

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

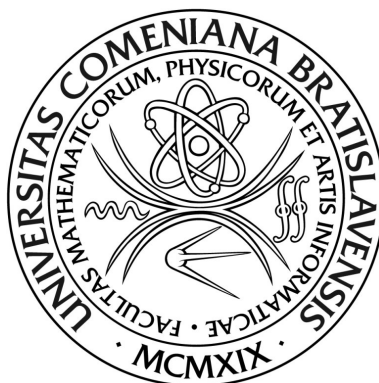


OCEŇOVANIE REÁLNYCH OPCÍ POMOCOU MONTE
CARLO METÓDY NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2012

Bc. Veronika Vanáková

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



OCEŇOVANIE REÁLNYCH OPCÍ POMOCOU MONTE
CARLO METÓDY NAJMENŠÍCH ŠTVORCOV

Diplomová práca

Študijný odbor: Aplikovaná matematika 1114
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci diplomovej práce: Mgr. Jana Szolgayová, PhD.

Bratislava 2012

Bc. Veronika Vanáková



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Veronika Vanáková
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Oceňovanie reálnych opcií pomocou Monte Carlo metódy najmenších štvorcov

Cieľ: Práca sa bude zaoberať numerickým oceňovaním reálnych opcií pomocou Monte Carlo metódy najmenších štvorcov. Reálna opcia je vlastne právo, nie však povinnosť, investovať do daného projektu za vopred stanovenú expiračnú cenu do stanoveného času. Investíciou získam v hodnotu projektu, ktorá však v skutočnosti nebýva deterministická, ale môžeme ju vnímať ako stochastický proces. Oceňovanie týchto investičných príležitostí je analogické oceňovaniu amerických opcií. Problémy z praxe často vedú na problémy, v ktorých sa vyskytujú viaceré stochastické procesy a riešenie vieme nájsť len numericky, kde jednou z metód oceňovania takýchto reálnych opcií je práve Monte Carlo metóda najmenších štvorcov.

Vedúci: Mgr. Jana Szolgayová, PhD.

Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum zadania: 13.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne, len s pomocou uvedenej literatúry a konzultácií.

V Bratislave, apríl 2012

.....

Veronika Vanáková

Pod'akovanie

V prvom rade sa chcem veľmi pekne poďakovať vedúcej mojej diplomovej práce, Mgr. Jane Szolgayovej, PhD., za všetok jej čas, odborné vedenie a náležité pripomienky. Zároveň ďakujem mojej rodine, priateľovi a kamarátom za ich hlbokú podporu počas celého môjho štúdia.

Abstrakt

Táto diplomová práca sa zaoberá relatívne novou metódou v investičnom rozhodovaní, a to metódou reálnej opcie, ktorá je analogická americkým typom finančných opcií. Reálna opcia je právo, ale nie povinnosť, investovať počas daného obdobia do nejakého projektu vopred stanovenú sumu a získať tak stochastickú hodnotu projektu. Analýza reálnej opcie okrem ceny opcie poskytuje aj informácie, kedy a za akých podmienok je vhodné zrealizovať investíciu. Tieto informácie nám zaužívaná metóda čistej súčasnej hodnoty neposkytuje a jej hlavným problémom je, že neberie do úvahy možnosť rozhodnúť sa neskôr. Metóda reálnej opcie je však matematicky náročnejšia a cieľom tejto práce je predstaviť jednu z možných metód, ktorou môžeme oceňovať reálne opcie - Monte Carlo metódu najmenších štvorcov. V praktickej časti tejto práce aplikujeme poznatky o reálnych opciách a Monte Carlo metóde najmenších štvorcov na konkrétny príklad.

Kľúčové slová: investičné rozhodovanie, čistá súčasná hodnota, reálna opcia, Monte Carlo simulácie, Monte Carlo metóda najmenších štvorcov

Abstract

This master's thesis deals with a relatively new method in investment decision making, the so called real option method which is analogous to the American-type financial options. Real option is a right, but not an obligation, to invest a preset amount of money during a specific time period into some investment project and obtain a stochastic value of the investment project. The analysis of real options gives us, not only the price of the option, but also the information about when and under what conditions it is optimal to realise the investment. This information is not provided by the conventional net present value method and its major problem is not taking into consideration the possibility of delaying the decision for later. The real option method is mathematically more difficult to solve and the aim of this master's thesis is to introduce one possible way of pricing real options - Least Squares Monte Carlo. In the practical part of this work we will apply the knowledge of real options and Least Squares Monte Carlo to a concrete example.

Keywords: investment decision making, net present value, real option, Monte Carlo simulations, Least Squares Monte Carlo

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 1 |
| 1 Reálna opcia ako metóda investičného rozhodovania | 3 |
| 1.1 Investícia a rozhodovanie | 3 |
| 1.2 Metódy investičného rozhodovania | 4 |
| 1.3 Historický úvod k reálnym opciám | 6 |
| 1.4 Reálne opcie versus finančné opcie | 7 |
| 1.5 Typy reálnych opcií | 8 |
| 1.6 Porovnanie reálnej opcie s metódou NPV | 10 |
| 2 Monte Carlo metóda najmenších štvorcov | 13 |
| 2.1 Úvod do Monte Carlo metódy najmenších štvorcov | 13 |
| 2.2 Kostra algoritmu | 16 |
| 2.3 Algoritmus LSM | 18 |
| 2.4 Určenie hodnoty opcie a konvergencia metódy | 20 |
| 2.5 Zhrnutie priebehu algoritmu | 21 |
| 2.6 Hlavné problémy metódy LSM | 23 |
| 3 Metódy redukcie variancie v Monte Carlo simuláciách | 25 |
| 3.1 Control Variates metóda | 25 |
| 3.2 Moment matching metóda | 28 |
| 3.3 Antithetic variates metóda | 29 |
| 4 Kalibrácia algoritmu na jednoduchom príklade | 31 |
| 4.1 Popis problému | 31 |
| 4.2 Riešenie problému | 32 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.3 | Cena opcie | 33 |
| 4.3.1 | Zníženie variancie s antithetic variates metódou | 33 |
| 4.3.2 | Kalibrácia algoritmu | 33 |
| 4.4 | Hranica predčasného uplatnenia | 36 |
| 4.5 | Citlivosť na zmenu počtu časových krokov K | 38 |
| 4.5.1 | Cena opcie | 38 |
| 4.5.2 | Hranica predčasného uplatnenia | 38 |
| 4.6 | Zhrnutie | 40 |
| 5 | Príklad zanechania továrne na výrobu etanolu | 41 |
| 5.1 | Popis problému | 41 |
| 5.2 | Simulácia ceny etanolu | 42 |
| 5.3 | Riešenie problému | 43 |
| 5.4 | Výsledky algoritmu | 45 |
| 5.5 | Analýza citlivosti | 48 |
| 5.5.1 | Zmena volatility | 49 |
| 5.5.2 | Zmena jednotkových nákladov | 50 |
| 5.5.3 | Zmena zostatkovej hodnoty továrne | 51 |
| 5.6 | Zhrnutie | 53 |
| | Záver | 54 |
| | A Prílohy | 56 |
| A.1 | Algoritmus LSM pre jednoduchý príklad z Kapitoly 4 | 56 |
| A.2 | Algoritmus LSM pre príklad s továrňou na výrobu etanolu z Kapitoly 5 | 58 |
| | Literatúra | 61 |

Úvod

Investičné rozhodnutia sú dnes takmer všadeprítomným problémom. Môžeme sa s nimi stretnúť nielen v súkromných firmách, ale napríklad aj vo verejnom sektore. Optimálne investičné rozhodnutie je také rozhodnutie, ktoré je naplánované spôsobom, aby peňažné toky z jeho prijatia boli maximálne. Týmto spôsobom tak napríklad manažéri firiem môžu maximalizovať hodnotu firmy, čo je cieľom podnikania. Napriek tomu, že dnešný svet je plný investičných rozhodnutí, teória investičného rozhodovania je ešte stále predmetom výskumu.

Rozvoj teórie investičného rozhodovania súvisel najmä s rozvojom teórie finančných opcií v 20. storočí. Investície sa môžu vnímať ako právo, avšak nie povinnosť, investovať do daného projektu, ktorý má určitú hodnotu, za cenu nákladov na realizáciu, kde si môžeme všimnúť podobnosť s finančnými opciami. Oceňovanie reálnych opcií je však, rovnako ako oceňovanie finančných opcií, matematicky náročnejšie v porovnaní s inými a zaužívanými metódami investičného rozhodovania. Najmä z dôvodu tejto matematickej náročnosti nie je koncept reálnej opcie ešte veľmi zaužívaný. V tejto diplomovej práci si preto uvedieme jednu z mnohých numerických metód, ako môžeme oceniť reálnu opciu a zároveň určiť hranicu predčasného uplatnenia, ktorá je pri reálnych opciách podstatná, nakoľko predstavuje akési investičné pravidlo, kde dáva investorom informácie pri akých podmienkach v danom čase je vhodné investíciu zrealizovať. Touto metódou je Monte Carlo metóda najmenších štvorcov, ktorá bola pôvodne vyvinutá pre americké opcie, avšak ako uvidíme, reálne opcie sú opciami amerického typu, a preto môžeme túto metódu aplikovať aj pri probléme reálnych opcií. Za touto metódou je silná matematická teória, metóda je ale pomerne jednoducho implementovateľná.

Diplomová práca sa skladá z piatich kapitol. V prvej kapitole si podrobnejšie predstavíme pojem reálnej opcie, ukážeme v čom sa metóda líši od tradičnej metódy čistej

súčasnej hodnoty, rovnako ako načrtneme podobnosť s finančnými opciami amerického typu. V druhej kapitole sa zameriame na samotnú Monte Carlo metódu najmenších štvorcov. V tejto kapitole predpokladáme čitateľovu znalosť teórie finančných opcií a stochastického kalkulu. Obsahom tretej kapitoly sú niektoré metódy redukcie variancie, ktoré sa používajú pri simulačných metódach pre spresnenie výsledku pri použití menšieho počtu simulácií, čím je možné urýchliť výpočet. Štvrtá kapitola je zameraná na kalibráciu nami implementovanej Monte Carlo metódy najmenších štvorcov s použitím antithetic variates metódy redukcie variancie. Budeme v nej oceňovať veľmi jednoduchú reálnu opciu a vďaka jej úplnej analógii s finančnou put opciou budeme porovnávať výsledky s výsledkami z inej metódy oceňovania finančných opcií, konkrétne z Crank Nicholsonovej metódy konečných diferencií. V poslednej kapitole následne aplikujeme Monte Carlo metódu najmenších štvorcov s využitím antithetic variates metódy redukcie variancie na konkrétny a reálnejší príklad reálnej opcie. Ukážeme si výsledky algoritmu ako aj analýzu senzitivnosti na zmeny v parametroch.

Kapitola 1

Reálna opcia ako metóda investičného rozhodovania

V prvej kapitole tejto diplomovej práce si povieme, čo je investičné rozhodovanie a aké najrozšírenejšie metódy investičného rozhodovania v súčasnosti poznáme. Následne sa zameriame na metódu reálnej opcie, pozrieme sa na to, čo znamená pojem reálna opcia a uvedieme čitateľa do histórie tejto relatívne novej metódy oceňovania reálnych projektov (odkiaľ pochádza názov *reálna opcia*). Povieme si, prečo sa v jej názve vyskytuje práve pojem *opcia*, to znamená, aké sú jej spoločné črty s finančnými opciami, a porovnáme si túto metódu s inými, dodnes bežne používanými metódami, ktoré avšak nedávajú správne výsledky, narozdiel od metódy reálnych opcií. Medzi tieto metódy patrí najmä metóda čistej súčasnej hodnoty *NPV* (*net present value*) a hlavné rozdiely medzi týmito dvomi metódami si pre lepšie pochopenie uvedieme aj na názornom príklade.

1.1 Investícia a rozhodovanie

Úlohou manažéra každej firmy je maximalizovať jej hodnotu. Jednou z možností, ako maximalizovať hodnotu firmy, je rozumná investícia, teda taká, ktorá prinesie určité zisky a neprinesie straty. Investíciu môžeme definovať ako vzdávanie sa finančných prostriedkov v súčasnosti v prospech budúcich ziskov. Väčšina investícií sa vyznačuje tromi rovnakými vlastnosťami. Prvou z týchto vlastností je nezvratnosť investície. Nezvratnosť investície znamená, že ak raz investíciu zrealizujeme, tak svoje investované

prostriedky už nemôžeme získať späť, alebo ak aj áno, tak nie v plnej hodnote. Napríklad ak investujeme do vybavenia počítačového laboratória kúpou nových počítačov, tieto počítače už nebudeme schopní predať späť za rovnakú kúpnu cenu, ale budeme ich musieť predať "pod cenu". Nevrátili by sa nám tak všetky investované prostriedky a teda investícia je nezvratná. Druhou charakteristikou väčšiny investícií je neistota ich budúcich výnosov. Investície sú zvyčajne plánované na dlhšie časové obdobie a v čase rozhodovania nie sú k dispozícii dáta o budúcich cenách, úrokových mierach, infláciách a iných faktoroch, ktoré môžu ovplyvniť našu investíciu. Poslednou spoločnou črtou pre investície je, že investor, respektíve manažér, sa môže rozhodnúť, v akom čase zrealizuje investíciu. Môže teda s investíciou dnes počkať za účelom získania nových informácií v budúcnosti a investíciu zrealizovať v čase, keď bude podmienky pokladať za optimálne. V prípade, že investíciu zrealizuje, vzdáva sa tak možnosti získania nových informácií v budúcnosti.

1.2 Metódy investičného rozhodovania

Jednou z dodnes najpoužívanějších metód v oblasti investičného rozhodovania je čistá súčasná hodnota NPV . Táto metóda pracuje s peňažnými tokmi projektu, pričom ich diskontuje do časovej základne, v ktorej sa rozhodujeme o investícii do projektu. Je to vlastne rozdiel medzi všetkými peňažnými tokmi, ktoré získame prijatím projektu a nákladmi na realizáciu projektu. Označme

- I - náklady na realizáciu projektu
- C_i - peňažné toky z projektu v čase i
- r - diskontná miera

NPV potom môžeme vypočítať ako:

$$NPV = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_i}{(1+r)^i} - I \quad (1.1)$$

Pravidlo NPV hovorí

- akceptuj investíciu, ktorej $NPV > 0$
- neakceptuj investíciu, ktorej $NPV < 0$

Ďalšími metódami investičného rozhodovania sú:

- Doba návratnosti
- Vnútoraná miera výnosnosti
- Index ziskovosti

Doba návratnosti (*payback period*) je počet rokov, za ktoré sa peňažné toky z investície vyrovnajú počiatočnej investícii na realizáciu projektu. Často slúži na porovnávanie viacerých možností, pričom preferovaná má byť tá, ktorá má menšiu dobu návratnosti. Je to veľmi jednoduché pravidlo a problémom tejto metódy je, že v princípe nediskontuje budúce peňažné toky (čo môžeme vylepšiť diskontovanou dobou návratnosti), a taktiež neberie do úvahy peňažné toky plynúce z investície po dobe návratnosti. Projekt, ktorý má napríklad malú dobu návratnosti (to znamená, že investičný kapitál sa rýchlo vráti a nie je ďalej ohrozený), sa tak môže zdať zaujímavý, ale v princípe z doby návratnosti nevieme nič viac o vývoji peňažných tokov v budúcnosti, ktoré môžu mať nielen pozitívny ale aj negatívny vývoj. Preto má táto metóda veľmi nízku vypovedaciu schopnosť.

Vnútoraná miera výnosnosti *IRR* (*internal rate of return*) je miera výnosu projektu, ktorá je nezávislá od úrokovej miery na trhu. *IRR* môžeme vypočítať pomocou vzorca pre *NPV*. Je to taký výnos r , pri ktorom je *NPV* rovná 0. Pravidlo potom hovorí, aby sme investovali do projektu, ak je *IRR* väčšia ako úroková miera na trhu, a naopak neinvestovali, ak je *IRR* menšia ako úroková miera na trhu.

Index ziskovosti *PI* (*profitability index*) je akousi alternatívou čistej súčasnej hodnoty. Je definovaný ako:

$$PI = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{(1+r)^i}}{I} \quad (1.2)$$

Potom podľa pravidla *NPV* platí, že do projektu je vhodné investovať ak $PI > 1$ a neinvestovať ak $PI < 1$.

Všimnime si, že všetky spomenuté metódy súvisia s *NPV*, ktorá je dnes stále bežne používaná pri investičných rozhodnutiach napriek tomu, že jej výsledky nemusia byť presné, a môže tak viesť k nesprávnemu investičnému rozhodnutiu. Metóda *NPV* má viacero problémov:

- ako zvoliť diskontnú mieru

- ako odhadnúť budúce peňažné toky
- ako zohľadniť infláciu

Uvažujme investíciu, ktorej hodnota sleduje nejaký markovovský proces. *NPV* potom môžeme počítať ako strednú hodnotu výnosov a následne aplikujeme pravidlo *NPV* spomenuté vyššie. Všimnime si, že *NPV* rieši investičný problém iba statickým spôsobom, v ktorom sa rozhodujeme *teraz alebo nikdy*, a nedáva nám žiadne informácie do budúcnosti, ako sa rozhodnúť v prípade, že sa situácia na trhu zmení. Tu môžeme spomenúť možnosť použitia stochastického dynamického programovania, pri ktorom sa síce taktiež rozhodujeme na základe očakávanej súčasnej hodnoty, avšak zároveň optimalizujeme čas investície pri predpoklade, že investíciu môžeme zrealizovať teraz alebo kedykoľvek až do daného času maturity T . V stochastickom dynamickom programovaní však zostáva rovnako ako pri *NPV* problém ako zvoliť diskontnú mieru, ktorá sa volí subjektívne. Voľbu subjektívnej diskontnej miery môžeme odstrániť metódou reálnej opcie, kde využívame analógiu s finančnými opciami. Tu je diskontný faktor daný ako bezrizikový výnos a stredná hodnota výnosov sa počíta v martingálovej bezrizikovej miere, narozdiel od stochastického dynamického programovania, kde strednú hodnotu počítame v pôvodnej reálnej miere. Na to však oproti stochastickému dynamickému programovaniu vyžadujeme dôležitý predpoklad, a to že trhy sú úplné, a výstup firmy môže byť taktiež obchodovateľný na finančných trhoch. Potom vieme zostaviť portfólio aktív, ktoré replikuje riziko vo vývoji ceny výstupu firmy. Cena opcie, ktorú počítame metódou reálnej opcie, predstavuje narozdiel od ceny vypočítanej pomocou stochastického dynamického programovania férovú cenu na trhu tak, aby nevznikla arbitráž.

1.3 Historický úvod k reálnym opciam

Reálna opcia je narozdiel od finančných opcií relatívne novým pojmom. Predstavuje nový prístup v oceňovaní a rozhodovaní o investičných príležitostiach firiem. Oproti klasickej metóde čistej súčasnej hodnoty *NPV*, ktorá vníma investičnú príležitosť ako možnosť „investovať teraz, alebo nikdy“, reálna opcia zohľadňuje možnosť „investovať teraz, alebo počkať“ a získať nové informácie. Možnosť počkať má určitú nezápornú hodnotu, pretože v budúcnosti máme dostupné nové informácie, napríklad o vývoji cien, úrokových mier a podobne.

Reálne opcie súviseli s rozvojom teórie finančných derivátov, keď sa vedecká verejnosť začala zaujímať aj o aplikáciu tejto teórie na investičné rozhodovania. Samotný termín „reálna opcia“ prvýkrát použil Stewart C. Myers v článku *Determinants of Corporate Borrowing* v roku 1977 ([31]), kde poukázal na analógiu väčšiny investičných rozhodnutí s finančnými opciami. Ešte v roku 1930 sa Irving Fisher vo svojej práci ([25]) zmienil o *opciách* (možnostiach), ktoré má majiteľ firmy k dispozícii. Napriek tomu sa samotný pojem reálnej opcie objavil až omnoho neskôr, čo súviselo najmä s odvođením analytického riešenia oceňovania finančných derivátov, ako napríklad známy Black-Scholesov vzorec v roku 1973 ([11]).

Reálne opcie sú dodnes stále predmetom aktívneho akademického výskumu. Spomedzi viacerých významných profesorov z tejto oblasti môžeme spomenúť Michaela J. Mauboussina, ktorý tému reálnych opcií „spopularizoval“ ([28]), alebo Lenosa Trigeorgisa, ktorý rozšíril metódu reálnej opcie vďaka jeho článkom pre laikov ([8]).

V súčasnosti sa metóda reálnej opcie začína uplatňovať v strategickom rozhodovaní vo firmách. Timothy Luehrman spopularizoval význam ponímať strategické investície ako opcie: "*Z finančného hľadiska je firemná stratégia skôr séria opcií ako séria statických peňažných tokov*" ([26, 27]). Dôležitou výzvou je sprístupniť tento matematicky náročnejší model reálnej opcie (narozdiel od *NPV*) širokej verejnosti. Významnou publikáciou v tejto oblasti je kniha *Investment under Uncertainty* od A. K. Dixita a R. S. Pindycka, ktorá slúžila aj ako základný text pri písaní tejto práce ([15]).

1.4 Reálne opcie versus finančné opcie

Ako sme spomenuli vyššie, väčšinu investícií, napriek ich rozdielom, charakterizujú najmä tri spoločné vlastnosti a to:

- Nezvratnosť investície
- Neistota budúcich výnosov, respektíve strát
- Načasovanie investície

Tu si môžeme všimnúť určitú analógiu s finančnými opciami amerického typu. Investícia predstavuje vlastne akési právo ale nie povinnosť investovať svoje prostriedky do určitého projektu za účelom získania peňažných tokov v budúcnosti. Investované

prostriedky si môžeme predstaviť ako *strike price* a získané peňažné toky plynúce z investície ako dividendový výnos podkladového aktíva v budúcnosti. Časový interval, na ktorom sa rozhodujeme o zrealizovaní investície potom predstavuje maturitu opcie. Samotná investícia je vlastne uplatnením tejto opcie, kedy sa investor vzdáva možnosti čakania a získavania nových informácií v budúcnosti. Oceňovanie reálnych opcií je teda analogické oceňovaniu amerických opcií na akcie vyplácajúce dividendy. Jednotlivé analógie medzi týmito dvomi typmi opcií uvádzame pre lepší prehľad v Tabuľke 1.1 (tabuľka je prebratá z diplomovej práce A. Michnovej [29]).

| Reálna opcia | Premenná | Americká opcia |
|--|------------|---------------------------------------|
| Hodnota projektu | S | Hodnota podkladového aktíva |
| Náklady na investíciu | I | Expiračná cena opcie |
| Čas, do kedy je možné investovať do projektu | T | Maturita opcie |
| Peňažné toky z investície | δ | Dividendový výnos podkladového aktíva |
| Volatilita projektu | σ^2 | Volatilita podkladového aktíva |

Tabuľka 1.1: Porovnanie reálnych opcií s americkými opciami na akcie vyplácajúce dividendy

Musíme si však uvedomiť, že medzi finančnými a reálnymi opciami je aj mnoho rozdielov. Jedným z fundamentálnych rozdielov je, že finančné opcie sú veľmi štandardizované, a preto môže byť použitý jeden model pre oceňovanie veľkého množstva rôznych kontraktov na rôzne podkladové aktíva, obchodované v rôznych časoch, atď. Naopak, každá reálna opcia má svoje vlastné špecifiká, a často sa reálne opcie vzájomne diametrálne líšia jedna od druhej. Tieto rozdiely sú z dôvodu, že pri každej investícii môžeme mať iné podmienky, ako sa rozhodovať, alebo taktiež z dôvodu, že v reálnych opciách zvyčajne pozorujeme viacero možných vplyvov náhodnosti.

1.5 Typy reálnych opcií

V predošlej podkapitole sme si porovnali reálne opcie s finančnými opciami. Rovnako ako finančné opcie majú aj reálne opcie viacero typov. Vo finančných opciách je zá-

kladným delením delenie na kúpne, respektíve *call* opcie a na predajné, inak povedané *put* opcie. Každá z týchto dvoch typov finančných opcií má aj akýsi svoj ekvivalent v reálnych opciách. Vzhľadom na veľkú rozmanitosť reálnych opcií však poznáme aj iné typy reálnych opcií, o ktorých si v krátkosti povieme niečo viac (zoznam uvedený aj v diplomovej práci I. Michnovej [29]):

- *option to wait* - je analogická klasickej americkej *call* opcii na akciu vyplácajúcu dividendy. *Option to wait* predstavuje možnosť odložiť investorove rozhodnutie, či má zrealizovať nejaký projekt, na neskôr, keď bude mať k dispozícii novšie informácie, ktoré zatiaľ nie sú známe. Ako sme už vyššie spomenuli, takáto možnosť odkladať svoje rozhodnutie má oproti možnosti rozhodnúť sa o investícii *teraz alebo nikdy* určitú nezápornú hodnotu. Zároveň sa tak jedná o dynamické rozhodovanie v každom časovom kroku, v ktorom sa využívajú všetky aktuálne informácie.
- *option to abandon* - je naopak analogická klasickej americkej *put* opcii. *Option to abandon* predstavuje možnosť ukončiť nejaký projekt predčasne z dôvodu nedostatočnej výnosnosti a predáť vybavenie určené na realizáciu projektu za určitú cenu (napríklad technické vybavenie, patenty a podobne). Tento krok je nezvratný a opätovné zrealizovanie projektu býva väčšinou veľmi nákladné, preto investori preferujú isté dočasné straty s vierou, že v budúcnosti, keď sa situácia na trhu zlepší, nadobudnú opäť výnosy.
- *option to switch* - predstavuje možnosť prejsť z jednej alternatívy na inú, pričom každá alternatíva je optimálna pri iných podmienkach.
- *compound option* - je vlastne opcia na opciu, to znamená, že je to taká reálna opcia, ktorá umožňuje po zrealizovaní jednej opcie realizovanie inej reálnej opcie. Dobrým príkladom môže byť napríklad taká *option to switch*, pri ktorej môžeme bez obmedzení prechádzať od jednej alternatívy k druhej.
- *rainbow option* - je opcia, v ktorej sa vyskytuje viacero druhov náhodnosti, to znamená, že viacero premenných môže sledovať nejaký stochastický proces. Tieto opcie väčšinou najlepšie popisujú realitu, pretože vo väčšine reálnych projektov môžeme pozorovať niekoľko zdrojov náhodnosti. Spomeňme si aspoň dva zjavné

zdroje náhodnosti a to úrokovú mieru a výšku investícií (pri *option to wait*), respektíve výšku získaných prostriedkov (pri *option to abandon*) z predčasného ukončenia projektu.

Investičné rozhodovanie v reálnom svete najlepšie okrem *rainbow* opcí popisujú aj *compound* opcie, respektíve kombinácia takýchto dvoch typov reálnych opcí.

1.6 Porovnanie reálnej opcie s metódou NPV

Metóda *NPV* je dodnes jednou z najpoužívanějších metód pri investičnom rozhodovaní. Jej základné predpoklady sú, že investícia je zvratná, respektíve že investovať môžeme dnes alebo nikdy. Nezohľadňuje možnosť rozhodovať sa dynamicky v budúcich časových krokoch s využitím aktuálnych informácií. Namiesto toho vo výpočtoch pre budúce rozhodnutia berie očakávané hodnoty neznámych parametrov.

Pre lepšie pochopenie, prečo metóda *NPV* nevedie vždy k optimálnemu rozhodnutiu, a v čom sa odlišuje metóda reálnej opcie, si uvedieme veľmi jednoduchý príklad, ktorého podobnú verziu uvádza vo svojej publikácii aj Z. Chladná ([22]). Predpokladajme, že máme k dispozícii les s objemom dreva 1000m^3 , pričom cena dreva je volatilná a my sa rozhodujeme, či máme les vyťažiť teraz (stratégia A), alebo o rok (stratégia B). Predpokladajme, že žiadnu inú možnosť ako ťažiť dnes alebo o rok nemáme. Taktiež predpokladajme, že drevo môže byť vyťažené okamžite a objem dreva v lese sa v priebehu nasledujúceho roka nezmení. Náklady na ťažbu dreva sú $60\text{Eur}/\text{m}^3$ a o rok sa s pravdepodobnosťou 1 nezmenia. Jediným zdrojom neistoty je cena dreva, ktorá je dnes $70\text{Eur}/\text{m}^3$ a o rok vzrastie na $80\text{Eur}/\text{m}^3$ s pravdepodobnosťou 0,6, a klesne na $50\text{Eur}/\text{m}^3$ s pravdepodobnosťou 0,4. Predpokladajme taktiež, že drevo budeme schopní okamžite predať. Nech bezriziková úroková miera je 4% ročne a pre zjednodušenie príkladu potrebujeme dôležitý predpoklad, že riziko ceny dreva je plne diverzifikovateľné a teda budúce peňažné toky môžeme diskontovať bezrizikovou úrokovou mierou. Čistá súčasná hodnota projektu je dnes:

$$NPV^A = 1000 \times (-60 + 70) = 10000\text{Eur} > 0$$

Keďže $NPV > 0$, podľa pravidla *NPV* sa máme rozhodnúť pre ťažbu dreva okamžite.

Uvažujme teraz o možnosti ťažby dreva o rok. O tejto možnosti sa rozhodujeme dnes a preto pomocou statickej metódy *NPV* by sme hodnotu takéhoto projektu počítali

pomocou priemernej hodnoty ceny dreva nasledovne:

$$NPV^B = \frac{0,6 \times 1000 \times (-60 + 80) + 0,4 \times 1000 \times (-60 + 50)}{1.04} = 7692,31 \text{Eur} > 0$$

Taktiež, keďže $NPV^B < NPV^A$, zdá sa, že optimálne rozhodnutie je ťažiť drevo z lesa dnes, a nie odložiť ťažbu o rok.

V metóde reálnych opcií však uvažujeme o možnosti počkať a rozhodnúť sa o rok, keď budeme vedieť, čo sa stalo s cenou dreva. Máme teda opäť dve možnosti - investovať dnes, alebo s investíciou počkať. Hodnota investície dnes je rovnaká ako v predošlom prípade a teda $NPV_r^A = 10000 \text{Eur}$. Zmení sa však hodnota investície o rok, pretože narozdiel od predošlého prípadu sa rozhodujeme až o rok, čo znamená, že máme k dispozícii aktuálne informácie. Ak cena dreva klesne pod cenu ťažby, projekt sa pre nás stáva nevýnosným, a v takom prípade ho nezrealizujeme. Potom platí:

$$\begin{aligned} NPV_r^B &= 0,6 \max \left\{ \frac{1000 \times (-60 + 80)}{1.04}; 0 \right\} + 0,4 \max \left\{ \frac{1000 \times (-60 + 50)}{1.04}; 0 \right\} \\ &= 11538,46 \text{Eur} > 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že $NPV_r^B > NPV^A > NPV^B$. To znamená, že optimálne rozhodnutie je počkať a k rozhodnutiu sa vrátiť o rok, keď budeme vedieť, ako sa vyvinula cena dreva. Tento princíp rozhodovania sa o realizácii projektu je už však dynamickým princípom a je to prístup reálnej opcie. Zrealizovať investíciu okamžite by bolo správnym optimálnym rozhodnutím v prípade, že by sme sa o investícii museli rozhodnúť dnes. My však s týmto rozhodnutím môžeme počkať, a preto výsledok obyčajného prístupu NPV nie je v našom príklade správny.

Všimnime si, že ak disponujeme možnosťou rozhodnúť sa teraz alebo o rok, má to oproti možnosti rozhodnúť sa teraz alebo nikdy určitú hodnotu. Je to jednoducho rozdiel: $NPV_r^B - NPV^A = 1538,46 \text{Eur}$. Táto hodnota predstavuje cenu reálnej opcie, teda cenu toho, že máme možnosť s investíciou počkať. Aby pravidlo metódy NPV (investuj ak $NPV > 0$ a neinvestuj ak $NPV < 0$) dávalo správne optimálne riešenie, mali by sme do výpočtu NPV zohľadniť aj túto hodnotu reálnej opcie, ktorá predstavuje hodnotu oportunitných nákladov, teda náklady ušlej príležitosti toho, že sme sa rozhodli investovať dnes a vzdali sme sa príležitosti čakať. Správne by teda malo byť

$$NPV = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_i}{(1+r)^i} - I - \text{oportunitné náklady}$$

V našom príklade sme uvažovali veľmi zjednodušenú realitu. V skutočných problémoch sa väčšinou môžeme rozhodovať o investícii v oveľa väčšom počte časových krokov a taktiež budúce peňažné toky nám bývajú málokedy dopredu známe, preto metóda *NPV* zlyháva o to viac v podaní správneho investičného rozhodnutia, zatiaľ čo metóda reálnej opcie sa lepšie približuje realite.

Kapitola 2

Monte Carlo metóda najmenších štvorcov

V tejto kapitole sa pozrieme na jednu z metód, ako možno oceňovať opcie vo všeobecnosti, a teda aj reálne opcie, a to na Monte Carlo metódu najmenších štvorcov. Pre začiatok si povieme ako samotná metóda vznikla. Následne si načrtne kostru algoritmu, kde sa dopracujeme k problému, ako určiť podmienenú očakávanú hodnotu výplaty z držania opcie v každom časovom kroku. Potom si povieme, ako sa pri Monte Carlo metóde najmenších štvorcov rieši problém určenia tejto hodnoty a na akých predpokladoch je metóda založená. V závere kapitoly sa zameriame na diskusiu ohľadom výberu bazových funkcií, ich počtu, počtu Monte Carlo simulácií a počtu diskretných časových krokov, ktoré je potrebné zvoliť pre dosiahnutie požadovanej konvergenie výpočtu.

2.1 Úvod do Monte Carlo metódy najmenších štvorcov

Monte Carlo metóda vznikla v roku 1946, keď John von Neumann, Stanislaw Ulama a Nicholas Metropolis pracovali na projekte jadrových zbraní (*Manhattan Project*). Títo traja fyzici skúmali vo vedeckom laboratóriu v Los Alamos tienenie proti žiareniu a vzdialenosť, ktorú by neutróny pravdepodobne prešli cez rôzne materiály. Keďže väčšinu potrebných údajov nebolo možné získať analyticky, Ulama prišiel s nápadom riešiť úlohu pomocou náhodných experimentov. Metóda bola pravdepodobne pomeno-

vaná podľa známeho kasína Monte Carlo v Monaku, kde Ulamov strýko zvykol utrácať svoje peniaze na hazard. Význam Monte Carlo metód vzrástol s vývojom výpočtovej techniky a Monte Carlo metódy sa stali veľmi populárnymi najmä v oblasti fyziky, fyzikálnej chémie a operačného výskumu. Podstatou Monte Carlo metód je generovanie náhodných vstupov zo zadaného pravdepodobnostného rozdelenia, ktoré potom používame na deterministické výpočty a na záver sa tieto výpočty analyzujú.

Monte Carlo simulácie si našli svoje uplatnenie aj v oblasti financií pri oceňovaní komplexných finančných nástrojov, kde sa pre výpočet ceny využívali simulácie jednotlivých zdrojov náhodnosti, ktoré vplývajú na ceny týchto finančných nástrojov, a nasledným určením ich očakávanej hodnoty. Čo sa týka ich využitia pre výpočet cien opcií, Monte Carlo simulácie sa pôvodne aplikovali len pre výpočet ceny európskych opcií, kde sa dali využiť priamočiaro. Aproximácia ceny takýchto opcií sa dala nájsť jednoducho tak, že sa urobilo N simulácií stochastického vývoja podkladového aktíva až do času T , tzn. po maturitu opcie, a cena opcie sa určila ako priemer výplat v čase T zdiskontovaných do času 0. Takýto numerický výpočet je oproti analytickému výpočtu, ktorý sa pri európskych typoch opcií dá použiť, atraktívnejší najmä z dôvodu jeho flexibility na stochastické procesy podkladového aktíva. Pri zmene procesu totiž nie je potrebné odvádzať nové parciálne diferenciálne rovnice, zmení sa iba simulácia dráh podľa daného procesu a zvyšný postup numerického výpočtu ceny opcie sa prakticky nemení.

Pri amerických typoch opcií je použitie Monte Carlo simulácií o niečo náročnejšie a zo začiatku sa nejavilo ako vhodné riešenie. Pri amerických typoch opcií je totiž problém, ako určiť hodnotu opcie, keď ju môžeme uplatniť kedykoľvek až do jej maturity T , a nielen v čase T , ako v prípade európskych opcií. Taktiež nás okrem samotnej ceny opcie zaujíma aj optimálna stratégia, kedy a za akých podmienok máme opciu uplatniť. Prvé dôležité snahy o ocenenie amerických typov opcií pomocou simulačných metód sa objavovali od roku 1989, kedy Bossaerts riešil stratégiu uplatnenia opcie, ktorá maximalizovala simulovanú hodnotu opcie ([19]). Nasledovalo mnoho ďalších rozličných simulačných metód oceňovania opcií, ktoré aproximovali funkciu hustoty, alebo hranicu predčasného uplatnenia opcie (J. A. Tilley [32], D. Martineau a J. Barraquand [4], G. Jain, M. Broadie a P. Glasserman [7], F. Zapatero a A. Ibanez [6], D. Garcia [23]).

Monte Carlo metóda najmenších štvorcov je relatívne nová metóda oceňovania

opcií, ktorú navrhli Longstaff a Schwartz v roku 2001 ([5]). Monte Carlo metóde najmenších štvorcov predchádzalo aj niekoľko podobných riešení oceňovania amerických typov opcií pomocou Monte Carlo simulácií (J. F. Carriere [21], B. Van Roy a J. N. Tsitiklis [1]). Táto metóda sa od ostatných simulačných metód líši v samotnom zameraní na podmienenú funkciu očakávanej výplaty. Metóda spočíva v odhadnutí očakávanej hodnoty výplaty v prípade držania opcie z prierezových dát, ktoré získame zo simulácií. Aproximáciu tejto očakávanej hodnoty získame projekciou na lineárny priestor s konečným počtom bazových funkcií pomocou lineárnej regresie metódou najmenších štvorcov. Od predošlých prác sa metóda autorov Longstaff a Schwartz líši v tom, že uvádzajú rozsiahlu praktickú implementáciu a pri aproximácii používajú iba dráhy, v ktorých sa opcia v danom časovom kroku nachádza v pozícii *in-the-money*, čo v prípade reálnych opcií predstavuje situáciu, kedy je čistá súčasná hodnota v danom kroku kladná: $NPV > 0$. Takáto aproximácia nielen znižuje časovú náročnosť výpočtu, nakoľko počet výpočtov je významne menší ako pri aproximovaní používajúc všetky dráhy, ale taktiež aj zvyšuje efektívnosť algoritmu pre americké typy opcií.

Od roku 2001 sa mnohí autori snažili zistiť vlastnosti Monte Carlo metódy najmenších štvorcov ako napríklad robustnosť metódy (J. F. Navas a M. Moreno [9]), stabilita metódy (O. Mostovyi [30]), respektíve sa zamerali na jej zlepšenie a jej využitie pre viaceré typy opcií, spomedzi ktorých môžeme spomenúť aj reálne opcie (M. J. R. Armada a A. Rodrigues [12]). Pôvodná Monte Carlo metóda najmenších štvorcov využíva pri aproximácii očakávanej funkcie výplaty projekciu pomocou lineárnej regresie metódou najmenších štvorcov. Existujú však aj rôzne iné alternatívy k metóde najmenších štvorcov, ktoré sa ukázali aj ako vhodnejšie najmä v niektorých prípadoch, ako napríklad keď je malý počet simulácií, alebo v prípade, že je veľký počet funkcií v aproximačnej schéme (C. Yang a S. Tompaidis [3]). Ukázalo sa, že je možné dosiahnuť taktiež výrazné zlepšenie rýchlosti algoritmu pomocou paralelizácie v jednotlivých fázach algoritmu, ktorými sú simulácia dráh, kalibrácia a oceňovanie (S. Kumar, Y. Sabharwal, A. R. Choudhury a A. King [18]). Všetky tieto poznatky však vychádzajú z pôvodnej práce Longstaffa a Schwartz, ktorých algoritmus si následne podrobnejšie rozoberieme pre americké opcie. Algoritmus sa dá aplikovať aj pre reálne opcie, keďže reálne opcie sú opciami amerického typu.

2.2 Kostra algoritmu

Uvažujme úplný pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{F}, P) a konečný časový horizont $[0, T]$. Ω predstavuje množinu všetkých možných realizácií stochastického vývoja stavovej premennej v čase od 0 po T a ω je prvok množiny Ω , teda jednotlivá dráha stochastického vývoja stavovej premennej. \mathcal{F} je sigma algebra rozlíšiteľných udalostí v konečnom čase T a P je pravdepodobnostná miera definovaná pre prvky \mathcal{F} . Definujme teraz $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ ako rozšírenú filtráciu¹ generovanú na základe príslušných procesov cien, kde predpokladáme $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ a \mathcal{F}_t je sigma algebra rozlíšiteľných udalostí v čase t . Rovnako predpokladáme existenciu martingálovej miery Q .

Podstatu algoritmu si vysvetlíme na prípade, keď jediným zdrojom náhodnosti je cena aktíva X_t , ktorá sleduje markovovský proces, metóda je však ľahko aplikovateľná aj pre prípady s viacerými zdrojmi náhodnosti, napríklad stochasticky sa vyvíjajúca úroková miera a podobne. Naším cieľom je spočítať cenu opcie amerického typu. V modeli predpokladáme, že o možnosti uplatnenia opcie sa rozhodujeme iba v K diskretných časových krokoch: $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_K = T$. Dráha ω predstavuje teda nasimulovaný vývoj ceny podkladového aktíva $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_K}$ v K diskretných časových krokoch t_1, t_2, \dots, t_K . Ak opciu uplatníme v čase t , dostaneme okamžitú výplatu $\pi(X_t)$ ². Označme $C(\omega, s; t, T)$ ako hodnotu peňažných tokov, ktoré opcia generuje v čase s za podmienky, že opcia nebola uplatnená do času t a držiteľ opcie sleduje optimálnu stratégiu uplatnenia opcie pre všetky $s : t < s \leq T$. Optimálnou stratégiou rozumíme sériu rozhodnutí o uplatnení alebo neuplatnení opcie v každom časovom kroku a pre každú možnú hodnotu podkladového aktíva v tomto kroku, pričom opciu uplatníme v momente, ak výplata z jej uplatnenia je kladná a väčšia ako očakávaná výplata z držania opcie. Bezrizikovú úrokovú mieru budeme značiť ako r a cenu opcie ako $V(X_t, t)$ v čase t , keďže ako jediný zdroj náhodnosti sme určili cenu podkladového aktíva.

Podľa metódy LSM od Longstaffa a Schwartza ([5]) riešime celý dynamický systém

¹Filtráciou na pravdepodobnostnom priestore (ω, \mathcal{F}, P) nazývame systém σ -algebier $\{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$, $\mathcal{M}_t \subset \mathcal{F}$, takých že $0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t$ (I. Melicherčík, [16])

²ak uvažujeme opciu amerického typu a označíme E ako *strike price*, čiže expiračná cena opcie, potom je výplata z uplatnenia opcie v čase t určená ako $\pi(X_t) = X_t - E$ pre call opciu a $\pi(X_t) = E - X_t$ pre put opciu. Pri reálnych opciách výplata $\pi(X_t)$ závisí od konkrétneho prípadu.

rozhodovania kedy uplatniť opciu rekurzívne. Začíname teda v konečnom čase T , kedy je rozhodnutie o tom, či máme opciu uplatniť, alebo nie, narozdiel od ostatných časových krokov, jednoduché. Opciu za podmienky, že dotedy nebola uplatnená, jednoducho uplatníme, ak je v pozícii *in-the-money* (čiže pri reálnych opciách ak $NPV > 0$) a neuplatníme inak. Opcia má v tomto časovom kroku hodnotu:

$$V(X_T, T) = \max(\pi(X_T), 0) \quad (2.1)$$

Ak opciu neuplatníme, maturita opcie vyprší, náš dynamický systém rozhodovania sa tu končí a v budúcnosti sa už k rozhodovaniu nebudeme vracieť. Nemáme teda k dispozícii žiadne iné možné rozhodnutie. Omnoho zložitejším problémom však je, ako sa máme rozhodnúť v predošlých krokoch t_k pre $k = K - 1, K - 2, \dots, 1$. V týchto krokoch totiž máme na výber vždy 2 možnosti:

1. Uplatniť opciu okamžite (to je investovať do projektu a získať peňažné toky $\pi(X_t)$)
2. Neuplatniť opciu, ale počkať a vrátiť sa k rozhodnutiu opäť v ďalšom časovom kroku, kedy máme k dispozícii nové informácie

Narozdiel od konečného časového kroku T , pri možnosti neuplatniť opciu budeme naše rozhodnutie o uplatnení opcie opakovať opäť v ďalšom časovom kroku. Opciu uplatníme v momente, keď je hodnota v prípade okamžitého uplatnenia opcie kladná a väčšia alebo rovná očakávanej hodnote v prípade ponechania opcie. V prípade okamžitého uplatnenia opcie sú peňažné toky známe a hodnota opcie sa vtedy rovná $\pi(X_t)$. Ak sa však rozhodneme ponechať opciu, peňažné toky plynúce z takéhoto rozhodnutia nám nie sú známe. V takomto prípade je hodnota opcie daná ako očakávaná hodnota diskontovaných zvyšných peňažných tokov $C(\omega, s; t_k, T)$:

$$F(X_{t_k}; t_k) = E_Q \left[\sum_{j=k+1}^K e^{-r(t_j - t_k)} C(\omega, t_j; t_k, T | \mathcal{F}_{t_k}) \right] \quad (2.2)$$

kde očakávaná hodnota je závislá od informácií \mathcal{F}_{t_k} v čase t_k . Hodnota opcie je teda určená ako očakávaná stredná hodnota budúcich peňažných tokov, ktorá je podmienená informáciami, ktoré máme v danom časovom kroku k dispozícii. Získavame tak problém porovnávania hodnoty z okamžitého uplatnenia opcie s hodnotou v prípade ponechania

opcie, a keďže hodnotu opcie maximalizujeme, tak opciu uplatníme akonáhle je hodnota z okamžitej výplaty kladná a väčšia alebo rovná ako hodnota z ponechania opcie. Môžeme si všimnúť, že sa v podstate jedná o úlohu optimálneho riadenia, nakoľko postupujeme rekurzívne a v každom časovom kroku vyberáme maximálnu výplatu dvoch alternatív, na základe čoho sa následne rozhodneme medzi týmito dvomi alternatívami. V Bellmanovej rovnici optimálneho riadenia tak za hodnotu ponechania opcie dosadíme predošlý výraz, čiže:

$$V(X_{t_k}, t_k) = \max(F(X_{t_k}; t_k), \pi(X_{t_k})) \quad (2.3)$$

Problémom pri riešení ceny opcie amerického typu je teda určenie podmienenej očakávanej hodnoty diskontovaných budúcich peňažných tokov (2.2) v každom čase t_k . Ak vieme, ako spočítať $F(X_{t_k}; t_k)$, nie je problém určiť cenu opcie. Monte Carlo metóda najmenších štvorcov rieši presne problém, ako určiť hodnotu $F(X_{t_k}; t_k)$.

2.3 Algoritmus LSM

LSM je skratkou od Least Squares Monte Carlo, čiže Monte Carlo metóda najmenších štvorcov. Niekedy sa v literatúre označuje aj ako LSMC. Monte Carlo v názve metódy znamená, že pri tejto metóde nepočítame výstupy na mreži, ako vo väčšine iných numerických metód, ale pri výpočtoch vychádzame z vygenerovaných simulácií v závislosti od jednotlivých zdrojov náhodnosti. V algoritme sa používa metóda najmenších štvorcov pre aproximáciu funkcie očakávanej hodnoty $F(X_{t_k}; t_k)$ v jednotlivých časových krokoch $t_k = t_{K-1}, t_{K-2}, \dots, t_1$, ktorú potrebujeme porovnať s hodnotou z okamžitej výplaty opcie. V algoritme postupujeme odzadu, pretože dráha peňažných tokov $C(\omega, s; t, T)$ je definovaná rekurzívne.

V algoritme pri počítaní výstupov používame nasimulované dráhy. Na začiatku preto vygenerujeme N rôznych možných vývojov, respektívne dráh ω stavovej premennej v čase až po maturitu opcie T . Výplata v poslednom časovom kroku je pre každú dráhu ω známa, ako sme spomenuli v predošlej podkapitole. Algoritmus LSM rieši problém, ako určiť očakávanú hodnotu zdiskontovaných peňažných tokov $F(X_{t_k}, t_k)$ v kroku t_k . Preto sa zameriame a vysvetlíme si postup pre prvý „problematický“ krok, kde sa musíme rozhodnúť, či opciu uplatníme okamžite, alebo počkáme na nové informácie v ďalšom časovom kroku, to je t_{K-1} . V čase t_{K-1} predpokladáme, že neznámy

tvár funkcie $F(X_{t_{K-1}}, t_{K-1})$ môže byť reprezentovaný ako lineárna kombinácia spočítateľnej množiny $\mathcal{F}_{t_{K-1}}$ -merateľných bázových funkcií. Keďže stochastická premenná X , od ktorej závisí hodnota opcie, sleduje markovovský proces, jednou z možností ako vybrať bázové funkcie je množina vážených Laguerreových polynómov, ktoré majú nasledovnú formu:

$$\begin{aligned}
L_0(X) &= \exp\left(-\frac{X}{2}\right) \\
L_1(X) &= \exp\left(-\frac{X}{2}\right)(1-X) \\
L_2(X) &= \exp\left(-\frac{X}{2}\right)\left(1-2X+\frac{X^2}{2}\right) \\
&\vdots \\
L_n(X) &= \exp\left(-\frac{X}{2}\right)\frac{e^X}{n!}\frac{d^n}{dX^n}(X^n e^{-X})
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Funkcia $F(X_{t_{K-1}}; t_{K-1})$ má potom tvar

$$F(X_{t_{K-1}}; t_{K-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j L_j(X) \tag{2.5}$$

kde koeficienty a_j sú konštanty. Existuje mnoho ďalších možností, ako zvoliť bázové funkcie, napríklad Legendrove, Gegenbauerove, Hermitove, alebo Jacobiho polynómy. V algoritme funkciu $F(X_{t_{K-1}}; t_{K-1})$ aproximujeme iba pomocou prvých $M < \infty$ bázových funkcií a túto aproximáciu si označíme ako $F_M(X_{t_{K-1}}; t_{K-1})$. $F_M(X_{t_{K-1}}; t_{K-1})$ odhadneme projekciou diskontovaných hodnôt $C(\omega, s; t_{K-1}, T)$ na bázové funkcie pre také dráhy, pre ktoré je opcia v danom čase t_{K-1} v pozícii *in-the-money* a hodnotu tejto funkcie označíme $\widehat{F}_M(X_{t_{K-1}}; t_{K-1})$. Ak opcia nie je v pozícii *in-the-money*, tak ju samozrejme nie je vhodné uplatniť. My však riešime situáciu, ako sa rozhodnúť, ak môžeme opciu uplatniť, alebo počkať, a preto berieme do úvahy iba tieto dráhy. V opačnom prípade by sme celý algoritmus jednak spomalili, a jednak by sme dostali rozdielne výsledky v regresii, ktoré nemajú správnu výpovednú hodnotu pre náš prípad. Teraz už môžeme porovnať hodnoty peňažných tokov z okamžitého uplatnenia opcie s odhadnutou hodnotou $\widehat{F}_M(X_{t_{K-1}}; t_{K-1})$ a na základe toho sa rozhodneme, ktorá z dvoch stratégií (uplatniť opciu alebo počkať) je optimálna. Po určení optimálneho rozhodnutia v čase t_{K-1} môžeme následne určiť peňažné toky $C(\omega, s; t, T)$ pre čas $t = t_{K-2}$. Celý postup opakujeme pre všetky ostatné časové kroky t_{K-2}, t_{K-3}, \dots ,

1, to znamená, až pokým nemáme určené optimálne rozhodnutie v každom časovom kroku pre každú dráhu.

Výsledkom algoritmu je tak matica optimálnych stratégií s rozmermi $N \times K$ a hodnotami 0 a 1 pre jednotlivé dráhy, v ktorej 0 znamená, že pre danú dráhu (riadok matice) v danom časovom kroku (stĺpec matice) nie je optimálne opciu uplatniť, a naopak 1 znamená, že opciu je pre danú dráhu optimálne uplatniť v danom časovom kroku za predpokladu, že dovtedy nebola uplatnená. Optimálny čas uplatnenia opcie pre danú dráhu je určený ako prvá 1 v danom riadku.

2.4 Určenie hodnoty opcie a konvergencia metódy

Pre určenie hodnoty opcie postupujeme nasledovne: začneme v čase 0, pohybujeme sa po každej dráhe ω až kým nenájdeme optimálny čas uplatnenia opcie, tj prvá 1 v matici optimálnych stratégií, zdiskontujeme hodnotu peňažných tokov z uplatnenia opcie do času 0 a na záver spriemerujeme hodnoty zo všetkých dráh ω . Priemer týchto hodnôt je potom hodnotou opcie.

Pri amerických typoch opcií, a obzvlášť pri reálnych opciách, kde cena opcie má skôr informatívny charakter výšky oportunitných nákladov, je pre nás okrem samotnej ceny opcie podstatná aj hranica predčasného uplatnenia v čase. Táto hranica je funkciou času a hovorí nám, kedy a za akých podmienok máme opciu uplatniť. Pre jej určenie môžeme opäť využiť maticu optimálnych stratégií. V každom časovom kroku nájdeme ku každej 1 v matici optimálnych stratégií k nej prislúchajúcu vygenerovanú hodnotu podkladového aktíva X , a spomedzi všetkých takto nájdených hodnôt určíme ako hraničnú hodnotu minimum z nich pre call opciu, a naopak maximum z nich pre put opciu.

Celý algoritmus LSM spočíva v dvoch typoch aproximácií:

1. nahradenie podmienenej funkcie očakávanej hodnoty v dynamickom programovaní projekciou na konečnú množinu bázových funkcií
2. použitie Monte Carlo simulácií a regresiu pomocou najmenších štvorcov pre získanie hodnoty funkcie z aproximácie 1.

O konvergencii uvedenej metódy hovoria nasledujúce dve vety (F. A. Longstaff a E. S. Schwartz [5]):

Veta 1. Pre akýkoľvek výber M a K a vektor $\theta \in R^{M \times (K-1)}$, ktorý reprezentuje koeficienty pre M bazových funkcií v každom z $(K - 1)$ krokov, nech $LSM(\omega; M, K)$ predstavuje diskontované peňažné toky plynúce z LSM pravidla, že opciu uplatníme, ak okamžitá výplata z uplatnenia je kladná a väčšia alebo rovná $\widehat{F}_M(X_{t_k}; t_k)$ definované vektorom θ . Potom platí takmer určite nasledovná nerovnosť:

$$V(X_0, 0) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N LSM(\omega_i; M, K) \quad (2.6)$$

Veta 2. Predpokladajme, že cena americkej opcie závisí len od jednej stochastickej premennej X , ktorá nadobúda hodnoty v intervale $(0, \infty)$, a ktorá sleduje markovovský proces. Ďalej predpokladáme, že opciu je možné uplatniť len v časoch t_1 a t_2 , podmienená funkcia očakávania $F(X_{t_1}; t_1)$ je absolútne spojitá a

$$\int_0^\infty e^{-X} F^2(X_{t_1}; t_1) dX < \infty$$

$$\int_0^\infty e^{-X} F_X^2(X_{t_1}; t_1) dX < \infty.$$

Potom pre akékoľvek $\epsilon > 0$ existuje $M < \infty$ také, že:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Pr \left[\left| V(X_0, 0) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N LSM(\omega_i; M, K) \right| > \epsilon \right] = 0 \quad (2.7)$$

Prvá veta hovorí, že uvedený algoritmus nám dáva odhad zhola pre akýkoľvek konečný výber M bazových funkcií a K časových krokov. Druhá veta nám zabezpečuje konvergenciu metódy pri určitých predpokladoch pre dostatočne veľké M a počet simulácií N idúci do nekonečna. Viac o konvergenčných vlastnostiach Monte Carlo metódy najmenších štvorcov možno nájsť v práci *An analysis of the Longstaff-Schwartz algorithm for American option pricing* (E. Clément, D. Lamberton a P. Protter [14]).

Ako sme spomenuli, Monte Carlo metóda najmenších štvorcov Longstaffa a Schwartza nám dáva odhad ceny opcie zdola. Za spomenutie však stojí, že existuje aj modifikácia tejto metódy, ktorá dáva odhad ceny opcie zhora (L. Andersen a M. Broadie [10]). Možno tak nájsť interval, v ktorom sa nachádza skutočná cena opcie. V našej práci sme však implementovali len Monte Carlo metódu Longstaffa a Schwartza.

2.5 Zhrnutie priebehu algoritmu

V tejto podkapitole si prepíšeme priebeh algoritmu algoritmickejšým spôsobom, aby čitateľ získal lepšiu predstavu, čo a kedy sa v algoritme deje. Celý algoritmus pozostáva

z nasledovných krokov:

1. Zadať počet simulácií N
2. Vygeneruj N dráh stochastického vývoja stavovej premennej X
3. Vytvor nulovú maticu C s rozmermi $N \times (K)$
4. for $i = K$
 - do stĺpca K matice C ulož peňažné toky z uplatnenia opcie v čase T , ak je *in-the-money*
 - ponechaj 0 inak
5. for $i = K - 1, K - 2, \dots, 1$
 - zober riadky C - dráhy ω , v ktorých je opcia v pozícii *in-the-money* v čase i
 - označ
 - X' - vektor hodnôt stavovej premennej X v čase i pre tieto riadky
 - Y - vektor zdiskontovaných peňažných tokov z matice C
 - zregresuj Y na priestor funkcií $L_j(X')$ $j = 1, 2, \dots, M$ - dostaneme podmienenú funkciu očakávaných peňažných tokov, označ \widehat{F}_M
 - porovnaj \widehat{F}_M s peňažnými tokmi $\pi(X_i)$ z uplatnenia opcie v čase i pre všetky *in-the-money* dráhy
 - ak $\widehat{F}_M > \pi(X_i)$ peňažné toky z uplatnenia opcie v čase $t \rightarrow$ v matici C pre daný riadok v stĺpci i ponechaj 0
 - ak $\widehat{F}_M < \pi(X_i)$ peňažné toky z uplatnenia opcie v čase $t \rightarrow$ v matici C pre daný riadok v stĺpci i zapíš hodnotu peňažných tokov z uplatnenia opcie $\pi(X_i)$ a v ostatných stĺpcoch $i + 1, i + 2, \dots, K$ zapíš 0
6. Urč hodnotu opcie ako priemer zdiskontovaných peňažných tokov cez všetky dráhy ω v matici C do času 0
7. Urč hranicu predčasného uplatnenia opcie ako najnižšiu (pre call), respektíve najvyššiu (pre put) hodnotu stavovej premennej X v jednotlivých časových krokoch, pre ktoré je v matici optimálnych stratégií 1

2.6 Hlavné problémy metódy LSM

Pri oceňovaní amerických opcií pomocou Monte Carlo metódy najmenších štvorcov vznikajú viaceré otázky, ako napríklad ktoré polynómy by sme mali používať ako bá-zové funkcie a prečo, prípadne aké sú výhody a nevýhody jednotlivých tried. Rovnako nie je presne určené, aký počet bá-zových funkcií je vhodný pre dostatočnú aproximáciu funkcie očakávanej hodnoty. Posledným nemenej dôležitým problémom, ktorý je potrebné pred riešením samotnej ceny opcie vyriešiť, je určiť dostatočný počet Monte Carlo simulácií pre požadovanú presnosť výpočtu. Hlavnými problémami metódy LSM teda sú:

1. zvolenie triedy bá-zových funkcií
2. počet bá-zových funkcií M
3. počet Monte Carlo simulácií N
4. počet diskretných časových krokov K

Vo všeobecnosti sa Monte Carlo metóda najmenších štvorcov ukazuje ako dostatočne robustná na výber triedy bá-zových funkcií pre americké typy opcií, pri komplexnejších derivátoch však výber bá-zových funkcií môže ovplyvniť výsledky (J. F. Navas, M. Moreno [9]). Pri reálnych opciách sa ako vhodnejšia alternatíva ukazujú Laguerrove polynómy (M. J. R. Armada a A. Rodrigues [12]).

Presná odpoveď na dostatočný počet bá-zových funkcií a počet nasimulovaných dráh neexistuje. Avšak v prípade použitia polynomiálnych bá-zových funkcií sa dajú získať explicitné výsledky pre počet nasimulovaných dráh vzhľadom k počtu bá-zových funkcií pre zabezpečenie dostatočnej konvergenencie. Dá sa ukázať, že (B. Yu a P. Glasserman [2]):

- $M = O(\log N)$ ak stochastická premenná sleduje Brownov pohyb
- $M = O(\log \sqrt{N})$ ak stochastická premenná sleduje geometrický Brownov pohyb

To znamená, že počet dráh v prípade Brownovho pohybu rastie exponenciálne s počtom polynómov a v prípade geometrického Brownovho pohybu rastie ešte rýchlejšie ako exponenciálne.

Vo všeobecnosti platí, že algoritmus konverguje so zvyšovaním počtu bázových funkcií a nasimulovaných dráh, avšak počet bázových funkcií treba zvyšovať rozumne, nakoľko príliš veľký počet môže spôsobovať numercké problémy v regresii pomocou najmenších štvorcov. Vhodná voľba počtu bázových funkcií sa pohybuje medzi 3 a 20 (M. Moreno a J.F. Navas [9]).

Pri amerických opciách je rovnako problematické určiť počet diskretných časových krokov. Vo všeobecnosti platí, že čím je časová diskretizácia jemnejšia, tým je cena opcie vypočítaná uvedenou numerickou metódou bližšia reálnej hodnote. V algoritme sa však so zvyšujúcim počtom časových krokov výrazne zvyšuje aj časová náročnosť, nakoľko v každom časovom kroku prebieha regresia zdiskontovaných budúcich peňažných tokov vzhľadom k filtrácii v danom čase, a preto je dôležité určiť čo najmenšie K , pri ktorom cena opcie dostatočne konverguje k skutočnej hodnote. V reálnych opciách je tento problém o niečo jednoduchší, nakoľko investori sa v princípe nerozhodujú spojito, ale len v určitých daných časových okamihoch, podľa ktorých môžeme následne voliť počet časových krokov.

Kapitola 3

Metódy redukcie variancie v Monte Carlo simuláciách

V tejto kapitole predstavíme niektoré metódy redukcie variancie, ktoré sa využívajú pri Monte Carlo simuláciách. Metódy redukcie variancie sa pri Monte Carlo simuláčnych metódach používajú pre dosiahnutie presnejšieho výsledku pri použití menšieho počtu simulácií, čím môžeme ušetriť čas pri výpočte. Metód existuje viacero, my si konkrétne rozoberieme metódu control variates, moment matching metódu a nakoniec metódu antithetic variates. Vysvetlíme si, ako jednotlivé metódy fungujú, pričom sa zameriame hlavne na metódu antithetic variates, ktorú sme aplikovali v našej práci. Z iných známych metód, ktoré avšak nebudeme rozoberať v tejto práci, môžeme aspoň spomenúť Importance Sampling metódu alebo Stratified Sampling metódu (viac o týchto metódach sa dá dočítať napríklad v práci P. Glassermana ([24]).

Pri popise jednotlivých metód budeme uvažovať, že našim cieľom je vypočítať $E[A]$, kde A je nejaký výstup z n vygenerovaných simulácií. Taktiež budeme v našej práci uvažovať, že náhodná premenná Z , ktorú generujeme pri jednotlivých simuláciách, je z normálneho rozdelenia $N(0, 1)$.

3.1 Control Variates metóda

Hlavným zdrojom poznatkov pre popísanie tejto metódy bola publikácia od P. Glassermana ([24]). Control Variates metóda využíva informáciu o chybe pri odhade nejakého parametra, ktorého skutočnú hodnotu poznáme na redukcii chyby v odhade, ktorého

skutočnú hodnotu nepoznáme a túto hodnotu hľadáme. Uvažujme, že A_1, A_2, \dots, A_n sú výstupy z n simulácií, ako napríklad diskontované peňažné toky z uplatnenia opcie pre i -tu nasimulovanú dráhu. A_i sú nezávislé a rovnako rozdelené náhodné premenné a chceme nájsť neznámu hodnotu $E[A]$. V Monte Carlo simulačných metódach zvyčajne $E[A]$ odhadujeme pomocou priemeru výstupov \bar{A} , teda:

$$\bar{A} = \frac{A_1 + \dots + A_n}{n}$$

Uvažujme teraz, že zo simulácií vieme počítať aj nejaké iné výstupy B_i pre $i = 1, \dots, n$, a hodnotu $E[B]$ poznáme. Rozdiel medzi odhadom $E[B]$ zo simulácií a skutočnou hodnotou $E[B]$ by sme tak mohli využiť na *kontrolu* odhadu \bar{A} . Pre hociaké fixné b označme $A_i(b)$ pre každé i modifikovaný výstup zo simulácie i :

$$A_i(b) = A_i - b(B_i - E[B])$$

a $\bar{A}(b)$ ich priemer:

$$\bar{A}(b) = \bar{A} - b(\bar{B} - E[B]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A_i - b(B_i - E[B])) \quad (3.1)$$

Keďže páry (B_i, A_i) $i = 1, \dots, n$ sú nezávislé a rovnako rozdelené premenné, tak priemer $\bar{A}(b)$ je nevychýleným odhadom $E[A]$ pre hociaké b fixné, a tento odhad nazývame control variates odhad $E[A]$. Rozdiel $\bar{B} - E[B]$, ktorého hodnotu poznáme, nám tak slúži ako spomínaná určitá *kontrola* pre odhad $E[A]$. Následne si vysvetlíme, ako určiť hodnotu zatiaľ ľubovoľného parametra b tak, aby sme minimalizovali varianciu control variates odhadu.

Označme $\sigma_B^2 = Var[B]$, $\sigma_A^2 = Var[A]$ a ρ_{AB} ako koeficient korelácie medzi A a B. Potom pre každé i platí:

$$\begin{aligned} Var[A_i(b)] &= Var[A_i - b(B_i - E[B])] = \\ &= \sigma_A^2 - 2b\sigma_B\sigma_A\rho_{AB} + b^2\sigma_B^2 \equiv \sigma^2(b) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Control variates odhad $\bar{A}(b)$ má teda varianciu $\frac{\sigma^2(b)}{n}$, pričom obyčajný priemer \bar{A} má varianciu $\frac{\sigma_A^2}{n}$ a metódou control variates variancu odhadu zmenšíme len ak:

$$Var[\bar{A}(b)] < Var[\bar{A}]$$

čo platí, ak $b^2\sigma_B < 2b\sigma_A\rho_{AB}$. Keďže doteraz sme uvažovali, že b je ľubovoľné fixné číslo, vidíme, že vieme nájsť takú hodnotu b^* , ktorá minimalizuje $Var[A_i(b)] = \sigma^2(b)$,

a to:

$$b^* = \frac{\sigma_A}{\sigma_B} \rho_{AB} = \frac{Cov[A, B]}{Var[B]}$$

Po dosadení b^* do (3.2) a upravení dostaneme:

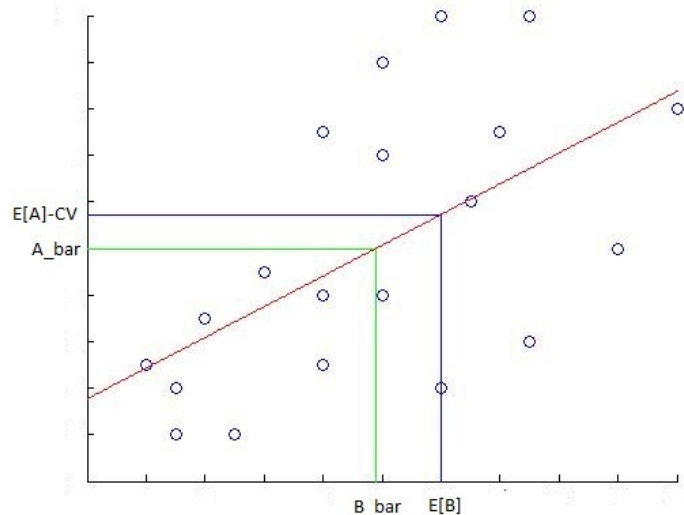
$$\frac{Var[\bar{A} - b^*(\bar{B} - E[B])]}{Var[\bar{A}]} = 1 - \rho_{AB}^2 \quad (3.3)$$

kde môžeme vidieť, že efektivita control variates metódy sa pre jednotlivé prípady líši a závisí od korelácie, čiže závislosti medzi A a B . Čím je závislosť väčšia, tým viac môžeme zmenšiť varianciu odhadu $E[A]$ pomocou control variates metódy.

Všimnime si, že v skutočnosti málokedy poznáme hodnotu σ_A , rovnako ako aj ρ_{AB} , čo vlastne znemožňuje určiť presnú optimálnu hodnotu parametra b^* . Môžeme však použiť odhady, ktoré získame rovnako zo simulácií a teda

$$\hat{b}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (B_i - \bar{B})(A_i - \bar{A})}{\sum_{i=1}^n (B_i - \bar{B})^2} \quad (3.4)$$

Nahradenie b^* odhadom \hat{b}_n samozrejme spôsobuje určitú odchýlku. Môžeme si všimnúť, že \hat{b}_n má však aj istú geometrickú interpretáciu. \hat{b}_n predstavuje sklon regresnej priamky pomocou metódy najmenších štvorcov cez body (B_i, A_i) pre $i = 1, 2, \dots, n$ (viď Obr. 3.1).



Obr. 3.1: Grafická interpretácia control variates metódy: Regresná priamka metódou najmenších štvorcov, pomocou ktorej získavame control variates odhad $E[A]$ označený ako $E[A]-CV$ s využitím známej hodnoty $E[B]$.

3.2 Moment matching metóda

Moment matching metódu navrhol Barraquand v roku 1995 ([4]) a myšlienka spočíva v tom, že ak pri Monte Carlo simuláciách generujeme náhodné premenné z nejakého rozdelenia, ktorých počet je n , momenty týchto n náhodne vygenerovaných premenných obyčajne nespĺňajú teoretické hodnoty momentov daného rozdelenia. Z tohto dôvodu sa náhodné premenné istým spôsobom transformujú tak, aby určitý konečný počet ich momentov spĺňal teoretické hodnoty, odkiaľ pochádza aj názov metódy *moment matching*.

Pri detailnejšom popise metódy sme vychádzali z článku uverejneného v *Journal of Economic Dynamics and Control* v roku 1997 (P. Boyle, M. Broadie a P. Glasserman [13]). Uvažujme konkrétne náhodné premenné Z_1, Z_2, \dots, Z_n z $N(0, 1)$, ktoré používame na simulovanie dráh vývoja ceny podkladového aktíva, ktorý sleduje geometrický Brownov pohyb. Tieto hodnoty Z_1, Z_2, \dots, Z_n by mali mať strednú hodnotu $E[Z] = 0$ a štandardnú odchýlku $\sigma_Z = 1$. Priemer a štandardná odchýlka zo vzorky simulácií sú však väčšinou odlišné hodnoty, označme ich \bar{Z} a s_Z . Jednou z možností je zachovať prvý moment, a teda môžeme upraviť Z_1, Z_2, \dots, Z_n tak, aby ich priemer bol rovný 0, čiže $E[Z]$. To sa dá urobiť nasledovným spôsobom:

$$\tilde{Z}_i = Z_i - \bar{Z}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

V prípade, ak chceme zachovať teoretické hodnoty prvých dvoch momentov, transformácia má nasledovný tvar:

$$\tilde{Z}_i = (Z_i - \bar{Z}) \frac{\sigma_Z}{s_Z}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.6)$$

kde samozrejme platí $\sigma_Z = 1$. Táto metóda sa dá jednoducho a priamočiaro implementovať, avšak má svoje nevýhody. V prvom prípade náhodné premenné majú síce normálne rozdelenie, ale už nie sú nezávislé, čo sťažuje určenie konfidenčného intervalu pre výstup zo simulácií, ktorého hodnota nás zaujíma. V druhom prípade zas \tilde{Z}_i už nie sú normálne rozdelené náhodné premenné a odhad výstupu zo simulácií tak môže byť vychýleným odhadom. Z tohto dôvodu je veľmi ťažké určiť efektívnosť moment matching metódy redukcie variancie.

3.3 Antithetic variates metóda

Antithetic variates metóda je jednou z najjednoduchších a najpoužívanejších metód vo financiách, nakoľko je táto metóda veľmi ľahko implementovateľná. Do oceňovania opcií pri využití Monte Carlo simulácií ju uviedol Boyle v roku 1977 ([20]) pomocou ilustrácie pre európsku call opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy.

Podstata tejto metódy spočíva vo vytvorení zápornej závislosti medzi párami simulácií, ktorú môžeme dosiahnuť jednoducho tak, že pre každú náhodne vygenerovanú simuláciu k nej cielene zostrojíme negatívne závislú. To znamená, že ak je napríklad n simulácií nejakého zdroja náhodnosti tvorených generovaním náhodných premenných, ktoré sú nezávislé a majú normálne rozdelenie $N(0, 1)$, tak antithetic variates získame spárením radu Z_1, Z_2, \dots, Z_n náhodných premenných z $N(0, 1)$ s radom $-Z_1, -Z_2, \dots, -Z_n$, ktoré majú rovnaké rozdelenie $N(0, 1)$.

Dôkladné vysvetlenie metódy popisuje Glasserman vo svojej publikácii ([24]), z ktorej sme vybrali najzákladnejšie informácie. Uvažujme, že naším cieľom je spočítať $E[A]$. S využitím antithetic variates metódy máme páry dráh $(A_1, \tilde{A}_1), (A_2, \tilde{A}_2), \dots, (A_n, \tilde{A}_n)$, ktoré sú nezávislé a rovnako rozdelené náhodné premenné, avšak pre všetky A_i a \tilde{A}_i $i = 1, 2, \dots, n$ obyčajne platí, že nie sú nezávislé, ale sú rovnako rozdelené náhodné premenné. Antithetic variates odhad $E[A]$ je definovaný ako priemer všetkých $2n$ simulácií:

$$\hat{A}_{AV} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (A_i + \tilde{A}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i + \tilde{A}_i}{2} \right) \quad (3.7)$$

odkiaľ vyplýva, že \hat{A}_{AV} je vlastne priemerom n nezávislých pozorovaní

$$\left(\frac{A_1 + \tilde{A}_1}{2} \right), \left(\frac{A_2 + \tilde{A}_2}{2} \right), \dots, \left(\frac{A_n + \tilde{A}_n}{2} \right) \quad (3.8)$$

Chceme, aby odhad \hat{A}_{AV} znížil varianciu oproti obyčajnému odhadu, avšak nie na úkor dlhšej časovej náročnosti. Predpokladajme, že časová náročnosť výpočtu v prípade generovania párov (A_i, \tilde{A}_i) je približne dvojnásobná, ako v prípade generovania A_i , to znamená, že zanedbávame prípadné ušetrenie času z toho, že pri tvorení párov nemusíme generovať nové náhodné premenné, ale iba meníme znamienka pri už vygenerovaných náhodných premenných. Potom časová náročnosť na výpočet \hat{A}_{AV} je približne taká ako na výpočet priemeru $2n$ simulácií, a preto porovnávame variancie týchto dvoch

odhadov. Použitie antithetic variates znižuje varianciu, ak

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\hat{A}_{AV}] &< \text{Var}\left[\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}A_i\right] \\
&\Downarrow \\
\text{Var}\left[\frac{\sum_{i=1}^n\frac{A_i+\tilde{A}_i}{2}}{n}\right] &< \frac{\text{Var}[A_i]}{2n} \\
&\Downarrow \\
\frac{\text{Var}\left[\frac{A_i+\tilde{A}_i}{2}\right]}{n} &< \frac{\text{Var}[A_i]}{2n} \\
&\Downarrow \\
\frac{\text{Var}[A_i+\tilde{A}_i]}{4n} &< \frac{\text{Var}[A_i]}{2n} \\
&\Downarrow \\
\text{Var}[A_i+\tilde{A}_i] &< 2\text{Var}[A_i] \tag{3.9}
\end{aligned}$$

a keďže A_i a \tilde{A}_i majú rovnaké rozdelenie a teda aj varianciu, $\text{Var}[A_i+\tilde{A}_i]$ vieme rozpísať ako

$$\begin{aligned}
\text{Var}[A_i+\tilde{A}_i] &= \text{Var}[A_i] + \text{Var}[\tilde{A}_i] + 2\text{Cov}[A_i,\tilde{A}_i] \\
&= 2\text{Var}[A_i] + 2\text{Cov}[A_i,\tilde{A}_i] \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Po dosadení do (3.9) a upravení dostaneme, že požadujeme, aby $\text{Cov}[A_i,\tilde{A}_i] < 0$, čo znamená, že antithetic variates metóda znižuje varianciu práve vtedy, keď je negatívna závislosť medzi A_i a \tilde{A}_i . Negatívnu závislosť medzi A_i a \tilde{A}_i dostaneme práve vtedy, ak A je monotónnou funkciou Z .

Uvažujme teraz konkrétne vývoj ceny podkladového aktíva pri nejakej opcii, ktorý sleduje geometrický Brownov pohyb v rizikovo neutrálnej miere Q :

$$X_{t_{k+1}} = X_{t_k} \times \exp\left\{\left(r - d - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{k+1} - t_k) + \sigma\sqrt{(t_{k+1} - t_k)}Z_{t_{k+1}}\right\} \tag{3.11}$$

kde X_{t_k} je cena aktíva v čase t_k , r je bezriziková úroková miera, d predstavuje dividendovú mieru, σ volatilitu a $Z_{t_k} \in N(0, 1)$. Antithetic variates metóda teda spočíva v myšlienke, že ak $Z_{t_k} \in N(0, 1)$, potom aj $-Z_{t_k} \in N(0, 1)$ a pre každú dráhu vývoja ceny X_t (3.11) k nej vytvoríme záporne závislú, a teda:

$$\tilde{X}_{t_{k+1}} = X_{t_k} \times \exp\left\{\left(r - d - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{k+1} - t_k) - \sigma\sqrt{(t_{k+1} - t_k)}Z_{t_{k+1}}\right\} \tag{3.12}$$

Týmto spôsobom sme metódu antithetic variates aplikovali v našej práci.

Kapitola 4

Kalibrácia algoritmu na jednoduchom príklade

V tejto kapitole aplikujeme predstavenú LSM metódu na ocenenie jednoduchého príkladu reálnych opcií. Využitím jeho ekvivalencie k americkej put opcii porovnáme výsledky tejto metódy s Crank Nicholsonovou schémou a ukážeme vplyv jednotlivých parametrov metódy na presnosť výsledkov.

4.1 Popis problému

Uvažujme, že vlastníme továreň, ktorá má nekonečnú životnosť a produkuje jednu jednotku komodity, ktorej cena X je volatilná a sleduje geometrický Brownov pohyb, ktorý môžeme v rizikovo neutrálnej miere zapísať ako:

$$X_{t_{k+1}} = X_{t_k} \times \exp\left\{\left(r - d - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{k+1} - t_k) + \sigma\sqrt{(t_{k+1} - t_k)}Z_{t_{k+1}}\right\} \quad (4.1)$$

kde r je bezriziková úroková miera, d takzvaný convenience yield (pri finančných opciách sa analogicky jedná o spojitú dividendu), σ je volatilita a Z_{t_k} náhodná premenná z $N(0, 1)$. Nezabudnime na dôležitý predpoklad pre možnosť počítania v rizikovo neutrálnej miere, že trhy sú úplné a naša komodita je obchodovateľná na týchto trhoch. Ďalej abstrahujeme od nákladov na výrobu, a uvažujeme, že máme možnosť zanechať továreň počas určenej doby T , pričom ak ju zanecháme, dostaneme zostatkovú hodnotu E .

Takáto formulácia problému nie je veľmi reálna, nakoľko zvyčajne nemáme možnosť zanechať továreň len počas určitého časového obdobia, pričom továreň má nekonečnú

životnosť, a taktiež je nereálny predpoklad nulových nákladov na produkciu. Výhodou však je (ako ukážeme), že daný problém je ekvivalentný problému ocenenia americkej put opcie.

Keďže továreň má nekonečnú životnosť a produkuje spojito jednu jednotku komodity ročne bez nákladov, vlastniť takúto továreň je ekvivalentné držaniu $\frac{1}{d}$ jednotiek podkladovej komodity, čo produkuje také isté peňažné toky ako príjem za predanú komoditu z továrne. Teraz už môžeme vidieť, že opcia zanechať továreň za zostatkovú hodnotu E do času maturity T je ekvivalentná držaniu americkej put opcie na komoditu so *strike price* rovným $d * E$ a rovnakou maturitou T . Jediným výraznejším rozdielom v takomto prípade reálnej opcie od klasickej finančnej put opcie je, že v našom prípade bude T relatívne dlhé časové obdobie (niekoľko rokov) v porovnaní s maturitami pri finančných opciách, kde ide skôr o kratšie časové obdobia.

4.2 Riešenie problému

Ako sme ukázali, cena tejto reálnej opcie je rovnaká ako cena americkej put opcie, na ktorú môžeme priamočiaro použiť algoritmus LSM¹, ktorý sme implementovali na základe popisu v Kapitole 2. Ukážeme si výsledky algoritmu bez aj s použitím antitetic variates metódy redukcie variancie popísanej v Kapitole 3, a zároveň výsledky porovnáme s výsledkami z Crank-Nicholsonovej metódy oceňovania amerických opcií.

Hodnoty jednotlivých vstupov, s ktorými budeme opciu ocenať sú uvedené v Tabuľke 4.1. Uvažujme, že o možnosti zanechať továreň a získať E sa rozhodujeme päťdesiatkrát počas celej doby maturity našej opcie, a teda $K = 50$.

| X_0 | r | d | σ | E | T |
|-------|-----|-----|----------|------|-----|
| 30 | 6% | 2% | 0,20 | 1600 | 5 |

Tabuľka 4.1: Parametre príkladu, s ktorými riešime reálnu opciu

¹Kód algoritmu je možné nájsť v časti Prílohy.

4.3 Cena opcie

V tejto časti sa pozrieme na výsledky algoritmu, čo sa týka ceny reálnej opcie. V prvom rade si ukážeme vplyv antithetic variates metódy na redukciu variancie. Po preukázaní významu jej použitia budeme kalibrovať algoritmus LSM pri porovnávaní výsledkov ceny opcie s cenou opcie z Crank Nicholsonovej metódy.

4.3.1 Zníženie variancie s antithetic variates metódou

Algoritmus sme použili pre výpočet ceny zadanej reálnej opcie s použitím nasledovných bazových funkcií v regresii: 1 , X a X^2 . Použili sme postupne $N = 100000$, 300000 a 500000 simulácií, pričom v každom prípade sme výpočet ceny zopakovali 100 krát aj v prípade použitia antithetic variates metódy, aj bez nej. V Tabuľke 4.2 je pre oba prípady zobrazený priemer a variancia odhadu ceny opcie z daných 100 replikácií algoritmu. Môžeme si všimnúť že antithetic variates metóda naozaj znižuje varianciu. Rýchlosť výpočtu je v oboch prípadoch porovnateľná, pričom v prípade použitia antithetic variates metódy bola dokonca o niečo lepšia, z dôvodu menšieho počtu generovaných náhodných premenných. V ďalších výpočtoch preto budeme používať iba algoritmus s použitím antithetic variates metódy. Zároveň v danej Tabuľke 4.2 môžeme vidieť, že pri použití väčšieho počtu simulácií sa znižuje variancia.

| N | $\bar{V} - AV$ | $Var - AV$ | $\bar{V} - BAV$ | $Var - BAV$ |
|--------|----------------|--------------------|-----------------|--------------------|
| 100000 | 4,1206 | $3,8782 * 10^{-5}$ | 4,1184 | $1,2257 * 10^{-4}$ |
| 300000 | 4,1183 | $1,3215 * 10^{-5}$ | 4,1177 | $2,8873 * 10^{-5}$ |
| 500000 | 4,1188 | $8,8610 * 10^{-6}$ | 4,1192 | $3,4021 * 10^{-5}$ |

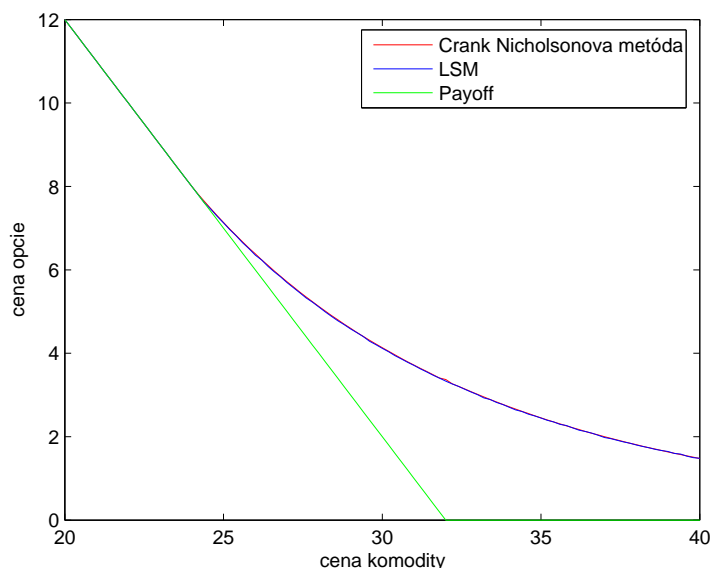
Tabuľka 4.2: Priemer výstupov algoritmu zo 100 replikácií a ich variancia. $\bar{V} - AV$ predstavuje priemer zo 100 cien s použitím antithetic variates metódy v algoritme a $Var - AV$ varianciu, naopak $\bar{V} - BAV$ predstavuje priemer zo 100 cien bez použitia antithetic variates metódy v algoritme a $Var - BAV$ varianciu

4.3.2 Kalibrácia algoritmu

Z Kapitoly 2 vieme, že v algoritme môžeme meniť viacero parametrov a to:

- počet simulácií N
- počet bazových funkcií M
- typ polynómov ako bazových funkcií

Pre moment uvažujeme, že K je dané tým, ako často sa rozhodujeme o zanechaní továrne, a rovné 50. Ako sme videli vyššie, počet simulácií zlepšuje konvergenciu metódy, pričom už pri 100000 simuláciách sme dosiahli dostatočne nízku varianciu. Graf ceny opcie v závislosti od počiatocnej hodnoty komodity s použitím $N = 100000$ simulácií a v porovnaní s Crank Nicholsonovou metódou je na Obr 4.1. Vidíme, že cena opcie vypočítaná pomocou algoritmu LSM skutočne konverguje k cene opcie vypočítanej Crank Nicholsonovou schémou.



Obr. 4.1: Porovnanie ceny opcie v závislosti od počiatocnej hodnoty komodity danou LSM metódou s $N = 100000$ simuláciami a bazovými funkciami $1, X, X^2$, a Crank Nicholsonovou schémou, spolu s payoffom z uplatnenia opcie

V ďalšom sa pozrieme, ako na výsledky ceny opcie vplýva zmena počtu polynómov ako bazových funkcií. Keďže na grafe ceny opcie v závislosti od počiatocnej ceny komodity nebolo vidieť žiadne rozdiely medzi jednotlivými možnosťami, uvádzame numerické hodnoty pre niektoré počiatocné ceny komodity spolu s hodnotou opcie vypočítanou Crank Nicholsonovou metódou, viď Tabuľka 4.3. Medzi cenou opcie v závislosti

od počtu bázových funkcií sme nepostrehli žiadnu lineárnu závislosť. Pri počte bázových funkcií $M = 6$ a viac už nastávali problémy v regresii. Ako rozumný počet bázových funkcií považujeme $M = 4$ prípadne $M = 5$.

| $M \setminus X_0$ | 27 | 30 | 34 | 37 |
|-------------------|--------|--------|--------|--------|
| 3 | 5,7007 | 4,1206 | 2,7078 | 1,9930 |
| 4 | 5,7117 | 4,1312 | 2,7190 | 2,0014 |
| 5 | 5,7141 | 4,1350 | 2,7188 | 2,0013 |
| 6 | 5,7160 | 4,1341 | 2,7194 | 2,0026 |
| 7 | 5,7157 | 4,1338 | 2,7196 | 2,0034 |
| V_{CN} | 5,7124 | 4,1321 | 2,7175 | 1,9995 |

Tabuľka 4.3: Priemer výstupov (cien) algoritmu \bar{V} zo 100 replikácií pri rôznom použití počtu bázových funkcií M pre rôzne počiatkové ceny komodity a ich porovnanie s cenou z Crank Nicholsonovej metódy V_{CN}

V Tabuľke 4.4 sú zobrazené výsledky priemernej ceny opcie a variancie spomedzi 100 replikácií algoritmu pri použití väčšieho počtu simulácií pre $M = 4$ a našu počiatkovú cenu komodity X_0 . Opäť vidíme, že zvyšovanie počtu simulácií vedie v princípe k znižovaniu variancie, cena opcie však konverguje dostatočne pri $N = 100000$ simuláciách.

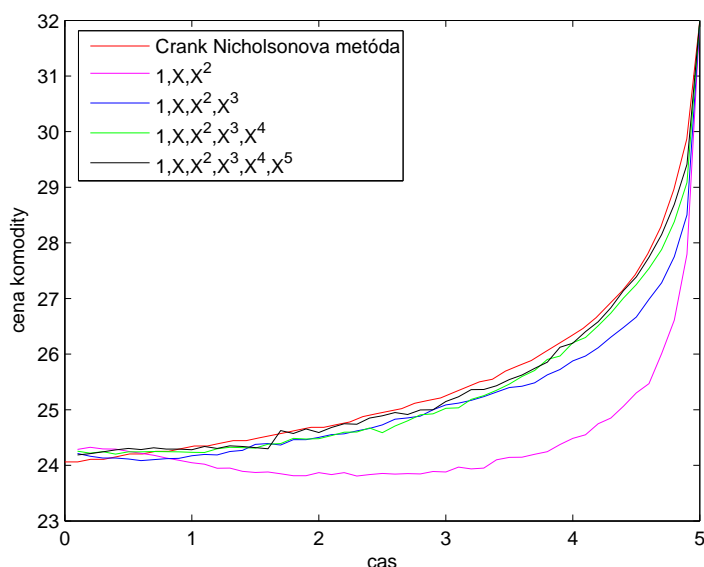
| N | \bar{V} | Variancia |
|--------|-----------|--------------------|
| 100000 | 4,1312 | $3,9580 * 10^{-5}$ |
| 300000 | 4,1314 | $1,6683 * 10^{-5}$ |
| 500000 | 4,1317 | $6,2379 * 10^{-6}$ |

Tabuľka 4.4: Priemer výstupov (cien) algoritmu \bar{V} zo 100 replikácií a ich variancia pri použití nasledovných bázových funkcií: $1, X, X^2, X^3$

Zmena typu polynómov na Laguerrove polynómy ako bázové funkcie nemala vplyv na zmeny vo výsledkoch. Výsledky ceny opcie rovnako ako aj variancie jednotlivých výstupov z replikácií boli porovnateľné. V tomto prípade na voľbe triedy polynómov ako bázových funkcií nezáleží, pričom vhodný počet je 4 alebo 5.

4.4 Hranica predčasného uplatnenia

Okrem spomínanej ceny reálnej opcie má pre nás veľký význam aj graf hranice predčasného uplatnenia, ktorý nám pomáha s rozhodovaním v čase v budúcnosti, pri akej cene má význam továreň zanechať, a pri akej ešte ponechať otvorenú a produkovať danú komoditu. V algoritme LSM je pre dosiahnutie dostatočne spojitej hranice predčasného uplatnenia rozumné zvoliť počiatočnú hodnotu X_0 blízku k hraničnej hodnote na začiatku, v opačnom prípade nemusíme zo simulácií získať hraničné hodnoty pre niektoré časové kroky najmä na začiatku krivky. Zmena X_0 nemá iný vplyv na tvar hranice predčasného uplatnenia, nakoľko hranica je len funkciou času. Hranicu predčasného uplatnenia budeme opäť porovnávať s hranicou získanou z Crank Nicholsonovej metódy konečných diferencií.

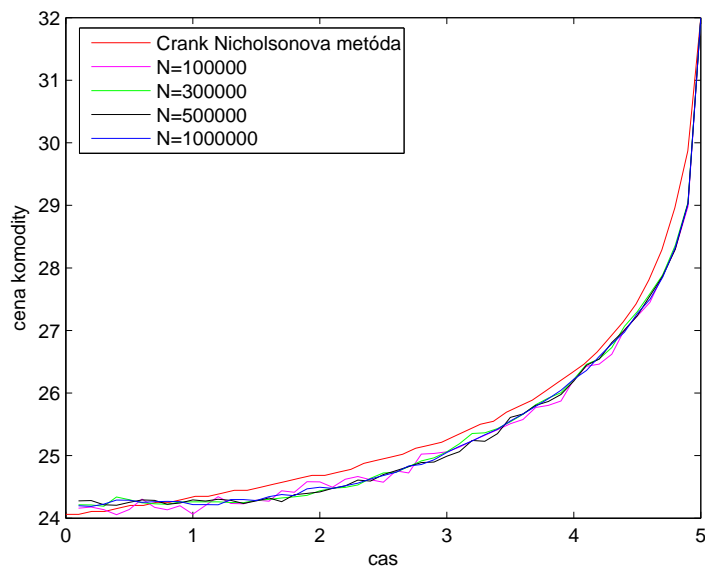


Obr. 4.2: Porovnanie hranice predčasného uplatnenia pre rôzne počty básových funkcií s použitím $N = 500000$ simulácií s hranicou z Crank Nicholsonovej schémy

Vplyv počtu básových funkcií má, ako uvidíme, dôrazný vplyv na krivku hranice predčasného uplatnenia. Na Obr 4.2 je porovnanie hraníc predčasného uplatnenia pre rôzne počty básových funkcií s $N = 500000$ simuláciami a Crank Nicholsonovou metódou. Pre malý počet básových funkcií $M = 3$ sa hranica výrazne líši od hranice z Crank Nicholsonovej metódy, pričom očitým nedostatkom je taktiež jej tendencia na začiatku klesať a až potom rásť. Pre $M = 6$ a vyššie opäť nastávali problémy v

regresii najmenších štvorcov. Hranica v prípade $M = 6$ je v porovnaní s menším počtom báзовých funkcií taktiež menej hladká, obsahuje výraznejšie zlomy okolo času 1, 7. Obdobná situácia nastávala aj pre ďalšie zvyšovanie báзовých funkcií. Ako najvhodnejšia voľba počtu báзовých funkcií pre získanie hranice predčasného uplatnenia sa javí $M = 5$, a teda $1, X, X^2, X^3, X^4$.

Na Obr. 4.3 môžeme vidieť, že počet simulácií ako parameter v algoritme LSM má vplyv na hladkosť krivky hranice predčasného uplatnenia. Pre väčšie počty simulácií je krivka hladšia, najmä na začiatku časového obdobia. Na konci je krivka pri použití všetkých možností počtu simulácií viacmenej rovnaká, problém hladkosti teda nastáva najmä na začiatku. Pri použití $N = 100000$ simulácií sú v hranici značné skoky, postupne so zvyšovaním počtu simulácií sa však tieto skoky znižujú. Medzi $N = 500000$ a $N = 1000000$ už nie je markantný rozdiel.



Obr. 4.3: Porovnanie hranice predčasného uplatnenia pre rôzne počty simulácií s použitím $M = 5$ báзовých funkcií s hranicou z Crank Nicholsonovej schémy

Pre hranicu predčasného uplatnenia teda platí, že malý počet báзовých funkcií nedáva rozumný graf hranice predčasného uplatnenia, ktorá ma na začiatku tendenciu klesať a až potom rásť. Pri použití báзовých funkcií $1, X, X^2, X^3, X^4$ sa výsledky najviac približujú k hranici predčasného uplatnenia získanou pomocou Crank Nicholsonovej metódy, aj keď nie sú úplne totožné. Rovnaké pozorovania, čo sa týka krivky predčasného uplatnenia, platia aj pre použitie Laguerrových polynómov ako báзовých

funkcií, to znamená, že výber samotnej triedy polynómov ako bázových funkcií nemení výsledky v hranici predčasného uplatnenia, rovnako ako v prípade ceny opcie, dôležitejšia je však voľba ich počtu.

4.5 Citlivosť na zmenu počtu časových krokov K

V predošlej časti sme určili, že na výbere typu triedy polynómov ako bázových funkcií v princípe nezáleží, ich vhodný počet pre výpočet ceny opcie je 4, prípadne 5 a pre hľadanie hranice predčasného uplatnenia je to 5. V tejto časti sa preto s použitím piatich bázových funkcií $1, X, X^2, X^3, X^4$ pozrieme na to, ako na cenu opcie a hranicu predčasného uplatnenia vplýva voľba počtu časových krokov.

4.5.1 Cena opcie

V Tabuľke 4.5² môžeme vidieť, že s rastúcim počtom diskretných časových krokov mierne rastie aj cena reálnej opcie, čo sa dá logicky zdôvodniť tým, že v prípade viacerého počtu časových krokov máme k dispozícii viac práv, kedy opciu uplatniť, a teda cena takejto opcie musí byť väčšia ako v prípade opcie, pri ktorej máme práv menej. Rovnako sa dá z Tabuľky 4.5 pozorovať, že cena opcie získaná algoritmom LSM je porovnateľná s cenou získanou Crank Nicholsonovou metódou konečných diferencií pri rovnakej časovej diskretizácii. Môžeme tak tvrdiť, že algoritmus dáva dostatočné výsledky, čo sa týka ceny reálnej opcie. Pripomíname, že voľba počtu diskretných časových krokov v prípade reálnych opcií závisí od faktu, ako často sa ako investori daného projektu plánujeme rozhodovať o uplatnení danej opcie.

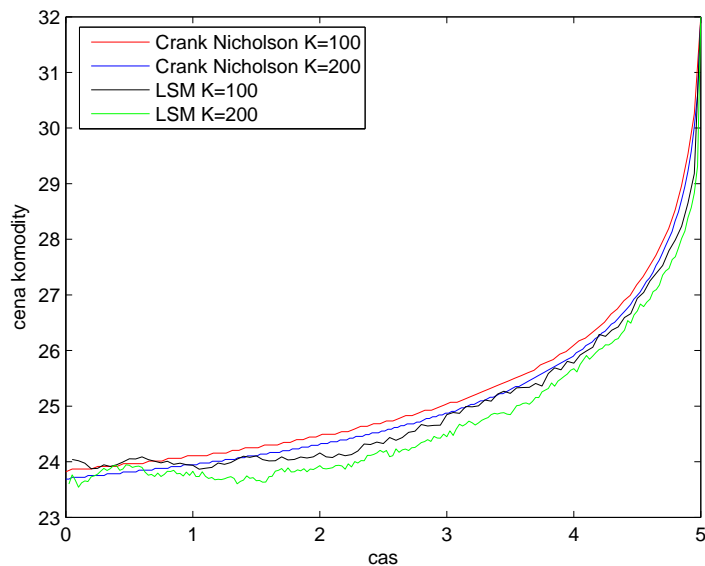
4.5.2 Hranica predčasného uplatnenia

Čo sa týka hranice predčasného uplatnenia reálnej opcie, v závislosti od počtu diskretných časových krokov K , môžeme taktiež pozorovať menšie zmeny v jej tvare. Pri väčšom K dáva krivka hranice v jednotlivých časových okamihoch nižšie hraničné ceny komodity, ako v prípade väčšieho K . Rovnaký výsledok môžeme pozorovať aj pri hranici predčasného uplatnenia pri použití Crank Nicholsonovej metódy, avšak rovnako

^{2*} pri hodnote znamená, že priemer ceny bol vypočítaný z menej ako 100 replikácií, nakoľko v tomto prípade sa pri výpočtoch vyskytlo aj zopár outlierov, kedy cena opcie vyšla rovná 0

| X_0 | 27 | 30 | 34 | 37 |
|-------------------------|--------|--------|--------|---------|
| $\bar{V}_{LSM} K = 100$ | 5,7263 | 4,1428 | 2,7251 | 2,0075 |
| $V_{CN} K = 100$ | 5,7269 | 4,1429 | 2,7252 | 2,0058 |
| $\bar{V}_{LSM} K = 150$ | 5,7305 | 4,1463 | 2,7287 | 2,0080* |
| $V_{CN} K = 150$ | 5,7320 | 4,1464 | 2,7278 | 2,0078 |
| $\bar{V}_{LSM} K = 200$ | 5,7327 | 4,1481 | 2,7286 | 2,0089* |
| $V_{CN} K = 200$ | 5,7342 | 4,1481 | 2,7291 | 2,0089 |

Tabuľka 4.5: Priemer výstupov (cien) algoritmu \bar{V}_{LSM} zo 100 replikácií pri rôznom počte diskretných časových krokov K pre rôzne počiatočné ceny komodity a ich porovnanie s cenou z Crank Nicholsonovej metódy V_{CN} pri rovnakej časovej diskretizácii ako v predošlej časti môžeme vidieť, že algoritmus LSM má vo všeobecnosti tendenciu dávať nižšie hraničné hodnoty ako Crank Nicholsonova metóda, pre porovnanie vid' Obr 4.4. Hranice predčasného uplatnenia opcie sme pre každý prípad v algoritme LSM získali s použitím $N = 300000$ simulácií, nakoľko pri zvýšení na $K = 200$ nebolo možné získať výsledky s $N = 500000$, pri ktorých by bola krivka hranice hladšia, z dôvodu prekročenia pamäte.



Obr. 4.4: Porovnanie hranice predčasného uplatnenia algoritmu LSM a Crank Nicholsonovej metódy pre $K = 100$ a $K = 200$

4.6 Zhrnutie

V algoritme LSM je potrebné mať na pamäti vhodnú voľbu jeho parametrov ako sú počet simulácií N , počet bazových funkcií M a ich typ, a počet diskretných časových krokov K , ktoré však pri reálnych opciách volíme na základe zadania konkrétnej úlohy. Videli sme, že zvyšovanie počtu simulácií N vplýva na konvergenciu ceny a na hladkosť krivky hranice predčasného uplatnenia, pričom dostatočnú konvergenciu je možné dosiahnuť už pri $N = 100000$ simuláciách, pre dostatočne hladkú krivku hranice predčasného uplatnenia je však lepšie zvýšiť počet simulácií na $N = 500000$. Ako vhodný počet bazových funkcií použitých v regresii najmenších štvorcov sa javí 5, pričom samotný typ polynomiálnej triedy nespôsobuje žiadne dôrazné zmeny vo výsledkoch. Rovnako sme postrehli, že algoritmus LSM je vhodnou metódou najmä na numerickú aproximáciu ceny opcie, avšak nie práve vhodnou alternatívou pri hľadaní hranice predčasného uplatnenia.

Kapitola 5

Príklad zanechania továrne na výrobu etanolu

V poslednej kapitole tejto diplomovej práce si ilustrujeme Monte Carlo metódu najmenších štvorcov na konkrétnom príklade reálnej opcie. Budeme sa zaoberať príkladom takzvanej *option to abandon*, ktorej výpočet je pomocou Monte Carlo metódy najmenších štvorcov pomerne jednoduchý. Cieľom tejto kapitoly je ukázať implementáciu metódy pri konkrétnom príklade reálnej opcie a ukázať jej výsledky ako aj analýzu citlivosti na zmeny v parametroch. Budeme sa zameriavať najmä na hranicu predčasného uplatnenia opcie, nakoľko cena reálnej opcie má skôr informatívny charakter, pričom hranica predčasného uplatnenia nám dáva investičné pravidlo, kedy a za akých podmienok máme opciu zrealizovať, a teda zanechať projekt.

5.1 Popis problému

Uvažujme, že sme vlastníkom malej továrne na výrobu etanolu v Brazílii, ktorá vyrába Q jednotiek etanolu za rok. Budeme riešiť problém, kedy zanechať neefektívnu výrobu v staršej továrni, v ktorej nedochádzalo k priebežnému obnovovaniu strojov, a tak náklady na výrobu jednej jednotky etanolu sú pomerne vysoké vzhľadom na cenu jednej jednotky etanolu. V prípade, ak budeme považovať výrobu etanolu za nevýnosnú, môžeme továreň zanechať a predať jej vybavenie za jeho zostatkovú cenu E . Naším cieľom je určiť, kedy a za akých podmienok máme zanechať továreň, pričom predpokladajme, že továreň má momentálne životnosť T rokov. Predpokladáme, že etanol je vyrábaný

a následne predávaný spojito a rovnomerne, pričom zanedbáme čas potrebný medzi výrobou a predaním etanolu, a predpokladáme, že všetok vyrobený etanol sa zároveň aj predá. Cena etanolu za jednu jednotku je volatilná a budeme ju značiť ako X_{t_k} v čase t_k . Náklady budeme uvažovať ako konštantné v čase, pričom jednotkové náklady vo výške A na jednu jednotku etanolu a fixné náklady za rok vo výške I . Ak cena etanolu klesne pod jednotkové náklady A , továreň môže pozastaviť výrobu, avšak musí zaplatiť fixné náklady.

5.2 Simulácia ceny etanolu

V probléme budeme uvažovať, že cena etanolu sleduje jednofaktorový mean-reverting proces, respektíve Ornstein-Uhlenbeckov proces, ktorý môžeme generovať nasledovným spôsobom:

$$X_{t_k} = \exp \left\{ \ln(X_{t_{k-1}}) \times e^{-\kappa\Delta t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa\Delta t}}{2\kappa}} Z_{t_k} \right\} \quad (5.1)$$

kde Δt predstavuje rozdiel $t_k - t_{k-1}$, pričom $k = 1, 2, \dots, K$ a K je počet diskrétnych časových krokov, a Z_{t_k} je náhodne vygenerovaná premenná z $N(0, 1)$. Hodnoty jednotlivých parametrov κ, α, σ a počiatočnú cenu etanolu X_0 za jeden liter sme čerpali z článku uverejnenom v časopise *Energy economics* (C. Bastian-Pinto, L. Brandao a W.J. Hahn [17]), kde autori previedli odhadnutý cenový proces do bezrizikovej miery, a teda uvedené parametre sú už v bezrizikovej miere. Ich hodnoty uvádzame v Tabuľke 5.1.

| κ | α | σ | X_0 |
|----------|----------|----------|----------|
| 1,327 | -0,2627 | 0,3424 | 0.712R\$ |

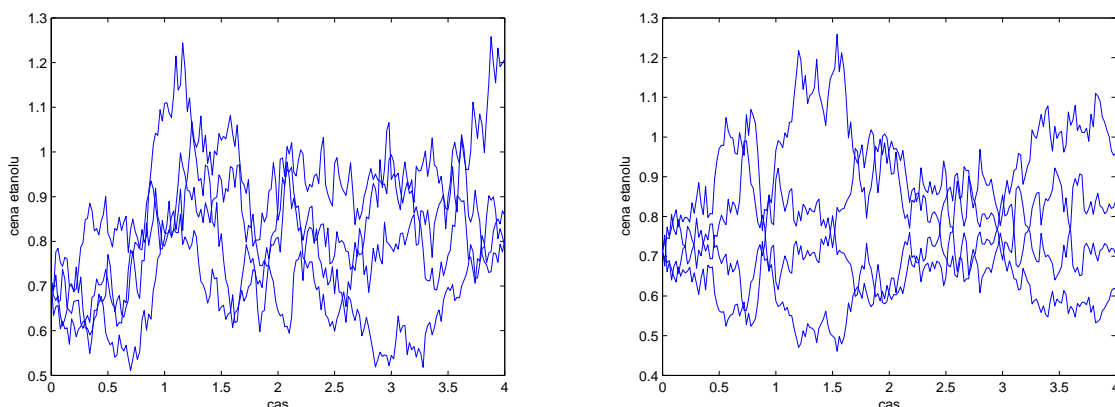
Tabuľka 5.1: Hodnoty parametrov mean reverting procesu ceny etanolu

Pri simulovaní dráh vývoja ceny medzi sme použili antithetic variates metódu redukcie variancie nasledovným spôsobom:

$$X_{t_k} = \exp \left\{ \ln(X_{t_{k-1}}) \times e^{-\kappa\Delta t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa\Delta t}}{2\kappa}} Z_{t_k} \right\}$$

$$\tilde{X}_{t_k} = \exp \left\{ \ln(X_{t_{k-1}}) \times e^{-\kappa\Delta t} + \alpha(1 - e^{-\kappa\Delta t}) - \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa\Delta t}}{2\kappa}} Z_{t_k} \right\}$$

Pre znázornenie uvádzame Obr. 5.1, na ktorom je porovnanie obyčajnej simulácie dráh a simulácie dráh s použitím antithetic variates metódy.



Obr. 5.1: Porovnanie simulácie dráh bez (vľavo) a s (vpravo) použitím antithetic variates metódy pri mean reverting procese pre $K = 200$ diskrétnych časových krokov počas $T = 4$ rokov

5.3 Riešenie problému

Vygenerujeme N rôznych dráh vývoja ceny etanolu v čase od 0 po t_K , to znamená $\frac{N}{2}$ prvých dráh a $\frac{N}{2}$ antithetic dráh. Pri riešení problému budeme postupovať rekurzívne po jednotlivých dráhach a budeme používať Monte Carlo metódu najmenších štvorcov popísanú v Kapitole 2.

Uvažujeme, že životnosť továrne je $T + \tau$, kde τ je malý časový krok, a oceňujeme opciu uzavrieť továreň predčasne do času T . Na konci maturity opcie, tj v čase $t_K = T$ za predpokladu, že sme ju doteraz neuzavreli, máme k dispozícii dve rozhodnutia:

- môžeme továreň okamžite uzavrieť a dostať E
- môžeme továreň ponechať otvorenú, a dostať peňažné toky z predaja etanolu a zároveň E na konci jej životnosti, tj $\max((Q(X_{t_K} - A) - I)\tau + Ee^{-r\tau}, -I\tau + Ee^{-r\tau})$

pričom peňažné toky v oboch prípadoch sú nám známe. Vyberieme preto maximum z nich a teda matica peňažných tokov C v čase t_K tak obsahuje maximum z E a $\max((Q(X_{t_K} - A) - I)\tau + Ee^{-r\tau}, -I\tau + Ee^{-r\tau})$ pre každú dráhu:

$$C(X_{t_K}, t_K) = \max(E, \max((Q(X_{t_K} - A) - I)\tau + Ee^{-r\tau}, -I\tau + Ee^{-r\tau}))$$

Pre maticu optimálnych stratégií platí:

- ak $C(X_{t_K}, t_K) = E$ v matici optimálnych stratégií v čase t_K zapíšeme 1
- ak $C(X_{t_K}, t_K) = \max((Q(X_{t_K} - A) - I)\tau + Ee^{-r\tau}, -I\tau + Ee^{-r\tau})$ v matici optimálnych stratégií v čase t_K zapíšeme 0

Keďže v algoritme aproximujeme spojité peňažné toky z predaja etanolu, prípadne pozastavenia výroby, ako $\max((Q(X_{t_k} - A) - I)\Delta t, -I\Delta t)$, pre presnejší výpočet je vhodný veľký počet časových krokov K , aby sme týmto spôsobom dostatočne presne aproximovali spojité toky.

Môžeme sa presunúť do časového kroku t_{K-1} , kde sa opäť rozhodujeme, či továreň uzavrieme, a teda zrealizujeme našu opciu zanechať továreň, alebo ju necháme otvorenú a k rozhodnutiu sa môžeme vrátiť o krok neskôr. Za podmienky, že sme továreň neuzavreli do času t_{K-1} , ju uzavrieme, ak peňažné toky v prípade uzavretia továrne E sú vyššie ako peňažné toky z jej ponechania. V tomto kroku nám však už peňažné toky v prípade ponechania továrne nie sú známe a budeme ich aproximovať regresiou najmenších štvorcov na priestor funkcií $L_j(X)$ $j = 0, \dots, M$, kde X je vektor nasimulovaných hodnôt v čase t_{K-1} . Do vektoru Y uložíme zdiskontované budúce peňažné toky v prípade ponechania továrne z matice C v čase t_K . Tieto potom zregresujeme na priestor funkcií $L_j(X)$ $j = 0, \dots, M$ a získame koeficienty a_j $j = 0, \dots, M$. Následne môžeme určiť očakávanú hodnotu diskontovaných peňažných tokov $\hat{F}(X, t_{K-1})$ vzhľadom k filtrácii $\mathcal{F}_{t_{K-1}}$ ako:

$$\hat{F}(X, t_{K-1}) = \sum_{j=0}^M a_j L_j(X) + \max((Q(X_{t_{K-1}} - A) - I)\Delta t, -I\Delta t) \quad (5.2)$$

kde druhý člen $\max((Q(X_{t_{K-1}} - A) - I)\Delta t, -I\Delta t)$ sú v našom prípade známe peňažné toky v prípade ponechania továrne ešte v čase t_{K-1} . Teraz už vieme určiť stratégiu v čase t_{K-1} , rovnako ako aj maticu peňažných tokov C pre čas t_{K-1} :

- ak $\max(E, \hat{F}(X, t_{K-1})) = E$ v matici optimálnych stratégií v čase t_{K-1} zapíšeme 1 a matica peňažných tokov $C(X_{t_{K-1}}, t_{K-1}) = E$
- ak $\max(E, \hat{F}(X, t_{K-1})) = \hat{F}(X, t_{K-1})$ v matici optimálnych stratégií v čase t_K zapíšeme 0 a matica peňažných tokov $C(X_{t_{K-1}}, t_{K-1}) = \max((Q(X_{t_{K-1}} - A) - I)\Delta t, -I\Delta t) + C(X_{t_K}, t_K) * e^{-r\Delta t}$

Po určení stratégie a matice peňažných tokov v čase t_{K-1} sa môžeme presunúť do kroku t_{K-2} , kde postupujeme analogicky ako v prípade časového kroku t_{K-1} , a tak sa postupne presúvame po jednotlivých časových krokoch $t_{K-3}, t_{K-4}, \dots, t_1$.

V našom algoritme sme implementovali aj spôsob, ako určiť stratégiu v čase t_0 . V čase t_0 nedochádza k regresii, nakoľko je vo vektore X iba jedna hodnota, a to počiatočná cena etanolu X_0 . Namiesto regresie preto určíme iba priemer budúcich diskontovaných peňažných tokov z každej dráhy, a ak by bola výplata z okamžitého uplatnenia opcie väčšia ako tento priemer, tak opciu uplatníme, čo pre nás znamená, že ju máme zatvoriť už v čase t_0 .

Doteraz sme nikde nespomenuli hodnotu reálnej opcie. Narozdiel od amerických opcií, kde by sme ich hodnotu určili jednoducho ako priemer zdiskontovaných peňažných tokov z matice C v čase t_1 do času 0, v našom prípade je hodnota reálnej opcie určená inak. Všimnime si, že priemer zdiskontovaných peňažných tokov z matice C v čase t_1 do času 0 predstavuje čistú súčasnú hodnotu NPV továrne s opciou zanechať ju kedykoľvek až po koniec jej životnosti T , pričom túto opciu uplatníme v optimálnom čase. Vo všeobecnosti je v takomto príklade viacero možností, ako určiť hodnotu opcie. V našej práci však určíme hodnotu opcie ako rozdiel NPV továrne (projektu) s možnosťou zanechať továreň a NPV továrne (projektu) bez možnosti zanechať továreň, kde hodnota NPV továrne bez možnosti zanechať ju sa dá zo simulácií určiť ako priemer všetkých zdiskontovaných peňažných tokov z predaja etanolu, pričom továreň zanecháme a dostaneme tak E na konci jej životnosti $T + \tau$.

Hodnotu jednotlivých parametrov, ako aj jednotlivé výsledky algoritmu pre náš príklad si ukážeme v nasledovnej časti tejto kapitoly.

5.4 Výsledky algoritmu

V tejto časti si ukážeme numerické výsledky použitého algoritmu pri riešení nášho príkladu, ako aj graf hranice predčasného uplatnenia opcie. Príklad sme riešili s použitím parametrov uvedených v Tabuľke 5.2, pričom hodnota bezrizikovej úrokovej miery bola prebratá rovnako z článku, odkiaľ sme čerpali aj parametre pre mean reverting proces ceny etanolu ([17]).

V regresii sme použili ako bázové funkcie nasledovné polynómy: $1, X, X^2, X^3, X^4$.

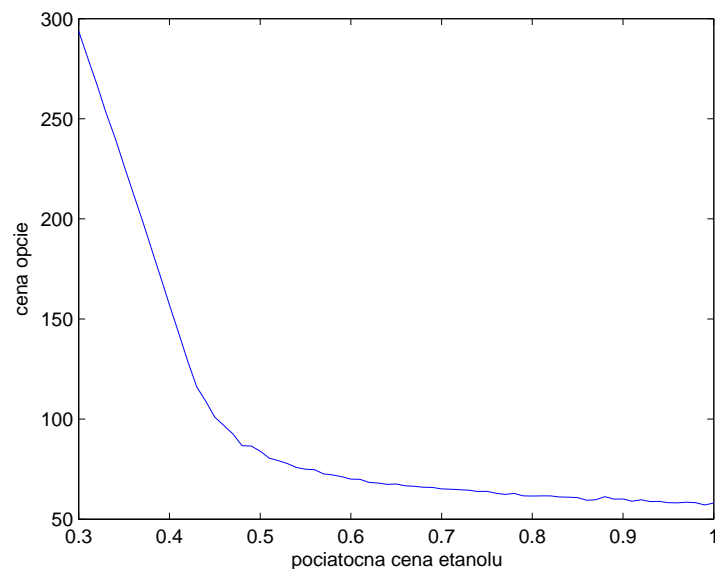
| | | | | | | | | |
|-----|-----|--------|----------|---------|------|-----------|--------|--------|
| r | K | T | A | I | Q | X_0 | E | τ |
| 6% | 500 | 4 roky | 0,50 R\$ | 450 R\$ | 2000 | 0,712 R\$ | 50 R\$ | 1/100 |

Tabuľka 5.2: Použité hodnoty parametrov pri riešení príkladu

Algoritmus sme na náš príklad aplikovali s $N = 100000$ simuláciami, nakoľko máme veľké K , a s rastúcim K sa znižuje maximálny počet možných simulácií. Priemer ceny opcie zo 100 replikácií výpočtu \bar{V} a variácia Var je v Tabuľke 5.3.

| | |
|-----------|--------|
| \bar{V} | Var |
| 64,5044 | 0,2915 |

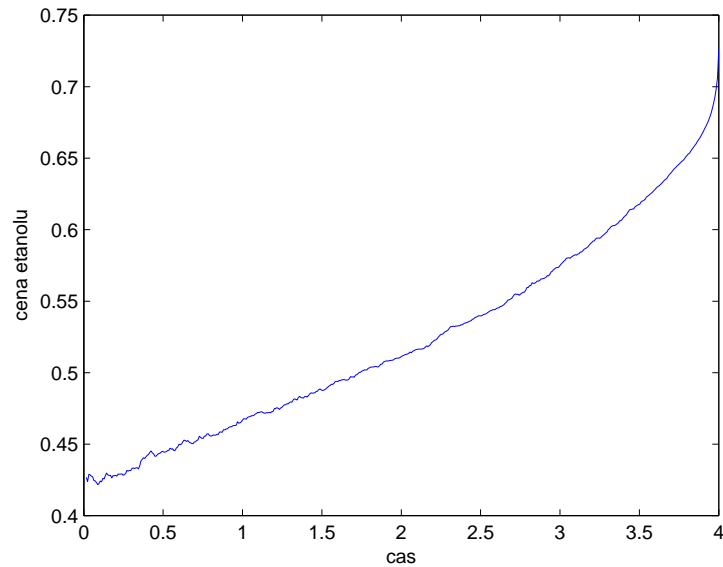
Tabuľka 5.3: Priemerná cena opcie a variácia zo 100 replikácií algoritmu



Obr. 5.2: Cena reálnej opcie v závislosti od počiatočnej hodnoty etanolu X_0 za jednu jednotku

Uvedomme si, že čím je nižšia cena etanolu na začiatku, tým má pre nás reálna opcia uzatvoriť továreň vyššiu cenu. Je to z toho dôvodu, že čím je nižšia cena etanolu, tým sú vyššie očakávané straty z jeho predaja. Na Obr. 5.2 môžeme vidieť cenu opcie ako funkciu počiatočnej ceny etanolu. Môžeme vidieť, že aj pri vyšších hodnotách naša cena opcie nekonverguje k 0. To je však spôsobené tým, že cenu opcie počítame ako rozdiel NPV s možnosťou uzavrieť továreň a NPV bez možnosti uzavrieť továreň, a

aj pri vyšších počiatkových hodnotách etanolu sa vyskytujú simulácie, v ktorých je optimálne predčasne továreň uzavrieť a predísť tak všetkým prípadným prevádzkovým stratám. V hodnote opcie sú následne zachytené tieto straty, rovnako ako aj predčasné získanie E zostatkovej hodnoty továrne.

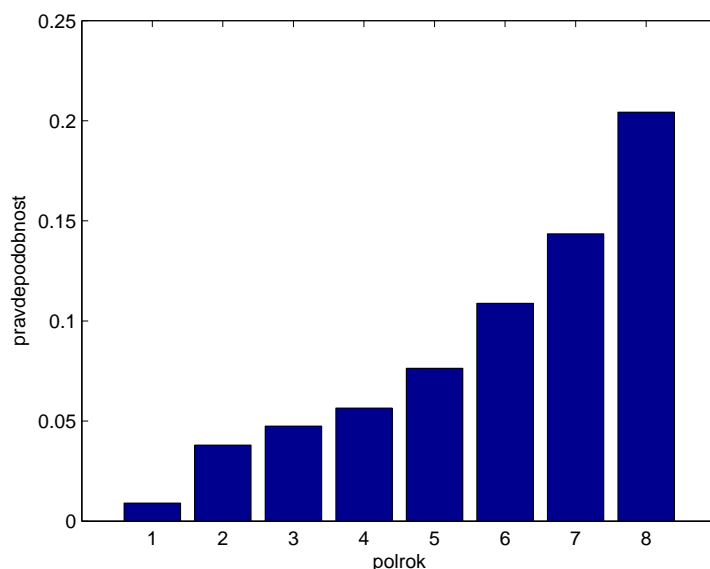


Obr. 5.3: Hranica predčasného uplatnenia reálnej opcie

Zaujímavejším výsledkom algoritmu, ako je samotná cena reálnej opcie, je pre nás hranica predčasného uplatnenia. Ako sme už spomenuli v predošlej kapitole, je to funkcia času, ktorá nám v každom čase počas doby životnosti našej továrne udáva kritické hodnoty ceny etanolu, pri ktorých už máme továreň uzavrieť. Tento výsledok je jedným z významných rozdielov medzi metódou reálnej opcie a metódou čistej súčasnej hodnoty. Pri analýze reálnej opcie tak máme k dispozícii informácie, ako sa rozhodnúť aj v budúcnosti, za predpokladu, že ostatné parametre v modeli (ako napríklad bezriziková úroková miera r , parametre stochastického procesu vývoja ceny etanolu κ, α, σ , atď) zostanú nezmenené. Na Obr. 5.3 je možné vidieť hranicu predčasného uplatnenia pri použití $N = 150000$ simulácií. Pre hodnoty nad krivkou je optimálne továreň ponechať otvorenú, naopak pre hodnoty pod krivkou je optimálne továreň uzavrieť. Všimnime si, že podľa hranice predčasného uplatnenia je optimálnym rozhodnutím továreň ponechať otvorenú aj v prípade, ak je cena za jednu jednotku etanolu menšia ako jednotkové náklady na jeho výrobu spolu s fixnými nákladmi pre diskretný časový krok. Tento výsledok je z dôvodu, že uzatvorenie továrne je nezvratné a preto pripúš-

ťame aj dočasné straty s tým, že očakávame, že v budúcnosti cena etanolu ešte narastie na také hodnoty, že vykryje tieto dočasné straty.

Okrem samotného grafu hranice predčasného uplatnenia môže byť pre nás zaujímavé aj rozdelenie pravdepodobnosti, kedy nastane uplatnenie opcie. Ako investor tak vieme, kedy a s akou pravdepodobnosťou môžeme očakávať, že príde k uplatneniu opcie, a či vôbec jej uplatnenie nastane. V období s vysokou pravdepodobnosťou tak môžeme pozornejšie sledovať vývoj ceny etanolu a sledovať investičné pravidlo dané hranicou predčasného uplatnenia. Na Obr. 5.4 je znázornená pravdepodobnosť uplatnenia opcie pre jednotlivé polročné obdobia. Vidíme, že s najväčšou pravdepodobnosťou príde k jej uplatneniu v poslednom polroku, a teda ku koncu maturity, respektíve ku koncu životnosti továrne.



Obr. 5.4: Pravdepodobnosť uplatnenia opcie v jednotlivých polročných obdobiach

5.5 Analýza citlivosti

Obsahom tejto podkapitoly budú výsledky algoritmu pri zmene rôznych parametrov. V algoritme sme pri analýze citlivosti používali opäť $N = 100000$ simulácií pre numerické výpočty, $N = 150000$ simulácií pre hranicu predčasného uplatnenia, bázové funkcie $1, X, X^2, X^3, X^4$ a $K = 500$. Pozrieme sa, ako sa mení cena opcie a hranica predčasného uplatnenia pri zmene niektorých fixných parametrov v zadaní príkladu, a

to najmä z dôvodu, že tieto parametre uvažujeme konštantné, a ako investor chceme vedieť, ako by sa zmenili výsledky v prípade, že sme tieto parametre odhadli nesprávne. Konkrétne sa pozrieme, ako sa menia výsledky pri zmene volatility procesu ceny etanolu σ , jednotkových nákladov na výrobu etanolu I a zostatkovej hodnoty továrne E .

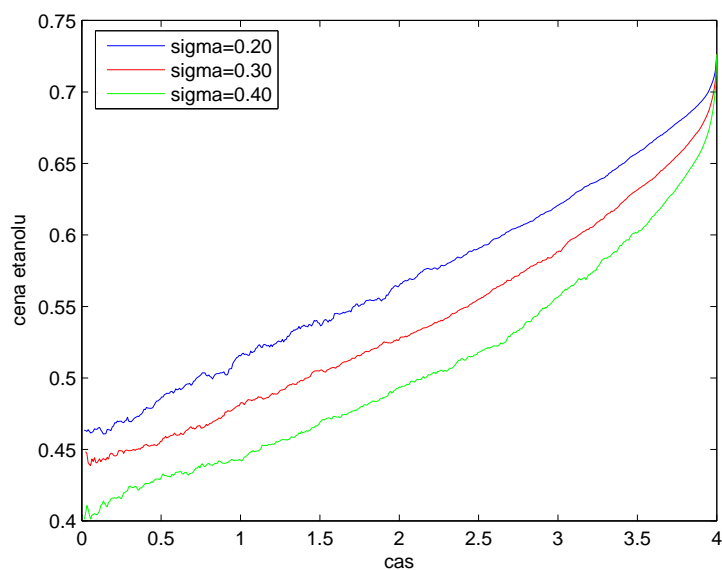
5.5.1 Zmena volatility

S rastúcou volatilitou v procese ceny etanolu rastie aj cena našej reálnej opcie. Je to spôsobené tým, že v prípade väčšej volatility ceny etanolu viac fluktuujú v čase, pričom môžu nadobúdať nižšie hodnoty, a v tom prípade má pre nás právo uplatniť opciu väčšiu hodnotu. Konkrétne numerické výsledky z algoritmu pre rôzne hodnoty σ sú uvedené v Tabuľke 5.4.

| Volatilita σ | α | \bar{V} | Var |
|---------------------|----------|-----------|--------|
| 0,2 | -0,2336 | 13,5177 | 0,0263 |
| 0,3 | -0,2524 | 46,7319 | 0,1677 |
| 0,4 | -0,2788 | 89,6118 | 0,4559 |

Tabuľka 5.4: Priemer ceny reálnej opcie \bar{V} a variancia Var zo 100 replikácií algoritmu pri rôznych hodnotách volatility σ v mean reverting procese ceny etanolu. So zmenou σ súvisí aj zmena α , preto uvádzame aj tieto hodnoty.

Pozrime sa teraz, ako vyzerajú hranice predčasného uplatnenia opcie pri rôznych hodnotách volatility σ . Na konci životnosti má hranica rovnakú hodnotu, ktorá závisí od výšky jednotkových nákladov A , fixných nákladov I , množstva vyrábaného a predávaného etanolu Q a od zostatkovej hodnoty E . Počas doby životnosti továrne však pri vyššej volatilitate je hraničná cena etanolu, pod ktorou sa už oplatí továreň zavrieť, nižšia, viď Obr. 5.5. Sme tak ochotní prijať oveľa väčšiu dočasnú stratu, ako v prípade menšej volatility, a ponechať továreň otvorenú, z dôvodu, že pri väčšej volatilitate sa ceny v budúcnosti môžu viac meniť, a môžeme tak opäť získať pozitívne toky z predaja etanolu a vykryť tieto dočasné straty.



Obr. 5.5: Hranica predčasného uplatnenia reálnej opcie pri rôznych hodnotách volatility v mean reverting procese ceny etanolu

5.5.2 Zmena jednotkových nákladov

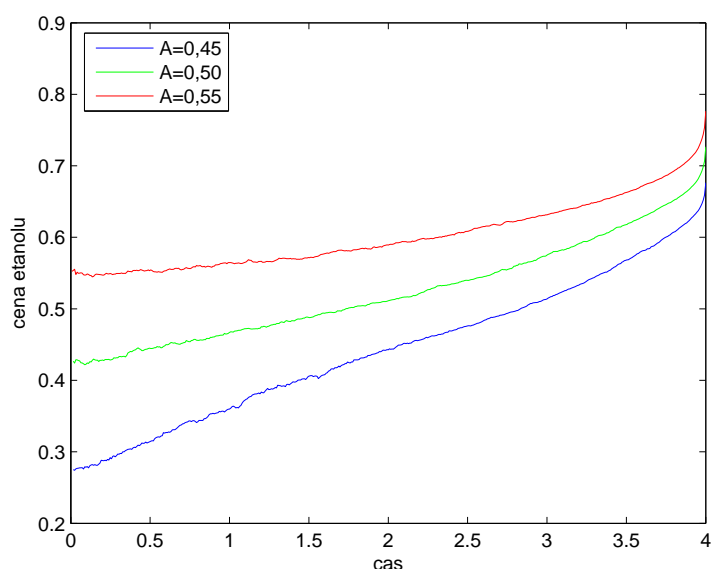
V tejto časti si ukážeme výsledky ceny opcie a hranice predčasného uplatnenia pre rôzne výšky jednotkových nákladov. S rastúcimi jednotkovými nákladmi rastie aj cena opcie, čo je očakávaný výsledok, nakoľko pri vyšších nákladoch je pravdepodobnosť, že cena etanolu bude nadobúdať nižšie hodnoty ako je výška nákladov, a tým pádom budeme mať záporné peňažné toky z platby fixných nákladov bez príjmu z predaja etanolu, väčšia. Naopak, pri nižších jednotkových nákladoch je cena reálnej opcie nižšia. Konkrétne ceny reálnej opcie pre rôzne hodnoty jednotkových nákladov sú uvedené v Tabuľke 5.5.

| Jednotkové náklady A | \bar{V} | Var |
|------------------------|-----------|--------|
| 0,45 | 23,1436 | 0,0768 |
| 0,50 | 64,5044 | 0,2915 |
| 0,55 | 170,7553 | 0,4252 |

Tabuľka 5.5: Priemer ceny reálnej opcie \bar{V} a variancia Var zo 100 replikácií pri rôznych hodnotách jednotkových nákladov A

Zmeny v hranici predčasného uplatnenia môžeme vidieť na Obr. 5.6. Všimnime

si, že s meniacou sa výškou nákladov sa nielen mení hranica ceny etanolu na konci životnosti továrne, ktorá priamo vyplýva z výšky nákladov, ale mení sa aj tvar krivky. Vo všeobecnosti pri nižších nákladoch podľa investičného pravidla máme opciu uplatniť pri nižších cenách etanolu a s rastúcimi jednotkovými nákladmi rastie aj hraničná cena etanolu, pri ktorej je optimálne opciu uplatniť. Pri hodnote variabilných nákladov $A = 0,55$ môžeme vidieť, že je už celá hranica predčasného uplatnenia nad touto hodnotou, a v tomto prípade je okamžitá výplata E zaujímavejšia ako očakávané peňažné toky z otvorenej továrne plus zdiskontovaná výplata E z uplatnenia opcie neskôr.



Obr. 5.6: Hranica predčasného uplatnenia reálnej opcie pri zmene výšky jednotkových nákladov

5.5.3 Zmena zostatkovej hodnoty továrne

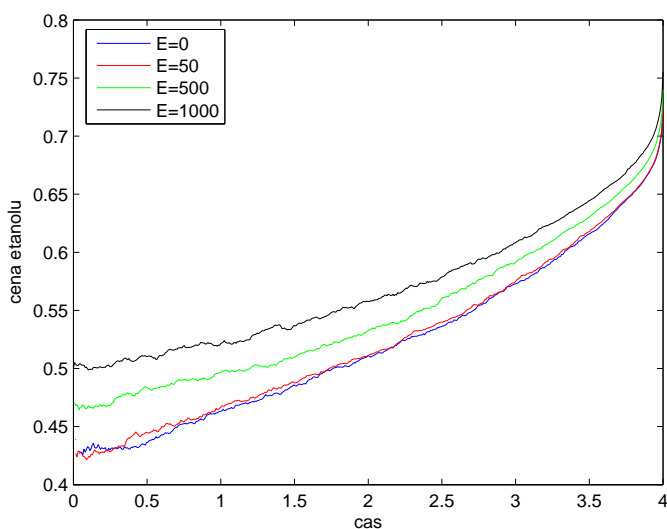
Na záver tejto časti sa pozrieme, aký má vplyv výška zostatkovej hodnoty továrne na výsledky algoritmu. S rastúcou výškou zostatkovej hodnoty továrne rastie aj cena reálnej opcie, konkrétne hodnoty môžeme vidieť v Tabuľke 5.6. Je to z toho dôvodu, že čím je vyššia zostatková hodnota E , tým viac sa na nej odráža diskontný faktor, a v prípade ponechania otvorenej továrne tak požadujeme vyššie peňažné toky z predaja etanolu.

Čo sa týka hranice predčasného uplatnenia v závislosti od výšky zostatkovej hodnoty továrne E , platí, že pri rastúcej zostatkovej hodnote továrne rastie aj hraničná

| Zostatková hodnota E | \bar{V} | Var |
|------------------------|-----------|--------|
| 0 | 62,4789 | 0,2380 |
| 50 | 64,5044 | 0,2915 |
| 500 | 86,8792 | 0,3817 |
| 1000 | 119,3157 | 0,4969 |

Tabuľka 5.6: Cena reálnej opcie pri rôznych hodnotách zostatkovej hodnoty továrne E

hodnota ceny etanolu, pod ktorou by sme mali tovareň v danom čase uzavrieť. Hranice predčasného uplatnenia pre rôzne zostatkové hodnoty továrne E sú zobrazené na Obr. 5.7. Podobne ako v prípade zmeny jednotkových nákladov sa mení aj hraničná hodnota na konci maturity opcie. Táto hraničná hodnota na konci maturity teda závisí od hodnoty nákladov, ako aj od zostatkovej hodnoty továrne, ale aj od množstva vyrobeného etanolu. Pri vyššej zostatkovej hodnote továrne sa viac prejaví vplyv diskontného faktora za krátky časový úsek τ medzi koncom maturity opcie a koncom životnosti továrne, a preto ak máme tovareň ponechať otvorenú, požadujeme väčšie peňažné toky z predaja etanolu, a teda vyššiu hraničnú hodnotu.



Obr. 5.7: Hranica predčasného uplatnenia reálnej opcie pri zmene zostatkovej hodnoty továrne

5.6 Zhrnutie

V tejto kapitole sme si ukázali výsledky algoritmu na konkrétnom príklade reálnej opcie, kde riešime problém, kedy a za akých podmienok máme zanechať továreň na výrobu etanolu, ktorej výroba už nie je efektívna. V analýze citlivosti sme videli, že hranica predčasného uplatnenia ako investičné pravidlo pomerne silno závisí od výšky jednotlivých parametrov, ktoré v modeli považujeme za konštantné, ako napríklad volatilita ceny etanolu, výška variabilných nákladov, alebo výška zostatkovej hodnoty továrne. Pre správne investičné rozhodnutie je preto dôležité, aby investor správne určil aj hodnotu týchto parametrov.

Záver

V tejto diplomovej práci sme sa zaoberali reálnymi opciami a jednou z numerických metód, ako ich môžeme riešiť. Rozvoj reálnych opcií ako metódy investičného rozhodovania súvisel najmä s rozvojom teórie finančných opcií. Reálne opcie môžeme vnímať ako anológiu finančných opcií v investičnom rozhodovaní, nakoľko predstavujú právo, ale nie povinnosť, investovať do určitého projektu, ktorého hodnota sa vyvíja stochasticky, za cenu nákladov počas daného časového obdobia. Reálne opcie však, narozdiel od finančných, nie sú natoľko štandardizované, a každý prípad môže mať svoje vlastné špecifiká. V tejto práci sme ukázali, ako možno využiť jednu z numerických metód oceňovania amerických finančných opcií pri oceňovaní reálnych opcií. Jednou z najväčších výhod tejto numerickej metódy je najmä ich jednoduchá implementácia aj pre prípady, keď podkladové aktívum sleduje iný stochastický proces ako v literatúre často spomínaný geometrický Brownov pohyb.

V prvej časti praktickej časti tejto práce sme analyzovali výsledky implementovaného algoritmu LSM pri použití rôznych parametrov pomocou porovnávaní s výsledkami z Crank Nicholsonovej metódy konečných diferencií. Porovnávanie výsledkov sme mohli urobiť z dôvodu, že sme uvažovali veľmi zjednodušenú reálnu opciu, ktorá bola plne analogická americkej put opcii, a tak sme mohli priamočiaro použiť metódy pre oceňovanie amerických opcií. Videli sme, že počet simulácií v algoritme LSM znižuje varianciu výstupnej ceny opcie z algoritmu a v prípade hranice predčasného uplatnenia vplýva na jej hladkosť. Veľmi dôležitým parametrom algoritmu, najmä z pohľadu na hranicu predčasného uplatnenia, je počet bazových funkcií. Nedostatočný počet bazových funkcií dáva výrazne inú hranicu predčasného uplatnenia, príliš veľký počet spôsobuje zlomy v krivke. V našom prípade jednoduchej opcie s jedným zdrojom náhodnosti sme najlepšie výsledky hranice predčasného uplatnenia dostávali s piatimi polynómami, pričom medzi jednotlivými typmi polynomiálnych bazových funkcií sme

nepostrehli žiadny významný rozdiel. Algoritmus LSM sa pre náš príklad javil ako vhodná numerická metóda aproximácie ceny opcie, avšak určenie hranice predčasného uplatnenia je obtiažnejšie, najmä z dôvodu veľmi rozdielnych výsledkov pri rôznych počtoch básových funkcií.

V druhej časti sme sa následne zaoberali konkrétnym príkladom neefektívnej továrne na výrobu etanolu, a riešili sme, pri akých podmienkach je optimálne továreň zanechať a uplatniť tak reálnu opciu, tzv. *option to abandon*. Ukázali sme, akým spôsobom môžeme aplikovať Monte Carlo metódu najmenších štvorcov na tento konkrétny príklad, kde cena etanolu sleduje mean reverting proces. V analýze citlivosti sme ukázali, ako rôzne parametre v úlohe ovplyvňujú hodnotu reálnej opcie ako aj investičné pravidlo. Výsledky algoritmu pre náš príklad boli pomerne citlivé na zmeny všetkých troch testovaných parametrov, ako volatilita v procese ceny etanolu, výška jednotkových nákladov na jeho výrobu, ako aj zostatková hodnota továrne, a keďže tieto parametre v modeli považujeme za konštantné, pre správne investičné rozhodnutie je pre investora dôležité správne zvoliť aj hodnotu týchto parametrov.

Zaujímavou prácou do budúcnosti môže byť rozšírenie algoritmu o oceňovanie reálnych opcií, v ktorých predpokladáme viacero zdrojov náhodnosti, nakoľko algoritmus LSM sa pre takéto problémy aplikuje jednoduchšie ako iné numerické metódy, a taktiež z dôvodu, že takýto model je bližší skutočnému svetu, kde v princípe existuje viacero zdrojov náhodnosti, a nielen jeden.

Dodatok A

Prílohy

A.1 Algoritmus LSM pre jednoduchý príklad z Kapitoly 4

```
function [Cena, cas_vypoctu,vektcas,H] = LSManti(N,K,T,S,E,r,c,sigma,REP)
% N-pocet simulacii – musi byt parne cislo
% K-pocet casovych krokov
% T-maturita opcie
% S-pociatocna cena aktiva
% E-strike price
% r-bezrizikova urokovka miera
% c-dividenda/convenience yield
% sigma-volatilita
% REP – pocet replikacii

x=cputime;
for rep=1:REP
    dt=T/K;
    St=zeros(N,K+1);
    St(:,1)=S;
    C=zeros(N,K+1); %matica cashflows C
    Strategia=NaN(N,K+1);
    Z=randn(N/2,K); %pre pripad bez antithetic variates metody Z=randn(N,K)
    A1=exp((r-c-0.5*sigma^2)*dt+sigma*sqrt(dt)*Z);
    A2=exp((r-c-0.5*sigma^2)*dt-sigma*sqrt(dt)*Z);
    for i=1:N/2 %simulacia N drah
        for j=2:(K+1)
            St(i,j)=St(i,j-1)*A1(i,j-1); %povodne drahy
            St(N/2+i,j)= St(N/2+i,j-1)*A2(i,j-1); %antithetic drahy
            %pre pripad bez antithetic variates metody i=1:N ...
        end
    end
end
```

```

        %St(i,j)=St(i,j-1)*A1(i,j-1);
    end
end

for i=1:N
    C(i,K+1)=max(0, E-St(i,K+1)); %matica C v case tK
    if C(i,K+1)>0
        Strategia(i,K+1)=1;
    end
end

for i=K:-1:2 %ostatne matice C rekurzivne
    index=find(St(:,i)<E); %indexy in-the-money drah
    if isempty(index)==0
        X=St(index,i);
        n=length(index);
        Y=zeros(1,n);
        C(:,i)=exp(-r*dt)*C(:,i+1);
        for a=1:n
            Y(a)=C(index(a),i);
        end
        Reg=[ones(size(X,1),1),X,X.^2,X.^3,X.^4]; %regresna matica
        %l0=ones(size(X,1),1);
        %l1=1-X;
        %l2=1/2*((3-X).*l1-l0);
        %l3=1/3*((5-X).*l2-2*l1);
        %l4=1/4*((7-X).*l3-3*l2);
        %l5=1/5*((9-X).*l4-4*l3);
        %Reg=[l0,l1,l2,l3,l4];% ,l5];
        b=regress(Y',Reg); %regresia
        F=b(1)+b(2)*X+b(3)*X.^2+b(4)*X.^3+b(5)*X.^4);
        %F=b(1)+b(2).*l1+b(3).*l2+b(4).*l3+b(5).*l4;%+b(6).*l5;
        Por=F<=(E-St(index,i)); %vektor 0 a 1, porovnanie cashflows
        for a=1:n
            if Por(a)==1
                C(index(a),:)=0;
                C(index(a),i)=E-St(index(a),i);
                Strategia(index(a),i)=1;
            end
        end
    end
end

C(:,1)=exp(-r*dt)*C(:,2);
if (mean(C(:,1))<=(E-S))
    C(:,:)=0;
    C(:,1)=E-S;
    Strategia(:,1)=1;
end

```

```

end
CC=C(:,1);

for i=1:K+1
    pom=min(Strategia(:,i)./St(:,i));
    H(i)=1/pom;
end
vektcas=dt*(0:K);
plot(vektcas,H);
Cena(rep)=mean(CC);
end

cas_vypoctu=cputime-x;

```

A.2 Algoritmus LSM pre príklad s továrňou na výrobu etanolu z Kapitoly 5

```

function [Cena] = ethanol(N,K,T,S,E,r,sigma,kappa,alfa,Q,A,I,REP)
% N-pocet simulacii - musi byt parne cislo 1000000
% K-pocet casovych krokov 500
% T-maturita opcie 4 roky
% S-pociatocna cena etanolu 0.712
% E-zostatkova hodnota 50
% r-urokova miera 0.06
% sigma-volatilita 0.3424
% kappa-mean reverting koeficient 1.327
% alfa- log long run mean -0.2627
% Q-vyrobene mnozstvo 2000
% A-jednotkove variabilne naklady 0.50
% I-fixne naklady 450
% REP-pocet replikacii

for rep=1:REP
    dt=T/K;
    dtt=1/100;
    St=zeros(N,K+1);
    St(:,1)=S;
    C=zeros(N,K+1); %matica cashflows C
    Strategia=NaN(N,K+1);
    NPV=zeros(N,1);
    Z=randn(N/2,K);
    a1=exp(-kappa*dt);
    a2=alfa*(1-a1);
    A3=sigma*sqrt((1-exp(-2*kappa*dt))/(2*kappa))*Z;

```

```

%simulacia N drah
for i=1:N/2
    for j=2:(K+1)
        St(i,j)=exp(log(St(i,j-1))*a1+a2+A3(i,j-1)); %prve drahy
        St(N/2+i,j)=exp(log(St(N/2+i,j-1))*a1+a2-A3(i,j-1));%antithetic
    end
end
St;

NPV=max((Q*(St(:,K+1)-A)-I)*dt+E*exp(-r*dt), -I*dt+E*exp(-r*dt));
C(:,K+1)=max(E,NPV);
index=find(E>=NPV);
Strategia(index,K+1)=1;

for i=K:-1:2 %ostatne matice C rekurzivne
    X=St(:,i);
    maximum=max((Q*(X-A)-I)*dt,-I*dt);
    NPV=NPV*exp(-r*dt)+maximum;
    Y=C(:,i+1)*exp(-r*dt);
    Reg=[ones(size(X,1),1),X,X.^2,X.^3,X.^4]; %regresna matica
    %l0=ones(size(X,1),1);
    %l1=1-X;
    %l2=1/2*(3-X).*l1-10;
    %l3=1/3*(5-X).*l2-2*l1;
    %l4=1/4*(7-X).*l3-3*l2;
    %l5=1/5*(9-X).*l4-4*l3;
    %Reg=[l0,l1,l2,l3,l4];%,l5];
    b=regress(Y,Reg); %regresia
    F=maximum+b(1)+b(2)*X+b(3)*X.^2+b(4)*X.^3+b(5)*X.^4;
    %F - ocakavana hodnota buducich CF plus terajsi CF
    %F=Q*(X-A)*dt+b(1)+b(2)*l1+b(3)*l2+b(4)*l3+b(5)*l4;%+b(6)*l5;
    index=find(E>=F);
    Strategia(index,i)=1;
    C(index,i)=E;
    index2=find(E<=F);
    C(index2,i)=maximum(index2)+Y(index2);
end

maxi=max((Q*(S-A)-I)*dt,-I*dt);
C(:,1)=exp(-r*dt)*C(:,2)+maxi;
NPV=NPV*exp(-r*dt)+maxi;
if (mean(C(:,1))<=E)
    C(:,1)=0;
    C(:,1)=E;
    Strategia(:,1)=1;
end

```

```

for i=1:K+1
    pom=min(Strategia(:,i)./St(:,i));
    H(i)=1/pom;
end
cas=0:(K);
vektcas=cas*dt;
plot(vektcas,H);
Cena(rep)=mean(C(:,1))-mean(NPV);
end

PriemerCena=mean(Cena);
Variancia=var(Cena);

```

Literatúra

- [1] J.N. Tsitsiklis a B. Van Roy. Optimal stopping of markov processes: Hilbert space theory, approximation algorithms, and an application to pricing high-dimensional financial derivatives. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 44(10):1840–1851, 1999.
- [2] P. Glasserman a B. Yu. Number of paths versus number of basis functions in american option pricing. *The Annals of Applied Probability*, 14(4):2090–2119, 2004.
- [3] S. Tompaidis a C. Yang. Pricing american-style options by monte carlo simulation: Alternatives to ordinary least squares.
- [4] J. Barraquand a D. Martineau. Numerical valuation of high dimensional multivariate american securities. *Journal of financial and quantitative analysis*, 30(3), 1995.
- [5] F.A. Longstaff a E.S. Schwartz. Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, 14(1):113–147, 2001.
- [6] A. Ibanez a F. Zapatero. *Monte Carlo valuation of American options through computation of the optimal exercise frontier*. University of Southern California, 1998.
- [7] M. Broadie; P. Glasserman a G. Jain. Enhanced monte carlo estimates for american option prices. *The Journal of Derivatives*, 5(1):25–44, 1997.
- [8] L. Trigeorgis; R. Brosch a H. Smit. Stay loose. *The Wall Street Journal*, 2007.
- [9] M. Moreno a J.F. Navas. On the robustness of least-squares monte carlo (lsm) for pricing american derivatives. *Review of Derivatives Research*, 6(2):107–128, 2003.

- [10] L. Andersen a M. Broadie. Primal-dual simulation algorithm for pricing multidimensional american options. *Management Science*, pages 1222–1234, 2004.
- [11] F. Black a M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, pages 637–654, 1973.
- [12] A. Rodrigues a M.J.R. Armada. The valuation of real options with the least squares monte carlo simulation method. *Management Research Unit, University of Minho, Portugal*, 2006.
- [13] P. Boyle; M. Broadie a P. Glasserman. Monte carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(8-9):1267–1321, 1997.
- [14] E. Clément; D. Lamberton a P. Protter. *An analysis of the Longstaff-Schwartz algorithm for American option pricing*. Cornell University Operations Research and Industrial Engineering, 2001.
- [15] A.K. Dixit a R.S. Pindyck. *Investment under uncertainty*. Princeton University Press, 1994.
- [16] I. Melicherčík; L. Olšarová a V. Úradníček. *Kapitoly z finančnej matematiky*. EPOS, 2005.
- [17] C. Bastian-Pinto; L. Brandão a W.J. Hahn. Flexibility as a source of value in the production of alternative fuels: The ethanol case. *Energy economics*, 31(3):411–422, 2009.
- [18] A.R. Choudhury; A. King; S. Kumar a Y. Sabharwal. Optimizations in financial engineering: the least-squares monte carlo method of longstaff and schwartz. In *Parallel and Distributed Processing, 2008. IPDPS 2008. IEEE International Symposium on*, pages 1–11. Ieee, 2008.
- [19] P. Bossaerts. Simulation estimators of optimal early exercise. *Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon University*, 1989.
- [20] P. P. Boyle. Options: A monte carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4(3):323–338, 1977.

- [21] J.F. Carriere. Valuation of the early-exercise price for options using simulations and nonparametric regression. *Insurance: mathematics and Economics*, 19(1):19–30, 1996.
- [22] Z. Chladná. *Real options applications for strategic investment decisions*. Viedeň, 2007.
- [23] D. Garcia. *A Monte Carlo method for Pricing American Options*. University of California, Berkeley, 1999.
- [24] P. Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer Verlag, 2004.
- [25] F. Irving. The theory of interest. *Mac Millan, Nueva York*, 1930.
- [26] T.A. Luehrman. Investment opportunities as real options: getting started on the numbers. *Harvard business review*, 76(4), 1998.
- [27] T.A. Luehrman. Strategy as a portfolio of real options. *Harvard Business Review*, 76:89–101, 1998.
- [28] M.J. Mauboussin. Get real: using real options in security analysis. In *Credit Suisse First Boston Corp*. Citeseer, 1999.
- [29] I. Michnová. *Analýza investičného rozhodovania pri uplatnení reálnej opcie*. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, diplomová práca, 2008.
- [30] O. Mostovyi. On the stability the least squares monte carlo. *Optimization Letters*, pages 1–7, 2011.
- [31] S.C. Myers. Determinants of corporate borrowing. *Journal of financial economics*, 5(2):147–175, 1977.
- [32] J.A. Tilley. Valuing american options in a path simulation model. *Transactions of the Society of Actuaries*, 45(83):104, 1993.