UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OPTIMÁLNA FIŠKÁLNA POLITIKA PRI DLHOVEJ BRZDE

Diplomová práca

2013

Bc. Katarína Barlíková

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

OPTIMÁLNA FIŠKÁLNA POLITIKA PRI DLHOVEJ BRZDE

Diplomová práca

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Školiteľ:	prof. dipl. Ing. Dr. Mikuláš Luptáčik

Bratislava, 2013

Bc. Katarína Barlíková

24568772

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Katarína Barlíková
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Optimálna fiškálna politika pri dlhovej brzde

Cieľ: Pomocou teórie optimálneho riadenia je potrebné analyzovať vplyvy nástrojov fiškálnej politiky (štruktúra verejných výdavkov) na vývoj štátneho dlhu.

Vedúci: prof. Dipl. Ing. Dr. Mikuláš Luptáčik
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 25.01.2012

Dátum schválenia: 25.01.2012

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že som predloženú diplomovú prácu spracovala samostatne, s použitím uvedenej literatúry a ďalších informačných zdrojov.

V Bratislave, 22. apríla 2013

....

Bc. Katarína Barlíková

Poďakovanie

Moje úprimné ďakujem patrí všetkým, ktorý mi vedome alebo nevedome pomohli pri vypracovaní predkladanej diplomovej práce.

Menovite chcem poďakovať v prvom rade svojmu školiteľovi pánovi prof. dipl. Ing. Dr. Mikulášovi Luptáčikovi za cenné rady a usmernenie pri vypracúvaní diplomovej práce, ako i pánovi prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za cenné konzultácie.

Chcela by som taktiež poďakovať Dr. techn Dieterovi Grassovi, ktorý mi ochotne poskytol balík OCMat a všetky informácie potrebné pre prácu s týmto softwarom. Ďakujem tiež Univ. Ass. Dr. techn Josefovi Leopoldovi Haunschmiedovi za prínosnú konzultáciu.

V neposlednom rade chcem vyjadriť vďaku všetkým členom Katedry aplikovanej matematiky a štatistiky, ktorí ma počas magisterského štúdia pripravovali na teoretické zvládnutie diplomovej práce.

Považujem za dôležité osobitne vyjadriť vďaku mojim rodičom i všetkým mojim blízkym, ktorí ma podporovali počas celého vysokoškolského štúdia.

Abstrakt

BARLÍKOVÁ, Katarína: *Optimálna fiškálna politika pri dlhovej brzde* [Diplomová práca]. - Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. – Školiteľ: prof. dipl. Ing. Dr. Mikuláš Luptáčik. – Bratislava, 2013. 63 s.

Vytýčili sme si cieľ nájsť nastavenie fiškálnej politiky, ktoré by rešpektujúc dlhovú brzdu viedlo nielen k dlhodobo udržateľnému dlhu, ale aj k maximalizácii celoživotného úžitku spoločnosti. V jednoduchom modeli ekonomického rastu rozšíreného o verejné výdavky dvoch typov (produktívne a neproduktívne) uvažujeme možnosť nevyrovnaného štátneho rozpočtu a akumulácie dlhu, čím sa dostávame bližšie k realite. Formulácia modelu v tvare úlohy optimálneho riadenia a využitie Pontrjaginovho princípu maxima nás privádzajú k zaujímavým výsledkom. Kvalitatívna analýza modelu ústi do optimálneho alokačného pravidla pre štruktúru verejných výdavkov. Spomínané pravidlo hovorí, že v čase zadlženia, ktoré dosahuje hranicu dlhovej brzdy, je optimálna alokácia verejných výdavkov v prospech produktívneho sektora. Použitie balíka OCMat pri numerickom riešení nám umožňuje skúmať optimálnu trajektóriu. Riešením okrajovej úlohy analyzujeme správanie systému na hranici dlhovej brzdy. Model navyše podrobujeme komparatívnej statike. Celá práca je prepletená ekonomickou interpretáciou, ktorú implikuje model.

Kľúčové slová: deficit štátneho rozpočtu, dlh, hospodársky rast, teória optimálneho riadenia, štruktúra vládnych výdavkov

Abstract

BARLÍKOVÁ, Katarína: *Optimal Fiscal Policy with Debt Brake* [Diploma thesis]. – Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Department of Applied Mathematics and Statistics. – Supervisor: prof. dipl. Ing. Dr. Mikuláš Luptáčik. – Bratislava, 2013. 63 p.

The aim of the thesis is to find a fiscal policy setting which would lead not only to sustainable debt, but to maximalization of the long-term wealth as well. In addition, the setting have to respect the debt brake. In a simple model of economic growth enhanced by governing spendings of two types we consider non-balanced government budget and debt accumulation. These aspects bring our model closer to reality. The model is formulated as an optimal control problem. Pontryagin's maximum principle is used when looking for solution. Optimal government spendigs' alocation rule is found out in qualitative analysis. The mentioned rule states: When country's indebtedness reaches debt brake, it is optimal to alocate government spendigs in favor of production enhancing spendings. Using OCMat, a tool for optimal control problem solving, we are able to look at optimal trajectory. We analyze behavior at the debt brake boundary and we make comparative statics. Economic interpretation implied by the model itself could be found across the whole work.

Keywords: government budget deficit, debt, economic growth, optimal control theory, structure of government spendings

Obsah

ÚVOD **2**

1 ÚVOD DO PROBLEMATIKY **4**

1.1 MOTIVÁCIA 4

1.2 FIŠKÁLNA POLITIKA V LITERATÚRE 8

1.2.1 Barro: Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth 8

1.2.2 Štruktúra vládnych výdavkov a ekonomický rast 15

1.2.3 Dlh a ekonomický rast 16

2 OPTIMÁLNA FIŠKÁLNA POLITIKA PRI DLHOVEJ BRZDE **19**

2.1 FORMULÁCIA MODELU 19

2.2 KVALITATÍVNA ANALÝZA 22

3 ANALYTICKÉ RIEŠENIE **28**

3.1 MODEL I 28

3.1.1 Vnútorné riešenie Modelu I 29

3.2 MODEL II 32

4 METODIKA PRE NUMERICKÉ RIEŠENIE **34**

4.1 OCMAT 34

4.1.1 Predpoklady optimality riešenia 35

4.1.2 Numerická kontinuácia 36

5 NUMERICKÉ RIEŠENIE **38**

5.1 NUMERICKÉ RIEŠENIE MODELU II 38

5.2 ANALÝZA AKTIVÁCIE DLHOVEJ BRZDY 42

5.3 KOMPARATÍVNA STATIKA 47

5.3.1 Zmena daňovej sadzby τ 47

5.3.2 Zmena reálnej úrokovej miery r 49

5.3.3 Zmena diskontného faktora ρ 49

5.3.4 Zmena marginálneho sklonu k spotrebe c 50

5.3.5 Zmena parametrov produkčnej funkcie α a β 52

5.3.6 Zmena elasticity užitočnosti spotreby γ 54

5.3.7 Zmena miery depreciácie kapitálu δ 56

5.3.8 Všeobecné závery 57

ZÁVER **58**

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY **61**

Úvod

Súčasná ekonomická situácia v Európe upriamila pozornosť na fiškálnu politiku jednotlivých krajín. Jej historický vývoj je vystavený kritike a čoraz hlasnejšie sa ozývajú výzvy k zmene. Je ten správny čas chopiť sa príležitosti a zostaviť plán cesty k dlhodobo udržateľnej fiškálnej politike. Kde však začať? Listovaním v modeloch endogénneho ekonomického rastu objavujeme viac ako 20 rokov starú prácu Barro-a [3]. V tejto analytickej práci sa nachádzajú pádne argumenty, ktoré poukazujú na dôležitosť štruktúry vládnych výdavkov v procese dosahovania hospodárskeho rastu. Barro v jednoduchom modeli endogénneho rastu ukázal, že sektorové delenie (produktívny a neproduktívny sektor) verejných výdavkov má zmysel, nakoľko tieto výdavky v jednotlivých sektoroch plnia odlišné úlohy a tým je ich dopad na výkon ekonomiky rozdielny. Barrove závery potvrdzujú aj viaceré empirické štúdie. Dnes sa však musíme posunúť ešte o krok ďalej a popri cieli dosahovať čo najvyšší ekonomický rast musíme pri riadení fiškálnej politiky vidieť za horizont dôsledkov našich rozhodnutí a smerovať nielen k dlhodobo udržateľnému rastu ale aj k dlhodobo udržateľným verejným financiám. Snaha dosiahnuť tento viackriteriálny cieľ vyústila v krajinách eurozóny k legislatívnym zmenám, k prijatiu tzv. dlhovej brzdy. Odhliadnuc od detailov, ide o mechanizmus, ktorý má vyliečiť krátkozrakosť vlád a pomôcť im tak vidieť dlhodobý cieľ, ktorý chce spoločnosť dosiahnuť. V Slovenskej republike je dlhová brzda legislatívne ošetrená normou najvyššej právnej sily, Ústavným zákonom o rozpočtovej zodpovednosti z roku 2011 [25].

Riešenie aktuálnej situácie v eurozóne považujeme za výzvu, preto si kladieme za cieľ sformulovať model, ktorý nám poskytne priestor na analýzu fiškálnej politiky, a tak umožní identifikovať jej optimálne nastavenie, ktoré vedie k dlhodobo udržateľnému rastu ako i k dlhodobo udržateľným verejným financiám. Sformulovaný model podrobujeme dôkladnej analýze a snažíme sa identifikovať optimálne správanie implikované modelom. Predkladané dielo je tematicky členené do piatich kapitol.

V prvej kapitole oboznamujeme čitateľa s problematikou dlhodobo udržateľných verejných financií, ktorú konfrontujeme s teóriou hospodárskeho rastu. Poukazujeme na dôsledky riadenia fiškálnej politiky v minulosti a o poskytnutie stručnej informácie o dosiaľ podniknutých krokoch smerujúcich k zmene. Veľkú časť tejto kapitoly venujeme analýze vzťahov medzi fiškálnou politikou a rastom ekonomiky prostredníctvom poznatkov plynúcich zo súčasných analytických a empirických prác. Vyvíjame úsilie o komplexné skúmanie, preto do analýzy zahŕňame aj dôsledky fiškálnej politiky – deficit štátneho rozpočtu a dlh.

Druhá kapitola sa zaoberá formuláciou modelu ako i analýzou väzieb v tomto modeli. Predkladaný model je sformulovaný ako spojitá úloha optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte s dvomi stavovými premennými (kapitál a dlh), dvomi riadiacimi premennými (verejné výdavky do produktívneho sektora[1] a verejné výdavky do neproduktívneho sektora[2]) a so zmiešaným ohraničením (s dlhovou brzdou). Podstatná časť tejto kapitoly je venovaná kvalitatívnej analýze modelu, ktorá vychádza z Pontrjaginovho princípu maxima. Výsledkom je popis vzťahov medzi premennými modelu a formulácia optimálneho alokačného pravidla pre verejné výdavky.

Na začiatku tretej kapitoly špecifikujeme dva modely – Model I a Model II, ktoré sa líšia v predpoklade o vzťahu súkromnej spotreby a verejných služieb. Vykonávame analytické riešenie Modelu I. Pre zložitosť Modelu II nie je jednoduché získať analytické riešenie, preto sme sa rozhodli pristúpiť k numerickému riešeniu.

Metódy použité pri numerickom riešení Modelu II uvádzame v samostatnej kapitole, v kapitole štyri. Predstavujeme balík OCMat a uvádzame základné princípy a matematické pozadie, na základe ktorých tento software rieši úlohy optimálneho riadenia. Čitateľ tu nájde i stručný popis kontinuačného algoritmu (c*ontinuation algorithm*), ktorý spolu s aparátom na riešenie okrajových úloh (*boundary value problem*) tvorí jadro programu.

Piata kapitola obsahuje výsledky získané numerickým riešením Modelu II. Riešením spomínaného modelu je rovnovážny bod typu sedlo. Balík OCMat nám umožňuje zobraziť a skúmať správanie jednotlivých premenných pozdĺž sedlovej cesty. Venujeme sa i porovnaniu riešenia získaného pri aktívnej dlhovej brzde s riešením, keď dlhová brzda nie je aktívna. Záver tejto kapitoly je venovaný komparatívnej statike modelu. Celá kapitola je prepletená ekonomickou interpretáciou, ktorú implikuje model.

---

[1] Za ekvivalenty považujeme pojmy verejné/vládne výdavky do produktívneho sektora = produktívne vládne/verejné výdavky = vládne/verejné investície.

[2] Za ekvivalenty považujeme pojmy verejné/vládne výdavky do neproduktívneho sektora = neproduktívne vládne/verejné výdavky = vládna/verejná spotreba = vládne/verejné služby.

1 Úvod do problematiky

Riadky v tejto kapitole oboznamujú čitateľa s problematikou verejných financií a ekonomického rastu. Začiatok kapitoly je venovaný poukázaniu na dôsledky riadenia fiškálnej politiky v minulosti a o poskytnutiu stručnej informácie o dosiaľ podniknutých krokoch smerujúcich k zmene. Veľká časť tejto kapitoly je venovaná analýze vzťahov medzi fiškálnou politikou a rastom ekonomiky prostredníctvom poznatkov plynúcich zo súčasných analytických a empirických prác. Vyvíjame úsilie na komplexné skúmanie, preto do analýzy zahŕňame aj dôsledky fiškálnej politiky – deficit štátneho rozpočtu a dlh.

1.1 Motivácia

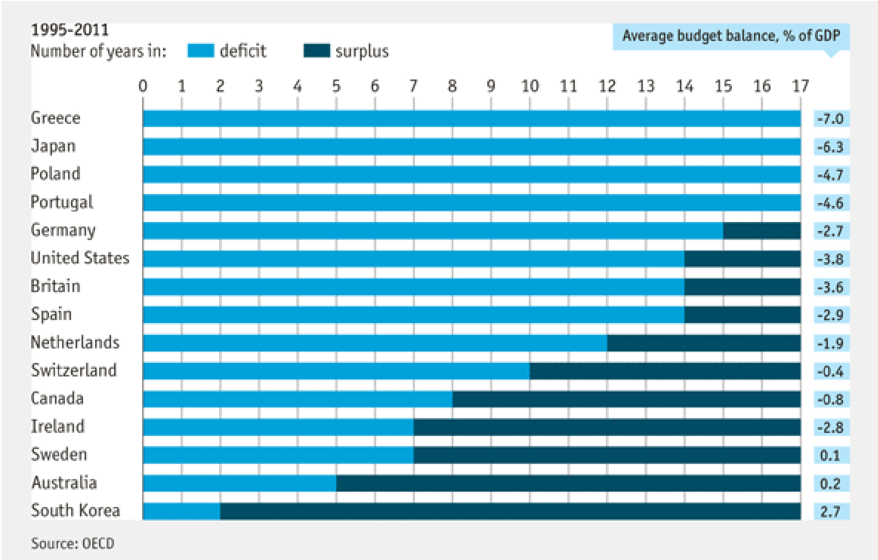
V nasledujúcich týždňoch nemôže byť žiadna kríza, môj diár je už plný.
Henry Kissinger[3]

Kríza nie je len slovo. V posledných rokoch sme sa o tom mohli presvedčiť na vlastnej koži. Zemetrasenie v roku 2008, ktorého epicentrum sa nachádzalo v USA, bolo vplyvom globalizácie finančných trhov citeľné takmer v každom kúte sveta. Finančné trhy zamrzli. Globálna ekonomika začala upadať do recesného spánku. Hlavy politikov oťaželi pod ťarchou hospodárskej krízy. Následky sú viditeľné dodnes…

Život na dlh sa v posledných desaťročiach stal trendom, ktorému podľahli nielen spotrebitelia, ale aj vlády. Notorické zadlžovanie je typickým správaním vlád už niekoľko desaťročí a v tejto súvislosti sa stretávame s výstižným pojmom – fiškálny alkoholizmus. Ako vidíme na **Graf 1**, prebytok štátneho rozpočtu je pre rozvinuté krajiny OECD skôr raritou a takmer všetky dosahovali v sledovanom období 1995 – 2011 v priemere schodok.

[3] „There cannot be a crisis next week. My schedule is already full.“ Citované 1. júna 1969 v The New York Times Magazine. Zdroj: http://en.wikiquote.org/wiki/Henry_Kissinger

Graf 1: Prebytok/Schodok štátnych rozpočtov vybraných krajín OECD v období 1995-2011[4]

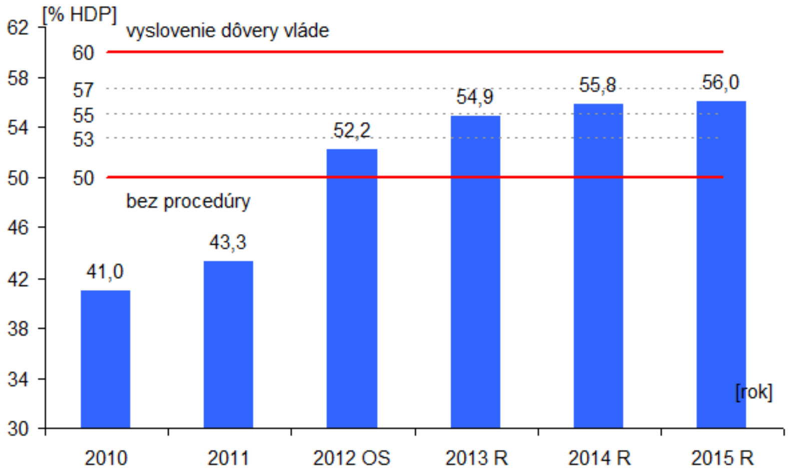


V očiach ľudí, ktorý pocítili ťažkú ruku krízy na vlastných pleciach čítame oprávnenú výčitku adresovanú spupným vládam. Každý volič s dôverou vhadzuje volebný lístok do urny. Málokto si uvedomuje, že atraktívny volebný program vlád je ušitý na jedno volebné obdobie, čo značne ovplyvňuje tvorbu politiky. Hovoríme o tzv. krátkozrakosti vlád. Zodpovedné riadenie štátu by však malo hľadieť ďaleko za horizont. V snahe zachovať eurové spoločenstvo, ktorého pevnosť je od vypuknutia dlhovej krízy vystavená veľkej skúške, dospeli autority jednotlivých členských krajín k Zmluve o stabilite, koordinácii a správe v hospodárskej a menovej únii [10], k Zmluve o tzv. fiškálnom kompakte. Sme teda svedkami aplikácie nového prístupu k liečbe krátkozrakosti vlád členských krajín Európskej únie. Familiárne nazývaná tzv. dlhová brzda je aplikovaná s dôverou, že legislatívne okuliare pomôžu vládam hľadieť do budúcnosti a budú motivované držať dlh na uzde. Na pôde Slovenskej národnej rady bol v tejto súvislosti prijatý Ústavný zákon o rozpočtovej zodpovednosti [25]. V čase prijatia predstavoval dlhový pomer (t.j. dlh k HDP) Slovenska približne 43 %. Za jediný rok sa dokázal prehupnúť ponad 50 %-nú hladinu[5] a podľa Rady pre rozpočtovú zodpovednosť bude mať v nasledujúcom období rastúcu tendenciu (**Graf 2**).

[4] **Zdroj**: http://www.economicsinpictures.com/2012/05/government-budget-history-deficit.html

[5] Plán zostavený Ministerstvom financií Slovenskej republiky pre **rok 2012** uvádza **dlh k HDP na úrovni 50,89 %**. Zdroj: Štatistický úrad Slovenskej republiky. *Správa o deficite a dlhu predložená Slovenskou republikou Európskej komisii (Eurostatu) k 31.3.2012 za roky 2008 – 2012*. Dostupné na: http://portal.statistics.sk/showdoc.do?docid=46848

Graf 2: Očakávaný vývoj dlhu k HDP do roku 2015[6]

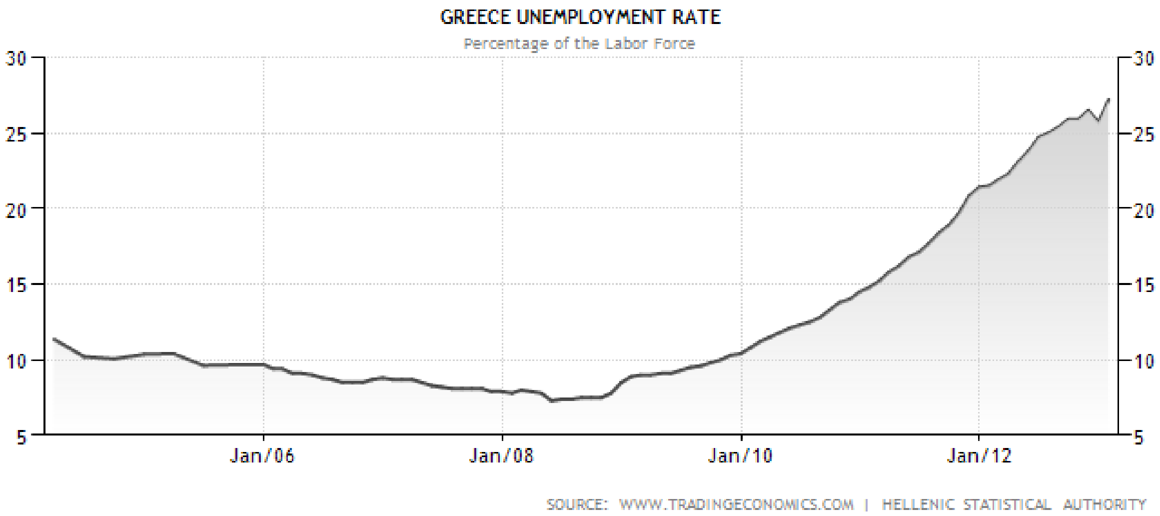


Rok 2012 sa v slovenskom verejnom sektore niesol v duchu konsolidácie verejných financií a tento smer si pravdepodobne ešte nejaký ten rôčik budeme musieť ponechať, keďže úroveň dlhu vstúpila do prvého sankčného pásma definovaného Ústavným zákonom o rozpočtovej zodpovednosti a už v roku 2014 by mala atakovať tretie sankčné pásmo. Mnoho analytikov zastáva názor, že pokračovanie v doterajšom procese konsolidovania najmä na príjmovej strane rozpočtu je neprijateľné a je potrebné pristúpiť k štrukturálnym zmenám. Veď už z názvu ukazovateľa zadlženosti – dlh k HDP – jednoznačne čítame priamu závislosť jeho hodnoty nie od jednej ale od dvoch veličín – od výšky dlhu a výkonu ekonomiky. Konsolidácia verejných financií sa snaží o zníženie zadlženia, resp. o jeho stabilizáciu najmä cez primárny deficit štátneho rozpočtu. Je zrejmé, že ak konsolidačné kroky vedú k spomaleniu ekonomiky, nielenže vláda nedosiahne želaný výsledok, ale môže dosiahnuť presný opak. Jeden príklad za všetky – Grécko. Grécka vláda je od roku 2010 pod tlakom medzinárodných veriteľov nútená prijímať radikálne kroky. Ekonomika sa prepadla hlboko až k úrovni – 8 % (**Graf 3**) a nezamestnanosť vystúpila do závratných výšok (27 %; **Graf 4**).

[6] Rada pre rozpočtovú zodpovednosť. 2012. *Rozpočet predpokladá nárast dlhu na 56% HDP.* Dostupné na: http://www.rozpoctovarada.sk/svk/rozpocet/116/grafy

Graf 3[7]

Graf 4[8]



Hodnota dlhového pomeru je pozitívne previazaná s rastom ekonomiky, a preto sme presvedčený, že konsolidácia verejných financií nie je len o liečbe fiškálneho alkoholizmu, ale aj o správnom nastavení fiškálnej politiky. Ako dokazujú viaceré štúdie (viac v kapitole 1.2) vládne výdavky nie sú len neefektívnou alokáciou zdrojov, ktorá je nevyhnutná na plnenie úloh spoločnosti, ale ovplyvňujú výkon ekonomiky prostredníctvom rôznych kanálov.

[7] Zdroj: www.tradingeconomics.com, Dostupné na: http://www.tradingeconomics.com/greece/gdp-growth-annual
[8] Zdroj: www.tradingeconomics.com, Dostupné na: http://www.tradingeconomics.com/greece/unemployment-rate

1.2 Fiškálna politika v literatúre

Fiškálna politika je dôležitou súčasťou riadenia ekonomickej aktivity, obzvlášť v krajinách, ktoré sa rozhodli vstúpiť do menovej únie, čím sa ich prístup k nástrojom menovej politiky podstatne obmedzil. Medzi najvýznamnejšie nástroje fiškálnej politiky neodmysliteľne patrí politika verejných výdavkov, ktorej nastavenie budeme v tejto práci optimalizovať.

Verejné výdavky sú dlhodobo predmetom rozporuplných diskusií tak na pôde politickej, ako i na pôde akademickej. V teórii ekonomického rastu im spočiatku nebola venovaná dostatočná pozornosť a v modeloch zvykli predstavovať neefektívnu alokáciu zdrojov.

Pohľad na verejné výdavky sa výrazne zmenil publikáciou práce Barro-a [3]. Zatiaľ čo empirické štúdie poskytovali nejednoznačnú evidenciu korelácie medzi verejnými výdavkami a ekonomickým rastom, Barro z modelu endogénneho rastu rozšíreného o vládne výdavky analyticky odvodil existenciu vplyvu verejných výdavkov na ekonomický rast. Autor vo svojej práci klasifikuje vládne výdavky ako produktívne a neproduktívne, podľa ich príspevku k produkcii. Kým produktívne výdavky považoval za komplement pre súkromnú produkciu, o neproduktívnych výdavkoch predpokladal, že priamo zvyšujú úroveň úžitku nekonečne žijúcej reprezentatívnej domácnosti. Zahrnutím produktívnych verejných výdavkov do produkčnej funkcie a neproduktívnych verejných výdavkov do funkcie užitočnosti dospel k modelu, ktorý pripúšťa dlhodobý endogénny rast. Hoci s analýzou efektu produktívnych verejných výdavkov na ekonomický rast sa stretávame už u Rosenstein-Rodan-a (1943) v známej „big-push" teórii, ktorej základom je myšlienka, že vláda ponúka domácnostiam verejné tovary a služby, ktoré môžu zvýšiť ich produktivitu, a tak pozitívne ovplyvniť ich dlhodobé bohatstvo (*long-term wealth*), Barro ju ako prvý implementoval do modelu ekonomického rastu.

1.2.1 Barro: Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth

Autor postavil svoju analýzu na modeli endogénneho rastu s konštantnými výnosmi široko chápaného kapitálu. Kapitál v tomto ponímaní predstavuje každú formu kapitálu. Barro hovorí o ľudskom (*human capital*) a neľudskom (*nonhuman capital*) kapitáli.

Predpokladal uzavretú ekonomiku, v ktorej nekonečne žijúca reprezentatívna domácnosť maximalizuje svoj celoživotný úžitok definovaný funkciou

$$U = \int_0^\infty u(c) e^{-\upsilon t} dt, \tag{1.1}$$

kde c predstavuje spotrebu na hlavu a $\rho > 0$ je konštantná miera časovej preferencie. Autor predpokladá, že veľkosť populácie je konštantná.

Vo svojich úvahách používa funkciu užitočnosti s konštantnou mierou elasticity hraničnej užitočnosti v tvare

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}.$$

V ekonomike sa homogénny produkt y vyrába technológiou $f(k)$ z kapitálových vstupov k

$$y = f(k),$$

pričom veličiny y a k sú per capita. Pracovná doba je presne stanovená, teda pracovníci nemajú možnosť výberu medzi prácou a voľným časom.

Maximalizácia celoživotnej užitočnosti, ktorá je daná vzťahom (1.1), implikuje v každom čase mieru rastu spotreby, ktorá zodpovedá výrazu

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}(f' - \rho), \tag{1.2}$$

kde f' je hraničný produkt kapitálu. Autor sa prikláňa k práci Rebela [21] a predpokladá konštantné výnosy z kapitálu, teda

$$y = Ak,$$

kde $A > 0$ je konštantný čistý hraničný produkt kapitálu. Barro argumentuje, že chápanie kapitálu v širšom zmysle vedie k tomu, že kvôli nedokonalej substituovateľnosti ľudského a neľudského kapitálu v procese výroby, môže produkcia vykazovať zhruba konštantné výnosy z rozsahu, hoci tie sú klesajúce, ak uvažujeme ľudský, resp. neľudský kapitál oddelene.

Označme γ mieru rastu na hlavu. Substitúciou za $f' = A$ vo vzťahu (1.2) dostávame

$$\gamma := \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}(A - \rho).$$

Autor ďalej predpokladá, že technológia je dostatočne produktívna, aby dokázala zabezpečiť stabilný rast, ale nie natoľko, aby umožnila neohraničenú užitočnosť. Uvedené predpoklady zachytáva vzťah

$$A > \rho > A(1 - \sigma).$$

V tomto modeli je ekonomika vždy v stabilnom stave, v ktorom všetky premenné (*c, k, y*) rastú mierou γ.

Autor rozšíril vyššie opísaný model zahrnutím verejného sektora. Verejné služby pripadajúce na hlavu *g* považoval za výrobný faktor. Zaviedol predpoklad, že i napriek súkromnému kapitálu definovaného v širšom zmysle, produkcia zaznamenáva klesajúce výnosy z rozsahu v prípade, že verejné vstupy nie sú navýšené paralelným spôsobom. Produkcia má konštantné výnosy z rozsahu v *k* a *g*, ale klesajúce v prípade samotného *k*. Produkčná funkcia je v tomto modeli definovaná

$$y = \Phi(k, g) = k.\Phi\left(\frac{g}{k}\right); \qquad (1.3)$$

$$\Phi' > 0; \Phi'' < 0.$$

Nech produkčná funkcia má tvar Cobb-Douglasovej funkcie, potom (1.3) sa dá zapísať

$$\frac{y}{k} = \Phi\left(\frac{g}{k}\right) = A.\left(\frac{g}{k}\right)^{\alpha}; \;\; 0 < \alpha < 1. \qquad (1.2.4)$$

Nakoľko vychádzame z predpokladu produkcie homogénneho tovaru jednotnou technológiou, je jedno, či vláda vyrába svoje služby sama, alebo ich nakupuje od súkromného sektora. Preto uvažujeme, že vláda nevyvíja produkčné aktivity a nevlastní žiaden kapitál. Teraz sa však môže vynoriť otázka, prečo teda považujeme *g* za výrobný faktor? Vo všeobecnosti za touto myšlienkou stojí argument, že súkromné kapitálové vstupy nie sú blízkymi substitútmi verejných vstupov.

Barro ďalej predpokladá, že vládne výdavky sú financované jednotnou daňou z príjmu τ. Vláda teda vedie vyrovnaný štátny rozpočet. Objem daňových služieb g zodpovedá daňovým príjmom T

$$g = T = \tau y = \tau.k.\Phi\left(\frac{g}{k}\right).$$

Derivovaním (3) podľa k dostávame hraničný produkt kapitálu

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \Phi\left(\frac{g}{k}\right).\left(1 - \Phi'.\frac{g}{y}\right) = \Phi\left(\frac{g}{k}\right).(1-\eta), \tag{1.5}$$

kde η je elasticita y vzhľadom na g pri danom k, teda platí $0 < \eta < 1$.

Bolo uvedené, že rast spotreby, ktorý maximalizuje užitočnosť reprezentatívnej domácnosti zodpovedá vzťahu (1.2). f' teraz zodpovedá súkromnému hraničnému výnosu kapitálu, ktorý je definovaný výrazom $(1-\tau)(\partial y / \partial k)$. Dostávame teda mieru rastu

$$\gamma = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[(1-\tau).\Phi\left(\frac{g}{k}\right).(1-\eta) - \rho\right], \tag{1.6}$$

kde výraz v zátvorke naľavo od znamienka mínus je súkromný hraničný výnos kapitálu.

Vzťah (1.5) implikuje, že veľkosť vlády má na mieru rastu γ dva efekty. Rast daňovej sadzby τ znižuje γ, naopak rast g/y zvyšuje hraničný produkt kapitálu a tým γ rastie. Prvý efekt je typický pre veľkú vládu, druhý dominuje v prípade malej vlády. Názorným príkladom je Cobb-Douglasová produkčná funkcia, kde η je konštanta, $\eta = \alpha$, $0 < \alpha < 1$. Podmienky $\tau = g / y$ a $g / k = (g / y).\Phi(g / k)$ implikujú

$$\frac{d\gamma}{d(g/y)} = \frac{1}{\sigma}.\Phi\left(\frac{g}{k}\right).(\Phi' - 1). \tag{1.7}$$

Z rovnice (1.7) čítame, že miera rastu γ rastie s *g/y,* ak *g/k* je dostatočne malé, teda $\Phi' > 1$ a klesá s *g/y,* ak *g/k* je dostatočne veľké, teda $\Phi' < 1$. V prípade Cobb-Douglasovej technológie veľkosť vlády, ktorá maximalizuje mieru rastu zodpovedá prirodzenej podmienke pre produkčnú efektivitu: $\Phi' = 1$. Keďže $\alpha = \eta = \Phi'.(g / y)$, potom $\alpha = g / y = \tau$.

Barro ďalej porovnáva mieru rastu v decentralizovanej ekonomike, ktorá bola popísaná vyššie, s mierou rastu v ekonomike centrálneho plánovača ako i v decentralizovanej ekonomike s paušálnou daňou.

Ak uvažujeme ekonomiku centrálneho plánovača, ktorý zvolí konštantnú mieru výdavkov zodpovedajúcu $g\ /\ y$ a nadiktuje domácnostiam takú spotrebu, ktorá maximalizuje užitočnosť reprezentatívnej domácnosti, potom miera rastu, označme γ_p, zodpovedá vzťahu

$$\gamma_p = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[\left(1 - \frac{g}{y}\right).\Phi\left(\frac{g}{k}\right) - \rho\right]. \tag{1.8}$$

Výraz v zátvorke naľavo od znamienka mínus vyjadruje spoločenský hraničný výnos kapitálu (*social return on capital*). Podmienka $g/k = (g/y).\Phi(g/k)$ umožňuje vyjadriť mieru rastu γ_p v závislosti od nastavenia miery vládnych výdavkov v tvare

$$\frac{d\gamma_p}{d(g/y)} = \frac{\Phi(g/k).(\Phi' - 1)}{\sigma(1-\eta)}. \tag{1.9}$$

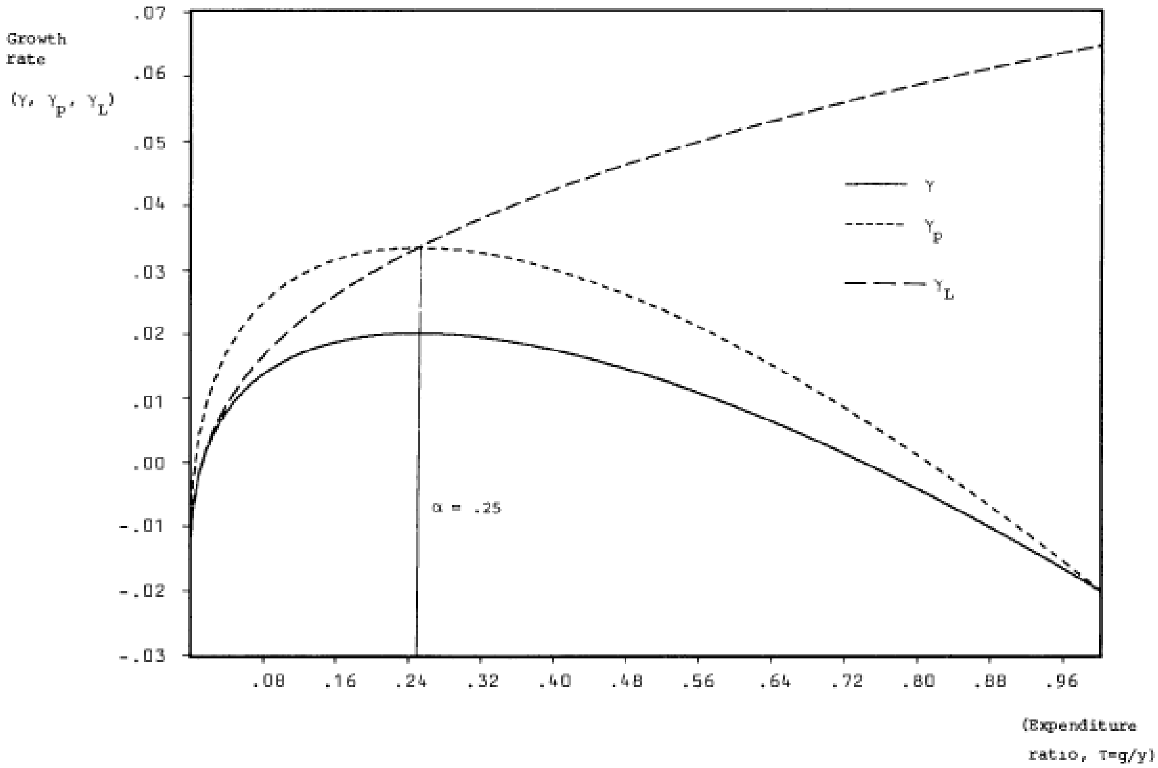
Keďže 0 < η <1, výraz (1.9) nadobúda maximum za platnosti podmienky produktívnej efektívnosti pre g, $\Phi' = 1$, a to bez ohľadu na tvar produkčnej funkcie. Ako uvádza Barro je možné ukázať, že maximalizácia rastu spotreby v tomto prípade zodpovedá maximalizácii užitočnosti. Preto centrálny plánovač volí pomer verejných výdavkov k produkcii taký, že platí $\Phi' = 1$.

Miery rastu spotreby γ a γ_p sa líšia vo výrazoch zodpovedajúcich súkromnému hraničnému výnosu kapitálu a spoločenskému hraničnému výnosu kapitálu. Porovnaním týchto veličín

$$(1-\tau).\Phi\left(\frac{g}{k}\right).(1-\eta) \leftrightarrow \left(1 - \frac{g}{y}\right).\Phi\left(\frac{g}{k}\right)$$

vidíme, že rast spotreby v ekonomike centrálneho plánovača γ_p vždy prevýši rast γ v decentralizovanej ekonomike pre akúkoľvek voľbu $\tau = g / y$. Autor konštatuje, že daň z príjmu a sloboda vo voľbe medzi spotrebou a úsporami vedú k malému rastu.

Graf 5: Miera rastu v závislosti od g/y[9] (podľa Barro [3] s. S110)



Graf 5 popis: Miera rastu pre 3 nastavenia fiškálnej politiky – decentralizovaná ekonomika, ekonomika centrálneho plánovača, decentralizovaná ekonomika s paušálnou daňou. Miery rastu $\gamma, \gamma_P, \gamma_L$ zodpovedajú vzťahom (1.6), (1.8), (1.10) pri hodnote parametrov $\sigma = 1,\ \alpha = 0{,}25,\ \rho = 0{,}02, A^{1/\alpha} = 0{,}113$

Barro tiež rozvíja diskusiu o zavedení paušálnej dane zo spotreby v decentralizovanej ekonomike. V takomto prípade súkromný hraničný produkt kapitálu je $\partial y / \partial k$ a príslušný rast spotreby γ_L zodpovedá rovnici

$$\gamma_L = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[\Phi\left(\frac{g}{k}\right).(1-\eta) - \rho\right]. \tag{1.10}$$

Pri zavedení paušálnej dane do decentralizovanej ekonomiky pozorujeme, že vyšší výnos kapitálu vedie domácnosti k vyššej miere rastu spotreby. Autor analýzou vzťahov pre γ_p a γ_L ukázal, že v prípade optimálneho nastavenia pomeru g/y (t. j. keď $\Phi' = 1$) centrálnym plánovačom, paušálna daň v decentralizovanej ekonomike replikuje plánované optimum (*planning optimum*).

9 *expenditure ratio* = podiel vládnych výdavkov *g* z produkcie *y*

Barro v článku argumentoval, že domácnosť má sklon vyžadovať určitý štandard verejných služieb, čo aproximoval konštantným pomerom vládnych výdavkov k produkcii. Takáto formulácia problému zodpovedá úlohe centrálneho plánovača. Do autorových úvah vstúpili vládne výdavky, ktoré zvyšujú úžitok reprezentatívnej domácnosti, avšak nie sú produkčným faktorom. K pôvodne zavedeným vládnym výdavkom *g* pribudla vládna spotreba (*government´s consumption services*) *h*. Funkcia užitočnosti v takto definovanej úlohe nadobúda tvar

$$u(c) = \frac{\left(c^{1-\beta}.h^{\beta}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}; 0 < \beta < 1.$$

Vyrovnaný štátny rozpočet je teraz daný rovnicou

$$T = \left(\tau_g + \tau_h\right).y,$$

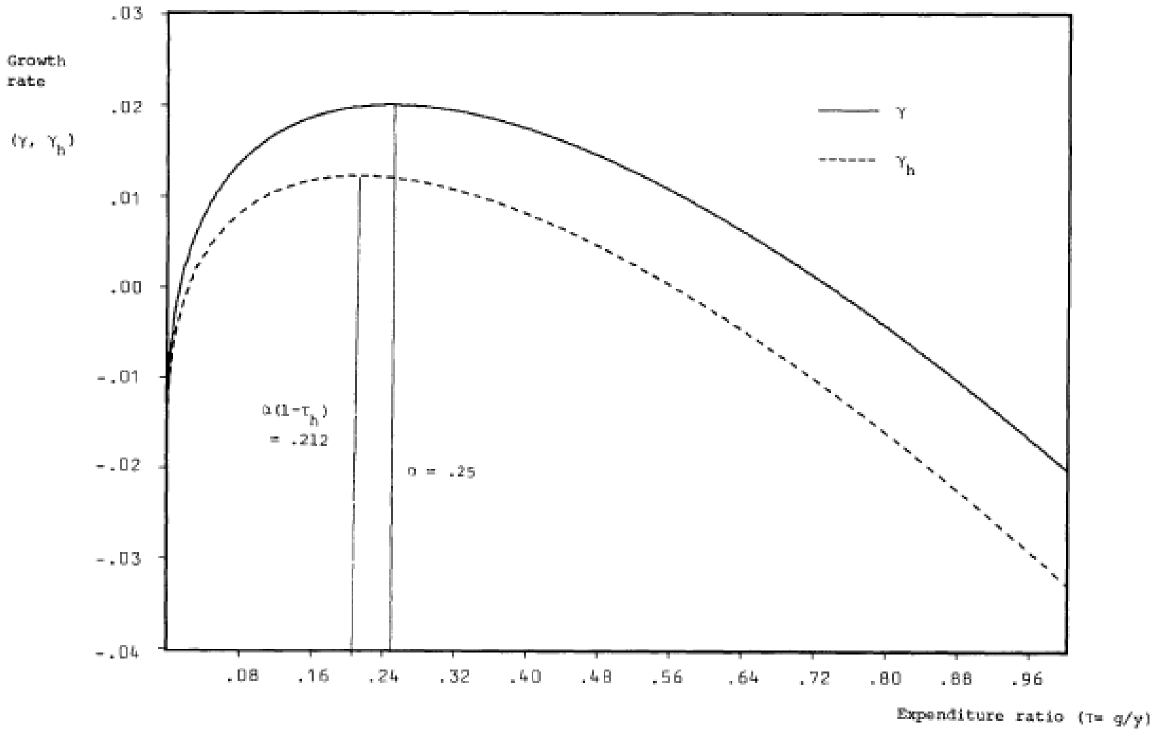
kde $\tau_g = g / y$ je podiel vládnych výdavkov určených do produktívneho sektora a $\tau_h = h / y$ je podiel vládnych výdavkov určených na vládnu spotrebu.

Decentralizovaná voľba domácnosti medzi spotrebou a úsporami (pri zadaných *g* a *h*) vedie k nasledujúcej miere rastu

$$\gamma_h = \frac{1}{\sigma}\left[\left(1 - \tau_g - \tau_h\right).\Phi\left(\frac{g}{k}\right).\left(1-\eta\right) - \rho\right]. \tag{1.11}$$

Uvažujúc Cobb-Doublasovu produkčnú funkciu a považujúc τ_h za dané, sa dá ukázať, že $\tau_g = g / y$, ktoré maximalizuje (1.11) zodpovedá výrazu $\alpha\left(1-\tau_h\right)$, zatiaľ čo pri maximalizácii γ_p, t. j. maximalizácia vzťahu (1.8), to bola hodnota $\tau_g = \alpha$. To znamená, že optimálny (v zmysle maximalizácie miery rastu) podiel verejných výdavkov do produktívneho sektora sa pri zavedení vládnej spotreby zníži. Autor na základe toho ukazuje, že i napriek využitiu modelu centrálneho plánovača, maximalizácia rastu v tomto prípade nezodpovedá maximalizácii užitočnosti.

Graf 6: Miera rastu pri poskytovaní verejných služieb (podľa Barro [3] s. S118)



Graf 6 popis: Porovnanie mier rastu v prípade, že ekonomika neposkytuje resp. poskytuje vládne služby. γ, γ_h zodpovedajú rovniciam (1.6) resp. (1.11) pri parametroch $\tau_h = 0{,}15$, $\sigma = 1$, $\alpha = 0{,}25$, $\rho = 0{,}02, A^{1/\alpha} = 0{,}113$.(1.6)

1.2.2 Štruktúra vládnych výdavkov a ekonomický rast

Typickým sprievodným javom Európskej dlhovej krízy je snaha vlád riadiť dlh, čo pre niektoré krajiny znamená podnikanie krokov, ktoré majú za cieľ udržať dlh na uzde, no pre iné to predstavuje neodkladné znižovanie zadlženia. Pozorujeme, že vlády akoby prepadli panike a podnikajú kroky, ktorých dopady na vývoj dlhu sú viditeľné v relatívne krátkom čase, avšak prinášajú nežiaduce deformácie a dlhodobá udržateľnosť dlhu je otázna. Spomeňme konkrétne škrty na výdavkovej strane štátneho rozpočtu. Ako ukázal Barro, prílev verejných výdavkov do ekonomiky má dvojaký efekt v závislosti od ich použitia. V prípade ich alokácie do produktívneho sektora sa rastový potenciál ekonomiky zvyšuje. Na druhej strane, verejné výdavky do neproduktívneho sektora tento efekt tlmia. Preto zastávame názor, že nie je rozhodujúce koľko krajina ušetrí na výdavkoch, ale to odkiaľ ukrajuje, resp. ako mení štruktúru vládnych výdavkov.

I empirické štúdie potvrdzujú, že má zmysel pristupovať k vládnym výdavkom na dezagregovanej báze, nakoľko vplyv jednotlivých položiek týchto výdavkov na ekonomiku je rozdielny. Zatiaľ čo jedny sú hnacím motorom ekonomiky, druhé ju spomaľujú, avšak prispievajú k zvyšovaniu užitočnosti spoločnosti a môžu byť dokonca nevyhnutné pre plnenie jej úloh.

V literatúre sa stretávame s analýzou štruktúry vládnych výdavkov u viacerých autorov. Nadväzujúc na prácu Barro-a, Devarjan a kol. [8] analyzovali vzťah štruktúry vládnych výdavkov a ekonomického rastu v rozvojových krajinách, pričom vychádzali z optimálnej fiškálnej politiky. Uvažujúc dve produktívne služby a predpokladajúc, že jedna je a priori produktívnejšia ako druhá, dospeli k záveru, že produktívnejší typ verejných výdavkov nezvýši mieru rastu, ak je jeho počiatočná úroveň príliš vysoká. Ghosh a Roy [11] zahrnutím oboch typov verejných výdavkov do produkčnej funkcie ukázali, že optimálna fiškálna politika s vyrovnaným štátnym rozpočtom závisí nielen od daňovej sadzby, ale aj od rozdelenia daňových príjmov do akumulácie verejného kapitálu a provízie z verejných služieb.

Zaradenie jednotlivých výdavkov do produktívneho resp. neproduktívneho sektora nie je v literatúre jednoznačné. Do produktívneho sektora sa zvyčajne zaraďujú odvetvia, ktoré prispievajú k zveľaďovaniu ľudského kapitálu (vzdelanie, zdravotná starostlivosť) ako i dopravná infraštruktúra, komunikácie a pod. Za neproduktívne výdavky sa zvyknú označovať tie, ktoré sú vynakladané na zabezpečenie bezpečnosti a poriadku v štáte a výdavky na sociálnu starostlivosť. Cullison [5] testom Grangerovej kauzality potvrdil štatisticky a numericky signifikantný efekt určitých vládnych výdavkov na ekonomický rast. Konkrétne dospel k záveru, že výdavky do vzdelania, do tréningu pracovných zručností (*labor training*) a do civilnej bezpečnosti vplývajú Granger kauzálne na ekonomický rast. Nakoľko si v tejto práci nekladieme za cieľ klasifikovať jednotlivé verejné výdavky, budeme podobne ako Barro a Devarjan predpokladať, že túto klasifikáciu máme k dispozícii.

1.2.3 Dlh a ekonomický rast

Jedným zo silných predpokladov Barro-ovej jednoduchej ekonomiky bol predpoklad vyrovnaného štátneho rozpočtu. V takto hospodáriacej ekonomike nemôže vzniknúť dlh, ktorý je však v dnešnej dobe ťažiskom problémov mnohých krajín. Preto v tejto práci upúšťame od tohto predpokladu a uvažujeme, že krajina môže vytvárať deficit rovnako ako i prebytok štátneho rozpočtu. To tiež znamená, že do našich úvah zahŕňame akumuláciu dlhu. Keďže sa jedná o dôležitý aspekt fiškálnej politiky, bola a je v literatúre tejto téme venovaná patričná pozornosť.

Fiškálne politiky markantnej časti krajín viedli k vytváraniu verejného dlhu. Ten sa postupne kumuloval z primárnych deficitov, ktoré dlhé roky produkovala častokrát priveľká a nedisciplinovaná vláda (pozri kapitolu 1.1).

Mnohé teoretické práce poukazujú na negatívny vzťah medzi dlhom krajiny a jej hospodárskym rastom. Spomeňme pár príkladov. Adam a Bevan [1] našli interakciu medzi dlhom a rastom ekonomiky. V jednoduchom teoretickom modeli ukázali, že zvýšenie produktívnych vládnych výdavkov, ktoré sú financované zvýšením daňovej sadzby, podnieti hospodársky rast len v prípade, že domáci verejný dlh je dostatočne malý. Saint-Paul [23] a Aizenman a kol. [2] analyzovali v modeli endogénneho rastu dopad fiškálnej politiky, ktorú aproximovali okrem iného úrovňou verejného dlhu, a taktiež našli negatívny vzťah.

Akumulácia verejného dlhu môže ovplyvniť rast ekonomiky prostredníctvom dlhodobých úrokových mier. Zvyšovanie výnosov vládnych dlhopisov môže viesť k zvýšeniu úrokových mier v súkromnom sektore a k zníženiu rastu súkromných výdavkov zo strany firiem i spotrebiteľov. S problematikou dlhu súvisí i Krugmanom [18] zavedený termín *debt overhang*. Ten predstavuje situáciu, v ktorej očakávaná schopnosť krajiny splatiť svoj externý dlh klesá pod úroveň kontrahovanej hodnoty dlhu. Teda, do určitej prahovej hodnoty akumulácia zahraničného dlhu môže viesť k rastu investícií, avšak prekročením tejto hranice debt overhang spôsobí neochotu investorov poskytovať krajine kapitál, prípadne riziková prémia, ktorú budú požadovať, bude krajine znemožňovať nielen financovanie nového prírastku dlhu ale i samotné rolovanie starého dlhu. So stanovením tejto prahovej hodnoty sa stretávame napríklad u Reinhart a Rogoff [22], Kumar a Woo [19], Baum, Checherita-Westphal a Rother [4].

Reinhart a Rogoff [22] analyzovali vývoj hrubého dlhu centrálnych vlád a dlhodobého rastu reálneho HDP na vzorke 20 rozvinutých krajín za obdobie od 1790 do 2009. Zistili, že vzťah medzi vládnym dlhom a dlhodobým rastom je zanedbateľný, ak je dlh pod hranicou 90 % HDP, no nad touto hranicou klesla mediánová miera rastu o 1 % a priemerná podstatne viac. Podobné správanie zaznamenali i Kumar a Woo [19].

Baum, Checherita-Westphal a Rother [4] na vzorke dát 12 krajín eurozóny za obdobie 1990 - 2010 analyzovali nelineárny vzťah úrovne dlhu k HDP a rastu HDP v krátkodobom horizonte. Empirickou analýzou založenou na dynamických a nedynamických modeloch prahových hodnôt (*dynamic and non-dynamic threshold models*) dospeli k záveru, že dopad dlhu na rast je pozitívny a štatisticky signifikantný, no v prípade, že dlh k HDP presiahne hranicu 67 % tento pozitívny dopad sa vytráca (blíži sa k nule) a stráca signifikantnosť. Ak je dlhový pomer vysoký (nad 95 %), prírastok dlhu má negatívny dopad na ekonomickú aktivitu. Navyše ukázali, že dlhodobá úroková miera je vystavená tlakom nahor, keď pomer dlhu k HDP vystúpi nad 70 %, čo podporuje vyššie uvedené zistenia.

2 Optimálna fiškálna politika pri dlhovej brzde

Riešenie aktuálnej situácie v eurozóne považujeme za výzvu, preto sme si kládli za cieľ sformulovať model, ktorý by nám poskytol priestor na analýzu fiškálnej politiky, a tak umožnil identifikovať jej optimálne nastavenie, ktoré by viedlo k dlhodobo udržateľnému rastu ako i k dlhodobo udržateľným verejným financiám. Za základ sme si zvolili Barrov jednoduchý model endogénneho rastu s dvomi typmi verejných výdavkov. Tento model považujeme za vhodný pre jeho prehľadnosť a výpovednú hodnotu. K realite sme sa snažili priblížiť uvoľnením predpokladu o vyrovnanom štátnom rozpočte, čo zároveň znamenalo i nutnosť zahrnutia akumulácie dlhu do našich úvah.

Model je sformulovaný ako spojitá úloha optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte. Pri analýze modelu sa opierame o výsledky teórie optimálneho riadenia, konkrétne používame Pontrjaginov princíp maxima (pozri napr. Halická a Jurča [16]).

Vo formulácii označujeme parciálnu deriváciu ľubovoľnej funkcie f podľa premennej x výrazom f_x. Analogicky, druhá derivácia funkcie f podľa premennej y bude označená f_{xy}.

2.1 Formulácia modelu

Uvažujeme uzavretú ekonomiku, v ktorej pôsobia tri subjekty – domácnosti, firmy a vláda. Ako vyplýva z identity HDP (označme Y) pre túto ekonomiku, investície sú súčtom súkromných úspor S a verejných úspor (T - G).

$$C + I + G = Y = C + S + T$$
$$I = S + (T - G)$$

Veľkosť verejného sektora G má priamy vplyv na úroveň investícií I krajiny. Financovanie verejných výdavkoch je štandardne zabezpečované daňovými príjmami T a emisiou štátnych cenných papierov (dlhopisov, štátnych pokladničných poukážok a pod.). V nasledujúcej analýze abstrahujeme od paušálnej dane a uvažujeme jednotnú proporcionálnu daňovú sadzbu τ, pričom sa obmedzíme len na daň z príjmu. Daňové príjmy vyberané prostredníctvom proporcionálnej dane znižujú disponibilný príjem domácností a tým, za predpokladu konštantného marginálneho sklonu k spotrebe, aj súkromné úspory a spotrebu domácností. Financovanie deficitu prostredníctvom cenných papierov zvyšuje zadlženosť krajiny voči súkromnému sektoru. Kumuluje sa dlh, ktorého obsluha (úrokové náklady) ukrajuje z príjmov štátneho rozpočtu, čo pri zachovaní veľkosti vlády vytvára tlak na zvyšovanie daňového zaťaženia, či ďalšieho zadlžovania. V tomto kontexte sa ukazuje dôležitejšia štruktúra vládnych výdavkov ako samotná veľkosť verejného sektora. Preto, podobne ako Barro [3] rozlišujeme dva typy verejných výdavkov – produktívne G_P a neproduktívne G_N, $G = G_P + G_N$. Predpokladáme, že vládne výdavky do produktívneho sektora podporujú rast produkcie. Naopak, o vládnych výdavkoch do neproduktívneho sektora predpokladáme, že zvyšujú úžitok reprezentatívnej domácnosti.

Na základe uvedeného definujeme funkciu užitočnosti $U(.)$ nekonečne žijúcej spoločnosti v každom čase t ako funkciou spotreby C a vládnych výdavkov do neproduktívneho sektora G_N:

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} U(C, G_N)\,dt\,, \tag{2.1}$$

kde $\rho > 0$ je konštantná miera časovej preferencie. Pohybujeme sa v priestore decentralizovanej ekonomiky. Cieľom vlády je nájsť také nastavenie fiškálnej politiky, ktoré maximalizuje diskontovanú užitočnosť spoločnosti. Aby také riešenie existovalo, funkcia užitočnosti musí byť konkávna. Preto predpokladáme

$$\begin{aligned} U_C &> 0, & U_{CC} &< 0, & C &> 0; \\ U_{G_N} &> 0, & U_{G_N G_N} &< 0, & G_N &> 0; \\ U_{CG_N} &\geq 0, & U_{G_N C} &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Štandardne predpokladáme, že spotreba je funkciou disponibilného príjmu $(1-\tau)Y$. Spotreba je definovaná ako podiel disponibilného príjmu určený na spotrebu, pričom tento podiel je exogénne zadaný prostredníctvom konštantného hraničného sklonu k spotrebe c.

$$C = c(1 - \tau)Y$$

Uvažujeme jednosektorovú ekonomiku s dvomi výrobnými faktormi – kapitálom K a vládnymi výdavkami do produktívneho sektora G_P. O vládnych výdavkoch smerujúcich do produktívneho sektora predpokladáme, že majú multiplikatívny efekt na úroveň produkcie Y.

$$Y(K,\ G_P) = F_1(G_P).F_2(K) \tag{2.3}$$

Predpokladáme, že hraničný produkt kapitálu i vládnych výdavkov do neproduktívneho sektora je kladný s klesajúcim prírastkom

$$\begin{aligned} &Y_K > 0, \qquad Y_{KK} < 0, \qquad K > 0; \\ &Y_{G_P} > 0, \qquad Y_{G_P G_P} < 0, \qquad G_P > 0; \\ &Y_{KG_P} = Y_{G_P K} > 0. \end{aligned}$$

Ďalej predpokladáme, že produkčná funkcia spĺňa Inadove podmienky, ktoré sú definované v tvare

$$\begin{aligned} &\lim_{K \to 0} Y_K = \infty, \qquad &\lim_{K \to \infty} Y_K = 0; \\ &\lim_{G_P \to 0} Y_{G_P} = \infty, \qquad &\lim_{G_P \to \infty} Y_{G_P} = 0. \end{aligned}$$

Ako vyplýva z identity HDP, produkcia môže byť spotrebovaná alebo použitá na generovanie ďalšej produkcie, alebo alokovaná vládnym sektorom.

$$Y = C + I + G$$

Akumulácia kapitálu v takto definovanej ekonomike zodpovedá rovnici

$$\dot{K} = Y[1 - c(1 - \tau)] - G_P - G_N - \delta K\,, \tag{2.4}$$

kde δ predstavuje konštantnú exogénne zadanú mieru depreciácie kapitálu.

Kumulovaním deficitov vzniká krajine verejný dlh B. Prírastok dlhu (2.5) je súčtom úrokov z vládneho dlhu rB, kde r je reálna úroková miera, a primárneho deficitu štátneho rozpočtu $G_P + G_N - \tau Y$.

$$\dot{B} = rB + G_P + G_N - \tau Y \tag{2.5}$$

Optimálne nastavenie fiškálnej politiky budeme hľadať pri ohraničení na úroveň dlhu, pri tzv. dlhovej brzde. Slovensko i ostatné krajiny Európskej menovej únie sa svojim vstupom do menovej únie zaviazali plniť Pakt stability a rastu [9], ktorý ich zaväzuje inter alia udržiavať dlh pod hranicou 60 % HDP. Preto uvažujeme dlhovú brzdu na úrovni 60% a príslušné ohraničenie definujeme v tvare

$$0{,}6Y - B \geq 0\,. \tag{2.6}$$

Na základe uvedených predpokladov sme sformulovali problém optimálnej fiškálnej politiky pri dlhovej brzde ako spojitú úlohu optimálneho riadenia (2.I) na nekonečnom časovom horizonte s dvomi stavovými (K a B) a dvomi riadiacimi (G_P a G_N) premennými, s Lagrangeovou účelovou funkciou, so zmiešaným ohraničením na stav a riadenie.

$$\max_{\{G_N, G_P\}} \int_0^\infty e^{-\rho t} U\big(C(t), G_N(t)\big) dt, \quad \rho > 0$$

za podmienok

$$\begin{aligned}
&\dot{K}(t) = Y(t)[1 - c(1-\tau)] - G_P(t) - G_N(t) - \delta K(t), \quad t \in (0,\infty) \\
&\dot{B}(t) = rB(t) - \tau Y(t) + G_P(t) + G_N(t), \quad t \in (0,\infty) \\
&0{,}6Y(t) - B(t) \geq 0, \quad t \in (0,\infty) \\
&K(0) = K_0 > 0 \\
&B(0) = B_0 > 0 \\
&\left.\begin{array}{l} \mathrm{K(t)} > 0 \\ \mathrm{G_P(t)} > 0 \\ \mathrm{G_N(t)} > 0 \end{array}\right\} \quad \mathrm{t} \in (0,\infty)
\end{aligned} \tag{2.I}$$

2.2 Kvalitatívna analýza

Riešením definovaného problému (2.I) sú optimálne trajektórie verejných výdavkov do produktívneho sektora a verejných výdavkov do neproduktívneho sektora a optimálne trajektórie kapitálu a dlhu. Riešenie závisí od definovania funkcie užitočnosti (2.1), produkčnej funkcie (2.3) a hodnoty nezáporných parametrov – diskontného faktora ρ, depreciácie kapitálu δ, daňovej sadzby τ, hraničného sklonu k spotrebe c, reálnej úrokovej miery r ako i od počiatočného stavu kapitálu K_0 a dlhu B_0.

Teória optimálneho riadenia vyvodzuje nutné podmienky optimality tohto typu úlohy z Lagrangeovej funkcie, ktorá má pre nami sformulovanú úlohu tvar

$$L = \psi^0 U(C, G_N) + \psi_K \{Y[1 - c(1-\tau)] - G_P - G_N - \delta K\} + \\ + \psi_B [rB - \tau Y + G_P + G_N] + \mu[0{,}6Y - B] \tag{2.7}$$

kde $\psi^0 = 1$ (uvádzame bez dôkazu); ψ_K, ψ_B sú adjungované premenné a μ je Lagrangeov multiplikátor.

Hodnota adjungovanej premennej $\psi_x(t)$ zodpovedá hraničnej hodnote účelovej funkcie pri dodatočnej malej jednotke premennej x v čase t, za predpokladu, že sa pre zvyšok obdobia bude plánovať optimálne (pozri Halická a Jurča [16] s. 76 – 77, Chachuat [6] s. 123 - 126). Ekonomicky je teda interpretovateľná ako tieňová cena premennej x. Hodnota $\psi_K(t)$ teda vyjadruje, ako sa zmení užitočnosť, ak by do produkcie vstúpila dodatočná malá jednotka kapitálu. Podobne, $\psi_B(t)$ zodpovedá zmene hodnoty funkcionálu užitočnosti pri dodatočnom infinitezimálnom navýšení dlhu.

Lagrangeov multiplikátor predstavuje mieru zmeny hodnoty účelovej funkcie vzhľadom na zmenu parametra ohraničenia (pozri Luptáčik [20] s. 126 - 127, Silberberg a Suen [24] s. 166 – 169). V našom prípade vyjadruje zmenu užitočnosti pri uvoľnení dlhovej brzdy.

Aplikujúc Pontrjaginov princíp maxima získavame nutné podmienky optimality

$$L_{G_N} = U_{G_N} - \psi_K + \psi_B = 0 \tag{2.8}$$

$$L_{G_P} = c(1-\tau)U_C Y_{G_P} + \psi_K \{[1 - c(1-\tau)]Y_{G_P} - 1\} + \psi_B (1 - \tau Y_{G_P}) + 0{,}6\mu Y_{G_P} = 0 \tag{2.9}$$

$$\mu \geq 0, \quad \mu(0{,}6Y - B) = 0; \tag{2.10}$$

Úroveň produkcie závisí od objemu vstupov, teda od objemu kapitálu a verejných výdavkov do produktívneho sektora. Za predpokladu konštantného marginálneho sklonu k spotrebe c teda očakávame, že tieňová cena kapitálu je kladná

$$\psi_K > 0, \tag{2.11}$$

nakoľko navýšenie kapitálových vstupov vedie k rastu produkcie, rast produkcie k rastu spotreby a tým sa zvyšuje úžitok. Z podmienky (2.8) a z vlastností funkcie užitočnosti (2.2) potom vyplýva, že tieňová cena kapitálu musí byť väčšia ako tieňová cena dlhu, teda platí vzťah

$$\psi_K > \psi_B. \tag{2.12}$$

Tento vzťah adjungovaných premenných znamená, že funkcionál užitočnosti reaguje na zmenu kapitálu citlivejšie ako na rovnakú zmenu dlhu.

Z podmienky (2.8) ďalej čítame, že rozdiel tieňovej ceny akumulácie kapitálu a tieňovej ceny akumulácie dlhu pozdĺž optimálnej trajektórie zodpovedá hraničnej užitočnosti verejných výdavkov do neproduktívneho sektora. To znamená, že rast hraničnej užitočnosti neproduktívnych výdavkov, ktorý podľa vlastností funkcie užitočnosti nastáva pri poklese neproduktívnych výdavkov, musí byť na optimálnej trajektórii kompenzovaný nárastom hodnoty rozdielu tieňových cien $(\psi_K - \psi_B)$. Analyzujme teda priebeh zmeny, ktorú vyvolá pokles G_N (ceteris paribus). Znížením neproduktívnych výdavkov sa zníži primárny deficit, resp. zvýši primárny prebytok štátneho rozpočtu. Vláda tak ukrajuje zo súkromných investícií menej, resp. poskytuje súkromnému sektoru verejné úspory, čím sa navyšuje kapitál. Majúc na zreteli predpoklad (2.11) tvrdíme, že sa zvyšuje hodnota ψ_K. Zároveň sa tiež zmenšuje prírastok dlhu. V tomto prípade však nevieme jednoznačne posúdiť, ako sa správa ψ_B. S určitosťou však vieme povedať, že prírastok ψ_K prevýši zmenu ψ_B. (2.8) teda implikuje, že pokles úžitku spôsobený znížením neproduktívnych výdavkov je zmiernený druhotným zvýšením úžitku cez kapitálový efekt a efekt zníženia dlhu.

Vzťah (2.12) nekladie obmedzenie na znamienko tieňovej ceny akumulácie dlhu. ψ_B teda môže nadobúdať kladnú i zápornú hodnotu. To nabáda k očakávaniu, že existuje prahová hodnota dlhu, pri prekročení ktorej zadlženie spôsobuje zníženie úžitku, zatiaľ čo pod touto hranicou dlh pozitívne ovplyvňuje životnú úroveň v spoločnosti. Tento výsledok je konzistentný s výsledkami súčasných štúdií (pozri kapitolu 1.2.3).

Využitím vzťahu (2.8), môžeme podmienku (2.9) pre jasnejšiu interpretáciu zapísať v tvare

$$U_{G_N} + \tau\psi_B Y_{G_P} = Y_{G_P}\left(c(1-\tau)U_C + \psi_K\left(1 - c(1-\tau)\right) + 0{,}6\mu\right). \qquad (2.13)$$

Vzťah (2.13) predstavuje podmienku pre prerozdelenie verejných výdavkov v zmysle rovnováhy marginálnych užitočností, ktoré generujú verejný a súkromný sektor. Na ľavej strane máme hraničnú užitočnosť generovanú verejným sektorom a na strane pravej hraničnú užitočnosť vytvorenú súkromným sektorom. Kvôli názornosti výkladu označujeme infinitezimálnu zmenu G_P pojmom dodatočná jednotka, teda popisujeme prípad navýšenia G_P o malú jednotku. Hraničná užitočnosť neproduktívnych výdavkov, U_{G_N}, upravená o efekt zmeny dlhu, $\tau\psi_B Y_{G_P}$, vyvolaný zmenou výdavkov do produktívneho sektora (t. j. ľavá strana rovnice) má zodpovedať hraničnej užitočnosti, ktorú generuje dodatočná jednotka produktívnych výdavkov alokovaná do produkčného procesu (t. j. pravá strana rovnice). Dodatočná jednotka G_P ovplyvňuje užitočnosť cez dva kanály. Z vlastností produkčnej funkcie vyplýva, že navýšením objemu vstupov G_P sa zvýši úroveň produkcie. Dodatočná jednotka G_P však zároveň zníži akumuláciu kapitálu. Preto hraničná užitočnosť dodatočnej jednotky G_P je súčtom nepriameho efektu na užitočnosť (cez zmenu spotreby spôsobenú zmenou úrovne produkcie), $c(1-\tau)U_C Y_{G_P}$, a efektu na akumuláciu kapitálu, $\psi_K(1-c(1-\tau))Y_{G_P}$. Keďže v prípade neúmerného zadlženia (rozumieme zadlženie aktivujúce dlhovú brzdu) vstupuje do modelu istá forma pokuty prostredníctvom lagrangeovho multiplikátora, hraničný úžitok pri dodatočnej jednotke G_P musí vo verejnom sektore pre zachovanie optimality generovať marginálny úžitok navýšený o túto „pokutu“: $0{,}6\mu Y_{G_P}$.

Rovnica (2.14) je ekvivalentná rovnici (2.13), a pomôže nám ďalej analyzovať alokáciu verejných výdavkov do produktívneho a do neproduktívneho sektora a navyše sformulovať alokačné pravidlo optimálnej fiškálnej politiky.

$$\frac{U_{G_N}}{Y_{G_P}} = c(1-\tau)U_C + \psi_K(1-c(1-\tau)) - \psi_B\tau + 0{,}6\mu \tag{2.14}$$

Uvažujme dve krajiny - krajinu A a krajinu B. Obe tieto krajiny sa vyznačujú rovnakými charakteristikami až na úroveň zadlženia. Krajina A je fiškálne zodpovedná a udržiava svoj dlh bezpečne pod úrovňou dlhovej brzdy, $\mu_A = 0$. Naopak krajina B podľahla fiškálnemu alkoholizmu a je po uši v dlhoch, teda jej dlhový pomer prekročil dlhovú brzdu, $\mu_B > 0$. Označme $\xi_X := \left(U_{G_N} / Y_{G_P}\right)_X$, kde X zodpovedá indexu krajiny.

$$\xi_A = c(1-\tau)U_C + \psi_K[1-c(1-\tau)] - \psi_B\tau$$
$$\xi_B = c(1-\tau)U_C + \psi_K[1-c(1-\tau)] - \psi_B\tau + 0{,}6\mu_B$$

Keďže krajiny A a B sú identické až na pozíciu dlhu vzhľadom na dlhovú brzdu platí vzťah $\xi_A < \xi_B$. To znamená, že na optimálnej trajektórii je pomer hraničnej užitočnosti G_N k hraničnému produktu G_P menší ak je zadlženie krajiny pod dlhovou brzdou v porovnaní so situáciou, keď je táto hranica dosiahnutá. Z konkávnosti funkcie užitočnosti a produkčnej funkcie potom vyplýva nasledujúce alokačné pravidlo optimálnej fiškálnej politiky.

(P1) *V čase nadmerného zadlženia sa optimálne správanie vlády vyznačuje prerozdelením verejných výdavkov v prospech produktívneho sektora.*

Vynára sa otázka, ako alokačné pravidlo reaguje na zmenu daňovej sadzby. Zderivujeme ξ podľa τ.

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -cU_C - c^2(1-\tau)U_{CC}Y + c\psi_K - \psi_B \tag{2.15}$$

Označme σ_C elasticitu marginálnej užitočnosti spotreby, ktorá je definovaná

$$\sigma_C = -C\frac{U_{CC}}{U_C} = -c(1-\tau)Y\frac{U_{CC}}{U_C} > 0 \tag{2.16}$$

Potom z (2.15) vyplývajú nasledujúce vzťahy pre reakciu optimálneho alokačného pravidla.

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \begin{cases} > 0 \text{ ak } & c\left[U_C(\sigma_C - 1) + \psi_K\right] > \psi_B \\ < 0 \text{ ak } & c\left[U_C(\sigma_C - 1) + \psi_K\right] < \psi_B \end{cases}$$

Vidíme, že vplyv zmeny daňovej sadzby závisí od charakteristík ekonomiky a je ťažko interpretovateľný.

Vplyvy, ktoré ovplyvňujú správane tieňových cien nám pomôžu skúmať adjungované rovnice

$$\dot{\psi}_K = -Y_K\{c(1-\tau)U_C + [1-c(1-\tau)]\psi_K - \tau\psi_B + 0{,}6\mu\} + \psi_K(\rho+\delta) \tag{2.17}$$

$$\dot{\psi}_B = \psi_B(\rho - r) + \mu \tag{2.18}$$

Keďže v každom čase t očakávame, že $\psi_K > 0$ a keďže z rovnice (2.8) a (2.9) vyplýva, že výraz pri Y_K je kladný, potom tvrdíme, že pri vyššej úrovni hraničného produktu kapitálu je prírastok $\dot{\psi}_K$ menší. V prípade, že spotreba poklesne (ceteris paribus) zvýši sa hraničná užitočnosť spotreby a prírastok tieňovej ceny akumulácie kapitálu sa zníži.

Adjungovaná rovnica (2.18) popisuje správanie prírastku tieňovej ceny akumulácie dlhu. Vieme, že ψ_B môže nadobúdať kladné i záporné hodnoty. Nevieme však jednoznačne určiť prahovú hodnotu zadlženia, pri ktorej sa ψ_B preklápa do záporných hodnôt. Rozdeľme teda analýzu na dva intervaly: $\psi_B \in (-\infty; 0)$ a $\psi_B \in (0; \infty)$.

Predpokladajme, že $\psi_B > 0$. Ak je diskontná miera ρ väčšia ako reálna úroková miera r, $\rho > r$, ψ_B je v každom čase t rastúcou funkciou. Ak medzi ρ a r platí vzťah opačný (teda $\rho < r$), ψ_B je klesajúcou funkciou času dovtedy, kým hodnota lagrangeovho multiplikátora μ neprevýši hodnotu $\psi_B(\rho - r)$.

V prípade, že $\psi_B < 0$ a platí vzťah $\rho > r$, je ψ_B klesajúcou funkciou času, kým hodnota lagrangeovho multiplikátora neprevýši hodnotu výrazu $\psi_B(\rho - r)$. Ak naopak $\rho < r$, potom ψ_B je v každom čase t rastúcou funkciou.

3 Analytické riešenie

Ako sme už uviedli, optimálne riešenie závisí od tvaru funkcie užitočnosti a produkčnej funkcie, ako i od hodnoty parametrov.

Vo formulácii modelu predpokladáme, že funkcia užitočnosti je funkciou dvoch premenných – spotreby domácností a vládnych výdavkov do neproduktívneho sektora. Pri jej definovaní je teda dôležité analyzovať vzťah medzi týmito premennými.

V nasledujúcej časti práce podrobíme analýze dva modely – Model I a Model II - špecifikované pri rôznych predpokladoch o vzťahu súkromnej spotreby a neproduktívnych vládnych výdavkoch.

Model I vychádza z predpokladu, že verejné služby sú natoľko špecifické, že ich nemožno nahradiť súkromnou spotrebou. Tento predpoklad vedie k separovateľnosti užitočnosti spotreby od užitočnosti generovanej vládnymi výdavkami do neproduktívneho sektora.

Model II predpokladá, že verejná a súkromná spotreba sú do určitej miery vzájomne substituovateľné.

3.1 Model I

Predpokladajme, že vládna spotreba má v ekonomike špecifickú úlohu, ktorej plnenie si domácnosti nedokážu sami zabezpečiť. Súkromná spotreba nie je substitútom verejných služieb. Užitočnosť vládnej spotreby je v takom prípade separovateľná od užitočnosti spotreby domácností. Nech je teda užitočnosť spoločnosti (2.1) opísaná funkciou

$$U(C, G_N) = \ln\left(C^{\gamma} {G_N}^{1-\gamma}\right) = \ln(C^{\gamma}) + \ln({G_N}^{1-\gamma}),$$

kde $0 < \gamma < 1$ predstavuje relatívny podiel, akým sa spotreba C podieľa na úžitku spoločnosti v porovnaní s úžitkom, ktorý prinášajú verejné výdavky do neproduktívneho sektora G_N.

Ekonomika produkuje jeden homogénny statok. Predpokladáme, že technológia výroby (2.3) je opísaná Cob-Douglasovou produkčnou funkciou a využíva dva vstupy – súkromný kapitál K a verejné výdavky do produktívneho sektora G_P,

$$Y(K,G_P) = K^\alpha G_P{}^\beta .$$

Takto definovaná úloha optimálneho riadenia vedie na nasledujúci kanonický systém.

$$\dot{K} = K^\alpha G_P{}^\beta [1 - c(1-\tau)] - G_P - G_N - \delta K$$

$$\dot{B} = rB - \tau K^\alpha G_P{}^\beta + G_P + G_N$$

$$\dot{\psi}_K = \psi_K \left\{\rho + \delta - [1 - c(1-\tau)]\alpha K^{\alpha-1} G_P{}^\beta\right\} - \frac{\alpha\gamma}{K} + \alpha K^{\alpha-1} G_P{}^\beta (\tau\psi_B - 0{,}6\mu)$$

$$\dot{\psi}_B = \psi_B(\rho - r) + \mu$$

Pre uvedený systém majú algebraické rovnice pre kontrolné premenné získané maximalizáciou Lagrangeovej funkcie v kontrolných premenných nasledujúci tvar.

$$G_N = \frac{1-\gamma}{\psi_K - \psi_B}$$

$$G_P = \frac{\beta\left(\psi_K [1 - c(1-\tau)] K^\alpha G_P{}^\beta + \gamma - K^\alpha G_P{}^\beta (\tau\psi_B - 0{,}6\mu)\right)}{(\psi_K - \psi_B)}$$

3.1.1 Vnútorné riešenie Modelu I

Hľadajme rovnovážne riešenie vo vnútri množiny prípustných riešení. Dlhová brzda nie je aktívna, teda $\mu = 0$. V stabilnom stave je rast všetkých premenných nulový. Riešime teda systém

$$0 = K^\alpha G_P{}^\beta [1 - c(1-\tau)] - G_P - G_N - \delta K \tag{3.1}$$

$$0 = rB - \tau K^\alpha G_P{}^\beta + G_P + G_N \tag{3.2}$$

$$0 = \psi_K \left\{\rho + \delta - [1 - c(1-\tau)]\alpha K^{\alpha-1} G_P{}^\beta\right\} - \frac{\alpha\gamma}{K} + \alpha K^{\alpha-1} G_P{}^\beta \tau\psi_B \tag{3.3}$$

$$0 = \psi_B(\rho - r) \tag{3.4}$$

$$G_N = \frac{1-\gamma}{\psi_K} \tag{3.5}$$

$$G_P = \frac{\beta\gamma}{\psi_K} + \beta[1 - c(1-\tau)] K^\alpha G_P{}^\beta \tag{3.6}$$

Z rovnice (3.4) vyplýva, že adjungovaná premenná dlhu je v stabilnom stave nulová,

$$\psi_B = 0. \tag{3.7}$$

Sčítanie rovníc (3.1) a (3.2) nám umožní vyjadriť rovnicu pre dlh

$$B = \frac{1}{r}\left[\delta K - (1-\tau)(1-c)K^{\alpha} G_P{}^{\beta}\right] \tag{3.8}$$

Dosadením (3.7) za B do rovnice (3.2) vyjadrujeme optimálnu úroveň vládnych výdavkov do neproduktívneho sektora ako funkciu výrobných faktorov – kapitálu a produktívnych vládnych výdavkov

$$G_N = K^{\alpha} G_P{}^{\beta}\left[1 - c(1-\tau)\right] - Gp - \delta K\,. \tag{3.9}$$

Z rovnice (24) priamočiaro dostávame rovnicu pre adjungovanú premennú akumulácie kapitálu

$$\psi_K = \frac{1-\gamma}{K^{\alpha} G_P{}^{\beta}\left[1 - c(1-\tau)\right] - Gp - \delta K}\,. \tag{3.10}$$

Keďže premenné B, G_N a ψ_K sú funkciou kapitálu a produktívnych vládnych výdavkov, prostredníctvom ich substitúcie v rovniciach (3.3) a (3.6) získavame systém dvoch rovníc o dvoch neznámych

$$\begin{aligned} 0 &= \left[1 - c(1-\tau)\right]\beta K^{\alpha} G_P{}^{\beta} - (\beta\gamma + 1 - \gamma)G_P - \delta\beta\gamma K \\ 0 &= \alpha\left[1 - c(1-\tau)\right]K^{\alpha} G_P{}^{\beta} - \left[\delta\alpha\gamma + (1-\gamma)(\rho+\delta)\right]K - \alpha\gamma Gp \end{aligned}$$

Riešením tohto systému dostávame rovnice pre výdavky do produktívneho sektora

$$G_P = K\frac{\left[\alpha\delta\gamma(1-\beta) + (1-\gamma)(\rho+\delta)\right]}{\alpha(\beta\gamma + 1 - 2\gamma)}, \tag{3.11}$$

ako i pre kapitál

$$K = \left[\frac{\left[1 - c(1-\tau)\right]\left[\alpha\delta\gamma(1-\beta) + (1-\gamma)(\rho+\delta)\right]^{\beta}\left[\alpha(\beta\gamma + 1 - 2\gamma)\right]^{1-\beta}}{\alpha\delta\gamma(1-\gamma) + (\beta\gamma + 1 - \gamma)(1-\gamma)(\rho+\delta)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}. \tag{3.12}$$

Vidíme, že všetky premenné sú funkciami exogénnych premenných a parametrov. To potvrdzuje logickú závislosť stabilného stavu od charakteristík ekonomiky.

Vo formulácii úlohy (kapitola 2.1) sme uviedli a odôvodnili ohraničenia, ktoré kladieme na úroveň kapitálu a na jednotlivé vládne výdavky. Konkrétne, predpokladáme že nadobúdajú len kladné hodnoty. Z týchto ohraničení vyplývajú podmienky popisujúce vzťahy medzi parametrami modelu. To ale znamená, že nie každá ekonomika môže nadobudnúť stabilný stav.

Za dôležitý výsledok pokladáme vzťah pre parametre produkčnej funkcie.

$$\alpha + \beta \neq 1 \tag{3.13}$$

Optimálne riešenie vylučuje konštantné výnosy z rozsahu. Prípustné sú teda klesajúce výnosy z rozsahu, čo znamená $\alpha + \beta < 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Z Inadových podmienok vyplýva, že úroveň kapitálu musí byť kladná. Keďže pre jednotlivé parametre platí $0 < \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, c, \tau\} < 1$, z rovnice (3.12) odvádzame vzťah pre hodnotu parametra γ resp. β.

$$\gamma < \frac{1}{2-\beta} \quad resp. \quad \beta > 2 - \frac{1}{\gamma}. \tag{3.14}$$

Rovnako i úroveň jednotlivých verejných výdavkov musí byť kladná. Ak je splnená podmienka (3.14), tak je zabezpečená kladná hodnota produktívnych vládnych výdavkov. Dosadením do (3.12) a (3.11) za K a G_P v rovnici (3.9) sme schopní vyjadriť podmienku kladenú na hodnotu parametrov, ktorá musí byť splnená, aby bola úroveň neproduktívnych výdavkov kladná. Dostávame nerovnosť

$$(1-\beta)(\rho+\delta)\gamma + \delta\alpha(1-\gamma) < 0\,. \tag{3.15}$$

Keďže všetky parametre nadobúdajú hodnoty z intervalu (0; 1), podmienka (3.15) nebude nikdy splnená. Konštatujeme, že úloha nemá rovnovážne vnútorné riešenie.

V Modeli I nie je možné nájsť stabilný stav vo vnútri množiny prípustnýcch riešení, nakoľko neexistuje equilibrium, v ktorom by vládne výdavky do neproduktívneho sektora nadobúdali kladnú hodnotu. Neproduktívne verejné výdavky so špecifickou rolou sú pre ekonomiku natoľko nákladné, že nie je schopná dospieť k rovnovážnemu stavu.

Špecifická rola verejných služieb tak, ako sme ju definovali my, nie je typická pre všetky výdavky prúdiace do neproduktívneho sektora. Tieto výdavky sú skôr heterogénnou zmesou služieb, ktoré nemajú výlučne špecifickú rolu, a teda sú do určitej miery zastupiteľné súkromnou spotrebou. Tento vzťah verejných služieb a súkromnej spotreby zachytáva funkčná forma Modelu II.

Na základe uvedeného a majúc na zreteli stanovený cieľ nájsť dlhodobo udržateľnú fiškálnu politiku, v analýze Modelu I nebudeme pokračovať. Naše úsilie budeme sústrediť v Modeli II.

3.2 Model II

Teraz predpokladajme, že verejná spotreba je do určitej miery substitútom súkromnej spotreby. Predpokladajme, že funkcia užitočnosti (2.1) je Cobb-Douglasovská funkcia s parametrom γ, $0 < \gamma < 1$,

$$U(C, G_N) = C^{\gamma} G_N^{1-\gamma}. \qquad (3.16)$$

Rovnako ako v Modeli I predpokladáme, že ekonomika produkuje jeden homogénny statok, pričom využíva technológiu, ktorá je opísaná Cob-Douglasovou produkčnou funkciou. Výrobný proces vyžaduje dva vstupy – súkromný kapitál K a verejné výdavky do produktívneho sektora G_P,

$$Y(K, G_P) = K^{\alpha} G_P^{\beta}. \qquad (3.17)$$

Takto definovaný model vedie na kanonický systém

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= K^{\alpha} G_P^{\beta}\left[1 - c(1-\tau)\right] - G_P - G_N - \delta K \\
\dot{B} &= rB - \tau K^{\alpha} G_P^{\beta} + G_P + G_N \\
\dot{\psi}_K &= -\alpha K^{\alpha-1} G_P^{\beta}\left[c(1-\tau)\gamma\left(c(1-\tau)K^{\alpha} G_P^{\beta}\right)^{\gamma-1} G_N^{1-\gamma} + \left[1 - c(1-\tau)\right]\psi_K - \tau\psi_B\right] \\
&\quad + \psi_K(\rho + \delta) \\
\dot{\psi}_B &= \psi_B(\rho - r) + \mu
\end{aligned} \qquad (3.II)$$

Algebraické rovnice pre kontrolné premenné získané maximalizáciou Lagrangeovej funkcie v kontrolných premenných majú nasledujúci tvar

$$G_P = \left(\frac{\beta}{\psi_K - \psi_B}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \left[\gamma c(1-\tau)\left(\frac{1-\gamma}{\psi_K - \psi_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \left(1 - c(1-\tau)\right)\psi_K - \tau\psi_B + 0{,}6\mu\right]^{\frac{1}{1-\beta}} K^{\frac{\alpha}{1-\beta}}$$

$$G_N = \left(\frac{1-\gamma}{\psi_K - \psi_B}\right)^{\frac{1}{\gamma}} c(1-\tau) K^{\alpha} G_P{}^{\beta}$$

Už na prvý pohľad je systém (3.II) zložitý a veľmi ťažko sa s ním pracuje analyticky. Z týchto dôvodov sme sa rozhodli využiť balík OCMat, ktorý je určený na riešenie úloh optimálneho riadenia, a riešiť Model II numericky. Informácie o metódach použitých pri numerickom riešení nájde čitateľ v kapitole 4.

4 Metodika pre numerické riešenie

Cieľom tejto kapitoly je oboznámiť čitateľa s metodikou, ktorá bola použitá pri numerickom riešením Modelu II. Stručne charakterizujeme balík OCMat. Uvádzame formuláciu úlohy, na riešenie ktorej bol vytvorený a vymenúvame možnosti, ktoré ponúka. Táto kapitola taktiež obsahuje predpoklady, pri ktorých splnení môže byť riešenie vypočítané softwarom OCMat považované za optimálne. Na konci kapitoly načrtávame matematické pozadie a základné princípy, ktoré využíva pri riešení úloh optimálneho riadenia a pri následnej analýze tohto riešenia.

4.1 OCMat

Táto kapitola je venovaná balíku OCMat, ktorý sme použili pri numerickom riešení Modelu II. Informácie obsiahnuté v tejto kapitole čerpáme z článkov a publikácií autorov (Grass [14] , Grass a Seidl [15]).

OCMat, ako uvádzajú samotní autori (Grass a Seidl [15]), je balík funkcií zostavený tak, aby bolo možné adekvátnym spôsobom pristupovať k úlohám optimálneho riadenia v MATLAB. Tento nástroj bol vyvinutý na pôde Technische Universität Wien. Je primárne určený na riešenie autonómnych úloh s diskontným faktorom na nekonečnom časovom horizonte definovaných v tvare

$$
\begin{aligned}
&\max_{u(.)} \int_0^\infty e^{-rt} g\big(x(t), u(t), \mu\big)\mathrm{d}t \\
&s.t.\ \ \dot{x} = f\big(x(t), u(t), \mu\big),\ \ t \in [0, \infty) \\
&\quad x(0) = x_0 \\
&\quad k\big(x(t), u(t), \mu\big) \geq 0,\ \ t \in [0, \infty)
\end{aligned}
\tag{4.I}
$$

Kde $x(t) \in \Re^n, u(t) \in \Re^m$. Funkcia *f*(.) popisuje dynamiku stavu *x*, $f : \Re^{n+m} \to \Re^n$; *g*(.) je účelová funkcia, $g : \Re^{n+m} \to \Re$; *k*(.) je zmiešané ohraničenie, $k : \Re^{n+m} \to \Re^l$. Predpokladá sa, že spomínané funkcie sú vo svojich argumentoch dvakrát diferencovateľné. Navyše môžu závisieť od parametra $\mu \in \Re^k$.

OCMat tiež poskytuje rozšírenia, ktoré umožňujú riešiť úlohy (autonómne aj neautonómne) na konečnom časovom horizonte.

Riešenie úloh optimálneho riadenia balíkom OCMat je založené na Pontrjaginovom princípe maxima. Formulácia a riešenie okrajových úloh (ďalej BVP z anglického *boundary value problem*) v kombinácii s kontinuačným algoritmom (*continuation algorithm*, viac v podkapitole 4.1.2.1) umožňuje výpočet optimálnych trajektórií (aj podmienených dodatočnými ohraničeniami), rovnako i výpočet výskytu tzv. *limit cycles*, či detekciu a analýzu viacerých optimálnych riešení (*DNSS/Skiba points*).

4.1.1 Predpoklady optimality riešenia

Autori uvádzajú dva predpoklady, ktoré zaručujú, že riešenia, ktoré spĺňajú nutné podmienky optimality vyplývajúce z Pontrjaginovho princípu maxima sú optimálne. V prípade, že tieto predpoklady splnené nie sú, používateľ má k výsledkom výpočtu pristupovať obozretne, nakoľko sa môže jednať len o lokálne extrémy, teda len o kandidátov na optimálne riešenie.

Predpoklad 1

(a) Existuje optimálne riešenie $\left(x^*(.), u^*(.)\right)$ *pre každý počiatočný stav* x_0 *z kompaktnej množiny C,* $x_0 \in C \subset \Re^n$.

(b) Zmiešané ohraničenie spĺňa podmienku $k_u(x, u, \mu) \neq 0$ *pre každé* $x(t) \in \Re^n, u(t) \in \Re^m$.

Predpoklad 1 postuluje existenciu optimálneho riešenia. Ako uvádza Grass [14] (s. 1628), mnoho modelov nespĺňa všeobecné podmienky existencie optimálneho riešenia, preto je dokazovanie existencie separátnou úlohou. Grass preto pokračuje formuláciou Predpokladu 2, ktorý je menej reštriktívny ako Predpoklad 1.

Predpoklad 2

(a) Funkcia $g(x, u, \mu)$ *alebo* $f(x, u, \mu)$ *je nelineárna v kontrolnej premennej u.*

(b) Maximalizácia Hamiltoniánu sa dá vyriešiť analyticky.

(c) Každé optimálne riešenie $\left(x^*(.), u^*(.)\right)$ *konverguje k equilibriu*[10].

[10] Autori označujú pojmom equilibrium stabilný stav, t. j. bod, v ktorom je dynamika rovná nule.

4.1.2 Numerická kontinuácia

Predpokladá sa nelineárna rovnica v tvare

$$F(x, \mu) = 0, \tag{4.1}$$

kde $F : X \times \Re \to Y$ je dostatočne hladké, X a Y sú Banachove priestory a dvojica (x, μ), ktorá spĺňa (4.1) sa nazýva riešením (4.1).

Úlohou kontinuácie je pre dané špecifické riešenie (x_s, μ_s) nájsť (hladkú) krivku $x(\mu),\ \mu \in [\mu_s, \mu_e]$, ktorá spĺňa

$$F(x(\mu), \mu) = 0.$$

Pri numerickom riešení kontinuačného procesu sa hľadajú také body $x(\mu_i), i = 1, \dots, N$, ktoré aproximujú krivku $x(\mu)$ pri $\mu_N = \mu_e$.

4.1.2.1 Kontinuačný algoritmus

Kontinuačný algoritmus je zostavený na riešenie problému (4.1), kde $F : C^1 \times \Re^p \to C^0$ je BVP úloha závislá od parametra/parametrov μ. Algoritmus vypočíta cestu zo špecifického riešenia (x_s, μ_s) do bodu, kde $\mu_e \neq \mu_s$.

Proces kontinuácie môžeme rozdeliť na 4 časti, ktoré si stručne popíšeme.

1.) *Reparametrizácia*
2.) *Inicializácia*
3.) *Kontinuácia pre krok i > 1*
4.) *Predikcia*

Reparametrizácia:

Zavedením skalárnej premennej $\gamma \in [0,1]$ sa problém reparametrizuje, čo vedie na rovnicu

$$\mu(\gamma) := \mu_s + \gamma(\mu_e - \mu_s) = \mu_s(1 - \gamma) + \gamma\mu_e,$$

teda pre $\gamma = 0$ máme $\mu(0) = \mu_s$ a pre $\gamma = 1$ dostávame $\mu(1) = \mu_e$.

Inicializácia:

Definujeme nejakú pozitívnu konštantu σ_0, $0 < \sigma_0 < 1$ a vypočítame riešenie problému (4.1) pre $\gamma_1 = \gamma_0 + \sigma_0$ a $x_0 = x_s$ a $\gamma_0 = 0$.

Kontinuácia pre krok i > 1:

Pre zabezpečenie výpočtu kontinuácie aj od bodu zlomu (t . j. od bodu, kde dochádza napr. k aktivácii ohraničenia) je problém (4.1) rozšírený pridaním výrazov

$$\Phi(\gamma, \gamma_i, \sigma) = \gamma - \gamma_i - \sigma \tag{4.2}$$

$$\Phi(x, \gamma, x_i, \gamma_i, \sigma) := \left\| x - x_i \right\|^2 + (\gamma - \gamma_i)^2 - \sigma^2 \tag{4.3}$$

$$\Phi(x, \gamma, x_i, x_{i-1}, \gamma_i, \gamma_{i-1}, \sigma) := \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta \gamma_i \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x - x_i \\ \gamma - \gamma_i \end{pmatrix} - \sigma \left\| \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta \gamma_i \end{pmatrix} \right\|^2 \tag{4.4}$$

$$kde \;\; \Delta x_i = x_i - x_{i-1};\; \Delta \gamma_i = \gamma_i - \gamma_{i-1}$$

$x_k = x(\gamma_k)$, $k = \{i-1, i\}$ sú riešenia vypočítané v predchádzajúcich krokoch a $\sigma > 0$ je daná konštanta zabezpečujúca, že nové riešenie sa líši od predchádzajúceho. Vzťah (4.3) geometricky predstavuje kruh s polomerom σ okolo riešenia v kroku i, zatiaľ čo (4.4) je priamka kolmá na smernicu lineárnej extrapolácie riešení vypočítaných v posledných dvoch krokoch.

Predikcia:

Aproximácia riešenia je lineárne extrapolovaná z predchádzajúcich dvoch riešení (x_{i-1}, γ_{i-1}) a (x_i, γ_i), čím dostávame

$$\tilde{x}_{i+1} = x_i + \alpha(x_i - x_{i-1}) = x_i(\alpha + 1) - \alpha x_{i-1}$$
$$\tilde{\gamma}_{i+1} = \gamma_i + \alpha(\gamma_i - \gamma_{i-1}) = \gamma_i(\alpha + 1) - \alpha \gamma_{i-1}$$

Konštanta α je vypočítaná ako pomer dĺžky súčasného a predchádzajúceho kroku, teda

$$\alpha = \frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_i}.$$

5 Numerické riešenie

Zložitosť algebraických rovníc pre kontrolné premenné Modelu II si vyžiadala využitie súčasných vedecko-technických poznatkov. So súhlasom autorov sme pri výpočte použili balík OCMat, ktorý popisujeme v kapitole 4.1.

Jeden z autorov vo svojom článku [14] uvádza, že riešenie vypočítané softwarom OCMat je za určitých predpokladov (pozri kapitolu 4.1.1) optimálne. Analyzujme teda splnenie týchto predpokladov.

Predpoklad 1 postuluje existenciu optimálneho riešenia. Keďže zložitosť Modelu II komplikuje analytické riešenie, máme problém s dôkazom existencie riešenia.

Menej reštriktívny *Predpoklad 2* je však splnený vo všetkých bodoch. Účelová funkcia (3.16) a vďaka produkčnej funkcii v tvare **(**3.17**)** aj dynamika oboch stavových premenných sú nelineárne v kontrolných premenných, čím je splnený bod *(a)* *Predpokladu 2*. Pre Model II sme schopní nájsť algebraické rovnice pre kontrolné premenné, teda maximalizácia Lagrangiánu sa dá riešiť analyticky, potom je splnený aj bod *(b)*. Splnenie bodu *(c)* nie je v prípade autonómnych úloh s diskontným faktorom na nekonečnom časovom horizonte obmedzujúce, keďže sedlové body prvými kandidátmi na optimálne riešenie (viac v Grass [14] s. 1628). I napriek tomu to budeme mať v nasledujúcej analýze riešenia na pamäti.

5.1 Numerické riešenie Modelu II

Riešenie systému (3.II) sme hľadali pri parametroch uvedených v nasledujúcej tabuľke.

Tabuľka 1: Parametre

Parameter	ρ	α	β	γ	δ	c	τ	r
Hodnota	0,007	0,5	0,4	0,5	0,03	0,8	0,2	0,01

Poznamenajme, že voľbou parametrov produkčnej funkcie vo vzťahu $\alpha > \beta$ prikladáme kapitálu v procese výroby o niečo väčšiu váhu ako výdavkom do produktívneho sektora. Zároveň pre súčet týchto parametrov platí $\alpha + \beta < 1$, teda produkcia vykazuje klesajúce výnosy z rozsahu. Numerické riešenie pri konštantných výnosoch z rozsahu neexistuje. Voľbou parametra γ = 0,5 a z definovania funkcie užitočnosti (3.16) vyplýva, že úžitok je rovnako citlivý na súkromnú spotrebu ako na verejnú spotrebu.

Riešením kanonického systému (3.II) dostávame stabilný stav pre ekonomiku s charakteristikami uvedenými v **Tabuľka 1**. Spomínaná ekonomika nadobúda rovnováhu v bode

$$\begin{pmatrix} K & B & \psi_K & \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15{,}8645 & 0{,}49356 & 2{,}0306 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

kde je dlhový pomer na úrovni 16,77 %, teda dlhová brzda, t. j. ohraničenie (2.6), nie je aktívna. Kontrolné premenné majú v tomto bode hodnoty

$$\begin{pmatrix} G_P & G_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4696 & 0{,}1142 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Verejné výdavky sú v equilibriu prerozdelené výrazne v prospech produktívnych výdavkov – približne v pomere 1 : 4 (G_N : G_P). Štruktúra produkcie sa vyznačuje výrazne vyšším využitím kapitálových vstupov a to približne v pomere 1 : 33,78 (G_P : K).

Opačné znamienka vlastných hodnôt jakobiánu (5.3) systému (3.II) identifikujú typ stacionárneho bodu sedlo. Dostali sme teda globálne stabilný stav ekonomiky. Zároveň je teda splnený aj bod *(c) Predpokladu 2* a riešenie môžeme považovať za optimálne.

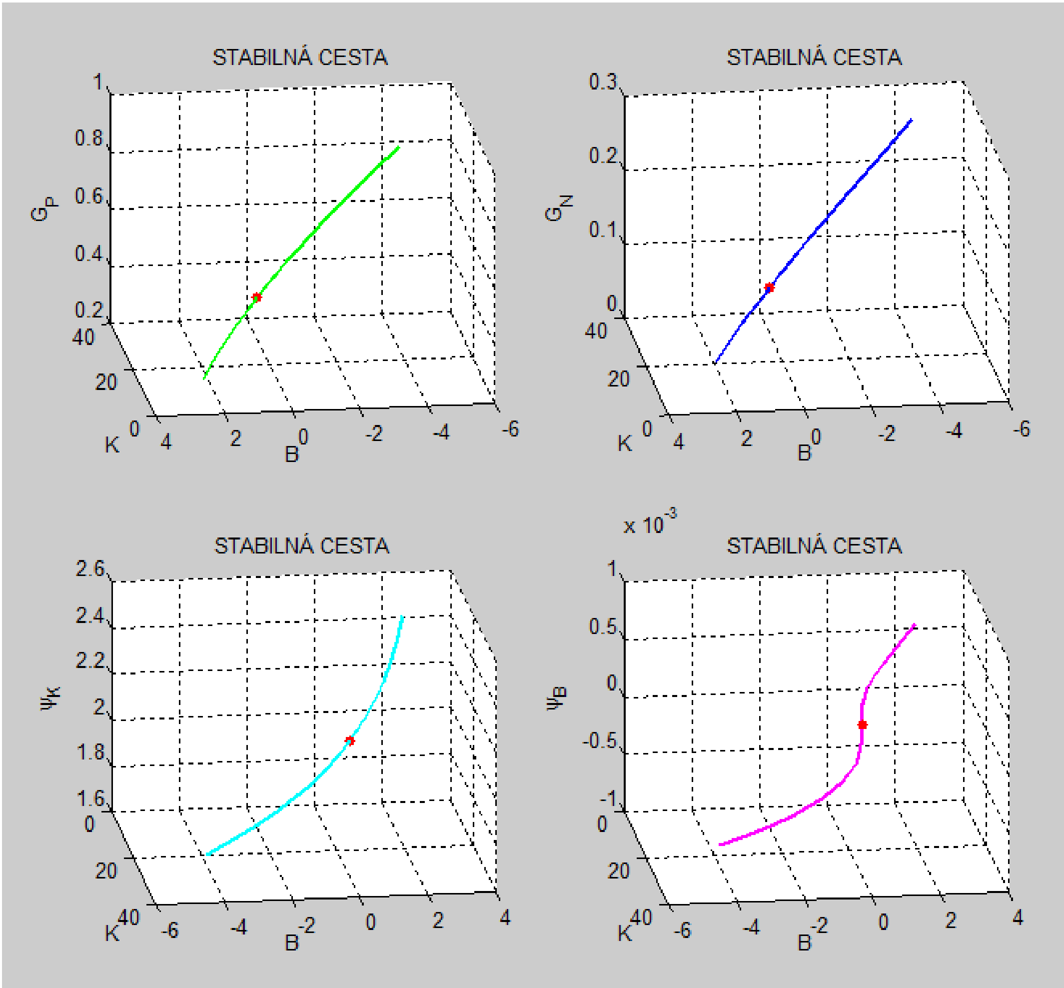
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0100 & -0{,}0096 & 0{,}0166 & -0{,}0030 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Týmto vlastným hodnotám zodpovedá matica vlastných vektorov **A** uvedená nižšie

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}9627 & -0{,}2383 & -0{,}9130 \\ 1 & 0{,}2684 & 0{,}9703 & -0{,}4022 \\ 0 & 0{,}0351 & -0{,}0406 & 0{,}0472 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}0498 \end{pmatrix}$$

Obrázok 1 zobrazuje grafy stabilných ciest v priestore stavových premenných, ktoré zodpovedajú jednotlivým kontrolným a adjungovaným premenným.

Obrázok 1: Stabilná cesta kontrolných a adjungovaných premenných v priestore stavových premenných



Vývoj adjungovaných premenných je v súlade s odvodeným vzťahom (2.12) ako i s predpokladom (2.11). Adjungovaná premenná akumulácie kapitálu ψ_K nadobúda na stabilnej ceste len kladné hodnoty, ktoré sú zároveň vyššie ako tie, ktoré nadobúda adjungovaná premenná akumulácie dlhu ψ_B.

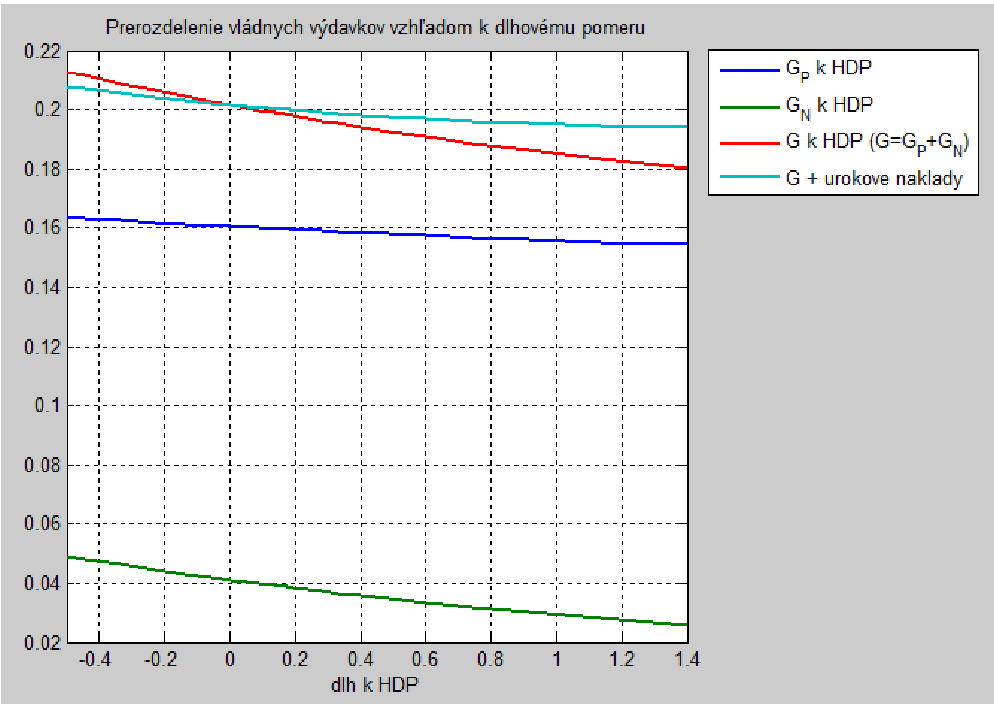
Hodnota kontrolných premenných na stabilnej sedlovej ceste rastie s rastom kapitálu ako i s poklesom dlhu. Čím viac kapitálu je v ekonomike, tým viac je schopná vyrobiť, čo zároveň prináša viac daní do štátnej pokladnice. Vláda disponuje väčším objemom financií a teda môže minúť viac. Na druhej strane, čím je dlh vyšší tým drahšia je jeho obsluha v nominálnom vyjadrení a racionálne správajúca sa vláda musí obmedziť priškrtiť výdavky. Potvrdzuje sa tiež alokačné pravidlo **(P1)** sformulované v kapitole 2.2 na strane

26: „*V čase nadmerného zadlženia sa optimálne správanie vlády vyznačuje prerozdelením verejných výdavkov v prospech produktívneho sektora.*“ Pripomeňme, že pod nadmerným zadlžením tu rozumieme zadlženie, ktoré dosahuje dlhovú brzdu. Dosiaľ sme nevedeli identifikovať správanie optimálneho alokačného pravidla v prípade, že ekonomika je v oblasti pod dlhovou brzdou. Numerické riešenie nám pomohlo preskúmať aj túto oblasť. Ako zobrazuje **Graf 7**,

(P2) *čím nižšiemu zadlženiu ekonomika čelí, tým viac verejných služieb vzhľadom k verejným investíciam môže poskytovať.*

Je však dôležité poznamenať, že na stabilnej ceste produktívne verejné výdavky predstavujú podstatnú a relatívne stabilnú časť verejných výdavkov.

Graf 7



Pohľadom na **Graf 7** tiež pozorujeme, že optimálne sa správajúca vláda (v ekonomike s definovanými charakteristikami) začína tvoriť deficit primárneho štátneho rozpočtu až pod približne 10 %-nou úrovňou zadlženia. V equilibriu, kde zadlženie predstavuje 16,77 %, vláda tvorí primárny prebytok 0,17 %. Naopak, už pri 20 %-nom zadlžení začína tvoriť celkový prebytok štátneho rozpočtu. Tvorbou verejných úspor sa navyšuje množstvo kapitálu v ekonomike. Tento jav si vysvetľujeme nastavením parametrov modelu a to konkrétne relatívne vyššou váhou kapitálu v produkčnej funkcii ($\alpha > \beta$).

5.2 Analýza aktivácie dlhovej brzdy

Balík OCMat nám umožnil riešiť okrajovú úlohu Modelu II. Numerické riešenie sme vykonali s parametrami, ktoré uvádza **Tabuľka 1** na strane 38, a s počiatočným stavom

$$\begin{pmatrix} K_0 & B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}297 & 1{,}42 \end{pmatrix}.$$

Zvolenému počiatočnému stavu zodpovedá dlhový pomer, ktorý dosahuje dlhovú brzdu. Optimálne riešenie konverguje k stabilnému stavu a optimálna trajektória sa dá rozdeliť na dve časti – časť pozdĺž ktorej je dlhová brzda aktívna a časť optimálnej trajektórie, kde je ohraničenie neaktívne. Toto delenie využívame zámerne, nakoľko tieto trajektórie sa riadia rozdielnymi procesmi, čo ilustrujú nasledujúce obrázky (**Obrázok 2**, **Obrázok 3**, **Obrázok 5**, **Obrázok 6**).

Riešenie na aktívnom ohraničením nesmie prekročiť dlhovú brzdu, preto dlh k HDP ostáva konštantný na úrovni dlhovej brzdy (**Obrázok 2**). To zároveň znamená, že prírastok dlhu (2.5) je nulový, teda platí

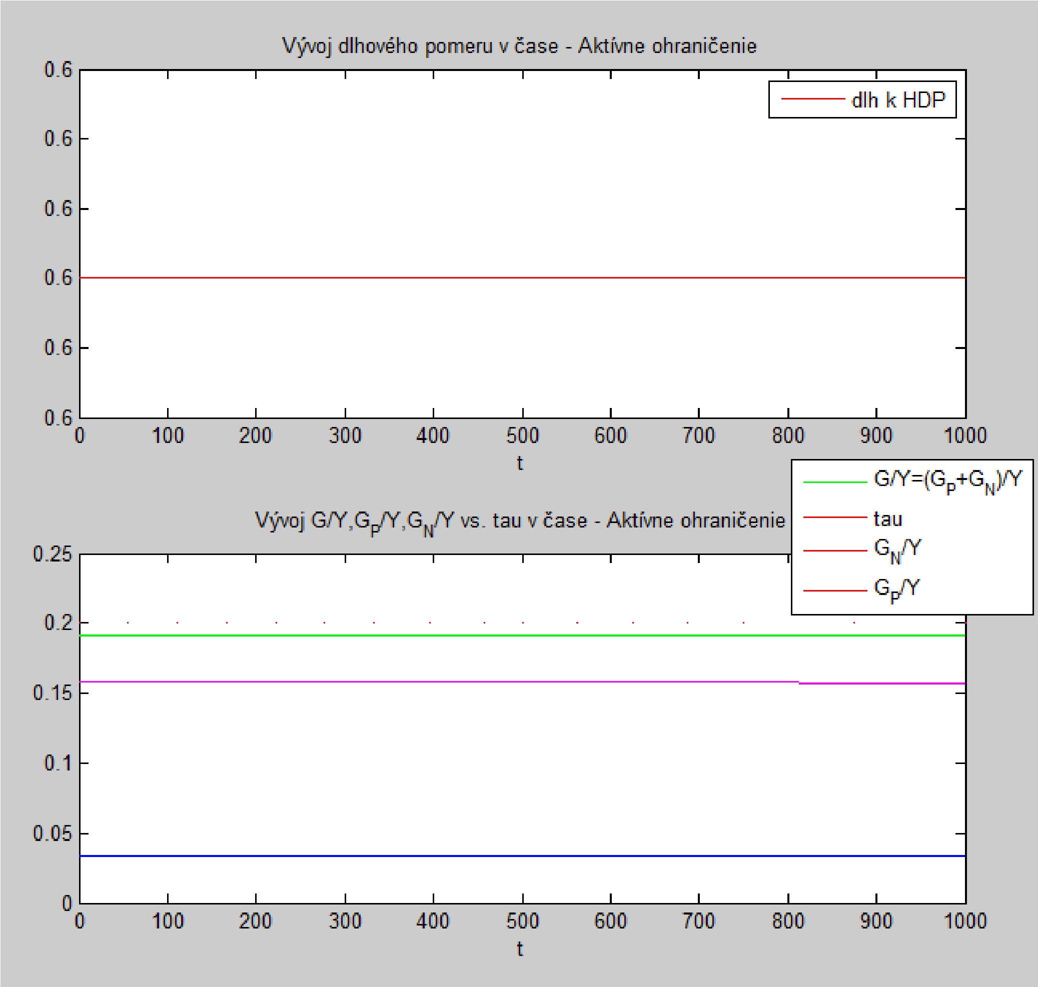
$$\dot{B} = rB - \tau K^{\alpha} G_P{}^{\beta} + G_P + G_N = 0\,.$$

Z toho vyplýva, že vláda vedie vyrovnaný celkový štátny rozpočet. Daňové príjmy presne pokrývajú vládne výdavky a náklady na obsluhu dlhu

$$\tau K^{\alpha} G_P{}^{\beta} = rB + G_P + G_N\,.$$

Tento jav zodpovedá stabilnej alokácii verejných výdavkom, ktorú zachytáva spodný graf na **Obrázok 2**. Poznamenajme, že väčší kus rozpočtového koláča pripadá produktívnemu sektoru.

Obrázok 2: Dlh a verejné výdavky pri aktívnej dlhovej brzde

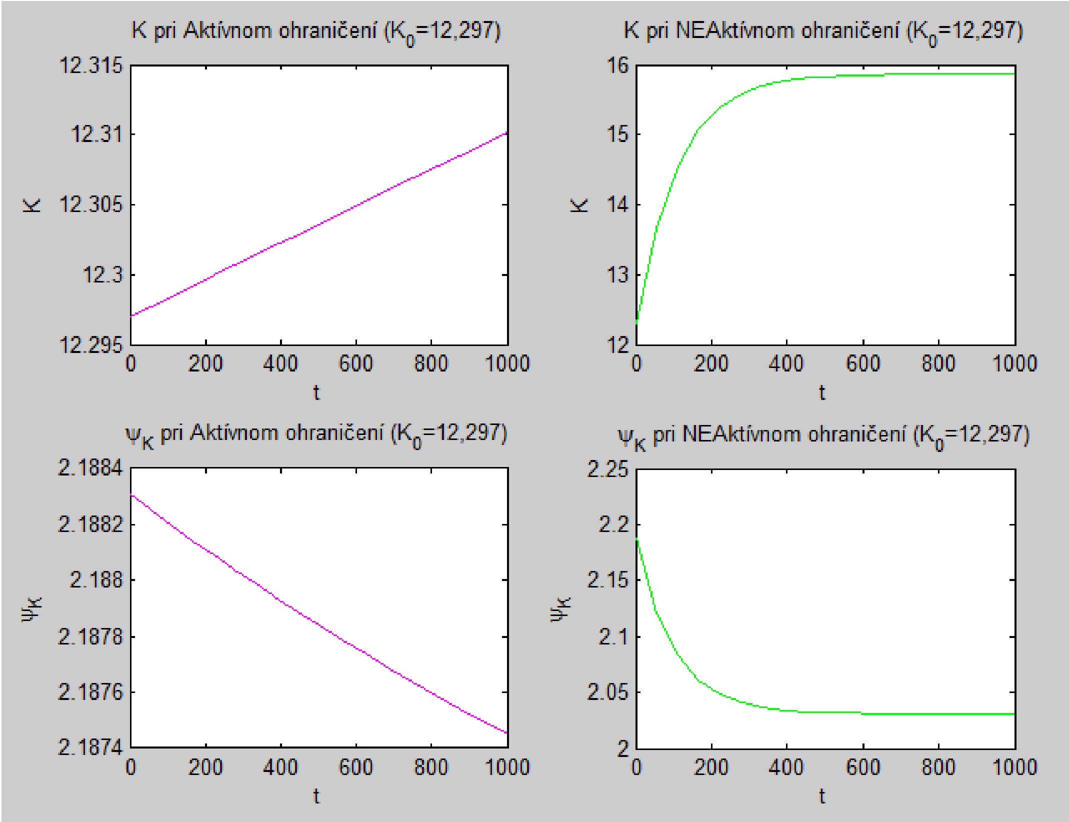


Na základe uvedeného je zrejmé, že ak krajina dosiahla dlhovú brzdu mala by zaviesť prísny režim vyrovnaného celkového rozpočtu. Ekonomika potrebuje naakumulovať dostatok kapitálu (**Obrázok 3** graf vľavo hore), aby bola schopná znižovať zadlženie a fiškálne nedisciplinovaná vláda by tento proces len brzdila. Akumuláciu kapitálu možno v tomto zmysle interpretovať ako zveľaďovanie fyzického kapitálu, teda budovanie konkurencieschopnosti.

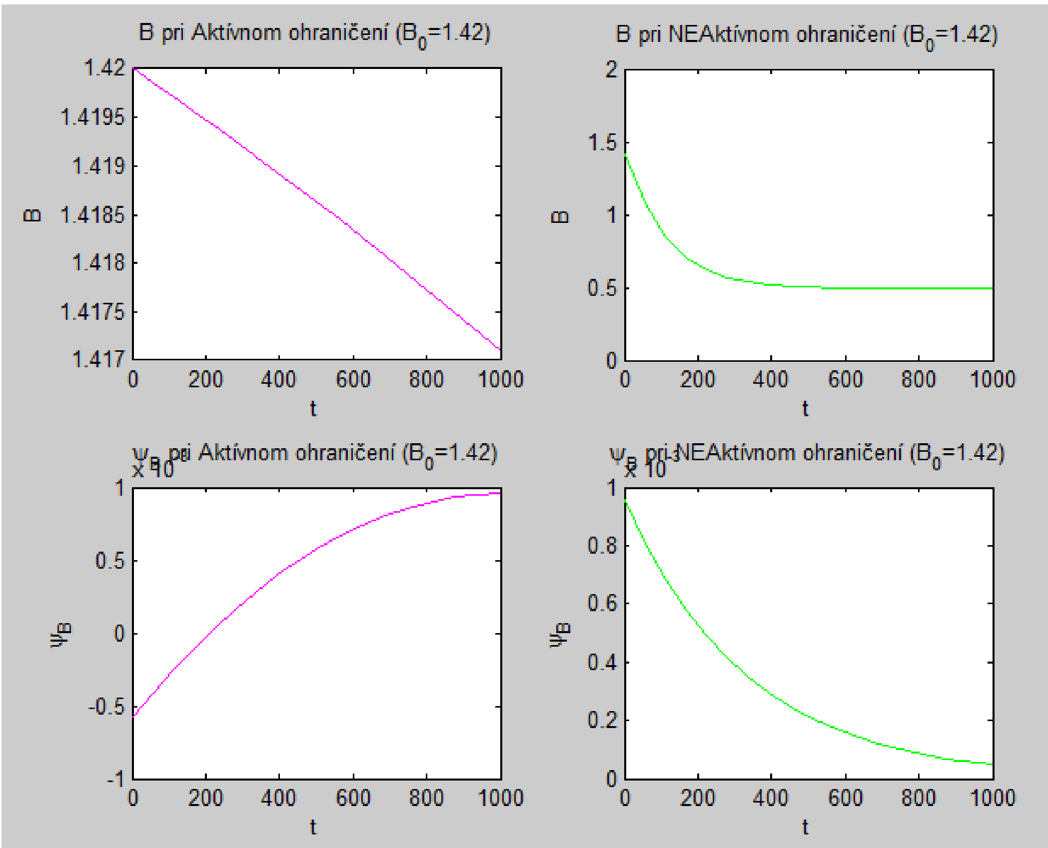
Dlh v nominálnom vyjadrení klesá (**Obrázok 4**), keďže dlhový pomer ostáva celý čas na hranici dlhovej brzdy, musí produkcia klesať rovnakým tempom ako klesá dlh. Znižovanie dlhu teda spomaľuje výkon ekonomiky.

Vládne výdavky (**Obrázok 5**) pri neaktívnom ohraničení klesajú, lebo klesá produkcia. Upozorňujeme čitateľa, že nárast v neproduktívnych výdavkoch (**Obrázok 5** graf vľavo dole) sa javí ako výrazný, ale pri pohľade na mierku grafu vidíme, že ide len o nepatrné navýšenie.

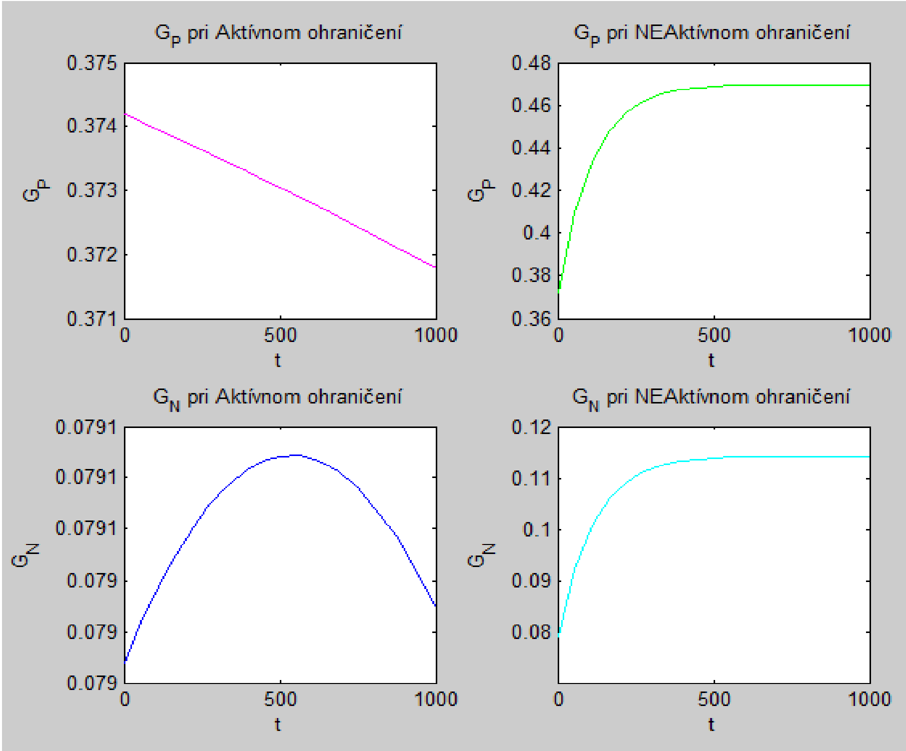
Obrázok 3: Optimálne trajektórie pre K a ψ_K



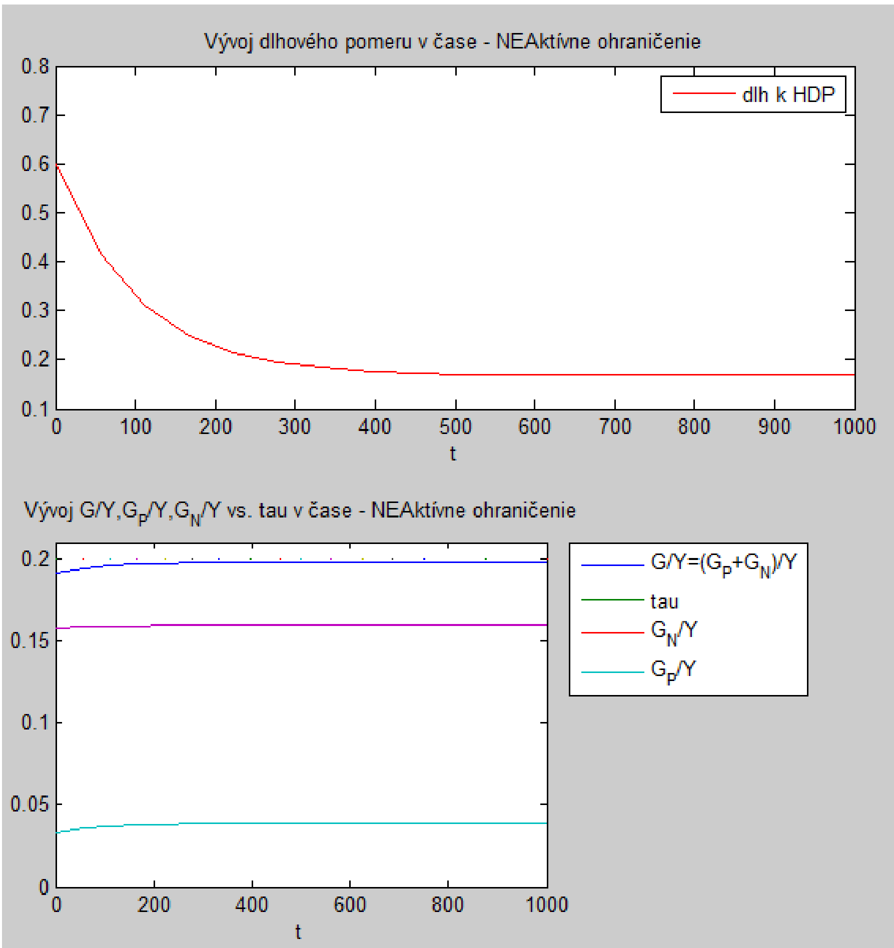
Obrázok 4: Optimálne trajektórie pre B a ψ_B



Obrázok 5 : Optimálne trajektórie kontrolných premenných



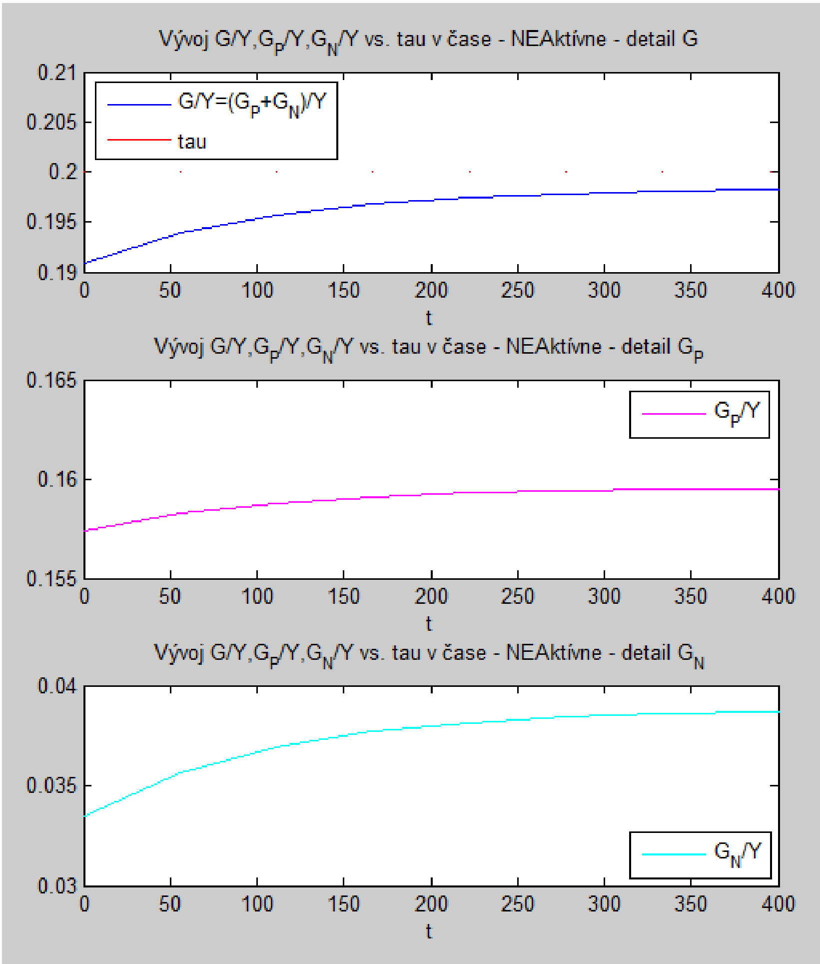
Obrázok 6



Pri neaktívnom ohraničení všetky premenné pomerne rýchlo konvergujú k stabilnému stavu (5.1), (5.2).

Vývoj dlhu a štruktúru vládnych výdavkov pri neaktívnej dlhovej brzde zachytáva **Obrázok 6**. Dlh pomerne rýchlo konveguje k stabilnému stavu, teda prudko klesá, čím sa vzďaľuje od dlhovej brzdy. Prerozdelenie výdavkov medzi sektory ani ich podiel z daňových príjmov v tomto procese neostávajú konštantné. K výraznej zmene dochádza v najstrmšom poklese zadlženia. Preto sa zameriame práve na túto časť grafu (**Obrázok 7**).

Obrázok 7



Znížené úrokové náklady dlhu umožňujú vláde zvyšovať úžitok spoločnosti navýšením neproduktívnych výdavkov. Pri nižšom zadlžení vláda poskytuje vyšší štandard verejných služieb. Navýšenia podpory zo strany štátu sa dočká i produktívny sektor, avšak v menšej miere. Opäť sa potvrdzuje korektnosť sformulovaného optimálneho alokačného pravidla **(P2)**.

Obrázok 6 i **Obrázok 7** nám poskytuje ešte jednu informáciu o optimálnom správaní vlády. Hoci vláda míňa pri nižšom zadlžení viac, nepodlieha fiškálnemu alkoholizmu a udržiava, hoci takmer nepatrný, primárny prebytok štátneho rozpočtu.

5.3 Komparatívna statika

V tejto časti budeme analyzovať posun stabilného stavu ako dôsledok zmeny hodnoty jedného z parametrov (ceteris paribus).

Pripomeňme si tvar úlohy (2.I) nakoľko sa naň budeme v nasledujúcom texte odvolávať.

$$\max_{\{G_N, G_P\}} \int_0^\infty e^{-\rho t} U\big(C(t), G_N(t)\big) dt, \quad \rho > 0 \tag{5.4}$$

za podmienok

$$\dot{K}(t) = Y(t)[1 - c(1-\tau)] - G_P(t) - G_N(t) - \delta K(t), \quad t \in (0, \infty) \tag{5.5}$$

$$\dot{B}(t) = rB(t) - \tau Y(t) + G_P(t) + G_N(t), \quad t \in (0, \infty) \tag{5.6}$$

$$0{,}6Y(t) - B(t) \geq 0, \quad t \in (0, \infty) \tag{5.7}$$

$$K(0) = K_0 > 0$$

$$B(0) = B_0 > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{K(t)} > 0 \\ \mathrm{G_P(t)} > 0 \\ \mathrm{G_N(t)} > 0 \end{array}\right\} \quad \mathrm{t} \in (0, \infty)$$

Pre jednoduchšiu orientáciu vo výsledkoch volíme mierne farebne modifikovaný „semaforový“ prístup na označenie zmeny oproti pôvodnému nastaveniu parametrov (**Tabuľka 1**) –zelená = zvýšenie , oranžová = zníženie, žltá = bez zmeny.

5.3.1 Zmena daňovej sadzby *τ*

Jedným z nástrojov fiškálnej politiky je i daňová sadzba. Pri numerickom riešení sme vychádzali z predpokladu, že daňová sadzba je na úrovni 20 % (*stĺpec* D). **Tabuľka 2** v jednotlivých stĺpcoch obsahuje charakteristiky stabilného stavu pre definovanú hodnotu parametra *τ*.

Tabuľka 2: Zmena stabilného stavu vyvolaná zmenou hodnoty parametra τ

	τ	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
		19,70%	19,80%	19,90%	20,00%	20,10%	20,20%	20,30%	20,40%	20,50%	20,60%	20,70%	20,77%
1	dlh k HDP	-0,01%	5,58%	11,17%	16,77%	22,36%	27,95%	33,54%	39,14%	44,73%	50,32%	55,92%	59,83%
2	K	14,8381	15,1734	15,5155	15,8645	16,2206	16,5839	16,9545	17,3325	17,7181	18,1113	18,5125	18,7980
3	% zmena	-6,47%	-4,36%	-2,20%	0%	2,24%	4,53%	6,87%	9,25%	11,68%	14,16%	16,69%	18,49%
4	B	-0,0003	0,1578	0,3224	0,4936	0,6715	0,8564	1,0483	1,2476	1,4544	1,6689	1,8913	2,0518
5	% zmena	-100,07%	-68,02%	-34,68%	0%	36,05%	73,50%	112,40%	152,78%	194,68%	238,14%	283,20%	315,71%
6	rB	0,0000	0,0016	0,0032	0,0049	0,0067	0,0086	0,0105	0,0125	0,0145	0,0167	0,0189	0,0205
7	psi_K	2,0412	2,0377	2,0342	2,0306	2,0271	2,0236	2,0201	2,0166	2,0131	2,0096	2,0062	2,0038
8	psi_B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	G_P	0,4392	0,4491	0,4593	0,4696	0,4801	0,4909	0,5019	0,5130	0,5245	0,5361	0,5480	0,5564
10	% zmena	-6,47%	-4,37%	-2,19%	0%	2,24%	4,54%	6,88%	9,24%	11,69%	14,16%	16,70%	18,48%
11	G_N	0,1068	0,1092	0,1117	0,1142	0,1168	0,1194	0,1221	0,1248	0,1276	0,1304	0,1333	0,1353
12	% zmena	-6,48%	-4,38%	-2,19%	0%	2,28%	4,55%	6,92%	9,28%	11,73%	14,19%	16,73%	18,48%
13	Y	2,7718	2,8280	2,8855	2,9438	3,0031	3,0637	3,1253	3,1877	3,2517	3,3164	3,3826	3,4293
14	% zmena	-5,84%	-3,93%	-1,98%	0,00%	2,01%	4,07%	6,17%	8,29%	10,46%	12,66%	14,91%	16,49%
15	U	0,4361	0,4451	0,4545	0,4638	0,4735	0,4832	0,4933	0,5033	0,5137	0,5241	0,5348	0,5423
16	% zmena	-5,99%	-4,04%	-2,02%	0%	2,08%	4,18%	6,34%	8,51%	10,75%	12,99%	15,30%	16,91%
17	G / Y	19,70%	19,74%	19,79%	19,83%	19,88%	19,92%	19,97%	20,01%	20,05%	20,10%	20,14%	20,17%
18	% zmena	-0,67%	-0,45%	-0,22%	0%	0,22%	0,45%	0,68%	0,89%	1,12%	1,34%	1,56%	1,71%
19	primárny deficit/ prebytok	0,00%	0,06%	0,11%	0,17%	0,22%	0,28%	0,33%	0,39%	0,45%	0,50%	0,56%	0,60%
20	G_P / Y	15,85%	15,88%	15,92%	15,95%	15,99%	16,02%	16,06%	16,09%	16,13%	16,16%	16,20%	16,22%
21	% zmena	-0,67%	-0,45%	-0,22%	0%	0,22%	0,45%	0,67%	0,88%	1,11%	1,33%	1,56%	1,71%
22	G_N / Y	3,85%	3,86%	3,87%	3,88%	3,89%	3,90%	3,91%	3,92%	3,92%	3,93%	3,94%	3,95%
23	% zmena	-0,68%	-0,46%	-0,21%	0%	0,26%	0,46%	0,71%	0,92%	1,15%	1,35%	1,58%	1,70%
24	G_P / K	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%
25	G_N / G_P	24,32%	24,32%	24,32%	24,32%	24,33%	24,32%	24,33%	24,33%	24,33%	24,32%	24,33%	24,32%

Výsledky vedú k nasledujúcim záverom. Stabilný stav reaguje citlivo na zmenu daňovej sadzby. Interval prípustných hodnôt parametra τ zodpovedá dĺžke približne 1 %.

Rast daňovej sadzby (*stĺpce* E - L) spôsobuje, že dlh sa akumuluje relatívne rýchlejšie ako kapitál (*riadok* 3 a *riadok* 5). Dodatočné zdanenie ukrojilo viac z investícií, no zároveň štruktúra vstupov produkcie (*riadok* 24) ostáva nezmenená. Teda vláda nemá tendenciu z dodatočného výberu navýšiť produktívne výdavky. Nemení sa ani alokácia výdavkov medzi sektory (*riadok* 25). To znamená, že vláda nenavyšuje ani neproduktívne výdavky na úkor produktívnych. Produkcia síce oproti pôvodnému equilibriu vzrástla (*riadok* 13), ale jej nárast (*riadok* 14) je menší ako nárast dlhu (*riadok* 5). Dôsledkom toho sa v novom stabilnom stave dosahuje vyšší dlhový pomer. Ukrojením z investícií sa výkon ekonomiky spomalil. Vláda síce vyberie viac daní a vytvorí väčší primárny prebytok, no ten nie je dostatočne veľký na to, aby prevýšil úrokové platby z dlhu, čo by spôsobilo zníženie dlhu. Aby sa dlh znížil, teda aby bol prírastok dlhu (5.6) záporný, musí byť primárny prebytok väčší ako úroky z dlhu. Dlh teda stále narastá.

Pokles daňovej sadzby (*stĺpce* A - C) spôsobuje presne opačné reakcie premenných ako v prípade nárastu. Interpretácia je preto analogická,

5.3.2 Zmena reálnej úrokovej miery *r*

Analýza posunu stabilného stavu v závislosti od hodnoty reálnej úrokovej sadzby (**Tabuľka 3**) ukazuje, že úrokové náklady ovplyvňujú len úroveň dlhodobo udržateľného dlhu. Keďže v stabilnom stave je prírastok dlhu (5.6) nulový, zmena *r* musí byť kompenzovaná opačne orientovanou zmenou *B*, aby sa zachovala rovnosť. Ekonomicky túto súvislosť interpretujeme tak, že pri zvyšovaní reálnej úrokovej miery (*stĺpce* G - L) je obsluha dlhu nákladnejšia, čoho dôsledkom je, že krajina si môže dovoliť dlhodobo rolovať menší dlh (*riadok* 3 a 4). Naopak, pri znížení *r* (*stĺpce* A - E) si krajina požičiava lacnejšie a zvládne splácať úroky z vyššieho dlhu (*riadok* 3 a 4).

Zaujímavý je i výsledok v *stĺpci* C. Ak je úroková sadzba rovná 0,7 %, čo zodpovedá hodnote diskontnej miery *ρ,* nie je možné vypočítať numerické riešenie, lebo práve vtedy sme indiferentný vo voľbe medzi spotrebou dnes a spotrebou v budúcnosti. Je to akási patová situácia a OCMat nevie nájsť riešenie.

Tabuľka 3: Zmena stabilného stavu vyvolaná zmenou hodnoty reálnej úrokovej sadzby *r*

	r	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
		0,50%	0,60%	0,70%	0,80%	0,90%	1,00%	2,00%	3,00%	4,00%	5,00%	6,00%	7,00%
1	dlh k HDP	33,53%	27,94%	neexistuje	20,96%	18,63%	16,77%	8,38%	5,59%	4,19%	3,35%	2,79%	2,40%
2	K	15,8645	15,8645	neexistuje	15,8645	15,8645	15,8645	15,8645	15,8645	15,8645	15,8645	15,8645	15,8645
3	B	0,9871	0,8226	neexistuje	0,6170	0,5484	0,4936	0,2468	0,1645	0,1234	0,0987	0,0823	0,0705
4	% zmena	99,98%	66,65%	neexistuje	25,00%	11,10%	0%	-50,00%	-66,67%	-75,00%	-80,00%	-83,33%	-85,72%
5	psi_K	2,0306	2,0306	neexistuje	2,0306	2,0306	2,0306	2,0306	2,0306	2,0306	2,0306	2,0306	2,0306
6	psi_B	0	0	neexistuje	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	G_P	0,4696	0,4696	neexistuje	0,4696	0,4696	0,4696	0,4696	0,4696	0,4696	0,4696	0,4696	0,4696
8	G_N	0,1142	0,1142	neexistuje	0,1142	0,1142	0,1142	0,1142	0,1142	0,1142	0,1142	0,1142	0,1142

5.3.3 Zmena diskontného faktora *ρ*

Diskontný faktor *ρ* je mierou časovej preferencie. Ako ukazuje **Tabuľka 4**, čím je spoločnosť trpezlivejšia (t. j. čím menšie *ρ, stĺpce* A - F), tým nižší štandard verejných služieb vyžaduje (*riadok* 20). Keďže navyše ostávajú výdavky do produktívneho sektora v pomere k HDP relatívne stabilné (*riadok* 18), vláda vytvára väčší primárny prebytok (*riadok* 17) a ekonomika tak disponuje väčším objemom kapitálu (*riadok* 2). Viac výrobných faktorov zvyšuje produkciu (*riadky* 12 a 13). Pri znížení ρ sa teda mení štruktúra produkcie v prospech kapitálových vstupov (*riadok* 22). Rovnako nastáva zmena i v prerozdelení verejných výdavkov a to v prospech produktívneho sektora (*riadok* 23). Vo všeobecnosti platí, že čím je spoločnosť trpezlivejšia, tým vyššie zadlženie je ochotná tolerovať (*riadok* 1).

V prípade zväčšenia ρ reagujú premenné opačne a interpretácia je analogická s tým, čo sme uviedli v predchádzajúcom odseku.

Tabuľka 4: Zmena stabilného stavu vyvolaná zmenou hodnoty diskontnej miery ρ

	ρ	A	B	C	D	E	F	G	H	I
		0,58%	0,60%	0,62%	0,64%	0,66%	0,68%	0,70%	0,72%	0,74%
1	dlh k HDP	58,48%	51,38%	44,34%	37,36%	30,43%	23,57%	16,77%	10,02%	3,33%
2	K	17,9380	17,5718	17,2142	16,8649	16,5237	16,1903	15,8645	15,5463	15,2353
3	% zmena	13,07%	10,76%	8,51%	6,31%	4,16%	2,05%	0%	-2,01%	-3,97%
4	B	1,8974	1,6400	1,3924	1,1543	0,9253	0,7052	0,4936	0,2902	0,0948
5	% zmena	284,40%	232,25%	182,09%	133,85%	87,46%	42,87%	0%	-41,21%	-80,79%
6	psi_K	2,1134	2,0986	2,0842	2,0702	2,0567	2,0435	2,0306	2,0181	2,006
7	psi_B	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	G_P	0,5137	0,5061	0,4985	0,4911	0,4838	0,4766	0,4696	0,4627	0,4558
9	% zmena	9,39%	7,77%	6,15%	4,58%	3,02%	1,49%	0%	-1,47%	-2,94%
10	G_N	0,1162	0,1160	0,1157	0,1154	0,1150	0,1146	0,1142	0,1138	0,1134
11	% zmena	1,75%	1,58%	1,31%	1,05%	0,70%	0,35%	0%	-0,35%	-0,70%
12	Y	3,2447	3,1923	3,1406	3,0900	3,0403	2,9915	2,9438	2,8969	2,8506
13	% zmena	10,22%	8,44%	6,69%	4,97%	3,28%	1,62%	0%	-1,59%	-3,17%
14	U	0,4912	0,4868	0,4822	0,4777	0,4730	0,4684	0,4638	0,4593	0,4548
15	% zmena	5,90%	4,95%	3,96%	2,99%	1,98%	0,98%	0%	-0,97%	-1,94%
16	G/Y	19,41%	19,49%	19,56%	19,63%	19,70%	19,76%	19,83%	19,90%	19,97%
17	primárny deficit/ prebytok	0,59%	0,51%	0,44%	0,37%	0,30%	0,24%	0,17%	0,10%	0,03%
18	G_P/Y	15,83%	15,85%	15,87%	15,89%	15,91%	15,93%	15,95%	15,97%	15,99%
19	% zmena	-0,75%	-0,62%	-0,50%	-0,37%	-0,25%	-0,13%	0%	0,12%	0,23%
20	G_N/Y	3,58%	3,63%	3,68%	3,73%	3,78%	3,83%	3,88%	3,93%	3,98%
21	% zmena	-7,68%	-6,33%	-5,04%	-3,73%	-2,50%	-1,25%	0%	1,26%	2,55%
22	G_P / K	2,86%	2,88%	2,90%	2,91%	2,93%	2,94%	2,96%	2,98%	2,99%
23	G_N/G_P	22,62%	22,92%	23,21%	23,50%	23,77%	24,05%	24,32%	24,59%	24,88%

5.3.4 Zmena marginálneho sklonu k spotrebe *c*

Z ekonomickej teórie vieme, že zmena marginálneho sklonu k spotrebe spôsobuje na jednej strane rovnako orientovanú zmenu súkromnej spotreby a na druhej strane opačne orientovanú zmenu súkromných investícií. Konkrétne, pokles *c* (*stĺpec* A) spôsobí zníženie súkromnej spotreby a nárast súkromných investícií, čo sa v modeli prejaví rastom kapitálu (*riadok* 2). Nárast kapitálu podnieti vyššiu úroveň produkcie (*riadok* 12) a s rastom HDP sa zníži dlhový pomer (*riadok* 1). Naša analýza (**Tabuľka 5**) je s uvedeným konzistentná.

Tabuľka 5: Zmena stabilného stavu pri zmene *c*

	c	A	B	C	D	E	F	G
		79,80%	80,00%	80,20%	80,40%	80,60%	80,80%	81,00%
1	dlh k HDP	7,95%	16,77%	25,58%	34,40%	43,21%	52,02%	60,84%
2	K	16,5839	15,8645	15,1734	14,5094	13,8718	13,2594	12,6715
3	% zmena	4,53%	0%	-4,36%	-8,54%	-12,56%	-16,42%	-20,13%
4	B	0,2436	0,4936	0,7234	0,9343	1,1272	1,3031	1,4630
5	% zmena	-50,65%	0%	46,56%	89,28%	128,36%	164,00%	196,39%
6	psi_K	2,0236	2,0306	2,0377	2,0448	2,0520	2,0591	2,0664
7	psi_B	0	0	0	0	0	0	0
8	G_P	0,4909	0,4696	0,4491	0,4295	0,4106	0,3925	0,3751
9	% zmena	4,54%	0%	-4,37%	-8,54%	-12,56%	-16,42%	-20,12%
10	G_N	0,1194	0,1142	0,1092	0,1045	0,0999	0,0955	0,0912
11	% zmena	4,55%	0%	-4,38%	-8,49%	-12,52%	-16,37%	-20,14%
12	Y	3,0637	2,9438	2,8280	2,7165	2,6088	2,5049	2,4048
13	% zmena	4,07%	0%	-3,93%	-7,72%	-11,38%	-14,91%	-18,31%
14	U	0,4839	0,4638	0,4446	0,4262	0,4084	0,3913	0,3746
15	% zmena	4,31%	0%	-4,16%	-8,11%	-11,95%	-15,64%	-19,23%
16	G/Y	19,92%	19,83%	19,74%	19,66%	19,57%	19,48%	19,39%
17	primárny deficit/ prebytok	0,08%	0,17%	0,26%	0,34%	0,43%	0,52%	0,61%
18	G_P/Y	16,02%	15,95%	15,88%	15,81%	15,74%	15,67%	15,60%
19	% zmena	0,45%	0%	-0,45%	-0,89%	-1,34%	-1,78%	-2,22%
20	G_N/Y	3,90%	3,88%	3,86%	3,85%	3,83%	3,81%	3,79%
21	% zmena	0,46%	0%	-0,46%	-0,84%	-1,29%	-1,72%	-2,24%
22	G_P / K	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%
23	G_N/G_P	24,32%	24,32%	24,32%	24,33%	24,33%	24,33%	24,31%

Ekonomická teória však neposkytuje informáciu o reakcii vlády na tieto nové skutočnosti. Vykonanou analýzou posunu rovnovážneho stavu sme zistili, že rovnováha ekonomiky veľmi citlivo reaguje na zmenu *c*. Prípustný interval pre *c* je veľmi úzky. Predstavuje dĺžku len približne 1,2 %. Vidíme (*riadok* 23), že prerozdelenie verejných výdavkov do produktívneho resp. neproduktívneho sektora sa mení len nepatrne. Zníženie (zvýšenie) súkromnej spotreby nie je kompenzovaná nárastom (poklesom) podielu verejných služieb na celkových výdavkoch vlády. Zmena sklonu k spotrebe nemá vplyv na štruktúru vstupov produkcie (*riadok* 22).

5.3.5 Zmena parametrov produkčnej funkcie α a β

Parametre produkčnej funkcie α a β predstavujú elasticity výstupu vzhľadom na kapitál resp. vzhľadom na produktívne vládne výdavky. Elasticita výstupu meria citlivosť produkcie na zmenu objemu vstupu. V našom prípade je α mierou citlivosti produkcie na zmenu objemu kapitálových vstupov. Analogicky, β predstavuje citlivosť výstupu na objem produktívnych vládnych výdavkov. Keďže platí $\alpha > \beta$, zmena kapitálových vstupov má väčší vplyv na úroveň produkcie ako rovnaká zmena v produktívnych vládnych výdavkoch. Jednoducho povedané, v procese výroby má kapitál väčšiu váhu ako produktívne vládne výdavky. Analyzujme teda posun equilibria pri zmene jednotlivých parametrov produkčnej funkcie.

Tabuľka 6: Zmena stabilného stavu pri zmene α

		A	B	C	D	E
	α	49,50%	50,00%	50,50%	51,00%	51,50%
1	dlh k HDP	4,20%	16,77%	29,28%	41,73%	54,13%
2	K	13,4159	15,8645	19,0830	23,4164	29,4157
3	% zmena	-15,43%	0%	20,29%	47,60%	85,42%
4	B	0,1054	0,4936	1,0287	1,7856	2,8876
5	% zmena	-78,65%	0%	108,41%	261,75%	485,01%
6	psi_K	2,0075	2,0306	2,0544	2,0790	2,1043
7	psi_B	0	0	0	0	0
8	G_P	0,4011	0,4696	0,5593	0,6795	0,8453
9	% zmena	-14,59%	0%	19,10%	44,70%	80,00%
10	G_N	0,0996	0,1142	0,1332	0,1584	0,1928
11	% zmena	-12,78%	0%	16,64%	38,70%	68,83%
12	Y	2,5088	2,9438	3,5139	4,2789	5,3349
13	% zmena	-14,77%	0%	19,37%	45,35%	81,23%
14	U	0,3999	0,4638	0,5473	0,6586	0,8113
15	% zmena	-13,79%	0%	17,99%	41,99%	74,92%
16	G/Y	19,96%	19,83%	19,71%	19,58%	19,46%
17	primárny deficit/ prebytok	0,04%	0,17%	0,29%	0,42%	0,54%
18	G_P/Y	15,99%	15,95%	15,92%	15,88%	15,84%
19	% zmena	0,22%	0%	-0,22%	-0,45%	-0,67%
20	G_N/Y	3,97%	3,88%	3,79%	3,70%	3,61%
21	% zmena	2,34%	0%	-2,29%	-4,57%	-6,84%
22	G_P / K	2,99%	2,96%	2,93%	2,90%	2,87%
23	G_N/G_P	24,83%	24,32%	23,82%	23,31%	22,81%

Cobb-Douglasova funkcia je mocninová funkcia, a teda vo všeobecnosti platí, že pri zvýšení mocniteľa vzrastie hodnota výrazu. V prípade zväčšenia (ceteris paribus) parametra α (*stĺpce* C - E) sa zvýši objem produkcie, tým sa zvýši objem súkromnej spotreby a spoločnosť zaznamená rast užitočnosti (*riadky* 14 - 15). Kapitálové vstupy majú potenciál generovať cez zvýšenie produkcie vyšší úžitok ako verejné služby, preto je optimálne znížiť vládne výdavky (*riadky* 16), čím sa docieli navýšenie kapitálu. Keďže sa zvýši primárny deficit/prebytok (*riadok* 17), prírastok kapitálu (5.5) vzrastie. Nárast produkcie zvýši spotrebu natoľko, že je výhodnejšie ešte viac ukrojiť z verejných služieb, aby sme cez rast kapitálu a tým aj produkcie dosiahli vyšší úžitok. Preto sa mení štruktúra verejných výdavkov (*riadok* 23). Nakoľko sa relatívna váha K oproti G_P v produkčnom procese zvýšila je optimálne zmeniť štruktúru vstupov v prospech kapitálu (*riadok* 22). Výkon ekonomiky sa zvýšil, čím sa zvýšia daňové príjmy. Zároveň nie je žiaduce, aby vláda poskytovala stimuly (v zmysle nalievania verejných výdavkov do ekonomiky) v takom objeme ako pred zvýšením parametra α (*riadok* 16). Dane sú efektívnejšie využité tvorbou verejných úspor, ktoré sa dostávajú do výroby ako kapitálové statky. Krajina si tiež môže dovoliť držať dlh na vyššej úrovni (*riadok* 1).

Prípad zmenšenia hodnoty parametra α zobrazuje stĺpec A. Správanie premenných a charakteristík stabilného stavu je v porovnaní s predchádzajúcou analýzou presne opačné.

Na analýzu posunu rovnovážneho stavu pri zmene hodnoty parametra β použijeme výsledky z **Tabuľka 7**. Pozorujeme, že v prípade zvýšenia β (*stĺpec* F) sa výrazne mení prerozdelenie verejných výdavkov (*riadok* 23), ako i štruktúra vstupov produkcie (*riadok 22*). Čo sa týka jednotlivých veličín, klesá produkcia, spotreba, úžitok, ale i dlh. Jedinou rastúcou veličinou ostávajú vládne výdavky (*riadok* 16), ktoré rastú vďaka navýšeniu produktívnych výdavkov vzhľadom k HDP (*riadky* 18 a 19), no hlavne vďaka výraznému zníženiu poskytovania verejných služieb (*riadky* 20 - 21).

Pri poklese hodnoty parametra β (*stĺpce* B – D) je správanie jednotlivých premenných a veličín presne opačné. I v tomto prípade sa výrazne mení štruktúra vstupov produkcie (*riadok* 22), nakoľko sa rozdiel medzi elasticitami výstupu α a β zväčšuje. Relatívna citlivosť výstupu na zmenu kapitálu sa zvyšuje a preto sa štruktúra vstupov mení práve v prospech kapitálu. Krátenie produktívnych výdavkov zároveň znamená podstatné navýšenie verejných služieb (*riadok* 21). Keďže súčet elasticít výstupu sa znížil, a teda poklesli výnosy z rozsahu, viac úžitku prinášajú výdavky v neproduktívnom sektore, ktorých podiel sa na výdavkovej strane rozpočtu výrazne zvyšuje (*riadok* 23). Produktívne výdavky si však stále udržiavajú prevahu (pozri *riadok* 18 a *riadok* 20).

Tabuľka 7: Zmena stabilného stavu pri zmene β

	β	A	B	C	D	E	F
		36,00%	37,00%	38,00%	39,00%	40,00%	41,00%
1	dlh k HDP	53,40%	44,09%	34,88%	25,77%	16,77%	7,86%
2	K	17,6223	17,2106	16,7847	16,3387	15,8645	15,3515
3	% zmena	11,08%	8,48%	5,80%	2,99%	0%	-3,23%
4	B	1,7074	1,3845	1,0742	0,7770	0,4936	0,2252
5	% zmena	245,91%	180,49%	117,63%	57,41%	0%	-54,38%
6	psi_K	1,8288	1,8744	1,9229	1,9749	2,0306	2,0907
7	psi_B	0	0	0	0	0	0
8	G_P	0,4695	0,4712	0,4720	0,4715	0,4696	0,4658
9	% zmena	-0,02%	0,34%	0,51%	0,40%	0%	-0,81%
10	G_N	0,1530	0,1430	0,1333	0,1237	0,1142	0,1049
11	% zmena	33,98%	25,22%	16,73%	8,32%	0%	-8,14%
12	Y	3,1976	3,1404	3,0800	3,0149	2,9438	2,8644
13	% zmena	8,62%	6,68%	4,63%	2,41%	0%	-2,70%
14	U	0,5596	0,5361	0,5126	0,4885	0,4638	0,4385
15	% zmena	20,63%	15,58%	10,51%	5,33%	0%	-5,46%
16	G/Y	19,47%	19,56%	19,65%	19,74%	19,83%	19,92%
17	primárny deficit/ prebytok	0,53%	0,44%	0,35%	0,26%	0,17%	0,08%
18	G_P/Y	14,68%	15,00%	15,32%	15,64%	15,95%	16,26%
19	% zmena	-7,96%	-5,94%	-3,94%	-1,96%	0%	1,94%
20	G_N/Y	4,78%	4,55%	4,33%	4,10%	3,88%	3,66%
21	% zmena	23,34%	17,38%	11,56%	5,76%	0%	-5,60%
22	G_P / K	2,66%	2,74%	2,81%	2,89%	2,96%	3,03%
23	G_N/G_P	32,59%	30,35%	28,24%	26,24%	24,32%	22,52%

5.3.6 Zmena elasticity užitočnosti spotreby γ

Parameter γ definuje elasticitu užitočnosti spotreby. Čím viac sa jeho hodnota blíži k 1, tým citlivejšie reaguje užitočnosť na zmenu spotreby. Čím menej je vzdialená od nuly, tým viac sa citlivosť vytráca.

Z **Tabuľka 8** čítame, že s poklesom elasticity spotreby (*stĺpce* A - B) v nominálnom vyjadrení klesajú všetky premenné a veličiny (*riadky* 1 – 15). Vidíme však (*riadky* 20 - 21), že v pomere k HDP jedna z veličín rastie a to konkrétne G_N. Neproduktívne verejné výdavky teraz zohrávajú väčšiu rolu v dosahovanom úžitku reprezentatívnej domácnosti a preto dochádza pri posune equilibria k prerozdeleniu verejných výdavkov pomerne výrazne v prospech G_N (*riadok* 23). Vláda zároveň nalieva do ekonomiky väčší objem verejných výdavkov (*riadok* 16) a tým jej ostáva menej na obsluhu dlhu a môže si dovoliť nižšie zadlženie (*riadok* 1).

Pri zvýšení γ (*stĺpce* D - I) je situácia opačná. Nominálny objem všetkých veličín rastie, mení sa však štruktúra alokácie verejných výdavkov (*riadok* 23) a to až do takej miery, že G_N zaznamenáva pokles i v nominálnom vyjadrení (*bunky* H9, I9). Užitočnosť reaguje citlivejšie na zmenu spotreby. Navýšenie spotreby o jednotku teraz zvýši užitočnosť viac ako v pôvodnom nastavení, a preto je optimálne zvýšiť spotrebu hoci aj na úkor neproduktívnych výdavkov. Spotreba vzrastie keď sa zvýši produkcia. To sa aj deje a vidíme, že štruktúra produkcie ostáva zachovaná (*riadok* 22). Verejné výdavky teda s rastom γ klesajú a to kvôli výraznému poklesu poskytovania verejných služieb (*riadok* 21). Nedochádza len k prerozdeleniu výdavkov, ale aj k zmene objemu verejných výdavkov, čím sa vytvára primárny prebytok (*riadok* 17). Verejné úspory sú tak ďalším prameňom kapitálu v ekonomike. Zadlženie krajiny sa s rastom γ taktiež zvyšuje. Jediné vysvetlenie vidíme v raste produkcie, ktorá zvyšuje daňové príjmy. Keďže navyše pomer výdavkov k HDP klesá, vytvára sa komfortná rezerva pre náklady súvisiace s obsluhou dlhu. Krajina môže dlhodobo rolovať väčší dlh.

Tabuľka 8: Zmena stabilného stavu pri zmene parametra γ

	γ	A	B	C	D	E	F	G	H	I
		46,00%	48,00%	50,00%	52,00%	54,00%	56,00%	58,00%	60,00%	62,00%
1	dlh k HDP	2,94%	9,83%	16,77%	23,77%	30,83%	37,95%	45,14%	52,39%	59,70%
2	K	14,5593	15,1965	15,8645	16,5650	17,2997	18,0703	18,8789	19,7275	20,6182
3	% zmena	-8,23%	-4,21%	0%	4,42%	9,05%	13,90%	19,00%	24,35%	29,96%
4	B	0,0802	0,2783	0,4936	0,7274	0,9811	1,2561	1,5539	1,8763	2,2249
5	% zmena	-83,75%	-43,62%	0%	47,37%	98,76%	154,48%	214,81%	280,13%	350,75%
6	psi_K	1,8998	1,9635	2,0306	2,1013	2,1759	2,2546	2,3379	2,4262	2,5198
7	psi_B	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	G_P	0,4310	0,4498	0,4696	0,4903	0,5121	0,5349	0,5588	0,5839	0,6103
9	% zmena	-8,22%	-4,22%	0%	4,41%	9,05%	13,91%	18,99%	24,34%	29,96%
10	G_N	0,1132	0,1138	0,1142	0,1145	0,1146	0,1145	0,1142	0,1136	0,1128
11	% zmena	-0,88%	-0,35%	0%	0,26%	0,35%	0,26%	0,00%	-0,53%	-1,23%
12	Y	2,7250	2,8319	2,9438	3,0604	3,1824	3,3097	3,4426	3,5816	3,7269
13	% zmena	-7,43%	-3,80%	0%	3,96%	8,11%	12,43%	16,95%	21,67%	26,60%
14	U	0,3983	0,4297	0,4638	0,5012	0,5421	0,5867	0,6356	0,6891	0,7481
15	% zmena	-14,14%	-7,36%	0%	8,06%	16,86%	26,49%	37,03%	48,57%	61,27%
16	G/Y	19,97%	19,90%	19,83%	19,76%	19,69%	19,62%	19,55%	19,47%	19,40%
17	primárny deficit/ prebytok	0,03%	0,10%	0,17%	0,24%	0,31%	0,38%	0,45%	0,53%	0,60%
18	G_P/Y	15,82%	15,88%	15,95%	16,02%	16,09%	16,16%	16,23%	16,30%	16,38%
19	% zmena	-0,85%	-0,43%	0%	0,43%	0,87%	1,31%	1,75%	2,20%	2,65%
20	G_N/Y	4,15%	4,02%	3,88%	3,74%	3,60%	3,46%	3,32%	3,17%	3,03%
21	% zmena	7,08%	3,59%	0%	-3,56%	-7,18%	-10,82%	-14,49%	-18,24%	-21,98%
22	G_P / K	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%	2,96%
23	G_N/G_P	26,26%	25,30%	24,32%	23,35%	22,38%	21,41%	20,44%	19,46%	18,48%

5.3.7 Zmena miery depreciácie kapitálu δ

Na analýzu posunu equilibria pri zmene δ využijeme **Tabuľka 9**. Ako je už na prvý pohľad na dynamiku akumulácie kapitálu (5.5) jasné, pri raste miery depreciácie (*stĺpce* C - H) sa znižuje dostupnosť kapitálu v ekonomike, čo má za následok zníženie produkcie (*riadok* 12). Zníženie kapitálových vstupov je síce čiastočne kompenzované nárastom podielu produktívnych výdavkov v produkcii (*riadok* 23), avšak tento nárast nie je schopný pokryť výpadok kapitálu, keďže, ako vyplýva z (5.5), nárast verejných výdavkov spôsobuje jeho ďalšie zníženie. Výber daní je v dôsledku poklesu výkonu ekonomiky nižší a to kráti verejné výdavky (*riadky* 8 - 11). Úrokové náklady a spomalenie ekonomiky spôsobujú, že sa naakumuluje viac dlhu (pozri (5.6)) a to spolu s poklesom HDP zvyšuje mieru zadlženia (*riadok* 1). Vláda potrebuje viac na pokrytie dlhu a musí generovať vyšší primárny prebytok štátneho rozpočtu (*riadok* 17).

Tabuľka 9: Zmena stabilného stavu v dôsledku zmeny miery depreciácie kapitálu δ

	δ	A	B	C	D	E	F	G	H
		2,90%	3,00%	3,10%	3,20%	3,30%	3,40%	3,50%	3,60%
1	dlh k HDP	8,63%	16,77%	24,45%	31,73%	38,62%	45,16%	51,38%	57,29%
2	K	18,9735	15,8645	13,3337	11,2615	9,5553	8,1431	6,9685	5,9868
3	% zmena	19,60%	0%	-15,95%	-29,01%	-39,77%	-48,67%	-56,07%	-62,26%
4	B	0,2951	0,4936	0,6222	0,7007	0,7432	0,7600	0,7588	0,7450
5	% zmena	-40,21%	0%	26,05%	41,96%	50,57%	53,97%	53,73%	50,93%
6	psi_K	2,0156	2,0306	2,0452	2,0592	2,0728	2,0859	2,0986	2,1109
7	psi_B	0	0	0	0	0	0	0	0
8	G_P	0,5464	0,4696	0,4053	0,3514	0,3058	0,2671	0,2341	0,2059
9	% zmena	16,35%	0%	-13,69%	-25,17%	-34,88%	-43,12%	-50,15%	-56,15%
10	G_N	0,1347	0,1142	0,0973	0,0833	0,0717	0,0619	0,0537	0,0467
11	% zmena	17,95%	0%	-14,80%	-27,06%	-37,22%	-45,80%	-52,98%	-59,11%
12	Y	3,4204	2,9438	2,5444	2,2086	1,9244	1,6829	1,4768	1,3003
13	% zmena	16,19%	0%	-13,57%	-24,97%	-34,63%	-42,83%	-49,83%	-55,83%
14	U	0,5430	0,4638	0,3981	0,3431	0,2972	0,2582	0,2253	0,1971
15	% zmena	17,07%	0%	-14,18%	-26,02%	-35,93%	-44,33%	-51,43%	-57,50%
16	G/Y	19,91%	19,83%	19,75%	19,68%	19,62%	19,55%	19,49%	19,43%
17	primárny deficit/ prebytok	0,09%	0,17%	0,25%	0,32%	0,38%	0,45%	0,51%	0,57%
18	G_P/Y	15,97%	15,95%	15,93%	15,91%	15,89%	15,87%	15,85%	15,83%
19	% zmena	0,14%	0,00%	-0,15%	-0,26%	-0,39%	-0,51%	-0,63%	-0,74%
20	G_N/Y	3,94%	3,88%	3,82%	3,77%	3,73%	3,68%	3,64%	3,59%
21	% zmena	1,51%	0,00%	-1,43%	-2,78%	-3,96%	-5,19%	-6,27%	-7,42%
22	G_N/G_P	24,65%	24,32%	24,01%	23,71%	23,45%	23,17%	22,94%	22,68%
23	G_P / K	2,88%	2,96%	3,04%	3,12%	3,20%	3,28%	3,36%	3,44%

Nižšia produkcia znamená tiež nižšiu spotrebu, teda nižší úžitok (*riadok* 14), ktorý ešte viac prehlbuje snaha vlády kompenzovať výpadok kapitálu produktívnymi výdavkami a to na úkor neproduktívnych výdavkov (*riadok 22*).

5.3.8 Všeobecné závery

Na základe vykonanej komparatívnej statiky equlibria vzhľadom na zmeny jednotlivých parametrov môžeme vyvodiť všeobecne platné odpozorované vzťahy.

Čím vyššiemu zadlženiu krajina čelí, tým vyšší primárny prebytok štátneho rozpočtu musí tvoriť, aby bola schopná pokryť obsluhu dlhu. Vo vykonanej analýze sme nenašli prípustné riešenie, v ktorom by dlhodobo udržateľný stav vykazoval primárny deficit. Tento záver vyplýva priamo z definície dynamiky dlhu (5.6). Deficit vždy navyšuje dlh, a tak nie je možné dosiahnuť stabilitu.

Tieňová cena akumulácie dlhu je v stabilnom stave vždy rovná nule. Keďže sme analyzovali posun equilibria vo vnútri množiny prípustných riešení, kde je lagrangeov multiplikátor rovný nule, je táto skutočnosť na prvý pohľad na kanonický systém (3.II) zrejmá.

Vplyvom relatívne väčšieho zastúpenia kapitálových vstupov (v porovnaní s objemom vstupov G_P) v produkčnom procese vidíme pokles výkonu ekonomiky, kedykoľvek dôjde k poklesu kapitálu. Vláda v uzavretej ekonomike nie je schopná pokryť výpadok kapitálu, keďže zvyšovanie výdavkov (ceteris paribus) vedie k ďalšiemu ukrojovaniu z investícií.

Vo vnútri systému (3.II) majú výdavky do produktívneho sektora vždy väčší podiel na celkových vládnych výdavkoch ako výdavky do neproduktívneho sektora.

Záver

Vytýčili sme si cieľ identifikovať optimálnu fiškálnu politiku pri dlhovej brzde. Pre naplnenie tohto cieľa bolo nevyhnutné sformulovať model. Východiskom a do určitej miery i inšpiráciou bola pre nás práca Barroa [3], v ktorej používa jednoduchý model endogénneho rastu s dvomi druhmi verejných výdavkov. Barrov model je však postavený na predpoklade vyrovnaného štátneho rozpočtu, čo by bolo pre našu analýzu podstatne obmedzujúce. Uvoľnenie tohto predpokladu nám vytvorilo priestor pre skúmanie fiškálnej politiky v širších súvislostiach, keďže sme do úvah zahrnuli možnosť prebytku, resp. deficitu štátneho rozpočtu a s tým súvisiacu akumuláciu dlhu. Nebolo však možné vyhnúť sa všetkým zjednodušeniam reality. V práci sme predpokladali uzavretú decentralizovanú ekonomiku, v ktorej pôsobili domácnosti, firmy a vláda. Krajina vyrábala jeden homogénnych statok, na produkciu ktorého boli potrebné dva vstupy – súkromný kapitál a verejné výdavky do produktívneho sektora[11]. Úlohou vlády v definovanej ekonomike bolo stimulovať výkon ekonomiky prostredníctvom verejných výdavkov tak, aby sa maximalizovala diskontovaná užitočnosť reprezentatívnej domácnosti a zároveň, aby bol dlh krajiny v medziach dlhovej brzdy. Predpokladali sme, že úžitok je funkciou súkromnej spotreby a verejných výdavkov do neproduktívneho sektora[12]. Verejné výdavky boli financované daňovými príjmami, ale existovala aj možnosť prefinancovania prostredníctvom pôžičky od súkromného sektora, teda vytvárať primárny deficit. Vláda teda riešila nielen otázku, v akom objeme tieto stimuly poskytovať, ale aj to, akú štruktúru (v zmysle prerozdelenia medzi jednotlivé sektory) verejných výdavkov zvoliť.

V práci sme vytvorili, analyzovali a numericky riešili model zostavený ako spojitú úlohu optimálneho riadenia na nekonečnom časovom horizonte s dvomi stavovými premennými (kapitál a dlh), s dvomi kontrolnými premennými (produktívne vládne výdavky a neproduktívne vládne výdavky) a so zmiešaným ohraničením, ktoré predstavuje dlhovú brzdu.

Pri riešení sme využívali Pontrjaginov princíp maxima, ktorý nám umožnil vykonať kvalitatívnu analýzu väzieb v modeli. Jej výsledkom bolo (inter alia) optimálne alokačné

[11] Za ekvivalenty považujeme pojmy verejné/vládne výdavky do produktívneho sektora = produktívne vládne/verejné výdavky = vládne/verejné investície.
[12] Za ekvivalenty považujeme pojmy verejné/vládne výdavky do neproduktívneho sektora = neproduktívne vládne/verejné výdavky = vládna/verejná spotreba = vládne/verejné služby.

pravidlo pre štruktúru verejných výdavkov, ktoré znie: „*V čase nadmerného zadlženia sa optimálne správanie vlády vyznačuje prerozdelením verejných výdavkov v prospech produktívneho sektora.*“ Poznamenajme, že termínom nadmerné zadlženie označujeme zadlženie, keď je dosiahnutá hranica dlhovej brzdy. Platnosť záverov odvodených prostredníctvom kvalitatívnej analýzy sa potvrdila numerickým riešením problému. Za účelom numerického riešenia sme špecifikovali dva modely – Model I a Model II. Rozdiel v špecifikácii spočíva v definovaní vzťahu medzi súkromnou a verejnou spotrebou. V Modeli I predpokladáme, že verejná spotreba má natoľko špecifickú rolu, že ju súkromná spotreba nedokáže nahradiť. Tento predpoklad vedie k separovateľnosti užitočnosti zo súkromnej spotreby od užitočnosti z verejnej spotreby. Na rozdiel od Modelu I, Model II vychádza z predpokladu, že súkromná a verejná spotreba sú do určitej miery substituovateľné.

Model I, ako sme analyticky ukázali, nemá riešenie vo vnútri množiny prípustných riešení. Neboli sme schopní nájsť rovnovážny stav, v ktorom by neproduktívne verejné výdavky nadobúdali kladnú hodnotu. Na základe tohto výsledku sme dospeli k záveru, že financovanie verejných služieb, ktoré pomáhajú plniť špecifickú rolu spoločnosti je z pohľadu našej špecifikácie neracionálne. Považujeme za dôležité podotknúť, že hoci niektoré verejné služby spĺňajú tento predpoklad, neproduktívny sektor je skôr heterogénnou zmesou služieb, ktoré nemajú výlučne špecifickú rolu. To je zároveň jeden z dôvodov, prečo sme našu pozornosť sústredili na Model II.

Numerické riešenie Modelu II sme vykonali s pomocou balíka OCMat z prameňov Technische Universität Wien. Optimálne riešenie zodpovedalo sedlovému bodu. Dostali sme teda globálne stabilný bod. Využitím funkcií, ktoré ponúka spomínaný software, sme mali možnosť vypočítať optimálnu sedlovú cestu, analyzovať správanie jednotlivých premenných pozdĺž tejto trajektórie a ponúknuť ekonomickú interpretáciu pozorovaných vzťahov. Potvrdila sa platnosť optimálneho alokačného pravidla, ba dospeli sme i k jeho zovšeobecneniu: „ *... čím nižšiemu zadlženiu ekonomika čelí, tým viac verejných služieb vzhľadom k verejným investíciam môže poskytovať.*“ (strana 41) Vykonali sme i porovnanie riešení v prípade, že dlhová brzda bola aktívna a v prípade, že k jej aktivovaniu nedošlo. Ukázalo sa, že tieto situácie sa riadia inými procesmi. Pri pohybe na hranici je optimálne viesť prísny režim vyrovnaného celkového rozpočtu. Alokácia vládnych výdavkov ostáva po celý čas stabilná a výrazne v prospech produktívnych vládnych výdavkov, pokým sa nedosiahne taká úroveň kapitálu, ktorá umožní znižovanie zadlženia, a teda presun na stabilnú sedlovú cestu. Potvrdilo sa tiež, že vyšší dlh spomaľuje výkon ekonomiky. Naopak, vnútorné riešenie pomerne rýchlo konverguje k stabilnému stavu, pričom dochádza k realokácii vládnych výdavkov ako i k zmene štruktúry vstupov produkcie. Analýzu Modelu II sme ukončili komparatívnou statikou, v ktorej sme skúmali posun stabilného stavu vzhľadom na zmenu jednotlivých parametrov modelu (ceteris paribus).

Uvedomujeme si, že platnosť formulovaných záverov v reálnom svete je nepriamo úmerná tuhosti spútania modelu predpokladmi. Za jednu z najsilnejších okov považujeme predpoklad o konštantnej reálnej úrokovej miere. Pri tomto predpoklade zanedbávame celú škálu rizík, ktorú však reálny investori vnímajú a prispôsobujú tomu cenu i ponuku kapitálu. Dôsledkom toho je, že v realite si krajina pri vyššom zadlžení požičiava drahšie. Tu vidíme priestor pre ďalšie rozšírenie predloženého modelu. V tejto práci sme sa primárne zamerali na štruktúru verejných výdavkov. Kontroverznou a stále aktuálnou témou je však i daňovo-odvodová politika štátu, ktorá je taktiež silným fiškálnym aparátom. Bolo by zaujímavé preskúmať interakciu práve týchto dvoch nástrojov fiškálnej politiky.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1] ADAM, C. S. - BEVAN, D. L. 2005. Fiscal deficits and growth in developing countries. In *Journal of Public Economics*. Vol. 89, p. 571-597.

[2] AIZENMAN, J. et al. 2007 *Economic growth with constraints on tax revenues and public debt: implications for fiscal policy and cross-country differences*. NBER Working Paper 12750.

[3] BARRO, R. J. 1990 Government Spending in a Simple Model of Endogeneous Growth. In: *The Journal of Political Economy*. Vol. 98, no. 5., p. S103-S125. Dostupné na: http://links.jstor.org/sici?sici=0022-3808%28199010%2998%3A5%3CS103%3AGSIASM%3E2.0.CO%3B2-T

[4] BAUM, A. - CHECHERITA-WESTPHAL, C. - ROTHER, P. 2012. *Debt and growth: New Evidence for the Euro Area*. ECB Working Paper No. 1450. Dostupné na: http://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp1450.pdf

[5] CULLISON, W. E. 1993. Public Investment and Economic Growth. In *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*. Vol. 79, no. 4, p.. 19-33. Dostupné na: https://richmondfed.org/publications/research/economic_quarterly/1993/fall/pdf/cullison.pdf

[6] CHACHAUAT, B. C. 2006. *Nonlinear and Dynamic Optimization. From Theory to Practice.* Dostupné na: http://infoscience.epfl.ch/record/111939/files/Chachuat_07(IC32).pdf

[7] CHECHERITA, C. - ROTHER, P. 2010. *The impact of high and growing govermnemt debt on economic growth – an empirical investigation for the euro area*. ECB Working Paper No. 1450. Dostupné na: http://www.ecb.int/pub/pdf/scpwps/ecbwp1237.pdf

[8] DEVARJAN, S. et al. 1996. The composition of public expenditure and economic growth. In: *Journal of Monetary Economics*. Vol. 37, p. 313-344. Dostupné na: http://down.aefweb.net/WorkingPapers/w77.pdf

[9] EUROPEAN COMMISSION. *Stability and Growth Pact*. 2013. Dostupné na: http://ec.europa.eu/economy_finance/economic_governance/sgp/index_en.htm

[10] EURÓPSKA RADA. *Treaty on Stability, Coordination and Governance in the Economic and Monetary Union (TSCG)*. 2012. Dostupné na: http://european-council.europa.eu/eurozone-governance/treaty-on-stability?lang=sk

[11] GHOSH, S. - ROY, U. 2004. Fiscal Policy, Long-Run Growth, and Welfare in a Stock-Flow Model of Public Goods. In: *Canadian Journal of Economics*. Vol. 37, p. 742-756. Dostupné na: http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.0008-4085.2004.00245.x/full

[12] GHOSH, S. - GREGORIOU, A. 2006. *On the Composition of Government Spending, Optimal Fiscal Policy, and Endogenous Growth: Theory and Evidence*. Dostupné na: http://www.brunel.ac.uk/329/efwps/0619.pdf

[13] GHOSH, A. R. - KIM, J. I. - MENDOZA, E - OSTRY, J. D. - QURESHI, M. S. 2011. *Fiscal Fatigue, Fiscal Space and Debt Sustainability in Advanced Economies*. NBER Working Paper No. 16782. Dostupné na: http://www.nber.org/papers/w16782

[14] GRASS, D. 2012 Numerical computation of the optimal vector field: Exemplified by a fishery model. In: *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 36, no.10, p. 1626–1658

[15] GRASS, D. - SEIDL, A. *OCMat Manual*. Dostupné na: http://orcos.tuwien.ac.at/fileadmin/t/orcos/ORCOS/ocmat_manual.pdf

[16] HALICKÁ, M. - JURČA, P. 2012. *Optimálne riadenie II*. Spojité úlohy s aplikáciami do ekonómie a financií. Dostupné na: http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/teach/optimalne_riadenie_2.pdf

[17] KALYVITIS, S. 2003. Public Investment Rules and Endogenous Growth with Empirical Evidence From Canada. In *Scottish Journal of Political Economy*. Vol. 50, no. 1, p. 90-110. Dostupné na: http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/1467-9485.00256/full

[18] KRUGMAN, P. 1988. *Financing vs. Forgiving a debt overhang: Some analytical issues*. NBER Working Paper No. 2486. Dostupné na: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304387888900442

[19] KUMAR, M. a WOO, J. *Public Debt and Growth*. 2010. IMF Working Paper 10/174. Dostupné na: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1653188

[20] LUPTÁČIK, M. 2010. *Mathematical Optimization and Economic Analysis*. New York: Springer, 2010. 292 p. ISBN 978-0-387-89551-2.

[21] REBELO, S. 1991. Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth. In: BARRO, R. J. 1990 Government Spending in a Simple Model of Endogeneous Growth. In *The Journal of Political Economy*. Vol. 98, no. 5., p. S103-S125. Dostupné na: http://links.jstor.org/sici?sici=0022-3808%28199010%2998%3A5%3CS103%3AGSIASM%3E2.0.CO%3B2-T

[22] REINHART, C. M. a ROGOFF, K. S. 2010. *Growth in a Time of Debt*. NBER Working Paper No. 15639. Dostupné na: http://www.nber.org/papers/w15639.pdf?new_window=1

[23] SAINT-PAUL, G. Fiscal policy in an Endogenous Growth Model. 1992. In *Quarterly Journal of Economics*. Vol. 107, p. 1243-1259. Dostupné na: http://www.jstor.org/sici?sici=0033-5533%28199211%29107%3A4%3C1243%3AFPIAEG%3E2.0.CO%3B2-B&origin=repec

[24] SILBERBERG, E. – SUEN, W. 2000. *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*. Singapore: Irwin/McGraw-Hill, 2000, 3rd ed., 704 p. ISBN 978-0-07-234352-4

[25] Ústavný zákon z 8. decembra 2011 o rozpočtovej zodpovednosti. 2011. In *Zbierka zákonov č. 493/2011*. Dostupné na: http://www.rozpoctovarada.sk/images/Legislativa_SR/Zakon_493_2011_20121028.pdf