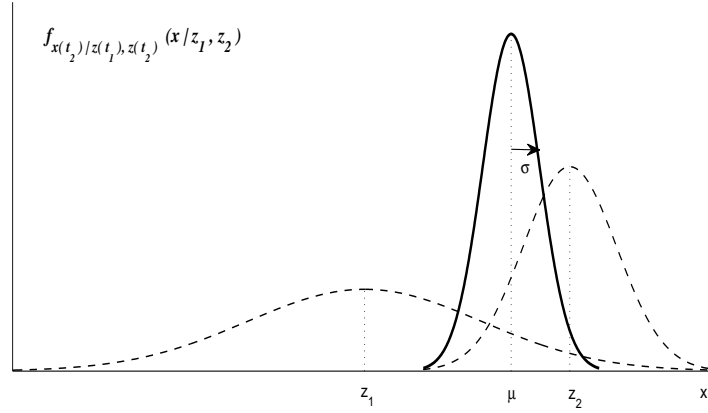
$$\mu = \frac{\sigma_{z_2}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} z_1 + \frac{\sigma_{z_1}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} z_2 \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma_{z_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{z_2}^2} \quad (2.15)$$

Na obrázku 2.10 môžeme vidieť túto funkciu hustoty. Stredná hodnota  $\mu$  je váženým priemerom meraní  $z_1$  a  $z_2$ , pričom váhy závisia od variancií pôvodných meraní. Taktiež si môžeme všimnúť, že z (2.15) vyplýva, že variancia odhadu získaného kombináciou pôvodných meraní ( $\sigma^2$ ) je menšia ako pôvodné variancie  $\sigma_{z_1}^2$  a  $\sigma_{z_2}^2$ . Majúc túto hustotu, najlepším odhadom našej polohy je potom hodnota

$$\hat{x}(t_2) = \mu \quad (2.16)$$

s prislúchajúcou varianciou  $\sigma^2$ . Za daných predpokladov ide o najlepší lineárny nevychýlený odhad (BLUE).



Obr. 2.10: Podmienená funkcia hustoty pozície  $x$ , založená na nameraných hodnotách  $z_1$  a  $z_2$ , zdroj: [13]

Rovnicu pre  $\hat{x}(t_2)$  môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}\hat{x}(t_2) &= \frac{\sigma_{z_2}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} z_1 + \frac{\sigma_{z_1}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} z_2 \\ &= z_1 + \frac{\sigma_{z_1}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} (z_2 - z_1)\end{aligned}\quad (2.17)$$

alebo nakoniec vo forme, ktorá je použitá pri implementácii Kalmanovho filtra (využívajúc vzťah  $\hat{x}(t_1) = z_1$ )

$$\hat{x}(t_2) = \hat{x}(t_1) + K(t_2)[z_2 - \hat{x}(t_1)] \quad (2.18)$$

kde

$$K(t_2) = \frac{\sigma_{z_1}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2}. \quad (2.19)$$

Tieto rovnice hovoria, že optimálny odhad v čase  $t_2$ ,  $\hat{x}(t_2)$ , dostaneme ako predikciu najlepšieho odhadu vykonaného pred získaním pozorovania  $z_2$ , teda  $\hat{x}(t_1)$ , upravenú o korekciu vykonanú na základe rozdielu medzi  $z_2$  a  $\hat{x}(t_1)$ . Je dobré pochopiť túto predikčno-korekčnú štruktúru filtra. Na základe všetkých predchádzajúcich informácií o danej premennej sa vykoná jej predikcia pre nasledujúci časový okamih a následne, keď už máme k dispozícii meranie v tomto časovom okamihu, tak rozdiel medzi týmto meraním a predikciou vykonanou pred jeho získaním je použitý na korekciu samotnej predikcie.

Využívajúc teraz vzťah (2.19), môžeme odhad variancie našej polohy v čase  $t_2$  napísať nasledovne:



$$\begin{aligned}
\sigma_x^2(t_2) &= \sigma^2 = \frac{\sigma_{z_1}^2 \sigma_{z_2}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} \\
&= \sigma_{z_1}^2 \frac{\sigma_{z_2}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} \\
&= \sigma_{z_1}^2 [1 - K(t_2)] \\
&= \sigma_x^2(t_1) - K(t_2) \sigma_x^2(t_1)
\end{aligned}$$

a dostávame teda, že

$$\sigma_x^2(t_2) = \sigma_x^2(t_1) - K(t_2) \sigma_x^2(t_1), \quad (2.20)$$

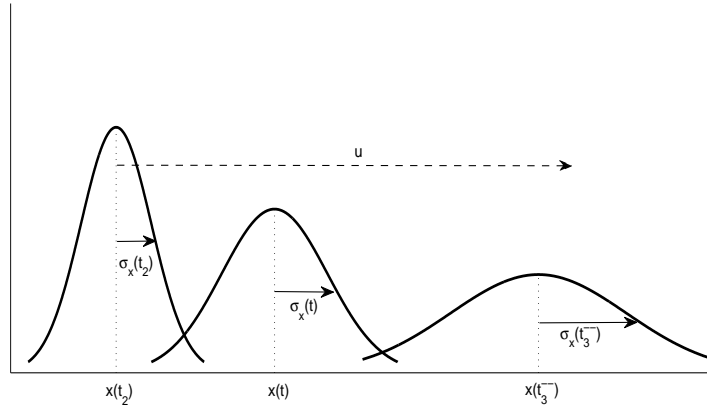
príčom sme využili, že  $\sigma_x^2(t_1) = \sigma_{z_1}^2$  a že  $K(t_2) + \frac{\sigma_{z_2}^2}{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} = 1$ . Môžeme si všimnúť, že hodnoty  $\hat{x}(t_2)$  a  $\sigma_x^2(t_2)$  v sebe nesú úplnú informáciu o podmienenom rozdelení  $f_{x(t_2)|z(t_1), z(t_2)}(x|z_1, z_2)$ . Ináč povedané, týmito dvoma hodnotami je podmienená funkcia hustoty našej polohy jednoznačne a úplne určená.

Doteraz sme riešili problém statického odhadu. Skúsme teraz do tohto problému zahrnúť dynamiku. Predpokladajme teda, že počas odhadovania našej polohy nepretržite cestujeme a že náš pohyb môžeme popísať jednoduchou diferenciálnou rovnicou v tvare

$$\frac{dx}{dt} = u + w \quad (2.21)$$

kde  $u$  predstavuje priemernú rýchlosť a  $w$  je náhodná premenná reprezentujúca rôzne šoky, nepresnosti, chyby a podobne. Táto náhodná premenná bude modelovaná ako biely gaussovský šum so strednou hodnotou 0 a disperziou  $\sigma_w^2$ .

Obrázok 2.11 znázorňuje, čo sa deje s podmienenou funkciou hustoty premennej  $x(t)$ , danej napozorovanými hodnotami  $z_1$  a  $z_2$  s meniacim sa časom.



Obr. 2.11: Podmienená funkcia hustoty pozície  $x$ , meniaci sa v čase, zdroj: [13]

V čase  $t_2$  je situácia taká, ako sme pred chvíľou odvodili. Postupne, ako čas plynie a my sa s našou loďou pohybujeme, posúva sa funkcia hustoty v

smere  $x$ -ovej osi priemernou rýchlosťou  $u$  a zároveň sa vplyvom variancie  $\sigma_w^2$  zväčšuje neistota o našej skutočnej polohe. Ďalej označme symbolom  $t_3^-$  čas tesne pred vykonaním tretieho merania. Funkcia podmienenej hustoty v tomto čase,  $f_{x(t_3^-)|z(t_1),z(t_2)}(x|z_1, z_2)$  (k dispozícii máme stále iba odhady  $z_1$  a  $z_2$ ) je na obrázku 2.11 úplne vpravo. Znova ide o hustotu normálneho rozdelenia s parametrami:

$$\hat{x}(t_3^-) = \hat{x}(t_2) + u[t_3^- - t_2] \quad (2.22)$$

$$\sigma_x^2(t_3^-) = \sigma_x^2(t_2) + \sigma_w^2[t_3^- - t_2] \quad (2.23)$$

Takže  $\hat{x}(t_3^-)$  je optimálnym prediktorom premennej  $x(t)$  v čase  $t_3^-$ , tesne pred uskutočnením merania v čase  $t_3$ . Analogicky,  $\sigma_x^2(t_3^-)$  je očakávanou disperziou tohto odhadu.

Následne sa vykoná odhad polohy pre čas  $t_3$  a jeho hodnota nech je  $z_3$  s tomu prislúchajúcou varianciou  $\sigma_{z_3}^2$ . Tak ako predtým, aj teraz máme k dispozícii dve gaussovské hustoty, ktoré nám dávajú istú informáciu o našej polohe. Jedna sumarizuje všetky predchádzajúce merania a tá druhá reprezentuje samotné najnovšie meranie. Rovnakým postupom ako pred chvíľou, skombinujeme tieto dve hustoty normálneho rozdelenia a získame tak ďalšiu podmienenú funkciu hustoty, tentokrát už podmienenú napozorovanými hodnotami  $z_1, z_2$  a  $z_3$ . Ide teda o funkciu hustoty normálneho rozdelenia so strednou hodnotou

$$\hat{x}(t_3) = \hat{x}(t_3^-) + K(t_3)[z_3 - \hat{x}(t_3^-)] \quad (2.24)$$

a varianciou

$$\sigma_x^2(t_3) = \sigma_x^2(t_3^-) + K(t_3)\sigma_x^2(t_3^-) \quad (2.25)$$

kde  $K(t_3)$  je dané vzťahom

$$K(t_3) = \frac{\sigma_x^2(t_3^-)}{\sigma_x^2(t_3^-) + \sigma_{z_3}^2} \quad (2.26)$$

Na tomto mieste si ešte môžeme všimnúť niektoré skutočnosti, ktoré sú možno intuitívne jasné. Z výrazu (2.26) vyplýva, že ak je variancia najnovšieho odhadu,  $\sigma_{z_3}^2$  príliš veľká, tak hodnota  $K(t_3)$  klesá. To potom znamená, že vo výraze (2.24) prikladáme korekciu na základe posledného merania nižšiu váhu. Jednoducho povedané, čím je variancia daného odhadu vyššia, tým menšiu váhu pripisujeme tomuto odhadu. Ak v limite  $\sigma_{z_3}^2 \rightarrow \infty$ , tak  $K(t_3)$  sa blíži k nule a  $\hat{x}(t_3) = \hat{x}(t_3^-)$ . To znamená, že meranie  $z_3$  úplne ignorujeme. Ďalej si môžeme všimnúť, že ak rastie hodnota variancie šumu nášho dynamického systému, teda premenná  $\sigma_w^2$ , tak podľa výrazu (2.23) rastie aj hodnota  $\sigma_x^2(t_3^-)$  a následne aj hodnota  $K(t_3)$  [pozri (2.26)]. Limitne platí

$$\sigma_w^2 \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma_x^2(t_3^-) \rightarrow \infty \Rightarrow K(t_3) \rightarrow 1$$

a odtiaľ pre výraz (2.24) dostávame

$$\hat{x}(t_3) = \hat{x}(t_3^-) + 1 * [z_3 - \hat{x}(t_3^-)] = z_3 \quad (2.27)$$

V tomto prípade kvôli rýchlo narastajúcej neistote ohľadom starších meraní ich teda úplne odignorujeme a za optimálny odhad súčasnej pozície považujeme najnovšie meranie.

Rozšírenie rovníc (2.22) a (2.23) pre vektorový prípad a pripustenie časovo premenlivých parametrov pri popise systému vedie k všeobecnému algoritmu Kalmanovho filtra pre konštrukciu podmienených funkcií hustoty a následne vykonávania optimálneho odhadu na základe predchádzajúcich pozorovaní. Ďalšími rozšíreniami sú pripustenie nelinearity v modeli, riadenie systému popísané pomocou stochastických rovníc a prípad, kedy parametre modelu nie sú známe s úplnou istotou.

### 2.4.3 Kalmanov filter v prípade viacrozmerých premenných

V práci Welcha a Bishopa [12] môžeme nájsť podobné odvodenie Kalmanovho filtra pre viacrozmerné premenné. Vo všeobecnosti Kalmanov filter rieši problém odhadu stavového vektora  $x \in R^n$  diskrétného procesu, ktorý je určený lineárnou stochastickou diferencnou rovnicou

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \quad (2.28)$$

pričom stavovú premennú odhadujeme pomocou vektora (nameraných, alebo tiež pozorovateľných) veličín  $z \in R^m$ , kde

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (2.29)$$

Výraz (2.28) predstavuje maticový zápis tzv. stavových rovníc (state equations), podobne výraz (2.29) predstavuje maticový zápis tzv. signálnych rovníc (signal equations).<sup>8</sup>

Náhodné premenné  $w_k$  a  $v_k$  predstavujú tzv. chybové členy rovníc (2.28) a (2.29). Predpokladáme o nich, že sú navzájom nezávislé a že platí:

$$w \sim N(0, Q) \quad (2.30)$$

$$v \sim N(0, R). \quad (2.31)$$

Matica  $A_{n \times n}$  udáva, v akom vzťahu je stavová premenná  $x$  z predchádzajúceho časového kroku k jej aktuálnemu stavu. Vo všeobecnosti by matica  $A$  mohla závisieť od času, ale pre jednoduchosť budeme predpokladať, že je v čase konštantná. Matica  $B_{n \times l}$  prepája riadiacu, alebo kontrolnú premennú  $u \in R^l$  so stavovou premennou  $x$ . Aj táto matica by mohla vo všeobecnosti závisieť od času. Matica  $H_{m \times n}$  z rovnice (2.29) vyjadruje vzťah medzi stavovou (niekedy ju budeme nazývať aj nepozorovateľnou - unobserved) premennou a vektorom nameraných hodnôt v príslušnom časovom kroku. Rovnako ako matice  $A$  a  $B$ , tak aj matica  $H$  by mohla byť vo všeobecnosti závislá od času.

Zadefinujme si teraz premennú  $\hat{x}_k^- \in R^n$  ako apriórny odhad stavovej premennej  $x$  v časovom kroku  $k$ . To znamená, že tento odhad je vykonaný ešte predtým, ako je známy vektor meraní  $z_k$ . Podobne premenná  $\hat{x}_k \in R^n$  bude posteriornym odhadom premennej  $x$ , teda bude zohľadňovať už aj vektor  $z_k$ . Ďalej si podobným spôsobom zdefinujeme apriórny a posteriorný vektor chýb (reziduálov):

$$e_k^- \equiv x_k - \hat{x}_k^-$$

<sup>8</sup>V anglickej literatúre, z ktorej sme čerpali, sa pre signálne rovnice používa tiež výraz *observation equations* (pozri napr. [17]).

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k.$$

Kovariančné matice prislúchajúce k týmto náhodným vektorom označíme  $P_k^-$  a  $P_k$ , teda platí

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] \text{ a} \quad (2.32)$$

$$P_k = E[e_k e_k^T]. \quad (2.33)$$

Pri odvodzovaní rovníc Kalmanovho filtra začínajú Welch a Bishop [12] tým, že posteriórny odhad stavovej premennej  $\hat{x}_k$  vyjadria ako lineárnu kombináciu apriórneho odhadu,  $\hat{x}_k^-$  a rozdielu medzi skutočnou hodnotou meraní  $z_k$  a jeho apriórnym odhadom, teda  $H\hat{x}_k^-$  ako to vidíme v rovnici (2.34).

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (2.34)$$

Člen  $(z_k - H\hat{x}_k^-)$  nazývame korektor a plní rovnaku funkciu ako korektor v rovnici (2.18) z ilustračného príkladu. Všimnime si, že keďže v ilustračnom príklade premenná  $z$  priamo odhadovala stavovú premennú  $x$ , mali sme  $H = 1$ . Matica  $K_{m \times n}$  z rovnice (2.34) sa zvolí tak, aby sa minimalizovala posteriórna kovariančná matica reziduálov,  $P_k$ . Postupne odvodíme, čomu sa matica  $K$  rovná.

$$\begin{aligned} \min_K \{P_k\} &= \min_K \{E[e_k e_k^T]\} \\ &= \min_K \{E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T]\} \\ &= \min_K \{E[(x_k - \hat{x}_k^- - K(z_k - H\hat{x}_k^-))(x_k - \hat{x}_k^- - K(z_k - H\hat{x}_k^-))^T]\} \\ &= \min_K \{E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T - 2(x_k - \hat{x}_k^-)(z_k - H\hat{x}_k^-)^T K^T + \\ &\quad + K(z_k - H\hat{x}_k^-)(z_k - H\hat{x}_k^-)^T K^T]\} \end{aligned}$$

Keď posledný výraz zderivujeme maticovo podľa  $K$  a položíme rovný nule, tak dostaneme:

$$\begin{aligned} E[-2(x_k - \hat{x}_k^-)(z_k - H\hat{x}_k^-)^T + 2K(z_k - H\hat{x}_k^-)(z_k - H\hat{x}_k^-)^T] &= 0 \\ E[-(x_k - \hat{x}_k^-)(Hx_k + v_k - H\hat{x}_k^-)^T + K(Hx_k + v_k - H\hat{x}_k^-)(Hx_k + v_k - H\hat{x}_k^-)^T] &= 0 \\ E[-(x_k - \hat{x}_k^-)(H(x_k - \hat{x}_k^-) + v_k)^T + K(H(x_k - \hat{x}_k^-) + v_k)(H(x_k - \hat{x}_k^-) + v_k)^T] &= 0 \\ E[-e_k^- (He_k^- + v_k)^T + K(He_k^- + v_k)(He_k^- + v_k)^T] &= 0 \\ E[-e_k^- e_k^{-T} H^T - e_k^- v_k^T + K(He_k^- e_k^{-T} H^T + v_k e_k^{-T} H^T + v_k v_k^T)] &= 0 \\ -P_k^- H^T + K(HP_k^- H^T + R) &= 0 \end{aligned}$$

a odtiaľ už dostávame, že

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (2.35)$$

### Algoritmus diskrétného Kalmanovho filtra

Kalmanov filter odhaduje proces formou spätnej väzby. Rovnice filtra môžeme rozdeliť na dve skupiny. Tou prvou skupinou sú tzv. time update rovnice. Týmto rovnicami sa často hovorí aj prediktory. Používajú sa na apriórny odhad stavovej premennej a kovariančnej matice vektora reziduálov pre budúci časový krok na základe hodnôt z predchádzajúceho časového kroku. Druhou skupinou rovníc sú

tzv. measurement update rovnice, alebo tiež korektory. Tieto rovnice vytvárajú spätnú väzbu. Na základe nových meraní korigujú apriórne odhady a vytvárajú tak vylepšené posteriórne odhady. Na základe toho sa potom tento algoritmus označuje aj ako algoritmus typu prediktor-korektor.

**Rovnice typu prediktor:**

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (2.36)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (2.37)$$

**Rovnice typu korektor:**

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (2.38)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (2.39)$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad (2.40)$$

Algoritmus teda funguje tak, že najprv sa pomocou predikčných rovníc vypočítajú apriórne hodnoty pre stavovú premennú a kovariančnú maticu pre nasledujúci časový krok, teda  $\hat{x}_k^-$  a  $P_k^-$ . Ďalej sa pre tento časový krok vypočíta hodnota  $K_k$  podľa výrazu (2.38) a potom pomocou toho a pomocou nových meraní  $z_k$  sa vykonajú korekcie apriórnych odhadov, a tak vzniknú posteriórne odhady pre časový okamih  $k$ .

## Kapitola 3

# Odhad produkčných medzier pre vybrané krajiny

V tejto kapitole použijeme metódy, ktoré sme popísali v predchádzajúcej časti, aby sme na konkrétnych dátach odhadli potenciálny produkt a produkčnú medzeru pre vybrané krajiny. Okrem Slovenska, ktoré nás prirodzene zaujíma najviac, sme vybrali ešte Českú republiku a Nemecko ako najväčších obchodných partnerov Slovenska.

V roku 2010 sa na dovoze Slovenska podieľalo Nemecko až 15.83 %-ami a Česká republika 10.24 %-ami. Čo sa týka vývozu, tak až 19.25 % z celkovej hodnoty slovenského exportu smerovalo do Nemecka a 13.7 % do Česka. Poradie na niekoľkých ďalších miestach môžeme vidieť v tabuľke 3.1.

Tabuľka 3.1: Teritoriálna štruktúra zahraničného obchodu Slovenska za rok 2010

Dovoz		Vývoz	
Nemecko	15.83 %	Nemecko	19.25 %
Česká republika	10.24 %	Česká republika	13.70 %
Ruská federácia	9.81 %	Poľsko	7.31 %
Kórejská republika	7.98 %	Francúzsko	6.84 %
Čína	6.14 %	Rakúsko	6.78 %
Maďarsko	4.31 %	Maďarsko	6.65 %

*Zdroj: ŠÚ SR*

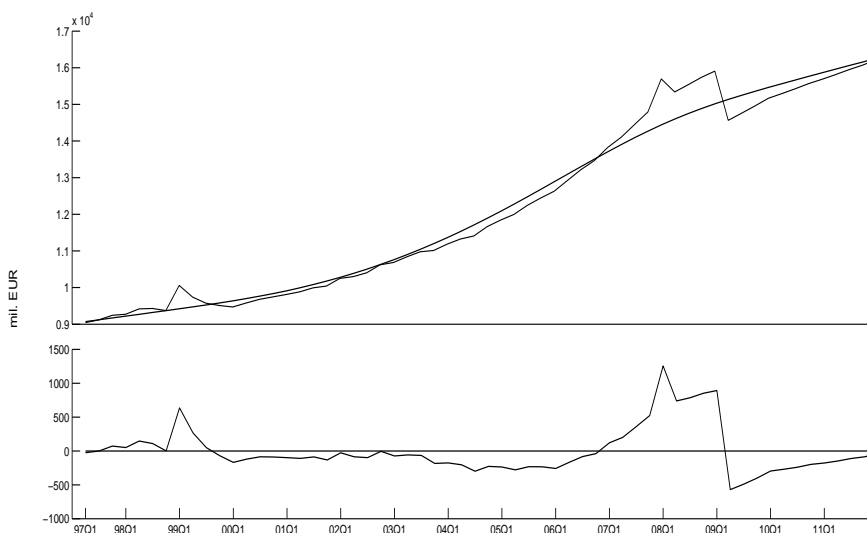
V súčasnosti a hlavne v prípade tak otvorených krajín, ako je aj Slovensko, je dôležité sledovať vývoj ekonomiky v širšom kontexte, vo väzbe na zahraničie a krajiny, ktorých vývoj ovplyvňuje aj dianie v domácej ekonomike. Zároveň tieto krajiny boli vybrané aj na základe dostupnosti dát, pretože údaje o nich sú taktiež súčasťou databázy Eurostatu na rozdiel od Ruskej federácie, ktorá je tretím najväčším dodávateľom Slovenska. Rovnako to platí aj o Kórejskej republike alebo Číne.

Mohli by sme vybrať možno ešte niektoré ďalšie krajiny strednej a východnej Európy, ale ide nám predovšetkým o prezentáciu metodológie v danej oblasti

a taktiež nechceme, aby sa práca kvôli veľkému počtu sledovaných krajín stala neprehľadnou.

### 3.1 Hodrick-Prescottov filter

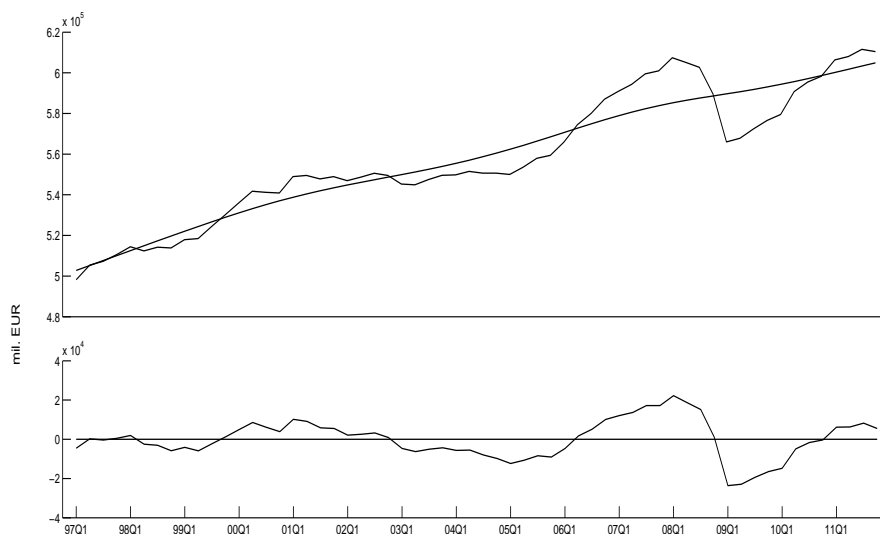
Údaje pre túto časť práce sme získali z databázy Eurostatu. Za výstup ekonomiky považujeme reálny hrubý domáci produkt. Konkrétne sme použili údaje o sezónne upravenom hrubom domácom produkte v stálych cenách roku 2005 v miliónoch jednotiek domácej meny. Na základe dostupnosti sme použili časové rady od 1. štvrťroku 1997 po 4. štvrťrok 2011. Keďže ide o kvartálne dáta, použili sme Hodrick-Prescottov filter s parametrom  $\lambda = 1600$ .



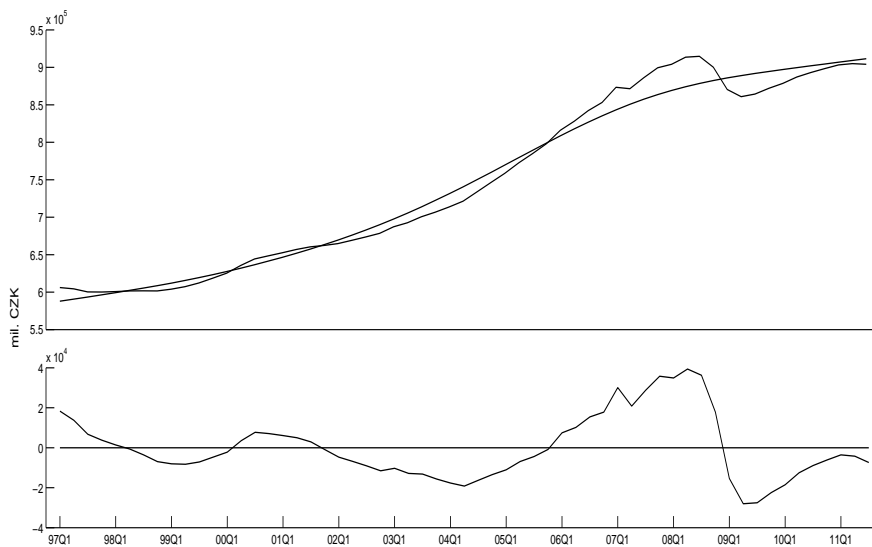
Obr. 3.1: Odhad potenciálneho produktu a produkčnej medzery Slovenska pomocou HP filtra ( $\lambda = 1600$ ), zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.

V hornej časti obrázka 3.1 vidíme vývoj sezónne očisteného reálneho HDP Slovenska spolu s trendovou čiarou odhadnutou pomocou HP filtra. Ako sme už v 2. kapitole spomínali, tento trend budeme považovať za potenciálny produkt, okolo ktorého kolíše skutočný výstup ekonomiky. V spodnej časti grafu je potom cyklická zložka (produkčná medzera) vypočítaná ako rozdiel medzi skutočným a potenciálnym produktom.

Rovnaký postup sme použili i v prípade Nemecka a Českej republiky a výsledok môžeme vidieť na obrázkoch 3.2 a 3.3.



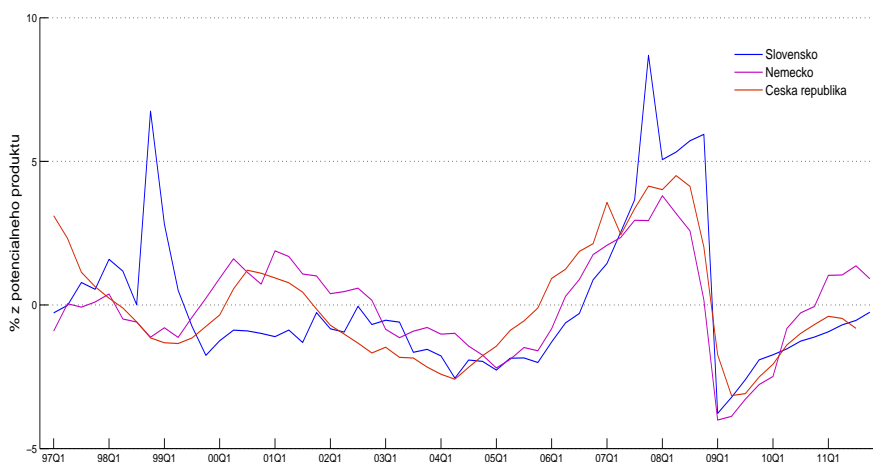
Obr. 3.2: Odhad potenciálneho produktu a produkčnej medzery Nemecka pomocou HP filtra ( $\lambda = 1600$ ), zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.



Obr. 3.3: Odhad potenciálneho produktu a produkčnej medzery Českej republiky pomocou HP filtra ( $\lambda = 1600$ ), zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.



Predchádzajúcimi výpočtami sme vyčíslili produkčnú medzeru v absolútnom vyjadrení. Aby sme mohli porovnať vývoj produkčnej medzery vo všetkých troch krajinách súčasne, vypočítame ešte produkčnú medzeru v percentách z potenciálneho produktu. Výsledok môžeme vidieť na obrázku 3.4.



Obr. 3.4: Odhad potenciálneho produktu a produkčnej medzery pre všetky sledované krajiny pomocou HP filtra ( $\lambda = 1600$ ), zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.

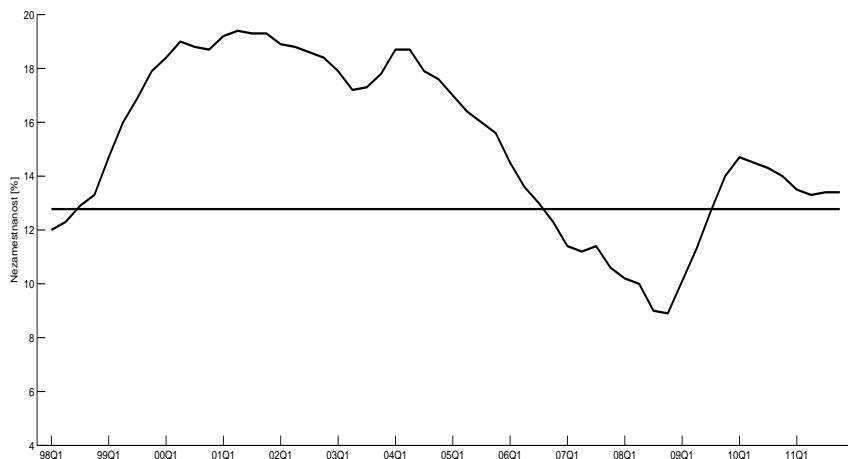
Aj na základe tohto obrázka sa potvrdzuje hypotéza o vzájomnej prepojenosti ekonomík. Vo všetkých troch krajinách dochádzalo v roku 2007 a v prvej polovici roku 2008 k výraznejšiemu prehrievaniu ekonomiky. V druhej polovici roku 2008 začali všetky tri ekonomiky prudko klesať, až sa začiatkom roka 2009 dostali pod svoj potenciálny výstup. V závere sledovaného obdobia sa len Nemecko dostalo podľa tejto metódy nad svoj potenciál. Keďže však ide o vedúcu ekonomiku celého tohto regiónu, dá sa očakávať, že v najbližšom období môže jej rast spôsobiť rast aj ostatných ekonomík.

## 3.2 Koncept NAIRU

V tejto podkapitole použijeme postup odvodený v podkapitole 2.4 a odhadneme konštantnú ako aj meniacu sa hodnotu NAIRU pre všetky tri sledované krajiny. Údaje o nezamestnanosti a inflácii, ktoré sú potrebné pre tento odhad, pochádzajú z Eurostatu. V prípade inflácie ide o harmonizovaný index spotrebiteľských cien, pričom sme medzimesačné zmeny prepočítali na medzištvrtročné jednoduchým sčítaním. V prípade nezamestnanosti sme použili ukazovateľ miery nezamestnanosti podľa výberového zisťovania pracovných síl (VZPS). Odchýlky skutočnej nezamestnanosti od NAIRU budeme považovať za produkčnú medzeru. Ak sa skutočná hodnota nezamestnanosti nachádza pod hodnotou NAIRU, ide o prehrievanie ekonomiky, a naopak.

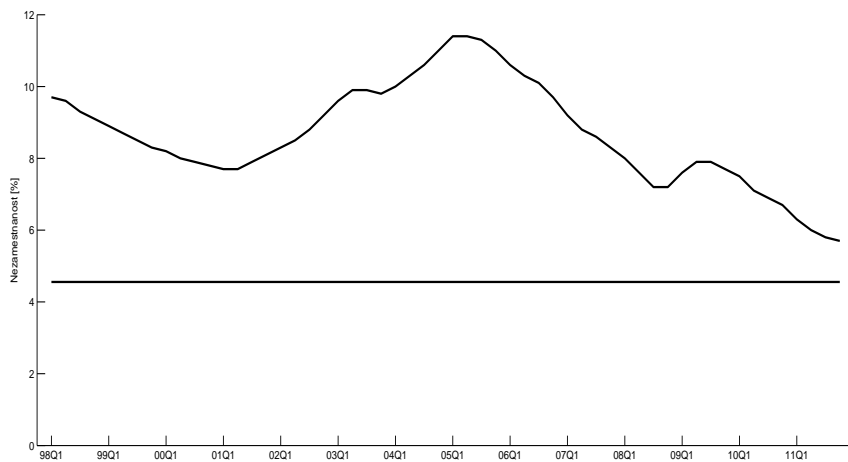
Na obrázku 3.5 vidíme, že podľa tejto metodiky sa slovenská ekonomika nachádzala od roku 1998 pod svojím potenciálom. Nad svoju potenciálnu úroveň

sa dostala až niekedy v polovici roka 2006, kedy sa začala na Slovensku uplatňovať výrazne expanzívna fiškálna politika a skutočná nezamestnanosť klesla pod nami odhadnutú hodnotu NAIRU. Vplyvom svetovej hospodárskej krízy sa pokles nezamestnanosti koncom roka 2008 zastavil. Nezamestnanosť začala rásť a v priebehu roka 2009 sa znova dostala nad svoju prirodzenú úroveň.



Obr. 3.5: Odhad produkčnej medzery Slovenska pomocou konceptu NAIRU, zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.

Na obrázku 3.6 je zobrazená skutočná nezamestnanosť a nami odhadnutá hodnota NAIRU pre Nemecko. Výsledok je pomerne prekvapivý, pretože by to znamenalo, že nemecká ekonomika sa počas celého sledovaného obdobia (1998 - 2011) nachádzala hlboko pod svojim potenciálom. Hodnota NAIRU pre Nemecko vyšla pomerne nízka, a to iba 4.56 %. Dôvod je ten, že táto metóda predpokladá, že nezamestnanosť a zmeny inflácie spolu výrazne korelujú. Pri regresiach, ktoré sme vykonali a ktoré sú súčasťou výpočtu NAIRU sa však tento vzťah nepotvrdil. Výsledky týchto regresíí pre všetky krajiny môžeme vidieť v dodatku B. Keďže sa nezamietla hypotéza, že hodnota regresného koeficientu je nula, jeho ďalšie používanie je problematické. Zároveň to, že sa na týchto dátach nepotvrdil vzťah medzi nezamestnanosťou a infláciou považujeme za hlavný a pomerne významný nedostatok použitia tejto metódy.



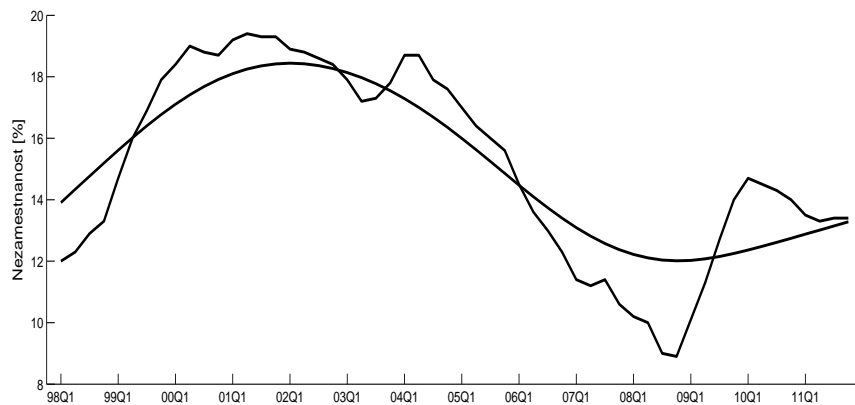
Obr. 3.6: Odhad produkčnej medzery Nemecka pomocou konceptu NAIRU, zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.

Pre Českú republiku dostávame výsledok, ktorý je viac v zhode s očakávaniami ako v prípade Nemecka. Rovnako sa však nepotvrdil vzťah medzi nezamestnanosťou a infláciou (pozri dodatok B). Preto takto získaný výsledok nepovažujeme za dostatočne presvedčivý. V tejto situácii preto považujeme za lepší postup použitie Hodrick-Prescottovho filtra, ktorým odhadneme NAIRU závislú od času.

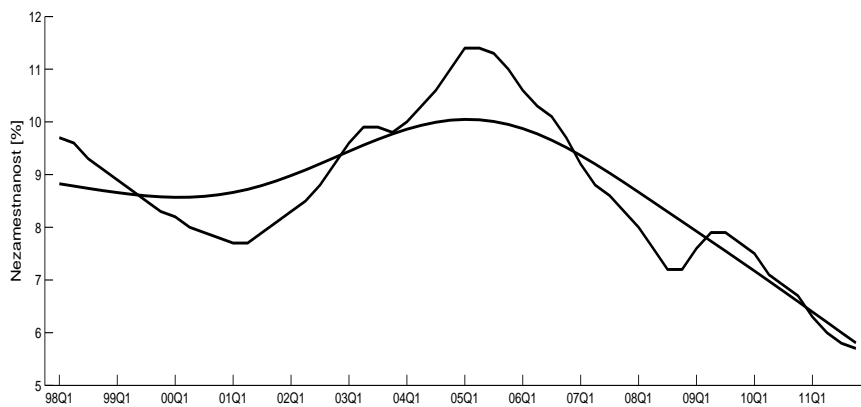


Obr. 3.7: Odhad produkčnej medzery pre Českú republiku pomocou konceptu NAIRU, zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.

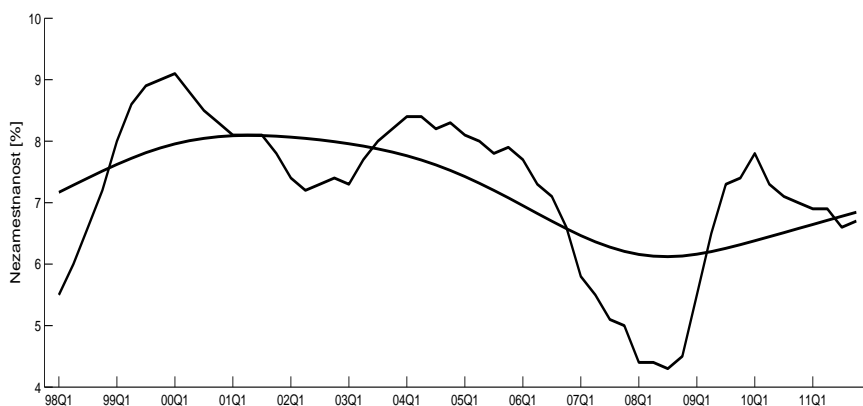
Na nasledujúcich obrázkoch vidíme odhad NAIRU pomocou HP filtra pre všetky tri krajiny a nakoniec porovnanie produkčných medzier pre jednotlivé krajiny.



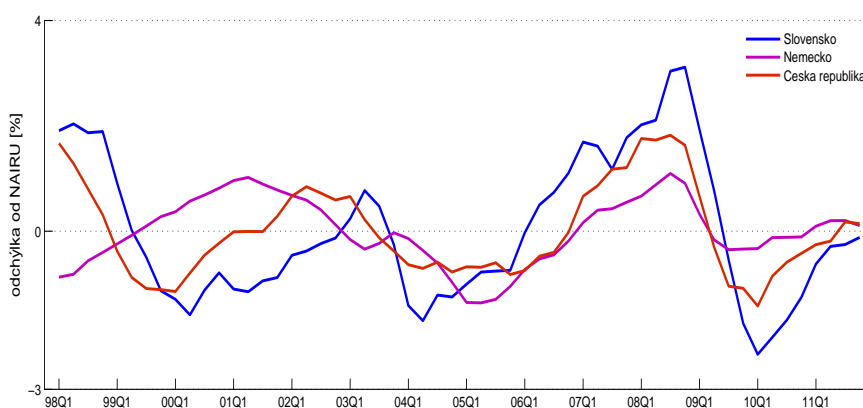
Obr. 3.8: Odhad NAIRU pre Slovensko pomocou HP filtra ( $\lambda = 1600$ ), zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.



Obr. 3.9: Odhad NAIRU pre Nemecko pomocou HP filtra ( $\lambda = 1600$ ), zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.



Obr. 3.10: Odhad NAIRU pre Českú republiku pomocou HP filtra ( $\lambda = 1600$ ), zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.



Obr. 3.11: Porovnanie produkčných medzier odhadnutých pre všetky tri krajiny pomocou NAIRU meniacej sa v čase, zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.

Na obrázku 3.11 je znázornený vývoj produkčných medzier pre všetky tri sledované krajiny. Tento odhad je založený na koncepte NAIRU, ktorá je odhadnutá pomocou HP filtra. Tieto výsledky sú trochu odlišné od tých, ktoré sme videli na obrázku 3.4. Spoločným znakom pre obe metódy je to, že prepadu ekonomík predchádzalo ich prehrievanie, a to vo všetkých troch krajinách. Rozdiel spočíva hlavne v načasovaní a je zrejme spôsobený oneskorenou reakciou nezamestnanosti v porovnaní s ostatnými ekonomickými fundamentmi.

### 3.3 Kalmanov filter

V tejto časti použijeme na odhad potenciálneho produktu a produkčnej medzery Kalmanov filter, ktorého princíp sme popísali v podkapitole 2.4. Tzv. unobserved variables, čo v našom prípade sú práve potenciálny output a produkčná medzera, budú odhadované spolu s parametrami dynamického modelu simultánne ako systém viacerých rovníc. Pri špecifikácii rovníc sme sa inšpirovali prácou Konukiho [10] a po určitej modifikácii sme použili nasledujúci systém rovníc:

$$y_t = \bar{y}_t + ygap_t \quad (3.1)$$

$$\bar{y}_t = \bar{y}_{t-1} + \mu_{t-1} + \epsilon_t^{\bar{y}} \quad (3.2)$$

$$\mu_t = \beta\mu_{t-1} + (1 - \beta)\bar{\mu} + \epsilon_t^{\mu} \quad (3.3)$$

$$ygap_t = \alpha ygap_{t-1} + \epsilon_t^{ygap} \quad (3.4)$$

a maticovo (podobne, ako tomu bolo vo výraze (2.28)) môžeme stavové rovnice zapísať takto:

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_t \\ \mu_t \\ ygap_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_{t-1} \\ \mu_{t-1} \\ ygap_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - \beta)\bar{\mu} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_t^{\bar{y}} \\ \epsilon_t^{\mu} \\ \epsilon_t^{ygap} \end{pmatrix}$$

príčom signálnu rovnicu tu máme len jednu, a to (3.1).

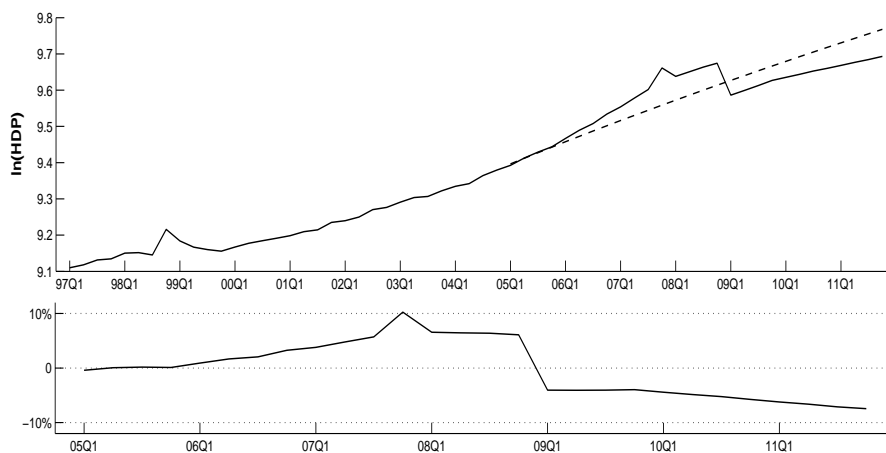
V týchto rovniciach symbol  $y$  predstavuje logaritmus reálneho štvrťročného HDP,  $\bar{y}$  predstavuje logaritmus potenciálneho produktu,  $ygap$  je produkčná medzera a  $\mu$  predstavuje štvrťročné tempo rastu potenciálneho produktu.

Rovnica (3.1) je rovnicou identity, teda neobsahuje náhodný člen. Hovorí, že skutočný produkt je súčtom potenciálneho produktu a produkčnej medzery. Takto definované  $ygap$  je teda percentuálnou odchýlkou potenciálneho produktu od skutočného produktu.

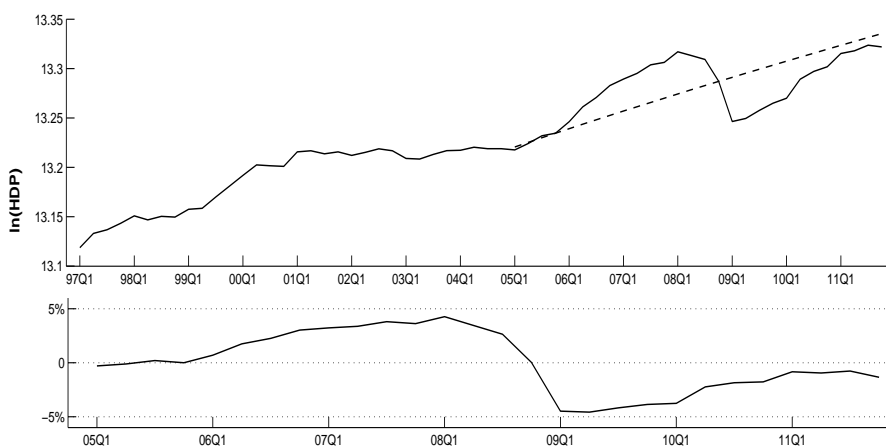
Rovnica (3.2) modeluje potenciálny produkt ako náhodnú prechádzku (random walk) s časovo premenlivým driftom  $\mu$ .

Podľa rovnice (3.3) sleduje štvrťročné tempo rastu potenciálneho produktu autoregresný proces prvého rádu, AR(1), smerujúci z dlhodobého hľadiska k svojmu steady state (mean reverting process). Ten je v našom prípade daný ako priemerné tempo rastu za celé sledované obdobie. Podobne aj rovnica (3.4) modeluje produkčnú medzeru ako autoregresný proces prvého rádu. Dôležitý je tiež predpoklad, že všetky náhodné členy  $\epsilon^{\bar{y}}$ ,  $\epsilon^{\mu}$  a  $\epsilon^{ygap}$  sú nezávislé a rovnako rozdelené z normálneho rozdelenia a bez prítomnosti autokorelácie.

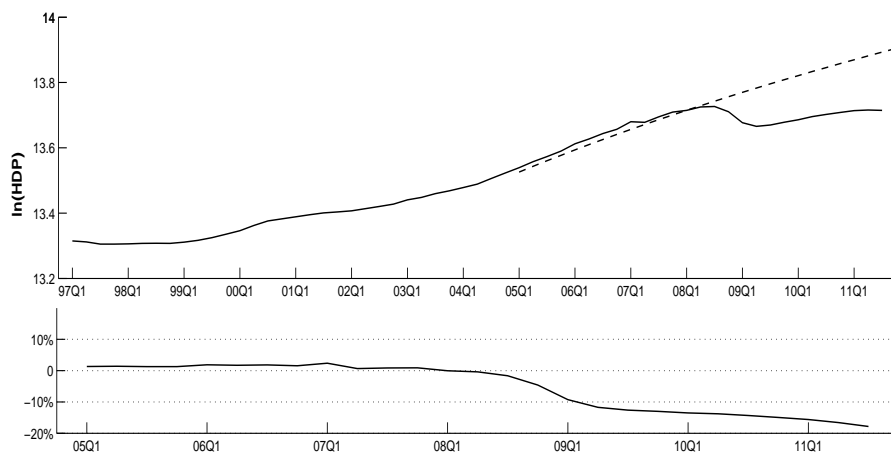
Pomocou týchto rovníc sme odhadli potenciálny produkt pre všetky tri sledované krajiny a príslušné výstupy sa nachádzajú v prílohe ako Dodatok C. Na nasledujúcich obrázkoch teda môžeme vidieť skutočné hodnoty štvrťročného reálneho HDP po zlogaritmovaní, trendovú zložku odhadnutú pomocou Kalmanovho filtra od roku 2005 a v spodnej časti obrázkov produkčnú medzeru.



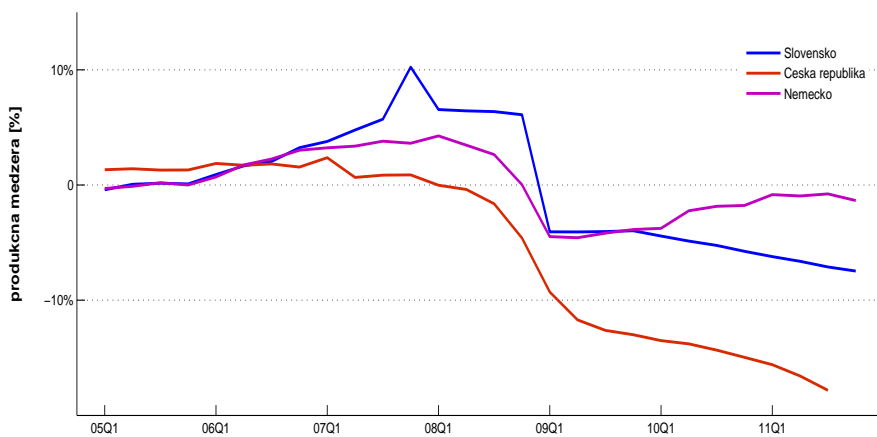
Obr. 3.12: V hornej časti sú plnou čiarou zobrazené skutočné dáta logaritmu štvrtročného reálneho HDP pre Slovensko v Eurách za obdobie 1997 Q1 - 2011 Q4 a prerušovanou čiarou logaritmus potenciálneho HDP vypočítaný pomocou Kalmanovho filtra od roku 2005. V spodnej časti je znázornená produkčná medzera v percentuálnom vyjadrení z potenciálneho produktu za obdobie 2005 Q1 až 2011 Q4, zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.



Obr. 3.13: V hornej časti sú plnou čiarou zobrazené skutočné dáta logaritmu štvrtročného reálneho HDP pre Nemecko v Eurách za obdobie 1997 Q1 - 2011 Q4 a prerušovanou čiarou logaritmus potenciálneho HDP vypočítaný pomocou Kalmanovho filtra od roku 2005. V spodnej časti je znázornená produkčná medzera v percentuálnom vyjadrení z potenciálneho produktu za obdobie 2005 Q1 až 2011 Q4, zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.



Obr. 3.14: V hornej časti sú plnou čiarou zobrazené skutočné dáta logaritmu štvrtročného reálneho HDP pre Českú republiku v Českých korunách za obdobie 1997 Q1 - 2011 Q3 a prerušovanou čiarou logaritmus potenciálneho HDP vypočítaný pomocou Kalmanovho filtra od roku 2005. V spodnej časti je znázornená produkčná medzera v percentuálnom vyjadrení z potenciálneho produktu za obdobie 2005 Q1 až 2011 Q3, zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.



Obr. 3.15: Porovnanie produkčných medzier odhadnutých pre všetky tri krajiny pomocou Kalmanovho filtra, zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.

V porovnaní s predchádzajúcimi metódami, dostávame v tomto prípade kvalitatívne trochu odlišné výsledky. Môžeme napríklad vidieť, že na konci sledovaného obdobia (2011 Q4) sa všetky tri krajiny nachádzajú pod svojim potenciálom, čo predtým aspoň o Nemecku neplatilo. Taktiež podľa tejto metódy sa ekonomiky dostali do recesie o niečo skôr ako podľa predchádzajúcich metód, čo zrejme viac korešponduje s pozorovanou realitou. Pred recesiou dochádzalo k výraznejšiemu prehrievaniu ekonomík iba v prípade Slovenska a Nemecka,

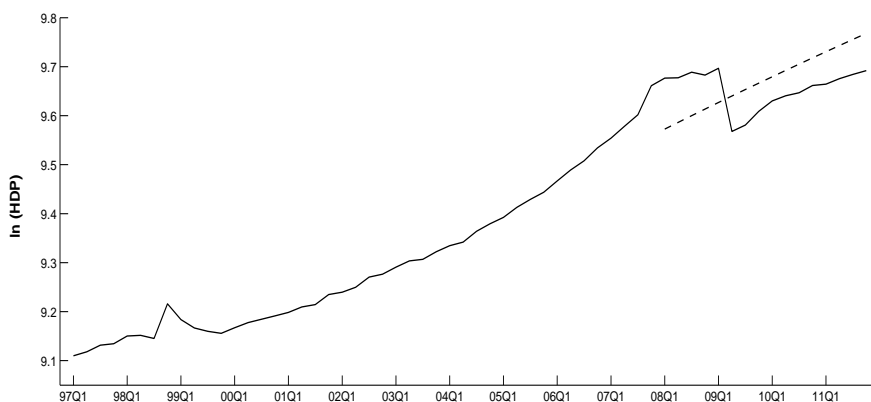


čo tiež predstavuje rozdiel oproti predchádzajúcim metódam, ktoré naznačovali prehrievanie ekonomiky pred krízou aj v prípade Českej republiky.

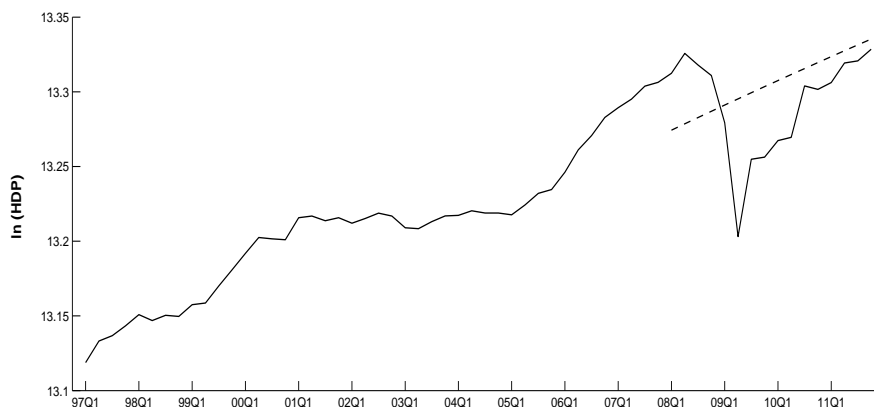
### 3.3.1 Prognóza produkčnej medzery pomocou Kalmanovho filtra

Ako sme už spomínali pri teoretickom odvodení Kalmanovho filtra, táto metóda je rekurzívna. To znamená, že na výpočet hodnôt v nasledujúcom kroku využíva len hodnoty z bezprostredne predchádzajúceho kroku. To robí túto metódu výpočtovo nenáročnou, pretože nepracuje naraz s celými časovými radmi. Z tohto dôvodu tiež predstavuje dobrý nástroj pre realizáciu jednokrokových prognóz.

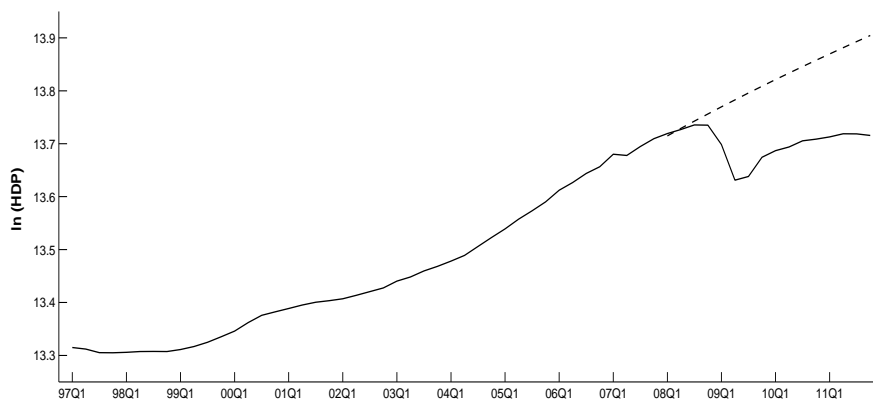
V tejto časti spravíme prognózu produkčnej medzery pre všetky sledované krajiny. Skutočný produkt budeme modelovať a prognózovať pomocou ARIMA modelov a potenciálny produkt pomocou Kalmanovho filtra. Zameriame sa len na krízové obdobie, ktoré sme si vymedzili od roku 2008. Postup je taký, že sme vzali najprv iba údaje po štvrtý kvartál roku 2007. Pomocou nich sme odhadli vhodný ARIMA model pre skutočné HDP a následne spravili jednokrokovú projekciu, teda pre prvý kvartál roku 2008. Potom sme k časovému radu pripojili aj skutočný údaj o HDP za prvý kvartál roku 2008 a znova odhadli nový ARIMA model, pomocou ktorého sme potom spravili znova jednokrokovú projekciu pre druhý kvartál roku 2008. Podobne sme postupovali aj v prípade odhadu potenciálneho produktu pomocou Kalmanovho filtra. Takto získané údaje zobrazíme v nasledujúcich grafoch.



Obr. 3.16: Jednokrokové predikcie produkčnej medzery pomocou ARIMA modelov a Kalmanovho filtra pre Slovensko (do roku 2008 skutočné hodnoty), zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.



Obr. 3.17: Jednokrokové predikcie produkčnej medzery pomocou ARIMA modelov a Kalmanovho filtra pre Nemecko (do roku 2008 skutočné hodnoty), zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.



Obr. 3.18: Jednokrokové predikcie produkčnej medzery pomocou ARIMA modelov a Kalmanovho filtra pre Českú republiku (do roku 2008 skutočné hodnoty), zdroj: Eurostat, vlastné výpočty.

Tento postup nám umožňuje poznať predikciu produkčnej medzery stále jeden štvrtrok vopred. Tento časový horizont sa môže javiť ako krátky, ale z hľadiska nastavenia hospodársko politických nástrojov stačí často poznať tendencie budúceho vývoja. Navyše, produkčná medzera vykazuje určitú mieru zotrvačnosti, čo by sa ukázalo vysokou hodnotou autokorelácie, prípadne vysokou hodnotou Durbin-Watsonovej štatistiky. Na základe týchto predpokladov môžeme potom očakávať budúce hodnoty produkčnej medzery aj v dlhšom časovom horizonte.

# Záver

Cieľom tejto práce bolo poskytnúť prehľad metód, ktoré je možné využiť pri odhadovaní produkčnej medzery ekonomiky. Ak chceme vedieť veľkosť produkčnej medzery, musíme najskôr odhadnúť potenciálny produkt ekonomiky. Z ekonometrického hľadiska ide o odhad tzv. unobserved components. Z tohto hľadiska je základom práce druhá kapitola, ktorá ponúka prehľad a hlbšie vysvetlenie jednotlivých metód odhadovania produkčnej medzery.

Postupne sme sa venovali Hodrick-Prescottovmu filtru, konceptu NAIRU, reps. konceptu prirodzenej miery nezamestnanosti, prístupu prostredníctvom produkčnej funkcie a nakoniec Kalmanovmu filtru. Najväčšiu pozornosť sme venovali práve poslednej zo spomenutých metód, a to Kalmanovmu filtru. Bolo to hlavne z dôvodu, že táto metóda bola pre nás najmenej známou. Hlavnú myšlienku Kalmanovho filtra sme naznačili pomocou jednoduchého ilustračného príkladu.

Do tretej kapitoly, ktorá je empirickou časťou práce, sme si vybrali tri krajiny, pre ktoré sme odhadovali produkčné medzery jednotlivými metódami z druhej kapitoly. Okrem Slovenskej republiky sme si vybrali ešte Nemecko a Českú republiku ako dvoch najvýznamnejších obchodných partnerov Slovenska.

Prvou z použitých metód bol Hodrick-Prescottov filter. Z praktického hľadiska považujeme za jeho najväčší nedostatok silnú závislosť od dĺžky analyzovaného časového radu. Ak by sme tento filter použili iba na obdobie krízy (od 2008 Q3), tak niektoré štvrtroky by sa nachádzali nad potenciálnym produktom, hoci z ekonomického hľadiska je to nepravdepodobné. Aj keď nás teda zaujíma produkčná medzera len za nejaký krátky časový úsek, potrebujeme mať k dispozícii dostatočne dlhý časový rad. Výhodou je zas jednoduchá a rýchla realizácia odhadu.

Ďalej sme odhadovali produkčnú medzeru pre vybrané krajiny pomocou konceptu NAIRU (nonaccelerating inflation rate of unemployment). Tento koncept vychádza z tzv. Phillipsovej krivky a teda predpokladá negatívny vzťah medzi mierou nezamestnanosti a mierou inflácie. Za nevýhodu pri aplikovaní tejto metódy považujeme fakt, že na empirických dátach sa tento vzťah nemusí potvrdiť, čo bol aj náš prípad (pre všetky tri krajiny bol regresný koeficient sklonu medzi nezamestnanosťou a infláciou nesignifikantný). Výhodou tejto metódy je fakt, že zohľadňuje stav tých premenných, prostredníctvom ktorých je definovaný potenciálny produkt (plné využitie výrobných faktorov - práca - bez inflačných tlakov).

Odhadovaniu pomocou produkčnej funkcie sme sa v tretej kapitole nevenovali, pretože v tomto prípade by sme len presunuli ťažisko z priameho odhadovania potenciálneho produktu na odhadovanie potenciálnych množstiev výrobných faktorov - práce a kapitálu. V prácach, s ktorými sme sa počas písania tejto práce

stretli, sa odhad potenciálnych množstiev výrobných vstupov realizoval hlavne pomocou Hodrick-Prescottovho filtra (napr. [10]).

Kalmanov filter sme taktiež použili na odhad potenciálneho produktu a následne produkčnej medzery pre všetky tri vybrané krajiny. Pri realizácii tejto časti práce sme zistili, že v tomto prípade je Kalmanov filter veľmi citlivý na zadané počiatočné hodnoty stavových premenných. To považujeme za určitú nevýhodu, pretože zmenou počiatočných podmienok sa dá výsledok výrazne ovplyvniť. Výhodou tejto metódy je, že sa tu odhaduje viacero rovníc simultánne, a teda dovoľuje zohľadniť pôsobenie viacerých premenných, ktoré môžu súvisieť s produkčnou medzerou. Kalmanov filter sme tiež použili na prognózu produkčnej medzery, pričom skutočný HDP sme prognózovali pomocou ARIMA modelov.

V práci sme po celý čas pracovali s individuálnymi časovými radmi pre jednotlivé krajiny. Ako možný alternatívny prístup a rozšírenie tejto práce by sme navrhovali vytvoriť panelové dáta pre väčšiu skupinu krajín, ktorých ekonomiky sú navzájom previazané a pokúsiť sa odhadnúť produkčné medzery pre všetky krajiny súčasne pomocou týchto panelových dát. Následne by sme si z tohto súboru krajín vybrali odhady pre tie ekonomiky, ktoré nás zaujímajú.

Pre hospodársko-politickú prax má samozrejme najväčší význam prognózovanie produkčnej medzery, pretože na základe toho je potom možné použiť a správne nastaviť pôsobenie stabilizačných opatrení hospodárskej politiky. Samotné odprúčania pre hospodársku politiku, ktoré by vyplývali z vykonaných prognóz produkčnej medzery, sú už mimo stanoveného cieľa pre túto prácu, a preto sme sa im nevenovali. Išlo by však o prirodzené pokračovanie danej problematiky.

# Dodatok A

## Testy stacionarity

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on D(HDP_SK)				
Null Hypothesis: D(HDP_SK) has a unit root				
Exogenous: Constant, Linear Trend				
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=9)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-6.174599	0.0000
Test critical values:				
	1% level		-4.192337	
	5% level		-3.520787	
	10% level		-3.191277	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(HDP_SK,2)				
Method: Least Squares				
Date: 03/09/12 Time: 13:53				
Sample (adjusted): 1997Q3 2007Q4				
Included observations: 42 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(HDP_SK(-1))	-1.172481	0.189888	-6.174599	0.0000
C	-51.43255	54.47019	-0.944233	0.3509
@TREND(1997Q1)	10.29372	2.488723	4.136146	0.0002
R-squared	0.502040	Mean dependent var		19.73333
Adjusted R-squared	0.476503	S.D. dependent var		231.0292
S.E. of regression	167.1567	Akaike info criterion		13.14449
Sum squared resid	1089713.	Schwarz criterion		13.26861
Log likelihood	-273.0343	F-statistic		19.65976
Durbin-Watson stat	1.714876	Prob(F-statistic)		0.000001

Obr. A.1: Unit root test pre HDP Slovenska

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on D(HDP_DE)				
Null Hypothesis: D(HDP_DE) has a unit root				
Exogenous: Constant, Linear Trend				
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=9)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-4.970091	0.0011
Test critical values:				
1% level			-4.180911	
5% level			-3.515523	
10% level			-3.188259	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(HDP_DE,2)				
Method: Least Squares				
Date: 03/09/12 Time: 14:27				
Sample: 1997Q1 2007Q4				
Included observations: 44				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(HDP_DE(-1))	-0.755295	0.151968	-4.970091	0.0000
C	1119.748	933.8343	1.199086	0.2374
@TREND(1997Q1)	27.74908	37.07183	0.748522	0.4584
R-squared	0.376131	Mean dependent var		0.000000
Adjusted R-squared	0.345699	S.D. dependent var		3799.750
S.E. of regression	3073.575	Akaike info criterion		18.96482
Sum squared resid	3.87E+08	Schwarz criterion		19.08647
Log likelihood	-414.2260	F-statistic		12.35949
Durbin-Watson stat	2.008541	Prob(F-statistic)		0.000063

Obr. A.2: Unit root test pre HDP Nemecka

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on D(HDP_CZ,2)				
Null Hypothesis: D(HDP_CZ,2) has a unit root				
Exogenous: Constant, Linear Trend				
Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=9)				
			t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic			-6.068335	0.0000
Test critical values:				
1% level			-4.180911	
5% level			-3.515523	
10% level			-3.188259	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(HDP_CZ,3)				
Method: Least Squares				
Date: 03/09/12 Time: 14:32				
Sample: 1997Q1 2007Q4				
Included observations: 44				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(HDP_CZ(-1),2)	-1.984134	0.326965	-6.068335	0.0000
D(HDP_CZ(-1),3)	0.210681	0.189781	1.110130	0.2736
C	337.2660	1164.688	0.289576	0.7736
@TREND(1997Q1)	6.854813	46.70797	0.146759	0.8841
R-squared	0.829385	Mean dependent var		30.36364
Adjusted R-squared	0.816589	S.D. dependent var		9159.377
S.E. of regression	3922.643	Akaike info criterion		19.47343
Sum squared resid	6.15E+08	Schwarz criterion		19.63563
Log likelihood	-424.4154	F-statistic		64.81534
Durbin-Watson stat	2.003903	Prob(F-statistic)		0.000000

Obr. A.3: Unit root test pre HDP Českéj republiky

## Dodatok B

# Výstupy regresii pri odhade NAIRU

Dependent Variable: DHCPI_SK				
Method: Least Squares				
Date: 03/15/12 Time: 17:41				
Sample: 1998Q1 2011Q4				
Included observations: 56				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.117256	1.641890	0.071415	0.9433
U_SK	-0.009178	0.106407	-0.086253	0.9316
R-squared	0.000138	Mean dependent var	-0.021429	
Adjusted R-squared	-0.018378	S.D. dependent var	2.465302	
S.E. of regression	2.487853	Akaike info criterion	4.695778	
Sum squared resid	334.2282	Schwarz criterion	4.768112	
Log likelihood	-129.4818	F-statistic	0.007440	
Durbin-Watson stat	3.261840	Prob(F-statistic)	0.931584	

Obr. B.1: Odhad rovnice pri výpočte NAIRU pre Slovensko

Dependent Variable: DHCPI_DE				
Method: Least Squares				
Date: 03/15/12 Time: 17:40				
Sample: 1998Q1 2011Q4				
Included observations: 56				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.013863	0.493580	-0.028087	0.9777
U_DE	0.003043	0.056223	0.054131	0.9570
R-squared	0.000054	Mean dependent var	0.012500	
Adjusted R-squared	-0.018463	S.D. dependent var	0.594234	
S.E. of regression	0.599694	Akaike info criterion	1.850268	
Sum squared resid	19.42020	Schwarz criterion	1.922602	
Log likelihood	-49.80749	F-statistic	0.002930	
Durbin-Watson stat	3.026682	Prob(F-statistic)	0.957031	

Obr. B.2: Odhad rovnice pri výpočte NAIRU pre Nemecko

Dependent Variable: DHCPI_CZ				
Method: Least Squares				
Date: 03/15/12 Time: 18:33				
Sample: 1998Q1 2011Q4				
Included observations: 56				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.225870	0.997155	-0.226514	0.8217
U_CZ	0.030898	0.136599	0.226193	0.8219
R-squared	0.000947	Mean dependent var	-0.003571	
Adjusted R-squared	-0.017554	S.D. dependent var	1.251467	
S.E. of regression	1.262403	Akaike info criterion	3.338973	
Sum squared resid	86.05775	Schwarz criterion	3.411307	
Log likelihood	-91.49123	F-statistic	0.051163	
Durbin-Watson stat	2.486636	Prob(F-statistic)	0.821905	

Obr. B.3: Odhad rovnice pri výpočte NAIRU pre Českú republiku



## Dodatok C

# Výstupy pre Kalmanov filter

Sspace: KALMAN\_SK  
Method: Maximum likelihood (Marquardt)  
Date: 03/26/12 Time: 15:58  
Sample: 1997Q1 2011Q4  
Included observations: 59  
User prior mean: SS\_SK  
Failure to improve Likelihood after 1 iteration

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	1.000609	3.072809	0.325633	0.7447
C(2)	0.969166	0.773861	1.252378	0.2104

	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
LHDP_SK_TREND	9.764170	2305.694	0.004235	0.9966
LGAP_SK	-0.062293	2305.761	-2.70E-05	1.0000
MU_SK	0.008627	5.179882	0.001666	0.9987

Log likelihood	-164.8470	Akaike info criterion	5.655830
Parameters	2	Schwarz criterion	5.726255
Diffuse priors	3	Hannan-Quinn criter.	5.683321

Obr. C.1: Odhad potenciálneho produktu pre Slovensko pomocou Kalmanovho filtra

Sspace: KALMAN\_DE  
 Method: Maximum likelihood (Marquardt)  
 Date: 03/29/12 Time: 20:00  
 Sample: 1997Q1 2011Q4  
 Included observations: 59  
 User prior mean: SS\_DE  
 Failure to improve Likelihood after 1 iteration

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	1.000609	3.072882	0.325626	0.7447
C(2)	0.969166	0.773825	1.252435	0.2104
	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
LHDP_DE_TREND	13.32303	2305.694	0.005778	0.9954
LGAP_DE	0.000150	2305.761	6.51E-08	1.0000
MU_DE	0.001346	5.179882	0.000260	0.9998
Log likelihood	-164.8465	Akaike info criterion		5.655812
Parameters	2	Schwarz criterion		5.726237
Diffuse priors	3	Hannan-Quinn criter.		5.683303

Obr. C.2: Odhad potenciálneho produktu pre Nemecko pomocou Kalmanovho filtra

Sspace: KALMAN\_CZ  
 Method: Maximum likelihood (Marquardt)  
 Date: 03/29/12 Time: 19:00  
 Sample: 1997Q1 2011Q4  
 Included observations: 59  
 Valid observations: 58  
 User prior mean: SS\_CZ  
 Failure to improve Likelihood after 1 iteration

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	1.000609	3.780997	0.264642	0.7913
C(2)	0.969166	4.821507	0.201009	0.8407
	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
LHDP_CZ_TREND	13.70245	2305.677	0.005943	0.9953
LGAP_CZ	0.013569	2305.827	5.88E-06	1.0000
MU_CZ	0.000903	5.768571	0.000157	0.9999
Log likelihood	-153.6078	Akaike info criterion		5.365785
Parameters	2	Schwarz criterion		5.436834
Diffuse priors	3	Hannan-Quinn criter.		5.393460

Obr. C.3: Odhad potenciálneho produktu pre Českú republiku pomocou Kalmanovho filtra

# Literatúra

- [1] Mankiw, N. G.: Principles of Economics. South-Western College Pub, 2000. ISBN: 978-0-030-25951-7.
- [2] Romer, D.: Advanced Macroeconomics. MC Graw-Hill, USA, 1996. ISBN: 0-07-053667-8.
- [3] Hodrick, R. J. - Prescott, E. C.: Post-War U. S. Business Cycles: An empirical investigation. Journal of money, credit and banking, 1980, 1997.
- [4] Morten, O. R. - Harald, U.: On Adjusting the HP-Filter for the Frequency of Observations. The Review of Economics and Statistics, MIT Press, 2002.
- [5] Dermoune, A. - Djehiche, B. - Rahmania, N.: Consistent estimators of the smoothing parameter in the Hodrick-Prescott filter. Journal of the Japanese Statistical Society 38, 2008.
- [6] Ahumada, H. - Garegnani, M.: Hodrick-Prescott Filter in Practice. Instituto y Universidad Torcuato Di Tella, 1999.
- [7] Ball, L. - Mankiw, N. G.: The NAIRU in Theory and Practice. Journal of Economic Perspectives 16, 2002.
- [8] Štekláčová, L.: Meranie produkčnej medzery SR. Diplomová práca, FMFI UK, 2003.
- [9] Baltagi, H. B.: Econometrics. Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-76516-8.
- [10] Konuki, T.: Estimating Potential Output and the Output Gap in Slovakia. Eastern European Economics vol. 48, no. 2, 2010.
- [11] Kalman, R. E.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Transaction of the ASME—Journal of Basic Engineering, 1960.
- [12] Welch, G. - Bishop, G.: An Introduction to the Kalman Filter. University of North Carolina at Chapel Hill, 2006.
- [13] Maybeck, P. S.: Stochastic Models, Estimation, and Control. Academic Press, Inc. London, 1979. ISBN: 0-12-480701-1.
- [14] Greene, H. W.: Econometric Analysis. Prentice Hall, New York, 2002. ISBN: 978-0130661890.
- [15] Rao, C. R.: Linear Statistical Inference and its Applications. John Wiley and Sons, Inc. Pennsylvania, 2002. ISBN: 0-471-21875-8.

- [16] Bartoszyński, R. - Niewiadomska-Bugaj, M.: Probability and Statistical Inference. John Wiley and Sons, Inc. New Jersey, 2008. ISBN: 978-0-47 1-69693-3.
- [17] EViews 5 User's Guide. Quantitative Micro Software, LLC, 2004.
- [18] Friedman, M.: The Role of Monetary Policy. American Economic Review, 1968.
- [19] Phelps, E. S.: Phillips Curves, Expectations of Inflation, and Optimal Unemployment over Time. *Economica*, 1967.

## Internetové linky

- [a] [www.statistics.sk](http://www.statistics.sk)      Štatistický úrad SR
- [b] [http://ec.europa.eu/economy\\_finance/economic\\_governance/sgp/index\\_sk.htm](http://ec.europa.eu/economy_finance/economic_governance/sgp/index_sk.htm)  
Európska komisia
- [c] <http://epp.eurostat.ec.europa.eu>      Eurostat