

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Lévyho procesy
vs.
Black–Scholesov model

Diplomová práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

LÉVYHO PROCESY
VS.
BLACK–SCHOLESOV MODEL
Diplomová práca

Evidenčné číslo: 602e59d5-8a88-40b4-9f72-86baf173c650
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Školiteľ: RNDr. Tomáš Bokes, PhD.

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Daniela Zápražná
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Lévyho procesy vs. Black-Scholesov model
Cieľ: Analýza nedostatkov B-S modelu. Oceňovanie derivátov s podkladovým aktívom riadeným Lévyho procesmi.

Vedúci: RNDr. Tomáš Bokes
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum zadania: 13.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
Vedúci

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

.....
Vedúci

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne pod vedením školiteľa a s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 18. 3. 2012

.....

Pod'akovanie

Týmto sa chcem pod'akovať RNDr. Tomášovi Bokesovi, PhD. , svojmu školiteľovi, za všestrannú odbornú pomoc, za ochotu, trpezlivosť pri vedení tejto práce a cenné pripomienky a rady pri písaní práce.

Abstrakt

Zápražná, Daniela: Lévyho procesy vs. Black–Scholesov model. Diplomová práca. Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Univerzita Komenského v Bratislave.

Školiteľ: RNDr. Tomáš Bokes, PhD.

Bratislava: FMFI UK, 2012, 61 s.

V tejto práci sa zaoberáme nedostatkami Black–Scholesovho modelu a využitím Lévyho procesov na ich kompenzáciu. Štatistickými testami a grafickou analýzou reálnych dát potvrdíme porušenie predpokladov Black–Scholesovho modelu. Predstavíme teóriu Lévyho procesov a rôzne spôsoby ocenenia opcie s podkladovým aktívom riadeným Lévyho procesom.

Zameriame sa na ocenenie opcie pomocou parciálnej integro-diferenciálnej rovnice, pričom proces ceny akcie upravíme tak, aby bol Lévyho proces porovnateľný s Wienerovým procesom, t.j. aby bola jeho stredná hodnota 0 a variancia t . Trhové ceny opcií porovnáme s cenami opcií vypočítanými pomocou Black–Scholesovho modelu a parciálnej integro-diferenciálnej rovnice.

Kľúčové slová: opcie, nepresnosti Black–Scholesovho modelu, Lévyho procesy, skokovo-difúzny proces, parciálna-integro diferenciálna rovnica

Abstract

Zápražná, Daniela: Lévy processes vs. Black–Scholes model. Master thesis. Department of Applied Mathematics and Statistics. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Comenius University of Bratislava.

Supervisor: RNDr. Tomáš Bokes, PhD.

Bratislava: FMFI UK, 2012, 61 p.

The focus of this thesis is on the imperfections of the Black–Scholes model and using Lévy processes for their compensation. By various statistical tests and graphical analysis we show violation of assumptions of the famous Black–Scholes model. We introduce the theory of Lévy processes and various possibilities of option pricing with stock process driven by a Lévy process.

The aim of this paper is option pricing using a partial integro-differential equation with stock process adjusted to the one in Black–Scholes model so that Lévy process is similar to Wiener process, that means process with mean 0 and variation t . Finally, we calculate option prices by the partial integro-differential equation and Black–Scholes model. We compare these prices with the market prices.

Key words: options, imperfections of the Black–Scholes model, Lévy processes, jump-diffusion process, partial integro-differential equation

Obsah

Úvod	1
1 Základné pojmy	3
1.1 Stochastický proces	3
1.2 Charakteristická funkcia	5
1.3 Podmienená stredná hodnota	7
1.4 Itôov kalkulus	8
1.5 Martingal	10
1.6 Rizikovo neutrálna miera	11
2 Opcie	15
2.1 Európske opcie	16
2.2 Americké opcie	19
3 Nepresnosti Black–Scholesovho modelu	21
3.1 Momenty výnosov a odhad hustoty	23
3.2 Štatistické testy	25
3.3 Volatilita	28
4 Lévyho procesy	31
4.1 Vlastnosti Lévyho procesov	32
4.2 Príklady Lévyho procesov	36
4.2.1 Poissonov proces a zložený Poissonov proces	36
4.2.2 Skokovo-difúzny proces	37
5 Oceňovanie opcií s podkladovým aktívom riadeným Lévyho procesom	38
5.1 Funkcia hustoty	38
5.2 Charakteristická funkcia	39

5.3	Esscherova transformácia	40
5.4	Monte Carlo	41
5.5	Parciálna integro-diferenciálna rovnica	42
6	Aplikácia PIDE rovnice	45
6.1	Numerické riešenie PIDE rovnice	45
6.2	Aplikácia PIDE na trhové dáta	49
6.2.1	Odhadovanie parametrov	49
6.2.2	Numerické výsledky	51
	Záver	54
	A Tabuľky cien opcí	58
	Literatúra	60

Úvod

Finančné deriváty sú neoddeliteľnou súčasťou obchodovania na finančných trhoch. Sú odvodené od hodnoty aktív (napr. dlhopisov, akcií, komodít), úrokových mier, burzových indexov a menových kurzov. Na finančných trhoch je dôležité, aby boli finančné deriváty korektne ocenené.

Prvé zmienky o použití derivátov pochádzajú už zo staroveku. Aristoteles vo svojej práci *Politika* opisuje príbeh matematika a filozofa Thalesa z Milétu, ktorý si v období pred zberom úrody zabezpečil právo prvého použitia olivových lisov. Majiteľom olivových plantáží predával svoje práva počas zberu úrody za vyššiu cenu, čo mu prinieslo obrovský zisk. Thalesovi z Milétu sa tak pripisuje vznik opčných kontraktov.

V práci sa budeme venovať opciám a ich oceňovaním. Modely na oceňovanie opcií určujú cenu opcie pomocou parciálnych diferenciálnych rovníc, charakteristickej funkcie alebo podmienenej strednej hodnoty. Black–Scholesov model je najznámejším modelom na oceňovanie opcií, bol uverejnený ekonómom Myronom Scholesom a fyzikom Fisherom S. Blackom v roku 1973 v časopise *Journal of Political Economy* pod názvom *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Rovnaký model neskôr nezávisle zverejnil ekonóm Robert C. Merton. Na základe riešenia Black–Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice vieme určiť cenu európskej call (resp. put) opcie. Black–Scholesov model predpokladá, že vývoj ceny akcie sa riadi (geometrickým) Brownovým pohybom. Tento stochastický proces však nedokáže zachytiť veľké zmeny, ktoré cena akcie na finančných trhoch zaznamenáva. Do popredia výskumu vo finančnej matematike sa tak dostala kategória stochastických procesov - Lévyho procesy. Lévyho procesy sú pomenované po rovnomennom francúzskom matematikovi. Paul Lévy je považovaný za jedného zo zakladateľov modernej teórie stochastických procesov. Lévyho proces vznikne prekrytím Wienerovho procesu s možným (nekonečným) počtom nezávislých Poissonových procesov. Je založený na nekonečne deliteľ-

nom pravdepodobnostnom rozdelení, ktoré okrem prvých dvoch momentov - strednej hodnoty a disperzie, berie do úvahy aj ďalšie momenty, napr. šikmosť a špicatosť.

Diplomová práca je tvorená šiestimi kapitolami. V prvej kapitole sa venujeme matematickej teórii (napr. stochastický proces, martingal, Itôov kalkulus, rizikovo neutrálna miera), potrebnej vo finančnej matematike pri oceňovaní finančných derivátov. V ďalšej kapitole si uvedieme základné charakteristiky opcií a odvodenie Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice. Tretia kapitola je zameraná na nespĺnené predpoklady Black-Scholesovho modelu - porušenie predpokladu o konštantnej volatilitate v čase a normálnom rozdelení výnosov akcií a indexov. Štvrtá kapitola je venovaná Lévyho procesom, ich vlastnostiam a konkrétnym príkladom. V piatej kapitole sa zaoberáme rôznymi spôsobmi ocenenia opcií s podkladovým aktívom riadeným Lévyho procesom. V šiestej kapitole pomocou parciálnej integro-diferenciálnej rovnice numericky oceníme európsku a americkú call opciu a porovnáme výsledky s cenou opcie vypočítanej na základe Black-Scholesovho modelu. Dodatok A obsahuje tabuľky, ktoré porovnávajú trhové ceny európskych call opcií s cenami vypočítanými pomocou parciálnej integro-diferenciálnej rovnice a Black-Scholesovho modelu.

Základné pojmy

V tejto kapitole si predstavíme teóriu stochastického kalkulu. Zameriame sa na stochastický proces, charakteristickú funkciu, martingal, Itôov kalkulus a rizikovo neutrálnu mieru. Podrobnejšie informácie si čitateľ môže nájsť v [5], [7] a [11].

Pravdepodobnostný priestor budeme označovať výrazom (Ω, \mathcal{F}, P) , kde Ω je množina udalostí, \mathcal{F} je σ -algebra merateľných množín na Ω a P je pravdepodobnostná miera na Ω . V súvislosti s finančným modelovaním, množina Ω predstavuje všetky možné scenáre, ktoré môžu nastať na trhu a každý zo scenárov $\omega \in \Omega$ popisuje rôzny vývoj cien finančných nástrojov.

1.1 Stochastický proces

DEFINÍCIA 1.1. *Nech (Ω, \mathcal{F}, P) je pravdepodobnostný priestor. Reálnu funkciu $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame **náhodná premenná** (merateľné zobrazenie), ak platí:*

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad \{\omega; X(\omega) < x\} = X^{-1}(-\infty, x) \in \mathcal{F}.$$

DEFINÍCIA 1.2. *Stochastický proces je súbor náhodných premenných $X = \{X_t : 0 \leq t < \infty\}$ na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{F}, P) s hodnotami v \mathbb{R}^d . Pre každé t je*

$$\omega \rightarrow X_t(\omega); \omega \in \Omega$$

náhodná premenná. Ak fixujeme $\omega \in \Omega$, dostávame funkciu

$$t \rightarrow X_t(\omega); 0 \leq t < \infty,$$

ktorá sa nazýva trajektória X priradená ω .

Premennú t si môžeme predstaviť ako čas a ω ako možný scenár, resp. experiment. Potom $X_t(\omega)$ je realizácia X scenárom ω a reprezentuje výsledok scenára ω v čase t .

DEFINÍCIA 1.3. *Wienerov proces* W_t je stochastický proces s nasledujúcimi vlastnosťami:

- (i) s pravdepodobnosťou 1 sú trajektórie $W_t(\omega)$ spojité a platí $W_0 = 0$,
- (ii) náhodná premenná W_t má normálne rozdelenie $\mathcal{N}(0, t)$,
- (iii) $W_{t+s} - W_s$ má normálne rozdelenie $\mathcal{N}(0, t)$. Ďalej platí, že W_t má nezávislé prírastky, t.j. $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ sú nezávislé pre všetky $0 \leq t_1 < \dots < t_k$.

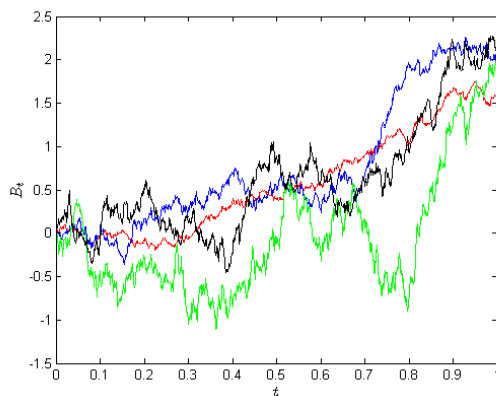
Pod pojmom **Brownov pohyb** sa myslí proces, ktorý vieme vyjadriť rovnicou

$$B_t = \mu t + \sigma W_t,$$

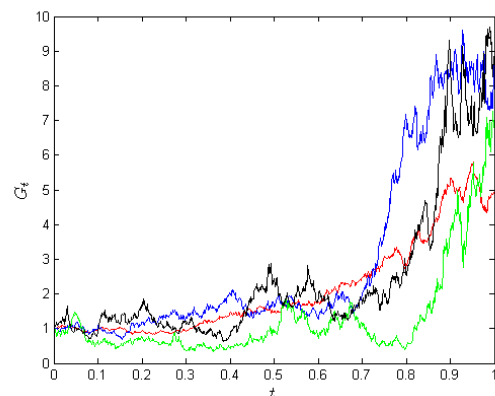
kde B_t predstavuje Brownov pohyb v čase t , $\mu \in \mathbb{R}$ predstavuje drift (očakávaný výnos akcie) a $\sigma > 0$ je volatilita akcie (neistota výnosu akcie).

POZNÁMKA 1.1. *Wienerov proces je Brownov pohyb s $\mu = 0$ a $\sigma = 1$.*

OBR. 1.1: *Realizácia (a) Brownovho pohybu a (b) príslušného geometrického Brownovho pohybu.*



(a)



(b)

DEFINÍCIA 1.4. *Nech B_t je Brownov pohyb. Potom stochastický proces G_t definovaný vzťahom*

$$G_t = G_0 e^{B_t}, \quad G_0 > 0,$$

sa nazýva geometrický Brownov pohyb.

Geometrický Brownov pohyb vieme definovať aj pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dG_t = \mu G_t dt + \sigma G_t dW_t.$$

Táto rovnica je vo finančnej matematike používaná na modelovanie vývoja finančného aktíva. Realizáciu Brownovho pohybu a príslušného geometrického Brownovho pohybu môžeme vidieť na obrázku 1.1.

1.2 Charakteristická funkcia

Pre náhodnú premennú X danú jej distribučnou funkciou existuje jediná charakteristická funkcia, ktorá je týmto rozdelením jednoznačne určená. Charakteristická funkcia teda úplne popisuje náhodnú premennú a je Fourierovou transformáciou funkcie hustoty pravdepodobnosti $f_X(x)$.

DEFINÍCIA 1.5. *Charakteristická funkcia* $\Phi_X(t)$ náhodnej premennej X je definovaná vzťahom

$$\Phi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx, \quad (1.1)$$

kde $t \in \mathbb{R}$, i je imaginárna jednotka a $f_X(x)$ je funkcia hustoty pravdepodobnosti náhodnej premennej X .

Ak pre náhodnú premennú existujú momenty až do rádu n , vieme ich určiť pomocou derivácií charakteristickej funkcie. Pre náhodnú premennú X označíme n -tý (necentrálny) moment vzťahom

$$m_X^{(n)} = E[X^n] \quad (1.2)$$

a n -tý centrálny moment $\gamma_X^{(n)}$ ako n -tý moment premennej $X - E[X]$, t.j.

$$\gamma_X^{(n)} = E[(X - E[X])^n]. \quad (1.3)$$

TVRDENIE 1.1. *Charakteristická funkcia a momenty náhodnej premennej X*

1. Ak $E[|X|^n] < \infty$, potom Φ_X má n spojité derivácie v bode $t = 0$ a

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad m_X^{(k)} \equiv E[X^k] = \frac{1}{i^k} \frac{\partial^k \Phi_X}{\partial t^k}(0).$$

2. Ak Φ_X má $2n$ spojitych derivácií v bode $t = 0$, potom $E[|X|^{2n}] < \infty$ a

$$\forall k = 1, \dots, 2n, \quad m_X^{(k)} \equiv E[X^k] = \frac{1}{i^k} \frac{\partial^k \Phi_X}{\partial t^k}(0).$$

3. Premenná X má konečné momenty až do rádu n , ak $t \rightarrow \Phi_X(t)$ je C^∞ v bode $t = 0$. Potom momenty náhodnej premennej X súvisia s deriváciami charakteristickej funkcie Φ_X nasledovne:

$$m_X^{(n)} \equiv E[X^n] = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n \Phi_X}{\partial t^n}(0).$$

DEFINÍCIA 1.6. Výrazom M_X budeme označovať **momentovú funkciu** náhodnej premennej X , ktorá je definovaná v tvare

$$M_X(t) = E[e^{tX}], \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

POZNÁMKA 1.2. Pre charakteristickú funkciu a momentovú funkciu náhodnej premennej X platí: $\Phi_X(t) = M_{iX}(t) = M_X(it)$. Charakteristická funkcia je funkcia generujúca momenty náhodnej premennej iX .

Charakteristická funkcia Φ_X náhodnej premennej X spĺňa: $\Phi_X(0) = 1$ a Φ_X je spojitá v bode $t = 0$, z čoho vyplýva, že $\Phi_X(t) \neq 0$ v okolí bodu $t = 0$. Vieme tak definovať spojitú verziu logaritmu funkcie Φ_X : existuje jediná spojitá funkcia Ψ_X definovaná v okolí bodu 0 taká, že

$$\Psi_X(0) = 0 \quad \text{a} \quad \Phi_X(t) = \exp[\Psi_X(t)],$$

pričom Ψ_X je charakteristický exponent náhodnej premennej X .

DEFINÍCIA 1.7. **Kumulanty** κ_X náhodnej premennej X sú definované vzťahom

$$\kappa_X^{(n)} = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n \Psi_X}{\partial t^n}(0). \quad (1.4)$$

Medzi centrálnymi momentmi $\gamma_X^{(n)}$ a kumulantmi $\kappa_X^{(n)}$ platia vzťahy

$$\begin{aligned} \gamma_X^{(1)} &= 0, & \kappa_X^{(1)} &= m_X^{(1)} = E[X], \\ \gamma_X^{(2)} &= \kappa_X^{(2)}, \\ \gamma_X^{(3)} &= \kappa_X^{(3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_X^{(4)} &= \kappa_X^{(4)} + 3(\kappa_X^{(2)})^2, \\ \gamma_X^{(5)} &= \kappa_X^{(5)} + 10\kappa_X^{(3)}\kappa_X^{(2)}.\end{aligned}$$

Pre strednú hodnotu, disperziu, šikmosť a špicatosť náhodnej premennej X platí

$$E[X] = \kappa_X^{(1)}, \quad (1.5)$$

$$\text{Var}[X] = \kappa_X^{(2)}, \quad (1.6)$$

$$s(X) = \frac{\kappa_X^{(3)}}{(\kappa_X^{(2)})^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.7)$$

$$k(X) = \frac{\kappa_X^{(4)}}{(\kappa_X^{(2)})^2}. \quad (1.8)$$

1.3 Podmienená stredná hodnota

DEFINÍCIA 1.8. Nech (Ω, \mathcal{F}, P) je pravdepodobnostný priestor, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je náhodná premenná, pre ktorú platí $E[|X|] < \infty$. Nech $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ je σ -algebra. **Podmienená stredná hodnota** $E[X|\mathcal{H}]$ je náhodná premenná s nasledujúcimi vlastnosťami:

- (i) $E[X|\mathcal{H}]$ je \mathcal{H} -merateľná,
- (ii) $\int_H E[X|\mathcal{H}]dP = \int_H XdP \forall H \in \mathcal{H}$.

VETA 1.1. Nech X, Y sú náhodné premenné na (Ω, \mathcal{F}, P) také, že $E[|X|] < \infty, E[|Y|] < \infty$. Nech $a, b \in \mathbb{R}$ a $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Potom platí:

- (i) $E[aX + bY|\mathcal{H}] = aE[X|\mathcal{H}] + bE[Y|\mathcal{H}]$,
- (ii) $E[E[X|\mathcal{H}]] = E[X]$,
- (iii) $E[X|\mathcal{H}] = X$, ak X je \mathcal{H} merateľná,
- (iv) $E[XY|\mathcal{H}] = YE[X|\mathcal{H}]$, ak Y je \mathcal{H} merateľná.

VETA 1.2. Nech X je náhodná premenná na (Ω, \mathcal{F}, P) taká, že $E[|X|] < \infty$. Nech \mathcal{G}, \mathcal{H} sú σ -algebry také, že

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{F}.$$

Potom platí

$$E[X|\mathcal{G}] = E[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}].$$

1.4 Itôov kalkulus

Vo finančných výpočtoch sa často využívajú integrály typu

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega), \quad (1.9)$$

pričom výsledok závisí od $\omega \in \Omega$ a $W_t(\omega)$ je Brownov pohyb na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{F}, P) . Funkcia $W_t(\omega)$ nie je hladká, dokonca s pravdepodobnosťou 1 nemá deriváciu v žiadnom bode. Integrál (1.9) teda nemôžeme definovať cez deriváciu funkcie $W_t(\omega)$ ako je to v prípade Riemannovho integrálu. Takýto integrál nazývame **Itôov integrál**.

DEFINÍCIA 1.9. *Nech $W_t(\omega)$ je Brownov pohyb na (Ω, \mathcal{F}, P) . Symbolom \mathcal{F}_t^W označíme najmenšiu σ -algebru na Ω generovanú množinami typu*

$$\{\omega; W_{t_1}(\omega) \in F_1, \dots, W_{t_k}(\omega) \in F_k\},$$

kde $k = 1, 2, \dots$, a $\forall t_j \leq t$ a $F_j \subset \mathbb{R}$ sú borelovské množiny.

DEFINÍCIA 1.10. *Nech $\{\mathcal{K}_t\}_{t \geq 0}$ je rastúci systém σ -algebier na Ω (t.j. $\mathcal{K}_{t_2} \supset \mathcal{K}_{t_1}$ pre $t_2 > t_1$). Stochastický proces*

$$g(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

je \mathcal{K}_t -adaptovaný, ak pre každé $t \geq 0$ je funkcia

$$\omega \rightarrow g(t, \omega)$$

\mathcal{K}_t -merateľná.

\mathcal{K}_t -adaptovanosť znamená, že funkcia nepredbieha prúd informácií reprezentovaných σ -algebrami \mathcal{K}_t .

DEFINÍCIA 1.11. *Nech $W_t(\omega)$ je Brownov pohyb na (Ω, \mathcal{F}, P) . Symbolom $\Upsilon = \Upsilon(S, T)$ označme triedu funkcií*

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

takých, že

- (i) funkcia $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ je $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -merateľná, kde \mathcal{B} označuje borelovské množiny na $[0, \infty)$,
- (ii) stochastický proces $f(t, \omega)$ je \mathcal{F}_t^W -adaptovaný,
- (iii) $E \left[\int_S^T f^2(t, \omega) dt \right] < \infty$.

Pre $f(t, \omega) \in \Upsilon$ bude definovaný Itôov integrál

$$\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega).$$

VEĽA 1.3. Itôova izometria

Nech $f(t, \omega) \in \Upsilon(S, T)$. Potom platí:

$$E \left[\left(\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) \right)^2 \right] = E \left[\int_S^T f^2(t, \omega) dt \right].$$

VEĽA 1.4. Vlastnosti Itôovho integrálu

Nech $f, g \in \Upsilon(0, T)$, $0 \leq S \leq U < T$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- (i) $\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) = \int_S^U f(t, \omega) dW_t(\omega) + \int_U^T f(t, \omega) dW_t(\omega)$ pre s.v. $\omega \in \Omega$,
- (ii) $\int_S^T (cf(t, \omega) + g(t, \omega)) dW_t(\omega) = c \int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) + \int_S^T g(t, \omega) dW_t(\omega)$ pre s.v. $\omega \in \Omega$,
- (iii) $E \left[\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) \right] = 0$,
- (iv) Náhodná premenná $\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega)$ je \mathcal{F}_T^W -merateľná.

Vo finančných výpočtoch sa však môžeme stretnúť aj so stochastickým procesom, ktorý je hladkou funkciou Brownovho pohybu. Takýto stochastický proces, ktorý vieme zapísať ako súčet Itôovho a klasického integrálu, nazývame Itôov proces.

LEMA 1.1. Itôova lema

Nech $X_t(\omega)$ je Itôov proces

$$dX_t(\omega) = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dW_t(\omega).$$

Nech $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$. Potom

$$Y_t(\omega) = g(t, X_t(\omega))$$

je tiež Itôov proces a platí

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)dt. \quad (1.10)$$

1.5 Martingal

DEFINÍCIA 1.12. *Filtráciou* na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{F}, P) nazývame systém σ -algebier $\{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$, $\mathcal{M}_t \subset \mathcal{F}$ takých, že

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t,$$

pričom \mathcal{M}_t predstavuje informáciu v čase t a filtrácia \mathcal{M} predstavuje vývoj toku informácií v čase.

DEFINÍCIA 1.13. Stochastický proces $\{M_t\}_{t \geq 0}$ na (Ω, \mathcal{F}, P) sa nazýva **martingal** vzhľadom k filtrácii $\{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$ a miere P , ak

- (i) náhodná premenná M_t je \mathcal{M}_t -merateľná pre všetky $t \geq 0$,
- (ii) $E[|M_t|] < \infty$ pre všetky $t \geq 0$,
- (iii) $E[M_s | \mathcal{M}_t] = M_t$ pre všetky $s \geq t$.

VETA 1.5. Nech $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ je stochastický proces. Nech

$$M_t := E[S_T | \mathcal{F}_t], 0 \leq t \leq T.$$

Potom $\{M_t\}_{0 \leq t \leq T}$ je martingal vzhľadom k $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

VETA 1.6. Nech $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ je Itôov proces

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t.$$

Nech

$$E \left[\left(\int_0^T \sigma_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] < \infty.$$

Potom X_t je \mathcal{F}_t^W martingal práve vtedy, keď $\mu_t = 0$ pre všetky $0 \leq t \leq T$.

DEFINÍCIA 1.14. Nech (Ω, \mathcal{F}) je pravdepodobnostný priestor s filtráciou \mathcal{M} . Náhodný čas T nazývame **moment zastavenia** filtrácie, ak udalosť $\{T < t\}$ patrí do σ -algebry \mathcal{F}_t pre každé $t \geq 0$.

DEFINÍCIA 1.15. Proces $\{M_t\}_{0 \leq t \leq T}$ sa nazýva **lokálny martingal**, ak existuje rastúca postupnosť momentov zastavenia taká, že každý proces zastavenia je martingal.

DEFINÍCIA 1.16. *Semimartingal* je stochastický proces $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$, ktorý vieme rozložiť na tvar

$$S_t = S_0 + M_t + H_t,$$

kde S_0 je konečné a \mathcal{F} -merateľné, M_t je lokálny martingal s M_0 a H_t je proces s konečnou variáciou s H_0 .

1.6 Rizikovo neutrálna miera

V tejto časti sa venujeme určeniu rizikovo neutrálny miery. V prípade Brownovho pohybu existuje jediná rizikovo neutrálna miera, naopak pre Lévyho procesy nie je jednoznačne určená. Predstavíme si viacero možností, ako v prípade Lévyho procesu rizikovo neutrálnu mieru získame.

DEFINÍCIA 1.17. *Nech P, Q sú pravdepodobnostné miery na (Ω, \mathcal{F}) . Potom hovoríme, že miery P a Q sú ekvivalentné (značíme $P \sim Q$), ak*

$$P(A) > 0 \Leftrightarrow Q(A) > 0.$$

Inými slovami, pod pojmom rizikovo neutrálna miera rozumieme mieru Q ekvivalentnú k miere P . Pravdepodobnostná miera Q je ekvivalentná miera, ak

- Q je rovnocenná s P , t.j. majú rovnaké prázdne množiny (udalosti, ktoré nenastanú pod P nenastanú ani pod Q a naopak),
- diskontovaný proces ceny akcie $\tilde{S} = \{\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t, t \geq 0\}$ je martingal vzhľadom k miere Q .

Nasledujúca veta zaručuje existenciu ekvivalentnej miery.

VETA 1.7. Girsanovova veta

Nech $W_t(\omega), 0 \leq t \leq T$ je Brownov pohyb na (Ω, \mathcal{F}, P) . Nech $\iota_t(\omega)$ je \mathcal{F}_t^W -adaptovaný proces, pre ktorý

$$E_P \left[e^{\left(\frac{1}{2} \int_0^T \iota_t^2 dt\right)} \right] < \infty.$$

Potom existuje ekvivalentná miera Q na (Ω, \mathcal{F}) taká, že

- (i) $Q \sim P$,

$$(ii) \frac{dQ}{dP}(\omega) = e^{-\int_0^T \iota_t(\omega) dW_t(\omega) - \frac{1}{2} \int_0^T \iota_t^2(\omega) dt},$$

$$(iii) \tilde{W}_t(\omega) = W_t(\omega) + \int_0^t \iota_s(\omega) ds \text{ je Brownov pohyb na } (\Omega, \mathcal{F}, Q).$$

DEFINÍCIA 1.18. Nech P, Q sú pravdepodobnostné miery na (Ω, \mathcal{F}) . Hovoríme, že miera Q je **absolútne spojitá** vzhľadom k miere P , ak pre každú merateľnú množinu A platí

$$P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0.$$

TVRDENIE 1.2. Radon-Nikodymova derivácia

Ak miera Q je absolútne spojitá vzhľadom k miere P , potom existuje merateľná funkcia $Z : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ taká, že pre každú merateľnú množinu A platí

$$Q(A) = \int_A Z dP = P(Z1_A).$$

Funkcia Z sa nazýva **Radon-Nikodymova derivácia** miery Q vzhľadom k miere P a označujeme ju výrazom $\frac{dQ}{dP}$. Pre každú P -integrovateľnú funkciu f platí

$$Q(f) = \int_{\Omega} f dQ = P(fZ) = \int_{\Omega} dP Z f.$$

Ak je miera Q absolútne spojitá vzhľadom k miere P a miera P je absolútne spojitá vzhľadom ku Q , potom miery P a Q sa nazývajú ekvivalentné.

Teraz si uvedieme niektoré zo spôsobov určenia ekvivalentnej miery v prípade Lévyho procesov.

Relatívna entropia

Relatívna entropia (resp. Kullback-Leiblerova vzdialenosť \mathcal{E}) vyjadruje mieru vzdialenosti dvoch ekvivalentných pravdepodobnostných mier. Nech P a Q sú ekvivalentné pravdepodobnostné miery na (Ω, \mathcal{F}) . Relatívna entropia miery Q vzhľadom k miere P je definovaná vzťahom

$$\mathcal{E}(Q, P) = E_Q \left[\ln \frac{dQ}{dP} \right] = E_P \left[\frac{dQ}{dP} \ln \frac{dQ}{dP} \right].$$

Použitím rýdzo konvexnej funkcie $f(x) = x \ln x$ vieme vyjadriť relatívnu entropiu ako

$$\mathcal{E}(Q, P) = E_P \left[f \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right]. \quad (1.11)$$

Jensenova nerovnosť dokazuje, že relatívna entropia je vždy nezáporná $\mathcal{E}(Q, P) \geq 0$ a $\mathcal{E}(Q, P) = 0$ práve vtedy keď $\frac{dQ}{dP} = 1$ takmer určite. V závislosti od funkcie f vo výraze (1.11) dostaneme rôzne ekvivalentné martingalové miery [8].

Esscherova transformácia

DEFINÍCIA 1.19. *Nech $f_X(x)$ je hustota procesu X_t . Pre $\theta \in \mathbb{R}$, ktoré spĺňa podmienku*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta y} f_X(y) dy < \infty,$$

môžeme definovať novú hustotu

$$f_X(x; \theta) = \frac{e^{\theta x} f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta y} f_X(y) dy}.$$

*Nech $\Phi_{X_t}(u) = E[e^{uiX_t}]$ je charakteristická funkcia procesu X_t . **Esscherova transformácia** sa nazýva hustota $f_X(x; \theta^*)$, kde θ^* je riešením rovnice*

$$e^{(r-q)} = \frac{\Phi_X(-i(\theta + 1))}{\Phi_X(-i\theta)}.$$

Riešenie θ^* reprezentuje Esscherovu transformáciu miery P na ekvivalentnú mieru Q , je to hustota procesu X_t pre rizikovo neutrálnu mieru Q .

POZNÁMKA 1.3. *Nech X_t je stochastický proces na filtrovanom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{M}_t, P)$. Esscherovou transformáciou nazývame zmenu pravdepodobnostnej miery P na ekvivalentnú mieru Q s hustotou procesu $Z_t = \frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t}$ v tvare*

$$Z_t = \frac{e^{\theta X_t}}{M_{X_t}(\theta)^t}, \quad (1.12)$$

kde M_{X_t} je momentová funkcia náhodnej premennej X_t .

Mean-correcting value

Ďalším spôsobom na určenie ekvivalentnej miery je metóda využívajúca tzv. "**mean-correcting value**". V tomto prípade meníme driftovú časť μ stochastického procesu tak, aby diskontovaný proces ceny akcie bol martingalom v ekvivalentnej miere Q . Dostaneme vzťah

$$\mu_{new} = \mu_{old} + (r - q) - \log(\Phi_X(-i)), \quad (1.13)$$

kde Φ_X je charakteristická funkcia výnosov náhodnej premennej X zahŕňajúca parameter μ_{old} .

Túto metódu si vysvetlíme na príklade geometrického Brownovho pohybu

$$G_t = G_0 e^{(\mu t + \sigma W_t)}.$$

Výnosy akcií resp. indexov za obdobie dĺžky 1 (v našom prípade to je jeden deň) sa v Black–Scholesovom modeli správajú podľa normálneho rozdelenia s parametrami $\mathcal{N}(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma^2)$, pričom charakteristická funkcia je v tvare

$$\Phi(u) = \exp \left\{ iu \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) - \frac{\sigma^2 u^2}{2} \right\}.$$

Stredná hodnota procesu výnosov akcií $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ predstavuje parameter μ_{old} , t.j.

$$\mu_{old} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2. \quad (1.14)$$

Pre $\Phi(-i)$ platí:

$$\Phi(-i) = \exp \left\{ -i^2 \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) - \frac{\sigma^2 i^2}{2} \right\}.$$

Využitím $-i^2 = 1$ dostaneme

$$\log \Phi(-i) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) + \frac{\sigma^2}{2} = \mu. \quad (1.15)$$

Parameter μ_{new} z rovnice (1.13) má po dosadení (1.14) a (1.15) tvar

$$\mu_{new} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + (r - q) - \mu = (r - q) - \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Táto voľba μ_{new} zaručuje, že diskontovaný proces ceny akcie bude v rizikovo neutrálnej miere Q martingal.

Opcie

Dôležitou vlastnosťou opcií je ich univerzálnosť. Dávajú investorom možnosť odpoistenia sa voči nežiaducim pohybom cien akcií na trhu až po stávky na pohyb indexu, resp. trhu. Opcie predstavujú komplexný finančný derivát. Zahŕňajú v sebe riziko strát, preto je potrebné pochopiť ich fungovanie. V tejto kapitole si uvedieme ich základné charakteristiky a odvodíme Black–Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu. Prevažná časť teórie bola čerpaná z [7] a [16].

Opcia je finančný derivát, ktorý predstavuje *právo*, nie však *povinnosť*, predať alebo kúpiť podkladové aktívum za vopred stanovenú realizačnú cenu K (*strike price*) v deň splatnosti kontraktu T (*maturity date*). Označuje sa aj ako podmienený obchod, pretože nemusí nastať jej uplatnenie.

V prípade kúpy opcie sa obchodník dostáva do dlhej (*long*) pozície, pri predaji do krátkej (*short*) pozície.

Za vypísanie opcie dostane predávajúci opcie (vypisovateľ) od kupujúceho opčnú prémiiu. Na druhej strane kupujúci dostane právo požadovať, aby predávajúci v závislosti od obsahu opcie dané aktívum kúpil alebo predal.

Opcie sa vyznačujú vlastnosťou obmedzenej, vopred určenej straty, ktorá závisí od polohy ceny podkladového aktíva v čase expirácie opčného kontraktu T , ktorý je na burze vopred stanovený.

Opcie môžeme rozdeliť podľa rôznych kritérií.

Podľa typu splatnosti:

- *Európske opcie* - ich uplatnenie môže nastať len v deň splatnosti kontraktu (expirácie) T .

- *Americké opcie* - ich uplatnenie môže nastať kedykoľvek do dňa splatnosti kontraktu (expirácie) T .

Podľa obsahu:

- *Call opcie* - predstavujú právo kúpiť v dohodnutom termíne T podkladové aktívum za vopred dohodnutú realizačnú cenu K . Kúpenie call opcie predstavuje poistku voči nárastu ceny akcie.
- *Put opcie* - predstavujú právo predať v dohodnutom termíne T podkladové aktívum za vopred dohodnutú realizačnú cenu K . Kúpenie put opcie predstavuje poistku voči poklesu ceny akcie.

V závislosti od vývoja ceny podkladového aktíva môžu nastať tri pozície:

- Pozícia *in-the-money* (v peniazoch) - ak $S > K$ pre call, $K > S$ pre put opciu. V danej pozícii má zmysel uplatniť call a put opciu.
- Pozícia *at-the-money* (na peniazoch) - ak $S = K$ pre call aj put opciu. Pozícia nastáva v okamihu vyrovnania realizačnej ceny opcie a aktuálnej ceny podkladového aktíva.
- Pozícia *out-of-the-money* (mimo peňazí) - ak $S < K$ pre call, $K < S$ pre put opciu. V danej pozícii nemá zmysel uplatniť call, resp. put opciu.

2.1 Európske opcie

Výplata (*pay-off*) európskeho typu opcie je určená na základe vzťahu medzi S a K , v čase splatnosti T :

pre call opciu

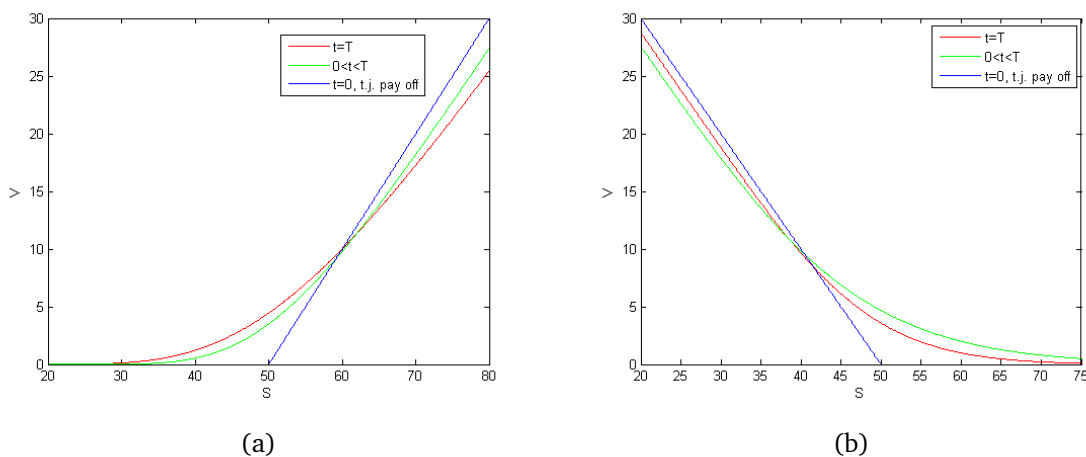
$$C_T = (S_T - K)^+, \quad (2.1)$$

pre put opciu

$$P_T = (K - S_T)^+, \quad (2.2)$$

kde $x^+ = \max(x, 0)$ a S_t predstavuje tzv. spotovú cenu podkladového aktíva v čase t . Na obrázku 2.1 je znázornená cena európskej call a put opcie v závislosti od času do splatnosti opcie T .

OBR. 2.1: Cena európskej opcie v závislosti od času pre (a) call opciu (b) put opciu.



Black–Scholesova parciálna diferenciálna rovnica

V tejto časti odvodíme Black–Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu. Nech vývoj ceny akcie reprezentuje stochastický proces

$$S_t = S_0 e^{(r-q)t + \sigma W_t},$$

ktorý predstavuje geometrický Brownov pohyb. Nech V_t je hodnota derivátu v čase t , Q je rizikovo neutrálna miera a \mathcal{F}_t je informácia v čase t . Hodnotu derivátu vieme vyjadriť pomocou oceňovacej formuly

$$V_t = E_Q(e^{-r(T-t)} V_T | \mathcal{F}_t).$$

Túto hodnotu vieme určiť aj pomocou samofinancovanej stratégie, ktorá nahradí daný derivát, t.j.

$$V_t = \zeta_t S_t + \vartheta_t B_t, \quad (2.3)$$

kde ζ_t reprezentuje počet akcií a ϑ_t počet peňažných dlhopisov v čase t nahrádzajúcich daný derivát, pričom pre peňažný dlhopis B_t platí $B_t = e^{rt}$. Peňažný dlhopis predstavuje úročenie spojitým úrokom r . Z časti 1.1 vieme, že geometrický Brownov pohyb môžeme vyjadriť stochastickou diferenciálnou rovnicou, ktorá má v rizikovo neutrálnej miere Q tvar

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t, \quad (2.4)$$

kde \widetilde{W}_t predstavuje Wienerov proces v rizikovo neutrálnej miere Q . Použitím Itôovej lemy pre V_t máme vzťah

$$dV_t = \frac{\partial V}{\partial t} + \left((r - q)S_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t \right) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt. \quad (2.5)$$

Pre rovnicu samofinancovanej stratégie (2.3) platí

$$dV_t = \zeta_t \left((r - q)S_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t \right) + \vartheta_t r e^{rt} dt + \zeta_t q S_t dt. \quad (2.6)$$

Člen $qS_t dt$ v rovnici vyjadruje, že akcia vypláca dividendy. Rovnice (2.5) a (2.6) vyjadrujú diferenciály tých istých Itôových procesov, z čoho vyplýva, že koeficienty pri dt a $d\widetilde{W}_t$ musia byť rovnaké. Ich porovnaním dostaneme

$$\zeta_t = \frac{\partial V}{\partial S} \quad (2.7)$$

a rovnicu (2.3) vieme prepísať do tvaru

$$\vartheta_t = \left(V_t - \frac{\partial V}{\partial S} S_t \right) e^{-rt}. \quad (2.8)$$

Použitím rovníc (2.7) a (2.8) a porovnaním členov pri dt dostaneme

$$(r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + r(V - S \frac{\partial V}{\partial S}) + qS \frac{\partial V}{\partial S},$$

a teda pre Black–Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu platí

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.9)$$

s terminálnymi podmienkami (2.1) a (2.2). Príslušné okrajové podmienky sú v tabuľke 2.1.

TABUĽKA 2.1: Okrajové podmienky pre call a put opcie

call	put
$V(0, t) = 0$	$V(0, t) = K e^{-r(T-t)}$
$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{V(S, t)}{S} = e^{-q(T-t)}$	$\lim_{S \rightarrow \infty} V(S, t) = 0$

Problém ocenenia európskej opcie vieme sformulovať ako úlohu nájsť funkciu $V(S, t)$ tak, aby boli splnené podmienky:

1. funkcia $V(S, t)$ je riešením Black–Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice (2.9) na oblasti $0 < t < T$ a $0 < S < \infty$,
2. terminálna podmienka pre call opciu spĺňa (2.1), pre put opciu (2.2),
3. okrajové podmienky spĺňajú vzťahy uvedené v tabuľke 2.1.

Na základe riešenia sformulovaného problému vieme vypočítať hodnotu call opcie, ktorá je daná známym Black–Scholesovým vzťahom

$$C(S, t) = V(S, t) = Se^{-q(T-t)}\phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\phi(d_2), \quad (2.10)$$

kde $\phi(\cdot)$ je hodnota distribučnej funkcie normovaného normálneho rozdelenia a platí:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}.$$

Pomocou Put-Call parity $S_t + P_t - C_t = Ke^{-r(T-t)}$ ľahko odvodíme vzorec pre hodnotu put opcie

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}\phi(-d_2) - Se^{-q(T-t)}\phi(-d_1). \quad (2.11)$$

2.2 Americké opcie

Americké opcie sú charakterizované možnosťou predčasného uplatnenia kedykoľvek do dňa splatnosti T . V porovnaní s európskymi opciami poskytujú držiteľovi väčšie práva, preto musí byť ich cena vyššia alebo rovná ako cena európskej opcie

$$V^{am}(S, t) \geq V^{eu}(S, t), \forall t \in [0, T] \quad \forall S \geq 0. \quad (2.12)$$

Ďalej platí

$$V^{am}(S, t) \geq V^{eu}(S, T), \forall t \in [0, T] \quad \forall S \geq 0, \quad (2.13)$$

kde $V^{eu}(S, T)$ je určené terminálnymi podmienkami (2.1) a (2.2). V prípade americkej call opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy, t.j. $q = 0$ je jej hodnota rovná príslušnej hodnote európskej call opcie

$$V^{am}(S, t) = V^{eu}(S, t), \forall t \in [0, T] \quad \forall S \geq 0.$$

Okrem samotného riešenia $V(S, t) = V^{am}(S, t)$ musíme hľadať aj funkciu $S_f(t)$ času $t \in [0, T]$ tvoriacu tzv. hranicu predčasného uplatnenia opcie. Funkcia $S_f(t)$ je hraničná hodnota ceny akcie, ktorá určuje oblasti, kde sa nám oplatí uplatniť, resp. neuplatniť danú opciu. Hranice uplatnenia pre call a put opcie sú uvedené v tabuľke 2.2.

TABUĽKA 2.2: Hranice uplatnenia pre call a put opcie

	call	put
držanie opcie	$S \in (0, S_f(t))$	$S \in (S_f(t), \infty)$
uplatnenie opcie	$S \in (S_f(t), \infty)$	$S \in (0, S_f(t))$

Problém ocenenia americkej opcie môžeme sformulovať ako úlohu nájsť funkciu $V = V^{am}(S, t)$ spolu s funkciou $S_f(t)$, ktorá popisuje hranicu predčasného uplatnenia opcie tak, aby boli splnené podmienky:

1. funkcia $V(S, t)$ je riešením Black–Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice (2.9) na časovo premenlivej oblasti $0 < t < T$ a $0 < S < S_f(t)$ pre call opciu, resp. $S > S_f(t)$ pre put opciu,
2. terminálna podmienka pre call opciu splňa (2.1), pre put opciu (2.2),
3. okrajové podmienky pre riešenie americkej opcie:
 - pre call opciu: $V(0, t) = 0$, $V(S_f(t), t) = S_f(t) - K$, $\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = 1$, pre krajné hodnoty ceny akcie $S = 0$ a $S = S_f(t)$,
 - pre put opciu: $V(\infty, t) = 0$, $V(S_f(t), t) = K - S_f(t)$, $\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = -1$, pre krajné hodnoty ceny akcie $S = S_f(t)$ a $S = \infty$.

Vo všeobecnosti v prípade americkej opcie neexistuje explicitný vzorec riešenia, na určenie hodnoty opcie sa používajú numerické schémy (explicitné, resp. implicitné).

Nepresnosti Black–Scholesovho modelu

V tejto kapitole sa budeme bližšie venovať Black–Scholesovmu modelu. Existuje diskretná a spojitá verzia tohto modelu na ocenenie opcií. V diskretnom modeli predpokladáme, že výnosy cien akcií $R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$ majú log-normálne rozdelenie s parametrami μ a σ^2 , analogicky v spojitom prípade predpokladáme, že vývoj ceny akcie sa riadi geometrickým Brownovým pohybom. Zameriame sa na porušenie predpokladov modelu, ktoré si potvrdíme aj štatistickými testami. Analýza uvedená v tejto časti vychádza z [11] a výsledky štatistických testov a grafickej analýzy sú prebrané z [17]. Teória bola čerpaná z [11] a [16].

Základnými predpokladmi Black–Scholesovho modelu sú:

1. nulové transakčné náklady na trhu,
2. nulové dane a poplatky pri obchodovaní na trhu,
3. vylúčenie arbitráže,
4. výnosy akcií modelujeme pomocou normálneho rozdelenia,
5. volatilita podkladového aktíva je konštantná,
6. existencia konštantnej bezrizikovej úrokovej miery,
7. akcie sú dokonale deliteľné.

Zamerali sme sa na porušenie predpokladov číslo 4 a 5. Analýzu z [11] sme rozšírili o niektoré štatistické testy a zahrnuli sme do nej okrem indexov aj akcie, pretože indexy v sebe zachytávajú vývoj viacerých vybraných akcií veľkých, verejne obchodovateľných

spoločností. Burzový index v prípade Black–Scholesovho modelu predstavuje vážený súčet log-normálne rozdelených náhodných premenných.

Na analýzu sme si zvolili nasledujúce reálne dáta:

- indexy: S&P 500 (1970-2001), DAX (1997-1999), SMI (1997-1999),
- akcie: Apple (2007-2009), Google (2007-2009), Microsoft (2007-2009), Bank of America (2007-2009), LG Display (2007-2009),

pričom čísla v zátvorke predstavujú sledované obdobie. V práci uvádzame výsledky len pre index S&P 500 (1970-2001) a akciu Apple (2007-2009), výsledky testov a odhady hustôt pre zvyšné indexy a akcie je možné nájsť v [17].

Výnosy cien akcií a indexov slúžia na porovnanie jednotlivých investícií v rôznych cenných papieroch. Je prirodzené vyjadriť výnosy za obdobie $s > 0$ pomocou relatívnych zmien cien, t.j. $\frac{S_{t+s}-S_t}{S_t}$. Väčšina autorov finančnej literatúry však pracuje s logaritmickými výnosmi, ktoré predstavujú aproximáciu relatívnych zmien cien

$$\frac{S_{t+s} - S_t}{S_t} \approx \ln\left(\frac{S_{t+s} - S_t}{S_t} + 1\right) = \ln(S_{t+s}) - \ln(S_t).$$

Jedným z dôvodov, prečo autori preferujú používanie logaritmických výnosov je, že logaritmický výnos za obdobie dĺžky $l \times s$ je sumou logaritmických výnosov za l období dĺžky s :

$$\begin{aligned} &(\ln(S_{t+s}) - \ln(S_t)) + (\ln(S_{t+2s}) - \ln(S_{t+s})) + \dots + \\ &+ (\ln(S_{t+ls}) - \ln(S_{t+(l-1)s})) = \ln(S_{t+ls}) - \ln(S_t). \end{aligned}$$

Ďalším dôvodom je, že vo väčšine finančných modelov je cena akcie S_t modelovaná pomocou exponenciálneho stochastického procesu. Preto budeme ďalej pojmom výnosy označovať práve logaritmické výnosy. Keďže v práci pracujeme s dennými cenami, výnos reprezentuje denné logaritmické výnosy.

V prípade Black–Scholesovho modelu je cena akcie modelovaná geometrickým Brownovým pohybom. Ak by sa proces ceny akcie týmto stochastickým pohybom riadil, výnosy akcie by sa správali podľa normálneho rozdelenia so strednou hodnotou μ a disperziou σ^2 .

3.1 Momenty výnosov a odhad hustoty

Normálne rozdelenie

Normálne rozdelenie sa vo finančnej matematike používa na modelovanie výnosov cien podkladového aktíva. Vo všeobecnosti sú pravdepodobnostné rozdelenia určené strednou hodnotou μ a disperziou $\sigma^2 > 0$, ako aj šikmosťou a špicatosťou, ktoré predstavujú tretí a štvrtý moment pravdepodobnostných rozdelení. Šikmosť poskytuje doplňujúce informácie o symetrii rozdelenia okolo strednej hodnoty a špicatosť o tvare rozdelenia. Ak má náhodná premenná rozdelenie s kladnou (pravostrannou) šikmosťou, väčšina hodnôt daného rozdelenia je menšia ako priemer, ak má rozdelenie so zápornou (ľavostrannou) šikmosťou, väčšina hodnôt rozdelenia je väčšia ako priemer. Ak je šikmosť rovná 0, rozdelenie je symetrické. Špicatosť určuje, aký priebeh má graf rozdelenia hodnôt okolo zvoleného stredu rozdelenia, charakterizuje výskyt extrémne vysokých a extrémne nízkych hodnôt. Čím je rozdelenie špicatejšie, tým sú hodnoty viac sústredené okolo daného stredu rozdelenia. Výskyt extrémnych hodnôt je teda častejší a takéto rozdelenie má ťažšie chvosty.

Tieto prvé štyri momenty pravdepodobnostného rozdelenia sú definované vzťahmi (1.5), (1.6), (1.7) a (1.8). Pre momenty normálneho rozdelenia platia vzťahy definované v tabuľke 3.1.

TABUĽKA 3.1: *Momenty normálneho rozdelenia*

momenty	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
stredná hodnota	μ
disperzia	σ^2
šikmosť	0
špicatosť	3

Aby sme zistili, či sa výnosy akcií a indexov správajú podľa normálneho rozdelenia, vypočítame si ich momenty. V tabuľke 3.2 je uvedené porovnanie hodnôt jednotlivých momentov pre výnosy indexu S&P500 a akcie Apple s momentmi normálneho rozdelenia. Vidíme, že nami zvolené reálne dáta pochádzajú z rozdelenia so zápornou šikmosťou a z rozdelenia, ktoré má ťažké chvosty (špicatosť je väčšia ako 3). Výnosy

TABUĽKA 3.2: Stredná hodnota, disperzia, šikmosť a špicatosť pre S&P500 a Apple

Index(Akcia)	stredná hodnota	disperzia	šikmosť	špicatosť
Normálne rozdelenie	μ	σ^2	0	3
S&P500(1970-2001)	0.00031	0.00986	-1.67044	43.41753
Apple(2007-2009)	0.00122	0.02835	-0.48026	7.53794

akcií a indexov teda nemajú normálne rozdelenie.

V ďalšej časti sa zameriame na porovnanie hustoty normálneho rozdelenia s parametrami μ a σ^2 ($\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) s empirickou hustotou analyzovaných dát. Na odhadnutie empirickej hustoty pravdepodobnostného rozdelenia použijeme jadrový odhad hustoty.

DEFINÍCIA 3.1. Jadrový odhad hustoty pre štatistickú vzorku $\{x_1, \dots, x_n\}$ v bode x je

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_i - x}{h}\right),$$

kde $K(\cdot)$ je jadro a h je šírka (bandwidth).

Výber jadra presnejšie určuje jadrový odhad hustoty. Môžeme si vybrať z viacerých bežne používaných jadrových funkcií: rovnomernú, trojuholníkovú, normálnu, kosínusovú, atď. My si zvolíme v našej analýze normálne jadro, t.j. hustotu normalizovaného normálneho rozdelenia $\mathcal{N}(0,1)$

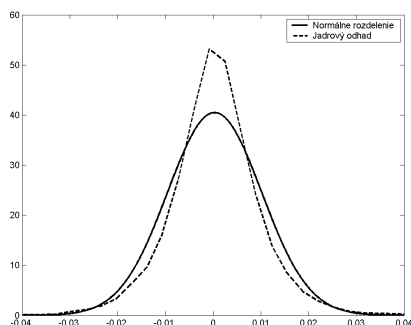
$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Podľa Silvermana [14] určíme h , teda šírku (bandwidth) ako

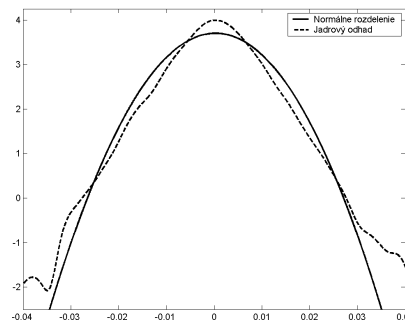
$$h = 1.06\sigma n^{-\frac{1}{5}}.$$

Z obrázkov 3.1 a 3.2 vidíme, že rozdelenie výnosov cien akcií a indexov má ťažké chvosty (jadrový odhad hustoty má vyšší vrchol ako hustota normálneho rozdelenia).

OBR. 3.1: *Hustota normálneho rozdelenia a jadrový odhad hustoty pre výnosy indexu S&P500.*

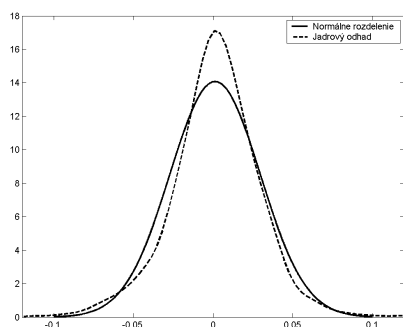


(a) normálne súradnice

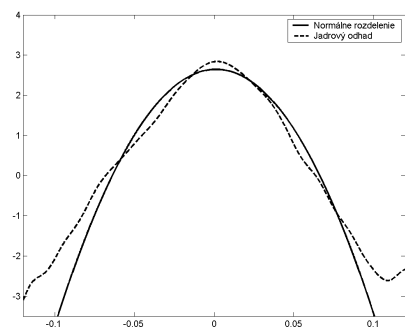


(b) logaritmus hustôt

OBR. 3.2: *Hustota normálneho rozdelenia a jadrový odhad hustoty pre výnosy akcie Apple.*



(a) normálne súradnice



(b) logaritmus hustôt

3.2 Štatistické testy

Pomocou štatistických testov ukážeme, že výnosy cien akcií a indexov nemajú normálne rozdelenie. Vybrali sme nasledovné štyri štatistické testy: Pearson χ^2 test, Kolmogorov-Smirnov test, Kuiper test a Crámer von Mises test. V jednotlivých testoch sme testovali hypotézu, že testovaná vzorka dát $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je z rozdelenia definovaného kumulatívnou distribučnou funkciou $F(x)$:

$$H_0 : F(x) = \hat{F}(x) \text{ vs. } H_1 : F(x) \neq \hat{F}(x),$$

kde $\widehat{F}(x)$ je empirická kumulatívna distribučná funkcia

$$\widehat{F}(x) = \frac{|\{x_i : x_i < x\}|}{n}.$$

Vybrané testy sa medzi sebou odlišujú predpisom testovacej štatistiky. Aby sme odstránili závislosť testovacích štatistík od počtu pozorovaní n , upravili sme ich hodnoty na základe [15] a v tabuľkách ich označujeme symbolmi (D^* , V^* , W^{2*}). Podrobnejší postup testovania a výpočet štatistík je uvedený v [17].

Pearson χ^2 test

Predpis testovacej štatistiky je v tvare

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^s \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

kde n_i je počet pozorovaní a np_i je očakávaný počet pozorovaní v i -tej oblasti. Testovacia štatistika má chí-kvadrát rozdelenie s $s - 1 - k$ stupňami voľnosti, t.j.

$$\chi^2 \approx \chi_{s-1-k}^2,$$

kde k je počet odhadovaných parametrov. Ak je hodnota testovacej štatistiky χ^2 väčšia ako kritická hodnota (pre daný level α), t.j. $\chi^2 > \chi_{s-1-k,1-\alpha}^2$, tak zamietame nulovú hypotézu.

Kolmogorov-Smirnov test

Predpis testovacej štatistiky je v tvare

$$D = \sup_x |F(x) - \widehat{F}(x)|.$$

Ak je hodnota testovacej štatistiky D väčšia ako kritická hodnota (pre daný level α), t.j. $D > D_\alpha$, tak zamietame nulovú hypotézu.

Kuiper test

Predpis testovacej štatistiky je v tvare

$$V = \sup_x (F(x) - \widehat{F}(x)) - \inf_x (F(x) - \widehat{F}(x)).$$

Ak je hodnota testovacej štatistiky V väčšia ako kritická hodnota (pre daný level α), t.j. $V > V_\alpha$, tak zamietame nulovú hypotézu.

Crámer von Mises test

Predpis testovacej štatistiky je v tvare

$$W^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i-1}{2n} - F(x_i) \right)^2 \right).$$

Ak je hodnota testovacej štatistiky W^2 väčšia ako kritická hodnota (pre daný level α), t.j. $W^2 > W_{\alpha}^2$, tak zamietame nulovú hypotézu.

Výsledky testov

V prípade indexu S&P500 a akcie Apple môžeme konštatovať, že nulová hypotéza o normalite výnosov bola zamietnutá na každej hladine významnosti pre všetky vyššie uvedené štatistické testy. Hodnoty testovacích štatistík s výsledkami testov sú uvedené v tabuľkách 3.3 až 3.6.

TABUĽKA 3.3: Výsledky χ^2 testu

Index(Akcia)	χ^2	$\alpha = 0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.1$
S&P500(1970-2001)	138.4683	H_1	H_1	H_1
Apple(2007-2009)	29.1979	H_1	H_1	H_1

TABUĽKA 3.4: Výsledky Kolmogorov-Smirnov testu

Index(Akcia)	D^*	$\alpha = 0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.1$
S&P500(1970-2001)	5.3259	H_1	H_1	H_1
Apple(2007-2009)	1.6779	H_1	H_1	H_1

TABUĽKA 3.5: Výsledky Kuiper testu

Index(Akcia)	V^*	$\alpha = 0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.1$
S&P500(1970-2001)	22.2472	H_1	H_1	H_1
Apple(2007-2009)	2.9855	H_1	H_1	H_1

TABUĽKA 3.6: Výsledky Crámer von Mises testu

Index(Akcia)	W^2*	$\alpha = 0.01$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.1$
S&P500(1970-2001)	12.3371	H_1	H_1	H_1
Apple(2007-2009)	0.8714	H_1	H_1	H_1

3.3 Volatilita

Volatilita zobrazuje mieru neistoty, resp. riziko spojené s fluktuáciami cien podkladového aktíva. Vyššia hodnota volatility znamená vyššiu rizikovosť investície, keďže cena podkladového aktíva sa môže v priebehu krátkeho obdobia dramaticky zmeniť v oboch smeroch (t.j. nárast alebo pokles ceny akcie). Naopak, ak je hodnota volatility nízka, cena podkladového aktíva sa prudko nemení, kolíše približne rovnakým tempom. Black–Scholesov model predpokladá, že volatilita je stacionárnou premennou modelu. Keď sa však pozrieme na historickú volatilitu, implikovanú volatilitu či zhlukovanie volatility, zistíme, že volatilita sa náhodne mení v čase.

Historická volatilita

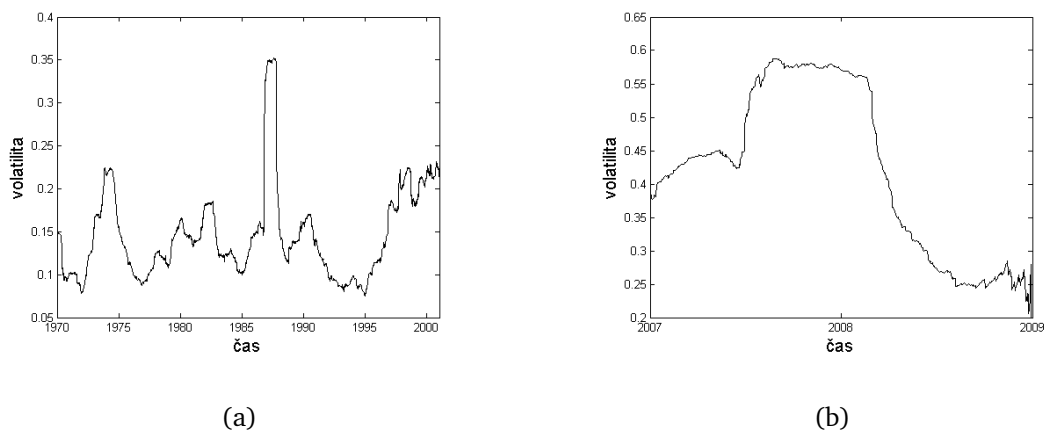
Historická volatilita je vypočítaná na základe historických trhových cien podkladového aktíva a meria fluktuáciu cien za určité časové obdobie. Pre nami zvolené reálne dáta (index S&P500 (1970-2001), akciu Apple (2007-2009)) sme odhadli štandardnú odchýlku výnosov cien pre každý deň zo sledovaného obdobia z ročnej periódy predchádzajúcej daný deň.

Pre každý deň zo sledovaného obdobia sme vypočítali štandardnú odchýlku (σ). Aby sme dostali príslušnú ročnú štandardnú odchýlku, vynásobili sme hodnotu σ odmocninou z počtu obchodovateľných dní v danom kalendárnom roku (n), t.j.

$$\sigma_t = \sigma\sqrt{n}.$$

Na obrázku 3.3 môžeme vidieť, že sa volatilita mení v čase a teda nie je stacionárnou (konštantnou) premennou.

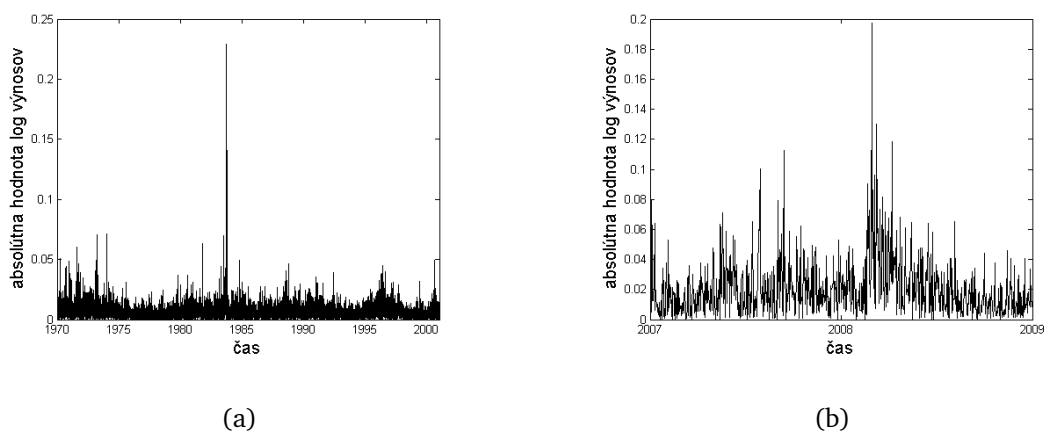
OBR. 3.3: Historická volatilita pre (a) index S&P500 (1970-2001) a (b) akciu spoločnosti Apple (2007-2009)



Zhlukovanie volatily (volatility clusters)

Zhlukovanie volatily je spoločnou črtou pre výnosy finančných derivátov a zároveň je spojené s pravdepodobnostným rozdelením, ktoré má ťažké chvosty (v časti 3.1 sme ukázali túto vlastnosť výnosov akcií a indexov). Zhlukovanie volatily znamená, že výnosy cien akcií (resp. indexov) sa vyskytujú v zhlukoch s väčším a menším výnosom, čo môžeme vidieť na obrázkoch 3.4 (a) pre index S&P 500, resp. 3.4 (b) pre akciu spoločnosti Apple.

OBR. 3.4: Zhlukovanie volatily pre absolútnu hodnotu výnosov (a) indexu S&P500 (1970-2001) (b) akcie Apple (2007-2009)



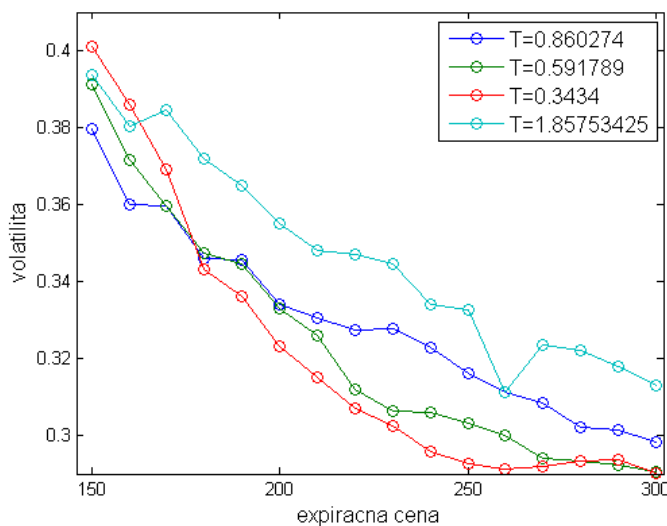
Implikovaná volatilita

Implikovaná volatilita je určená trhom. Trh predpokladá kolísanie ceny podkladového aktíva v budúcnosti a jeho najlepší odhad sa snaží zahrnúť do ceny opcie. Volatilita podkladového aktíva je jedným zo vstupov do Black–Scholesovho modelu na oceňovanie opcií. Implikovaná volatilita $\sigma_{impl} > 0$ je taká hodnota volatility, pre ktorú je teoretická cena európskej call (resp. put) opcie $V(S, t, \sigma)$ vypočítaná na základe Black–Scholesovho modelu zhodná s reálnou hodnotou ceny opcie $V_{real}(t)$ pre daný čas t a danú hodnotu podkladového aktíva $S = S_{real}(t)$. Pre call opciu spoločnosti Apple s rôznymi realizačnými cenami K sme vypočítali implikovanú volatilitu σ_{impl} pre rôzne dátumy splatnosti T na základe riešenia rovnice

$$V_{real}(t) = V(S_{real}(t), t, \sigma_{impl}).$$

Výsledok je znázornený na obrázku 3.5.

OBR. 3.5: Implikovaná volatilita pre rôzne maturity akcie firmy Apple



Lévyho procesy

V poslednom období sa stále viac vo finančnej matematike dostávajú do popredia Lévyho procesy, ktoré dokážu lepšie popísať vývoj na finančných trhoch ako modely založené na (geometrickom) Brownovom pohybe. Pozorovania ukázali, že proces ceny akcie zaznamenáva veľké zmeny, skoky, a pravdepodobnostné rozdelenie výnosov je šikmé a má ťažké chvosty (túto vlastnosť rozdelenia výnosov sme ukázali v predchádzajúcej kapitole). Sú preto potrebné modely, ktoré lepšie zachytávajú realitu na finančných trhoch ako modely založené na Brownovom pohybe. Lévyho procesy umožňujú lepšie zachytiť tento vývoj. Môžeme si zvoliť taký Lévyho proces, ktorý dokáže zachytiť aspoň prvé štyri momenty procesu: strednú hodnotu, disperziu, šikmosť a špicatosť. Najjednoduchším Lévyho procesom je deterministický proces (lineárny drift). Aj Wienerov proces spĺňa definíciu Lévyho procesu. Podrobnejšie informácie sú uvedené v [5] a [9].

Predtým, ako zdefinujeme Lévyho proces, potrebujeme určiť pojem càdlàg funkcie.

DEFINÍCIA 4.1. Funkcia $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva **càdlàg**, ak je sprava spojitá a má limitu zľava: $\forall t \in [0, T]$ limity

$$f(t-) = \lim_{s \rightarrow t, s < t} f(s) \quad f(t+) = \lim_{s \rightarrow t, s > t} f(s)$$

existujú a platí $f(t) = f(t+)$.

Càdlàg funkcie môžu byť nespojité. Ak t je bodom nespojitosti, potom symbolom $\Delta f(t) = f(t) - f(t-)$ označíme skok funkcie f v bode t . Takáto funkcia môže mať najviac spočítateľný počet nespojitostí: $\{t \in [0, T], f(t) \neq f(t-)\}$ a pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ počet nespojitostí, teda skokov, na intervale $[0, T]$ väčších ako ϵ je konečný. Z toho vyplýva, že càdlàg funkcia na konečnom intervale $[0, T]$ má konečný počet

skokov väčších ako ϵ a malých skokov môže byť nekonečne veľa. Càdlàg funkcie teda umožňujú modelovať trajektórie stochastického procesu s výskytom skokov.

DEFINÍCIA 4.2. Stochastický càdlàg proces $\{L_t\}_{t \geq 0}$ definovaný na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{F}, P) s hodnotami v \mathbb{R} začínajúci v $L_0 = 0$ sa nazýva **Lévyho proces**, ak spĺňa nasledujúce vlastnosti:

(i) *Nezávislé prírastky:* pre každú rastúcu postupnosť časov t_0, \dots, t_n , sú náhodné premenné $L_{t_0}, L_{t_1} - L_{t_0}, \dots, L_{t_n} - L_{t_{n-1}}$ nezávislé.

(ii) *Stacionárne prírastky:* pravdepodobnostné rozdelenie $L_{t+h} - L_t$ nezávisí od t .

(iii) *Stochastická spojitosť:* $\forall \epsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} P(|L_{t+h} - L_t| \geq \epsilon) = 0$.

Stochastická spojitosť neznamená, že trajektórie procesu sú spojité ako je to v prípade Wienerovho procesu. Táto vlastnosť slúži na vylúčenie procesov so skokmi vo fixných, t.j. nenáhodných časoch t . Pre daný čas t , pravdepodobnosť výskytu skoku je 0, skoky sú náhodné.

4.1 Vlastnosti Lévyho procesov

Dôležitou vlastnosťou Lévyho procesov je nekonečná deliteľnosť pravdepodobnostného rozdelenia procesu.

DEFINÍCIA 4.3. Pravdepodobnostné rozdelenie F na \mathbb{R} nazývame **nekonečne deliteľné**, ak pre každé $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ existuje n rovnako rozdelených nezávislých premenných Y_1, \dots, Y_n takých, že $Y_1 + \dots + Y_n$ má rozdelenie F .

Nasledujúca definícia hovorí o vzťahu medzi Lévyho procesom a nekonečne deliteľným rozdelením.

DEFINÍCIA 4.4. Nech $\{L_t\}_{t \geq 0}$ je **Lévyho proces**. Potom pre každé $t > 0$ má L_t **nekonečne deliteľné rozdelenie**. Obrátene, ak F je nekonečne deliteľné rozdelenie, potom existuje Lévyho proces $\{L_t\}_{t \geq 0}$ taký, že L_1 má rozdelenie F .

V prvej kapitole sme zadefinovali charakteristickú funkciu pre náhodnú premennú, teraz tento pojem predstavíme v súvislosti s Lévyho procesmi.

DEFINÍCIA 4.5. *Nech $\{L_t\}_{t \geq 0}$ je Lévyho proces definovaný na \mathbb{R} . Existuje spojitá funkcia $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazývaná **charakteristický exponent** procesu L_t*

$$E[e^{iuL_t}] = e^{t\psi(u)}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Z definície funkcie generujúcej kumulanty náhodnej premennej X vyplýva, že charakteristická funkcia spĺňa

$$\begin{aligned} \Phi_{t+s}(u) &= \Phi_{L_{t+s}}(u) = \Phi_{L_s}(u)\Phi_{(L_{t+s}-L_s)}(u) \\ &= \Phi_{L_s}(u)\Phi_{L_t}(u) = \Phi_s\Phi_t. \end{aligned}$$

Z rovníc ďalej vyplýva, že pre funkciu ψ generujúcu kumulanty premennej L_1 platí $\psi = \Psi_{L_1}$ a $\Psi_{L_t} = t\Psi_{L_1} = t\psi$.

VEĽA 4.1. *Nech $\{L_t\}_{t \geq 0}$ je Lévyho proces a $\Phi_{L_t}(u)$ jeho charakteristická funkcia. Charakteristický exponent $\Psi_{L_t}(u) = \log(\Phi_{L_t}(u))$ spĺňa **Lévy-Khintchine formulu***

$$\Psi_{L_t}(u) = ibu - \frac{1}{2}c^2u^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux1_{|x| \leq 1})\nu(dx),$$

kde $b \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ a ν je miera na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ktorá spĺňa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \inf\{1, x^2\}\nu(dx) < \infty$$

a $[b, c^2, \nu(dx)]$ sa nazýva **Lévyho triplet**.

Lévyho proces sa skladá z troch nezávislých častí: b je lineárna deterministická (driftová) časť, c^2 je variancia Brownovho pohybu a $\nu(dx)$ je Lévyho miera.

DEFINÍCIA 4.6. *Nech $\{L_t\}_{t \geq 0}$ je Lévyho proces na \mathbb{R} . Náhodná miera skokov $J_L(\omega; t, A)$ je definovaná*

$$J_L(\omega; t, A) = \#\{s \in [0, t] : \Delta L_s(\omega) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Miera $J_L(\omega; t, A)$ ráta počet skokov Lévyho procesu v množine A až do času t .

POZNÁMKA 4.1. *Miera J_L sa nazýva aj Poissonova náhodná miera.*

DEFINÍCIA 4.7. *Nech $\{L_t\}_{t \geq 0}$ je Lévyho proces na \mathbb{R} . Miera ν na \mathbb{R} definovaná*

$$\nu(A) = E[\#\{t \in [0, 1] : \Delta L_t \neq 0; \Delta L_t \in A\}], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (4.2)$$

sa nazýva **Lévyho miera** procesu: $\nu(A)$ je očakávaný počet skokov za jednotku času, ktoré patria do množiny A .

Lévyho miera je v bode 0 nulová, pričom v okolí tohto bodu pre každé $\epsilon > 0$ môže mať proces $\{L_t\}_{t \geq 0}$ nekonečne veľa malých skokov, t.j. skokov menších ako ϵ . Počet skokov väčších ako ϵ však musí byť konečný, čo je v súlade s vlastnosťami càdlàg funkcie.

TVRDENIE 4.1. *Nech $\{L_t\}_{t \geq 0}$ je Lévyho proces s tripletom $[b, c^2, \nu(dx)]$.*

- (1.) *Ak $\nu(\mathbb{R}) < \infty$, potom skoro všetky trajektórie procesu $\{L_t\}_{t \geq 0}$ majú konečný počet skokov na každom kompaktnom intervale. Takýto proces nazývame Lévyho proces s **konečnou aktivitou**.*
- (2.) *Ak $\nu(\mathbb{R}) = \infty$, potom skoro všetky trajektórie procesu $\{L_t\}_{t \geq 0}$ majú nekonečný počet skokov na každom kompaktnom intervale. Takýto proces nazývame Lévyho proces s **nekonečnou aktivitou**.*

Variácia Lévyho procesu závisí od Lévyho miery a výskytu Brownovej časti v zložkách Lévyho procesu.

TVRDENIE 4.2. *Nech $\{L_t\}_{t \geq 0}$ je Lévyho proces s tripletom $[b, c^2, \nu(dx)]$.*

- (1.) *Ak $c^2 = 0$ a $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$, potom skoro všetky trajektórie procesu $\{L_t\}_{t \geq 0}$ majú **konečnú variáciu**.*
- (2.) *Ak $c^2 \neq 0$ alebo $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) = \infty$, potom skoro všetky trajektórie procesu $\{L_t\}_{t \geq 0}$ majú **nekonečnú variáciu**.*

Z jednotlivých tvrdení vyplýva, že variácia Lévyho procesu závisí od výskytu malých skokov (a Brownovej zložky Lévyho procesu), pričom aktivita procesu závisí od výskytu malých aj veľkých skokov na kompaktnom intervale.

V prípade Lévyho procesu platí pozmenená Itôova lema.

TVRDENIE 4.3. *Nech $\{L_t\}_{t \geq 0}$ je Lévyho proces s tripletom $[b, c^2, \nu(dx)]$ a $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je C^2 funkcia. Potom*

$$\begin{aligned}
 f(L_t) = & f(0) + \int_0^t \frac{c^2}{2} f''(L_s) ds + \int_0^t f'(L_{s-}) dL_s \\
 & + \sum_{0 \leq s \leq t, \Delta L_s \neq 0} [f(L_{s-} + \Delta L_s) - f(L_{s-}) - \Delta L_s f'(L_{s-})].
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Použitím náhodnej miery skokov J_L dostaneme

$$\begin{aligned} f(L_t) &= f(0) + \int_0^t \frac{c^2}{2} f''(L_s) ds + \int_0^t f'(L_{s-}) dL_s \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [f(L_{s-} + x) - f(L_{s-}) - x f'(L_{s-})] J_L(ds, dx). \end{aligned} \quad (4.4)$$

V diferenciálnej forme má rovnica (4.3) tvar

$$df(L_t) = \frac{c^2}{2} f''(L_t) dt + f'(L_{t-}) dL_t + [f(L_t) - f(L_{t-}) - \Delta L_t f'(L_{t-})],$$

a (4.4) vyjadríme

$$df(L_t) = \frac{c^2}{2} f''(L_t) dt + f'(L_{t-}) dL_t + \int_{\mathbb{R}} [f(L_{t-} + x) - f(L_{t-}) - x f'(L_{t-})] J_L(dx).$$

Uvedieme si ešte jedno tvrdenie o rozložení Lévyho procesu na martingalovú časť a proces s konečnou variáciou.

TVRDENIE 4.4. *Nech $\{L_t\}_{t \geq 0}$ je Lévyho proces s tripletom $[b, c^2, \nu(dx)]$ a $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je C^2 funkcia taká, že jej derivácie až do druhého rádu sú ohraničené konštantou C . Potom $Y_t = f(L_t) = M_t + H_t$, kde M_t je martingalová časť*

$$M_t = f(L_0) + \int_0^t c f'(L_s) dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [\bar{J}_L(ds \times dx)] [f(L_{s-} + x) - f(L_{s-})],$$

a H_t je spojitý proces s konečnou variáciou:

$$\begin{aligned} H_t &= \frac{c^2}{2} \int_0^t f''(L_s) ds + \int_0^t b f'(L_s) ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} ds \nu(dx) [f(L_{s-} + x) - f(L_{s-}) - x 1_{|x| \leq 1} f'(L_{s-})]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

POZNÁMKA 4.2. V TVRDENÍ 4.4 pre výraz $\bar{J}_L(ds \times dx)$ platí

$$\bar{J}_L(ds \times dx) = J_L(ds \times dx) - \nu(dx) ds.$$

POZNÁMKA 4.3. TVRDENIE 4.3 a TVRDENIE 4.4 sú ekvivalentné, ak za L_t dosadíme výraz

$$L_t = bt + cW_t + \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x J_L(ds \times dx) + \int_0^t \int_{|x| < 1} x (J_L(ds \times dx) - \nu(dx) ds).$$

4.2 Príklady Lévyho procesov

V tejto časti si predstavíme konkrétne Lévyho procesy, ktorým sa budeme v ďalšej časti venovať.

4.2.1 Poissonov proces a zložený Poissonov proces

DEFINÍCIA 4.8. Nech $\{\tau_i\}_{i \geq 1}$ je postupnosť nezávislých exponenciálnych náhodných premenných s parametrom λ a $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$. Proces $\{N_t\}_{t \geq 0}$ definovaný v tvare

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{t \geq T_n},$$

sa nazýva **Poissonov proces** s intenzitou λ .

Poissonov proces je teda definovaný ako rátajúci proces: ráta počet náhodných časov T_n , ktoré nastanú medzi časom 0 a t , pričom $(T_n - T_{n-1})_{n \geq 1}$ je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených exponenciálnych náhodných premenných.

Poissonov proces má nasledujúce vlastnosti.

TVRDENIE 4.5. Nech $\{N_t\}_{t \geq 0}$ je **Poissonov proces**.

1. Trajektórie $t \rightarrow N_t(\omega)$ sú po častiach konštantné s prírastkom skokov veľkosti 1 pre $\forall \omega$.
2. Pre každé $t > 0$ sa N_t správa podľa Poissonovho rozdelenia s parametrom λt :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

3. Charakteristická funkcia má tvar

$$E[e^{iuN_t}] = \exp \{ \lambda t (e^{iu} - 1) \}, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Zložený Poissonov proces

DEFINÍCIA 4.9. **Zložený Poissonov proces** s intenzitou $\lambda > 0$ a distribúciou skokov f je stochastický proces X_t v tvare

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

kde skoky Y_i sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné premenné s distribúciou f a N_t je Poissonov proces s intenzitou λ , pričom N_t je nezávislé od Y_i pre všetky $t \geq 0, i \in \mathbb{N}$.

Poissonov proces vieme vyjadriť ako zložený Poissonov proces, ak platí $Y_i = 1$ pre $\forall i$.

TVRDENIE 4.6. *Charakteristická funkcia zloženého Poissonovho procesu má tvar*

$$E[e^{iuX_t}] = \exp \left\{ t\lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) f(dx) \right\}, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

kde λ je intenzita procesu a f je distribúcia skokov procesu.

Lévyho miera zloženého Poissonovho procesu je určená ako súčin intenzity skokov λ a distribúcie skokov $f(dx)$, t.j. $\nu(dx) = \lambda f(dx)$. Keďže miera zloženého Poissonovho procesu je konečná, je procesom s konečnou aktivitou. Z uvedeného vyplýva, že Lévyho rozdelenie zloženého Poissonovho procesu vieme zapísať pomocou tripletu v tvare

$$L \sim \left[\int_{-1}^1 x\nu(dx), 0, \nu(dx) \right].$$

4.2.2 Skokovo-difúzny proces

Skokovo-difúzny Lévyho proces je proces

$$L_t = bt + cW_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad (4.6)$$

kde W_t je Wienerov proces a $\{N_t\}_{t \geq 0}$ je Poissonov proces s intenzitou skokov λ a Y_i reprezentujú veľkosti skokov a sú to rovnako rozdelené nezávislé náhodné premenné z normálneho rozdelenia s parametrami s a δ^2 , t.j. distribúcia skokov je určená

$$f(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \exp \left\{ -\frac{(dx - s)^2}{2\delta^2} \right\}.$$

Pre Lévyho mieru skokovo-difúzneho procesu teda platí

$$\nu(dx) = \lambda f(dx) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \exp \left\{ -\frac{(dx - s)^2}{2\delta^2} \right\}.$$

Skokovo-difúzny proces je kombináciou Brownovho pohybu a zloženého Poissonovho procesu, jeho charakteristickú funkciu vieme vyjadriť nasledovne

$$E[e^{iuL_t}] = \exp \left\{ t \left(ibu - \frac{c^2 u^2}{2} + \lambda \left(e^{(isu - \frac{\delta^2 u^2}{2})} - 1 \right) \right) \right\}. \quad (4.7)$$

Lévyho rozdelenie skokovo-difúzneho procesu má triplet

$$L \sim \left[b + \int_{-1}^1 x\nu(dx), c^2, \nu(dx) \right].$$

Oceňovanie opcií s podkladovým aktívom riadeným Lévyho procesom

Cieľom tejto kapitoly je predstaviť rôzne metódy ocenenia európskej call opcie $C = C(S, K)$ s expiračnou cenou K a maturitou T s podkladovým aktívom riadeným Lévyho procesom. Budeme sa venovať transformačným metódam, metóde Monte Carlo ako aj odvodeniu parciálnej integro-diferenciálnej rovnice, pričom v tomto prípade upravíme proces vývoja ceny akcie tak, aby sme mohli porovnať Lévyho proces s Wienerovým procesom. Všetky nižšie uvedené metódy sa po úprave dajú použiť aj pre ďalšie procesy vývoja ceny akcie. Teória použitá v tejto kapitole je čerpaná z [4], [9], [10] a [11].

5.1 Funkcia hustoty

Ak poznáme funkciu hustoty $f_Q(S, T)$ ceny opcie v čase expirácie T v rizikovo neutrálnej miere Q , potom vieme určiť cenu európskej call a put opcie použitím očakávanej hodnoty. Cena európskej call opcie s realizačnou cenou K a maturitou T je v čase $t = 0$ určená ako očakávaná výplata pod martingalovou mierou Q

$$\begin{aligned} C_0 = C_0(S, K) &= E_Q[e^{-rT}(S_T - K)^+] \\ &= e^{-rT} \int_0^\infty f_Q(S, T)(S - K)^+ ds \\ &= e^{-rT} \int_K^\infty f_Q(S, T)(S - K) ds \\ &= e^{-rT} \int_K^\infty f_Q(S, T) S ds - K e^{-rT} \Pi_2, \end{aligned}$$

kde Π_2 je pravdepodobnosť (v miere Q), že opcia skončí v pozícii *in-the-money*. Treba poznamenať, že v odvodení predpokladáme, že funkcia hustoty f_Q je definovaná na

\mathbb{R}^+ , keďže cena akcie je vždy väčšia ako 0. Táto metóda sa väčšinou aplikuje na známe rozdelenie $\ln S_t$, t.j. na rozdelenie prírastkov procesu ceny akcie.

5.2 Charakteristická funkcia

Funkcia hustoty ceny podkladového aktíva nie je vždy k dispozícii. Avšak pre väčšinu Lévyho procesov, ktorým sa riadi proces ceny akcie S_t , poznáme ich charakteristickú funkciu v rizikovo neutrálnej miere Q . Nech $\Phi_{\ln S_T}(u)$ je charakteristická funkcia náhodnej premennej $\ln S_T$, t.j.

$$\Phi_{\ln S_T}(u) = E_Q[e^{iu \ln S_T}] = E_Q[e^{iu(\ln S_0 + L_t)}].$$

Vo všeobecnosti môžeme napísať

$$C_0 = C_0(S, K) = S_0 \Pi_1 - K e^{-rT} \Pi_2,$$

pričom Π_1 a Π_2 získame vyrátaním nasledujúcich integrálov

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} E[e^{i(u-i) \ln S_T}]}{iu E[S_T]} \right) du \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} \Phi(u-i)}{iu \Phi(-i)} \right) du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} E[e^{iu \ln S_T}]}{iu} \right) du \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iu \ln K} \Phi(u)}{iu} \right) du, \end{aligned}$$

kde $\operatorname{Re}(\cdot)$ je reálna časť. Pravdepodobnosť, že opcia skončí v pozícii *in-the-money* je Π_2 . Hodnota Π_1 predstavuje deltu opcie, t.j. podiel zmeny hodnoty opcie a zmeny hodnoty podkladového aktíva.

Carr a Madan [4] vypracovali ďalšiu metódu ocenenia opcie, ktorá opäť predpokladá, že poznáme charakteristickú funkciu rizikovo neutrálneho procesu ceny akcie. Nech k je logaritmus expiračnej ceny K a $C_0(k)$ je súčasná hodnota ceny opcie s maturitou v čase T a expiračnou cenou e^k . Nech $g_T(s)$ je rizikovo neutrálna hustota logaritmu ceny akcie s_T . Charakteristická funkcia je definovaná pomocou hustoty

$$\Phi_{s_T}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} g_T(s) ds.$$

Vzťah medzi počiatočnou hodnotou call opcie $C_0(k)$ a rizikovo neutrálnou hustotou $g_T(s)$ je

$$C_0(k) = \int_k^\infty e^{-rT}(e^s - e^k)g_T(s)ds.$$

Keď k smeruje k $-\infty$ potom $C_0(k)$ sa blíži k S_0 . Z tejto vlastnosti vyplýva, že funkcia na ocenenie call opcie nie je štvorcovo integrovateľná. Aby sme dosiahli túto vlastnosť, budeme uvažovať upravenú cenu call opcie $c_0(k)$ definovanú vzťahom

$$c_0(k) \equiv e^{\eta k} C_0(k)$$

pre $\eta > 0$. Pre takýto rozsah hodnôt η je $c_0(k)$ štvorcovo integrovateľná v premennej k na celej reálnej osi. Definujme Fourierovu transformáciu $\varrho_0(k)$

$$\varrho_T(v) = \int_{-\infty}^\infty e^{ivk} c_0(k) dk.$$

Pre cenu call opcie platí:

$$C_0(k) = \frac{e^{-\eta k}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-ivk} \varrho_T(v) dv = \frac{e^{-\eta k}}{2\pi} \int_0^\infty e^{-ivk} \varrho(v) dv.$$

Výraz $\varrho_T(v)$ je určený výrazom

$$\begin{aligned} \varrho_T(v) &= \int_{-\infty}^\infty e^{ivk} \int_k^\infty e^{\eta k} e^{-rT}(e^s - e^k)g_T(s)dsdk \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-rT} g_T(s) \int_{-\infty}^s (e^{s+\eta k} - e^{(1+\eta)k}) e^{ivk} dk ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-rT} g_T(s) \left[\frac{e^{(\eta+1+iv)s}}{\eta+iv} - \frac{e^{(\eta+1+iv)s}}{\eta+1+iv} \right] ds \\ &= \frac{e^{-rT} \Phi_{s_T}(v - (\eta+1)i)}{\eta^2 + \eta - v^2 + i(2\eta+1)v}. \end{aligned}$$

5.3 Esscherova transformácia

Uvažujeme proces ceny akcie v tvare $S_t = S_0 e^{(r-q)t + L_t}$. Cenu call opcie určíme použitím Esscherovej transformácie definovanej v prvej kapitole. V bezrizikovej miere Q platí, že diskontovaný proces ceny akcie $e^{-rt} S_t$ je martingal a táto vlastnosť sa vzťahuje aj pre diskontovanú hodnotu opcie $e^{-rt} C_t(S, K)$. Pre zjednodušenie označme cenu opcie symbolom $V(t)$ a jej *pay-off* symbolom $\Omega(x)$. Platí:

$$e^{-rt} V(t) = E_Q[e^{-rT} V(T) | \mathcal{F}_t] = E_Q[e^{-rT} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

a teda

$$V(t) = e^{rt} E_Q[e^{-rT}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] = E_Q[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t].$$

Pomocou Esscherovej transformácie dostaneme vzorec na výpočet ceny opcie

$$\begin{aligned} V(t) &= E_Q[e^{-r(T-t)} \Omega(S_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} E \left[\Omega(S_T) \frac{Z_T}{Z_t} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} E \left[\Omega \left(S_t \frac{S_T}{S_t} \right) \frac{Z_T}{Z_t} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} E \left[\Omega \left(S_t e^{(r-q)(T-t)} e^{L_T - L_t} \right) \frac{e^{\theta(L_T - L_t)}}{M_{S_t}(\theta)^{T-t}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

a

$$C_t(S_t, K) = e^{-r(T-t)} E \left[\Omega \left(y e^{(r-q)(T-t) + L_T - L_t} \right) \frac{e^{\theta(L_T - L_t)}}{M_y(\theta)^{T-t}} \middle|_{y=S_t} \right]. \quad (5.1)$$

5.4 Monte Carlo

Ďalšou metódou na ocenenie opcií sú Monte Carlo simulácie. Uvažujeme európsku call opciu s podkladovým aktívom riadeným Lévyho procesom, t.j. $S_t = S_0 e^{L_t}$. Pre výplatu (*pay-off*) opcie platí (2.1) a simuláciami určíme súčasnú očakávanú hodnotu výplatnej funkcie opcie ako diskontovanú očakávanú výplatu v čase $t = 0$ v rizikovo neutrálnej miere Q

$$C_0(S, K) = e^{-rT} E_Q[(S_T - K)^+].$$

Metóda spočíva vo vygenerovaní možných scenárov hodnoty podkladového aktíva v čase maturity opcie T v rizikovo neutrálnej miere, t.j. $S_T = S_0 e^{L_T}$. Nech S_{T_k} , $k = 1, \dots, N$ sú nasimulované hodnoty ceny akcie, potom cenu opcie $C_0(S, K)$ získame ako priemer všetkých scenárov podkladového aktíva

$$\hat{C}_0(S, K) = e^{-rT} \sum_{k=1}^N (S_{T_k} - K)^+,$$

ktorý podľa zákona veľkých čísel pre $N \rightarrow \infty$ konverguje k skutočnej hodnote ceny opcie $C_0(S, K)$

$$\hat{C}_0(S, K) \rightarrow C_0(S, K), \quad N \rightarrow \infty.$$

Nevýhodou tejto metódy je však jej časová náročnosť.

5.5 Parciálna integro-diferenciálna rovnica

Ako poslednej metóde ocenenia opcie s podkladovým aktívom riadeným Lévyho procesom sa budeme venovať oceneniu pomocou parciálnej integro-diferenciálnej rovnice, ktorú budeme v ďalšej kapitole aplikovať na reálne dáta a porovnávať hodnoty opcií vypočítaných pomocou Black–Scholesovho modelu s hodnotami opcií vypočítaných pomocou parciálnej integro-diferenciálnej rovnice. Aby boli jednotlivé prístupy porovnateľné, rozhodli sme sa za proces ceny akcie považovať proces $S_t = S_0 e^{(r-q)t + \sigma L_t}$. Keďže chceme, aby bol Lévyho proces L_t porovnateľný s Wienerovým procesom W_t , Lévyho proces zvolíme ako proces so strednou hodnotou $E[L_t] = 0$ a varianciou $Var[L_t] = t$. Označme symbolom $[\tilde{b}, \tilde{c}^2, \tilde{\nu}(dx)]$ Lévyho triplet takéhoto procesu. Na úvod uvedieme, že táto schéma je zároveň odvodená pre Lévyho proces s konečnou aktivitou.

Použitím Itôovej lemy (TVRDENIE 4.3) pre Lévyho procesy vieme vyjadriť diskontovaný proces $e^{-rt} f(L_{t-}, t)$ v tvare

$$\begin{aligned} d(e^{-rt} f(L_{t-}, t)) &= -r e^{-rt} f(L_{t-}, t) dt + e^{-rt} d(f(L_{t-}, t)) \\ &= e^{-rt} \left[-r f(L_{t-}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(L_{t-}, t) dt + \frac{\partial f}{\partial L_t}(L_{t-}, t) dL_t + \frac{\tilde{c}^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial L_t^2}(L_{t-}, t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} \left[f(L_{t-} + x, t) - f(L_{t-}, t) - x \frac{\partial f}{\partial L_t}(L_{t-}, t) \right] \tilde{J}_L(dx) dt \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Využitím POZNÁMKY 4.2 upravíme rovnicu (5.2)

$$\begin{aligned} d(e^{-rt} f(L_{t-}, t)) &= e^{-rt} \left[-r f(L_{t-}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(L_{t-}, t) dt + \tilde{b} \frac{\partial f}{\partial L_t}(L_{t-}, t) dt + \frac{\tilde{c}^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial L_t^2}(L_{t-}, t) dt \right. \\ &\quad \left. + \tilde{c} \frac{\partial f}{\partial L_t}(L_{t-}, t) dW_t + \int_{\mathbb{R}} \tilde{J}_L(dx) [f(L_{s-} + x) - f(L_{s-})] dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} \left[f(L_{t-} + x, t) - f(L_{t-}, t) - x 1_{|x| \leq 1} \frac{\partial f}{\partial L_t}(L_{t-}, t) \right] \tilde{\nu}(dx) dt \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Z TVRDENIA 4.4 vieme, že Lévyho proces vieme rozložiť na súčet dvoch procesov: $f(L_t) = M_t + H_t$, kde f je C^2 funkcia s ohraničenými deriváciami až do druhého rádu. Z tohto tvrdenia vyplýva, že v rovnici (5.3) je všetko okrem martingalovej časti

rovné 0 (keďže $H_t = 0$ pre $\forall t \in [0, T]$). Potrebujeme, aby cena opcie bola martingal v rizikovo neutrálnej miere Q , takže v nasledujúcom odvodení budeme brať do úvahy len druhú časť tvrdenia, t.j. proces s konečnou variáciou. Rovnicu (5.3) tak upravíme na tvar

$$0 = e^{-rt} \left[-rf(L_{t-}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(L_{t-}, t)dt + \tilde{b} \frac{\partial f}{\partial L_t}(L_{t-}, t)dt + \frac{\tilde{c}^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial L_t^2}(L_{t-}, t)dt \right. \\ \left. + \int_{\mathbb{R}} \left[f(L_{t-} + x, t) - f(L_{t-}, t) - x1_{|x| \leq 1} \frac{\partial f}{\partial L_t}(L_{t-}, t) \right] \tilde{\nu}(dx)dt \right]. \quad (5.4)$$

Použijeme transformáciu $f(X, t) = V(S_0 e^{(r-q)t + \sigma X}, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + S(r-q) \frac{\partial V}{\partial S}, \\ \frac{\partial f}{\partial X} = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = \sigma^2 S \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

a príslušné parciálne derivácie dosadíme do rovnice (5.4)

$$0 = e^{-rt} \left[-rV(S, t) + \frac{\partial V}{\partial t}(S, t)dt + S(r-q) \frac{\partial V}{\partial S}(S, t)dt + S\sigma\tilde{b} \frac{\partial V}{\partial S}(S, t)dt \right. \\ \left. + \frac{S\tilde{c}^2\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t)dt + \frac{S^2\tilde{c}^2\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t)dt \right. \\ \left. + \int_{\mathbb{R}} \left[V(Se^{\sigma x}, t) - V(S, t) - S\sigma x1_{|x| \leq 1} \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) \right] \tilde{\nu}(dx) \right].$$

Rovnica (5.5) je prvým výsledkom, dostali sme parciálnu integro-diferenciálnu rovnicu pre všeobecnú zmenu miery

$$0 = e^{-rt} \left[-rV(S, t) + \frac{\partial V}{\partial t}(S, t)dt + S \underbrace{\left((r-q) + \sigma\tilde{b} + \frac{\tilde{c}^2\sigma^2}{2} \right)}_{\mu_{old}} \frac{\partial V}{\partial S}(S, t)dt \right. \\ \left. + \frac{S^2\tilde{c}^2\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t)dt + \int_{\mathbb{R}} \left[V(Se^{\sigma x}, t) - V(S, t) - S\sigma x1_{|x| \leq 1} \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) \right] \tilde{\nu}(dx) \right]. \quad (5.5)$$

Keďže oceňujeme v rizikovo neutrálnej miere, potrebujeme zmeniť mieru na rizikovo neutrálnu. Použijeme na to prístup "**mean-correcting value**" z časti 1.6:

$$\mu_{new} = \mu_{old} + (r-q) - \log(\Phi_{S_t}(-i\sigma)),$$

v našom prípade $\mu_{old} = (r - q) + \tilde{b}\sigma$ a pre charakteristickú funkciu platí VETA 4.1, pričom za parameter b z Lévyho tripletu dosadíme výraz μ_{old}

$$\log(\Phi_{S_t}(-i\sigma)) = (r - q) + \tilde{b}\sigma + \frac{\tilde{c}^2\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{x\sigma} - 1 - \sigma x 1_{|x|\leq 1}) \tilde{\nu}(dx).$$

Pre μ_{new} dostávame

$$\begin{aligned} \mu_{new} &= (r - q) + \tilde{b}\sigma + (r - q) - \left((r - q) + \tilde{b}\sigma + \frac{\tilde{c}^2\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{x\sigma} - 1 - \sigma x 1_{|x|\leq 1}) \tilde{\nu}(dx) \right) \\ &= (r - q) - \frac{\tilde{c}^2\sigma^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} (e^{x\sigma} - 1 - \sigma x 1_{|x|\leq 1}) \tilde{\nu}(dx). \end{aligned}$$

Hodnotu parametra dosadíme namiesto μ_{old} do rovnice (5.5). Výsledkom je parciálna integro-diferenciálna rovnica:

$$\begin{aligned} 0 &= -rV(S, t) + \frac{\partial V}{\partial t}(S, t) + S(r - q) \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) + \frac{S^2 \tilde{c}^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left[V(S e^{\sigma x}, t) - V(S, t) - S(e^{\sigma x} - 1) \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) \right] \tilde{\nu}(dx), \end{aligned} \quad (5.6)$$

s koncovou podmienkou (2.1), resp. (2.2).

POZNÁMKA 5.1. Prvá časť rovnice (5.6) (t.j. bez integrálu) je totožná s Black–Scholesovou rovnicou (2.9), kde $\sigma = \tilde{c}\sigma$. Substitúciami $\tilde{c}^2 = 1$ a $\tilde{\nu}(dx) = 0$ dostaneme klasickú Black-Scholesovu rovnicu.

Aplikácia PIDE rovnice

Táto kapitola je zameraná na aproximáciu parciálnej integro-diferenciálnej rovnice pomocou numerickej schémy a jej aplikáciu na reálne dáta, pričom za Lévyho proces si zvolíme skokovo-difúzny proces. Pomocou charakteristickej funkcie odvodíme momenty procesu ceny akcie a odhadneme parametre vstupujúce do numerickej schémy na ocenenie európskej a americkej call opcie. V prípade európskej call opcie porovnáme ceny vypočítané pomocou numerickej aproximácie parciálnej integro-diferenciálnej rovnice a Black–Scholesovej rovnice s trhovými cenami opcií. Prevažná časť teórie bola čerpaná z [1], [3], [5] a [16]. Výrazom PIDE v tejto kapitole označujeme parciálnu integro-diferenciálnu rovnicu.

6.1 Numerické riešenie PIDE rovnice

Na odvodenie numerickej schémy pre európsku call opciu, ktorú oceňujeme pomocou parciálnej integro-diferenciálnej rovnice, použijeme explicitný prístup. Na aproximáciu jednotlivých parciálnych derivácií aplikujeme metódu konečných diferencií, v prípade aproximácie integrálu lichobežníkové pravidlo.

Nech platí rovnica (5.6) a koncová podmienka (2.1). Použitím transformácií:

1. $\tau = T - t$, $W(S, t) = V(S, T - \tau)$
2. $y = \ln(\frac{S}{E})$, $Z(y, \tau) = W(Ee^y, \tau)$
3. $u(y, \tau) = e^{\alpha y + \beta \tau} Z(y, \tau)$,

zjednodušíme rovnicu (5.6) na tvar

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\tilde{c}^2 \sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \int_{\mathbb{R}} [e^{-\alpha \sigma x} u(y + \sigma x, \tau)] \tilde{\nu}(dx), \quad (6.1)$$

kde

$$\alpha = \frac{(r + \lambda) - (q + \phi)}{\tilde{c}^2 \sigma^2} - \frac{1}{2},$$

$$\beta = \frac{(r + \lambda) + (q + \phi)}{2} + \frac{((r + \lambda) - (q + \phi))^2}{2\tilde{c}^2 \sigma^2} + \frac{\tilde{c}^2 \sigma^2}{8},$$

$$\lambda = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\nu}(dx),$$

a

$$\phi = \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma x} \tilde{\nu}(dx)$$

s počiatočnou podmienkou pre call opciu v tvare

$$u(y, 0) = e^{\alpha y} \max(e^y - 1).$$

Metóda konečných diferencií

Metóda konečných diferencií je založená na voľbe diskkrétnej siete mrežových bodov v priestore nezávislých premenných $(y, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, T)$. Riešenie u a jeho derivácie nahradíme diferenciami v jednotlivých uzlových bodoch siete. Mriežku si rozdelíme pomocou priestorového kroku $h > 0$ a časového kroku $k > 0$. Časový krok zvolíme nasledovne $k = \frac{T}{m}$, kde m je počet časových delení intervalu $(0, T)$. Premenná y je z neohraničeného intervalu, môže nadobúdať hodnoty od $-\infty$ do ∞ . Na numerické vyriešenie úlohy je potrebné ohraničiť premennú y konštantou L , pričom táto konštanta je dostatočne veľká. Pre priestorový krok teda platí $h = \frac{L}{n}$, kde n je počet delení intervalu $(-L, L)$. Berúc do úvahy priestorový a časový krok uvažujeme sieť mrežových bodov

$$y_i = ih, \quad i = \dots, -1, 0, 1, \dots, \quad \tau_j = jk, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Aproximáciu hľadaného riešenia v mrežovom bode (y_i, τ_j) označíme ako u_i^j , t.j.

$$u_i^j = u(y_i, \tau_j).$$

Parciálne derivácie nahradíme konečnými diferenciami pomocou rozvinutia funkcie u do Taylorovho rádu v danom sieťovom bode (y_i, τ_j) .

Dostaneme

$$u(y_{i+1}, \tau_j) \approx u(y_i, \tau_j) + \frac{\partial u}{\partial y} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} h^3 \quad (6.2)$$

a

$$u(y_{i-1}, \tau_j) \approx u(y_i, \tau_j) - \frac{\partial u}{\partial y} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} h^3. \quad (6.3)$$

Sčítaním (6.2) a (6.3) máme aproximáciu druhej parciálnej derivácie funkcie u podľa premennej y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y_i, \tau_j) \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \quad (6.4)$$

s chybou v druhej derivácii rádu $O(h^2)$.

Pre časovú deriváciu $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ z Taylorovho rozvoja v bode (y_i, τ_j) podľa premennej τ dostávame aproximáciu

$$u(y_i, \tau_{j+1}) \approx u(y_i, \tau_j) + \frac{\partial u}{\partial \tau} k$$

s chybou rádu $O(k^2)$ pre $k \rightarrow 0$. Z tohto rozvoja získame doprednú aproximáciu parciálnej derivácie

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \quad (6.5)$$

s chybou v prvej derivácii podľa τ rádu $O(k)$.

Keďže sme výpočet obmedzili na ohraničený interval, potrebujeme k rovnici dodať okrajové podmienky v krajných bodoch. Tie zodpovedajú cenám akcie, ktoré sú blízke nule (teda veľmi malé) ($y = -L$) a cenám, ktoré sa približujú k nekonečnu (sú veľmi veľké) ($y = L$). Pre tieto limitné hodnoty použijeme aproximácie:

$$V(0, t) = 0, \quad V(S, t) = S e^{-q(T-t)} \text{ pre } S \rightarrow \infty.$$

Vytvoríme maticu veľkosti $N \times M$, kde $N = 2n + 1$ a $M = m + 1$. Pre N dostatočne veľké môžeme hodnoty riešenia aproximovať hraničnými podmienkami

$$u_0^j = 0, \quad u_N^j = e^{(\alpha+1)Nh + (\beta-q)jk}.$$

Lichobežníková metóda

Lichobežníková metóda je Newton-Cotesova metóda uzavretého typu pre $n = 1$. Táto metóda je založená na lineárnej interpolácii

$$\begin{aligned} \int_a^b f(y) dy &\approx \int_a^b \left[f(a) + \frac{y-a}{b-a} (f(b) - f(a)) \right] dy \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a). \end{aligned}$$

Aby sme interpolačnými metódami dosiahli požadovanú presnosť, musíme danú funkciu interpolovať polynómom dostatočne vysokého stupňa. Tento prístup však nemusí byť vždy vhodný. Pri zloženej kvadrátúrnej metóde postupujeme inak: daný interval $[a, b]$ rozdelíme na dostatočný počet podintervalov a na nich budeme funkciu f interpolovať polynómom nižšieho rádu.

Rozdeľme interval $[a, b]$ na n podintervalov $[y_i, y_{i+1}]$ rovnakej dĺžky $h = \frac{b-a}{n}$. Pre lichobežníkovú metódu dostaneme

$$\begin{aligned} \int_a^b f(y)dy &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(y)dy \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{b-a}{n} \left(\frac{f(y_i) + f(y_{i+1})}{2} \right) - \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi_i) \right] \\ &= \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a)}{2} + f(y_1) + \dots + f(y_{n-1}) + \frac{f(b)}{2} \right] - \frac{nh^3}{12} f^{(2)}(\xi) \\ &= \frac{b-a}{n} \left[\sum_{i=0}^n f(y_i) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right] - \frac{(b-a)h^2}{12} f^{(2)}(\xi). \end{aligned}$$

Výraz $\frac{(b-a)h^2}{12} f^{(2)}(\xi)$ predstavuje chybu danej metódy.

Na základe lichobežníkového pravidla spočítame aproximáciu

$$\nu_i = \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} \tilde{\nu}(dx). \quad (6.6)$$

Pre intenzitu skokov λ platí

$$\lambda \approx \sum_{i=-L}^L \nu_i, \quad (6.7)$$

príčom výraz ϕ aproximujeme rovnakým prístupom.

Dosadením výrazov (6.4), (6.5), (6.6) a (6.7) do (6.1) získame numerickú schému na vyriešenie parciálnej integro-diferenciálnej rovnice. Keďže sme rovnicu (6.1) aproximovali explicitnou schémou, musí byť splnená podmienka na vzťah medzi priestorovým a časovým krokom, aby metóda konvergovala [3]

$$k \leq \min \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}}, \frac{h^2}{(\tilde{c}\sigma)^2} \right).$$

6.2 Aplikácia PIDE na trhové dáta

V tejto časti aplikujeme numerickú schému parciálnej integro-diferenciálnej rovnice na ocenenie európskej a americkej call opcie. Zvolíme si konkrétny Lévyho proces, ktorý spĺňa požiadavky PIDE prístupu: skokovo-difúzny proces. Keďže chceme porovnať výsledky s Black–Scholesovým modelom, proces vývoja ceny akcie $S_t = S_0 e^{(r-q)t + \sigma L_t}$ nastavíme tak, aby pre strednú hodnotu a varianciu Lévyho procesu L_t platilo: $E[L_t] = 0$ a $Var[L_t] = t$. Táto voľba momentov korešponduje s momentmi Wienerovho procesu W_t v Black–Scholesovom modeli. Z reálnych dát odhadneme parametre pomocou momentov procesu ceny akcie.

6.2.1 Odhadovanie parametrov

Charakteristický exponent skokovo-difúzneho procesu $L_t = bt + cW_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ spĺňa

$$\Psi_{L_t}(u) = t \left(ibu - \frac{c^2 u^2}{2} + \lambda \left(e^{\left(isu - \frac{\delta^2 u^2}{2} \right)} - 1 \right) \right).$$

Charakteristický exponent generuje kumulanty $\kappa_{L_t}^{(i)}$ podľa vzťahu (1.4):

$$\begin{aligned} \kappa_{L_t}^{(1)} &= t(b + \lambda s), \\ \kappa_{L_t}^{(2)} &= t(c^2 + \lambda(\delta^2 + s^2)), \\ \kappa_{L_t}^{(3)} &= \lambda t(s^3 + 3\delta^2 s), \\ \kappa_{L_t}^{(4)} &= \lambda t(3\delta^4 + 6s^2 \delta^2 + s^4), \\ \kappa_{L_t}^{(5)} &= \lambda t(15\delta^4 s + 10s^3 \delta^2 + s^5). \end{aligned}$$

Keďže chceme L_t so strednou hodnotou 0 a varianciou t , podľa toho nastavíme potrebné parametre: $b = -\lambda s$ a $c^2 = 1 - \lambda(\delta^2 + s^2)$.

Charakteristický exponent procesu vývoja ceny akcie S_t po úprave s predpokladom, že L_t má strednú hodnotu 0 a varianciu t má tvar

$$\Psi_{S_t}(u) = t \left(i\mu u - i\lambda s\sigma u - \frac{(1 - \lambda(\delta^2 + s^2)) u^2 \sigma^2}{2} + \lambda \left(e^{isu\sigma - \frac{\sigma^2 \delta^2 u^2}{2}} - 1 \right) \right).$$

Pre kumulanty procesu S_t platí:

$$\kappa_{S_t}^{(1)} = \mu t,$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{S_t}^{(2)} &= \sigma^2 t, \\
\kappa_{S_t}^{(3)} &= \sigma^3 \lambda t (s^3 + 3\delta^2 s), \\
\kappa_{S_t}^{(4)} &= \sigma^4 \lambda t (3\delta^4 + 6s^2 \delta^2 + s^4), \\
\kappa_{S_t}^{(5)} &= \sigma^5 \lambda t (15\delta^4 s + 10s^3 \delta^2 + s^5).
\end{aligned}$$

Prvé štyri momenty procesu ceny akcie S_t spĺňajú

$$\begin{aligned}
E[S_t] &= \mu t, \\
Var[S_t] &= \sigma^2 t, \\
s(S_t) &= t\lambda(s^3 + 3\delta^2 s), \\
k(S_t) &= t\lambda(3\delta^4 + 6s^2 \delta^2 + s^4).
\end{aligned}$$

Pre daný proces potrebujeme odhadnúť päť parametrov, konkrétne intenzitu skokov λ , strednú hodnotu skokov s a ich štandardnú odchýlku δ , očakávaný výnos akcie μ a volatilitu akcie σ .

Zo vzťahov medzi centrálnymi momentmi a kumulantmi $\kappa_{S_t}^{(i)}$ určíme centrálné momenty pre S_t

$$\begin{aligned}
\gamma_{S_t}^{(1)} &= 0, \\
\gamma_{S_t}^{(2)} &= \sigma^2 t, \\
\gamma_{S_t}^{(3)} &= \sigma^3 \lambda t (s^3 + 3\delta^2 s), \\
\gamma_{S_t}^{(4)} &= \sigma^4 \lambda t (3\delta^4 + 6s^2 \delta^2 + s^4) + 3t^2 \sigma^4, \\
\gamma_{S_t}^{(5)} &= \sigma^5 \lambda t (15\delta^4 s + 10s^3 \delta^2 + 30t^2 \delta^2 s + 10s^3 + s^5).
\end{aligned}$$

Pri odhadovaní parametrov procesu zvolíme nasledujúci postup:

1. vypočítame si výnosy akcie,
2. odhadneme parametre procesu:

– zo sústav rovníc $a = \lambda s(s^2 + 3\delta^2)$, $f = \lambda(3\delta^4 + 6s^2 \delta^2 + s^4)$, $d = 4a\delta^2 + fs$, pričom platí $\sigma = \sqrt{\bar{\gamma}_{S_t}^{(2)}} t$, $a = \frac{t\bar{\gamma}_{S_t}^{(3)}}{\sigma^3}$, $f = \frac{t\bar{\gamma}_{S_t}^{(4)}}{\sigma^4} - \frac{3}{t}$, $d = \frac{t\bar{\gamma}_{S_t}^{(5)}}{\sigma^5} - \frac{10a}{t}$, vyjadríme δ^2 , λ a rovnicu pre s :

$$\delta^2 = \frac{d - fs}{4a},$$

$$\lambda = \frac{a}{s(s^2 + 3\delta^2)},$$

$$\frac{15f^2s^2}{16a^2} - \frac{9fds}{6a^2} - \frac{5fs^3}{2a} + \frac{3d^2}{16a^2} + \frac{3ds^2}{2a} + s^4 = 0.$$

– pomocou funkcie *solve* v programe MatLab vypočítame hodnotu parametra s a dopočítame hodnoty zvyšných parametrov.

$$3. \ c = \sqrt{1 - \lambda(s^2 + \delta^2)}.$$

Odhadnuté parametre dosadíme do numerickej schémy parciálnej integro-diferenciálnej rovnice odvodenej v časti 6.1, pričom miera uvažovaného procesu je definovaná mierou skokovo-difúzneho procesu (časť 4.2.2).

6.2.2 Numerické výsledky

Na numerickú analýzu sme si zvolili ako podkladové aktívum akciu firmy Apple. Dáta, ktoré sme sťahovali zo stránky *www.finance.yahoo.com*, sú platné ku dňu 17.12.2011, pričom posledná trhovú hodnotu ceny akcie z piatka 16.12.2011 bola 381.02\$. Parametre do modelu sme odhadovali na dátach za obdobie od 18.12.2007 do 16.12.2011 (vrátane), pričom priemerný počet obchodovateľných dní za rok bolo 252 dní.

Hodnoty anualizovaných parametrov pre akciu Apple pre PIDE prístup sú uvedené v tabuľke 6.1.

TABUĽKA 6.1

Hodnoty anualizovaných parametrov akcie Apple pre PIDE prístup

parameter	hodnota
$\hat{\sigma}$	0.388903
\hat{s}	0.057611
$\hat{\delta}$	0.195386
$\hat{\lambda}$	4.983756
\hat{c}	0.890618

Význam odhadnutých parametrov je nasledovný: volatilita akcie $\hat{\sigma}$ má približne hodnotu 0.39 a volatilita Brownovej zložky Lévyho procesu \hat{c} je 0.89. Akcia skáče pri-

bližne 4.98-krát ročne a skokom sa zvýši hodnota akcie o 5.76%, pričom štandardná odchýlka skokov je 0.1954.

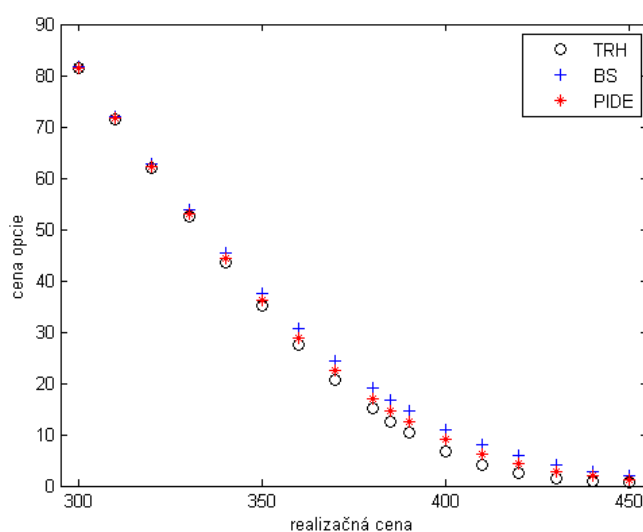
Pre Black–Scholesov model potrebujeme odhadnúť len volatilitu akcie. Keďže prvé dva momenty sú pre nami zvolený Lévyho proces ceny akcie a geometrický Brownov pohyb rovnaké, platí $\hat{\sigma}_{BS} = 0.388903$.

Zvyšné potrebné parametre sme nastavili na hodnoty: bezriziková úroková miera $r = 0.05$ a dividendová miera $q = 0.03$.

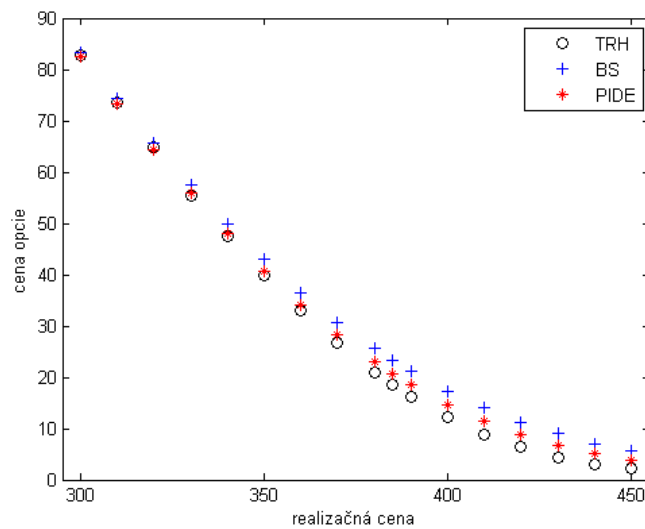
Európske call opcie

Vypočítali sme ceny európskych call opcií pre akciu firmy Apple pomocou PIDE prístupu a Black–Scholesovho modelu pre rôzne maturity T a realizačné ceny K a porovnali ich s trhovými cenami. Zvolené parametre pre numeriku sú: $L = 2$, $n = 110$ a $m = 100$. Trhové hodnoty ceny opcie sú označené symbolom 'o', ceny opcie vypočítané pomocou parciálnej integro-diferenciálnej rovnice symbolom '*' a ceny vypočítané pomocou Black–Scholesovho modelu symbolom '+'. Z obrázkov 6.1, 6.2 a 6.3 vidíme, že ceny z PIDE prístupu sú presnejšie vzhľadom na trhové ceny.

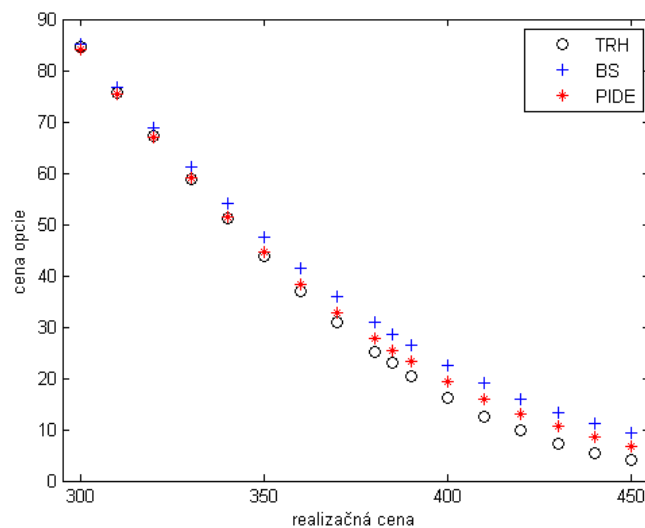
OBR. 6.1: Ceny európskej call opcie na akciu firmy Apple s maturitou 20. januára 2012



OBR. 6.2: Ceny európskej call opcie na akciu firmy Apple s maturitou 17. februára 2012



OBR. 6.3: Ceny európskej call opcie na akciu firmy Apple s maturitou 16. marca 2012



Ceny opcií vypočítané pomocou PIDE prístupu majú vo všetkých prípadoch nižšiu

relatívnu odchýlku od trhovej ceny ako ceny opcií vypočítané Black–Scholesovým modelom. Tabuľky hodnôt opcií pre rôzne maturity T a realizačné ceny K s relatívnymi odchýlkami od trhových cien uvádzame v Dodatku A.

Americké call opcie

V tejto časti oceníme americkú call opciu na akciu spoločnosti *Apple* pomocou numerickej aproximácie parciálnej integro-diferenciálnej rovnice a numerickej aproximácie Black–Scholesovej rovnice. Využitím podmienok (2.12) a (2.13) upravíme numerickú schému odvodenú v časti 6.1. Pre okrajové podmienky platí

$$\text{okrajová podmienka} = \max(\text{okrajová podmienka}, \text{transformovaný payoff})$$

a pre každú iteráciu

$$\text{hodnota iterácie} = \max(\text{hodnota iterácie}, \text{transformovaný payoff}).$$

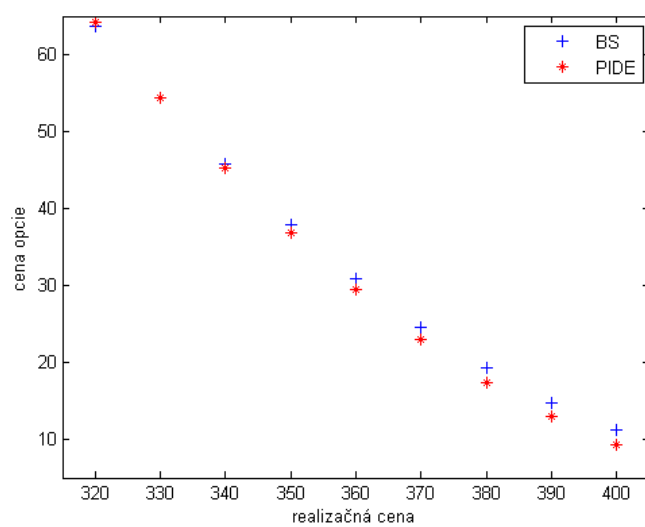
Analizované parametre vstupujúce do numerickej schémy sú rovnaké ako v prípade európskych call opcií, pričom pre mriežku sieťových bodov sme zvolili hodnoty parametrov: $L = 10$, $n = 3000$ a $m = 3000$. Pre výpočtovú náročnosť uvádzame výsledky len pre niektoré realizačné ceny s maturitou opcie 20. januára 2012.

TABUĽKA 6.2

Porovnanie cien amerických call opcií na akciu *Apple* vypočítaných pomocou Black–Scholesovho modelu a PIDE prístupu s maturitou 20. januára 2012 a cenou akcie 381.02\$

realizačná cena	BS cena	PIDE
320	63.73	64.16
330	54.42	54.45
340	45.79	45.26
350	37.91	36.89
360	30.85	29.43
370	24.63	22.94
380	19.29	17.44
390	14.81	12.92
400	11.14	9.33

OBR. 6.4: Ceny americkej call opcie na akciu firmy Apple s maturitou 20. januára 2012



Záver

Cieľom diplomovej práce bola analýza nedostatkov Black–Scholesovho modelu a ocenenie opcií s podkladovým aktívom riadeným Lévyho procesom.

V KAPITOLE 3 sa zaoberáme nepresnosťami Black–Scholesovho modelu. Zamerali sme sa na porušenie predpokladov modelu a pomocou štatistických testov a grafickej analýzy sme na reálnych dátach ukázali, že výnosy cien akcií sa nesprávajú podľa normálneho rozdelenia a volatilita podkladového aktíva nie je konštantná v čase.

Lévyho procesom, ktoré lepšie popisujú vývoj ceny podkladového aktíva ako (geometrický) Brownov pohyb, sa venujeme v KAPITOLE 4. Predstavili sme ich základné vlastnosti a konkrétne Lévyho procesy, ktoré sú v práci použité.

V KAPITOLE 5 sme uviedli rôzne možnosti ocenenia opcií s podkladovým aktívom riadeným Lévyho procesom. Zamerali sme sa na ocenenie opcie pomocou parciálnej integro-diferenciálnej rovnice, pričom proces ceny akcie $S_t = S_0 e^{(r-q)t + \sigma L_t}$ sme upravili tak, aby bol Lévyho proces porovnateľný s Wienerovým procesom. Ich prvé dva momenty sú teda rovnaké: stredná hodnota je 0 a variancia je t .

V KAPITOLE 6 sme pomocou numerickej schémy aproximovali odvodenú parciálnu integro-diferenciálnu rovnicu. Za Lévyho proces sme zvolili skokovo-difúzny proces a aplikovali schému na reálne dáta akcie spoločnosti *Apple*. Vypočítali sme ceny európskych a amerických call opcií a následne sme porovnali ceny európskej call opcie pre rôzne realizačné ceny K a rôzne maturity T vypočítané pomocou parciálnej integro-diferenciálnej rovnice a Black–Scholesovho modelu s trhovými cenami. Ceny vypočítané pomocou parciálnej integro-diferenciálnej rovnice mali vo všetkých prípadoch nižšiu relatívnu odchýlku ako ceny vypočítané na základe Black–Scholesovho modelu.

V diplomovej práci sme ukázali opodstatnenie použitia Lévyho procesov na modelovanie vývoja ceny podkladového aktíva. Pri aplikácii modelu na trhové dáta však pre vyššie hodnoty expiračných cien dochádza k vysokej relatívnej odchýlke od trhových cien. V otázke korektného (presného) oceňovania opcií tak naďalej zostáva priestor na ďalší výskum.

Tabuľky cien opcií

V tejto časti uvádzame trhové hodnoty ceny európskej call opcie na akciu Apple, ako aj hodnoty opcií tejto akcie vypočítaných v časti 6.2.2 pomocou parciálnej integro-diferenciálnej rovnice a Black–Scholesovho modelu pre rôzne realizačné ceny K a rôzne maturity T . V tabuľkách A.1, A.2 a A.3 uvádzame pre lepšie porovnanie presnosti PIDE prístupu a Black–Scholesovho modelu aj relatívne odchýlky cien opcií od trhových cien, pričom vzorec pre relatívnu odchýlku je:

$$\frac{V_{TRH} - V_i}{V_{TRH}}, i = PIDE, BS.$$

TABUĽKA A.1

Porovnanie trhových cien európskych call opcií na akciu firmy Apple s maturitou 20. januára 2012 s cenami vypočítanými pomocou Black–Scholesovho modelu a PIDE prístupu

realizačná cena	trhová cena	BS cena	rel. odchýlka BS	PIDE	rel. odchýlka PIDE
300	81.50	81.69	-0.23%	81.50	0.00%
310	71.48	72.09	-0.85%	71.76	-0.39%
320	61.88	62.76	-1.42%	62.21	-0.53%
330	52.40	53.81	-2.69%	52.99	-1.13%
340	43.68	45.37	-3.87%	44.24	-1.22%
350	35.20	37.58	-6.76%	36.14	-2.67%
360	27.44	30.55	-11.33%	28.83	-5.07%
370	20.66	24.35	-17.86%	22.43	-8.57%
380	15.05	19.02	-26.38%	17.00	-12.96%
385	12.51	16.68	-33.33%	14.66	-17.19%
390	10.30	14.56	-41.36%	12.55	-21.84%
400	6.75	10.92	-61.78%	9.02	-33.63%
410	4.20	8.03	-91.19%	6.31	-50.24%
420	2.55	5.79	-127.06%	4.30	-68.63%
430	1.54	4.09	-165.58%	2.85	-85.06%
440	1.00	2.84	-184.00%	1.85	-85.00%
450	0.64	1.93	-201.56%	1.17	-82.81%

TABUĽKA A.2

Porovnanie trhových cien európskych call opcií na akciu firmy Apple s maturitou 17. februára 2012 s cenami vypočítanými pomocou Black–Scholesovho modelu a PIDE prístupu

realizačná cena	trhová cena	BS cena	rel. odchýlka BS	PIDE	rel. odchýlka PIDE
300	82.80	83.26	-0.56%	82.57	0.28%
310	73.65	74.29	-0.87%	73.33	0.43%
320	64.75	65.70	-1.47%	64.44	0.48%
330	55.35	57.57	-4.01%	55.98	-1.14%
340	47.55	49.96	-5.07%	48.06	-1.07%
350	39.94	42.93	-7.49%	40.74	-2.00%
360	33.15	36.52	-10.17%	34.10	-2.87%
370	26.74	30.76	-15.03%	28.17	-5.35%
380	21.00	25.65	-22.14%	22.97	-9.38%
385	18.57	23.34	-25.69%	20.64	-11.15%
390	16.27	21.18	-30.18%	18.48	-13.58%
400	12.25	17.32	-41.39%	14.68	-19.84%
410	8.90	14.04	-57.75%	11.51	-29.33%
420	6.47	11.27	-76.09%	8.92	-39.38%
430	4.45	8.96	-101.35%	6.82	-53.26%
440	3.15	7.07	-124.44%	5.16	-63.81%
450	2.15	5.53	-157.21%	3.86	-79.53%

TABUĽKA A.3

Porovnanie trhových cien európskych call opcií na akciu firmy Apple s maturitou 16. marca 2012 s cenami vypočítanými pomocou Black–Scholesovho modelu a PIDE prístupu

realizačná cena	trhová cena	BS cena	rel. odchýlka BS	PIDE	rel. odchýlka PIDE
300	84.53	85.25	-0.85%	84.04	0.58%
310	75.65	76.80	-1.52%	75.28	0.49%
320	67.20	68.75	-2.31%	66.90	0.45%
330	58.70	61.14	-4.16%	58.97	-0.46%
340	51.26	54.03	-5.40%	51.55	-0.57%
350	43.85	47.44	-8.19%	44.69	-1.92%
360	37.10	41.38	-1.54%	38.42	-3.56%
370	30.90	35.86	-16.05%	32.75	-5.99%
380	25.20	30.89	-22.58%	27.68	-9.84%
385	22.90	28.60	-24.89%	25.37	-10.7%
390	20.35	26.44	-29.93%	23.21	-14.05%
400	16.20	22.50	-38.89%	19.29	-19.07%
410	12.45	19.04	-52.93%	15.92	-27.87%
420	9.75	16.02	-64.31%	13.03	-33.64%
430	7.35	13.40	-82.31%	10.59	-44.08%
440	5.45	11.16	-104.77%	8.54	-56.70%
450	4.00	9.24	-131,00%	6.84	-71.00%

Literatúra

- [1] Babušíková J., Slodička M., Weisz J. (2000), *Numerické metody*, Vysokoškolské skriptá, UK Bratislava
- [2] Baxter M., Rennie A. (1996), *Financial Calculus: An Introduction to derivative pricing*, Cambridge University Press
- [3] Bemis Ch. (2006), *Numerical methods for a certain PIDE*, Poznámky k prednáškam, University of Minnesota.
- [4] Carr P., Madan D. (1998), *Option valuation using the fast Fourier transform*, Journal of Computational Finance 2, 61–73.
- [5] Cont R., Tankov P. (2004), *Financial modelling with jump processes*, CHAPMAN & HALL/CRC
- [6] Elliott R. J., Kopp P. E. (1999), *Mathematics of Financial Markets*, Springer
- [7] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V. (2005), *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos
- [8] Miyahara Y. (2005), *Jump process models in mathematical finance*, Osaka University
- [9] Papapantoleon A. (2005), *An introduction to Lévy processes with applications in finance*, Skriptá, University of Pireus
- [10] Raible S. (2000), *Lévy processes in finance: Theory, numerics and empirical facts*, Dizertačná práca, University of Freiburg
- [11] Schoutens W. (2003), *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, Wiley

-
- [12] Schoutens W. (2002), *The Meixner Process: Theory and Applications in Finance*, EURANDOM Report 2002-004, EURANDOM, Eindhoven.
- [13] Schoutens W., Teugels, J. L. (1998), *Levy processes, polynomials and martingales*, Communications in Statistics - Stochastic Models 14 (1 & 2), 335-349.
- [14] Silverman B. W. (1998), *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, CHAPMAN & HALL/CRC
- [15] Stephens M. A. (1970), *Use of the Kolmogorov-Smirnov, Crámer von Mises and Related Statistics Without Extensive Tables*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological), Vol. 32, No. 1., pp. 115-122
- [16] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K. (2009), *Analytické a numerické metódy oceňovanie finančných derivátov*, STU
- [17] Zápražná D. (2009), *Nepresnosti v simulácii finančných trhov*, Bakalárska práca, FMFI UK Bratislava