

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**  
**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**



**DYNAMICKÉ ZOVŠEOBECNENIE**  
**TOBINOVHO MODELU**

Diplomová práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Školiteľ: doc. RNDr. Peter Guba, PhD.

**Bratislava 2012**

**Bc. Peter Staš**



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Peter Staš  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Dynamické zovšeobecnenie Tobinovho modelu

**Cieľ:** Cieľom diplomovej práce bude štúdium nerovnovážneho rastu a stability v zovšeobecnenom Tobinovom modeli v neoklasickej monetárnej teórii rastu.

**Vedúci:** doc. RNDr. Peter Guba, PhD.

**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

**Dátum zadania:** 13.01.2011

**Dátum schválenia:** 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

## **Čestné prehlásenie**

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho diplomovej práce.

Bratislava 20. apríl 2012

.....

Peter Staš

## **Pod'akovanie**

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Petrovi Gubovi, PhD. za odborné vedenie, cenné rady a pripomienky, ktoré mi veľmi pomohli pri vypracovaní tejto diplomovej práce.

## Abstrakt

STAŠ, Peter: *Dynamické zovšeobecnenie Tobinovho modelu*. [Diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Peter Guba, PhD. Bratislava: FMFI UK, 2012, 40 strán.

Diplomová práca sa zaoberá štúdiom zovšeobecneného Tobinovho modelu. Po zavedení časového oneskorenia do dynamického systému sa vyšetrujú lineárne vlastnosti modelu. Práca je rozdelená na tri kapitoly. Prvá kapitola sumarizuje potrebné teoretické znalosti pred analýzou samotného modelu. Druhá kapitola sa venuje Tobinovmu modelu, vývoju problému tohto dynamického systému, ako i podrobnému odvodeniu systému až na zovšeobecný tvar. V tretej kapitole sa analyzuje dvojrozmerný zovšeobecný Tobinov model s časovým oneskorením. Postupne sa riešia vlastnosti linearovaného systému, ako aj simulácia trajektorií na okolí pevného bodu. Výsledky diplomovej práce sú nutným základom pred ďalším štúdiom nelineárnych vlastností modelu.

**Kľúčové slová:** zovšeobecný Tobinov model, časové oneskorenie, dynamický systém, pevný bod, stabilita, linearizácia.

## Abstract

STAŠ, Peter: *Dynamic Generalization of the Tobin Model*. [Master's Thesis]. Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics. Supervisor: doc. RNDr. Peter Guba, PhD. Bratislava: FMPH Comenius University, 2012, 40 pages.

The thesis studies generalized Tobin model. Linear properties of the model are investigated after the introduction of time delay into the dynamic system. The thesis is divided into three chapters. The first chapter summarizes the necessary theoretical knowledge before analyzing the model. The second chapter deals with the Tobin model, the development of the problem of this dynamical system, as well as a detailed derivation of the system to the generalized form. The third chapter analyzes the two-dimensional generalized Tobin model with time delay. Gradually, there are solved the properties of linearized system, as well as simulation of trajectories around the fixed point. The results of this thesis are a necessary basis to further studies of nonlinear properties of the model.

**Keywords:** Generalized Tobin Model, time delay, dynamical system, stationary solution, stability, linearization.

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>9</b>
<b>1 Dynamické systémy</b>	<b>11</b>
1.1 Systémy obyčajných diferenciálnych rovníc . . . . .	11
1.2 Klasifikácia typu pevného bodu . . . . .	13
1.3 Bifurkácia . . . . .	14
<b>2 Tobinov model</b>	<b>16</b>
2.1 Vývoj problému . . . . .	16
2.2 Odvodenie Tobinovho modelu . . . . .	17
2.3 Zovšeobecnený Tobinov model . . . . .	19
<b>3 Zovšeobecnený Tobinov model s časovým oneskorením</b>	<b>22</b>
3.1 Stacionárne riešenia systému . . . . .	23
3.2 Linearizovaný systém na okolí pevného bodu . . . . .	23
3.2.1 Charakteristická rovnica systému . . . . .	24
3.2.2 Riešenie linearizovaného problému . . . . .	25
3.2.3 Stabilitné charakteristiky pre Tobinov model . . . . .	28
3.3 Závislosť kritického časového oneskorenia od parametrov modelu . . . . .	30
3.4 Simulácia trajektórií . . . . .	33
<b>Záver</b>	<b>38</b>
<b>Literatúra</b>	<b>40</b>

## Zoznam tabuliek

1.1	Klasifikácia pevných bodov . . . . .	14
3.1	Počiatkové hodnoty premenných a parametrov modelu vstupujúcich do simulácie trajektórií . . . . .	34

## Zoznam obrázkov

3.1	Závislosť kritického časového oneskorenia od parametra $\varepsilon$ . . . . .	30
3.2	Závislosť kritického časového oneskorenia od parametra $\gamma$ . . . . .	31
3.3	Závislosť kritického časového oneskorenia od parametra $\theta$ . . . . .	32
3.4	Závislosť kritického časového oneskorenia od parametra $\bar{k}$ . . . . .	33
3.5	Simulácia trajektórií dvojrozmerného modelu . . . . .	36
3.6	Časový vývoj premenných $m$ a $q$ v simulácii trajektórií . . . . .	37



# Úvod

Cieľom diplomovej práce je štúdium zovšeobecneného Tobinovho modelu v neoklasickej monetárnej teórii rastu. Ide o makroekonomický dynamický model. James Tobin zaviedol peniaze do ekonomického modelu rastu a bohatstvo tak môže byť reprezentované ako kapitálom, tak aj peniazmi. Tobinov model je určený tromi premennými, kapitálom, peniazmi a infláciou. Po uverejnení pôvodného Tobinovho modelu niekoľko ekonómov objavilo jeho nestabilné vlastnosti, a preto sa formuloval zovšeobecnený Tobinov model, ktorý nedostatky pôvodného odstránil.

V našej diplomovej práci zavedieme do zovšeobecneného Tobinovho modelu konštantné časové oneskorenie do očakávanej miery inflácie v nelineárnych členoch, spojených s produkčnou funkciou. Model zredukujeme na dvojrozmerný model za platnosti predpokladu konštantného kapitálu. Analyzovať budeme lineárne vlastnosti Tobinovho modelu parametrizovaných časovým oneskorením  $\tau$ .

Získané výsledky predstavujú nevyhnutný základ, na ktorom možno postaviť budúcu analýzu nelineárnych vlastností Hopfovej bifurkácie s oneskorením, ktorá je prítomná v modeli.

Diplomová práca má tri kapitoly. V prvej kapitole uvádzame zhrnutie teoretického základu, na ktorom stojí ďalšia analýza modelu. Definujeme pojmy a vety teórie diferenciálnych rovníc a dynamických systémov a klasifikujeme pevné body dvojrozmerného dynamického systému. Zvlášť sa venujeme aj pojmu bifurkácia, ktorá sa vyskytuje v Tobinovom modeli, konkrétne ako Andronovova-Hopfova bifurkácia.

Druhá kapitola je úvodom do problematiky Tobinovho modelu. Zhrňame postupný vývoj tohto modelu od 60-tych rokov 20. storočia a následne charakterizujeme a odvodíme

Tobinov model. Uvoľnením predpokladov, s ktorými pracoval James Tobin sa dopracujeme k formulácii zovšeobecneného Tobinovho modelu.

V tretej kapitole doplníme predpoklady a zavedieme časové oneskorenie do modelu. Dvojrozmernému systému s časovým oneskorením nájdeme stacionárne riešenie, lineari-  
zujeme ho na okolí pevného bodu a vyšetříme jeho stabilitné vlastnosti. Kritické časové  
oneskorenie vplývajúce na stabilitné výmeny znázorníme graficky v závislosti od štyroch  
parametrov modelu. Nakoniec ešte graficky znázorníme simulácie trajektórií na okolí pev-  
ného bodu a časový vývoj premenných dvojrozmerného linearizovaného modelu.

# Kapitola 1

## Dynamické systémy

Nasledujúca kapitola zhŕňa potrebné teoretické poznatky a pojmy na prevedenie analýzy zovšeobecneného Tobinovho modelu s konštantným časovým oneskorením. Ide o nelineárny viacrozmerný dynamický systém.

### 1.1 Systémy obyčajných diferenciálnych rovníc

Majme systémy diferenciálnych rovníc v tvare

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x), f \in C^1(U, \mathbb{R}^n). \quad (1.1)$$

Pevný bod (ekvilíbrio, stacionárne riešenie)  $x(t) = x^*$  je riešením rovnice  $f(x^*) = 0$ . V tomto riešení  $x^*$  sú prírastky funkcie nulové, riešenie je konštantné a nezávislé od času.

Taylorovým rozvojom funkcie  $f$  okolo pevného bodu  $x^*$  (pre zjednodušenie predpokladajme  $x^* = 0$ ) dostávame systém  $\dot{x} = Ax + \varphi(x)$ , kde

$$A \equiv Df(x^*) = Df(x) \Big|_{x=x^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x^*} .$$

Matica  $A$  sa nazýva Jacobiho matica prvých derivácií jednotlivých rovníc dynamického systému podľa jednotlivých premenných vyčíslených v pevnom bode  $x^*$  a pre  $\varphi(x)$  platí

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \varphi(x) / \|x\| = 0.$$

Potom linearizovaný systém je systém v tvare

$$\dot{x} = Ax. \quad (1.2)$$

**Definícia 1.1.** *Riešenie  $\bar{x}$  dynamického systému (1.1) je (Liapunovsky) stabilné, ak pre dané  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta(\varepsilon) > 0$  také, že pre ľubovoľné iné riešenie  $y(t)$  platí, ak  $|\bar{x}(0) - y(0)| < \delta$ , potom  $|\bar{x}(t) - y(t)| < \varepsilon \forall t > 0$ . Riešenie sa nazýva asymptoticky stabilné, ak je Liapunovsky stabilné a navyše platí, ak  $|\bar{x}(0) - y(0)| < \delta$ , potom  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - y(t)| = 0$ . Riešenie je nestabilné, ak nie je stabilné.*

**Veta 1.1.** *Ak všetky vlastné čísla matice  $A$  systému (1.2) majú záporné reálne časti, tak riešenie  $x^*$  systému (1.2) je asymptoticky stabilné. Ak má niektoré vlastné číslo kladnú reálnu časť, tak riešenie  $x^*$  je nestabilné.*

**Definícia 1.2.** *Vektor  $v$  budeme nazývať vlastným vektorom matice  $A$ , ktorý prislúcha vlastnému číslu  $\lambda$ , ak je riešením systému rovníc  $(A - \lambda I)v = 0$ .*

Aby sme našli vlastné čísla matice  $A$ , potrebujeme nájsť korene charakteristického polynómu matice  $A$ :

$$0 = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (1.3)$$

**Veta 1.2** (Nutná a postačujúca podmienka asymptotickej stability - Rought-Hurwitzovo kritérium). *Nech polynóm  $n$ -tého stupňa s reálnymi koeficientami má tvar*

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

*Potom reálne zložky všetkých koreňov polynómu  $P$  sú záporné práve vtedy, ak sú kladné všetky diagonálne minory Hurwitzovej matice ( $a_i = 0 \forall i > n$ )*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

kde diagonálne minory sú

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad .$$

Potom pre  $n = 2$  máme charakteristickú rovnicu  $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ , pričom

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1a_2 > 0.$$

Reálne zložky všetkých vlastných čísel matice  $A$  sú záporné (a teda pevný bod  $x^*$  je asymptoticky stabilný) práve vtedy, ak  $a_1 > 0$  a  $a_2 > 0$ .

Pri štúdiu dynamického systému s časovým oneskorením  $\tau$  začneme s analýzou lokálnej stability. Analyzujeme linearizovaný systém s časovým oneskorením  $\tau$ . Ak je časové oneskorenie *konečné*, potom je charakteristická rovnica dynamického systému funkciou oneskorenia. Preto aj  $\lambda$ , riešenie charakteristickej funkcie, je funkciou oneskorenia,  $\lambda(\tau)$ . S meniacou sa hodnotou oneskorenia  $\tau$  sa môže tiež meniť stabilita riešenia. Takéto zmeny stability budeme nazývať *stabilitné výmeny (stability switches)*.

## 1.2 Klasifikácia typu pevného bodu

Uvažujme dvojrozmerný systém diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{1.4}$$

kde  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ .

Charakteristická rovnica linearizovaného systému  $\dot{x} = Ax$  má tvar  $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta$ , kde  $\tau = \text{tr}(A)$  a  $\Delta = \det(A)$ . Potom vlastné čísla matice  $A$  sú

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\tau \pm D^{1/2}),$$

kde  $D = \tau^2 - 4\Delta$ .

Typ pevného bodu je daný charakterom trajektórií na okolí pevného bodu. Ak  $\tau = 0$ ,  $\Delta = 0$  alebo  $D = 0$ , potom ide o degenerovaný prípad pevného bodu. Ak je linearizácia nelineárneho systému nedegenerovaná, potom je fázový portrét na okolí pevného bodu zachovaný aj v nelineárnom režime. Ak je linearizácia degenerovaná, potom linearizovaný fázový portrét nie je štrukturálne stabilný a z linearizácie nevieme klasifikovať typ pevného bodu (Jordan & Smith (2007)).

Typ pevného bodu	$\tau$	$\Delta$	$D$	Vlastné čísla matice A
sedlo		<0	>0	$\text{sign}(\lambda_1) \neq \text{sign}(\lambda_2), \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$
stabilný uzol	<0	>0	>0	$\text{sign}(\lambda_1) = \text{sign}(\lambda_2) < 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$
nestabilný uzol	>0	>0	>0	$\text{sign}(\lambda_1) = \text{sign}(\lambda_2) > 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$
stabilná špirála	<0	>0	<0	$\text{sign}[\text{Re}(\lambda_1)] = \text{sign}[\text{Re}(\lambda_2)] < 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$
nestabilná špirála	>0	>0	<0	$\text{sign}[\text{Re}(\lambda_1)] = \text{sign}[\text{Re}(\lambda_2)] > 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$
centrum	=0	>0	<0	$\text{Re}(\lambda_{1,2}) = 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$
degenerovaný stabilný uzol	<0	>0	=0	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$
degenerovaný nestabilný uzol	>0	>0	=0	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$
neizolované pevné body		=0		$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

Tabuľka 1.1: Klasifikácia pevných bodov

Tabuľka (1.1) klasifikuje typ pevného bodu dvojrozmerného dynamického systému v závislosti od  $\tau$ ,  $\Delta$  a  $D$ , a taktiež v závislosti na vlastných číslach  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ .

### 1.3 Bifurkácia

Majme systém diferenciálnych rovníc v tvare

$$\dot{x} = f(x, r), \quad r \in \mathbb{R}, \quad x = x(t, r), \quad (1.5)$$

kde  $r$  je reálny parameter.

Bifurkácia je kvalitatívna zmena štruktúry toku pri zmene parametra dynamického systému. Inak povedané, je to jav, kedy sa malou zmenou parametra zásadne zmení dlhodobé

správanie dynamického systému. Príkladmi kvalitatívnej zmeny je vznik alebo zánik pevného bodu alebo zmena stability pevného bodu. Bifurkačný bod je kritický bod, v ktorom nastáva bifurkácia.

V práci [3] bolo dokázané, že v zovšeobecnenom Tobinovom modeli dochádza k Andronovovej - Hopfovej bifurkácii.

**Veta 1.3** (o Andronovovej-Hopfovej bifurkácii). *Nech systém*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(\mu, x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(\mu, x_1, x_2) \end{aligned} \tag{1.6}$$

*má pevný bod v začiatku súradnicovej sústavy  $x^* = 0$  pre všetky hodnoty reálneho parametra  $\mu$ . Ďalej nech pri  $\mu = \mu_0$  sú vlastné čísla  $\lambda_1(\mu)$ ,  $\lambda_2(\mu)$  linearizovanej sústavy rýdzo imaginárne. Ak pre reálne časti vlastných čísel platí podmienka  $\partial \operatorname{Re}[\lambda_{1,2}(\mu)]/\partial \mu |_{\mu=\mu_0} \neq 0$  a bod 0 je asymptoticky stabilný pevný bod pri  $\mu = \mu_0$ , potom platí:*

- a)  $\mu = \mu_0$  je bifurkačný bod,*
- b) existuje taký interval  $(\mu_1, \mu_0)$ , že pre  $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$  je začiatok súradníc stabilné ohnisko,*
- c) existuje taký interval  $(\mu_0, \mu_2)$ , že pre  $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$  je začiatok súradníc nestabilné ohnisko obkľúčené limitným cyklom, ktorého rozmer narastá pri narastaní  $\mu$ .*

# Kapitola 2

## Tobinov model

### 2.1 Vývoj problému

V roku 1965 uverejnil James Tobin významnú prácu [9], v ktorej pojednával o peniazoch a ekonomickom raste. Dovtedy vo väčšine rastových modeloch nevystupovali peniaze a monetárna ekonómia bola akoby v úzadí ostatných oblastí ekonómie. Jeho práca sa zaoberala monetárnymi veličinami a ich vplyvom na kapitálovú náročnosť. Vo svojej práci sa zameral hlavne na ekvilibrium v dlhodobom časovom horizonte. Predpokladal, že dlhodobo sa dopyt rovná ponuke a očakávaná inflácia sa rovná skutočnej. Ukázalo sa však, že tieto podmienky nie je možné brať ako samozrejmé. Výsledky originálneho Tobinovho modelu sa ukázali byť nestabilné, a teda nepoužiteľné do praxe.

Michael Hadjimichalakis nadviazal od roku 1971 sériou článkov [4], [5], [6], v ktorých zostavil zovšeobecnený Tobinov model. Zistil, že predpoklady, s ktorými Tobin pracoval, boli postačujúcou podmienkou nestability modelu v dlhodobom časovom horizonte. V zovšeobecnenom Tobinovom modeli preto uvoľnil podmienky vyčistenia trhov a dokonalej predpovede cien. Ceny sa tak už mohli meniť nie len existenciou previsu ponuky či dopytu na trhu, ale aj očakávaním, že sa zmenia. Podrobne sa venoval aj stabilitným podmienkam modelu v krátkodobom i dlhodobom časovom horizonte.

Jess Benhabib a Takahiro Miyao dokázali vo svojej práci [1] podmienky lokálnej asymptotickej stability ekvilibria a uviedli podmienky, kedy v dynamickom systéme zovšeobec-



ného Tobinovho modelu dochádza k Andronovovej-Hopfovej bifurkácii.

Miroslav Foltin vo svojej diplomovej práci [3] analyzoval zovšeobecnený Tobinov model pre konkrétnu triedu produkčných funkcií a konkrétnu triedu funkcií dopytu po peniazoch. V krátkodobom modeli našiel pevné body, ich lokálne stabilitné vlastnosti a našiel aj body lokálnych bifurkácií. Dokázal existenciu Andronovovej-Hopfovej bifurkácie v dynamickom systéme. V dlhodobom modeli odvodil podmienky, kedy existuje jeden, dva alebo žiaden pevný bod. Nakoniec odvodil nutné a postačujúce podmienky pre stabilitu pevného bodu trojrozmerného modelu.

## 2.2 Odvodenie Tobinovho modelu

Tobinov model predpokladá neoklasickú produkčnú funkciu v tvare

$$Y = F(K, N),$$

kde  $Y$  je homogénny produkt vytvorený kapitálom  $K$  a prácou  $N$ . Funkcia  $F$  je dvakrát spojitely diferencovateľná, lineárne homogénna, má kladnú a klesajúcu marginálnu produktivitu faktorov  $K$  a  $N$  a produkt nemôže byť vytvorený pri absencii jedného z faktorov. Platí teda:

$$y = f(k), \text{ pre } 0 < k < \infty$$

$$f(k) > 0, f'(k) > 0, f''(k) < 0, \text{ pre } k > 0$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0,$$

kde  $k \equiv \frac{K}{N}$ ,  $y \equiv \frac{Y}{N}$ .

Ďalej platia tri nasledujúce vlastnosti, na základe ktorých Tobin zostavil svoj model:

1. Ľudia dokonalo predpovedajú ceny, teda skutočná inflácia sa rovná očakávanej:

$$\hat{p} = \frac{\dot{p}}{p} = q,$$

kde  $\hat{p}$  je skutočná inflácia a  $q$  je očakávaná inflácia.

2. Ľudia si sporia časť  $s$  svojho disponibilného príjmu  $Y + \left(\frac{\dot{M}}{p}\right)$ , kde  $M$  je nominálne množstvo peňazí a  $p$  je cenová úroveň. Potom skutočná akumulácia kapitálu je

$$\dot{K} = s \left[ Y + \left(\frac{\dot{M}}{p}\right) \right] - \frac{\dot{M}}{p}. \quad (2.1)$$

Táto rovnica sa nazýva aj Tobinova fundamentálna rovnica. V nej  $s[Y + \left(\frac{\dot{M}}{p}\right)]$  sú private úspory a  $s[Y + \left(\frac{\dot{M}}{p}\right)] - \frac{\dot{M}}{p}$  sú úspory spoločnosti. Člen  $\left(\frac{\dot{M}}{p}\right)$  predstavuje míňanie vlády. Vláda totiž nové peniaze emituje do obehu rozpočtovým deficitom. Pomer  $\frac{\dot{M}}{M} \equiv \theta$  predstavuje mieru rastu nominálneho množstva peňazí a je konštantný. Ak predpokladáme, že pracovná sila (a populácia)  $N$  rastie exponenciálne (t. j.  $\frac{\dot{N}}{N} = n$ ), rovnicu (2.1) môžeme prepísať do tvaru na jedného obyvateľa:

$$\dot{k} = sf(k) - (1 - s)(\theta - q)m - nk, \quad (2.2)$$

kde  $m \equiv \frac{M}{pN}$  je objem reálnych peňazí na jedného obyvateľa.

3. Dopyt po peniazoch  $L$  sa vždy rovná ich ponuke, t. j.

$$m = L(.). \quad (2.3)$$

Zderivovaním rovnice  $m = \frac{M}{pN}$  podľa času dostaneme:

$$\dot{m} = m \left( \theta - \frac{\dot{p}}{p} - n \right). \quad (2.4)$$

Zosumarizovaním predpokladov a odvodených vzťahov dostávame Tobinov model:

$$\dot{k} = sf(k) - (1 - s)(\theta - q)m - nk \quad (2.5)$$

$$m = L(.) \quad (2.6)$$

$$\dot{m} = m(\theta - \hat{p} - n) \quad (2.7)$$

$$\hat{p} = q. \quad (2.8)$$

## 2.3 Zovšeobecnený Tobinov model

Tobinov model ako bol pôvodne formulovaný predpokladá, že v každom časovom okamihu sú trhy vyčistené, dopyt sa rovná ponuke. Tiež predpokladá dokonalú predpoveď cien. Či ale trh dokáže dospieť do takéhoto stavu, je potrebné dokázať. Na to potrebujeme v rovnicach (2.6) a (2.8) povoliť stavy mimo týchto ekvilibrií a ukázať, že ekonomika smeruje do tohto rovnovážneho stavu.

S ohľadom na dynamické správanie v ekonomike, využijeme Walrasov zákon. Podľa neho, ak existuje previs dopytu, tak ceny rastú a ak existuje previs ponuky, tak ceny klesajú. Preto sa ceny menia v závislosti od previsu dopytu, resp. ponuky na peňažnom trhu. Rovnicu (2.6) teraz môžeme prepísať do tvaru

$$\hat{p} = \varepsilon[m - L(.)], \quad (2.9)$$

kde  $\varepsilon$  je rýchlosť prispôsobenia sa cenovej úrovni, resp.  $1/\varepsilon$  je čas potrebný na prispôsobenie sa. Všimnime si, že ak  $\varepsilon \rightarrow \infty$  alebo  $1/\varepsilon \rightarrow 0$ , čo znamená, že ak je prispôsobenie sa okamžité, tak dostávame pôvodnú rovnicu z Tobinovho modelu (2.6).

S ohľadom na dynamické správanie v ekonomike ďalej pretransformujeme rovnicu (2.8) do tvaru

$$\dot{q} = \gamma(\hat{p} - q), \quad (2.10)$$

kde  $\gamma$  je rýchlosť prispôsobenia sa očakávaniam ohľadne cien, resp.  $1/\gamma$  je čas potrebný na prispôsobenie sa. Očakávaná inflácia sa mení pomerovo k rozdielu skutočnej a očakávanej inflácie. Opäť si všimnime, že ak  $\gamma \rightarrow \infty$  alebo  $1/\gamma \rightarrow 0$ , čo znamená, že ak je prispôsobenie sa okamžité, tak dostávame pôvodnú rovnicu z Tobinovho modelu (2.8).

V našej práci nadviažeme na zovšeobecnený Tobinov model, aký bol analyzovaný v práci [5] a neskôr v [1]. V ňom sa navyše predpokladá, že ceny sa nemenia len v závislosti od previsu dopytu alebo ponuky na peňažnom trhu, ale aj preto, že sa očakáva, že sa ceny zmenia. Preto sa rovnica skutočnej inflácie (2.9) zmení na tvar

$$\hat{p} = \varepsilon[m - L(.)] + q. \quad (2.11)$$

Ak dosadíme rovnicu (2.11) do rovnice (2.10), dostaneme

$$\dot{q} = \gamma\varepsilon[m - L(\cdot)], \quad (2.12)$$

Funkcia dopytu po peniazoch  $L(\cdot)$  sa dá špecifikovať nasledovne:

$$L[f(k), f'(k) + q], L_k = \frac{\partial L}{\partial k} > 0 \text{ a } L_q = \frac{\partial L}{\partial q} < 0,$$

kde  $f(k)$  je produkcia na jedného obyvateľa a predstavuje dopyt po uzatvorení obchodu. Čiže peniaze držíme pre prípad uzatvorenia transakcií. Argument  $f'(k) + q$  predstavuje náklady obetovanej príležitosti za to, že máme peniaze v hotovosti. Tento člen nám hovorí, že peniaze držíme za účelom zaobstarania si majetku. Funkcia dopytu po peniazoch je teda funkciou kapitálu na obyvateľa  $k$  a očakávanej inflácie  $q$ . V práci použijeme konkrétny tvar funkcie dopytu, ktorý bol použitý už v [3],

$$L = L(k, q) := \frac{L_0 k^\alpha}{(q + q_D)^\beta}, \quad (2.13)$$

kde

$$\alpha, \beta \in (0, 1), \alpha + \beta = 1, L_0 = \text{const} > 0, q_D > 0,$$

$$L_k = \frac{\partial L(k, q)}{\partial k} = \frac{\alpha L_0 k^{\alpha-1}}{(q + q_D)^\beta} = \frac{\alpha L(k, q)}{k} > 0,$$

$$L_q = \frac{\partial L(k, q)}{\partial q} = -\frac{\beta L_0 k^\alpha}{(q + q_D)^{\beta+1}} = \frac{-\beta L(k, q)}{q + q_D} < 0,$$

pričom parametre  $\alpha, \beta, q_D$  vyjadrujú:

- $\alpha$  - zmena rýchlosti nárastu dopytu po peniazoch pri náraste množstva kapitálu,
- $\beta$  - zmena rýchlosti poklesu dopytu po peniazoch pri náraste očakávanej inflácie,
- $q_D$  - dostatočne veľký parameter, aby funkcia dopytu po peniazoch bola definovaná aj pre záporné hodnoty očakávanej inflácie.

Dosadením rovníc (2.11) a (2.12) do pôvodného Tobinovho modelu dostaneme formuláciu zovšeobecneného Tobinovho modelu:

$$\dot{k} = sf(k) - (1 - s)(\theta - q)m - nk \quad (2.14)$$

$$\dot{m} = m(\theta - \hat{p} - n) \quad (2.15)$$

$$\dot{q} = \gamma\varepsilon[m - L(k, q)] \quad (2.16)$$

$$\dot{\hat{p}} = \varepsilon[m - L(k, q)] + q, \quad (2.17)$$

kde premennými modelu sú:

- $k \in \mathbb{R}^+$  - pomer kapitál / práca
- $m \in \mathbb{R}^+$  - objem reálnych peňazí na jedného obyvateľa
- $q \in \mathbb{R}$  - očakávaná miera inflácie
- $\hat{p} \in \mathbb{R}$  - skutočná miera inflácie

a parametrami modelu sú:

- $s \in (0, 1)$  - sklon k úsporám
- $\theta \in \mathbb{R}$  - miera rastu nominálneho množstva peňazí
- $n \in \mathbb{R}$  - miera rastu pracovnej sily (populácie)
- $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  - rýchlosť prispôsobenia sa cenovej úrovni
- $\gamma \in \mathbb{R}^+$  - rýchlosť prispôsobenia sa očakávaniam o cenách

## Kapitola 3

# Zovšeobecnený Tobinov model s časovým oneskorením

Do zovšeobecneného Tobinovho modelu teraz zavedieme časové oneskorenie. Časové oneskorenie bude diskrétné, konštantné a jediné v dynamickom systéme. Premennou s časovým oneskorením bude očakávaná miera inflácie  $q$ , vystupujúca vo funkcii dopytu po peňazoch  $L$ . Inými slovami, v rovniciach (2.16) a (2.17) bude namiesto  $L(k, q)$  vystupovať  $L[k, q(t - \tau)]$ .

Ďalej budeme predpokladať, že kapitál je konštantný, t. j.  $k = \text{const} \equiv \bar{k}$ . Všimnime si, že v rovnici (2.14) teraz vystupujú konštantné členy  $sf(\bar{k})$  a  $n\bar{k}$  a nelineárny člen  $(1 - s)[\theta - q(t)]m(t)$ , ktorý reprezentuje interakciu medzi veličinami  $m(t)$  a  $q(t)$ . Aby sme tento vzťah medzi premennými modelu  $m$  a  $q$  rozviazali, pomôžeme si predpokladom o nemennosti veľkosti populácie, t. j.  $n = 0$ . Zovšeobecnený Tobinov model sa tak redukuje na dvojrozmerný systém s časovým oneskorením  $\tau$ .

Tobinov model potom nadobúda tvar:

$$\dot{m}(t) = m(t)\theta - \varepsilon m(t)^2 + \varepsilon m(t)L[\bar{k}, q(t - \tau)] - m(t)q(t) \quad (3.1)$$

$$\dot{q}(t) = \gamma \varepsilon m(t) - \gamma \varepsilon L[\bar{k}, q(t - \tau)], \quad (3.2)$$

kde premennými systému sú:

- $m \in \mathbb{R}^+$  - objem reálnych peňazí na jedného obyvateľa

- $q \in \mathbb{R}$  - očakávaná miera inflácie

a parametre systému sú:

- $\bar{k} \in \mathbb{R}^+$  - pomer kapitál / práca,
- $\theta \in \mathbb{R}$  - miera rastu nominálneho množstva peňazí,
- $\varepsilon > 0$  - rýchlosť prispôsobenia sa cenovej úrovni,
- $\gamma > 0$  - rýchlosť prispôsobenia sa očakávaniam o cenách.

### 3.1 Stacionárne riešenia systému

Pevný bod systému  $\dot{x} = f(x)$  je riešením rovnice  $f(x^*) = 0$ . Pre náš model potom platí:

$$\begin{aligned}\dot{q} = 0 &\Leftrightarrow m = L(\bar{k}, q) \\ \dot{m} = 0 &\Leftrightarrow m = 0 \vee \theta - q = 0\end{aligned}$$

Keďže  $m, \gamma, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , dostávame jediný pevný bod systému:

$$(m^*, q^*) = [L(\bar{k}, \theta), \theta] = [L_0 \bar{k}^\alpha (\theta + q_D)^{-\beta}, \theta]. \quad (3.3)$$

Stacionárne riešenie systém dosahuje vtedy, keď objem reálnych peňazí na jedného obyvateľa zodpovedá dopytu po peniazoch a keď očakávaná inflácia je rovná miere rastu nominálneho množstva peňazí. Zároveň si všimnime, že v ekvilibriu podľa rovnice (2.17) platí, že skutočná inflácia sa rovná očakávanej.

### 3.2 Linearizovaný systém na okolí pevného bodu

Jacobiho matica prvých derivácií pre systém (3.1) a (3.2) má tvar:

$$A(m, q) = \begin{pmatrix} \theta - 2\varepsilon m(t) + \varepsilon L[\bar{k}, q(t - \tau)] - q(t) & \varepsilon m(t) L_q[\bar{k}, q(t - \tau)] \frac{\partial q(t - \tau)}{\partial q(t)} - m(t) \\ \gamma \varepsilon & -\gamma \varepsilon L_q[\bar{k}, q(t - \tau)] \frac{\partial q(t - \tau)}{\partial q(t)} \end{pmatrix}.$$

Matica  $A$  je nelineárna a časovo-závislá matica, kde

$$L[\bar{k}, q(t - \tau)] = \frac{L_0 \bar{k}^\alpha}{(q(t - \tau) + q_D)^\beta},$$

$$L_q[\bar{k}, q(t - \tau)] = \frac{\partial L(k, q)}{\partial q} \Big|_{k=\bar{k}, q=q(t-\tau)} = \frac{-\beta L_0 \bar{k}^\alpha}{(q(t - \tau) + q_D)^{\beta+1}} = \frac{-\beta L[\bar{k}, q(t - \tau)]}{q(t - \tau) + q_D}.$$

Predpokladom exponenciálnych závislostí pre funkcie  $m(t)$  a  $q(t)$ , teda  $q(t) = q(0)e^{\lambda t}$  a  $m(t) = m(0)e^{\lambda t}$  a následným vyčíslením Jacobiho matice  $A(m, q)$  v pevnom bode (3.3) dostávame:

$$A(m^*, q^*) = \begin{pmatrix} -\varepsilon L(\bar{k}, \theta) & \varepsilon L(\bar{k}, \theta) L_q(\bar{k}, \theta) e^{-\lambda \tau} - L(\bar{k}, \theta) \\ \gamma \varepsilon & -\gamma \varepsilon L_q(\bar{k}, \theta) e^{-\lambda \tau} \end{pmatrix},$$

kde

$$L(\bar{k}, \theta) = \frac{L_0 \bar{k}^\alpha}{(\theta + q_D)^\beta},$$

$$L_q(\bar{k}, \theta) = \frac{-\beta L(\bar{k}, \theta)}{\theta + q_D}.$$

Z dôvodu lepšej prehľadnosti ďalších výpočtov si označme  $L^* \equiv L(\bar{k}, \theta)$ ,  $L_q^* \equiv L_q(\bar{k}, \theta)$ . Potom takto upravená Jacobiho matica vyčíslená v pevnom bode (3.3) má tvar:

$$A(m^*, q^*) = \begin{pmatrix} -\varepsilon L^* & \varepsilon L^* L_q^* e^{-\lambda \tau} - L^* \\ \gamma \varepsilon & -\gamma \varepsilon L_q^* e^{-\lambda \tau} \end{pmatrix}$$

Poznamenávame, že matica  $A(m^*, q^*)$  je funkciou (neznámeho) vlastného čísla  $\lambda$  a parametrov  $\bar{k}$ ,  $\theta$ ,  $L_0$ ,  $q_D$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  a  $\tau$ .

Stabilita pevného bodu je určená znamienkom reálnej časti  $\lambda$ . Ak  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , systém je v linearizovanom zmysle stabilný a opačne. Našou úlohou je analýza parametrickej závislosti rýchlosti exponenciálneho rastu alebo poklesu,  $\text{Re}(\lambda)$ , na parametroch systému, predovšetkým však na parametri oneskorenia  $\tau$ .

### 3.2.1 Charakteristická rovnica systému

Odvoďme teraz charakteristickú rovnicu matice  $A(m^*, q^*)$ :

$$\det(A(m^*, q^*) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\varepsilon L^* - \lambda & \varepsilon L^* L_q^* e^{-\lambda \tau} - L^* \\ \gamma \varepsilon & -\gamma \varepsilon L_q^* e^{-\lambda \tau} - \lambda \end{vmatrix} =$$



$$\begin{aligned}
&= (\varepsilon L^* + \lambda)(\gamma \varepsilon L_q^* e^{-\lambda\tau} + \lambda) - \gamma \varepsilon (\varepsilon L^* L_q^* e^{-\lambda\tau} - L^*) \\
&= \lambda^2 + \varepsilon L^* \lambda + \varepsilon \gamma L_q^* \lambda e^{-\lambda\tau} + \gamma \varepsilon L^* + \gamma \varepsilon^2 L^* L_q^* (L^* - 1) e^{-\lambda\tau}
\end{aligned}$$

Označme jednotlivé konštanty tak, aby nám navyše ostali v rovnici iba členy  $\lambda$  a  $e^{-\lambda\tau}$ . Potom dostávame charakteristickú rovnicu systému vo všeobecnosti

$$\lambda^2 + a\lambda + b\lambda e^{-\lambda\tau} + c + de^{-\lambda\tau} = 0, \quad (3.4)$$

kde  $a = \varepsilon L^*$ ,  $b = \varepsilon \gamma L_q^*$ ,  $c = \gamma \varepsilon L^*$  a  $d = \gamma \varepsilon^2 L^* L_q^* (L^* - 1)$ .

### 3.2.2 Riešenie linearizovaného problému

Predpokladajme, že koreňom rovnice (3.4) je rýdzdo imaginárne riešenie  $\lambda = i\omega$ ,  $\omega > 0$ .

Ďalej predpokladajme, že

$$c + d \neq 0 \quad (3.5)$$

Keby  $c + d = 0$ , potom by platilo  $\omega = 0$ . Tento špeciálny prípad budeme riešiť samostatne neskôr.

Ak dosadíme riešenie  $\lambda = i\omega$  do rovnice (3.4), dostaneme

$$-\omega^2 + i a \omega + i b \omega \cos(\omega\tau) + b \omega \sin(\omega\tau) + c + d \cos(\omega\tau) - i d \cos(\omega\tau) = 0$$

Z toho rozdelíme reálnu a imaginárnu zložku

$$\begin{aligned}
c - \omega^2 + b \omega \sin(\omega\tau) + d \cos(\omega\tau) &= 0 \\
a \omega + b \omega \cos(\omega\tau) - d \sin(\omega\tau) &= 0
\end{aligned} \quad (3.6)$$

Umocnením jednotlivých rovníc na druhú a sčítaním dokopy dostávame

$$b^2 \omega^2 + d^2 = (\omega^2 - c)^2 + a^2 \omega^2 \quad (3.7)$$

Z toho  $\omega^4 + \omega^2(a^2 - 2c - b^2) + c^2 - d^2 = 0$  a riešenie  $\omega$  je:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{(b^2 + 2c - a^2) \pm \sqrt{(b^2 + 2c - a^2)^2 - 4(c^2 - d^2)}}{2} \quad (3.8)$$

Teda ak platia nasledujúce dve podmienky:

$$[b^2 + 2c - a^2 > 0] \text{ a } [(b^2 + 2c - a^2)^2 - 4(c^2 - d^2) > 0]$$

potom

- ak  $c^2 < d^2$ , existuje práve jedno imaginárne riešenie  $\lambda = i\omega_+$ ,  $\omega_+ > 0$
- ak  $c^2 > d^2$ , existujú práve dve imaginárne riešenia  $\lambda_{\pm} = i\omega_{\pm}$ ,  $\omega_+ > \omega_- > 0$ .

Ďalej určíme znamienko derivácie  $\text{Re}\lambda(\tau)$  podľa oneskorenia  $\tau$ , keď  $\lambda(\tau)$  je rýdzo imaginárna. Z rovnice (3.4) dostávame

$$(2\lambda + a + be^{-\lambda\tau} - b\lambda\tau e^{-\lambda\tau} - d\tau e^{-\lambda\tau}) \frac{\partial\lambda}{\partial\tau} = -(-\lambda b\lambda e^{-\lambda\tau} - d\lambda e^{-\lambda\tau}) = e^{-\lambda\tau} \lambda(d + \lambda b),$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\tau} = \frac{e^{-\lambda\tau} \lambda(d + \lambda b)}{2\lambda + a + be^{-\lambda\tau} - b\lambda\tau e^{-\lambda\tau} - d\tau e^{-\lambda\tau}}.$$

Pre algebraickú výhodnosť nasledujúceho postupu ďalej použijeme prevrátenú hodnotu výrazu

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda + a + be^{-\lambda\tau} - b\lambda\tau e^{-\lambda\tau} - d\tau e^{-\lambda\tau}}{e^{-\lambda\tau} \lambda(d + \lambda b)} = \frac{(2\lambda + a)e^{-\lambda\tau} + b}{\lambda(d + \lambda b)} - \frac{\tau}{\lambda}. \quad (3.9)$$

Z rovnice (3.4) vieme vyjadriť člen  $e^{\lambda\tau}$ , t. j.

$$e^{\lambda\tau} = -\frac{b\lambda + d}{\lambda^2 + a\lambda + c}. \quad (3.10)$$

Na určenie znamienka  $\partial(\text{Re}\lambda)/\partial\tau$  využijeme získané rovnice (3.7), (3.9), (3.10) :

$$\begin{aligned} \text{sign} \left\{ \frac{\partial(\text{Re}\lambda)}{\partial\tau} \right\}_{\lambda=i\omega} &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left( \frac{\partial(\lambda)}{\partial\tau} \right) \right\}_{\lambda=i\omega} = \\ &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left( \frac{\partial(\lambda)}{\partial\tau} \right)^{-1} \right\}_{\lambda=i\omega} = \\ &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left( -\frac{2\lambda + a}{\lambda(\lambda^2 + a\lambda + c)} + \frac{b}{\lambda(d + \lambda b)} \right) + \text{Re} \left( -\frac{\tau}{\lambda} \right) \right\}_{\lambda=i\omega} \\ &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left( -\frac{2\lambda + a}{\lambda(\lambda^2 + a\lambda + c)} \right) + \text{Re} \left( \frac{b}{\lambda(d + \lambda b)} \right) \right\}_{\lambda=i\omega} \\ &= \text{sign} \left\{ \frac{a^2 - 2(c - \omega^2)}{(c - \omega^2)^2 + \omega^2 a^2} - \frac{b^2}{d^2 + b^2 \omega^2} \right\} \\ &= \text{sign} \left\{ \frac{a^2 - 2c + 2\omega^2 - b^2}{d^2 + b^2 \omega^2} \right\} \\ &= \text{sign} \{ a^2 - 2c - b^2 + 2\omega^2 \}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Po dosadení rovnice (3.8) vidíme, že výraz má kladnú hodnotu pre  $\omega_+^2$  a zápornú pre  $\omega_-^2$ . Takže reálna časť riešenia charakteristickej rovnice (3.4) rastie pre  $\omega_+^2$  a klesá pre  $\omega_-^2$ .

Pre dve rôzne riešenia  $\omega_+$  a  $\omega_-$  dostávame z (3.6) dve rôzne vyjadrenia pre kritické hodnoty parametra  $\tau$ , kedy rovnica (3.4) má dve rýdzo imaginárne riešenia:

$$\tau_{l,\pm} = \frac{\vartheta_{\pm}}{\omega_{\pm}} + \frac{2l\pi}{\omega_{\pm}}, \quad (3.12)$$

kde  $0 \leq \vartheta_{\pm} \leq 2\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}^+$  a

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_{\pm} &= \frac{(\omega_{\pm}^2 - c)d - ab\omega_{\pm}^2}{b^2\omega_{\pm}^2 + d^2}, \\ \sin \vartheta_{\pm} &= \frac{(\omega_{\pm}^2 - c)b\omega_{\pm} + ad\omega_{\pm}}{b^2\omega_{\pm}^2 + d^2} \end{aligned}$$

a z toho  $\vartheta_{\pm} = \operatorname{arccotg} \left( \frac{(\omega_{\pm}^2 - c)d - ab\omega_{\pm}^2}{(\omega_{\pm}^2 - c)b\omega_{\pm} + ad\omega_{\pm}} \right)$ .

Zhrnutie dosiahnutých výsledkov, ak platí podmienka  $c + d \neq 0$ :

Ak platia nasledujúce dve podmienky:

$$[b^2 + 2c - a^2 > 0] \text{ a } [(b^2 + 2c - a^2)^2 - 4(c^2 - d^2) > 0],$$

potom

- ak  $c^2 < d^2$ , potom ak bolo riešenie charakteristickej rovnice (3.4) pre  $\tau = 0$  nestabilné, tak pre všetky  $\tau$  bude nestabilné. Ak bolo v  $\tau = 0$  asymptoticky stabilné, tak je stabilné pre  $\tau < \tau_{0,+}$  a stane sa nestabilným pre  $\tau > \tau_{0,+}$ . V  $\tau = \tau_{0,+}$  existuje práve jedno rýdzo imaginárne riešenie rovnice (3.4)  $\lambda = i\omega_+$ ,  $\omega_+ > 0$ .
- ak  $c^2 > d^2$ , tak v kritických časových oneskoreniach  $\tau_{l,+}$  a  $\tau_{l,-}$  existujú práve dve rýdzo imaginárne riešenia  $\lambda_{\pm} = i\omega_{\pm}$ ,  $\omega_+ > \omega_- > 0$ . Ak bolo riešenie charakteristickej rovnice (3.4) pre  $\tau = 0$  stabilné, tak  $\tau_{0,+} < \tau_{0,-}$ . Všimnime si, že  $\tau_{l+1,+} - \tau_{l,+} = 2\pi/\omega_+ < 2\pi/\omega_- = \tau_{l+1,-} - \tau_{l,-}$ . Z toho vyplýva, že existuje konečný počet stabilných výmen. To znamená, že existuje časové oneskorenie  $\tau = \bar{\tau}$ , že pre  $\tau = \bar{\tau}$  dôjde k stabilitej výmene zo stabilného na nestabilné riešenie a pre  $\tau > \bar{\tau}$  ostane riešenie nestabilným. Analogicky, ak bolo riešenie charakteristickej rovnice (3.4) pre  $\tau = 0$  nestabilné, tak buď je riešenie nestabilné pre  $\tau > 0$  alebo nastane konečný počet stabilných výmen a pre  $\tau > \bar{\tau}$  ostane riešenie nestabilným.

Uvažujme teraz špeciálny prípad

$$c + d = 0. \quad (3.13)$$

Za tejto podmienky platí  $\omega = 0$ , a teda  $\lambda(\tau) = 0, \forall \tau \geq 0$  je riešením charakteristickej rovnice (3.4). Ukážme sporom, že riešenie charakteristickej rovnice spĺňajúce (3.13) je stabilné.

Ak dosadíme všeobecné riešenie  $\lambda = u + iv$  do charakteristickej rovnice (3.4), dostaneme:

$$u^2 + 2iuv - v^2 + (u + iv)(a + be^{-(u+iv)\tau}) + c + de^{-(u+iv)\tau} = 0$$

Z toho rozdelením reálnej a imaginárnej zložky dostávame dve rovnice

$$u^2 - v^2 + au + c + (bu + d)e^{-u\tau} \cos(v\tau) + bve^{-u\tau} \sin(v\tau) = 0$$

$$2uv + av + bve^{-u\tau} \cos(v\tau) - (bu + d)e^{-u\tau} \sin(v\tau) = 0$$

Umocnením jednotlivých rovníc na druhú a sčítaním dokopy dostaneme

$$(u^2 - v^2 + au + c)^2 + (2uv + av)^2 = e^{-2u\tau} [(bu + d)^2 + (bv)^2] \quad (3.14)$$

Vieme, že  $c = \gamma \varepsilon L^* > 0$ . Predpokladajme, že  $a \geq \sqrt{b^2 + 2c}$ . Pripusťme, že existuje koreň charakteristickej rovnice (3.4)  $\lambda = u + iv$ , že  $u > 0$  pre nejaké časové oneskorenie  $\tau \geq 0$ . Potom z rovnice (3.14) dostávame:

$$(u^2 - v^2 + au + c)^2 + (2uv + av)^2 < (bu + d)^2 [(bu + d)^2 + (bv)^2]$$

$$(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 + 2au(u^2 + v^2) + u^2(a^2 + 2c - b^2) + v^2(a^2 - 2c - b^2) + 2u(ac - bd) + c^2 - d^2 < 0$$

Pri daných podmienkach  $c + d = 0, c > 0, a \geq \sqrt{b^2 + 2c}$  a  $u > 0$  ale nie je možné, aby táto nerovnica mala zápornú hodnotu. Preto všetky korene charakteristickej rovnice (3.4) sú nekladné, a teda systém je stabilný (ale nie je asymptoticky stabilný, pretože  $\lambda(\tau) = 0$  je vždy koreňom charakteristickej rovnice (3.4)).

### 3.2.3 Stabilné charakteristiky pre Tobinov model

Riešením linearizovaného modelu v prechádzajúcej podkapitole nám vznikli štyri podmienky, ktoré majú zásadný vplyv na riešenie charakteristickej rovnice (3.4). V tejto podkapitole si tieto podmienky vyjadríme v pôvodných premenných zovšeobecneného Tobinovho modelu a prevedieme ich na čo najjednoduchší tvar.

**Podmienka**  $c + d \neq 0$

$$c + d = \gamma \varepsilon L^* + \gamma \varepsilon^2 L^* L_q^* (L^* - 1) \neq 0$$

Z nerovnice môžeme eliminovať  $\varepsilon, \gamma, L^*$ , ktoré nenadobúdajú nulové hodnoty a dostávame

$$1 + \varepsilon L_q^* (L^* - 1) \neq 0 \quad (3.15)$$

**Podmienka**  $c^2 < d^2$

$$c^2 - d^2 = \gamma^2 \varepsilon^2 L^{*2} - \gamma^2 \varepsilon^4 L^{*2} L_q^{*2} (L^* - 1)^2 < 0$$

Z nerovnice opäť eliminujeme  $\varepsilon, \gamma, L^*$  a dostávame

$$1 - \varepsilon^2 L_q^{*2} (L^* - 1)^2 < 0$$

$$\varepsilon^2 > \frac{1}{L_q^{*2} (L^* - 1)^2}$$

Keďže  $\varepsilon$  nadobúda len kladné hodnoty, potom

$$\varepsilon > \left| \frac{1}{L_q^* (L^* - 1)} \right| \quad (3.16)$$

**Podmienka**  $b^2 + 2c - a^2 > 0$

$$b^2 + 2c - a^2 = L_q^{*2} \varepsilon^2 \gamma^2 + 2\varepsilon L^* \gamma - \varepsilon^2 L^{*2} > 0$$

Riešením tejto kvadratickej nerovnice dostaneme ohraničenie pre parameter  $\gamma$ :

$$\gamma \in (-\infty, \gamma_-) \cup (\gamma_+, \infty), \text{ kde}$$

$$\gamma_{\pm} = \frac{-2\varepsilon L^* \pm \sqrt{4\varepsilon^2 L^{*2} + 4L_q^{*2} \varepsilon^4 L^{*2}}}{2\varepsilon^2 L_q^{*2}} = \frac{-L^* \pm \sqrt{L^{*2} + L_q^{*2} \varepsilon^2 L^{*2}}}{\varepsilon L_q^{*2}}$$

Z podmienok na parametre  $L_q^* < 0, L^* > 0, \varepsilon > 0, \gamma > 0$  nám výjde ohraničenie pre  $\gamma$ :

$$\gamma > -\frac{L^*}{\varepsilon L_q^{*2}} + \frac{\sqrt{L^{*2} + L_q^{*2} \varepsilon^2 L^{*2}}}{\varepsilon L_q^{*2}} \quad (3.17)$$

**Podmienka**  $(b^2 + 2c - a^2)^2 - 4(c^2 - d^2) > 0$

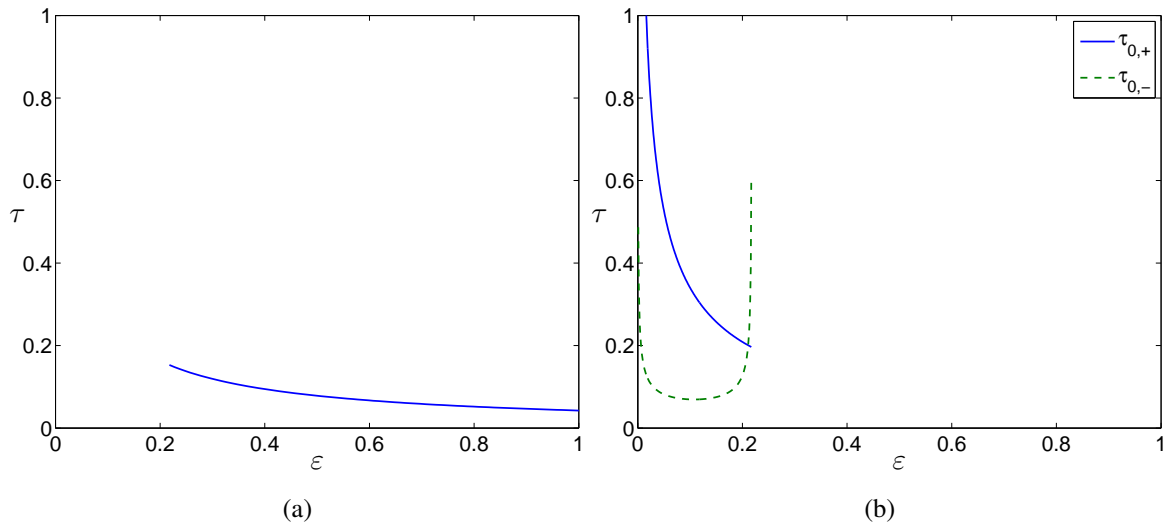
$$\begin{aligned} (b^2 + 2c - a^2)^2 - 4(c^2 - d^2) &= b^4 + a^4 + 4b^2c - 2a^2b^2 - 4a^2c + 4d^2 = \\ &= \varepsilon L_q^{*4} \gamma^4 + 4L_q^{*2} L^* \gamma^3 + 2L^{*2} L_q^{*2} \varepsilon [2(L^* - 1)^2 - 1] \gamma^2 - 4L^{*3} \gamma + \varepsilon L^{*4} > 0 \end{aligned}$$

Z podmienok na parametre  $L_q^* < 0, L^* > 0, \varepsilon > 0, \gamma > 0$  dostaneme ohraňenie pre  $\varepsilon$

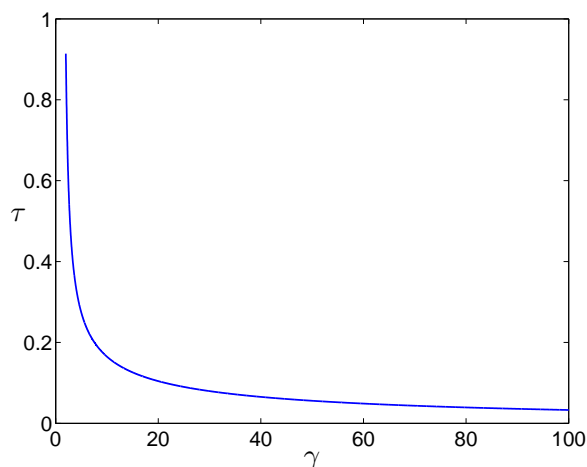
$$\varepsilon > \frac{4L^* \gamma (L^{*2} - L_q^{*2} \gamma^2)}{L_q^{*4} \gamma^4 + 2L^{*2} L_q^{*2} \gamma^2 [2(L^* - 1)^2 - 1] + L^{*4}} \quad (3.18)$$

### 3.3 Závislosť kritického časového oneskorenia od parametrov modelu

Analyzujeme teraz kritické časové oneskorenie pre stabilné výmeny  $\tau_{l,\pm}$  (3.12) v závislosti od ostatných parametrov modelu  $\varepsilon, \gamma, \theta$  a  $\bar{k}$ . Špeciálne nás zaujíma kritické oneskorenie keď  $l = 0$ .



Obr. 3.1: Závislosť kritického časového oneskorenia (a)  $\tau_{0,+}$ , resp. (b)  $\tau_{0,+}$  a  $\tau_{0,-}$  od parametra  $\varepsilon$ , pre  $\theta = 1, \bar{k} = 1, \gamma = 12, \alpha = 0.5, \beta = 0.5, L_0 = 10, q_D = 2$ . Obrázky (a) a (b) majú jednotnú mierku pre uľahčenie vzájomného porovnania.



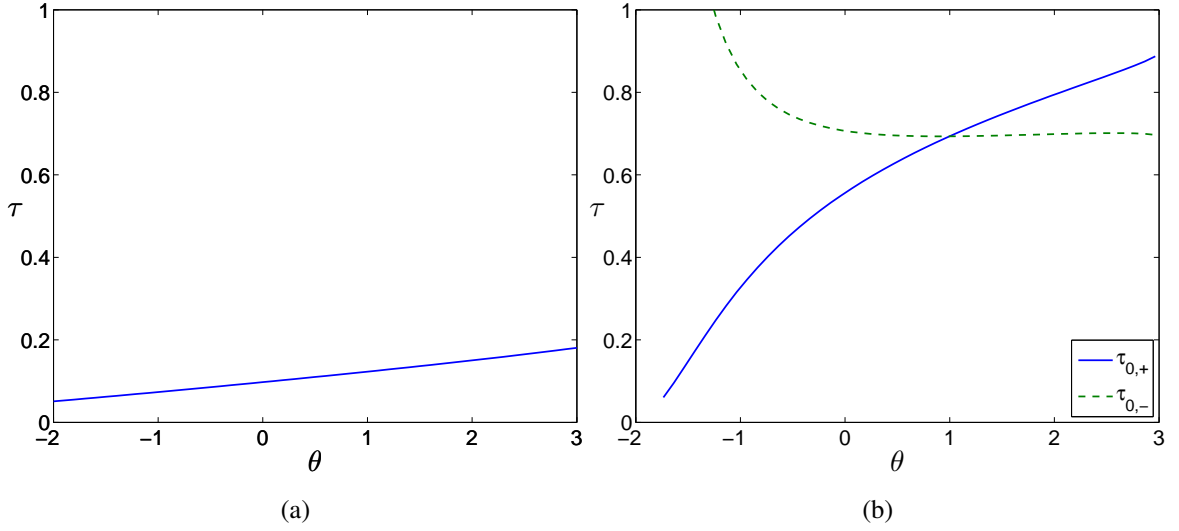
Obr. 3.2: Závislosť kritického časového oneskorenia  $\tau_{0,+}$  od parametra  $\gamma$ , pre  $\theta = 1$ ,  $\bar{k} = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $L_0 = 10$ ,  $q_D = 5$ .

Na obrázku (3.1a) je znázornená závislosť kritického časového oneskorenia  $\tau_{0,+}$  od parametra  $\varepsilon$  pre takú voľbu ostatných parametrov, že platí  $c^2 < d^2$ , čiže existuje len jedno rýdzo imaginárne riešenie  $\lambda = i\omega_+$ . Vidíme, že s rastúcim parametrom  $\varepsilon$  klesá hodnota  $\tau_{0,+}$  do 0. Takže čím je rýchlosť prispôsobenia sa cenovej úrovni vyššia  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , a teda čas potrebný na prispôsobenie je tým nižší  $1/\varepsilon \rightarrow 0$ , tým aj kritické časové oneskorenie klesá  $\tau_{0,+} \rightarrow 0$ .

Na obrázku (3.1b) je znázornená závislosť kritického časového oneskorenia  $\tau_{0,+}$  a  $\tau_{0,-}$  od parametra  $\varepsilon$  pre takú voľbu ostatných parametrov, že platí  $c^2 > d^2$ , čiže existujú dve rýdzo imaginárne riešenia  $\lambda_{\pm} = i\omega_{\pm}$ ,  $\omega_+ > \omega_- > 0$ . Vidíme, že s rastúcim parametrom  $\varepsilon$  klesá hodnota  $\tau_{0,+}$  do 0, zatiaľ čo hodnota  $\tau_{0,-}$  spočiatku klesala, ďalej bola relatívne stabilná až napokon začala rásť a prevýšila aj  $\tau_{0,+}$ .

Na obrázku (3.2) je znázornená závislosť kritického časového oneskorenia  $\tau_{0,+}$  od parametra  $\gamma$  pre takú voľbu ostatných parametrov, že platí  $c^2 < d^2$ , čiže existuje len jedno rýdzo imaginárne riešenie  $\lambda = i\omega_+$ . Vidíme, že s rastúcim parametrom  $\gamma$  klesá hodnota  $\tau_{0,+}$  do 0. Takže čím je rýchlosť prispôsobenia sa očakávaniam o cenách vyššia  $\gamma \rightarrow \infty$ , a teda čas potrebný na prispôsobenie je tým nižší  $1/\gamma \rightarrow 0$ , tým aj kritické časové oneskorenie klesá  $\tau_{0,+} \rightarrow 0$ .

Závislosť kritického časového oneskorenia  $\tau_{0,+}$  a  $\tau_{0,-}$  od parametra  $\gamma$  s takou voľbou



Obr. 3.3: Závislosť kritického časového oneskorenia (a)  $\tau_{0,+}$ , resp. (b)  $\tau_{0,+}$  a  $\tau_{0,-}$  od parametra  $\theta$ , pre  $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$ , (a)  $\bar{k} = 5, \gamma = 2.5, \varepsilon = 0.47, L_0 = 10, q_D = 5$ , (b)  $\bar{k} = 0.5, \gamma = 10, \varepsilon = 1, L_0 = 1, q_D = 2$ . Obrázky (a) a (b) majú jednotnú mierku pre uľahčenie vzájomného porovnania.

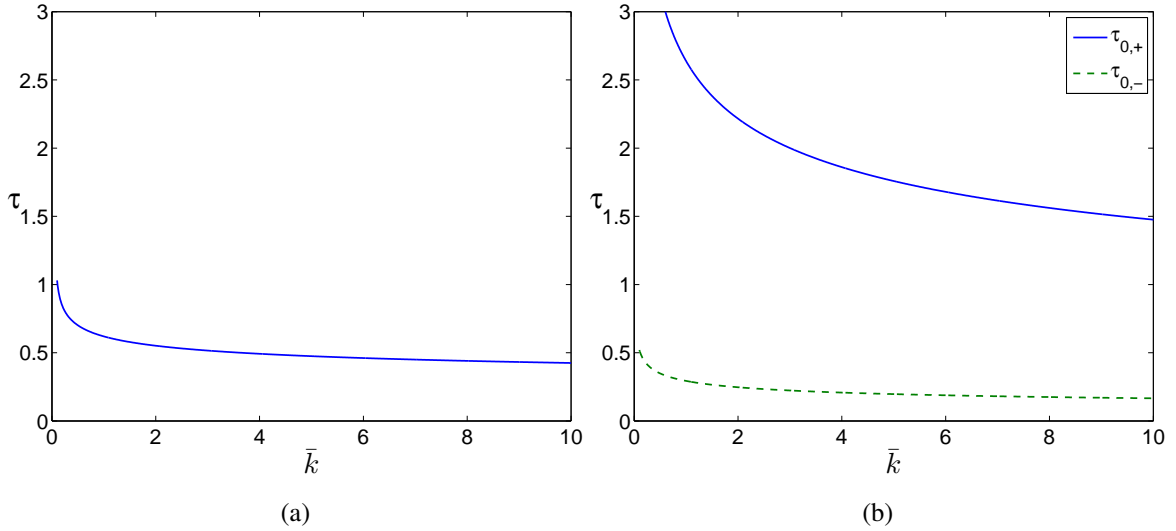
parametrov, aby  $c^2 > d^2$ , t. j. aby existovali dve rýdzo imaginárne riešenia  $\lambda_{\pm} = i\omega_{\pm}, \omega_+ > \omega_- > 0$  nie je možné graficky znázorniť, pretože pri voľbe hodnoty parametra  $\varepsilon$  sa vzájomne rušia podmienky (3.16) a (3.18).

Na obrázku (3.3a) je znázornená závislosť kritického časového oneskorenia  $\tau_{0,+}$  od parametra  $\theta$  pre takú voľbu ostatných parametrov, že platí  $c^2 < d^2$ , čiže existuje len jedno rýdzo imaginárne riešenie  $\lambda = i\omega_+$ . Vidíme, že s rastúcim parametrom  $\theta$ , miera rastu nominálneho množstva peňazí, rastie aj hodnota kritického časového oneskorenia  $\tau_{0,+}$ .

Na obrázku (3.3b) je znázornená závislosť kritického časového oneskorenia  $\tau_{0,+}$  a  $\tau_{0,-}$  od parametra  $\theta$  pre takú voľbu ostatných parametrov, že platí  $c^2 > d^2$ , čiže existujú dve rýdzo imaginárne riešenia  $\lambda_{\pm} = i\omega_{\pm}, \omega_+ > \omega_- > 0$ . Vidíme, že s rastúcim parametrom  $\theta$ , miera rastu nominálneho množstva peňazí, rastie hodnota  $\tau_{0,+}$ , kým hodnota  $\tau_{0,-}$  klesá.

Na obrázku (3.4a) je znázornená závislosť kritického časového oneskorenia  $\tau_{0,+}$  od parametra  $\bar{k}$  pre takú voľbu ostatných parametrov, že platí  $c^2 < d^2$ , čiže existuje len jedno rýdzo





Obr. 3.4: Závislosť kritického časového oneskorenia (a)  $\tau_{0,+}$ , resp. (b)  $\tau_{0,+}$  a  $\tau_{0,-}$  od parametra  $\bar{k}$ , pre  $\theta = 1$ ,  $L_0 = 10$ ,  $q_D = 2$  (a)  $\gamma = 1.2$ ,  $\varepsilon = 0.58$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.9$ , (b)  $\gamma = 10$ ,  $\varepsilon = 0.00015$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$ . Obrázky (a) a (b) majú jednotnú mierku pre uľahčenie vzájomného porovnania.

imaginárne riešenie  $\lambda = i\omega_+$ . Vidíme, že hodnota  $\tau_{0,+}$  klesá s rastúcim parametrom  $\bar{k}$ .

Na obrázku (3.4b) je znázornená závislosť kritického časového oneskorenia  $\tau_{0,+}$  a  $\tau_{0,-}$  od parametra  $\bar{k}$  pre takú voľbu ostatných parametrov, že platí  $c^2 > d^2$ , čiže existujú dve rýdzo imaginárne riešenia  $\lambda_{\pm} = i\omega_{\pm}$ ,  $\omega_+ > \omega_- > 0$ . Vidíme, že s rastúcim parametrom  $\bar{k}$  klesá hodnota  $\tau_{0,+}$  ako aj hodnota  $\tau_{0,-}$  a navyše  $\tau_{0,+} > \tau_{0,-}$ .

### 3.4 Simulácia trajektórií

V práci [3] bola urobená analýza pevných bodov a simulácia trajektórií pre dvojrozmerný linearizovaný systém. V závislosti od parametra  $\gamma$  bol pevný bod stabilným uzlom, stabilnou hviezdou, stabilnou špirálou, centrom, nestabilnou špirálou, nestabilnou hviezdou alebo nestabilným uzlom. My sme sa pokúsili tieto výsledky reprodukovať a porovnať s trajektóriou dvojrozmerného modelu s časovým oneskorením podľa (3.1) a (3.2).

Na obrázku (3.5) sú znázornené trajektórie vo fázových portrétoch. Hodnoty parametrov

sme si zvolili rovnako ako boli zvolené v práci [3], t. j.  $\bar{k} = 1$ ,  $\theta = 1.5$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $L_0 = 1$ ,  $q_D = 1$ . Parameter  $\gamma$  sa menil podľa typu pevného bodu v modeli s nulovým oneskorením. Na analýzu trajektórií modelu s časovým oneskorením sme si zvolili oneskorenie  $\tau = 1$  (na obrázkoch (3.5a-e) označené legendou ako DDE, z anglickej skratky Delay Differential Equations). Poznamenávame, že výsledky z práce [3], teda pre nulové časové oneskorenie  $\tau = 0$  (na obrázkoch (3.5a-e) označené legendou ako ODE, z anglickej skratky Ordinary Differential Equations), sa nám podarilo reprodukovať. Na obrázku je zároveň vidno porovnanie s trajektóriou modelu s časovým oneskorením  $\tau = 1$  pre rovnaké hodnoty parametrov. Obrázky majú jednotnú mierku pre uľahčenie vzájomného porovnania.

Na obrázku (3.5a) je prípad, kedy voľbou parametra  $\gamma$  má model s nulovým oneskorením pevný bod typu stabilný uzol. Vidíme, že v prípade modelu s časovým oneskorením je trajektória identická s trajektóriou modelu bez časového oneskorenia. Vo všetkých ostatných prípadoch (3.5b-e) sa trajektórie modelov nezhodujú. Pevný bod modelu s časovým oneskorením je vo všetkých ostatných prípadoch (3.5b-e) stabilná špirála.

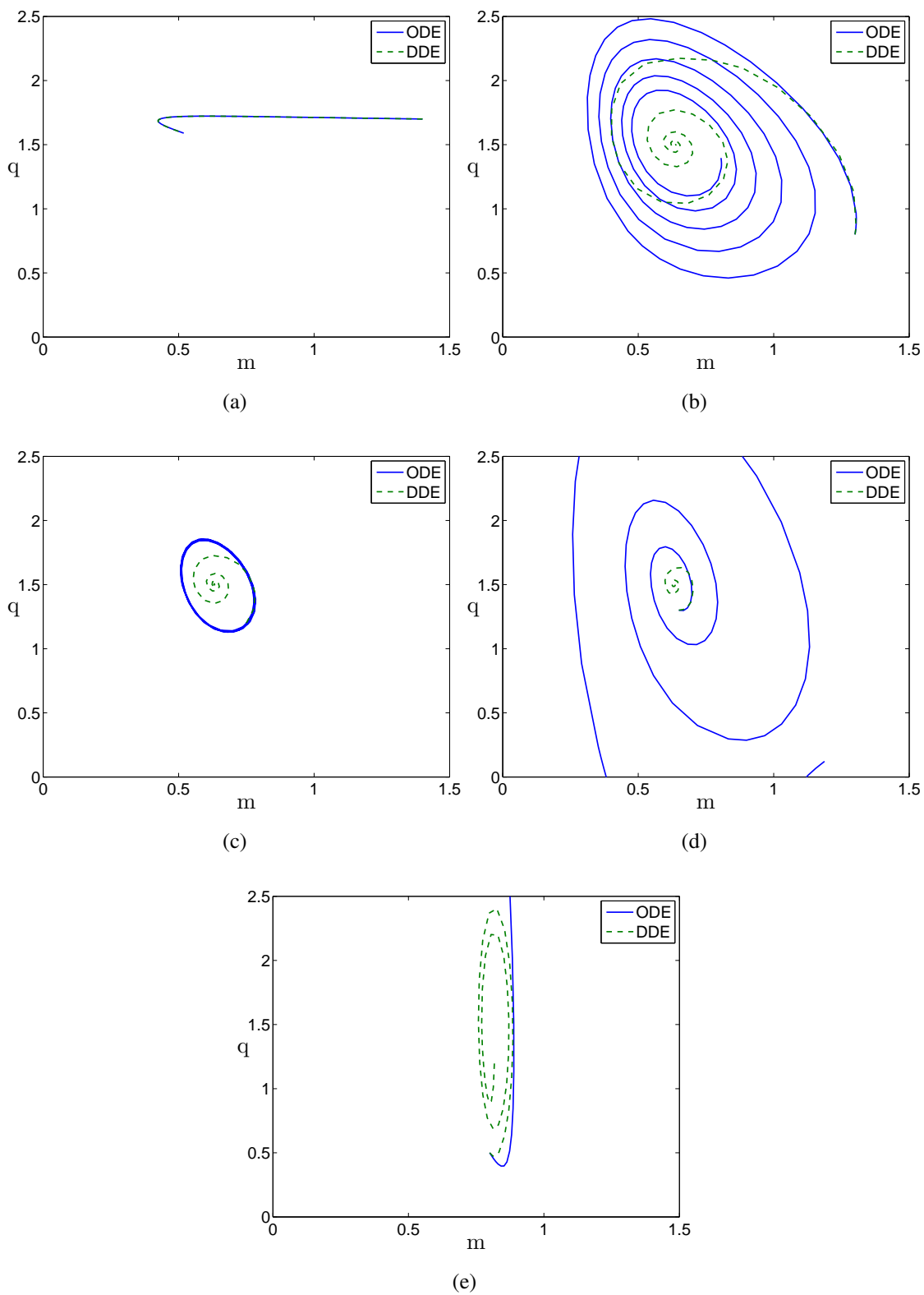
Na obrázku (3.6) môžeme vidieť časový vývoj premenných  $m$  a  $q$  pri rovnakej voľbe parametrov ako na obrázku (3.5). Ide o priebeh premenných modelu s časovým oneskorením  $\tau = 1$ . Pre porovnanie uvádzame vývoj premenných v závislosti od parametra  $\gamma$  pre všetkých päť hodnôt tak, ako boli stanovené na obrázku (3.5). Kým v prvom prípade (3.6a) ide o pevný bod typu stabilný uzol, v ostatných ide o stabilnú špirálu.

	a	b	c	d	e
$m_0$	1.4	1.3	0.75	0.65	0.8
$q_0$	1.7	0.8	1.2	1.3	0.5
$t_{max}$	20	20	20	8	1
$\gamma$	0.05	4	5	10	170

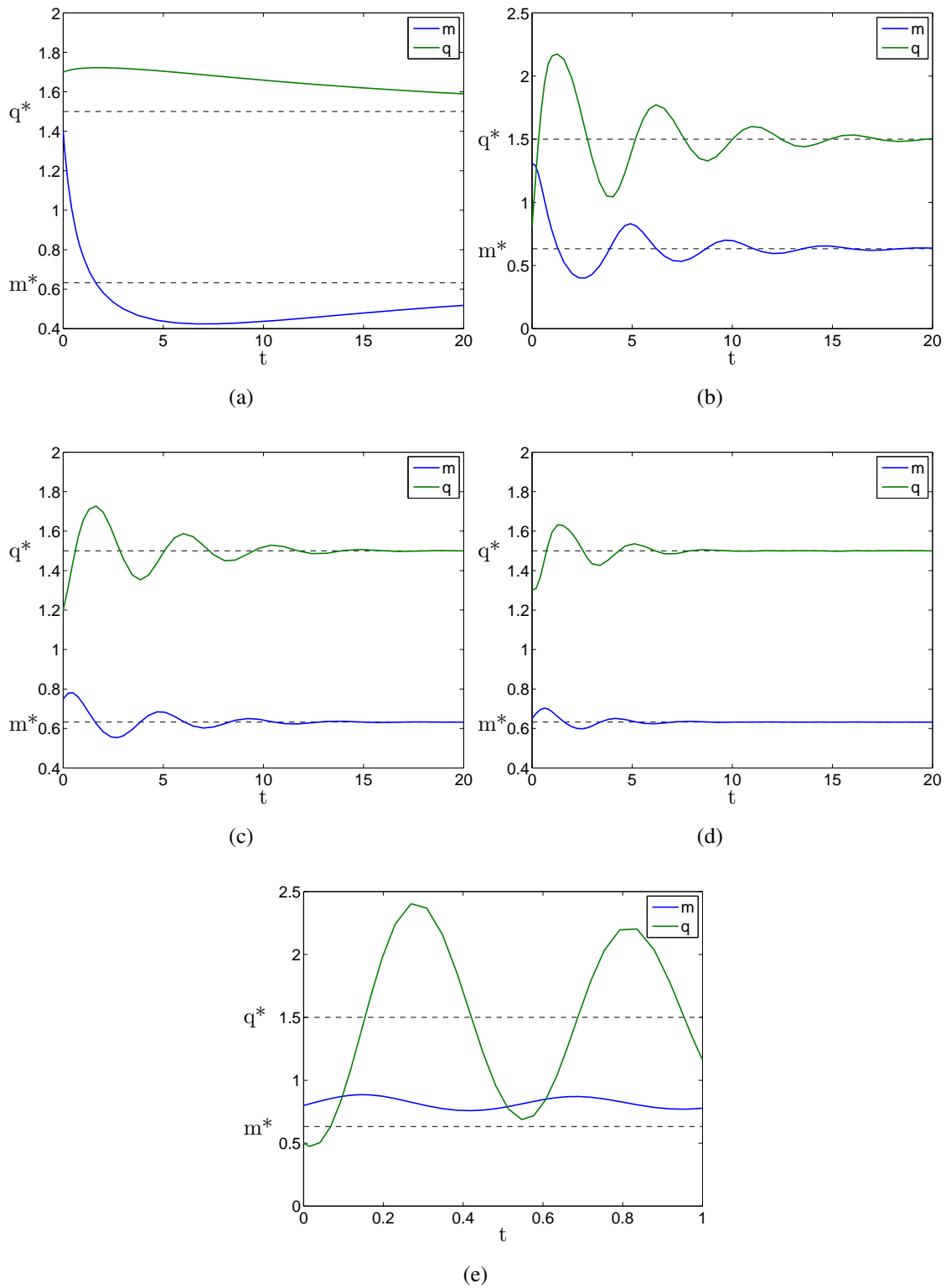
Tabuľka 3.1: Počiatočné hodnoty premenných  $m_0$  a  $q_0$  a parametrov dvojrozmerného modelu  $t_{max}$  a  $\gamma$  vstupujúcich do simulácie trajektórií

Tabuľka (3.1) zobrazuje počiatočné hodnoty premenných objemu reálnych peňazí na jed-

ného obyvateľ a  $m_0$  a očakávanej inflácie  $q_0$  a parametrov maximálne časové rozpätie modelu, na ktorom sa integruje  $t_{max}$  a rýchlosť prispôsobenia sa očakávaniam o cenách  $\gamma$ , od ktorého závisí typ pevného bodu. Tieto počiatočné hodnoty boli použité v simuláciách trajektórií, ako aj pre časový vývoj premenných modelu.



Obr. 3.5: Simulácia trajektórií dvojrozmerného modelu s voľbou parametra  $\gamma$ : a)  $\gamma = 0.05$ , b)  $\gamma = 4$ , c)  $\gamma = 5$ , d)  $\gamma = 10$ , e)  $\gamma = 170$ .



Obr. 3.6: Časový vývoj premenných  $m$  a  $q$  dvojrozmerného modelu s časovým oneskorením s voľbou parametra  $\gamma$ : a)  $\gamma = 0.05$ , b)  $\gamma = 4$ , c)  $\gamma = 5$ , d)  $\gamma = 10$ , e)  $\gamma = 170$ .

# Záver

Cieľom diplomovej práce bolo štúdium zovšeobecneného Tobinovho modelu. Ten sme najskôr podrobne odvodili a následne doplnili časové oneskorenie do premennej očakávaná inflácia, ktorá vystupuje vo funkcii dopytu po peniazoch. Predpokladmi o konštantnosti kapitálu a nemennosti veľkosti populácie sa Tobinov model zredukoval na dvojrozmerný systém s časovým oneskorením.

Našli sme jeho stacionárne riešenie a systém sme linearizovali na okolí tohto pevného bodu. Linearizovaný systém sme analyzovali z pohľadu stability v závislosti na parametri časového oneskorenia. Našli sme vyjadrenia pre kritické časové oneskorenia, kedy má charakteristická rovnica linearizovaného systému jedno rýdzo imaginárne riešenie, respektíve kedy má dve rýdzo imaginárne riešenia. Toto kritické časové oneskorenie zároveň predstavuje bod, v ktorom dochádza k zmene stabilných vlastností riešenia charakteristickej rovnice linearizovaného systému. Následne sme analyzovali vplyv zmeny štyroch parametrov modelu na kritické časové oneskorenie pre stabilné výmeny. Výsledky tejto analýzy sme prezentovali graficky.

Ďalším výsledkom je simulácia trajektórií dvojrozmerného linearizovaného systému na okolí pevného bodu. Na jednotlivých fázových portrétoch sme porovnali trajektórie linearizovaného systému s časovým oneskorením a bez časového oneskorenia. Zmenou parametra  $\gamma$ , rýchlosť prispôsobenia sa očakávaniam o cenách, sme postupne dostali päť rôznych typov pevných bodov systému bez časového ohraničenia. Pri rovnakej voľbe parametrov sme v simulácii trajektórií modelu s časovým oneskorením dostali iba dva rôzne typy pevných bodov. Ďalej sme pri tejto voľbe parametrov graficky znázornili aj časový vývoj premenných modelu s časovým oneskorením.

Štúdium linearizovaného systému s časovým oneskorením je samotným prínosom tejto diplomovej práce, keďže ide o základ, ktorý je potrebný pred ďalšou analýzou nelineárnych vlastností modelu. Možnosťou nadviazania na túto prácu môže byť napríklad štúdium nelineárnych vlastností Hopfovej bifurkácie s oneskorením.

# Literatúra

- [1] BENHABIB J. - MIYAO T. 1981. Some New Results on the Dynamics of the Generalized Tobin Model. In *International Economic Review* 22, 589-596.
- [2] BUŠA J. - HNATICĀ M. 2004. *Chaos. Úvod do problematiky*. 2. vyd. Košice: Mercury-Smékal, s. r. o., 2004. 207 s. ISBN 80-89061-93-1.
- [3] FOLTIN M. 2011. *Analýza Tobinovho modelu s Cobbovou-Douglasovou produkčnou funkciou*. : diplomová práca. Bratislava: Univerzita Komenského, 2011. 44 s.
- [4] HADJIMICHALAKIS M. - OKUGUCHI K. 1978. The Stability of a Generalized Tobin Model. In *Review of Economic Studies* 46, 175-178.
- [5] HADJIMICHALAKIS M. 1971. Money, Expectations, and Dynamics - an Alternative View. In *International Economic Review* 12, 381-402.
- [6] HADJIMICHALAKIS M. 1971. Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money - the Tobin Models. In *Review of Economic Studies* 38, 457-479.
- [7] JORDAN D.W. - SMITH P. 2007. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Oxford University Press, 2007. ISBN 978-0-19-920824-1.
- [8] KUANG Y. 1993. *Delay Differential Equations With Applications In Population Dynamics*. San Diego: Academic Press Inc., 1993. 398 s. ISBN 0-12-427610-5.
- [9] TOBIN J. 1965. Money and Economic Growth. In *Econometrica* 33, 671-684, 1965.