Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Analytické a numerické metódy oceňovania installment opcií

Diplomová práca

Bratislava 2012

Bc. Matúš Zaťko

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Analytické a numerické metódy oceňovania installment opcií

Diplomová práca

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	Aplikovaná matematika 1114
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky
Školiteľ:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2012 Bc. Matúš Zaťko

70651109

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Matúš Zaťko
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Analytické a numerické metódy oceňovania installment opcií

Cieľ: Práca sa bude zaoberať analytickými a numerickými metódami oceňovania installment opcií. V práci sa zameriame na návrh efektívneho analytického a numerického algoritmu na výpočet cien takýchto opcií založeného na riešení príslušnej parciálnej diferenciálnej Black-Scholesovej rovnice s prekážkou.

Vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum zadania: 14.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Abstrakt

Bc. Matúš Zaťko, Analytické a numerické metódy oceňovania installment opcií, Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, vedúci bakalárskej práce prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava 2012.

Installment opcia je finančný derivát, ktorého cena je vyplácaná v pravidelných platbách počas celého trvania kontraktu. Diplomová práca sa zaoberá spojitými installmet opciami európskeho typu, ktorých oceňovanie je spojené s hľadaním voľnej hranice predčasného uplatnenia. Táto hranica je v mnohých ohľadoch podobná voľnej hranici predčasného uplatnenia amerických opcií, a preto sme na jej odvodenie použili aproximačnú metódu prevzatú od Zhua, ktorý pomocou tejto metódy odvodil aproximačnú formulu pre výpočet voľnej hranice amerických predajných opcií. Metóda aplikuje Laplaceovu transformáciu na parciálnu diferenciálnu rovnicu Black-Scholesovho typu spolu s prislušnými ohraničeniami. Práve transformovanie ohraničení na voľnej hranici vyžaduje aproximačný prístup. Na rozdiel od práce Zhua sme boli nútený použiť aproximáciu aj na riešenia voľnej hranice v priestore Laplaceovej premennej. Navrhli sme dve možné aproximácie, pre ktoré sme pomocou inverznej Laplaceovej transformácie vyjadrili aproximačné formuly na výpočet voľnej hranice predčasného uplatnenia.

Kľúčové slová: installment opcia, voľná hranica predčasného uplatnenia, Laplaceova transformácia, americká predajná opcia

Abstract

An installment option is a derivative financial security where price is paid in regular installments during period of the contract. The work is concerning continuous installment options of European type, which pricing is connected with finding free boundary of early exercise. This boundary is similar to the free boundary of American options and therefor we used approximation method made by Zhu, who used this method to deduce approximation formula for the optimal exercise boundary of American put options. The method applies Laplace transform to the partial differential equation of Black-Scholes type together with corresponding constraints. Especially, transformation of constraints on free boundary needs approximation approach. In contrast to the work by Zhu we were also forced approximate free boundary in the Laplace space. We suggested two possible approximations. Then we deduced approximation formulas for counting free boundary of continuous put installment options by using inverse Laplace transform.

Key words: installment option, free boundary, Laplace transform, American put option

Predhovor

Cieľom diplomovej práce je skúmať a oceniť installment opcie. Zo všetkých installment opcií sme sa rozhodli zaoberať spojitými predajnými installment opciami európskeho typu. Installment opcie nie sú len finančné nástroje obchodované na finančných trhoch a slúžiace na zabezpečovanie portfólií, ale dajú sa aplikovať aj v iných oblastiach finančného sveta. Preto je dôležité vedieť ich oceniť. V práci riešime tento problém prístupom prevzatým od Song-Ping Zhua, ktorý vymyslel metódu na oceňovanie amerických opcií. Práca sa zameriava na riešenie problému hľadania voľnej hranice predčasného uplatnenia spojitých installment opcií. Práve nájdenie voľnej hranice je kľúčom k oceneniu takéhoto typu opcií. Výsledkom práce sú dve analytické aproximačné formuly na výpočet voľnej hranice predčasného uplatnenia.

Poďakovanie

Touto cestou by som sa rád poďakoval svojmu vedúcemu diplomovej práce prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za jeho vedenie, odborné rady a čas, ktorý mi venoval pri písaní tejto diplomovej práce.

Obsah

Úvod

Opcia je zmluva medzi vypisovateľom (predávajúcim) a držiteľom (kupujúcim), ktorá dáva právo, ale nie povinnosť zúčastniť sa konkrétnej finančnej transakcie s vypisovateľom v stanovený dátum alebo pred stanoveným dátumom. Väčšina opčných kontraktov dáva právo kúpiť alebo predať podkladové aktívum za vopred stanovenú cenu nazývanú expiračná cena. Takéto opcie sú vypisované na cenné papiere, akcie, indexy na akcie, výmenné kurzy, ako aj na komodity. Opcia dávajúca právo kúpiť podkladové aktívum sa nazýva kúpna (call) opcia, naopak opcia dávajúca právo predať podkladové aktívum sa nazýva predajná (put) opcia.

Opcie existujú z množstva príčin. Základnými z nich sú: zaisťovanie (hedging) portfólií, kde sa investor chráni proti fluktuáciam ceny podkladového aktíva; špekulácie, kde investor "hazarduje"s náhodnými fluktuáciami ceny podkladového aktíva; vytváranie príjmov, kde investor vypisuje opcie v nádeji, že taká opcia nebude nikdy uplatnená. Opcie sú taktiež užitočné na odhadovanie cien podkladových aktív, čo znamená, že môžu poskytnúť informáciu o budúcich cenách podkladových aktív z pohľadu trhu.

Opcie možno rozdeliť do niekoľkých skupín podľa času a spôsobu uplatnenia. Prvou skupinou sú opcie európskeho typu, ktoré môžu byť uplatnené iba v presne stanovenom čase, nazývanom expiračný čas. Druhou veľkou skupinou sú opcie amerického typu, ktoré na rozdiel od európskych opcií môžu byť uplatnené kedykoľvek do času expirácie. Existuje ešte viacero menej častých opcií, taktiež nazývaných exotickými typmi opcií. Patria sem napríklad perpentuálne opcie (opcie amerického typu bez času expirácie), bermudan opcie (môžu byť uplatnené iba v konečnom počte termínov), ázijské opcie (závisia nielen od ceny podkladového aktíva, ale aj od historického vývoja), bariérové opcie (strácajú platnosť ak cena podkladového aktíva dosiahne určitú bariéru), binárne opcie (výplata je buď jedna alebo nula v závislosti od ceny podkladového aktíva), a mnoho ďalších. Používanie jednotlivých opcií nie je viazané geografickou polohou obchodovania. Teda európske opcie sú obchodované aj v USA a naopak. V USA je najviac zastúpený obchod s opciami amerického typu, ale v ostatných častiach sveta sa obchodovanie s rôznymi typmi opcií líši z krajiny na krajinu. Napríklad vo Francúzku sa obchoduje na MONEP (Marché des Options Negoçiables de Paris), kde väčšina krátkodobých opcií je amerického typu, zatiaľ čo väčšina dlhodobých opcií je európckeho typu. V Japonsku sú opcie obchodované v Osake, viac ako na Tokyo Stock Exchange, kde $99,5\%$ opčných transakcií je európskeho typu. Na belgickej burze BELFOX (Belgian Futures and Options Exchange) sú najviac zastúpene obchody s americkými opciami.

Väčšina opcií obchodovaných na burzách vypláca penažné zisky a nie konkrétne podkladové aktívum. Čiže, ak držiteľ uplatní napríklad kúpnu opciu nedostane podkladové aktívum, ale peniaze, zodpovedajúce aktuálnemu platobnému (pay-off) diagramu. Platobný diagram znázorňuje zisk alebo stratu v závislosti od aktuálnej ceny podkladového aktíva a expiračnej ceny. Rôzne opcie majú rôzne platobné diagramy. Najčastejšie obchodované opcie, nazývané aj jednoduché (vanilla) opcie, majú platobný diagram daný ako maximálnu hodnotu z nuly a rozdielu ceny podkladového aktíva a expiračnej ceny pre kúpnu opciu a ako maximálnu hodnotu z nuly a rozdielu expiračnej ceny a ceny podkladového aktíva pre predajnú opciu.

V 70-tych rokoch napísali Black a Scholes [13] a Merton [14] práce, v ktorých odvodili slávnu Black-Scholesovu formulu, pomocou ktorej boli schopní oceniť jednoduché európske opcie. Túto formulu je možné upraviť na oceňovanie veľkého množstva exotických opcií európskeho typu. Avšak, žiadna takáto formula neexistuje na oceňovanie opcií amerického typu. Ocenenie týchto opcií je omnoho zložitejšie ako oceňovanie európskych opcií, pretože možnosť predčasného uplatnenia psôsobuje, že investor sa musí rozhodovať nielen či uplatniť opciu, ale aj kedy ju uplatniť.

V tejto práci sa budeme zaoberať jedným špecifickým typom opcií nazývaným installment opcie. Pre väčšinu opcií platí, že pri uzavretí kontraktu zaplatí investor vstupný poplatok za opciu, ktorého hodnota by sa mala v bezarbitrážnom svete rovnať očakávanej súčasnej hodnote výplatného diagramu v čase expirácie. Installment opcie majú trochu iné pravidlá. Vstupný poplatok je rozdelený medzi viacero platieb, vyplácaných v pravidelných intervaloch (zvyčajne mesačne, štvrťročne). Ak investor chce tento kontrakt zachovať platný, musí pravidelný poplatok zaplatiť. Ak investor platil všetky poplatky počas trvania kontraktu, vypisovateľ je povinný predať (resp. kúpiť) podkladové aktívum za dohodnutú cenu. Držiteľ má však právo kedykoľvek prestať poplatky platiť, avšak ak tak spraví, kontrak prestáva existovať. Držiteľ tým pádom prichádza o svoje predchádzajúce platby v prospech vypisovateľa. V bezarbitrážnom svete by sa mala očakávaná súčasná hodnota budúcich platieb rovnať očakávanej súčasnej hodnote výplatného diagramu opcie. Pre takéto opcie je celková prémia väčšia ako prémia jednoduchej opcie. To je spôsobené dodatočnou možnosťou držiteľa ukončiť kontrakt predčasne, bez zaplatenia celkovej opčnej prémie. Takýto druh opcie je zaujímavý pre investora, ktorý je ochotný priplatiť za možnosť ukončenia kontraktu v prípade, že jeho pozícia se stáva nevýhodnou.

Vo finančnom svete sa stretávame s množstvom kontraktov pripomínajúcich installment opcie. Príkladom môžu byť zmluvy životného poistenia, kde poistený platí pravidelné poplatky, výmenou za finančnú podporu v zlej životnej situácii. Ďalším príkladom môže byť viacúrovňový kapitálový projekt, počas ktorého treba rozhodovať o tom, či je výhodné v projekte pokračovať alebo projekt zrušiť. Zaujímavým príkladom viacstupňových projektov, opísanom v [15], je vývoj nového liečiva farmaceutickou spoločnosťou. Prvé náklady na výskum a vývoj a neskôr náklady na testovanie liečiva môžu byť považované za poplatky installment opcie. Iný príklad môžeme hľadať v oblasti štátnej vojenskej obrany, kde sú zákonodarcovia často stavaný pred rozhodnutie, či pokračovať vo financovaní projektov alebo nie.

Poznáme viacero druhov installment opcií. Najjednoduchším príkladom takejto opcie je takzvaná zložená opcia, čo je opcia na opciu a môže byť považovaná za installment opciu s dvomi platbami. Installment opcie môžeme deliť podobne ako jednoduché opcie podľa toho či investor chce kúpiť alebo predať podkladové aktívum na kúpne (call) alebo predajné (put) installmet opcie. Taktiež môžu byť delené na installment opcie európskeho typu ak je možné uplatniť opciu iba v expiračnom čase a na installment opcie amerického typu ak je možné uplatniť opciu kedykoľvek do času expirácie. Dôležitým znakom installment opcií je spôsob vyplácania platieb. Ak sú platby vyplácané v pravidelných intervaloch konečný počet krát, hovoríme o diskrétnych installment opciách. Pre takéto opcie nemusí byť poplatok v každý platobný deň rovnaký. Musí byť však vopred stanovený. Existujú však installment opcie, ktorých prémia je vyplácaná spojito v každom čase počas trvania opcie. Takýmto opciám budeme hovoriť spojité installment opcie. Táto práca sa bude zaoberať práve spojitými installment opciami európskeho typu.

Problematikou installment opcií sa zaujíma nemálo popredných vedeckých pracovníkov po celom svete. O tejto problematike bolo napísaných viacero prác, z ktorých spomeniem tie, ktoré boli inšpiráciou k napísaniu tejto práce. Práca [2], v ktorej Alobaidi, Mallier a Deakin využili Laplaceovu transformáciu na odvodenie integrálnej rovnice závislej na voľnej hranici, a následne túto rovnicu skúmali. Asymtotickou analýzou tejto rovnice dokázali popísať správanie voľnej hranice blízko expirácie. Kimura [4] taktiež využil Laplaceovu trasformáciu na výpočet parciálnej diferenciálnej rovnice popisujúcej správanie installment opcií. Na výpočet inverznej Laplaceovej trasformácie využil numerické metódy a tým dokázal vypočítať hodnotu installment opcie ako aj polohu voľnej hranice predčasného uplatnenia. Ciurlia [5] vo svojom článku využíva Fourierovú trasformáciu, pomocou ktorej získal rekurzívnu integrálnu rovnicu pre voľnú hranicu. Na základe týchto výsledkov navrhol univerzálny systém, ktorý zovšeobecňuje existujúce metódy a je schopný riešiť široký rámec monotónnych výplatných funkcií a spojitých platobných plánov. V práci [3] vytvorili Mezentsev a Pomelnikov prehľad installment opcií a popísali základné metódy oceňovania týchto opcií.

1 Matematická formulácia úlohy

Definícia 1. [5] Spojitá installment opcia vypísaná na expiračnú cenu E podkladového aktíva ceny S s maturitou v čase T a so spojitým platobným plánom opísaným platobnou mierou L je finančný derivát definovaný nasledujúcimi pravidlami:

- držiteľ v čase uzavretia kontraktu zaplatí vopred stanovený poplatok a potom spojito vypláca zvyšné prémie v hodnote danej platobnou mierou L za jednotku času počas životnosti opcie, aby si zachoval právo kúpiť (call) alebo predať (put) podkladové aktívum v stanovenom expiračnom čase T (európsky typ) alebo kedykoľvek do času expirácie T (americký typ).

- držiteľ nie je povinný pokračovať v platení prémií do času expirácie. Má právo zastaviť platby, a tým ukončíť kontrakt bez podlžností na oboch stranách.

Poznamenajme, že držiteľ európskej spojitej installment opcie môže ukončiť kontrakt iba vtedy, ak zastaví platby, zatiaľ čo držiteľ americkej installment opcie môže ukončiť kontrakt dvomi spôsobmi. Buď prestane platiť prémie, alebo sa rozhodne opciu uplatniť. Podstatná vlastnosť spojitých installment opcií spočíva v tom, bez ohľadu na typ uplatnenia, že držiteľ má možnosť ukončiť kontrakt kedykoľvek do maturity, čoho dôsledkom je nutnosť poznať takzvanú hranicu predčasného uplatnenia. Je to funkcia závislá od ceny podkladového aktíva a času, udávajúca, či je optimálne prestať platiť prémie a tým ukončiť kontrakt.

1.1 Black-Scholesova rovnica pre oceňovanie installment opcií

[2], [3], [4] Uvažujme štandardný Black-Scholesov model, kde cena opcie je daná geometrickým Brownovým pohybom

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW, \tag{1}$$

kde μ je očakávaný výnos, σ je volatilita aktíva a dW je štandardný Brownov pohyb v riziko-neutrálnom pravdepodobnostnom priestore.

Cena $V = V(S, t, L)$ spojitej installment opcie závisí od času t, od ceny podkladového aktíva S a od platobnej miery L. V čase dt zaplatí držiteľ opcie prémiu Ldt, aby mohol v kontrakte pokračovať. Použitím Itôvej lemy na odvodenie zmeny ceny spojitej installment opcie dostaneme

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - L \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW. \tag{2}$$

Budeme uvažovať portfólio, ktoré obsahuje spojitú installment opciu a $-\Delta$ podkladových akcií

$$\Pi = V - \Delta S.$$

Prírastok hodnoty portfólia môžeme teda vyjadriť nasledovne

$$d\Pi = dV - \Delta dS. \tag{3}$$

Dosadením (1) a (2) do (3) dostaneme

$$d\Pi = \left(r \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - L \right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dW.$$

Aby sme odstránili náhodnú časť rovnice, dosadíme $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$. Tým pádom je portfólio bezrizikové a musí mať výnos r, aby sme zabránili arbitrážnej príležitosti

$$rV - r\frac{\partial V}{\partial S} S = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - L.$$

Nakoniec dostávame nehomogénnu Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu pre oceňovanie spojitých installment opcií.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = L. \tag{4}$$

Táto rovnica je vlastne Black-Scholesova rovnica s pravou stranou L, kde L je platobná miera. Po transformácií času na čas od expirácie $\tau = T - t$ dostaneme

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = L. \tag{5}$$

1.2 Ohraničenia Black-Scholesovej rovnice a hranica predčasného uplatnenia

Uvažujme installment opciu na expiračnú cenu E, ktorej expirácia vyprší v čase T. Ďalej uvažujme, že podkladové aktívum nevypláca žiadne dividendy a držiteľ opcie vypláca platby mierou L. Úroková miera r a volatilita podkladového aktíva σ sú konštantné. Podobne ako v prácach [2] [3], [4] sa pokúsime odvodiť ohraničenia Black-Scholesovej rovnice a podmienky na hranici predčasného uplatnenia.

Môžeme si všimnúť, že platobný diagram installment opcie držanej do maturity je rovnaký ako platobný diagram klasickej európskej opcie, a to $\max(S - E, 0)$ pre call a

$\max(E - S, 0)$ pre put. Dostávame teda koncové ohraničenie v čese expirácie

$$V(S,T) = \begin{cases} \max\{E - S, 0\}, & \text{pre put,} \\ \max\{S - E, 0\}, & \text{pre call.} \end{cases} \tag{6}$$

Rovnica (4) je pre takúto opciu platná v čase $t < T$ $(\tau > 0)$ a za podmienky, že je optimálne pokračovať v platení prémie. To znamená, že ak cena akcie príliš klesne pre call alebo príliš stúpne pre put, tak držiteľ opcie prestane platiť prémiu a kontrakt bude ukončený. Hranica, ktorá udáva, či je optimálne pokračovať v platení prémie, sa nazýva voľná hranica predčasného uplatnenia. Budeme ju označovať $S_f(t)$. Prívlastok "voľná"má preto, lebo jej tvar nepoznáme a musí byť hľadaný spolu s cenou opcie. Našou úlohou je teda vyriešiť rovnicu (4) pri vhodných ohraničeniach na voľnej hranici.

Držiteľ opcie bude platiť prémiu dovtedy, kým čistá súčasná hodnota očakávaného výplatného diagramu je vyššia ako súčasná hodnota budúcich platieb, čo znamená, že opcia bude mať kladnú čistú súčasnú hodnotu. To vedie k ohraničeniu, že cena opcie nesmie byť nižšia ako nula

$$V(S, \tau) \geq 0. \tag{7}$$

Na druhej strane, možnosť nechať kontrakt zaniknúť nás privádza k voľnému ohraničeniu, ktoré rozdeľuje oblasť, kde je optimálne pokračovať v kontrakte, od oblasti, kde je optimálne nechať kontrakt zaniknúť. Toto ohraničenie je v mnohých ohladoch podobné optimálnej hranici predčasného uplatnenia pre americké opcie, skúmanej v prácach [1], [6]. Treba podotknúť, že držiteľ pokračuje v platbách, ak cena podkladového aktíva je nad voľnou hranicou pre call a pod voľnou hranicou pre put.

Napriek tomu, že nepoznáme presný tvar hranice predčasného uplatnenia, vieme sformulovať niekoľko základných vlastností. Po prvé, ak cena akcie dosiahne voľnú hranicu, investor vymení portfólio obsahujúce opciu za nulové portfólio (nechá kontrakt zaniknúť). Takáto podmienka nám hovorí, že hodnota opcie zaniká na voľnej hranici. Ak by sme označili voľnú hranicu ako $S = S_f(\tau)$, potom na voľnej hranici platí

$$V(S_f(\tau), \tau) = 0. \tag{8}$$

Po druhé, vieme odvodiť deltu opcie (deriváciu podľa ceny) na voľnej hranici. Pretože hodnota opcie musí byť podľa [2] hladká spojitá funkcia, na voľnej hranici dostávame

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(\tau), \tau) = 0. \tag{9}$$

Ohraničenie (9) môžeme odvodiť pomocou finančnej úvahy pochádzajúcej od Mertona [12], ktorý túto uváhu využil na odvodenie ohraničenia americkej opcie. Na základe tejto úvahy musí byť cena installment opcie daná ako maximálna hodnota spomedzi všetkých cien installment opcií, ktorých hranica predčasného uplatnenia je nejaká spojitá funkcia času, t.j.

$$V(S,\tau) = \max_{\eta} V(S,t;\eta),$$

kde maximum prebieha cez všetky možné kladné spojité funkcie $\eta : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ a $V(S,t;\eta)$ je cena opcie daná ako riešenie Black-Scholesovej rovnice na časovo premenlivej oblasti $0 < \tau < T$, spĺňajúca terminálovú podmienku a ohraničenie na voľnej hranici $V(\eta(\tau),\tau;\eta) = 0$. Funkcia predčasného uplatnenia installment opcie je potom príslušným argumentom maxima vyššie uvedenej variačnej úlohy. Jedná sa skutočne o variačnú úlohu, pretože hľadáme maximum funkcionálu $\eta \mapsto V(S,\tau;\eta)$ definovaného na nekonečnorozmernom priestore všetkých spojitých funkcií. Nutná podmienka nadobúdania extrému tohoto funkcionálu nám dáva, že Fréchetova derivácia funkcionálu $V(S,\tau;\eta)$, t.j. lineárny operátor $D_\eta V(S,\tau;\eta) : C([0,T]) \to \mathbb{R}$, je nulový v bode $\eta = S_f$. Teda

$$D_\eta V(S,\tau;S_f)\xi = 0, \qquad \text{pre každú funkciu } \xi \in C([0,T]),$$

kde $C([0,T])$ je priestor všetkých spojitých funkcií na intervale $[0,T]$. Nech $\tau \in [0,T)$ je pevne zvolený čas. Kedže pre každú funkciu $\eta \in C([0,T])$ platí $V(\eta(\tau),\tau;\eta) = 0$, potom derivovaním tejto identity podľa funkcie η v smere $\xi \in C([0,T])$ dostaneme pre každé $\tau \in (0,T)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta}0 &= \frac{d}{d\eta}[V(\eta(\tau),\tau;\eta)] \\ &= \frac{\partial V}{\partial S}(\eta(\tau),\tau;\eta)\xi(\tau) + D_\eta V(\eta(\tau),\tau,\eta)\xi = 0. \end{aligned}$$

S využitím identity $D_\eta V(S,\tau;S_f)\xi = 0$ pre argument maxima $\eta = S_f$ potom dostávame $\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(\tau),\tau;S_f)\eta(\tau) = 0$. Funkcia $\xi \in C([0,T])$ bola ľubovoľná, a preto musí platiť, že hranica predčasného uplatnenia installment opcie a cena installment opcie spĺňajú hraničnú podmienku (9)

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(\tau),\tau) = 0$$

Po tretie, poznáme polohu voľnej hranice v čase expirácie $\tau = 0$. Pre oba prípady, call aj put, je to

$$S_f(0) = E. \tag{10}$$

Dá sa to vyvodiť nasledovne. Pre predajnú opciu (put) je výplatný diagram v dobe expirácie $\max(E - S, 0)$, teda ak $S < E$, opcia je v pozícii in-the-money. Očakávaný výnos z in-the-money opcie dostatočne blízko k expirácii presiahne náklady na vyplatenie zostávajúcej prémie. Naopak, ak máme out-of-the-money put opciu ($S > E$), potom ak zoberieme hodnotu opcie ako funkciu času pri fixovanej cene akcie $S > E$, dostaneme, že hodnota opcie aj jej theta (derivácia hodnoty funkcie podľa času) idú k nule, ak sa blížime k expirácii. To znamená, že očakávaný výnos klesá rýchlejšie ako zostávajúce platby. Blízko ku expirácii bude očakávaný výnos z out-of-the-money opcie nižší ako náklady na vyplatenie zostávajúcej prémie. Podobné argumenty môžu byť použité aj pre kúpnu (call) opciu, a preto pre obe platí, že voľná hranica začína na $S = E$ v čase $\tau = 0$. Hodnota platobnej miery L nemá vplyv na polohu voľnej hranice na začiatku intervalu, ale má vplyv na sklon ohraničenia.

Úlohu oceňovania spojitých installment predajných resp. kúpnych opcií môžeme formulovať ako úlohu riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice (5) spolu s ohraničeniami (6), (7), (8), (9), (10) nasledovne

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial \tau} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = L, \\ V(S,0) = \begin{cases} \max\{E - S, 0\}, & \text{pre put}, \\ \max\{S - E, 0\}, & \text{pre call}, \end{cases} \\ V(S,\tau) \leq 0, \\ V(S_f(\tau),\tau) = 0, \qquad S_f(0) = E, \\ \dfrac{\partial V}{\partial S}(S_f(\tau),\tau) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

1.3 Predajné installment opcie

[2]. Po odvodení všeobecnej úlohy oceňovania spojitých installment opcií je potrebné uvažovať kúpne a predajné opcie oddelene. V tejto práci sa budeme zaoberať spojitou predajnou installment opciou európskeho typu.

Pre obyčajnú predajnú opciu je maximálny výnos v čase expirácie rovný E. Ak by čas expirácie išiel do nekonečna $\tau \to \infty$, tak súčasná hodnota tohto výnosu by išla k nule, pretože je diskontovaná bezrizikovou úrokovou mierou r. Rozdielne je to pre installment opcie. Súčasná hodnota pre installment predajnú opciu sa blíži ku kladnej hodnote v tej istej limite. Z toho sa dá vyvodiť, že pre $\tau \to \infty$, voľná hranica predčasného uplatnenia leží na $S = 0$, a ostane na tejto hodnote pokiaľ súčasná hodnota zostávajúcich prémií $(L/r)(1 - e^{-r\tau})$ nebude rovná súčasnej hodnote maximálneho výnosu $Ee^{-r\tau}$. To nastane keď $e^{-r\tau} = L/(L + rE)$, alebo

$$\tau = \tau_* = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{L + rE}{L} \right).$$

Je zrejmé, že ak $L \to \infty$, tak $\tau_* \to E/L \to 0$ a investor nebude nikdy držať takúto opciu. Naopak, ak $L \to 0$, tak $\tau_* \to \infty$ a investor bude vždy držať takúto opciu. Pre $\tau > \tau_*$ je súčasná hodnota zostávajúcich prémií vyššia ako súčasná hodnota maximálneho výnosu, a preto takýto finančný nástroj nebude držať žiaden racionálny investor. Z uvedeného vieme, že pre predajnú installment opciu sa voľná hranica predčasného uplatnenia nachádza medzi $S = 0$, keď $\tau = \tau_*$ a $S = E$, keď $\tau = 0$. Ďalej vieme, že je optimálne pokračovať v platení prémií, ak $S < S_f(\tau)$ a naopak, necháme opciu zaniknúť, ak $S > S_f(\tau)$. Voľná hranica predčasného uplatnenia nie je, narozdiel od americkej opcie, monotónna. Je to spôsobené vplyvom dvoch rôznych faktorov: súčasnou hodnotou očakávaného výnosu a súčasnou hodnotou ostávajúcich prémií. Ak uvažujeme európsku predajnú opciu, ktorej expiračná cena sa rovná cene podkladového aktíva $S = E$, potom ak sa vzďaľujeme od času expirácie, tak hodnota takejto predajnej opcie rastie. Tento rast sa v blízkosti expirácie správa ako $\sqrt{\tau}$. To nám hovorí, že pre $S = E$, hodnota očakávaného výnosu spočiatku rastie rýchlejšie ako hodnota prémií, ktoré treba zaplatiť. Voľná hranica predčasného uplatnenia pre predajnú installment opciu spočiatku stúpa so zvyšujúcim sa τ, ak sa vzďaľujeme od doby expirácie. To znamená, že sa oplatí držať aj čiastočne out-of-the-money opciu. Avšak, aby sa voľná hranica dostala na hodnotu $S = 0$ v čase $\tau = \tau_*$, je potrebné aby v nejakom bode voľná hranica začala klesať. Tento bod bude maximom, čo označíme $S = S_m > E$, a čas, v ktorom sa nadobúda označíme t_m. Od bodu S_m začne voľná hranica klesť až dosiahne hodnotu $S = 0$ v čase $\tau = \tau_*$. Predpokladajme, že voľná hranica pretne $S = E$ v čase τ_c, kde $\tau_* > t_c > t_m > 0$.

2 Voľná hranica predčasného uplatnenia pre americké predajné opcie podľa Zhua

Z úlohy danej parciálnou diferenciálnou rovnicou (5) spolu s ohraničeniami (6), (7), (8), (9), (10) sa pokúsime odvodiť aproximačnú formulu pre výpočet voľnej hranice predčasného uplatnenia (Odsek 3). Za týmto účelom využijeme postup, ktorý vo svojom článku navrhol Somg-Ping Zhu [1] na hľadanie voľnej hranice predčasného uplatnenia amerických predajných opcií. Tento postup je založený na riešení parciálnej diferenciálnej rovnice transformovanej pomocou Laplaceovej transformácie do priestoru komplexnej premennej p a následnom spätnom transformovaní riešenia do priestoru časovej premennej τ. Aby bola rovnica v priestore p riešiteľná explicitne, je potrebné využiť aproximačnú metódu na niektoré ohraničenia. V tejto časti stručne popíšeme postup tohoto riešenia.

V práci [1] bola navrhnutá aproximačná metóda na riešenie úlohy oceňovania americkej predajnej opcie. Hlavným cieľom tejto úlohy je získať aproximačnú formulu pre hranicu predčasného uplatnenia, ktorú by bolo možné následne použiť na výpočet hodnoty takejto opcie. Tento postup sa pokúsime neskôr napodobniť pri hľadaní hranice predčasného uplatnenia pre installment put opciu.

Úlohu oceňovania americkej predajnej opcie môžeme matematicky formulovať ako úlohu vypočítať Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

pri okrajových podmienkach

$$V(S,0) = \max\{E - S, 0\},$$
$$\lim_{S\to\infty} V(S,t) = 0,$$

a podmienkach na voľnej hranici $S_f(t)$

$$V(S_f(t),t) = E - S_f(t),$$
$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = -1,$$

kde $V(S,t)$ je hodnota opcie v čase t a pri cene podkladového aktíva S, E je expiračaná cena, σ je volatilita podkladového aktíva a r je bezriziková úroková miera.

Aby sme tento systém mohli riešiť efektívne, zavedieme bezdimenzionálnu transformáciu premenných. Teda

$$V' = \frac{V}{E} \quad , \quad S' = \frac{S}{E} \quad , \quad \tau' = \tau\frac{\sigma^2}{2} = (T-t)\frac{\sigma^2}{2}.$$

Po dosadení do systému a odstránení všetkých apostrofov (kvôli prehľadnosti) dostávame

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial \tau} + S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \gamma S\dfrac{\partial V}{\partial S} - \gamma V = 0, \\ V(S_f(\tau),\tau) = 1 - S_f(\tau), \\ \dfrac{\partial V}{\partial S}(S_f(\tau),\tau) = -1, \\ \lim\limits_{S\to\infty} V(S,\tau) = 0, \\ V(S,\tau) = \max\{1-S, 0\}, \end{cases} \tag{12}$$

kde $\gamma \equiv \frac{2r}{\sigma^2}$ môžeme považovať za úrokovú mieru vzťahujúcu sa k volatilite podkladového aktíva. Následne definujeme novú funkciu $U(S,\tau)$ ako

$$U(S,\tau) = \begin{cases} V + S - 1, & S < 1 \\ V, & S \geq 1, \end{cases}$$

a prepíšeme systém (12) na nový systém, ktorý sa bude skladať z dvoch parciálnych diferenciálnych rovníc, spolu s príslušnými ohraničeniami.

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial U}{\partial \tau} + S^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \gamma S\dfrac{\partial U}{\partial S} - \gamma U = \gamma, \\ U(S_f(\tau),\tau) = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial S}(S_f(\tau),\tau) = 0, \\ U(S,0) = 0, \end{cases} \qquad S_f \leq S < 1 \tag{13}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial U}{\partial \tau} + S^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \gamma S\dfrac{\partial U}{\partial S} - \gamma U = 0, \\ \lim\limits_{S\to\infty} U(S,\tau) = 0, \\ U(S,0) = 0. \end{cases} \qquad S_f \geq 1 \tag{14}$$

Môžeme si všimnúť, že počiatočná podmienka v (13) je oveľa jednoduchšia ako v systéme (12). Ohraničenia na voľnej hranici $S = S_f(\tau)$ sa stali homogénnymi, avšak za cenu toho, že parciálna diferenciálna rovnica v (13) sa stala nehomogénnou. Tieto zmeny nám uľahčia proces riešenia systému.

Aby sme zachovali C^1 hladkú spojitosť funkcie V v smere premennej S a taktiež C^1 hladkú spojitosť jej derivácie, je potrebné v bode $S = 1$ splniť nasledovné podmienky:

$$\lim_{S \to 1^-} U \qquad = \lim_{S \to 1^+} U, \tag{15}$$

$$\lim_{S \to 1^-} \frac{\partial U}{\partial S} \quad = \lim_{S \to 1^+} \tfrac{\partial U}{\partial S} + 1, \tag{16}$$

kde 1^- značí, že s S sa blížime k 1 zľava a 1^+ značí, že s S sa blížime k 1 sprava.

Teraz využijeme Laplaceovu transformáciu na systém (13)-(16). Základy Laplaceovej transformácie sú spomenuté v Apendixe A. Touto transformáciou prenášame premené z priestoru reálnej časovej premmennej t do priestoru komplexnej premennej p. Funkcie v priestore Laplaceovej premennej p budeme označovať s pruhom. Napríklad, pre funkcie $U(S, \tau)$ a $S_f(\tau)$ dostávame,

$$\mathcal{L}U(S,\tau) = \int_0^\infty e^{-p\tau} U(S,\tau) d\tau = \bar{U}(S,p), \qquad \mathcal{L}S_f(\tau) = \int_0^\infty e^{-p\tau} S_f(\tau) d\tau = \bar{S}_f(p).$$

Po Laplaceovej transformácii sa systém (13)-(16) mení na systém obyčajných diferenciálnych rovníc s príslušnými ohraničeniami. Dostávame

$$\begin{cases} -[p\bar{U} - 0] + S^2 \dfrac{d^2\bar{U}}{dS^2} + \gamma S \dfrac{d\bar{U}}{dS} - \gamma \bar{U} = \dfrac{\gamma}{p}, \\ \bar{U}(p\bar{S}_f, p) = 0, \\ \dfrac{d\bar{U}}{dS}(p\bar{S}_f, p) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} -[p\bar{U} - 0] + S^2 \dfrac{d^2\bar{U}}{dS^2} + \gamma S \dfrac{d\bar{U}}{dS} - \gamma \bar{U} = 0, \\ \lim\limits_{S \to \infty} \bar{U}(S, p) = 0, \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} \bar{U}(1^-, p) = \bar{U}(1^+, p), \\ \dfrac{d\bar{U}}{dS}(1^-, p) = \dfrac{d\bar{U}}{dS}(1^+, p) + \dfrac{1}{p}. \end{cases} \tag{19}$$

Môžeme si všimnúť, že odvodenie Laplaceovej transformácie pre diferenciálne rovnice v (17), pre podmienky spojitosti v (18) a pre limitné ohraničenie v (19) je priamočiare. Avšak, transformácia dvoch ohraničení na voľnej hranici v (13) vyžaduje vhodnú aproximáciu. Táto aproximácia je založená na myšlienke, že ak voľná hranica predčasného uplatnenia sa pohybuje pomaly v porovnaní s vývojom ceny opcie, potom cenu akcie S môžeme fixovať ako konštantu počas Laplaceovej transformácie a môže byť nahradená Laplaceovou transformáciou hranice predčasného uplatnenia $S = S_f$ (t.j. $\mathcal{L}S = \mathcal{L}S_f \Rightarrow \frac{S}{p} = \bar{S}_f$). Teda, ak bude Laplaceova transformácia aplikovaná na ohraničenia s voľnou hranicou $S_f(\tau)$, potom cenu akcie S v

$$\mathcal{L}U(S,\tau) = \int_0^\infty e^{-p\tau} U(S,\tau) d\tau,$$

môžeme nahradiť voľnou hranicou $S_f(\tau)$ a výsledkom bude funkcia závislá iba od parametra p. Preto môžeme ohraničenie $U(S_f(\tau),\tau)$ v pôvodnom priestore časovej premennej τ aproximovať ohraničením $\bar{U}(S,p) = 0$ s $S = p\bar{S}_f$ v priestore Laplaceovej premennej p. Podobne aproximujeme aj druhé ohraničenie na voľnej hranici.

Riešenie diferenciálneho systému (17)-(19) hľadáme v tvare

$$\bar{U} = \begin{cases} D_1 S^{q_1} + D_2 S^{q_2} - \frac{\gamma}{p(p+\gamma)}, & S_f \leq S < 1, \\ D_3 S^{q_1} + D_4 S^{q_2}, & S \geq 1, \end{cases} \tag{20}$$

kde q_1 a q_2 sú korene charakteristickej rovnice homogénnej časti príslušnej diferenciálnej rovnice

$$q_{1,2} = \frac{1-\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)^2 + (p+\gamma)},$$

a D_1, D_2, D_3 a D_4 sú štyri rôzne komplexné konštanty, ktoré spĺňajú všetky ohraničenia. Pre jednoduchosť môžeme konštanty q_1 a q_2 písať nasledovne

$$q_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 + (p+\gamma)} = b \pm \sqrt{p + a^2},$$

kde $a = \frac{1+\gamma}{2}$ a $b = \frac{1-\gamma}{2}$. Môžeme si všimnúť, že ak γ je v intervale $(0,\infty)$, potom a je vždy kladné a b môže byť kladné aj záporné. V skutočnosti sa b nachádza v intervale $(-\infty, \frac{1}{2})$. Naviac, medzi a a b sú nasledujúce vzťahy

$$a + b = 1, \qquad a - b = \gamma, \qquad a^2 = b^2 + \gamma.$$

Dá sa ukázať, že pre vhodne zvolené μ v inverznej Laplaceovej transformácii je reálna časť q_1 vždy kladná a reálna časť q_2 je vždy záporná. Preto D_3 musí byť nulové, aby bolo splnené limitné ohraničenie v (19).

Splnenie ohraničení na voľnej hranici a podmienok spojitosti vedie k sústave algebraických rovníc

$$\begin{aligned}
&D_1(p\bar{S}_f)^{q_1} + D_2(p\bar{S}_f)^{q_2} = \frac{\gamma}{p(p+\gamma)},\\
&D_1q_1(p\bar{S}_f)^{q_1-1} + D_2q_2(p\bar{S}_f)^{q_2-1} = 0,\\
&D_1(1)^{q_1} + D_2(1)^{q_2} - \frac{\gamma}{p(p+\gamma)} = D_4,\\
&D_1q_1(1)^{q_1} + D_2q_2(1)^{q_2} = D_4q_2(1)^{q_2} + \frac{1}{p}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Pre túto sústavu (na rozdiel od sústavy (41) v odseku 3.2) existuje presné analytické riešenie. Teda optimálna hranica predčasného uplatnenia pre americkú predajnú opciu v Laplaceovom priestore je

$$\bar{S}_f = \frac{1}{p}\left[\frac{\gamma q_2}{\gamma q_2 - (p+\gamma)}\right]^{\frac{1}{q_1}}. \tag{22}$$

Výraz (22) je z hľadiska štúdia amerických opcií dôležitý, aj napriek faktu, že je závislý od Laplacovej premennej p. Ak sa podarí invertovať tento výraz naspäť do priestoru časovej premennej τ, dostali by sme analytické vyjadrenie pre hranicu predčasného uplatnenia, a teda problém ocenenia americkej put opcie by sa stal podobný problému ocenenia európskej put opcie. Úlohou teda ostáva nájsť inverznú trasformáciu výrazu (22).

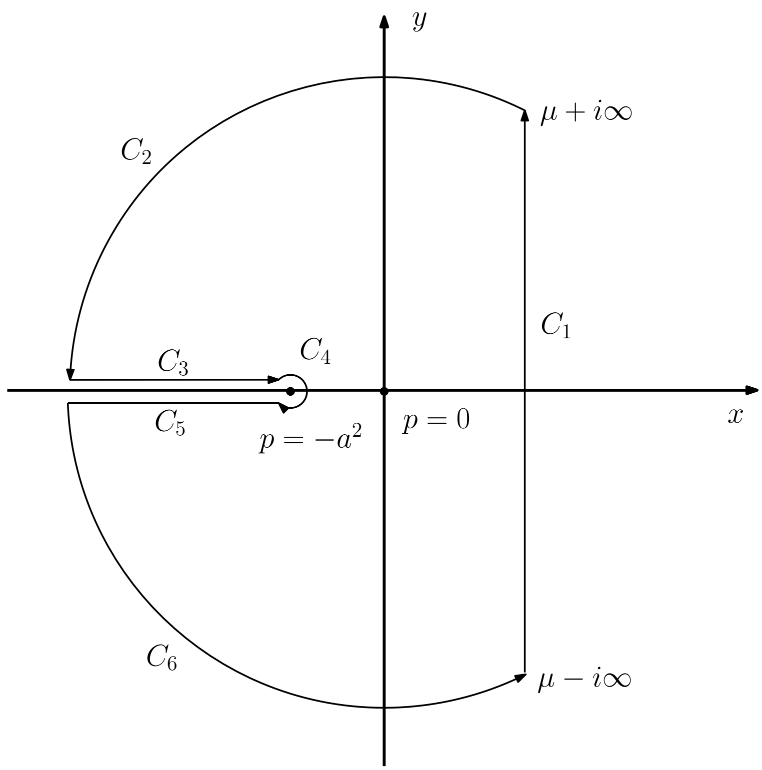
Z definície inverznej Laplaceovej transformácie a z (22) dostávame hranicu predčasného uplatnenia v časovej premennej τ

$$\begin{aligned}
S_f(\tau) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}\frac{e^{p\tau}}{p}\left[\frac{\gamma q_2}{\gamma q_2-(p+\gamma)}\right]^{\frac{1}{q_1}} dp\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty}\frac{e^{p\tau}}{p}\exp\left\{\frac{-\ln\left[1-\frac{(p+\gamma)}{\gamma(b-\sqrt{p+a^2})}\right]}{b+\sqrt{p+a^2}}\right\} dp,
\end{aligned} \tag{23}$$

kde $a = \frac{1+\gamma}{2}$ a $b = \frac{1-\gamma}{2}$ Aby Laplaceova trasformácia tejto funkcie existovala, je nutné aby $\bar{S}_f(p)$ bola analytická na pravo od priamky $\mathrm{Re}(p) = \mu$, kde μ je vhodne zvolené kladné číslo. Pre integrovanú funkciu, okrem vetvy končiacej v bode $p = -a^2$, existuje jeden jednoduchý pól pre $p = 0$. Ďalej potrebujeme zvoliť μ tak, aby $\mathrm{Re}(q_1) > 0$ a $\mathrm{Re}(q_2) < 0$. Platí, že na splnenie týchto podmienok stačí vybrať

$$\mu > 0.$$

Invertovať výraz (23) pomocou bežných analytických a numerických metód je takmer nemožné. Preto Zhu vymyslel nasledujúci postup. Aby sme vypočítali integrál (23), zostrojíme uzavretú krivku tak, ako je naznačené na obrázku 1. C_1 je priamka prechádzajúca bodom $\mathrm{Re}(p) = \mu$, kde μ je zvolené kladné číslo. C_2 a C_6 sú dve časti veľkého kruhu s polomerom R blížiacim sa k nekonečnu. C_4 je naopak kruh s nekonečne malým polomerom a stredom v bode $p = -a^2$. C_3 je priamka spájajúca koniec C_2 a začiatok C_4 a je umiestnená tesne nad zápornou reálnou osou. C_5 je priamka spájajúca koniec C_4 a začiatok C_6 a je umiestnená tesne pod zápornou reálnou osou. Smer integrácie je proti smeru hodinových ručičiek, ako je znázornené šípkami na obrázku 1.



Obr. 1: Cyklus použitý na výpočet inverznej Laplaceovej trasformácie

Podľa rezíduovej vety 8, máme

$$\sum_{j=1}^{6} \int_{C_j} e^{p\tau} \bar{S}_f(p) dp = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} \{e^{p\tau} \bar{S}_f(p)\}$$
$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} \left\{ \frac{e^{p\tau}}{p} \exp\left\{ \frac{-\ln\left[1 - \frac{(p+\gamma)}{\gamma(b-\sqrt{p+a^2})}\right]}{b+\sqrt{p+a^2}} \right\} \right\}, \tag{24}$$

kde n je celkový počet singulárnych bodov vo vnútri uzavretej krivky $C_1 - C_6$ a $\mathrm{Res}_{p=p_k}\{.\}$ je rezíduum komplexnej funkcie vo vnútri zložených zátvoriek v bode $p = p_k$. Integrál prislúchajúci $j = 1$ na ľavej strane (24) je integrál, ktorý potrebujeme vypočítať, aby sme dostali inverznú Laplaceovu transformáciu $\bar{S}_f$, tak ako je definované v (23).

Dá sa ukázať, že ak $|p| \to \infty$, potom $|e^{p\tau}\bar{S}_f(p)| \to 0$. Preto, podľa Jordanovej lemy, sa integrály na C_2 a C_6 vynulujú ak $R \to 0$. Takisto, integrál na C_4 sa vynuluje ak polomer C_4 dosiahne nulu, pretože $p = -a^2$ nie je jednoduchý pól integrovanej funkcie $e^{p\tau}\bar{S}_f(p)$.

Funkcia má iba jeden izolovaný jednoduchý pól v bode $p = 0$. Rezíduum funkcie $e^{p\tau}\bar{S}_f(p)$ v tomto bode môžeme vyjadriť ako

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\{e^{p\tau}\bar{S}_f(p)\} = \frac{\gamma}{1+\gamma}. \tag{25}$$

Jediné netriviálne integrály, ktoré je treba vypočítať sa nachádzajú na priamkach C_3 a C_5. Na C_3, $p+a^2 = \rho e^{i\pi}$ a $\sqrt{p+a^2} = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{\rho}$. Na druhej strane, na C_5, $p+a^2 = \rho e^{-i\pi}$ a $\sqrt{p+a^2} = \sqrt{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{\rho}$. Dôsledkom toho je, že sa vyruší reálna časť integrovaných funkcií na C_3 a C_5, a teda dostávame

$$I_3 + I_5 = 2ie^{-a^2\tau}\int_0^\infty \frac{e^{-\rho\tau}}{p+a^2}\,\mathrm{Im}\left\{\exp\left[\frac{-\ln(1+\frac{b-i\sqrt{\rho}}{\gamma})}{b-i\sqrt{\rho}}\right]\right\}dp, \tag{26}$$

kde $\mathrm{Im}\{.\}$ je imaginárna časť komplexnej funkcie v zložených zátvorkách.

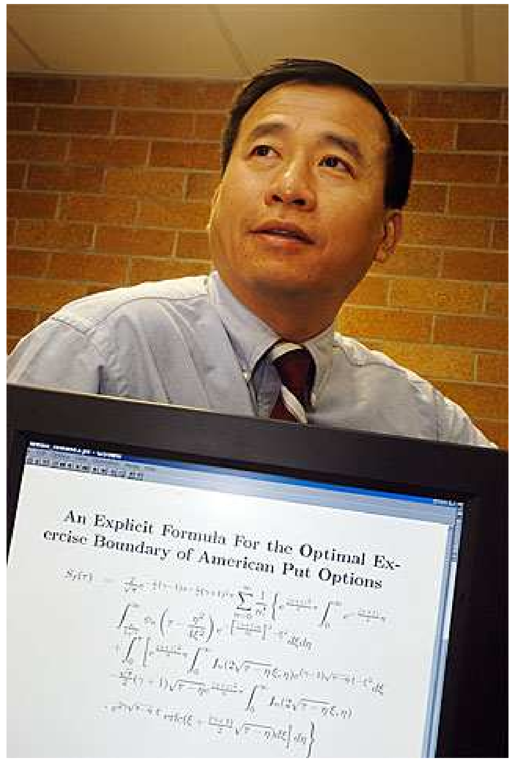
Po vydelení oboch strán rovnice (26) hodnotou $2\pi i$ a dosadením výsledkov do rovníc (23) a (24), dostávame aproximačnú analytickú formulu pre optimálnu hranicu predčasného uplatnenia S_f

$$S_f(\tau) = \frac{\gamma}{1+\gamma} + \frac{e^{-a^2\tau}}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\tau\rho}}{a^2+\rho}e^{-f_1(\rho)}\sin[f_2(\rho)]dp, \tag{27}$$

kde

$$f_1(\rho) \;= \tfrac{1}{b^2+\rho}\left[b\ln\left(\tfrac{\sqrt{a^2+\rho}}{\gamma}\right) + \sqrt{\rho}\tan^{-1}\left(\tfrac{\sqrt{\rho}}{a}\right)\right], \tag{28}$$

$$f_2(\rho) \;= \tfrac{1}{b^2+\rho}\left[\sqrt{\rho}\ln\left(\tfrac{\sqrt{a^2+\rho}}{\gamma}\right) - b\tan^{-1}\left(\tfrac{\sqrt{\rho}}{a}\right)\right]. \tag{29}$$



Obr. 2: Zhu a jeho formula na výpočet voľnej hranice pre americké opcie

3 Riešenie voľnej hranice predčasného uplatnenia installment put opcií

3.1 Prípravné úpravy

V tejto časti sa pokúsime aplikovať postup z predchádzajúceho odseku na výpočet hranice predčasného uplatnenia pre installment put opcie. Na efektívne riešenie systému (11) najprv použijeme substitúciu premenných na bezrozmerné premenné. Substitúcia vyzerá nasledovne:

$$V' = \frac{V}{E}, \qquad S' = \frac{S}{E}, \qquad \tau' = \tau\frac{\sigma^2}{2}.$$

Po dosadení substitúcie do pôvodneho systému a odstránení všetkých apostrofov (kvôli prehľadnosti) dostaneme bezrozmerný systém

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial \tau} + S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \gamma S\dfrac{\partial V}{\partial S} - \gamma V - \gamma\dfrac{L}{rE} = 0, \\ V(S,0) = \max\{1-S, 0\}, \qquad S_f(0) = 1, \\ V(S_f(\tau), \tau) = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial S}(S_f(\tau), \tau) = 0, \\ \lim\limits_{S\to\infty} V(S,\tau) = 0, \end{cases} \tag{30}$$

kde $\gamma = \frac{2r}{\sigma^2}$ môže byť považovaná za relatívnu úrokovú mieru vzťahujúcu sa na volatilitu podkladového aktíva. Z diferenciálneho systému vidno, že riešenie bude závislé na troch parametroch. Sú to relatívna úroková miera γ, bezriziková úroková miera r a bezrozmerný totálny čas, $\tau_{exp} = T\frac{\sigma^2}{2}$, od počiatočného času $t = 0$ po expiračný čas T opcie.

Ak definujeme novú funkciu $U(S,\tau)$ ako

$$U(S,\tau) = \begin{cases} V + S - 1, & S < 1, \\ V, & S \geq 1, \end{cases}$$

tak diferenciálny systém (30) môžeme prepísať nasledovne

$$
\begin{cases}
-\frac{\partial U}{\partial \tau} + S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \gamma S \frac{\partial U}{\partial S} - \gamma U - \gamma(1 + \frac{L}{rE}) = 0 \\
U(S,0) = 0 \\
U(S_f(\tau),\tau) = S_f(\tau) - 1 \\
\frac{\partial U}{\partial S}(S_f(\tau),\tau) = 1
\end{cases}
\qquad \text{pre } S < 1, \tag{31}
$$

$$
\begin{cases}
-\frac{\partial U}{\partial \tau} + S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \gamma S \frac{\partial U}{\partial S} - \gamma U - \gamma \frac{L}{rE} = 0 \\
U(S,0) = 0 \\
U(S_f(\tau),\tau) = 0 \\
\frac{\partial U}{\partial S}(S_f(\tau),\tau) = 0 \\
\lim_{S \to \infty} U(S,\tau) = 0
\end{cases}
\qquad \text{pre } S > 1, \tag{32}
$$

Všimnime si, že počiatočná podmienka v novovzniknutých diferenciálnych systémoch je teraz oveľa jednoduchšia ako podmienka v systéme (30), avšak v prvom systéme sa stala okrajová podmienka nehomogénnou. Tak isto sa zmenila aj parciálna diferenciálna rovnica, ktorej pribudol ďalší nehomogénny člen. V druhom systéme nám na rozdiel od americkej predajnej opcie ostanú ohraničenia na voľnej hranici, pretože voľná hranica nie je monotónna a spočiatku stúpa. Teda voľná hranica sa nachádza aj v intervale $1 < S < S_m/E$.

Funkcia V musí byť C^1 hladká funkcia premennej S. Preto potrebujeme zabezpečiť C^1 hladkosť v bode $S = 1$. Musíme preto zaviesť nasledujúce podmienky hladkej spojitosti

$$
\lim_{S \to 1^-} U = \lim_{S \to 1^+} U, \tag{33}
$$

$$
\lim_{S \to 1^-} \frac{\partial U}{\partial S} = \lim_{S \to 1^+} \frac{\partial U}{\partial S}, \tag{34}
$$

kde 1^- značí, že s S sa blížime k 1 zľava a 1^+ značí, že s S sa blížime k 1 sprava.

Vzniknutý systém sa pokúsime riešiť použitím Laplaceovej transformácie.

3.2 Laplaceová trasformácia úlohy oceňovania kúpnych installment opcií

V tejto časti transformujeme systém (31)-(34) pomocou Laplaceovej transformácie. Transformované funkcie budeme označovať s pruhom. Pre hodnotu opcie $U(S,\tau)$ a optimálnu hranicu predčasného uplatnenia $S_f(\tau)$ zavedieme Laplaceovu transformáciu nasledovne:

$$\mathcal{L}U(S,\tau) = \int_0^\infty e^{-p\tau} U(S,\tau) d\tau = \overline{U}(S,p),$$

$$\mathcal{L}S_f(\tau) = \int_0^\infty e^{-p\tau} S_f(\tau) d\tau = \overline{S}_f(p).$$

Po transformovaní systému (31)-(34) Laplaceovou transformáciou dostaneme nasledujúci systém v priestore nového parametra p:

$$\begin{cases} -(p+\gamma)\overline{U} + S^2 \dfrac{d^2\overline{U}}{dS^2} + \gamma S \dfrac{d\overline{U}}{dS} - \dfrac{\gamma}{p}(1 + \dfrac{L}{rE}) = 0 \\ \overline{U}(p\overline{S}_f, p) = \overline{S}_f - \dfrac{1}{p} \\ \dfrac{d\overline{U}}{dS}(p\overline{S}_f, p) = \dfrac{1}{p} \end{cases} \quad \text{pre } S < 1, \tag{35}$$

$$\begin{cases} -(p+\gamma)\overline{U} + S^2 \dfrac{d^2\overline{U}}{dS^2} + \gamma S \dfrac{d\overline{U}}{dS} - \dfrac{\gamma L}{prE} = 0 \\ \overline{U}(p\overline{S}_f, p) = 0 \\ \dfrac{d\overline{U}}{dS}(p\overline{S}_f, p) = 0 \\ \lim S \to \infty \overline{U}(S,p) = 0 \end{cases} \quad \text{pre } S > 1, \tag{36}$$

$$\begin{cases} \overline{U}(1^-, p) = \overline{U}(1^+, p) \\ \dfrac{d\overline{U}}{dS}(1^-, p) = \dfrac{d\overline{U}}{dS}(1^+, p) + \dfrac{1}{p}. \end{cases} \tag{37}$$

Odvodenie Laplaceovej transformácie diferenciálnych rovníc, podmienok hladkej spojitosti a limitnej podmienky je priamočiare. Problém nastáva pri transformovaní ohraničení na voľnej hranici. Tu využijeme rovnakú techniku ako v odseku 2.

Pri prevedení Laplaceovej transformácie na ohraničenie s voľnou hranicou predčasného uplatnenia $S_f(\tau)$ jednoducho nahradíme S vo vzorci

$$\mathcal{L}U(S,\tau) = \int_0^\infty e^{-p\tau} U(S,\tau) d\tau,$$

hranicou predčasného uplatnenia $S_f(\tau)$. Výsledkom je funkcia od premennej p. Teda, ak zafixujeme S ako konštantu počas Laplaceovej transformácie, a potom nahradíme $S = S_f(\tau)$ dostaneme aproximáciu ohraničenia na voľnej hranici v Laplaceovom priestore premennej p (t.j., $\mathcal{L}S = \mathcal{L}S_f(\tau) \Rightarrow \frac{S}{p} = \bar{S}_f$). Tým pádom ohraničenie na voľnej hranici $U(S_f(\tau),\tau) = S_f(\tau) - 1$, môžeme aproximovať pomocou $\overline{U}(p\overline{S}_f, p) = \overline{S}_f - \frac{1}{p}$. Rovnaký postup použijeme na odvodenie ohraničenia na volnej hranici $\frac{d\overline{U}}{dS}(p\overline{S}_f, p) = \frac{1}{p}$.

Riešenie systému (35)-(37) hľadáme v tvare

$$\overline{U}(S,p) = \begin{cases} D_1 S^{q_1} + D_2 S^{q_2} - \frac{\gamma}{p(p+\gamma)}\left(1 + \frac{L}{rE}\right) & , S \le 1, \\ D_3 S^{q_1} + D_4 S^{q_2} - \frac{\gamma L}{prE(p+\gamma)} & , 1 \le S, \end{cases} \tag{38}$$

kde q_1 a q_2 sú korene charakteristickej rovnice homogénnej časti príslušných rovníc

$$q_{1,2} = \frac{1-\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)^2 + (p+\gamma)}, \tag{39}$$

a kde D_1, D_2, D_3 a D_4 sú ľubovoľné komplexné konštanty, pre ktoré systém spĺňa všetky ohraničenia. Výraz (39) môžeme pre zjednodušenie napísať v tvare

$$q_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 + (p+\gamma)} = b \pm \sqrt{p + a^2}, \tag{40}$$

kde $a = \frac{1+\gamma}{2}$ a $b = \frac{1-\gamma}{2}$. Môžeme si všimnúť, že keď sa γ nachádza v intervale $(0,\infty)$, a ostáva stále kladné číslo, ale b môže byť aj kladné aj záporné. V skutočnosti sa b nachádza v intervale $(\frac{1}{2}, -\infty)$. Vzťah medzi hodnotami a a b je nasledovný

$$a + b = 1, \qquad a - b = \gamma, \qquad a^2 = b^2 + \gamma.$$

Dosadením všeobecného riešenia do počiatočnej podmienky, ako aj do podmienok na voľnej hranici a podmienok hladkej spojitosti, dostaneme sústavu nasledujúcich algebraických rovníc:

$$\begin{aligned} & D_1(p\overline{S}_f)^{q_1} + D_2(p\overline{S}_f)^{q_2} = \overline{S}_f - \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{p(p+\gamma)}\left(1 + \frac{L}{rE}\right), \\ & q_1 D_1(p\overline{S}_f)^{q_1-1} + q_2 D_2(p\overline{S}_f)^{q_2-1} = \frac{1}{p}, \\ & D_3(p\overline{S}_f)^{q_1} + D_4(p\overline{S}_f)^{q_2} = \frac{\gamma L}{prE(p+\gamma)}, \\ & q_1 D_3(p\overline{S}_f)^{q_1-1} + q_2 D_4(p\overline{S}_f)^{q_2-1} = 0, \\ & D_1 + D_2 = D_3 + D_4 + \frac{\gamma}{p(p+\gamma)}, \\ & q_1 D_1 + q_2 D_2 = q_1 D_3 + q_2 D_4 + \frac{1}{p}. \end{aligned} \tag{41}$$

Riešenie týchto rovníc vedie k nelineárnej rovnici

$$A(p)(p\bar{S}_f)^{q_1} + B\bar{S}_f + C(p) = 0, \tag{42}$$

kde

$$A(p) = \frac{1}{p} - \frac{q_2\gamma}{p(p+\gamma)},$$
$$B = q_2 - 1,$$
$$C(p) = -\frac{q_2}{p+\gamma}.$$

Ak $\alpha = p\bar{S}_f$, rovnicu môžeme prepísať do tvaru

$$A'(p)\alpha^{q_1} + B'\alpha + C'(p) = 0, \tag{43}$$

kde

$$A'(p) = pA(p) = 1 - \frac{q_2\gamma}{p+\gamma},$$
$$B' = B = q_2 - 1,$$
$$C'(p) = pC(p) = -\frac{q_2 p}{p+\gamma}.$$

3.3 Aproximačné riešenie voľnej hranice predčasného uplatnenia v priestore Laplaceovej premennej

Pre nelineárnu rovnicu (43) neexistuje analytická formula riešenia. Preto je nutné nahradiť toto riešenie vhodnou aproximáciou. Pre túto prácu sme navrhli dve aproximácie. Prvá predpokladá, že člen $A'(p)\alpha^{q_1}$ v rovnici (43) je zanedbateľne malý v porovnaní so zvyškom rovnice. Dostaneme tak približné riešenie v tvare

$$\alpha = -\frac{C'(p)}{B'} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{S}_f(p) = -\frac{C'(p)}{pB'}. \tag{44}$$

Druhá aproximácia je akousi ďalšou iteráciou predošlého riešenia. Ak za α vo výraze $A'(p)\alpha^{q_1}$ dosadíme prvú aproximáciu, dostaneme druhú aproximáciu

$$\alpha = -\frac{A'(p)\left(-\frac{C'(p)}{B'}\right)^{q_1} + C'(p)}{B} \Rightarrow \bar{S}_f(p) = -\frac{A'(p)\left(-\frac{C'(p)}{B'}\right)^{q_1} + C'(p)}{pB}. \tag{45}$$

3.4 Inverzná Laplaceova transformácia úlohy oceňovania predajných installmet opcií

V tejto kapitole sa pokúsime previesť hranicu predčasného uplatnenia z priestoru Laplaceovej premennej p do priestoru časovej premennej τ. Na tento účel využijeme inverznú Laplceovu transformáciu. Budeme napodobnovať postup Song-Ping Zhua [1], ktorý je opísaný v odseku 2.

3.4.1 Prvá aproximácia

Najprv budeme pracovať s prvou aproximáciou riešenia $\bar{S}_f(p)$ danou výrazom (44). Úlohou je vypočítať inverznú transformáciu hranice predčasného uplatnenia v priestore Laplaceovej premennej p, a teda vypočítať integrál

$$\begin{aligned} S_f(\tau) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{p\tau}\bar{S}_f(p)dp \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \frac{e^{p\tau}}{(p+\gamma)}\frac{(b-\sqrt{p+a^2})}{(-a-\sqrt{p+a^2})}dp \\ &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\gamma}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \frac{\psi(p,\tau)}{p} - \frac{\psi(p,\tau)}{p+\gamma}dp \\ &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\gamma}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \frac{\psi(p,\tau)}{p}dp - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\gamma}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \frac{\psi(p,\tau)}{p+\gamma}dp, \end{aligned} \tag{46}$$

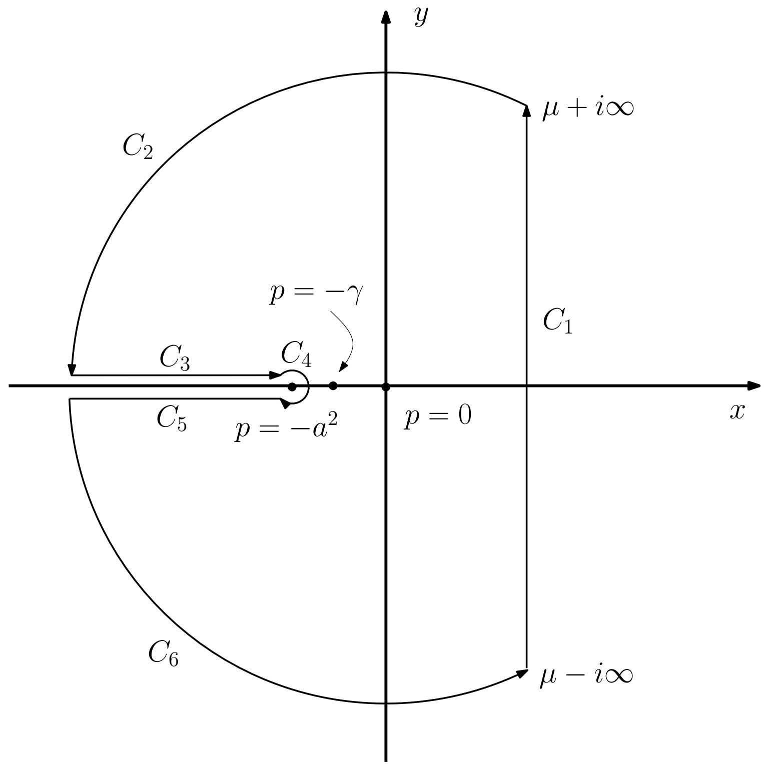
kde $\psi(p,\tau) = e^{p\tau}(\sqrt{p+a^2}-a)(\sqrt{p+a^2}-b)$. Integrál v (46) sme rozložili na dva integrály, ktoré budeme počítať oddelene. Sú to

$$I_1 = \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \frac{\psi(p,\tau)}{p}dp, \tag{47}$$

$$I_2 = \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \frac{\psi(p,\tau)}{p+\gamma}dp. \tag{48}$$

Na výpočet integrálov takéhoto typu potrebujeme určitý matematický aparát definovaný v Apendixe B. Funkcia v I_1 (resp. I_2) má iba jeden singulárny bod $p = 0$ (resp. $p = -\gamma$). Tento bod je navyše pól prvého rádu. Taktiež funkcia v I_1 aj v I_2 má jeden bod vetvenia pre $p = -a^2$. Je jednoduché ukázať, že $-a^2 < -\gamma < 0$.

Zostrojíme uzavretú krivku, po ktorej budeme integrovať naše funkcie s použitím Cauchyho reziduovej vety, tak ako v práci Zhua [1]. Krivka je zložená zo šiestich častí tak, ako je znázornené na obrázku 3. C_1 je komplexná priamka prechádzajúca bodom $\text{Re}(p) = \mu$, kde μ je vhodne zvolené kladné číslo. C_2 a C_6 sú dve časti veľkého kruhu so stredom v bode $p = 0$ a polomerom blížiacim sa k nekonečnu. C_4 je kruh so stredom v bode $p = -a^2$ a nekonečne malým polomerom. C_3 je polpriamka spájajúca koniec krivky C_2 a začiatok krivky C_4 a je umiestnená tesne nad zápornú reálnu os. C_5 je naopak polpriamka spájajúca koniec C_4 a začiatok C_6 a je umiestnená tesne pod zápornú reálnu os. Smer integrácie na tejto uzavretej krivke je proti smeru hodinových ručičiek, tak ako znázorňujú šípky na obrázku 3.



Obr. 3: Cyklus použitý na výpočet inverznej Laplaceovej trasformácie

Ako prvé budeme počítať integrál I_1. Z Cauchyho rezíduovej vety platí, že

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6} \int_{C_i} \frac{\psi(p,\tau)}{p} dp &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} \left\{ \frac{\psi(p,\tau)}{p} \right\} \\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{p=0} \left\{ \frac{e^{p\tau}}{p} (\sqrt{p+a^2} - a)(\sqrt{p+a^2} - b) \right\}.\end{aligned} \tag{49}$$

kde n je celkový počet singulárnych bodov vo vnútri uzavretej krivky $C_1 - C_6$ a $\mathrm{Res}_{p=p_k}\{.\}$ je rezíduum komplexnej funkcie vo vnútri zložených zátvoriek v bode $p = p_k$. Integrál prislúchajúci $j = 1$ na ľavej strane (49) je integrál I_1.

Rezíduum na pravej strane rovnice (49) je iba jediné, lebo funkcia má len jeden singulárny bod $p = 0$. Tento bod je jednoduchý pól funkcie $\frac{\psi(p,\tau)}{p}$, a preto môžeme rezíduum vyjadriť ako

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\left\{\frac{\psi(p,\tau)}{p}\right\} = \lim_{p\to 0}(p-0)\frac{\psi(p,\tau)}{p} = \psi(0,\tau)$$
$$= e^{0\tau}(\sqrt{0+a^2}-a)(\sqrt{0-a^2}-b) \tag{50}$$
$$= (|a|-a)(|a|-b) = \begin{cases} 0, & a \geq 0, \\ 2a, & a < 0. \end{cases}$$

Keďže $a = \frac{1+\gamma}{2}$ je vždy kladné (pretože $\gamma = \frac{2r}{\sigma^2} > 0$), máme

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\left\{\frac{\psi(p,\tau)}{p}\right\} = 0. \tag{51}$$

Dá sa ukázať, že ak $|p| \to \infty$, potom $\left|\frac{\psi(p,\tau)}{p}\right| \to 0$. Preto sa integráli na C_2 a C_6 vynulujú. Taktiež, intergrál na C_4 je nulový, ak s polomerom C_4 ideme k nule, pretože $p = -a^2$ nie je jednoduchý pól integrovanej funkcie.

Ostáva nám vypočítať jediné netriviálne integrály na polpriamkach C_3 a C_5. Ak označíme $\Phi(p) = [(\sqrt{p+a^2}-a)(\sqrt{p+a^2}-b)]/p$, potom

$$J_1 = \int_{C_3} \frac{\psi(p,\tau)}{p}dp = \int_{C_3} e^{p\tau}\frac{(\sqrt{p+a^2}-a)(\sqrt{p+a^2}-b)}{p}dp = \int_{-\infty+i\varepsilon}^{-a^2+i\varepsilon} e^{p\tau}\Phi(p)dp,$$
$$J_2 = \int_{C_5} \frac{\psi(p,\tau)}{p}dp = \int_{C_5} e^{p\tau}\frac{(\sqrt{p+a^2}-a)(\sqrt{p+a^2}-b)}{p}dp = \int_{-a^2-i\varepsilon}^{-\infty-i\varepsilon} e^{p\tau}\Phi(p)dp.$$

Na polpriamke C_3 zavedieme substitúciu $p + a^2 = -\rho + i\varepsilon$, teda $p = -\rho - a^2 + i\varepsilon$. Touto substitúciou posunieme začiatok polpriamky C_3 do nuly a komplexné hranice integrovania sa zmenia na reálne. Dostaneme

$$J_1 = \int_{\infty}^{0} e^{-\rho\tau-a^2\tau+i\varepsilon\tau}\Phi(-\rho-a^2+i\varepsilon)(-d\rho)$$
$$= e^{-a^2\tau}\int_0^{\infty} e^{-\rho\tau}(\cos\varepsilon\tau + i\sin\varepsilon\tau)\Phi(-\rho-a^2+i\varepsilon)d\rho. \tag{52}$$

Na polpriamke C_5 zavedieme substitúciu $p+a^2 = -\rho-i\varepsilon$, teda $p = -\rho-a^2-i\varepsilon$. Dostaneme

$$J_2 = \int_0^{\infty} e^{-\rho\tau-a^2\tau-i\varepsilon\tau}\Phi(-\rho-a^2-i\varepsilon)(-d\rho)$$
$$= -e^{-a^2\tau}\int_0^{\infty} e^{-\rho\tau}(\cos\varepsilon\tau - i\sin\varepsilon\tau)\Phi(-\rho-a^2-i\varepsilon)d\rho. \tag{53}$$

Integrály J_1 a J_2 sčítame

$$J_1 + J_2 = e^{-a^2\tau} \int_0^\infty e^{-\rho\tau} \cos\varepsilon\tau[\Phi(-\rho - a^2 + i\varepsilon) - \Phi(-\rho - a^2 - i\varepsilon)] + \\ + ie^{-\rho\tau} \sin\varepsilon\tau[\Phi(-\rho - a^2 + i\varepsilon) + \Phi(-\rho - a^2 - i\varepsilon)]d\rho. \tag{54}$$

Všimnime si, že komplexné čísla $-\rho - a^2 + i\varepsilon$ a $-\rho - a^2 - i\varepsilon$ sú navzájom komplexne združené. Teraz vyslovíme a dokážeme vetu, ktorú využijeme pri výpočte (54).

Veta 1. *Pre funkciu* $\Phi(z) = \frac{1}{z-a^2}(\sqrt{z} - a)(\sqrt{z} - b)$ *platí*

$$\mathrm{Re}\{\Phi(z)\} = \mathrm{Re}\{\Phi(\bar{z})\},$$
$$\mathrm{Im}\{\Phi(z)\} = -\,\mathrm{Im}\{\Phi(\bar{z})\},$$

kde z *je komplexné číslo a* $\bar{z}$ *je číslo komplexne združené k* z*.*

Dôkaz. Napíšme komplexné číslo z v polárných súradniciach $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Budeme počítať so z v tomto tvre. Odmocnina z komplexného čísla z je potom $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}(\cos\varphi/2 + i\sin\varphi/2)$

$$\Phi(z) = \frac{\left[\sqrt{|z|}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}) - a\right]\left[\sqrt{|z|}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}) - b\right]}{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) - a^2}$$
$$= \left(\frac{K + iL}{M + iN}\right) \cdot \left(\frac{M - iN}{M - iN}\right) = \left(\frac{KM + LN}{M^2 + N^2}\right) - i\left(\frac{KN - LM}{M^2 + N^2}\right),$$

kde

$$K = |z|\cos\varphi - (a+b)\sqrt{|z|}\cos\frac{\varphi}{2} + ab, \tag{55}$$
$$L = 2|z|\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} - (a+b)\sqrt{|z|}\sin\frac{\varphi}{2}, \tag{56}$$
$$M = |z|\cos\varphi - a^2, \tag{57}$$
$$N = |z|\sin\varphi. \tag{58}$$

To isté spravíme pre $\Phi(\bar{z})$, kde $\bar{z}$ v polárnych súradniciach je $\bar{z} = |\bar{z}|(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ a odmocnina zo $\bar{z}$ je $\sqrt{\bar{z}} = \sqrt{|\bar{z}|}(\cos\varphi/2 - i\sin\varphi/2)$.

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{z}) &= \frac{1}{\bar{z}-a^2}(\sqrt{\bar{z}}-a)(\sqrt{\bar{z}}-b) \\ &= \frac{\left[\sqrt{|z|}(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}) - a\right]\left[\sqrt{|z|}(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}) - b\right]}{|z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) - a^2} \\ &= \left(\frac{K-iL}{M-iN}\right)\cdot\left(\frac{M+iN}{M+iN}\right) = \left(\frac{KM+LN}{M^2+N^2}\right) + i\left(\frac{KN-LM}{M^2+N^2}\right).\end{aligned} \tag{59}$$

Ukázali sme, že

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{\Phi(z)\} &= \tfrac{KM+LN}{M^2+N^2} = \mathrm{Re}\{\Phi(\bar{z})\}, \\ \mathrm{Im}\{\Phi(z)\} &= -\tfrac{KN-LM}{M^2+N^2} = -\mathrm{Im}\{\Phi(\bar{z})\},\end{aligned}$$

□

Na základe tejto rovnosti pokračujeme v úprave výrazu (54) a dostaneme

$$\begin{aligned}J_1 + J_2 = 2e^{-a^2\tau}\int_0^\infty & e^{-\rho\tau}\cos\varepsilon\tau[i\,\mathrm{Im}\{\Phi(-\rho-a^2+i\varepsilon)\}]+ \\ & + ie^{-\rho\tau}\sin\varepsilon\tau[\mathrm{Re}\{\Phi(-\rho-a^2+i\varepsilon)\}]d\rho.\end{aligned} \tag{60}$$

Polpriamka C_3 (resp. C_5) je umiestnená tesne nad (resp. pod) zápornú reálnu os, a preto vo výraze (60) pošleme ε k nule. Potrebujeme vypočítť limitu

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}(J_1 + J_2) = \lim_{\varepsilon\to 0} 2e^{-a^2\tau}\int_0^\infty & e^{-\rho\tau}\cos\varepsilon\tau[i\,\mathrm{Im}\{\Phi(-\rho-a^2+i\varepsilon)\}]+ \\ & + ie^{-\rho\tau}\sin\varepsilon\tau[\mathrm{Re}\{\Phi(-\rho-a^2+i\varepsilon)\}]d\rho.\end{aligned} \tag{61}$$

Limita $\lim_{\varepsilon\to 0}\cos\varepsilon\tau$ sa rovná jednej a limita $\lim_{\varepsilon\to 0}\sin\varepsilon\tau$ je rovná nule. Limity $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Re}\{\Phi(-\rho-a^2+i\varepsilon)\}$ a $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Im}\{\Phi(-\rho-a^2+i\varepsilon)\}$ sú konečné, a preto môžeme využiť vetu o limite súčtu a súčinu funkcií. Dostávame

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}(J_1+J_2) &= 2e^{-a^2\tau}\int_0^\infty e^{-\rho\tau} i\,\mathrm{Im}\{\Phi(-\rho-a^2)\}d\rho \\
&= 2ie^{-a^2\tau}\int_0^\infty e^{-\rho\tau}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{-\rho-a^2}(\sqrt{-\rho}-a)(\sqrt{-\rho}-b)\right\}d\rho \\
&= 2ie^{-a^2\tau}\int_0^\infty e^{-\rho\tau}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{-\rho-a^2}(i\sqrt{\rho}-a)(i\sqrt{\rho}-b)\right\}d\rho \\
&= 2ie^{-a^2\tau}\int_0^\infty e^{-\rho\tau}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{-\rho+ab}{-\rho-a^2}-i\frac{(a+b)\sqrt{\rho}}{-\rho-a^2}\right\}d\rho \\
&= 2ie^{-a^2\tau}\int_0^\infty e^{-\rho\tau}\frac{\sqrt{\rho}}{\rho+a^2}d\rho.
\end{aligned} \tag{62}$$

Podľa Cauchyho rezíduovej vety a z (50) máme

$$I_1+J_1+J_2 = 2\pi i\operatorname*{Res}_{p=0}\left\{\frac{\psi(p,\tau)}{p}\right\}, \tag{63}$$

$$I_1 = 2\pi i\operatorname*{Res}_{p=0}\left\{\frac{\psi(p,\tau)}{p}\right\}-(J_1+J_2), \tag{64}$$

$$I_1 = 0-2ie^{-a^2\tau}\int_0^\infty e^{-\rho\tau}\frac{\sqrt{\rho}}{\rho+a^2}d\rho. \tag{65}$$

Na výpočet integrálu I_2 využijeme analogický postup, t.j. z Cauchyho reziduovej vety máme

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6}\int_{C_i}\frac{\psi(p,\tau)}{p+\gamma}dp &= 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left\{\frac{\psi(p,\tau)}{p+\gamma}\right\} \\
&= 2\pi i\operatorname*{Res}_{p=-\gamma}\left\{\frac{e^{p\tau}(\sqrt{p+a^2}-a)(\sqrt{p+a^2}-b)}{p+\gamma}\right\}.
\end{aligned} \tag{66}$$

V tomto prípade je jediným singulárnym bodom $p=-\gamma$. Rovnako ako v (50) vypočítame rezíduum funkcie $\psi(p,\tau)/(p+\gamma)$ v bode $p=-\gamma$. Dostávame

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{p=-\gamma}\left\{\frac{\psi(p,\tau)}{p+\gamma}\right\} &= \lim_{p\to-\gamma}(p+\gamma)\frac{\psi(p,\tau)}{p+\gamma} = \psi(-\gamma,\tau) \\
&= e^{-\gamma\tau}(\sqrt{-\gamma+a^2}-a)(\sqrt{-\gamma-a^2}-b) \\
&= e^{-\gamma\tau}(|b|-a)(|b|-b) = \begin{cases} 0, & b\ge 0, \\ 2e^{-\gamma\tau}b, & b<0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{67}$$

Integrály na C_2, C_6 a C_4 sa rovnako ako pri výpočte I_1 vynulujú a ostáva vypočítť jediné netriviálne integrály na polpriamkach C_3 a C_5. Rovnako definujeme

$$J_1 = \int_{C_3} \frac{\psi(p,\tau)}{p+\gamma} dp = \int_{C_3} e^{p\tau} \frac{(\sqrt{p+a^2}-a)(\sqrt{p+a^2}-b)}{p+\gamma} dp = \int_{-\infty+i\varepsilon}^{-a^2+i\varepsilon} e^{p\tau}\Phi(p)dp,$$
$$J_2 = \int_{C_5} \frac{\psi(p,\tau)}{p+\gamma} dp = \int_{C_5} e^{p\tau} \frac{(\sqrt{p+a^2}-a)(\sqrt{p+a^2}-b)}{p+\gamma} dp = \int_{-a^2-i\varepsilon}^{-\infty-i\varepsilon} e^{p\tau}\Phi(p)dp.$$

kde $\Phi(p) = [(\sqrt{p+a^2}-a)(\sqrt{p+a^2}-b)]/(p+\gamma)$. Všetky dalšie výpočty sú analogické ako v predchádzajúcej časti a preto uvedieme len výsledky.

$$J_1 + J_2 = 2ie^{-a^2\tau} \int_0^\infty e^{-\rho\tau} \frac{\sqrt{\rho}}{\rho + a^2 - \gamma} d\rho.$$

Teda

$$I_2 + J_1 + J_2 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{p=-\gamma} \left\{ \frac{\psi(p,\tau)}{p+\gamma} \right\}, \tag{68}$$

$$I_2 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{p=-\gamma} \left\{ \frac{\psi(p,\tau)}{p+\gamma} \right\} - (J_1 + J_2), \tag{69}$$

$$I_2 = 2\pi i R - 2ie^{-a^2\tau} \int_0^\infty e^{-\rho\tau} \frac{\sqrt{\rho}}{\rho + a^2 - \gamma} d\rho. \tag{70}$$

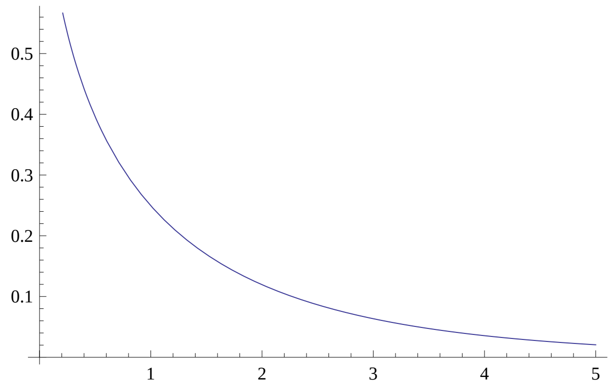
kde

$$R = \begin{cases} 0, & b \geq 0, \\ 2e^{-\gamma\tau} b, & b < 0. \end{cases}$$

Po dosadení všetkých výsledkov do (46) dostávame formulu pre výpočet hranice predčasného uplatnenia instalment put opcie podľa prvej aproximácie (44):

$$S_f(\tau) = \frac{e^{-a_2\tau}}{\gamma\pi} \int_0^\infty e^{-\rho\tau} \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\rho + a^2 - \gamma} - \frac{\sqrt{\rho}}{\rho + a^2} \right) d\rho - \frac{R}{\gamma}. \tag{71}$$

Na obrázku 4. vidno, že funkcia hranice predčasného uplatnenia vypočítaná podľa prvej aproximácie je monotónnou funkciou. V odseku 1.3 sme však predpokladali, že voľná hranica pre predajné instalment opcie je na začiatku rastúca funkcia času a až po dosiahnutí času $\tau = \tau_m$ začne monotónne klesať. Prvá aproximácia je príliš jednoduchá na to aby zachytila takýto vývoj.



Obr. 4: Voľná hranica predčasného uplatnenia pre predajné installment opcie podľa prvej aproximácie

3.4.2 Druhá aproximácia

Vypočítať voľnú hranicu predčasného uplatnenia v prípade druhej aproximácie danej výrazom (45) je zložitejšie. Využijeme rovnakú techniku ako pre prvú aproximáciu, preto niektoré podobné kroky už nebudeme popisovať dopodrobna. Hlavný problém výpočtu voľnej hranice je spôsobený zložitosťou vstupujúcej funkcie. Táto zložitosť sa prejaví najmä pri vyčíslovaní rezídua funkcie v singulárnych bodoch. Potebujeme teda vypočítať integrál

$$
\begin{aligned}
S_f(\tau) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{p\tau}\cdot\frac{\frac{q_2 p}{p+\gamma}-\left(1-\frac{q_2\gamma}{p+\gamma}\right)\left(\frac{q_2 p}{(p+\gamma)(q_2-1)}\right)^{q_1}}{p(q_2-1)}\,dp \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \frac{e^{p\tau}}{(p+\gamma)}\cdot\frac{(b-\sqrt{p+a^2})}{(-a-\sqrt{p+a^2})}\,dp+ \\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{p\tau}\cdot\left[\frac{\sqrt{p+a^2}-a}{\sqrt{p+a^2}+b}\right]^{\sqrt{p+a^2}+b} \times \\
&\times\left[\frac{(\sqrt{p+a^2}-a)(\sqrt{p+a^2}-b)}{p+\gamma}+\frac{1}{p\sqrt{p+a^2}+a}\right]dp.
\end{aligned}
\tag{72}
$$

Môžeme si všimnúť, že prvý integrál na pravej strane výrazu je rovnaký ako integrál (46) počítaný v prípade prvej aproximácie. Stačí vypočítať len druhý integrál vo výraze (72). Označme

$$
\Phi(p) = e^{p\tau}\cdot\left[\frac{\sqrt{p+a^2}-a}{\sqrt{p+a^2}+b}\right]^{\sqrt{p+a^2}+b}\times\left[\frac{(\sqrt{p+a^2}-a)(\sqrt{p+a^2}-b)}{p+\gamma}+\frac{1}{p\sqrt{p+a^2}+a}\right].
$$

Výpočet integrálu $\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{p\tau}\Phi(p)dp$ prevedieme rovnako ako v práci Zhua [1] a v prípade prvej aproximácie. Vytvoríme uzavretú krivku, po ktorej budeme integrovať a využijeme Cauchyho rezíduovú vetu. Krivka je rovnaká ako v predchádzajúcom prípade a je znázornená na obrázku 3. Funkcia $e^{p\tau}\Phi(p)$ má dva simgulárne body $p = 0$ a $p = -\gamma$. Označme $I_1 = \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{p\tau}\Phi(p)dp$. Cauchyho rezíduová veta hovorí

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{6} \int_{C_i} e^{p\tau}\Phi(p)dp &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} \{e^{p\tau}\Phi(p)\} \\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{p=0} \{e^{p\tau}\Phi(p)\} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{p=-\gamma} \{e^{p\tau}\Phi(p)\}, \end{aligned} \tag{73}$$

kde integrál v sume na ľavej strane prislúchajúci $i = 1$ je integrál, ktorý chceme spočítať.

Body $p = 0$ a $p = -\gamma$ sú jednoduchými pólmi funkcie a preto na výpočet rezíduí použijeme vzťah $\operatorname{Res}_{p=p_0} e^{p\tau}\Phi(p) = \lim_{p\to p_0}(p - p_0)e^{p\tau}\Phi(p)$. Dostávame

$$\operatorname*{Res}_{p=0} e^{p\tau}\Phi(p) = 0, \tag{74}$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-\gamma} e^{p\tau}\Phi(p) = \begin{cases} 0, & b \geq 0, \\ (2b^2 + 2ab)e^{\gamma\tau}, & b < 0. \end{cases} \tag{75}$$

Integrály prislúchajúce krivkám C_2, C_6 a C_4 sú rovnako ako v predošlom odseku nulové. Jediné netriviálne integrály sa nachádzajú na polpriamkach C_3 a C_5. Tieto integrály označíme ako

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{C_3} e^{p\tau}\Phi(p)dp, \\ J_2 &= \int_{C_5} e^{p\tau}\Phi(p)dp, \end{aligned}$$

a zrátame rovnako ako v prípade prvej aproximácie. Pre funkciu $\Phi(p)$ platí obdobná veta ako veta 1. Dostávame sa teda k výrazu

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_1 + J_2 = 2e^{-a^2\tau} \int_0^{\infty} e^{-\rho\tau} i \operatorname{Im}\{\Phi(-\rho - a^2)\} d\rho. \tag{76}$$

Imaginárna časť funkcie $\Phi(-\rho - a^2)$ je

$$\operatorname{Im}\{\Phi(-\rho - a^2)\} = e^{-\varphi\sqrt{\rho}} r^b \left[(Y + W)\cos(b\varphi - \sqrt{\rho}\ln r) + (X + V)\sin(b\varphi - \sqrt{\rho}\ln r)\right], \tag{77}$$

kde

$$X = \frac{\rho - ab}{\rho + b^2}, \qquad V = -\frac{a}{\rho^2 + a^4 + 2\rho a^2},$$
$$Y = \frac{\sqrt{\rho}(a+b)}{\rho + b^2}, \qquad W = -\frac{\sqrt{\rho}}{\rho^2 + a^4 + 2\rho a^2},$$
$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}, \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Po dosadení (74), (75) a (76) do rovnice (73) môžeme vyjadriť integrál I_1 ako

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname*{Res}_{p=0}\{e^{p\tau}\Phi(p)\} + \operatorname*{Res}_{p=-\gamma}\{e^{p\tau}\Phi(p)\} - (J_1 + J_2) \\ &= 2\pi i(0 + P) - 2ie^{-\rho\tau}\int_0^\infty e^{-\rho\tau}\,\mathrm{Im}\{\Phi(-\rho - a^2)\}d\rho, \end{aligned} \tag{78}$$

kde

$$P = \begin{cases} 0, & b \geq 0 \\ (2b^2 + 2ab)e^{\gamma\tau}, & b < 0. \end{cases}$$

Dosadením všetkých výpočtov do (72) dostávame druhú aproximačnú formulu pre výpočet hranice predčasného uplatnenia

$$\begin{aligned} S_f(\tau) &= S_{a1} + P \\ &\quad - \frac{e^{-a^2\tau}}{\pi}\int_0^\infty e^{-\rho\tau - \varphi\sqrt{\rho}}r^b\left[(Y + W)\cos(b\varphi - \sqrt{\rho}\ln r) + (X + V)\sin(b\varphi - \sqrt{\rho}\ln r)\right]d\rho, \end{aligned} \tag{79}$$

kde P, X, Y, V, W, r a φ sú definované vyššie a S_{a1} je hranica predčasného uplatnenia pre prvú aproximáciu definovaná v (71).

Vykresliť voľnú hranicu pre druhú aproximáciu sa nám nepodarilo, pretože funkcia v integrále je príliš zložitá. Dá sa však všimnúť, že od voľnej hranice podľa prvej aproximácie S_{a1} odčítavame funkciu, ktorá je monotónne klesajúcou funkciou času. Môžeme teda predpokladať, že voľná hranica predčasného uplatnenia pre druhú aproximáciu bude spĺňať predpoklad z odseku 1.3, čiže bude spočiatku rásť a po dosiahnutí času $\tau = \tau_m$ začne monotónne klesať.

Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo podrobnejšie skúmanie a oceňovanie installment opcií. Zo všetkých installment opcií, spomenutých na začiatku práce, sme sa rozhodli skúmať spojité installmet opcie, pričom sme sa zamerali hlavne na predajné installment opcie európskeho typu s konštantnou úrokovou mierou a volatilitou. Hlavnou úlohou oceňovania takéhoto druhu opcií je výpočet voľnej hranice predčasného uplatnenia. V tejto diplomovej práci sme navrhli dve analytické aproximačné formuly na výpočet voľnej hranice. Formuly sme odvodili metódou, ktorú navrhol Song-Ping Zhu v práci [1], na výpočet voľnej hranice predčasného uplatnenia Amerických predajných opcií. Metóda spočíva v riešení parciálnej diferenciálnej rovnice Black-Scholesovho typu s nehomogénnym členom v priestore Laplaceovej premennej. Počas Laplaceovej transformácie je potrebné použiť aproximáciu na ohraničenia na voľnej hranici. Na rozdiel od Zhua sme boli nútení aproximovať aj riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice v priestore Laplaceovej premennej. Dostali sme tak dve aproximácie voľnej hranice v Laplaceovom priestore, ktoré sme spätne invertovali do priestoru časovej premennej. Prvá aproximačná formula je príliš jednoduchá na to, aby dostatočne dobre popísala priebeh voľnej hranice pre čas blízky expirácii. Druhá aproximačná formula by mohla byť dostatočne dobrou aproximáciou. Výsledky tejto práce by bolo zaujímavé podrobiť podrobnejšiemu skúmaniu, čo je však nad rámec tejto práce.

Apendix

A Laplaceova transformácia

A.1 Základná teória

V tejto časti sa budeme zaoberať základnou teóriou Laplaceovej transformácie čerpanou z [8],[9]. Laplaceova transformácia je integrálna transformácia, ktorá má veľa dôležitých aplikácií v oblasti vedy. Dostala meno po matematikovi a astronómovi Pierre-Simon Laplaceovi, ktorý uviedol transformáciu vo svojej práci o teórii pravdepodobnosti. Dnes sa Laplaceova transformácia stala mocným nástrojom pri riešení rozmanitých úloh reálneho sveta spojených s riešením integrálnych, obyčajných diferenciálnych a parciálnych diferenciálnych rovníc.

Definícia 2. Uvažujme reálnu funkciu $f(t)$ definovanú pre $t \in (0, \infty)$ a reálny alebo komplexný parameter p, pre ktorý $\operatorname{Re} p > 0$. Potom Laplaceova transformácia funkcie $f(t)$ je definovaná ako

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = \lim_{r \to \infty} \int_0^r e^{-pt} f(t)dt, \tag{80}$$

ak táto limita existuje (ako konečné číslo). Symbolom $\mathcal{L}$ budeme označovať operátor Laplaceovej transformácie.

Veta 2. *Nech $f \in L^1(0, \infty)$, teda $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\int_0^\infty |f(t)|dt < \infty$. Potom*

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^r e^{-pt} f(t)dt$$

určite existuje.

Môžeme vidieť, že ak použijeme Laplaceovu transformáciu na parciálnu diferenciálnu rovnicu dvoch premenných (v našom prípade času a ceny podkladového aktíva), tak dostaneme obyčajnú diferenciálnu rovnicu. Riešenie takýchto rovníc je omnoho jednoduchšie. Treba však spomenúť, že novovzniknutá obyčajná diferenciálna rovnica sa nachádza v priestore transformovanej premennej p, narozdiel od pôvodnej rovnice, ktorá sa nachádzala v priestore parametra t. Preto, keď sa nám podarí vyriešiť vzniknutú obyčajnú diferenciálnu rovnicu, dostaneme výsledok v priestore premennej p, ktorý musíme transformovať naspäť do priestoru premennej t. Na tento účel potrebujeme definovať inverznú Laplaceovu transformáciu.

Veta 3. *Nech $f(t)$ má spojitú deriváciu a nech $|f(t)| < Ae^{\gamma t}$, kde γ a A sú kladné konštanty. Definujeme $F(p) = \mathcal{L}\{f(.)\}(p)$, potom*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{pt}F(p)dp. \tag{81}$$

Výpočet takéhoto integrálu je vo všeobecnosti veľmi zložitý, a preto sa v praxi málo používa. Pre elementárne funkcie sa nachádzajú Laplaceova transformácia a jej inverzia v tabuľkách Laplaceovej transformácie. Tieto tabuľky sa dajú využiť na výpočet inverznej transformácie. Ak potrebujeme invertovať funkciu, ktorá sa v tabuľkách nenachádza, je možné použiť rozličné numerické metódy na riešenie tejto transformácie.

A.2 Základné vlastnosti

Laplaceova trasformácia má nasledujúce vlastnosti

Veta 4. *Majme funkcie $f(t)$ a $g(t)$ spĺňajúce predpoklady definície 1, ďalej nech $f'(t)$ je spojitá okrem konečného počtu bodov na každom konečnom intervale $(0,T)$, c je konštanta a p je parameter Laplaceovej transformácie, potom platí*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(p) &= \mathcal{L}\{f(t)\}(p) + \mathcal{L}\{g(t)\}(p), && (82)\\
\mathcal{L}\{cf(t)\}(p) &= c\mathcal{L}\{f(t)\}(p), && (83)\\
\mathcal{L}\{f'(t)\}(p) &= s\mathcal{L}\{f(t)\}(p) - f(0), && (84)\\
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\}(p) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(p), && (85)\\
\mathcal{L}\{tf(t)\}(p) &= \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(p). && (86)
\end{aligned}$$

B Laurentov rad a rezíduová veta

V tejto časti definujeme základné pojmy komplexnej analýzy potrebné na výpočet integrálu komplexnej funkcie. [11], [10].

Definícia 3. Funkcia $f(z) : C \to C$ je *holomorfná* (regulárna), ak má v každom bode oblasti O deriváciu.

Veta 5. *Ak je funkcia $f(z)$ v oblasti O holomorfná, potom má v O deriváciu všetkých rádov.*

Definícia 4. Hovoríme, že (vlastný) bod z_0 je *regulárnym bodom* funkcie $f(z)$, ak existuje také (kruhové) okolie bodu z_0, že v tomto okolí je $f(z)$ holomorfná. Každý iný bod nazývame *singulárnym bodom* tejto funkcie. Navyše, ak sa v dostatočne malom okolí singulárneho bodu z_0 nenachádza žiaden iný singulárny bod, tak tento bod nazývame *izolovaný singulárny bod.*

Teraz vyslovíme vetu, ktorá definuje Laurentov rad.

Veta 6. *(Laurentov rad). Nech $f(z)$ je holomorfná funkcia v medzikruží M so stredom v bode z_0, vnútorným polomerom r_1 a vonkajším polomerom r_2 (teda $r_1 < |z - z_0| < r_2$). Potom v M platí*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{87}$$

kde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \tag{88}$$

c je ľubovolná kružnica so stredom v bode z_0 ležiaza v M a kladne orientovaná vzhľadom ku svojmu vnútru.

Konvergenciou radu (87) rozumieme to, že konvergujú obidva rady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Prvý z týchto radov nazývame regulárnou časťou, druhý hlavnou časťou Laurentovho radu. Obor platnosti (87) môže byť širší ako M. Regulárna časť konverguje vo vnútri určitej kružnice (so stredom v bode z_0), naopak hlavná časť konverguje mimo určitej kružnice. Preto potom rad (87) konverguje v spoločnom medzikruží. Ak je funkcia $f(z)$ regulárna všade vo vnútri vonkajšej kružnice, tak hlavná časť Laurentovho radu odpadáva a z Laurentovho radu sa stáva Taylorov rad. Plynie tak z Cauchyho integrálnej vety, pretože pre $n = -1, -2, \dots$ je integrant v (88) regulárna funkcia.

Veta 7. *Rad (87) je holomorfnou funkciou $f(z)$ určený jednoznačne.*

Definícia 5. Nech (87) je Laurentov rad pre holomorfnú funkciu $f(z)$, konvergujúci v okolí O jej izolovaného singulárneho bodu z_0 (O neobsahuje bod z_0). Môžu nastať tri prípady:

1. Ak existuje také $k > 0$, že v (87) je $a_{-k} \neq 0$, ale $a_{-l} = 0$ pre všetky $l > k$ (to znamená, že hlavná časť Laurentovho radu má konečný počet členov), hovoríme, že $f(z)$ má v bode z_0 *pól k-teho rádu.*

2. Ak má hlavná časť Laurentovho radu nekonečne mnoho členov, hovoríme, že $f(z)$ má v bode z_0 *podstatnú singularitu.*

3. Ak má Laurentov rad iba regulárnu časť, hovoríme, že $f(z)$ má v bode z_0 *odstraniteľnú singularitu.*

Pomocou Laurentovho radu sa definuje pojem rezídua fukcie nasledovne:

Definícia 6. Nech $f(z)$ je holomorfná funkcia a z_0 je jej izolovaný singulárny bod. Potom môžeme funkciu $f(z)$ v okolí bodu z_0 (pre $z \neq z_0$) vyjadriť pomocou Laurentovho radu ako

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \dots \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots .$$

Číslo a_{-1} sa nazýva *rezíduum funkcie* $f(z)$ v bode z_0. Označujeme ho ako $\mathrm{Res}_{z=z_0}\{f(z)\}$.

Podľa vety o Laurentovom rade môžeme rezíduum funkcie vypočítať nasledovne

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\{f(z)\} = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz.$$

V niektorých prípadoch je možné určiť rezíduum pohodlnejšie. Ak má funkcia $f(z)$ v bode z_0 pól prvého rádu, potom

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\{f(z)\} = a_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z).$$

Ak má v bode z_0 pól k-teho rádu ($k > 1$), potom

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\{f(z)\} = a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z - z_0)^k f(z)].$$

Ak je v okolí bodu z_0 funkcia $f(z)$ v tvare

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

kde $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ sú holomorfné funkcie, potom ak je $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$ tak bod z_0 je pól prvého rádu. Rezíduum sa v tomto prípade dá vypočítať nasledovne:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\{f(z)\} = a_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Teraz definujeme rezíduovú vetu, ktorú využijeme v odseku 2.4 na výpočet integrálu (46).

Veta 8. *(Rezíduová veta). Nech $f(z)$ je holomorfná funkcia v jednoduchej súvislej oblasti O s výnimkou konečného počtu singulárnych bodov $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Nech c je jednoduchá po častiach hladká uzavretá krivka, kladne orientovaná vzhľadom ku svojmu vnútru V, ležiaca v O a taká, že body $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sú obsiahnuté vo V. (Žiaden z týchto bodov neleží na c). Potom integrál*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz$$

sa rovná súčtu rezíduí v bodoch $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Teda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\{f(z)\}. \tag{89}$$

Literatúra

[1] Song-Ping Zhu, *A New Analytical Approximation Formula For The Optimal Exercise Boundary Of American Put Options*, International Journal of Theoretical and Aplied Finance, Vol. 9, No. 7, (2006), 1141-1177.

[2] G. Alobaidi, R. Mallier, A.S. Deakin, *Laplace Transform And Installment options*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 14, No. 8, (2004), 1167-1189.

[3] A. Mezentsev, A. Pomelnikov, *Valuation of Instalment Options*, Master's Thesis in Financial Mathematics, School of Information Science, Computer and Electrical Engineering, Halmstad University, October 21, 2009

[4] T. Kimura, *Valuing Continuous-Installment Options*, Graduate School of Economics an Business Administration, Hokkaido University, Discussion Paper Series A: No. 2007-184.

[5] P. Ciurlia, *On a General Class of Free Boundary Problems For European-Style Installment Options With Continuous Payment Plan*, Communications on Pure and Applied Analysis, Vol. 10, No. 4, July 2011, 1205-1224

[6] M. Lauko, D. Ševčovič, *Comparison of Numerical and Analytical Approximations of the Early Exercise Bounadary of American Put Option*, Anziam J. 51 (2010), 430-448.

[7] G. Alobaidi, R. Mallier, S. Mansi, *Laplace Transform and Shout Options*, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXX, 1 (2011), 79-102

[8] C.T.J. Dodson, *Introduction to Laplace Transforms for Engineers*, School of Mathematics, Manchester University

[9] J.L.Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications*, 1999 Springer-Verlag New York Inc., ISBN 0-387-98698-7.

[10] I. Černý, *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Československá akademie věd, Praha, 1983.

[11] K. Rektorys a spol., *Přehled užité matematiky*, SNTL-Nakladatelství technické literatury, Vydanie 3., Praha, 1973.

[12] D. Ševčovič, B. Stehlíková, K. Mikula, *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2009.

[13] F. Black, M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities* J. Political Econ. 81, (1973), 637-659.

[14] R.C. Merton, *The theory of rational option pricing*, Bell J. Econ. Management Sci. 4, (1973), 141-183.

[15] A.R. Dixit, S.R. Pindyck, *Investment Under Uncertainty*, Princeton Univ. Press, 1994.