UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Zmeny v produktivite práce a v mzdovej kvóte v slovenskej ekonomike

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2013 **Bc. Katarína Belušková**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Zmeny v produktivite práce a v mzdovej kvóte v slovenskej ekonomike

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci diplomovej práce: prof.Dipl.Ing.Dr. Mikuláš Luptáčik

Bratislava 2013 **Bc. Katarína Belušková**

34268548

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Katarína Belušková
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Zmeny v produktivite práce a v mzdovej kvóte v slovenskej ekonomike

Cieľ: Cieľom práce je analyzovať zmeny v produktivite práce a v mzdovej kvóte na Slovensku pomocou input-output modelu a štrukturálnej dekompozície.

Vedúci: prof. Dipl. Ing. Dr. Mikuláš Luptáčik
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 25.01.2012

Dátum schválenia: 26.01.2012

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....

študent

....

vedúci práce

Prehlásenie

Čestne prehlasujem, že túto prácu som vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry a zdrojov.

....

Bc. Katarína Belušková

Poďakovanie

Chcela by som poďakovať vedúcemu diplomovej práce prof.Dipl.Ing.Dr. Mikulášovi Luptáčikovi za mnohé praktické rady, cenné pripomienky a motiváciu pri realizácii tejto diplomovej práce. Takisto ďakujem svojej rodine a priateľovi za ich podporu a lásku.

Abstrakt

BELUŠKOVÁ, Katarína: Zmeny v produktivite práce a v mzdovej kvóte v slovenskej ekonomike

Diplomová práca - Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.
Vedúci: prof.Dipl.Ing.Dr. Mikuláš Luptáčik

Cieľom tejto diplomovej práce je analýza zmien produktivity práce a mzdovej kvóty, resp. miezd, pre Slovenskú ekonomiku za obdobie 2000-2005. Keďže hospodárske výsledky súčasných ekonomík sú dané konštrukciou a vzájomnými závislosťami medzi jednotlivými sektormi danej ekonomiky, použijeme na analýzu týchto priamych aj nepriamych vzťahov otvorený statický Leontiefov model a štrukturálnu dekompozíciu.

Kľúčové slová: mzdová kvóta, produktivita práce, štrukturálna dekompozícia, input –output model, Leontiefova inverzia

Abstrakt

BELUŠKOVÁ, Katarína: Changes in labor productivity and wages quote for Slovak economy

Diploma thesis - Comenius University Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics, and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics.
Thesis Consultant: prof.Dipl.Ing.Dr. Mikuláš Luptáčik

The aim of this master's thesis is the analysis of changes in labor productivity and wage quote, or wages, in the Slovak economy for the period 2000-2005. Since the economic results of the current economy are given by the structure and interdependencies between different sectors of the economy, we use open static Leontief model and structural decomposition for the analysis of these direct and indirect relationships.

Key words: wage quote, labor productivity, structural decomposition, input-output model, Leontief inverse

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Úvod

Jednou z možných príčin súčasných ekonomických problémov v Európskej Únii (EU) je nárast rozdielov konkurencieschopnosti medzi členmi EU. Rast reálnych miezd, napríklad v Nemecku, bol v posledných rokoch veľmi pomalý, výrazne pomalší ako nárast produktivity práce a teda následne konkurencieschopnosť Nemecka vzrastala silnejšie než v iných ekonomikách.

"Konkurencieschopnosť ekonomiky nie je daná jednoduchým súčtom výkonnosti jednotlivých odvetví, ale je výsledkom komplexnej siete vzájomných vzťahov medzi nimi."
(European commission. Communication from the Commission-Building the ERA of knowledge for growth, April, 2005, Brusel)

Mnoho zostavovaných modelov a analýz súčasných ekonomických problémov sa sústreďuje najmä na súhrnné údaje za dané hospodárstvo. Je dôležité si uvedomiť, že ekonomiky súčasných krajín sú charakterizované nielen deľbou práce v rámci ekonomiky, ale aj intenzívnymi väzbami medzi sektormi daného hospodárstva a takisto väzbami s inými ekonomikami ([4]).

Nositeľ nobelovej ceny za ekonómiu Wassily Leontief v jednej zo svojich prác píše: "Zvýšený predaj áut v New Yorku zvyšuje dopyt po potravinách v Detroite"([5]). Toto tvrdenie môžeme pre slovenskú ekonomiku parafrázovať nasledovne: "Zvýšenie dopytu v zahraničí po automobiloch vyrobených na Slovensku zvýši dopyt po potravinách a spotrebných predmetoch v Košiciach a na Žitnom ostrove"([4]). Tieto prepojenia a súvislosti boli ekonómom známe už od samotného vzniku ekonómie ako vednej disciplíny, avšak práve Wassily Leontief v tridsiatych rokoch 20. storočia ako prvý zostavil input - output tabuľky pre Spojené štáty, čím vytvoril predpoklady kvantifikácie spomínaných súvislostí a zostavenia modelov umožňujúcich analyzovať väzby v národnom hospodárstve.

Cieľom tejto diplomovej práce je analýza zmien produktivity práce a mzdovej kvóty, resp. miezd, pre Slovenskú ekonomiku. Keďže hospodárske výsledky súčasných ekonomík sú dané konštrukciou a vzájomnými závislosťami medzi jednotlivými sektormi danej ekonomiky, použijeme na analýzu týchto priamych aj nepriamych vzťahov, ktoré nie sú viditeľné na prvý pohľad, otvorený statický Leontiefov model a štrukturálnu dekompozíciu. Pre účely našej analýzy použijeme údaje zo symetrickej input - output tabuľky v členení komodity krát komodity za roky 2000 a 2005 z dôvodu potreby informácií v stálych cenách. Novšie symetrické input - output tabuľky skonštruované prostredníctvom Eurostatu nie sú k dispozícii. Štruktúrne väzby sa však v krátkom období podstatne nemenia, preto môžme pri výsledkoch pripustiť určité časové oneskorenie ([4]).

Zmeny v objeme miezd zamestnancov budeme pomocou štrukturálnej dekompozície rozkladať na efekt zmeny priemernej ročnej mzdy, zmeny produktivity práce, zmeny v technológiách výroby a efekt zmeny konečného dopytu.

Práca je členená do troch kapitol. V prvej časti sa zameriame na popis input - outpu analýzy a jej vývoj, matematické odvodenie základného Leontiefovho input - output modelu a jeho predpoklady a vlastnosti, popíšeme tabuľky potrebné pre zostavenie tohto modelu a takisto metódy zostavenia symetrických input - output tabuliek.

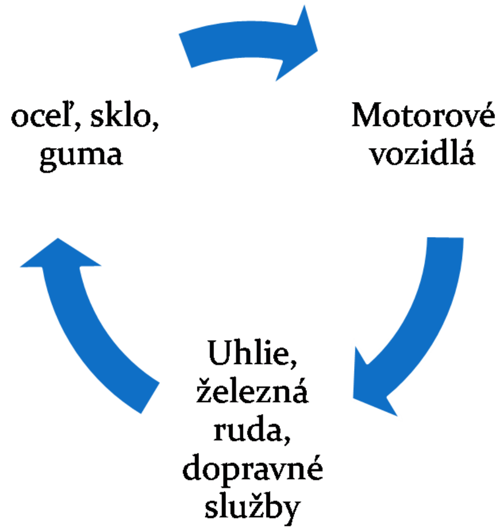
Druhá kapitola obsahuje postupný rozklad zmien produkcie pomocou štrukturálnej dekompozície na členy súvisiace so zmenou konečného dopytu a zmenou technológií, ktoré ďalej rozložíme na členy súvisiace so zmenami celkového konečného dopytu pre celé hospodárstvo, zmeny rozloženia dopytu v rámci kategórií, zmeny rozloženia dopytu medzi jednotlivé kategórie a zmeny technológie jednotlivých sektorov. V tejto časti tiež uvedieme rozklad premennej, ktorá je funkciou produkcie a zostavíme model pre analýzu zmien objemu miezd, ktorý využijeme v nasledujúcej časti pre Slovensko.

Tretia kapitola je zameraná na praktické využitie výsledkov odvodených v predošlej časti práce a analýzu zmien objemu miezd vychádzajúc z input - output tabuliek pre Slovenskú republiku za roky 2000 a 2005. Pomocou štrukturálnej dekompozície rozložíme zmenu objemu miezd na efekt zmeny priemernej ročnej mzdy, zmeny produktivity práce, resp. koeficientu pracnosti, zmeny v technológiách výroby a efekt zmeny konečného dopytu a výsledky sa pokúsime ekonomicky interpretovať.

1 Input - output analýza

Dôležitou úlohou národných štatistických úradov je zachytávanie komoditných a medziodvetvových tokov v ekonomike. Na tento účel slúži sústava input-output (IO) tabuliek, ktorá podľa európskeho štandardu ESA 1995 (Európsky systém národných a regionálnych účtov) zahrňuje tabuľky dodávok a použitia a symetrické input-output tabuľky. Hlavný účel tabuliek dodávok a použitia je predovšetkým štatistický. Slúži na popis pôvodu a použitia tovaru a služieb vytvorených vo výrobnom procese. Tieto tabuľky sú dôležitým nástrojom pri výpočte hrubého domáceho produktu a jeho zložiek v bežných cenách a pri prepočte týchto agregátov do stálych cien. Súčasne umožňujú odhaliť nekonzistentnosť vstupných dát. Naopak symetrické input-output tabuľky sú analytickým nástrojom, ktorý umožňuje skúmať medziodvetvové väzby a merať dopad exogénnych vplyvov na ekonomiku ([10]).

Input-output model je tvorený dátami za určitú ekonomickú oblasť - národ, región, zoskupenie, štát atď. My budeme predpokladať, že je to štát. Ekonomické aktivity budú rozdelené na určitý počet segmentov alebo produkčných sektorov, ktoré vyrábajú výrobky a poskytujú služby. Vychádzajúc z [1], základná forma input - output modelu pozostáva zo systému lineárnych rovníc, z ktorých každá popisuje rozdelenie priemyselných produktov v ekonomike. Budeme skúmať medzisektorové toky predstavujúce dodávky a nákupy medzi sektormi. Medzisektorové toky si môžeme ľahko predstaviť na zjednodušenom príklade produkcie motorových vozidiel, viď Obrázok 1.



Obr. 1: Príklad medzisektorových tokov.

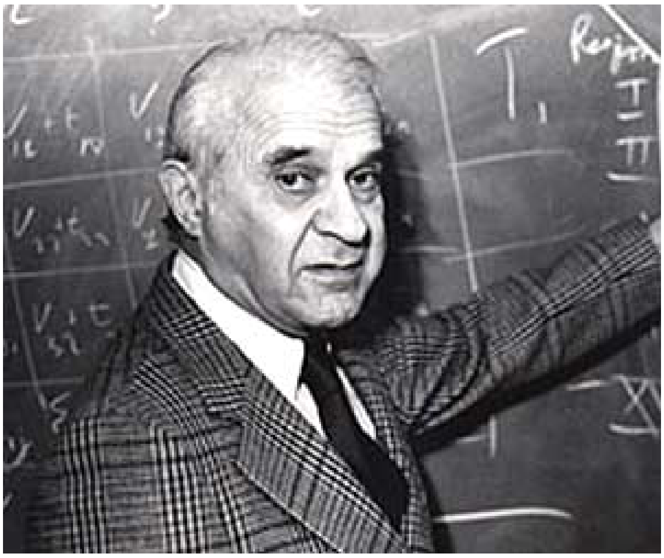
Na výrobu motorových vozidiel je potrebná oceľ, sklo a guma. Na produkciu ocele zase potrebujeme uhlie, železnú rudu a dopravné služby, čím sa opäť dostávame k potrebe využitia motorových vozidiel.

Štandardné nástroje štrukturálnej analýzy sa zameriavajú na skúmanie izolovaných sektorov a ich vzájomné väzby sú zanedbané. Input - Output analýza však tento nedostatok základných prístupov odstraňuje. Skúmané dáta sú zaznamenávané za určité časové obdobie, zvyčajne 1 kalendárny rok. Môžu byť zachytené vo fyzických množstvách, výhodnejšie je však ocenenie v peňažných jednotkách.

1.1 Vývoj input - output analýzy

Analýza medziodvetvových vzťahov - input-output analýza - sa v súčasnosti úspešne aplikuje takmer vo všetkých hospodársky vyspelých štátoch, ale aj v mnohých menej rozvinutých krajinách. Podľa [9], z uplatňovania na národohospodárskej úrovni neskôr vznikali aplikácie na úrovni podniku (firmy), regiónu, odvetvia a napokon sa táto metóda využívala aj na medzinárodnej úrovni. Prirodzene, uplatňovanie input-output analýzy v rôznych ekonomických systémoch viedlo k rozvinutiu alebo modifikácii niektorých zložiek tejto metódy.

Korene základných princípov input-output analýzy siahajú do dávnejšej minulosti. Myšlienka zobrazenia bilancie reprodukčného procesu sa objavila už v práci známeho francúzskeho ekonóma - fyziokrata F. Quesnayho (1694 - 1774) s názvom *Ekonomická tabuľka*, ktorá bola uverejnená v roku 1758. F. Quesnay takto v Ekonomickej tabuľke znázornil a vysvetlil peňažné toky dôchodkov medzi triedami (vlastníkmi pôdy, podnikateľmi a pracujúcimi v poľnohospodárstve a pracujúcimi v zvyšných hospodárskych odvetviach), resp. ekonomickými sektormi. Nemecký filozof, ekonóm, historik a novinár Karl Marx (1818 - 1883) použil Ekonomickú tabuľku pri teoretickej analýze reprodukčného procesu v druhom dieli jeho práce s názvom *Kapitál*. Tieto myšlienky sa koncom 19. a začiatkom 20. storočia realizovali formou prvých národohospodárskych bilancií, ktoré boli neustále prehlbované a zdokonaľované.



Obr. 2: Profesor Wassily Leontief (1905 - 1999).

Bezprostredným podnetom pre vznik modernej input-output analýzy, ktorej základy sformuloval v tridsiatych rokoch 20.storočia americký profesor ruského pôvodu a nositeľ Nobelovej ceny za ekonómiu z roku 1973 Wassily Leontief (1905 - 1999), boli prvé sovietske národohospodárske bilancie za roky 1923/24 a teória rovnováhy švajčiarskeho ekonóma Leona Walrasa (1834 - 1910). W. Leontief dobre poznal tieto bilancie, lebo určitý čas pôsobil v plánovácích orgánoch vtedajšieho Sovietskeho zväzu. Takisto prvé bilancie, ktoré zostavoval pre hospodárstvo USA za roky 1919, 1929, 1939 majú mnoho spoločných znakov so sovietskymi materiálovými a národohospodárskymi bilanciami. Teória rovnováhy Leona Walrasa bola poprvýkrát publikovaná v roku 1974 v jeho práci *Elementy čistej politickej ekonómie alebo teória spoločenského bohatstva*. Walras vo svojej práci popísal vzťah medzi výrobou a spotrebou systémom lineárnych rovníc. W. Leontief tieto dva prvky tvorivo spojil, pričom bilanciu interpetoval matematicky ako systém lineárnych rovníc a sformuloval matematický model, ktorý zobrazuje proces spoločenskej výroby. Tento model mohol byť naplnený konkrétnymi číslami a mohol sa prvýkrát experimentálne použiť. Základy metódy, označenej Leontiefom ako *input - output analysis*, vysvetlil vo svojom článku *Faktory proporcií a štruktúry amerického obchodu* a v knižke ([5]).

1.2 Základná štruktúra otvoreného statického Input - Output modelu

V tejto časti na základe [1] preskúmame základnú štruktúru otvoreného statického Leontiefovho Input - Output modelu a jeho predpoklady. Model je otvorený preto, lebo produkcia sektorov je spotrebovávaná nielen vo výrobnej sfére, ale aj mimo nej, teda vo sfére konečnej spotreby. Navyše do systému vstupujú zložky vytvorené mimo vlastného systému, teda primárne zdroje, najmä pracovné sily, kapitál, produkcia z dovozu a pod. Systém je tak spojený určitými väzbami s okolím aj na strane výstupov, aj na strane vstupov. Model nezahŕňa faktor času, preto je statický ([9]).

Podľa Leontiefovho input - output modelu sa zmeny konečnej spotreby premietnu prostredníctvom medzisektorových väzieb do zodpovedajúcich zmien v produkcii tovarov a služieb, ktoré sú potrebné na uspokojenie konečného dopytu ([4]).

Matematická štruktúra Input - Output systému pozostáva s n lineárnych rovníc s n neznámymi. Hoci riešenie tohto systému rovníc, cez inveznú maticu, je priamo matematické, pokúsime sa odkryť zaujímavé ekonomické interpretácie výsledkov.

Ako je už vyššie uvedené, za základnú ekonomickú oblasť budeme považovať štát, ktorého ekonomické aktivity sú rozdelené na n produkčných sektorov, ktoré vyrábajú výrobky a poskytujú služby. Analyzované údaje budú toky produktov z každého dodávateľského sektora do každého sektora výrobnej spotreby, teda medzisektorové toky, zachytené za dané časové obdobie. Základný Leontiefov model predpokladá, že každé odvetvie produkuje práve jeden statok.

Výmena produktov medzi odvetviami reálne predstavuje predaj a nákup fyzického tovaru, napríklad určitý počet ton ocele na výrobu motorových vozidiel. Pri výpočte transakcií v rámci všetkých sektorov je v zásade možné zaznamenať všetky výmeny buď vo fyzických alebo peňažných jednotkách. Hoci fyzické množstvá lepšie odzrkadľujú produkty, ktoré daný sektor používa, objavuje sa významný problém v prípade predaja viac ako jedného tovaru (Cadillac CTS a Ford Focus sú zreteľne odlišné produkty s odlišnými cenami, avšak, obe sú autá). Z tohto, ale aj iných dôvodov, sa transakcie všeobecne zaznamenávajú v peňažných jednotkách, napriek tomu, že aj v tomto prípade sa objavuje problém spôsobený zmenami cien, ktoré neodrážajú zmeny v používaní fyzických vstupov.

Označme peňažnú hodnotu toku zo sektora i do sektora j ako z_{ij}. Dopyt sektora j po produktoch iných sektorov počas roka je úzko spojený s množstvom tovaru, ktoré v tomto období sektor j vyprodukuje. Napríklad, dopyt automobilového sektora po výrobe ocele úzko súvisí s výrobou automobilov v danom roku, podobne dopyt obuvníckeho sektora po výrobe kože závisí od množstva topánok, ktoré bude vyrábať. Hodnota dopytu po vstupoch sektora j je výrazne ovplyvnená množstvom tovarov a služieb produkovaných daným sektorom v danom čase, pričom toto množstvo ovplyvňuje konečný dopyt. Jedným zo základných predpokladov input - output modelu je, že vzťahy medzi spotrebou produkcie a výrobou sú lineárne.

Vychádzajúc z [1], konečný dopyt je tá časť produkcie, ktorá nie je v určitom období použitá na výrobu iných statkov, ale slúži na konečné použitie. Je tvorený napríklad domácou spotrebou a výdavkami, vládnymi výdavkami, tvorbou hrubého fixného kapitálu a exportom tovarov a služieb. Produkciu i-teho sektora teda môžeme rozdeliť na vstup potrebný na produkciu iných výrobkov alebo na konečný dopyt. Ak označíme celkovú produkciu sektora i ako x_i - pričom ekonomiku sme kategorizovali na n sektorov - a konečný dopyt po produktoch sektora i ako f_i, môžeme pre i-ty sektor vyjadriť nasledovný vzťah:

$$x_i = z_{i1} + z_{i2} + ... + z_{in} + f_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} + f_i. \tag{1}$$

Rovnica (1) teda reprezentuje rozdelenie produkcie sektora i. Pre celú ekonomiku zloženú z n sektorov dostávame sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_{11} + z_{12} + ... + z_{1n} + f_1 \\ &\vdots \\ x_i &= z_{i1} + z_{i2} + ... + z_{in} + f_i \\ &\vdots \\ x_n &= z_{n1} + z_{n2} + ... + z_{nn} + f_n. \end{aligned} \tag{2}$$

V maticovom zápise teda platí:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix}, \text{a } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

a sústavu možno zjednodušene zapísať ako

$$\mathbf{x} = \mathbf{Zi} + \mathbf{f}, \tag{3}$$

kde $\mathbf{x}$ predstavuje vektor celkovej produkcie podľa sektorov, premenná $\mathbf{Z}$ reprezentuje maticu medzispotreby, $\mathbf{i}$ je vektor jednotiek a vektor $\mathbf{f}$ označuje konečný dopyt podľa sektorov. Pre prehľadnosť použitých premenných budeme vektory a matice značiť hrubým písmom.

Ako už bolo v práci spomenuté, základným predpokladom v input - output analýzach je, že medzisektorové toky z_{ij} zo sektora i do sektora j, za určité časové obdobie, úplne závisia od výroby j-teho sektora v tomto období. Z hľadiska štrukturálnych analýz nie je až tak vhodné zachytiť tieto toky v absolútnych hodnotách, zaujímavejší je pomer k celkovej produkcii daného odvetvia, teda množstvo i-teho vstupu potrebného na výrobu jednotky j-teho výstupu. Označme tento pomer a_{ij}, pričom platí:

$$a_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_j}, \qquad \text{v maticovom tvare} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1}, \tag{4}$$

nazvime ho *technický koeficient* a premennú A *maticou technických koeficientov.* Pri predpoklade krátkodobej fixácie týchto koeficientov, t.j. že výrobné činitele sa spotrebúvajú v pevnom pomere - nepripúšťa sa tu v rámci modelu zámena jedným činiteľom za druhý - dostávame pre celú ekonomiku systém lineárnych rovníc dosadením vzťahu (4) do sústavy (2):

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + ... + a_{1i}x_i + ... + a_{1n}x_n + f_1 \\ &\vdots \\ x_i &= a_{i1}x_1 + ... + a_{ii}x_i + ... + a_{in}x_n + f_i \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + ... + a_{ni}x_i + ... + a_{nn}x_n + f_n, \end{aligned} \tag{5}$$

v maticovom tvare:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}. \tag{6}$$

Treba však poznamenať, že predpoklad o stabilite technických koeficientov je silným predpokladom a všeobecne neplatí nielen pre skupiny výrobkov na národohospodárskej úrovni, ale ani pre výrobu a spotrebu jednotlivých výrobkov na úrovni podnikov.

Prenesením všetkých premenných x_i na ľavú stranu a ich vyňatím pred zátvorku možno sústavu upraviť na tvar:

$$\begin{aligned} (1 - a_{11})x_1 - ... - a_{1i}x_i - ... - a_{1n}x_n &= f_1 \\ &\vdots \\ -a_{i1}x_i - ... - (1 - a_{ii})x_i - ... - a_{in}x_n &= f_i \\ &\vdots \\ -a_{n1}x_n - ... - a_{ni}x_i - ... - (1 - a_{nn})x_n &= f_n. \end{aligned} \tag{7}$$

Túto možno pomocou matíc zapísať ako:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{f}, \tag{8}$$

pričom $\mathbf{I}$ predstavuje jednotkovú maticu rozmeru $n \times n$. Pre dané hodnoty konečného dopytu dostávame sústavu n lineárnych rovníc s n neznámymi $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = f_i. \tag{9}$$

Z ekonomických dôvodov je potrebné, aby všetky hodnoty konečného dopytu f_i, technických koeficientov a_{ij} aj produkcie x_i boli nezáporné. Aké sú teda podmienky existencie nezáporného riešenia $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$ pre dané $f_i \geq 0$ za predpokladu $a_{ij} \geq 0$? Z ekonomického hľadiska riešiteľnosť systému (9) pre nezáporné hodnoty $x_i \geq 0$ znamená funkčnosť Leontiefovho modelu ([2]).

Rovnica (9) predstavuje špeciálny prípad systému:

$$\rho x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = f_i \qquad pre \quad i = 1, ..., n, \tag{10}$$

pre hodnotu parametra $\rho = 1$. Systém (10) možno po substitúcii

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \rho \delta_{ij} - a_{ij} \qquad pre \quad i, j = 1, ..., n, \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{pre } i = j, \\ 0 & \text{pre } i \neq j, \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

prepísať na tvar:

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j = f_i \qquad pre \quad i = 1, ..., n, \tag{12}$$

pričom platí

$$r_{ij} \leq 0 \qquad pre \quad i \neq j. \tag{13}$$

Naopak aj systém (12) je možné transformovať na systém (10). Pre dostatočne veľké číslo ρ také, že platí $\rho > r_{ii}$ pre $i = 1, ..., n$, dostávame, vyplyvajúc zo substitúcie (11), nezápornosť technických koeficientov $a_{ij} \geq 0$ pre všetky i, j.

Pre systém (12) platia nasledovné 4 podmienky:

(I) Systém (12) má nezáporné riešenie $x_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$ pre nejaký kladný konečný dopyt $f_i > 0$ $(i = 1, ..., n)$.

(II) Systém (12) má nezáporné riešenie $x_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$ pre akýkoľvek daný nezáporný konečný dopyt $f_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$.

(III) Štvorcová matica $\mathbf{R} = (r_{ij})$ má n kladných "ľavých rohových"subdeterminantov.

$$\begin{vmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{k1} & \cdots & r_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad (k = 1, ..., n).$$

(IV) Všetky subdeterminanty matice $\mathbf{R}$ sú kladné.

Podmienky (III) a (IV) sú nazývané *Hawkins - Simonove podmienky* ([6]). Aj keď podmienky (I) a (III) sa zdajú byť slabšie, všetky štyri podmienky sú navzájom ekvivalentné.

Veta 1.1. *Podmienky (I),(II),(III) a (IV) sú navzájom ekvivalentné.*

Dôkaz: V prvej časti dokážeme implikáciu: $(I) \Rightarrow (III) \Rightarrow (II) \Rightarrow (I)$ a potom ekvivalenciu (IV) so zvyšnými troma podmienkami.

$(i)(I) \Rightarrow (III)$. Budeme postupovať matematickou indukciou. Pre $n = 1$, má rovnica (12) tvar: $r_{11}x_1 = f_1$. Ak má táto rovnica nezáporné riešenie $x_1 \geq 0$ pre nejaké kladné $f_1 > 0$, potom $r_{11} > 0$.

Predpokladajme, že platí implikácia $(I) \Rightarrow (III)$ pre $n - 1$ a dokážme pre n. Vyjadrením prvého člena ľavej strany rovnice (12) dostávame:

$$r_{11}x_1 = f_1 - \sum_{j=2}^{n} r_{1j}x_j, \tag{14}$$

pričom pravá strana rovnice je kladná, pretože $f_1 > 0$, $r_{1j} \leq 0$, $x_j \geq 0$ pre $j = 2, ..., n$. Z toho vyplýva, že výraz $r_{11}x_1 > 0$ a keďže $x_1 \geq 0$, platí tiež $r_{11} > 0$. Aplikujme na systém (12)

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{in} \\ \vdots & & \vdots & \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Gaussovú elimináciu. Po odrátaní $\frac{r_{i1}}{r_{11}}$ násobku prvého riadku od i-teho riadku $(i = 2, ..., n)$, postupne eliminujeme prvý stĺpec a dostávame:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r^*_{22} & \cdots & r^*_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & r^*_{i2} & \cdots & r^*_{in} \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & r^*_{n2} & \cdots & r^*_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f^*_2 \\ \vdots \\ f^*_i \\ \vdots \\ f^*_n \end{pmatrix} \tag{15}$$

Pre upravené koeficienty označené hviezdičkou teda platí:

$$\begin{aligned} r^*_{ij} &= r_{ij} - \frac{r_{i1} r_{1j}}{r_{11}} \qquad i, j = 2, ..., n \\ f^*_i &= f_i - \frac{r_{i1} f_1}{r_{11}}, \end{aligned} \tag{16}$$

pričom

$$r^*_{ij} \leq 0, \quad f^*_i > 0 \qquad pre \;\; i, j = 2, ..., n; \;\; i \neq j, \tag{17}$$

pretože $r_{ij} \leq 0$ pre $i \neq j$ a $f_i > 0$. Dostali sme systém:

$$\sum_{j=2}^{n} r^*_{ij} x_j = f^*_i \qquad pre \quad i = 2, ..., n, \tag{18}$$

pričom je splnená podmienka (13) a podľa indukčného predpokladu pre systém s $n - 1$ členmi má systém (18) nezáporné riešenie $x_2, ..., x_n$ pre danú konečnú spotrebu $f^*_i > 0$ $(i = 2, ..., n)$ a n kladných "ľavých rohových" subdeterminantov:

$$\begin{vmatrix} r^*_{22} & \cdots & r^*_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ r^*_{k2} & \cdots & r^*_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad (k = 2, ..., n).$$

Pre determinant matice $\mathbf{R}$ dostávame:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \cdots & r_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ 0 & r^*_{22} & \cdots & r^*_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & r^*_{k2} & \cdots & r^*_{kk} \end{vmatrix}$$
$$= r_{11} \begin{vmatrix} r^*_{22} & \cdots & r^*_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ r^*_{k2} & \cdots & r^*_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad (k = 2, ..., n), \tag{19}$$

a teda platí podmienka (III).

(ii) $(III) \Rightarrow (II)$. Opäť budeme postupovať matematickou indukciou. Pre $n = 1$ v systéme (12): $r_{11}x_1 = f_1$, dostávame nezáporné riešenie $x_1 = \frac{f_1}{r_{11}}$ pre každé $f_1 \geq 0$ ak $r_{11} > 0$.

Predpokladajme že implikácia $(III) \Rightarrow (II)$ platí pre $n - 1$. Podobne ako v kroku (i) môžeme transformovať systém (12) pomocou Gausovej eliminácie na systém (15). Narozdiel od kroku (i) môžeme za konečnú spotrebu zvoliť ľubovoľné nezáporné hodnoty $f_i \geq 0$ pre $i = 1, ..., n$.

Transformáciou sa opäť dostávame k rovnici (18). Vychádzajúc z podmienky (III) pre rovnicu (12) ľahko ukážeme, že aj rovnica (18) túto podmienku spĺňa:

$$\begin{vmatrix} r^*_{22} & \cdots & r^*_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ r^*_{k2} & \cdots & r^*_{kk} \end{vmatrix} = \frac{1}{r_{11}} \begin{vmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{k1} & \cdots & r_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad (k = 2, ..., n).$$

Zo vzťahu (16) vyplýva $f^*_i \geq 0$ $(i = 2, ..., n)$ pre ľubovoľné $f_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$ a podľa indukčného predpokladu má rovnica (18) nezáporné riešenie $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0, ..., x_n \geq 0$ pre dané f^*_i. Úpravou rovnice (14) vyjadrime:

$$x_1 = \frac{1}{r_{11}}(f_1 - \sum_{j=2}^{n} r_{1j}x_j), \tag{20}$$

pričom nezápornosť platí aj pre x_1, pretože $r_{11} > 0, f_1 \geq 0$, $r_{1j} \leq 0$ a $x_j \geq 0$ pre $j = 2, ..., n$. Systém (12) má teda nezáporné riešenie $x_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$

pre akýkoľvek daný nezáporný konečný dopyt $f_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$ a podmienka (II) je splnená.

(iii) $(II) \Rightarrow (I)$. Táto implikácia je zrejmá.

(iv) Zostáva dokázať ekvivalenciu podmienky (IV) so zvyšnými troma podmienkami, ktorých vzájomnú ekvivalenciu sme už dokázali. Implikácia $(IV) \Rightarrow (III)$ je zrejmá. Ak je splnená podmienka (II), stačí premenné v systéme (12) identicky a simultánne prečíslovať, tak sa každá submatica matice $\mathbf{R}$ môže stať jednou z n "ľavých rohových" submatíc. Platnosť podmienky (III) sa takýmto prečíslovaním nemení. Vychádzajúc z implikácie $(II) \Rightarrow (III)$ pre prečíslované systémy platí, že každá submatica matice $\mathbf{R}$ je kladná. Teda platí $(II) \Rightarrow (IV)$, čím sme dokázali ekvivalenciu všetkých štyroch podmienok.

Vráťme sa späť k rovnici (8). Ak existuje inverzná matica $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$, teda matica $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ nie je singulárna, alebo ak $|\mathbf{I}-\mathbf{A}| \neq 0$, z definície inverznej matice $(I-A)^{-1} = \frac{1}{|I-A|}[adj(I-A)]$, sústava má jednoznačné riešenie:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-\mathbf{1}}\mathbf{f} = \mathbf{L}\mathbf{f}, \tag{21}$$

kde matica $\mathbf{L} = (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-\mathbf{1}}$ sa nazýva *Leontiefova inverzná matica* alebo *matica celkových požiadaviek* a v detailnejšom zápise platí:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{11}f_1 + ... + l_{1i}f_i + ... + l_{1n}f_n \\ &\vdots \\ x_i &= l_{i1}f_1 + ... + l_{ii}f_i + ... + l_{in}f_n \\ &\vdots \\ x_n &= l_{n1}f_1 + ... + l_{ni}f_i + ... + l_{nn}f_n. \end{aligned} \tag{22}$$

Prvky Leontiefovej inverznej matice l_{ij} nazývame, podľa [9], *komplexnými koeficientami spotreby*. Tieto prvky závisia iba od technických koeficientov a_{ij} a majú charakter parametrov. Koeficienty l_{ij} vyjadrujú , koľko výroby i-teho sektora je potrebnej na zabezpečenie jednej jednotky produkcie j-teho sektora pre konečnú spotrebu. Vyjadrujú tiež prírastok produkcie sektora i na jednotkový prírastok konečnej spotreby produkcie sektora j, čo vyplýva z derivácie vzťahu (22)

$$\frac{\partial x_i}{\partial f_j} = l_{ij}. \tag{23}$$

Medzi prírastkom konečnej spotreby $\mathbf{\Delta f}$ a prírastkom celkovej produkcie $\mathbf{\Delta x}$ teda platí nasledujúci vzťah:

$$\mathbf{\Delta x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-\mathbf{1}}\mathbf{\Delta f} = \mathbf{L}\mathbf{\Delta f}, \tag{24}$$

preto Leontiefovu inverznú maticu nazývame tiež *maticovým multiplikátorom* transformujúcim zmeny v konečnej spotrebe na zmeny v objeme výroby.

Pre prvky matice $\mathbf{L}$ platí, že sú vždy nezáporné a väčšie alebo rovné prislúchajúcim technickým koeficientom a_{ij}, teda platí

$$\begin{aligned} &l_{ij} \geq a_{ij} && i,j = 1,2,...,n; \quad i \neq j, \\ &l_{ii} \geq 1 + a_{ii} && i = 1,2,...,n. \end{aligned} \tag{25}$$

Tento vzťah bezprostredne vyplýva z možnosti rozkladu Leontiefovej inverznej matice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-\mathbf{1}}$ na konvergujúcu postupnosť matíc

$$\begin{aligned} &(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-\mathbf{1}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathbf{2}} + ... + \mathbf{A}^{\mathbf{k}} + ... \\ &(\mathbf{A}^{\mathbf{k}} \to 0 \quad pre \quad k \to \infty). \end{aligned} \tag{26}$$

Tento rozklad je možný za podmienky, že platí

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{A}^{k+1} = 0. \tag{27}$$

Spojením rovníc (26) a (21) dostávame vzťah

$$\mathbf{x} = \mathbf{f} + \mathbf{Af} + \mathbf{A}(\mathbf{Af}) + ..., \tag{28}$$

ktorý ukazuje to, že na dodanie výrobkov do konečnej spotreby $\mathbf{f}$ je potrebné vyrobiť aspoň toto množstvo statkov, ktoré zase na svoju výrobu potrebujú medziprodukty $\mathbf{Af}$, pričom takisto medziprodukty vyžadujú ďalšie vstupy a tak ďalej ([4]).

Vychádzajúc z [9], vlastnosti sústavy lineárnych rovníc (5) možno odvodiť z vlastností koeficientov a_{ij} v tejto sústave. Prvky matice $\mathbf{A}$ vyjadrujú spotrebu produkcie sektora i na jednotku celkovej produkcie sektora j. Keďže celková produkcia sektorov je kladné číslo, t.j. $x_j > 0$ a náklady na produkciu i-teho sektora, potrebnú pri výrobe j-teho sektora sú - pokiaľ nie je výroba stratová - vždy menšie ako celková produkcia, teda $x_j > z_{ij} \geq 0$, sú technické koeficienty a_{ij} nezáporné čísla a menšie ako 1:

$$0 \leq a_{ij} < 1, \qquad \text{pre } i, j = 1, 2, ..., n. \tag{29}$$

Ak nie je výroba stratová, potom takisto platí, že hodnota celkových nákladov na produkciu je menšia ako celková produkcia, teda $x_j > \sum_{i=1}^{n} z_{ij}$, a aj súčet technických koeficientov j-teho sektora je menej ako 1:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, \qquad \text{pre } j = 1, 2, ..., n. \tag{30}$$

Táto vlastnosť je známa ako *Brauer - Solowa podmienka*, ktorá hovorí, že ak je stĺpcový alebo riadkový súčet koeficientov matice $\mathbf{A}$ menší ako 1, existuje pre systém (9) nezáporné riešenie $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$ pre dané $f_i \geq 0$ za predpokladu $a_{ij} \geq 0$ ([2]).

Keďže prvky matice $\mathbf{A}$ vyhovujú podmienkam (29) a (30), vzťah (27) je splnený.

Sčítajme všetky matice v rovnici (26) okrem jednotkovej matice a matice technických koeficientov bez umocnenia a tento súčet označme $\mathbf{L}^*$:

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{A^2} + \mathbf{A^3} + ... + \mathbf{A^k} + ...$$

Leontiefovu inverznú maticu teraz môžme zapísať v tvare

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{L}^*.$$

Ako už bolo spomenuté, matica $\mathbf{A}$ je nezáporná, teda aj jej mocniny sú nezáporné a takisto aj ich súčet, ktorý predstavuje matica $\mathbf{L}^*$, je nezáporný. Pre komplexné koeficienty spotreby l_{ij} platí

$$\begin{aligned} l_{ij} = a_{ij} + l^*_{ij} + \delta_{ij} \quad & i,j = 1,2,...,n, \\ kde \quad & a_{ij} \geq 0, \\ & l^*_{ij} \geq 0, \\ & \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pre } i = j, \\ 0 & \text{pre } i \neq j. \end{cases} \end{aligned} \tag{31}$$

Z tohto vyplýva platnosť vzťahu (25). Rozdiel celkových a priamych nákladov, teda $l_{ij} - a_{ij}$, charakterizuje nepriame náklady na spotrebu. Čím je tento rozdiel väčší, tým významnejšie je použitie input - output modelu na zobrazenie väzieb medzi konečnou spotrebou a celkovou produkciou sektorov.

1.3 Tabuľka dodávok a použitia a symetrické Input-Output tabuľky

V tejto časti sa budeme zaoberať detailnejším popisom input - output systému. Input-output štruktúra pozostáva z troch typov tabuliek ([8]):

- Tabuľka dodávok (supply table),
- Tabuľka použitia (use table),
- Symetrická input-output tabuľka (SIOT).

1.3.1 Tabuľky dodávok a použitia

Vychádzajúc z [10], tabuľky dodávok a použitia sú klasifikované ako nesymetrické, pretože v jednom rozmere, najčastejšie v riadkoch, zachytávajú údaje o komoditách/produktoch a v druhom rozmere, obvykle v stĺpcoch, údaje o výrobných odvetviach. Počet komodít a odvetví se nemusí zhodovať, spravidla je počet komodít vyšší než počet odvetví. Európske členské štáty majú povinnosť každoročne tieto tabuľky vykazovať.

Tabuľky dodávok a použitia teda predstavujú matice, ktoré obsahujú hodnoty transakcií s produktami v národnej ekonomike roztriedené podľa typu produktu a odvetvia ([7]). Tieto tabuľky zobrazujú:

- nákladovú štruktúru produkcie a dôchodkov vytvorených v procese produkcie;
- toky výrobkov a služieb vyprodukovaných v národnej ekonomike;
- toky výrobkov a služieb medzi domácou ekonomikou a zahraničím. Na potreby analýzy v európskom kontexte je potrebné rozlišovať medzi tokmi v rámci EÚ a tokmi s krajinami mimo EÚ.

Hlavnou úlohou tabuliek dodávok a použitia je znázorniť zmeny v štruktúre ekonomiky, napr. zmeny v dôležitosti rôznych odvetí, zmeny v použitých vstupoch a vyrobených výstupoch a zmeny v zložení výdavkov na konečnú spotrebu, tvorbe hrubého kapitálu, dovozu a vývozu. Do týchto zmien sa môže premietať vývoj ako napríklad globalizácia, outsourcing, inovácie a zmeny v nákladoch na pracovnú silu, dane, ceny ropy a výmenné kurzy.

Tabuľky dodávok popisujú jednotlivé zdroje, teda zobrazujú dodávky výrobkov a služieb podľa produktov a podľa výrobného odvetvia, pričom sa rozlišuje ponuka medzi domácimi odvetviami a dovozom ([7]). Na nasledujúcom obrázku môžme pozorovať štruktúru tabuľky dodávok, ktorá pozostáva z produkčnej matice zobrazujúcej domácu produkciu odvetví cez produkty a matice importu, ktorá zobrazuje konečný import krajiny cez produkty. V poslednom riadku je zobrazená celková produkcia odvetví a celkový import a v poslednom stĺpci celková ponuka produktov, pričom obsahuje domácu aj importovnú zložku .

Industries / Products	Industries			Imports	Total
	Agriculture	Industry	Service activities		
Agricultural products Industrial products Services	Output by product and by industry			Imports by product	Total supply by product
Total	Total output by industry			Total imports	Total supply

Obr. 3: Zjednodušená tabuľka dodávok ([8]).

Primárne aktivity jednotlivých odvetví sú zaznamenané na diagonále produkčnej matice, zatiaľčo sekundárne sa nachádzajú mimo diagonály. Je teda zrejmé, že matica produkcie nie je diagonálna matica ([8]).

Tabuľky použitia, podľa [10], ponúkajú pohľad na medzispotrebu, konečnú spotrebu, tvorbu kapitálu, zmenu stavu zásob a vývoz. Súčasne v stĺpcoch poskytujú informáciu o jednotlivých zložkách pridanej hodnoty v daných odvetviach (odmeny zamestnancov, ostatné dane po odpočítaní subvencií na produkciu, čistý zmiešaný dôchodok, čistý prevádzkový prebytok a spotreba fixného kapitálu). Schematický nákres tabuľky použitia je uvedený na nasledujúcom obrázku:

Industries / Products	Industries			Final uses			Total
	Agriculture	Industry	Service activities	Final consumption	Gross capital formation	Exports	
Agricultural products Industrial products Services	Intermediate consumption by product and by industry			Final uses by product and by category			Total use by product
Value added	Value added by component and by industry						Value added
Total	Total output by industry			Total final uses by category			

Obr. 4: Zjednodušená tabuľka použitia ([8]).

Pri bilancovaní použitia a zdrojov v tabuľkách dodávok a použitia je nutné prihliadnuť k rozdielnemu oceneniu. Zatiaľčo je strana zdrojov ocenená v základných cenách (tj. cenách bez započítania obchodných a dopravných prirážok a čistých daní z produktov), strana použitia je ocenená v cenách kúpnych, tzn. vrátane všetkých daní a prirážok.

1.3.2 Symetrické input - output tabuľky (SIOT)

Z [10], SIOT tabuľky, ako už aj názov napovedá, sú symetrické. Zdroje a použitie zobrazujú v členení komodity krát komodity alebo odvetvie krát odvetvie. Tieto tabuľky umožňujú kvantifikovať dopad vládnych zásahov na hospodárstvo ako celok, ale i na jednotlivé odvetvia a domácnosti. Pomocou nich je možné vyhodnocovať dopad podpory investícií, podpory hypoték, environmentálnych zákonov a nových technológií. Okrem toho SIOT tabuľky umožňujú analyzovať produktivitu, zamestnanosť, citlivosť na vplyv zmien daňových sadzieb a regulácií.

Základom symetrickej input-output tabuľky je štvorcová matica medzispotreby s rovnakým členením v riadkoch aj stĺpcoch, a to produkt krát produkt alebo odvetvie krát odvetvie. Stĺpce tejto matice reprezentujú štruktúru vstupov, tzn. udávajú, koľko produktov bolo spotrebovaných na výrobu konkrétneho výrobku. Každá zmena v dopyte po danom výrobku vedie súčasne k proporcionálnej zmene dopytu po produktoch, ktoré tvoria vstupy vo výrobnom procese.

Matica medzispotreby, ktorá je členená symetricky podľa odvetvia, môže byť interpretovaná podobne, teda pre každé odvetvie stĺpec vykazuje, koľko výrobkov ostatných odvetví bolo spotrebovaných na zaistenie vlastnej produkcie.

Napravo od spomínanej štvorcovej matice medzispotreby je umiestnená informácia o konečnej spotrebe podľa jednotlivých produktov, viď Obrázok 5. Tieto údaje pochádzajú priamo z tabuľky použitia.

Pri zostrojovaní SIOT je uprednostňované ocenenie v zakladných cenách, pretože je vhodnejšie z analytického hľadiska. Takéto ocenenie je homogénnejšie, a tak vzťah medzi vstupmi a výstupmi v peňažných jednotkách lepšie odzrkadľuje technologické väzby. Za nižšou homogenitou ocenenia v kúpnych cenách stojí obchodné rozpätie, dopravné prirážky a čisté dane na výrobky, ktoré sú v kúpnej cene zahrnuté a vykazujú v jednotlivých odvetviach i v rámci konečnej spotreby značnú premenlivosť.

Informácie o obchodnom rozpätí a dopravných prirážkach sú v symetrickej input - output tabuľke explicitne zaznamenané v riadkoch medzispotreby produktov obchodu a dopravy. Súčasťou SIOT tabuliek je tiež informácia o čistých daniach na výrobky vyplatených za jednotlivé produkty v medzispotrebe a v konečnej spotrebe, informácia o hrubej pridanej hodnote a jej štruktúre a údaje o dovoze jednotlivých produktov.

Schématický nákres symetrickej input - output tabuľky je zobrazený na nasledujúcom obrázku:

Products / Products	Homogeneous units of production			Final uses			Total use
	Agricultural products	Industrial prodcts	Services	Final consumption	Gross capital formation	Exports	
Agricultural products Industrial products Services	Intermediate consumption by product and by homogeneous units of production			Final uses by product and by category			Total use by product
Value added	Value added by component and by homogeneous units of production						
Imports for similar products	Total imports by product						
Supply	Total supply by homogeneous units of production			Total final uses by category			

Obr. 5: Zjednodušená symetrická input - output tabuľka (komodity krát komodity)([8]).

1.4 Metódy transformácie input-output tabuliek, komoditno - odvetvový systém

V tejto časti sa zameriame podľa [1] na základné vzťahy tabuliek dodávok a použitia a takisto na metódy zostavenia symetrických input - output tabuliek.

Spojením tabuliek dodávok a použitia dostávame schému komoditno - odvetvového systému, zobrazenú na nasledujúcom obrázku:

		Products			Industries			Final uses			Total
		Agri-cultural products	Industrial products	Services	Agri-culture	Industry	Service activities	Final con-sumption	Gross capital formation	Exports	
Products	Agricultural products Industrial products Services				Intermediate consumption by product and by industry **U**			Final uses by product and by category **f**			Total use by product **q**
Industries	Agriculture Industry Service activities	Output of industries by product **V**									Total output by industry **x**
Value added					Value added by component and by industry						Total value added
Imports		Total imports by product									Total imports
Total		Total supply by product **q'**			Total output by industry **x'**			Total final uses by category			

= not applicable

Obr. 6: Základná štruktúra systému dodávok a použitia ([8]).

Pre rozlíšenie dimenzie komodít a odvetví, zaveďme index $i = 1, ..., m$ pre komodity a index $j = 1, ..., n$ pre odvetvia. Ak každá komodita vyprodukovaná v ekonomike je primárnym produktom niektorého odvetvia v danej ekonomike, potom počet komodít a počet odvetví je rovnaký, teda $m = n$.

Pre prehľadnosť nasledujúcich vzťahov zaveďme značenie:

- $\mathbf{U} = [u_{ij}]$ - matica medzispotreby z tabuľky použitia, pričom u_{ij} predstavuje množstvo komodity i potrebnej na výrobu v j-tom odvetví,
- $\mathbf{V} = [v_{ji}]$ - transponovaná produkčná matica z tabuľky dodávok, pričom v_{ji} predstavuje množstvo komodity i vyrobenej v j-tom odvetví,

- $\mathbf{f}$ - vektor konečnej spotreby rozdelenej podľa komodít,
- $\mathbf{x}$ - vektor produkcie podľa odvetví,
- $\mathbf{q}$ - vektor produkcie podľa komodít.

Zo základného input - output modelu už poznáme vzťah (3): $\mathbf{x} = \mathbf{Zi} + \mathbf{f}$. Pomocou komoditno - odvetvovej tabuľky vieme vyjadriť vektor produkcie aj v dimenzii komodít ($\mathbf{q}$), aj v dimenzii odvetví ($\mathbf{x}$).

Celkovú produkciu odvetvia j možno získať sčítaním všetkých komodít vyrobených v tomto odvetví, a teda riadkovým súčtom matice $\mathbf{V}$:

$$x_j = v_{j1} + ... + v_{jm}, \tag{32}$$

alebo

$$\mathbf{x} = \mathbf{Vi}. \tag{33}$$

Podobne celkovú produkciu komodity i možno vyjadriť sčítaním všetkých odvetví, ktoré túto komoditu vyrábajú, čiže v tomto prípade ide o stĺpcový súčet matice $\mathbf{V}$:

$$q_i = v_{1i} + ... + v_{ni}, \tag{34}$$

alebo

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}'\mathbf{i}. \tag{35}$$

Pre produkciu podľa odvetví , podobne ako je pre komodity rovnica (3), môžeme vyjadriť vzťah

$$q_i = u_{i1} + ... + u_{in} + f_i, \tag{36}$$

alebo

$$\mathbf{q} = \mathbf{Ui} + \mathbf{f}. \tag{37}$$

Rovnako, ako sme v základnom input - output modeli definovali technické koeficienty a_{ij}, definujme pre komoditno - odvetvový systém koeficient b_{ij}, ktorý bude predstavovať, koľko i-tej komodity je potrebnej na výrobu jednej jednotky produkovanej j-tym odvetvím, teda platí nasledovný vzťah:

$$b_{ij} = \frac{u_{ij}}{x_j}, \tag{38}$$

alebo v maticovom zápise

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{x}}^{-1}. \tag{39}$$

Dosaďme, pomocou vzťahu (39), výraz $\mathbf{U} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}$ do rovnice (37) a dostávame, podobne ako pre Leontiefov input - output model vzťah (6), rovnosť

$$\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{f}. \tag{40}$$

Narozdiel od vzťahu (6) však nevieme generovať maticu technických koeficientov, pretože rovnica (40) obsahuje na pravej strane vektor celkovej produkcie v dimenzii odvetví a na ľavej strane je tento vektor v dimenzii komodít.

Jedným z riešení je nájsť výraz transformujúci celkovú produkciu podľa odvetví ($\mathbf{x}$) na produkciu podľa komodít ($\mathbf{q}$), alebo naopak. Dáta potrebné na takúto transformáciu možno získat z produkčnej matice $\mathbf{V}$, ktorej riadkové sumy predstavujú produkciu odvetví a sltĺpcové sumy produkciu podľa komodít. V nasledujúcej časti sa zameriame na vyjadrenie spomenutej transformácie pomocou produkčnej matice.

Definujme koeficient d_{ji}, predstavujúci podiel celkovej výroby komodity i, ktorá bola produkovaná v j-tom odvetví, teda platí

$$d_{ji} = \frac{v_{ji}}{q_i}, \tag{41}$$

alebo

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{q}}^{-1}. \tag{42}$$

Matica $\mathbf{D}$ je často nazývaná *maticou trhových podielov.*

Podobne definujme koecient c_{ij}, ktorý bude vyjadrovať podiel produkcie i-tej komodity na celkovú výrobu v j-tom odvetví, teda akú časť z celkovej výroby odvetvia j predstavuje výroba komodity i. Pre koeficient c_{ij} môžme písať

$$c_{ij} = \frac{v_{ij}}{x_j}, \tag{43}$$

alebo

$$\mathbf{C} = \mathbf{V}'\hat{\mathbf{x}}^{-1}. \tag{44}$$

Matica $\mathbf{C}$ je často nazývaná *produkt mix maticou.*

Výsledky vyjadrené v rovniciach (42) a (44) v spojení s rovnicami (33) a (35) poskytujú dve alternatívy transformácie medzi vektorom výroby v dimenzii odvetví a v dimenzií komodít.

Úpravou rovnice (42)

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{q}}^{-\mathbf{1}} \Rightarrow \mathbf{D}\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{D}\hat{\mathbf{q}}\mathbf{i} = \mathbf{V}\mathbf{i}$$

a použitím rovnice (33) dostávame

$$\mathbf{D}\mathbf{q} = \mathbf{x}, \tag{45}$$

alebo

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}^{-\mathbf{1}}\mathbf{x}, \tag{46}$$

ak matica D je štvorcová a regulárna.

Podobne upravením rovnice (44)

$$\mathbf{C} = \mathbf{V}'\hat{\mathbf{x}}^{-\mathbf{1}} \Rightarrow \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V}' \Rightarrow \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\mathbf{i} = \mathbf{V}'\mathbf{i}$$

a dosadením vzťahu (35) dostávame

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{q}, \tag{47}$$

alebo

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-\mathbf{1}}\mathbf{q}, \tag{48}$$

takisto ak matica C je štvorcová a regulárna.

Pre každý typ SIOT, produkt krát produkt a odvetvie krát odvetvie, existujú dve základné metódy transformácie:

- *Komoditná technológia*,
- *Odvetvová technológia.*

Skôr ako prejdeme k ich popisu, vyjadrime si pomocou [1] niekoľko vzťahov potrebných na nasledujúce výpočty.

1.4.1 Inverzia blokovej matice

Inverzia blokovej matice hrá významnú úlohu pri mnohých input - output reprezentáciách. V tejto časti si odvodíme vzťah, pre inverznú maticu k matici zloženej zo štyroch blokov, ktorý neskôr využijeme pri výpočtoch v nasledujúcich podkapitolách.

Nech je daná matica M v dimenzii $n \times n$, zložená zo štyroch blokov:

$$A = \begin{pmatrix} A_{p\times p} & B_{p\times(n-p)} \\ C_{(n-p)\times p} & D_{(n-p)\times(n-p)} \end{pmatrix},$$

pričom bloky A a D sú štvorcové. Rovnako možno aj jej inverziu rozdeliť na takéto bloky:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} X_{p\times p} & Y_{p\times(n-p)} \\ Z_{(n-p)\times p} & U_{(n-p)\times(n-p)} \end{pmatrix}.$$

Platí teda nasledovný vzťah:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U \end{pmatrix} = \mathrm{I} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0_{p\times(n-p)} \\ 0_{(n-p)\times p} & I_{(n-p)\times(n-p)} \end{pmatrix},$$

pričom ho možno rozložiť na 4 rovnice:

$$\begin{aligned} &(i)AX + BZ = I, \qquad && (iii)AY + BU = 0, \\ &(ii)CX + DZ = 0, \qquad && (iv)CY + DU = I. \end{aligned} \tag{49}$$

Za predpokladu, že matica D je invertovateľná, môžme z rovnice (ii) vyjadriť vzťah: $Z = D^{-1}(-CX)$ a dosadiť do rovnice (i). Po osamostatnení X tak dostávame rovnicu: $X = (A - BD^{-1}C)^{-1}$. Rovnako možno z rovnice (iv) vyjadriť vzťah: $U = D^{-1}(I - CY)$ a dosadiť do rovnice (iii). Po úprave možno pre blok Y písať: $Y = X(-BD^{-1})$. Po zhrnutí dostávame pre bloky inverznej matice nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} &X = (A - BD^{-1}C)^{-1}, \qquad && Y = -X(BD^{-1}), \\ &Z = D^{-1}(-CX), \qquad && U = D^{-1}(I - CY). \end{aligned} \tag{50}$$

1.4.2 Komoditná technológia

Podľa tejto metódy sa každý výrobok vyrába iba jednou technológiou. To znamená, že má rovnakú štruktúru vstupov bez ohľadu na to, v ktorom odvetví sa produkuje. Prosté použitie predpokladu komoditnej technológie môže často viesť pri transformácii k nepravdepodobným či dokonca záporným hodnotám, ktorým chýba ekonomická interpretácia. Tieto negatívne elementy sa objavujú predovšetkým z dôvodu nevhodného použitia predpokladu technológie výroby produktu (dva rovnaké výrobky sa vyrábajú odlišnou technológiou), heterogenity v odvetví, zachytenia ekonomických väzieb namiesto technologických (vertikálna integrácia, outsourcing) a chýb v dátach (chyby štatistických prieskumov, nepresnosť informácií, skreslené dopočty chýbajúcich údajov či metodické chyby) ([11]).

Po prijatí predpokladu komoditnej technológie môžeme využiť definíciu produkt mix matice a vzťahy (40) a (47) môžeme po úprave

$$\begin{aligned} \mathbf{q} - \quad & \mathbf{Bx} = \mathbf{f} \\ -\mathbf{q} + \quad & \mathbf{Cx} = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{51}$$

zapísať pomocou blokovej matice:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Využitím vzťahov pre výpočet inverzie blokovej matice (50) môžeme pre celkovú produkciu v dimenzii komodít ($\mathbf{q}$) a v dimenzii odvetví ($\mathbf{x}$) ľahko vyjadriť rovnosti

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{BC^{-1}})^{-1} & (\mathbf{I} - \mathbf{BC^{-1}})^{-1}\mathbf{BC^{-1}} \\ \mathbf{C^{-1}}(\mathbf{I} - \mathbf{BC^{-1}})^{-1} & \mathbf{C^{-1}} + \mathbf{C^{-1}}(\mathbf{I} - \mathbf{BC^{-1}})^{-1}\mathbf{BC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Pre vektor produkcie v dimenzii komodít v závislosti od konečnej spotreby tej istej dimenzie teda platí

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{BC^{-1}})^{-1}\mathbf{f}, \tag{52}$$

pričom inverzia na pravej strane, $(\mathbf{I} - \mathbf{BC^{-1}})^{-1}$, je paralelou matice $\mathbf{L}$ v Leontiefovom modeli, a výraz $\mathbf{BC^{-1}}$, je podobne ako matica $\mathbf{A}$, maticou technických koeficientov v dimenzii komodity krát komodity.

Podobne možno zapísať vzťah pre vektor produkcie v dimenzii odvetví:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1})^{-1}]\mathbf{f}, \tag{53}$$

pričom matica v hranatých zátvorkách už nie je symetrická, ale v dimenzii odvetvie krát komodity.

Aby sme získali dimenziu odvetvie krát odvetvie, je potrebné predefinovať konečnú spotrebu v dimenzii komodít na konečnú spotrebu dimenzie odvetví pomocou produkt mix matice. Prvky matice $\mathbf{C}$ predstavujú podiel produkcie i-tej komodity na celkovú výrobu v j-tom odvetví, a teda keď túto maticu prenásobíme vektorom konečnej spotreby podľa odvetví, dostaneme vektor, ktorého i-ty prvok bude vyjadrovať konečnú spotrebu komodity i. Platí teda

$$\mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad \textit{alebo} \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{f}, \tag{54}$$

kde je vektor konečnej spotreby podľa odvetví označený ako $\mathbf{y}$.

Použime vzťah (40), prenásobme ho inveziou produkt mix matice $\mathbf{C}^{-1}$ zľava, čo dáva

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{f}$$

a pomocou vzťahu (47) a (54) môžeme písať:

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{y}. \tag{55}$$

Osamostatnením vektora $\mathbf{x}$ dostávame, podobne ako v dimenzii komodít, výraz

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{y}, \tag{56}$$

pričom výraz $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}$ je maticou technických koeficientov v dimenzii odvetvie krát odvetvie.

1.4.3 Odvetvová technológia

Tento prístup má za to, že každé odvetvie používa vlastnú technológiu, t.j. všetky výrobky vyrobené v danom odvetví majú identickú štruktúru vstupov. Výhodou tejto technológie je, že nevznikajú záporné hodnoty. Na druhej strane však musíme pri následnej analýze vziať do úvahy, že je založená na predpoklade fixných technických koeficientov získaných výpočtom zo symetrickej input-output tabuľky. Požiadavka fixných technických koeficientov je splnená iba vtedy, ak sú fixné aj proporcie medzi štruktúrami vstupov. Inak povedané, ak rastie dopyt po danom produkte, tak novú úroveň vstupov na uspokojenie dopytu môžeme pomocou matice koeficientov určiť iba za predpokladu, že trhové podiely všetkých odvetví, kde sa daný výrobok produkuje, zostavajú konštantné ([10]).

Po prijatí predpokladu odvetvovej technológie môžeme využiť definíciu matice trhových podielov a vzťahy (40) a (45) môžeme po úprave

$$\begin{aligned} \mathbf{q} - \quad \mathbf{Bx} &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{Dq} - \quad \mathbf{x} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{57}$$

zapísať pomocou blokovej matice:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{D} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Využitím vzťahov pre výpočet inverzie blokovej matice (50) môžeme pre celkovú produkciu v dimenzii komodít ($\mathbf{q}$) a v dimenzii odvetví ($\mathbf{x}$) ľahko vyjadriť rovnosti

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{BD})^{-1} & (\mathbf{I} - \mathbf{BD})^{-1}(-\mathbf{B}) \\ \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{BD})^{-1} & \mathbf{I} - \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{BD})^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Pre vektor produkcie v dimenzii komodít v závislosti od konečnej spotreby tej istej dimenzie teda platí

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{BD})^{-1}\mathbf{f}, \tag{58}$$

pričom inverzia na pravej strane, $(\mathbf{I} - \mathbf{BD})^{-1}$, je paralelou Leontiefovej inverznej matice $\mathbf{L}$, a výraz $\mathbf{BD}$ maticou technických koeficientov v dimenzii komodity krát komodity.

Podobne dostávame vzťah pre vektor produkcie v dimenzii odvetví:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{BD})^{-1}]\mathbf{f}, \tag{59}$$

kde matica v hranatých zátvorkách opäť nie je symetrická, ale v dimenzii odvetvie krát komodity.

Pre získanie dimenzie odvetvie krát odvetvie, je potrebné predefinovať konečnú spotrebu v dimenzii komodít na konečnú spotrebu dimenzie odvetví pomocou matice trhových podielov. Prvky matice $\mathbf{D}$ predstavujú podiel celkovej výroby komodity i, ktorá bola produkovaná v j-tom odvetví, a teda keď túto maticu prenásobíme vektorom konečnej spotreby podľa komodít, dostaneme vektor, ktorého j-ty prvok bude vyjadrovať konečnú spotrebu odvetvia j. Platí teda

$$\mathbf{y} = \mathbf{Df}, \tag{60}$$

kde $\mathbf{y}$ predstavuje vektor konečnej spotreby podľa odvetví.

Použime vzťah (40), prenásobme ho maticou $\mathbf{D}$ zľava, čo dáva

$$\mathbf{Dq} = \mathbf{DBx} + \mathbf{Df}$$

a pomocou vzťahu (45) a (60) môžeme písať:

$$\mathbf{x} = \mathbf{DBx} + \mathbf{y}. \tag{61}$$

Osamostatnením vektora $\mathbf{x}$ dostávame, podobne ako v dimenzii komodít, výraz

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{DB})^{-1}\mathbf{y}, \tag{62}$$

pričom výraz $\mathbf{DB}$ predstavuje maticu technických koeficientov v dimenzii odvetvie krát odvetvie.

Zhrnutím výsledkov pre výpočet symetrickej matice celkových požiadaviek možno vyjadriť nasledovné 4 vzťahy:

	Komoditná technológia	Odvetvová technológia
komodity x komodity	$(I - BC^{-1})^{-1}$	$(I - BD)^{-1}$
odvetvie x odvetvie	$(I - C^{-1}B)^{-1}$	$(I - DB)^{-1}$

Tabuľka 1: Vzťahy pre maticu celkových požiadaviek.

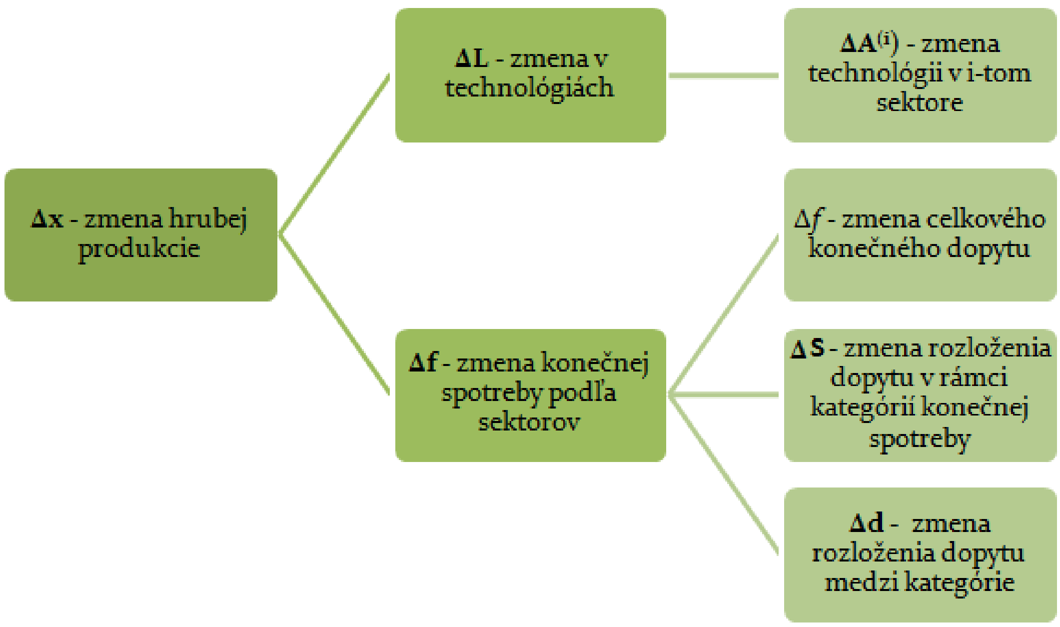
Európsky štandard ESA 1995 doporučuje zostavovať tabuľky v členení produkt krát produkt, lebo umožňujú popísať výrobný proces homogénnejšie. Na tomto mieste je vhodné spomenúť, že sa však nad otázkou preferovaného členenia vedie odborná diskusia. Objavujú sa argumenty, že by tabuľky odvetvie krát odvetvie nemali byť zanedbanávané, pretože možu byť zostavené na základe "slabších" predpokladov ([10]).

2 Štrukturálna dekompozícia

Ak sú k dispozícii dve alebo viac sád input - output dát pre hospodárstvo, analytici sa často zaujímajú o rozloženie celkovej zmeny na rôzne komponenty daného hospodárstva z určitého hľadiska. Napríklad, celková zmena hrubej produkcie medzi dvoma obdobiami by mohla byť rozložená na časť spojenú so zmenami technológií (t.j. zmena Leontiefovej inverznej matice) a na časť spojenú so zmenami v konečnom dopyte za dané obdobie.

Na ďalšej úrovni možno celkovú zmenu Leontiefovej inverznej matice rozložiť na časti, ktoré súvisia so zmenou v technológiách v rámci jednotlivých sektorov. Podobne zmena v konečnom dopyte môže byť ďalej rozložená na časť, ktorá odráža zmeny celkovej výšky konečnej spotreby a na časť, ktorá zachytáva zmeny v zložení konečnej spotreby.

Pre získanie všeobecnej predstavy o štrukturálnej dekompozícii, sa pokúsime podľa [1] v nasledujúcej kapitole rozložiť celkovú zmenu produkcie medzi 2 časovými obdobiami. Obrázok 7 schématicky zobrazuje tento rozklad :



Obr. 7: Schéma štrukturálnej dekompozície.

Ako je aj zo schémy vidno, ukážeme si takisto prípad konečného dopytu zloženého z viacerých kategórií, ako napríklad spotreba domácností, export, vládne výdavky a pod.

2.1 Zmena hrubej produkcie

Predpokladajme, že máme k dispozícii údaje za dve časové obdobia/roky. Označme zmenu hrubej produkcie medzi týmito rokmi $\mathbf{\Delta x}$. Starší rok budeme označovať indexom 0 a nový indexom 1, teda $\mathbf{x^0}$ bude produkcia v staršom roku a $\mathbf{x^1}$ produkcia v novom roku.

Vzťah pre produkciu sme odvodili v predchádzajúcich kapitolách, teda pre rok t platí:

$$\mathbf{x^t} = \mathbf{L^t f^t}, \tag{63}$$

pričom $\mathbf{L^t} = (\mathbf{I} - \mathbf{A^t})^{-1}$ je Leontiefova inverzná matica v roku t a $\mathbf{f^t}$ je vektor konečnej spotreby v roku t. Zmenu produkcie vyjadríme ako

$$\mathbf{\Delta x} = \mathbf{x^1} - \mathbf{x^0}$$

a po dosadením rovnice (63) dostávame

$$\mathbf{\Delta x} = \mathbf{x^1} - \mathbf{x^0} = \mathbf{L^1 f^1} - \mathbf{L^0 f^0}. \tag{64}$$

Úlohou je rozložiť celkovú zmenu produkcie na zmeny v jednotlivých zložkách, zatiaľ na zmenu Leontiefovej inverzie a zmenu konečnej spotreby. Je zrejmé, že pre zmenu $\mathbf{L}$ a $\mathbf{f}$ platia vzťahy:

$$\mathbf{\Delta L} = \mathbf{L^1} - \mathbf{L^0}, \tag{65}$$

$$\mathbf{\Delta f} = \mathbf{f^1} - \mathbf{f^0}. \tag{66}$$

V záujme odstránenia vplyvu cenových zmien budeme predpokladať, že údaje sú vyjadrené v cenách pre bežný rok. Pre využitie vzťahov (65) a (66) máme niekoľko alternatívnych možností:

1. Vyjadrením $\mathbf{L^0}$ z rovnice (65) a $\mathbf{f^1}$ z rovnice (66) po dosadení do (64) dostávame výraz:

$$\mathbf{\Delta x} = \mathbf{L^1}(\mathbf{\Delta f} + \mathbf{f^0}) - (\mathbf{L^1} - \mathbf{\Delta L})\mathbf{f^0} = \mathbf{\Delta L f^0} + \mathbf{L^1 \Delta f}. \tag{67}$$

Prvý člen na pravej strane rovnice (67) zodpovedá zmene v technológii, $\mathbf{\Delta L}$, ktorá je vážená konečnou spotrebou roku 0 a môžeme ho rozložiť na tvar:

$$\mathbf{\Delta L f^0} = \mathbf{L^1 f^0} - \mathbf{L^0 f^0},$$

pričom prvý výraz vyčísľuje produkciu potrebnú na uspokojenie konečného dopytu v roku 0 technológiou roku 1 a druhý výraz je produkcia potrebná na uspokojenie starého dopytu starou technológiou. Čiže ich rozdiel je technologická zmena.

Druhý člen na pravej strane rovnice (67) zodpovedá zmene konečného dopytu, $\mathbf{\Delta f}$, ktorá je vážená technológiou roku 1. Po rozložení na

$$\mathbf{L^1 \Delta f} = \mathbf{L^1 f^1} - \mathbf{L^1 f^0}$$

môžeme použiť podobnú interpretáciu.

2. Vyjadrením $\mathbf{L^1}$ z rovnice (65) a $\mathbf{f^0}$ z rovnice (66) po dosadení do (64) dostávame vzťah:

$$\mathbf{\Delta x} = (\mathbf{L^0} + \mathbf{\Delta L})\mathbf{f^1} - \mathbf{L^0}(\mathbf{f^1} - \mathbf{\Delta f}) = \mathbf{\Delta L f^1} + \mathbf{L^0 \Delta f}. \tag{68}$$

V tomto prípade je technologická zmena vážená konečnou spotrebou roku 1 a zmena konečnej spotreby je vážena technológiou roku 0.

3. Ďalšou možnosťou je použiť hodnoty iba pre starší rok s indexom 0, a teda vyjadrením $\mathbf{L^1}$ z rovnice (65) a $\mathbf{f^1}$ z rovnice (66) po dosadení do (64) dostaneme

$$\mathbf{\Delta x} = (\mathbf{L^0} + \mathbf{\Delta L})(\mathbf{f^0} + \mathbf{\Delta f}) - \mathbf{L^0 f^0} = \mathbf{\Delta L f^0} + \mathbf{L^0 \Delta f} + \mathbf{\Delta L \Delta f}. \tag{69}$$

Tu je zmena technológie aj zmena konečného dopytu vážená rokom 0, ale na pravej strane sa objavil aj tretí člen, ktorého interpretácia už nie je intuitívna ako u predchádzajúcich dvoch členov.

4. Podobne pre novší rok, vyjadrením $\mathbf{L^0}$ z rovnice (65) a $\mathbf{f^0}$ z rovnice (66) po dosadení do (64) dostávame vzťah:

$$\mathbf{\Delta x} = \mathbf{L^1 f^1} - (\mathbf{L^1} - \mathbf{\Delta L})(\mathbf{f^1} - \mathbf{\Delta f}) = \mathbf{\Delta L f^1} + \mathbf{L^1 \Delta f} - \mathbf{\Delta L \Delta f}. \qquad (70)$$

5. Poslednou možnosťou, ktorú analytici často využívajú a použijeme ju aj my v tejto práci, je vyjadrenie zmeny produkcie pomocou aritmetického priemeru rovnice (67) a rovnice (68). Dostávame tak vzťah:

$$\mathbf{\Delta x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \underbrace{\mathbf{\Delta L}(\mathbf{f^0} + \mathbf{f^1})}_{\text{Zmena technológie}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \underbrace{(\mathbf{L^0} + \mathbf{L^1})\mathbf{\Delta f}}_{\text{Zmena konečného dopytu}}. \qquad (71)$$

Príklad 1 ([1])**.** *Nech je daná matica medzispotreby* $\mathbf{Z^0}$ *a* $\mathbf{Z^1}$ *a takisto konečná spotreba pre oba roky,* $\mathbf{f^0}$ *a* $\mathbf{f^1}$*:*

$$\mathbf{Z^0} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 25 \\ 15 & 5 & 30 \\ 30 & 40 & 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f^0} = \begin{pmatrix} 45 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix}, \ \mathbf{Z^1} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 35 \\ 24 & 11 & 30 \\ 36 & 50 & 8 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f^1} = \begin{pmatrix} 50 \\ 35 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Pomocou vzťahu (3) vypočítajme produkciu, $\mathbf{x^0} = \mathbf{Z^0 i} + \mathbf{f^0}$ *a* $\mathbf{x^1} = \mathbf{Z^1 i} + \mathbf{f^1}$*, kde* $\boldsymbol{i}$ *je jednotkový vektor a pomocou vzťahov (4) a (21) Leontiefovu inverznú maticu* $\boldsymbol{L}^0$ *a* $\boldsymbol{L}^1$*. Následne môžeme číselne vyjadriť zmeny* $\mathbf{\Delta L}, \mathbf{\Delta f}, \mathbf{\Delta x}$*:*

$$\mathbf{\Delta L} = \begin{pmatrix} .0649 & -.0941 & .0320 \\ .1447 & .0607 & .0116 \\ .1448 & .0342 & .0581 \end{pmatrix}, \ \mathbf{\Delta f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{\Delta x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

a tak máme k dispozícii všetky členy potrebné na rozklad $\mathbf{\Delta x}$ *pomocou vzťahov*

(67), (68), (69), (70) a (71). Výsledky sú uvedené v Tab. 2:

	Zmena technológie	Zmena konečného dopytu	Interakčný člen
Rov. (67)	$\begin{pmatrix} 0.9 \\ 8.62 \\ 9.01 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11.10 \\ 11.38 \\ 10.99 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Rov. (68)	$\begin{pmatrix} 0.78 \\ 9.66 \\ 9.96 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11.22 \\ 10.34 \\ 10.04 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Rov. (69)	$\begin{pmatrix} 0.9 \\ 8.62 \\ 9.01 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11.22 \\ 10.34 \\ 10.04 \end{pmatrix}$	$+\begin{pmatrix} -0.12 \\ 1.04 \\ 0.95 \end{pmatrix}$
Rov. (70)	$\begin{pmatrix} 0.78 \\ 9.66 \\ 9.96 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11.10 \\ 11.38 \\ 10.99 \end{pmatrix}$	$-\begin{pmatrix} -0.12 \\ 1.04 \\ 0.95 \end{pmatrix}$
Rov. (71)	$\begin{pmatrix} 0.84 \\ 9.14 \\ 9.49 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11.16 \\ 10.86 \\ 10.51 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tabuľka 2: Alternatívne možnosti rozkladu zmeny produkcie.

V Rov. (67), (68) a (71) sa interakčný člen nenachádzal, preto je v príslušných riadkoch nulový vektor.

Je potrebné pripomenúť, že štrukturálna dekompozícia je vyjadrená v sektorovom členení a zmena v produkcii každého sektora je rozložená na člen súvisiaci so zmenou v technológii a člen zmeny konečného dopytu. Naskytuje sa preto otázka, ako rozložiť zmenu v produkcii celého hospodárstva ($\mathbf{i}'(\Delta\mathbf{x})$).

Jednou z možností je vyjadriť efekt zmeny v technológii jednoducho ako súčet efektov zmien v technológii pre jednotlivé sektory a efekt zmeny v dopyte vyjadriť ako súčet efektov zmien v dopyte pre jednotlivé sektory, čiže:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}'(\mathbf{\Delta x}) = & \underbrace{\mathbf{i}' \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (\mathbf{\Delta L})(\mathbf{f^0} + \mathbf{f^1}) \right]}_{\text{zmena technológií v celom hospodárstve}} \\ + & \underbrace{\mathbf{i}' \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} (\mathbf{L^0} + \mathbf{L^1})(\mathbf{\Delta f}) \right]}_{\text{zmena konečného dopytu v celom hospodárstve}} . \end{aligned} \tag{72}$$

Alternatívou k tomuto rozkladu je rozdeliť sektory do kategórií a tak nájsť priemery (jednoduché alebo vážené) pre jednotlivé efekty. Jednou z možností rozdelenia do týchto kategórií je rýchlosť rozvíjania sa odvetví (prvou kategóriou by bolo x percent najrýchlejšie sa rozvíjajúcich odvetví, druhou kategóriou x percent najpomalšie rozvíjajúce sa odvetvia a zvyšok, teda $(100 - 2x)$ percent by tvorili ostatné sektory), alebo kategorizácia na primárne (zdrojové), sekundárne (výroba a spracovanie) a terciárne (podpora a servis) sektory.

2.2 Rozklad zmeny v konečnom dopyte Δf

Zmeny v konečnom dopyte $\mathbf{\Delta f}$ možno ďalej rozkladať. Faktory, ktoré sa na tejto zmene podieľajú sú:

- celkový dopyt f (ten získame tak, že sčítame dopyt po produktoch jednotlivých sektorov),
- rozloženie celkového dopytu medzi jednotlivé kategórie (napr. ako sa na celkovom dopyte podieľajú napr. domácnosti, vláda, export, atď.),
- rozloženie výdavkov v rámci jednotlivých kategórií (napr. aká časť výdavkov domácností ide na počítače a ich servis, aká na produkty potravinárskeho priemyslu, atď.).

Skôr ako prejdeme k odvodeniu vzťahov pomocou uvedených zložiek, ukážeme si zovšeobecnený rozklad pre premennú, ktorá závisí od n>2 faktorov, teda

$y^t = x_1^t x_2^t ... x_n^t$. Prípad pre n=2, teda $y^t = x_1^t x_2^t$, sme už mali pre $\mathbf{x^t} = \mathbf{L^t f^t}$, pričom sme dostali vzťahy (67), (68), (69), (70) a (71).

Ukážme si prípad pre n=3, teda $y^t = x_1^t x_2^t x_3^t$ a $\Delta y = x_1^1 x_2^1 x_3^1 - x_1^0 x_2^0 x_3^0$. Po substitúcii $x_1^1 = x_1^0 + \Delta x_1$, $x_2^1 = x_2^0 + \Delta x_2$ a $x_3^1 = x_3^0 + \Delta x_3$ a jednoduchých, avšak zdĺhavých úpravách dostávame nasledujúce vzťahy:

$$\Delta y = (\Delta x_1) x_2^0 x_3^0 + x_1^1 (\Delta x_2) x_3^0 + x_1^1 x_2^1 (\Delta x_3) \tag{73}$$

alebo alternatívne

$$\Delta y = (\Delta x_1) x_2^1 x_3^1 + x_1^0 (\Delta x_2) x_3^1 + x_1^0 x_2^0 (\Delta x_3). \tag{74}$$

Ak rovnice (73) a (74) spriemerujeme, dostaneme vzťah:

$$\begin{aligned}\Delta y = &\frac{1}{2}(\Delta x_1)(x_2^0 x_3^0 + x_2^1 x_3^1) \\ &+ \frac{1}{2}\left(x_1^0 (\Delta x_2) x_3^1 + x_1^1 (\Delta x_2) x_3^0\right) + \frac{1}{2}(x_1^0 x_2^0 + x_1^1 x_2^1)(\Delta x_3).\end{aligned} \tag{75}$$

Podobne ako pri rovniciach (73)/(74) môžeme postupovať pre $n > 3$, teda napravo od Δx bude rok "0"/ rok "1" a naľavo od Δx bude rok "1"/ rok "0". Podľa vzoru rovnice (73) tak dostávame vzťah:

$$\begin{aligned}\Delta y =& (\Delta x_1)(x_2^0 ... x_n^0) + x_1^1 (\Delta x_2)(x_3^0 ... x_n^0) \\ &+ ... + (x_1^1 ... x_{n-2}^1)(\Delta x_{n-1}) x_n^0 + x_1^1 ... x_{n-1}^1 (\Delta x_n),\end{aligned} \tag{76}$$

a paralelou rovnice (74) je výraz (76) s prehodením časového indexu "1"za "0" a naopak, teda platí:

$$\begin{aligned}\Delta y =& (\Delta x_1)(x_2^1 ... x_n^1) + x_1^0 (\Delta x_2)(x_3^1 ... x_n^1) \\ &+ ... + (x_1^0 ... x_{n-2}^0)(\Delta x_{n-1}) x_n^1 + x_1^0 ... x_{n-1}^0 (\Delta x_n).\end{aligned} \tag{77}$$

Pre úplnosť vyjadrime rozšírenie rovnice (75) pre $n > 3$:

$$
\begin{aligned}
\Delta y =& \frac{1}{2}(\Delta x_1)\left[(x_2^0 ... x_n^0) + (x_2^1 ... x_n^1)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left[x_1^0(\Delta x_2)(x_3^1 ... x_n^1) + x_1^1(\Delta x_2)(x_3^0 ... x_n^0)\right] \\
&+ ... + \frac{1}{2}\left[(x_1^0 ... x_{n-2}^0)(\Delta x_{n-1})x_n^1 + (x_1^1 ... x_{n-2}^1)(\Delta x_{n-1})x_n^0\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[(x_1^0 ... x_{n-1}^0) + (x_1^1 ... x_{n-1}^1)\right](\Delta x_n).
\end{aligned}
\tag{78}
$$

Vráťme sa späť k rozkladu konečného dopytu. Ak máme v input - output modeli n sektorov a p kategórií konečného dopytu (napr. domácnosti, vláda, export), tak pre rok t môžeme zostrojiť maticu finálneho dopytu $\mathbf{F}^t_{n\times p} = [\mathbf{f}^t_1, ..., \mathbf{f}^t_p]$, ktorá sa skladá zo stĺpcov $\mathbf{f}^t_k = \begin{pmatrix} f^t_{1k} \\ \vdots \\ f^t_{nk} \end{pmatrix}$, kde f^t_{ik} predstavuje dopyt k-tej kategórie po produktoch i-teho sektoru v roku t. Potom

- $\mathbf{F}^t\mathbf{i} = \mathbf{f}^t$ je vektor, ktorého i-ty člen predstavuje dopyt po produktoch i-teho sektoru v roku t,
- $\mathbf{i}'\mathbf{F}^t\mathbf{i} = \mathbf{i}'\mathbf{f}^t = f^t$ je celkový dopyt v roku t,
- $\mathbf{y}^t = (\mathbf{i}'\mathbf{F}^t)' = \begin{pmatrix} y^t_1 \\ \vdots \\ y^t_p \end{pmatrix}$, kde y^t_k predstavuje dopyt k-tej kategórie v roku t.

Ak chceme získať rozloženie celkového dopytu medzi jednotlivé kategórie, každú zložku vektora $\mathbf{y}^t$ je potrebné predeliť celkovým dopytom f^t, pričom tento podielový vektor označme $\mathbf{d}^t$ a platí:

$$
\mathbf{d}^t = [d^t_k] = (1/f^t)\mathbf{y}^t = \begin{pmatrix} y^t_1/f^t \\ \vdots \\ y^t_p/f^t \end{pmatrix}. \tag{79}
$$

Prvok d_k^t teda predstavuje podiel k-tej kategórie na celkovom dopyte v roku t. Normalizovaním matice $\mathbf{F}^t$ jej stĺpcovými súčtami, teda

$$\mathbf{S}^t = [s_{ik}^t] = (\mathbf{F}^t)(\widehat{\mathbf{y}}^t)^{-1}, \tag{80}$$

dostávame prvky

$$s_{ik}^t = \frac{f_{ik}^t}{y_k^t},$$

ktoré predstavujú, akú časť dopytu k-tej kategórie tvorí dopyt tejto kategórie po produktoch i-teho sektora v roku t (napr. akú časť dopytu domácností tvorí ich dopyt po počítačoch).

Na základe vzťahov (79) a (80) platí,

$$\mathbf{f}^t = f^t \mathbf{S}^t \mathbf{d}^t = \mathbf{S}^t \mathbf{y}^t,$$

a teda

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}^1 - \mathbf{f}^0 = f^1 \mathbf{S}^1 \mathbf{d}^1 - f^0 \mathbf{S}^0 \mathbf{d}^0.$$

Úpravou pomocou vzťahov (76), (77) a (78) dostávame výrazy:

$$\Delta \mathbf{f} = (\Delta f)\mathbf{S}^0\mathbf{d}^0 + f^1(\Delta \mathbf{S})\mathbf{d}^0 + f^1\mathbf{S}^1(\Delta \mathbf{d}), \tag{81}$$

$$\Delta \mathbf{f} = (\Delta f)\mathbf{S}^1\mathbf{d}^1 + f^0(\Delta \mathbf{S})\mathbf{d}^1 + f^0\mathbf{S}^0(\Delta \mathbf{d}), \tag{82}$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f} = & \underbrace{(\frac{1}{2})(\Delta f)(\mathbf{S}^0\mathbf{d}^0 + \mathbf{S}^1\mathbf{d}^1)}_{\text{efekt zmeny celkového dopytu}} \\ & + \underbrace{(\frac{1}{2})[f^0(\Delta \mathbf{S})\mathbf{d}^1 + f^1(\Delta \mathbf{S})\mathbf{d}^0]}_{\text{efekt zmeny rozloženia dopytu v rámci kategórie}} \\ & + \underbrace{(\frac{1}{2})(f^0\mathbf{S}^0 + f^1\mathbf{S}^1)(\Delta \mathbf{d})}_{\text{efekt zmeny rozloženia dopytu medzi kategórie}} . \end{aligned} \tag{83}$$

Príklad 2. *Pokračujme v príklade z predchádzajúcej podkapitoly. Keďže nemáme členenie dopytu podľa kategórií, ale len celkový dopyt po jednotlivých produktoch sektorov, budeme uvažovať dopyt jednej kategórie, preto $\Delta \boldsymbol{d}$ je v našom prípade nulová. Ostatné členy potrebné do rovnice (83) si dopočítame na základe ich odvodenia a teda*

$$\boldsymbol{S}^0 = \begin{pmatrix} .45 \\ .3 \\ .25 \end{pmatrix}, \boldsymbol{S}^1 = \begin{pmatrix} .4505 \\ .3153 \\ .2342 \end{pmatrix}, \triangle \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} .0005 \\ .0153 \\ -.0158 \end{pmatrix}, f^1 = 111, f^0 = 100.$$

Všimnime si, že súčet stĺpcov matice $\mathbf{S}^0$ *a* $\mathbf{S}^1$ *musí byť 1 a súčet stĺpcov matice* $\Delta\mathbf{S}$ *musí byť 0, teda v každom jej stĺpci musia byť aj záporné aj kladné hodnoty. Pre vzťah (83) je rozklad znázornený v Tab.3.*

	Zmena	Rozklad zmeny celk. dopytu **f**		
	v produkcii	Celk. dopyt	Rozloženie v rámci kategórie	Celkovo
Sektor 1	12	11.05 (92)	.11 (1)	11.16 (93)
Sektor 2	20	9.35 (47)	1.51 (7)	10.86 (54)
Sektor 3	20	11.45 (57)	-.94 (-5)	10.51 (53)
Total	52	31.85 (61)	.68 (1)	32.53 (63)

Tabuľka 3: Rozklad zmeny v celk.dopyte

Čísla v zátvorkách predstavujú percentuálny podiel na celkovej zmene produkcie. Napríklad pre sektor 1: zmena v produkcii bola z 93% spôsobená efektom zmeny konečného dopytu. Z toho až 92% predstavuje člen rozkladu obsahujúci zmenu v celkovom dopyte v celom hospodárstve a zvyšné 1% predstavuje zmena v rozložení dopytu v rámci kategórie. Do 100% celkovej zmeny produkcie v sektore 1 zostáva 7%, ktoré súvisia so zmenou v technológii.

2.3 Rozklad zmeny technológií ΔL

V tejto časti si ukážeme rozklad zmeny Leontiefovej inverznej matice medzi dvoma etapami pomocou zmeny matice technických koeficientov $\mathbf{\Delta A}$.

Jednou z možností je prenásobenie vzťahu $\mathbf{L^1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A^1})^{-1}$ výrazom $(\mathbf{I} - \mathbf{A^1})$ sprava, čím dostávame

$$\mathbf{L^1}(\mathbf{I} - \mathbf{A^1}) = \mathbf{I} = \mathbf{L^1} - \mathbf{L^1}\mathbf{A^1}, \tag{84}$$

a následne prenásobenie vzťahu $\mathbf{L^0} = (\mathbf{I} - \mathbf{A^0})^{-1}$ výrazom $(\mathbf{I} - \mathbf{A^0})$ zľava, čo dáva

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A^0})\mathbf{L^0} = \mathbf{I} = \mathbf{L^0} - \mathbf{A^0}\mathbf{L^0}. \tag{85}$$

Po úprave rovnice (84) a prenásobení $\mathbf{L^0}$ sprava dostaneme

$$\mathbf{L^1} - \mathbf{I} = \mathbf{L^1}\mathbf{A^1} \Rightarrow \mathbf{L^1}\mathbf{L^0} - \mathbf{L^0} = \mathbf{L^1}\mathbf{A^1}\mathbf{L^0}, \tag{86}$$

podobný vzťah vyjadríme z rovnice (85) po prenásobení $\mathbf{L^1}$ zľava:

$$\mathbf{L^0} - \mathbf{I} = \mathbf{A^0}\mathbf{L^0} \Rightarrow \mathbf{L^1}\mathbf{L^0} - \mathbf{L^1} = \mathbf{L^1}\mathbf{A^0}\mathbf{L^0}. \tag{87}$$

Nakoniec odčítaním rovníc (86) a (87) vyjadríme zmenu $\mathbf{\Delta L}$ vzťahom

$$\mathbf{\Delta L} = \mathbf{L^1} - \mathbf{L^0} = \mathbf{L^1}\mathbf{A^1}\mathbf{L^0} - \mathbf{L^1}\mathbf{A^0}\mathbf{L^0} = \mathbf{L^1}(\mathbf{\Delta A})\mathbf{L^0}. \tag{88}$$

Toto vyjadrenie ukazuje súvislosť zmeny Leontiefovej inverznej matice $\mathbf{L}$ a zmeny matice $\mathbf{A}$.

"Symetrickým" postupom, teda po prenásobení rovnice $\mathbf{L^1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A^1})^{-1}$ vždy zľava a rovnice $\mathbf{L^0} = (\mathbf{I} - \mathbf{A^0})^{-1}$ sprava, môžno vyjadriť vzťah:

$$\mathbf{\Delta L} = \mathbf{L^1} - \mathbf{L^0} = \mathbf{L^0}\mathbf{A^1}\mathbf{L^1} - \mathbf{L^0}\mathbf{A^0}\mathbf{L^1} = \mathbf{L^0}(\mathbf{\Delta A})\mathbf{L^1}. \tag{89}$$

V tomto prípade sú časové indexy Leontiefovej inverzie vymenené oproti rovnici (88).

Ak chceme odvodiť tento vzťah iba pomocou roku "0", dosadením za $\mathbf{L^1} = \mathbf{L^0} + \mathbf{\Delta L}$ ľahko vyjadríme z rovnice (88) zmenu $\mathbf{\Delta L}$:

$$\mathbf{\Delta L} = \mathbf{L^0}(\mathbf{\Delta A})\mathbf{L^0} + (\mathbf{\Delta L})(\mathbf{\Delta A})\mathbf{L^0},$$

alebo z rovnice (89)

$$\mathbf{\Delta L} = \mathbf{L^0}(\mathbf{\Delta A})\mathbf{L^0} + \mathbf{L^0}(\mathbf{\Delta A})(\mathbf{\Delta L}).$$

Podobne pre rok 1 dostávame dosadením za $\mathbf{L^0} = \mathbf{L^1} - \mathbf{\Delta L}$ v rovnici (88) vzťah

$$\mathbf{\Delta L} = \mathbf{L^1}(\mathbf{\Delta A})\mathbf{L^1} - \mathbf{L^1}(\mathbf{\Delta A})(\mathbf{\Delta L}),$$

a z rovnice (89) vzťah

$$\mathbf{\Delta L} = \mathbf{L^1}(\mathbf{\Delta A})\mathbf{L^1} - \mathbf{L^1}(\mathbf{\Delta A})(\mathbf{\Delta L}).$$

V nasledujúcej časti použijeme rovnicu (88) na prevedenie zmien Leontiefovej inverzie do zmien matice technických koeficientov $\mathbf{A}$.

2.4 Rozklad zmeny ΔA

Maticu $\mathbf{A}$ budeme v tejto stati rozkladať po stĺpcoch. Každý stĺpec matice $\mathbf{A^t}$ vyjadruje "produkčný recept" daného sektora v čase t. Pre ekonomiku s n sektormi teda platí

$$\mathbf{A^1} = \mathbf{A^0} + \mathbf{\Delta A} = \begin{pmatrix} a_{11}^0 + \Delta a_{11} & \cdots & a_{1n}^0 + \Delta a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^0 + \Delta a_{n1} & \cdots & a_{nn}^0 + \Delta a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{90}$$

Označme $\mathbf{\Delta A^{(j)}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \Delta a_{1j} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta a_{nj} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, pričom $\mathbf{\Delta A^{(j)}}$ vyjadruje zmenu technológie sektora j. Potom môžme maticu $\mathbf{\Delta A}$ rozložiť na súčet:

$$\mathbf{\Delta A} = \mathbf{\Delta A^{(1)}} + \cdots + \mathbf{\Delta A^{(j)}} + \cdots + \mathbf{\Delta A^{(n)}} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{\Delta A^{(j)}}. \tag{91}$$

Pomocou vzťahu (91) vieme vyjadriť zmenu $\mathbf{\Delta L}$ z rovnice (88) a po dosadení do rovnice (71) tak dostávame rozšírený vzorec na výpočet zmeny produkcie:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Delta x} &= \frac{1}{2}\mathbf{\Delta L}(\mathbf{f^0}+\mathbf{f^1}) + \frac{1}{2}(\mathbf{L^0}+\mathbf{L^1})\mathbf{\Delta f} \\
&= \left(\frac{1}{2}\mathbf{L^1}\mathbf{\Delta A}\mathbf{L^0}\right)(\mathbf{f^0}+\mathbf{f^1}) + \frac{1}{2}(\mathbf{L^0}+\mathbf{L^1})\mathbf{\Delta f} \\
&= \left(\frac{1}{2}\mathbf{L^1}(\mathbf{\Delta A^{(1)}} + \cdots + \mathbf{\Delta A^{(n)}})\mathbf{L^0}\right)(\mathbf{f^0}+\mathbf{f^1}) + \frac{1}{2}(\mathbf{L^0}+\mathbf{L^1})\mathbf{\Delta f} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}[\mathbf{L^1}\mathbf{\Delta A^{(1)}}\mathbf{L^0}](\mathbf{f^0}+\mathbf{f^1})}_{\text{Efekt technologickej zmeny sektora 1}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2}[\mathbf{L^1}\mathbf{\Delta A^{(n)}}\mathbf{L^0}](\mathbf{f^0}+\mathbf{f^1})}_{\text{Efekt technologickej zmeny sektora n}} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{L^0}+\mathbf{L^1})\mathbf{\Delta f}}_{\text{Efekt zmeny konečného dopytu}}
\end{aligned}
\tag{92}
$$

Príklad 3. *Rozklad pomocou matice* $\mathbf{A}$ *si ukážeme opäť na skôr uvedenom príklade. Pomocou vzťahov (3),* $\mathbf{x} = \mathbf{Zi} + \mathbf{f}$*, a (4),* $\mathbf{A} = \mathbf{Z\hat{x}^{-1}}$*, ľahko vyjadríme maticu* $\mathbf{A}$ *pre obe obdobia:*

$$
\boldsymbol{A}^0 = \begin{pmatrix} .1000 & .2500 & .2500 \\ .1500 & .0625 & .3000 \\ .3000 & .5000 & .0500 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}^1 = \begin{pmatrix} .1071 & .1500 & .2917 \\ .2143 & .1100 & .2500 \\ .3214 & .5000 & .0667 \end{pmatrix},
$$

a následne zmenu

$$
\triangle\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} .0071 & -.1 & .0417 \\ .0643 & .0475 & .0500 \\ .0214 & 0 & .0167 \end{pmatrix}.
$$

Pomocou vzťahu (91) rozložme túto zmenu na zmenu technológie jednotlivých sektorov:

$$
\triangle\boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} .0071 & 0 & 0 \\ .0643 & 0 & 0 \\ .0214 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangle\boldsymbol{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -.1 & 0 \\ 0 & .0475 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangle\boldsymbol{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .0417 \\ 0 & 0 & .0500 \\ 0 & 0 & .0167 \end{pmatrix}
$$

V Tab. 4 sú znázornené všetky rozklady, ktoré sme doposiaľ urobili.

Sektor	Zmena $\Delta\mathbf{x}$	Rozklad zmeny v technológii				Rozklad zmeny dopytu **f**		
		1	2	3	Total	Celkový dopyt	Rozloženie v rámci kateg.	Total
1	12	6.64	-10.25	4.45	.84	11.05	.11	11.16
		(55)	(-85)	(37)	(7)	(92)	(1)	(93)
2	20	12.42	1.28	-4.56	9.14	9.35	1.51	10.86
		(62)	(6)	(-23)	(46)	(47)	(7)	(54)
3	20	11.37	-2.85	.97	9.49	11.45	-.94	10.51
		(57)	(-14)	(5)	(47)	(57)	(-5)	(53)
Total	52	30.43	-11.82	.86	19.47	31.85	.68	32.53
		(59)	(-23)	(2)	(37)	(61)	(1)	(63)

Tabuľka 4: Rozklad zmeny v technológii aj v celkovom dopyte

Čísla v zátvorkách predstavujú percentuálny podiel na zmene celkovej produkcie. Interpretujme opäť pre sektor 1:

- *Zmena v produkcii sektora 1 bola z* 93% *spôsobená efektom zmeny konečného dopytu v tomto sektore. Z toho až* 92% *predstavuje člen štrukturálneho rozkladu obsahujúci zmenu v celkovom dopyte v celom hospodárstve a zvyšné* 1% *súvisí so zmenou v rozložení dopytu v rámci kategórie.*

- *Efekt zmeny technológie predstavuje podiel zostávajúcich* 7% *na zmene celkovej produkcie, pričom Tabuľka 4 zobrazuje aj rozloženie tejto zmeny na časti súvisiace so zmenou technológie jednotlivých sektorov. Vidíme, že faktor zmeny technológie sektora 2 negatívne ovplyvnil zmenu celkovej produkcie sektora 1, čo možno pozorovať aj pre produkciu zvyšných dvoch sektorov, a teda aj pre celé hospodárstvo.*

2.5 Zhrnutie pre zmenu produkcie

Pre úplnosť uveďme vzťah na výpočet zmeny produkcie, ktorý zahŕňa všetky doterajšie rozklady, ktorým sme sa v práci venovali:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Delta x} &= \frac{1}{2}(\mathbf{\Delta L})(\mathbf{f^0}+\mathbf{f^1}) + \frac{1}{2}(\mathbf{L^0}+\mathbf{L^1})(\mathbf{\Delta f}) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}[\mathbf{L^1}(\mathbf{\Delta A^{(1)}})\mathbf{L^0}](\mathbf{f^0}+\mathbf{f^1})}_{\text{Efekt zmeny technológie sektora 1}} + \underbrace{\frac{1}{2}[\mathbf{L^1}(\mathbf{\Delta A^{(2)}})\mathbf{L^0}](\mathbf{f^0}+\mathbf{f^1})}_{\text{Efekt zmeny technológie sektora 2}} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{2}[\mathbf{L^1}(\mathbf{\Delta A^{(3)}})\mathbf{L^0}](\mathbf{f^0}+\mathbf{f^1})}_{\text{Efekt zmeny technológie sektora 3}} + \underbrace{\frac{1}{4}(\mathbf{L^0}+\mathbf{L^1})(\Delta f)(\mathbf{B^0 d^0}+\mathbf{B^1 d^1})}_{\text{Efekt zmeny konečného dopytu}} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{4}(\mathbf{L^0}+\mathbf{L^1})[f^0(\mathbf{\Delta B})\mathbf{d^1}+f^1(\mathbf{\Delta B})\mathbf{d^0}]}_{\text{Efekt zmeny rozloženia dopytu vrámci kategórie}} + \\
&\underbrace{\frac{1}{4}(f^0\mathbf{B^0}+f^1\mathbf{B^1})(\mathbf{\Delta d})}_{\text{Efekt zmeny rozloženia dopytu medzi kategórie}} \quad .
\end{aligned} \tag{93}$$

Takýto rozklad umožňuje rozčleniť zmenu produkcie na faktory, ktoré s touto zmenou potenciálne súvisia. Vďaka tomu možno hlbšie rozoznať príčiny a vplyv týchto zmien.

Treba si však uvedomiť, že až takýto "hlboký" rozklad nie je vždy najvhodnejší. Veľkou nevýhodou rozloženia podľa vzťahu (93) je skutočnosť, že niektoré členy so sebou úzko súvisia, preto tieto zmeny pri interpretácii nie je možné izolovať. Je zrejmé, že ak sektor j zmení svoju technológiu, môže to ovplyvniť aj jeho dopyt po vstupoch či jeho produkciu a takisto ostatné sektory môžu na túto zmenu reagovať, či už zmenou dopytu, produkcie alebo zmenou technológie. Preto pri analýze štrukturálneho rozkladu treba byť opatrní a prípadne urobiť rozklad "hrubší".

2.6 Vyjadrenie zmeny pomocou funkcie x

Veľa štúdií sa namiesto vyjadrenia zmeny produkcie zaoberá zmenami premennej, ktorá závisí od produkcie. Takéto hľadisko si ukážeme na príklade zamestnanosti.

Označme e_j^t zamestnanosť na jednotku produkcie sektora j v čase t a $(\mathbf{e^t})' = [e_1^t, \ldots, e_n^t]$. Potom vektor zamestnanosti v jednotlivých sektoroch v čase t (už nie na jednotku produkcie), označený $\varepsilon^\mathbf{t}$, môžeme vyjadriť ako $\varepsilon^\mathbf{t} = \mathbf{\hat{e}^t x^t} = \mathbf{\hat{e}^t L^t f^t}$ a vektor zmien v zamestnanosti ako

$$\boldsymbol{\Delta}\varepsilon = \varepsilon^\mathbf{1} - \varepsilon^\mathbf{0} = \mathbf{\hat{e}^1 L^1 f^1} - \mathbf{\hat{e}^0 L^0 f^0}. \tag{94}$$

Výraz $\mathbf{\hat{e}^t}$, resp. strieška nad premennou, znamená, že ide o maticu, ktorej diagonála je zložená z prvkov e_j^t a mimo diagonály sú nuly.

Všeobecný rozklad v prípade závislosti od troch premenných sme si už ukázali v predošlej časti, môžeme teda pre náš prípad pomocou vzťahu (75) písať

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta}\varepsilon = \frac{1}{2} & \underbrace{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{\hat{e}}(\mathbf{L^0 f^0} + \mathbf{L^1 f^1})}_{\text{Efekt zmeny zamestnanosti na jednotku produkcie}} \\ + \frac{1}{2} & \underbrace{[\mathbf{\hat{e}^0}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{L})\mathbf{f^1} + \mathbf{\hat{e}^1}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{L})\mathbf{f^0}]}_{\text{Efekt zmeny technológie}} \\ + \frac{1}{2} & \underbrace{(\mathbf{\hat{e}^0 L^0} + \mathbf{\hat{e}^1 L^1})\boldsymbol{\Delta}\mathbf{f}}_{\text{Efekt zmeny konečnej spotreby}} .\end{aligned} \tag{95}$$

Táto analýza sa dá uplatniť aj na iné ekonomické premenné, ktoré súvisia s produkciou, napríklad znečistenie, spotreba energie, pridaná hodnota a pod. My sa budeme v práci bližšie zaujímať o zmenu miezd zamestnancov, resp. mzdovej kvóty a produktivity práce.

Mzdovú kvótu definujeme ako podiel objemu miezd zamestnancov a pridanej hodnoty. Rozložme pomocou štrukturálnej dekompozície čitateľ, teda objem miezd zamestnancov. Označme $(a_w)_j^t$ objem miezd na jednotku produkcie sektora j v čase t, teda

$$(a_w)_j^t = \frac{w_j^t}{x_j^t} \tag{96}$$

a vektor objemu miezd na jednotku produkcie $(\mathbf{a_w^t})' = [(a_w)_1^t, \dots, (a_w)_n^t]$. Potom vektor objemu miezd v jednotlivých sektoroch v čase t (už nie na jednotku produkcie), označený $\mathbf{w^t}$, môžeme vyjadriť ako

$$\mathbf{w^t} = \hat{\mathbf{a_w}}^\mathbf{t}\mathbf{x^t} = \hat{\mathbf{a_w}}^\mathbf{t}\mathbf{L^t}\mathbf{f^t} \tag{97}$$

a vektor mzdových zmien ako

$$\mathbf{\Delta w} = \mathbf{w^1} - \mathbf{w^0} = \hat{\mathbf{a_w}}^\mathbf{1}\mathbf{L^1}\mathbf{f^1} - \hat{\mathbf{a_w}}^\mathbf{0}\mathbf{L^0}\mathbf{f^0}. \tag{98}$$

Vyjadrime rozklad podľa vzoru (75):

$$\begin{aligned}\mathbf{\Delta w} = \frac{1}{2} & \underbrace{(\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{a_w}})(\mathbf{L^0}\mathbf{f^0} + \mathbf{L^1}\mathbf{f^1})}_{\text{Efekt zmeny miezd na jendotku produkcie}} \\ + \frac{1}{2} & \underbrace{[\hat{\mathbf{a_w}}^\mathbf{0}(\mathbf{\Delta L})\mathbf{f^1} + \hat{\mathbf{a_w}}^\mathbf{1}(\mathbf{\Delta L})\mathbf{f^0}]}_{\text{Efekt zmeny technológie}} \\ + \frac{1}{2} & \underbrace{(\hat{\mathbf{a_w}}^\mathbf{0}\mathbf{L^0} + \hat{\mathbf{a_w}}^\mathbf{1}\mathbf{L^1})(\mathbf{\Delta f})}_{\text{Efekt zmeny konečnej spotreby}}.\end{aligned} \tag{99}$$

Produktivitu práce definujeme ako podiel produkcie na zamestnanca a označme p_j^t. Pre produktivitu v sektore j v čase t, teda platí:

$$p_j^t = \frac{x_j^t}{\varepsilon_j^t}, \tag{100}$$

vektorovo $(\mathbf{p^t})' = [p_1^t, \dots, p_n^t]$, pričom ε_j^t predstavuje počet zamestnancov sektora j v čase t.

Objem miezd zamestnancov sektora j v čase t môžeme vyjadriť aj ako súčin priemernej ročnej mzdy zamestnancov tohto sektora v čase t, ktorú budeme označovať $\mathbf{m^t}$ a počtu zamestancov j-teho sektora, teda platí:

$$w_j^t = m_j^t \varepsilon_j^t, \tag{101}$$

alebo vo vektorovom zápise:

$$\mathbf{w^t} = \hat{\mathbf{m}}^\mathbf{t}\varepsilon^\mathbf{t}. \tag{102}$$

Využitím vzťahu (101) a (100) v rovnici (96) dostávame:

$$(a_w)_j^t = \frac{m_j^t \varepsilon_j^t}{x_j^t} = m_j^t (p_j^t)^{-1}, \tag{103}$$

pričom prvky $(p_j^t)^{-1}$ predstavujúce inverznú hodnotu produktivity práce budeme nazývať *koeficienty pracnosti.*

Rovnicu (97) teraz môžeme upraviť pomocou (103) na vzťah

$$\mathbf{w^t} = \hat{\mathbf{m}}^\mathbf{t}(\hat{\mathbf{p}}^{-\mathbf{1}})^\mathbf{t}\mathbf{L^t f^t}. \tag{104}$$

Zmenu objemu miezd môžeme rozložiť podľa vzťahu (78):

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Delta w} = {} & \frac{1}{2}\underbrace{(\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{m}})((\hat{\mathbf{p}}^{-\mathbf{1}})^\mathbf{0}\mathbf{L^0 f^0} + (\hat{\mathbf{p}}^{-\mathbf{1}})^\mathbf{1}\mathbf{L^1 f^1})}_{\text{Efekt zmeny priemerných ročných miezd}} \\
& + \frac{1}{2}\underbrace{[\hat{\mathbf{m}}^\mathbf{0}(\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{p}}^{-\mathbf{1}})\mathbf{L^1 f^1} + \hat{\mathbf{m}}^\mathbf{1}(\mathbf{\Delta}\hat{\mathbf{p}}^{-\mathbf{1}})\mathbf{L^0 f^0}]}_{\text{Efekt zmeny koeficientu pracnosti}} \\
& + \frac{1}{2}\underbrace{[\hat{\mathbf{m}}^\mathbf{0}(\hat{\mathbf{p}}^{-\mathbf{1}})^\mathbf{0}(\mathbf{\Delta L})\mathbf{f^1} + \hat{\mathbf{m}}^\mathbf{1}(\hat{\mathbf{p}}^{-\mathbf{1}})^\mathbf{1}(\mathbf{\Delta L})\mathbf{f^0}]}_{\text{Efekt zmeny technológie}} \\
& + \frac{1}{2}\underbrace{[\hat{\mathbf{m}}^\mathbf{0}(\hat{\mathbf{p}}^{-\mathbf{1}})^\mathbf{0}\mathbf{L^0} + \hat{\mathbf{m}}^\mathbf{1}(\hat{\mathbf{p}}^{-\mathbf{1}})^\mathbf{1}\mathbf{L^1}](\mathbf{\Delta f})}_{\text{Efekt zmeny konečnej spotreby}}.
\end{aligned} \tag{105}$$

Pomocou vzťahu (105) sa v nasledujúcej časti budeme zaoberať analýzou zmien miezd, resp. mzdovej kvóty a produktivity práce pre Slovensko a interpretáciou výsledkov.

3 Rozklad mzdovej kvóty a produktivity práce Slovenskej republiky pomocou štrukturálnej dekompozície

V tejto kapitole budeme študovať zmenu mzdovej kvóty, ktorú sme definovali ako podiel objemu miezd a pridanej hodnoty a zmenu produktivity práce, ktorá predstavuje podiel produkcie na zamestnanca. Hlavnou otázkou tiež bude ich vzájomný vzťah. Ako príklad možno uviesť, že "Nemecko, aj v čase hospodárskej krízy, udržalo primeraný rozdiel medzi rastom produktivity práce a rastom mzdových nákladov . To južanské krajiny nespravili, ich mzdové náklady rástli rýchlejšie ako produktivita práce, strácali tak na konkurenčnej schopnosti a tým boli vytláčané konkurenčne schopnejšími ekonomikami z trhov": citácia z rozhovoru s prof.Dipl.Ing.Dr. Mikulášom Luptáčikom pre televíziu TA3.

V súčasnosti pozorujeme, že mzdová kvóta vo viacerých krajinách vykazuje - i v období hospodárskeho rastu - klesajúcu tendenciu. Vychádzajúc z dát input - output tabuliek pre Slovenskú republiku, ktoré sme získali z Eurostatu, tento podiel klesol z 35,1% na 12,9% medzi rokmi 2000 a 2005. Treba poznamenať, že popri tomto vyše 22 percentnom poklese vzrástla produktivita práce na zamestnanca z 5,47 na 8,63 percenta.

Súčasná literatúra poukazuje na niekoľko možných príčin. Niektoré príčiny sa vzťahujú na zmeny celého priemyslu slovenskej ekonomiky, označovaný ako *shift efekt*, iné sú silno spojené so štrukturálnymi zmenami, označovanými ako *share efekt* ([3]).

Input - output tabuľky, z ktorých budeme vychádzať pri štrukturálnej dekompozícii, sú v členení 59 komodít podľa klasifikácie CPA - *Statistical classification of products by activity in the European Economic Community*. Tieto údaje sme získali z Eurostatu rovnako ako hodnoty zamestnanosti. Údaje o zamestnanosti máme k dispozícii v dimenzii 59 odvetví v klasifikácii *OKEČ*. Číselník OKEČ obsahuje zoznam pracovných činností, ktoré sú vykonávané tak kolektívom ako aj individuálnymi subjektami. Činnosti sú zoskupené do jednotlivých kategórií a oddielov, ktoré korešpondujú aj s klasifikáciou ekonomických činností EU NACE

([12]).

Pre zmysluplnosť výpočtov sme z input - output tabuľky odstránili nulové riadky a stĺpce, ktoré zodpovedali kategórii *Uránové a tóriové rudy* a kategórii *Služby domácností ako zamestnávateľov domáceho personálu*. Dostali sme tak tabuľku členenú na 57 druhov komodít.

Pre potreby analýzy je potrebná transformácia údajov o počte zamestnancov do dimenzie komodít, a to prenásobením vektora zamestnanosti podľa odvetví maticou trhových podielov:

$$\varepsilon_{\mathbf{o}}'\mathbf{D} = \varepsilon_{\mathbf{k}}', \tag{106}$$

kde index o znamená odvetvové členenie a index k komoditné členenie.

V nasledujúcej časti deskriptívne preskúmame rozdiely v raste produktivity práce a raste priemerných ročných miezd medzi rokmi 2000 a 2005 pre Slovenskú republiku, rozdiely multiplikátorov produkcie, rozdiely konečnej spotreby a pomocou vzťahu (105) rozložíme zmenu objemu miezd na efekt zmeny priemernej ročnej mzdy, zmeny produktivity práce (resp. koeficientu pracnosti), zmeny v technológiách výroby a efekt zmeny konečného dopytu.

3.1 Analýza izolovaných zmien jednotlivých faktorov

Na nasledujúcich obrázkoch je názorne zobrazené porovnanie priemerných ročných miezd a produktivity práce medzi rokmi 2000 a 2005. Môžeme pozorovať, že v oboch prípadoch došlo k zvýšeniu takmer vo všetkých kategóriách komodít. V prípade miezd došlo k výraznejšiemu zníženiu iba v kategórii *Tabakové výrobky a služby*(-63%) a mierny pokles nastal ešte v kategóriách *Zdravotnícke prístroje* (-6%) a *Vodná doprava* (-7%) . Produktivita práce klesla iba v kategórii *Ryby, produkty rybolovu* (-19%) a *Služby v oblasti nehnuteľností* (-5%). Naopak, najvýraznejší nárast priemerných ročných miezd nastal v kategórii *Kancelárske stroje a počítače* (+277%), *Koks, rafinérske ropné produkty* (+251%) a *Činnosti členských organizácií, i.n.* (+219%) a najvýraznejší nárast produktivity práce v kategóriách *Kovové rudy* (+277%), *Čistenie odpadových vôd* (+205%) a *Poisťovníctvo* (+168%).

Celkovo v rámci hospodárstva sa mzdy zvýšili o 50% a produktivita práce narástla o 58%.

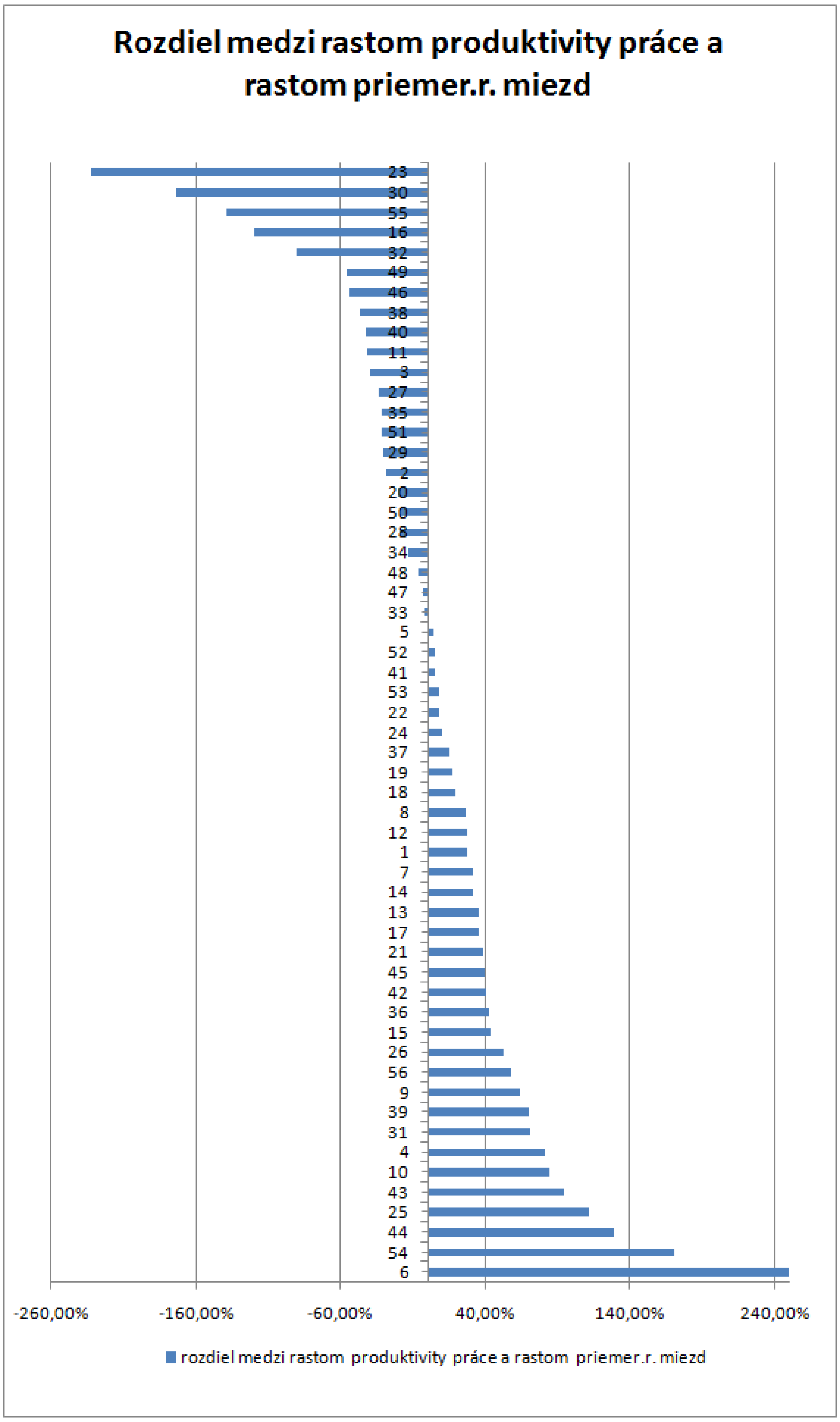
Zmena priemerných ročných miezd a produktivity práce

		priemer.r.mzdy (eur)			produktivita práce			rozdiel rastu produktivity a miezd
		2000	2005	Δ	2000	2005	Δ	
1	Produkty poľn., poľov. a služby	4 173	5 626	35%	3,7%	6,1%	62%	27,51%
2	Produkty lesníctva	4 452	8 988	102%	2,3%	3,9%	73%	-28,54%
3	Ryby, produkty rybolovu	4 381	5 287	21%	6,8%	5,5%	-19%	-39,77%
4	Čierne a hnedé uhlie	5 240	6 197	18%	5,5%	10,9%	99%	81,14%
5	Ropa a zemný plyn	2 655	6 867	159%	74,3%	195,0%	162%	3,74%
6	Kovové rudy	4 576	5 465	19%	17,5%	65,9%	277%	257,12%
7	Ostatné nerasty	5 794	9 489	64%	4,0%	7,8%	95%	31,17%
8	Potravinárske výrobky	4 449	5 432	22%	6,8%	10,2%	49%	26,47%
9	Tabakové výrobky, služby	7 791	2 879	-63%	23,0%	23,1%	0,4%	63,41%
10	Textilné výrobky	4 046	4 707	16%	4,2%	8,4%	101%	84,44%
11	Odevné výrobky	3 231	5 049	56%	3,2%	3,7%	14%	-41,85%
12	Koža, brašn. sedlár. výr.	3 623	5 061	40%	4,0%	6,7%	67%	27,47%
13	Výrobky z dreva a korku	3 977	5 300	33%	3,9%	6,5%	69%	35,30%
14	Celulóza, papier	5 404	7 811	45%	12,3%	21,7%	76%	31,22%
15	Vydavateľstvo a tlač	6 151	7 549	23%	4,7%	7,9%	66%	43,34%
16	Koks, rafinérske ropné produkty	5 610	19 690	251%	46,2%	106,7%	131%	-120,11%
17	Chemikálie, chemické výrobky	6 200	6 302	2%	18,9%	26,0%	37%	35,76%
18	Výrobky z gumy a plastov	5 777	7 058	22%	11,3%	15,9%	41%	18,97%
19	Ost.nekovové minerál. výrobky	5 500	8 005	46%	5,9%	9,6%	62%	16,68%
20	Základné kovy	6 418	11 139	74%	12,2%	18,7%	53%	-20,38%
21	Hotové kovové výrobky	5 536	7 019	27%	6,1%	10,1%	65%	38,43%
22	Stroje, zariadenia, i.n.	4 925	7 209	46%	7,0%	10,7%	54%	8,00%
23	Kancelárske stroje a počítače	1 446	5 447	277%	13,4%	19,2%	44%	-232,99%
24	Elektrické stroje a prístroje, i.n.	5 200	6 287	21%	7,7%	10,0%	30%	9,57%
25	Rádiové, televízne zariad.	4 625	5 378	16%	9,4%	21,4%	128%	111,75%
26	Zdravotnícke, presné prístr.	6 985	6 579	-6%	9,3%	13,7%	47%	52,42%
27	Motorové vozidlá	4 579	9 109	99%	26,8%	44,3%	65%	-33,94%
28	Ostatné dopravné zariadenia	5 945	7 844	32%	7,5%	8,5%	13%	-19,44%
29	Nábytok	3 654	6 036	65%	6,8%	9,1%	34%	-30,70%
30	Druhotné suroviny	2 957	8 508	188%	7,0%	8,0%	14%	-173,50%
31	El. energia, plyn, teplá voda	7 211	11 194	55%	10,6%	24,0%	127%	71,34%
32	Výroba a rozvod vody	4 264	11 339	166%	2,5%	4,3%	76%	-90,21%
33	Stavebné práce	5 281	8 589	63%	5,7%	9,2%	61%	-1,95%
34	Predaj motorových vozidiel	7 408	10 355	40%	4,6%	5,8%	27%	-12,81%
35	Veľkoobchod	8 020	11 791	47%	5,9%	6,8%	15%	-31,71%
36	Maloobchod	6 600	7 837	19%	3,0%	4,8%	61%	42,14%
37	Hotelové a reštauračné služby	4 197	5 677	35%	2,9%	4,3%	50%	15,07%
38	Pozemná doprava	5 022	8 301	65%	5,7%	6,8%	19%	-46,61%
39	Vodná doprava	7 362	6 842	-7%	6,5%	10,6%	63%	70,44%
40	Vzdušná doprava	4 214	9 844	134%	17,8%	33,9%	91%	-43,04%
41	Vedľajšie služby v doprave	6 074	8 411	38%	7,6%	10,9%	44%	5,45%
42	Služby pôšt a telekomunikácií	6 501	9 428	45%	4,2%	7,7%	86%	40,48%
43	Peňažníctvo a súvisiace služby	9 263	15 323	65%	3,6%	9,4%	160%	94,52%
44	Poisťovníctvo	10 186	14 222	40%	5,3%	14,2%	168%	128,43%
45	Pomoc. služby fin. sprostr.	6 852	12 871	88%	4,5%	10,1%	127%	39,43%
46	Služby v oblasti nehnuteľností	3 223	4 791	49%	11,1%	10,5%	-5,2%	-53,87%
47	Prenájmom strojov	4 605	5 757	25%	6,0%	7,2%	21%	-3,58%
48	Počítačové služby	10 609	14 557	37%	5,4%	7,1%	32%	-5,72%
49	Výskum a vývoj	7 828	13 739	76%	3,0%	3,6%	19%	-56,33%
50	Iné obchodné služby	7 974	9 638	21%	5,7%	5,7%	1,0%	-19,83%
51	Verejná správa a obrana	6 722	10 506	56%	2,6%	3,3%	25%	-31,52%
52	Školstvo	4 142	7 213	74%	0,7%	1,3%	80%	5,42%
53	Zdravostníctvo a sociál. star.	4 143	7 260	75%	1,3%	2,3%	83%	7,84%
54	Čistenie odpadových vôd	5 418	7 289	35%	0,9%	2,7%	205%	170,72%
55	Činnosti členských organizácií, i.n	5 183	16 536	219%	2,3%	4,1%	80%	-139,51%
56	Rekreačné, kultúr. činnosti	6 515	7 020	8%	3,6%	5,9%	66%	58,06%
57	Ostatné služby	2 419	6 437	166%	3,3%	5,5%	68%	-97,95%
	Spolu	5 465	8 189	50%	5,5%	8,6%	58%	8,0%

Obr. 8: Porovnanie priemernej ročnej mzdy a produktivity práce 2000/2005.

Pozrime sa, aký je v jednotlivých kategóriách komodít rozdiel medzi rastom produktivity práce a rastom priemerných ročných miezd.

Produktivita práce rástla rýchlejšie ako priemerné ročné mzdy v prípade 33 ko-



Obr. 9: Rozdiel medzi rastom produktivity práce a rastom priemer.r. miezd

modít, čo predstavuje 58% z celkového počtu komoditných kategórií. Najväčší rozdiel sme zaznamenali pre kategóriu *Kovové rudy* (257%), *Čistenie odpadových vôd* (171%) a *Poisťovníctvo* (128%). Naopak rast priemerných ročných miezd najviac prevyšoval rast produktivity práce v prípade komoditnej kategórie *Kancelárske* *stroje a počítače* (233%), *Druhotné suroviny* (174%) a *Činnosti členských organizácií, i.n.* (140%).

Ďalší ukazovateľ, ktorý nás bude zaujímať je *multiplikátor produkcie.* Multiplikátor produkcie definujeme ako produkciu všetkých produktov v ekonomike, potrebnú na uspokojenie jednej jednotky konečnej spotreby po j-tom produkte. Predstavuje stĺpcový súčet prvkov Leontiefovej inverzie. Čím väčšie sú vstupné koeficienty jednotlivých produktov, potrebných či už priamo alebo nepriamo na jednu jednotku produkcie, tým väčšie sú multiplikátory produkcie. Je zrejmé, že tieto multiplikátory sú väčšie ako jedna, pretože zvýšenie konečnej spotreby komodity o jednu jednotku vyvolá zvýšenie produkcie aspoň o túto jednotku ([14]). Hodnoty multiplikátorov pre rok 2000 a 2005 a ich percentuálny rozdiel znázorňuje Obrázok 10:

Multiplikátory produkcie

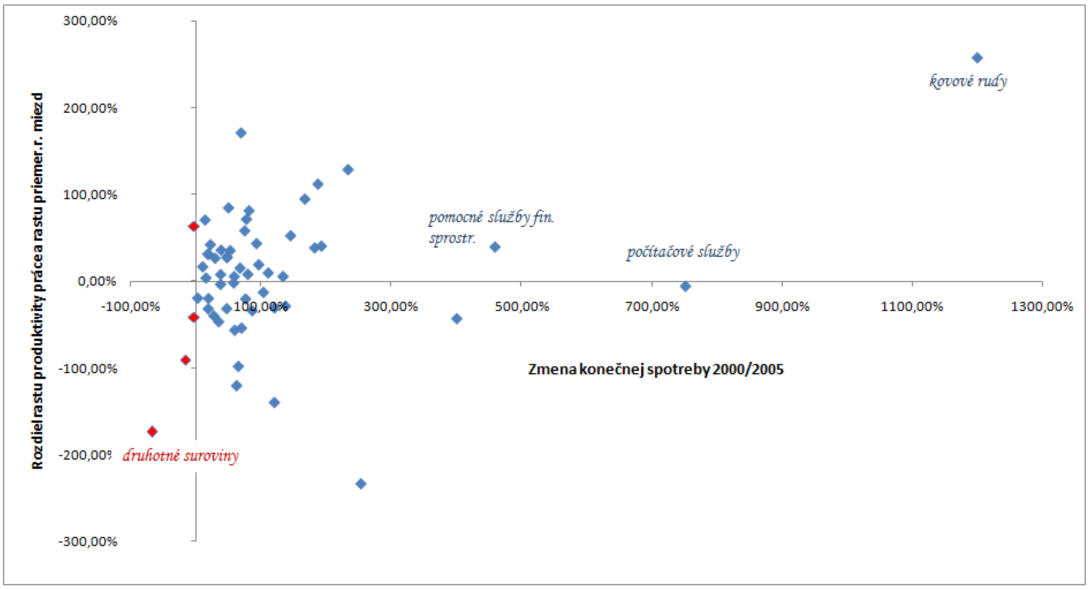
		2000	2005	Δ			2000	2005	Δ
1	Produkty poľn., poľov. a služby	2,10	1,85	-12,22%	30	Druhotné suroviny	2,14	1,85	-13,56%
2	Produkty lesníctva	1,83	1,78	-2,59%	31	El. energia, plyn, teplá voda	2,83	2,35	-17,15%
3	Ryby, produkty rybolovu	1,63	1,53	-5,70%	32	Výroba a rozvod vody	2,15	1,88	-12,61%
4	Čierne a hnedé uhlie	1,19	1,11	-6,90%	33	Stavebné práce	2,26	2,26	0,05%
5	Ropa a zemný plyn	1,03	1,02	-1,28%	34	Predaj motorových vozidiel	2,02	1,89	-6,47%
6	Kovové rudy	1,18	1,07	-9,39%	35	Veľkoobchod	2,06	1,80	-12,63%
7	Ostatné nerasty	1,98	1,76	-11,31%	36	Maloobchod	1,90	1,68	-11,70%
8	Potravinárske výrobky	2,16	1,93	-10,42%	37	Hotelové a reštauračné služby	2,06	1,46	-28,83%
9	Tabakové výrobky, služby	1,71	1,10	-35,58%	38	Pozemná doprava	1,94	1,79	-7,62%
10	Textilné výrobky	1,44	1,33	-7,82%	39	Vodná doprava	1,85	1,19	-35,53%
11	Odevné výrobky	1,38	1,51	8,84%	40	Vzdušná doprava	1,73	1,79	3,55%
12	Koža, brašn. sedlár. výr.	1,54	1,64	6,12%	41	Vedľajšie služby v doprave	2,58	2,20	-14,77%
13	Výrobky z dreva a korku	2,04	1,91	-6,20%	42	Služby pôšt a telekomunikácií	1,70	1,66	-2,38%
14	Celulóza, papier	1,95	1,91	-2,24%	43	Peňažníctvo a súvisiace služby	1,76	1,47	-16,19%
15	Vydavateľstvo a tlač	2,04	1,98	-2,90%	44	Poisťovníctvo	1,64	1,63	-0,70%
16	Koks, rafinérske ropné produkty	1,92	1,71	-10,68%	45	Pomoc. služby fin. sprostr.	2,74	1,44	-47,35%
17	Chemikálie, chemické výrobky	1,64	1,47	-10,69%	46	Služby v oblasti nehnuteľností	1,43	1,53	7,26%
18	Výrobky z gumy a plastov	1,73	1,69	-1,94%	47	Prenájmom strojov	1,90	1,81	-4,56%
19	Ost.nekovové minerál. výrobky	2,08	1,91	-8,12%	48	Počítačové služby	1,73	1,68	-2,89%
20	Základné kovy	2,31	1,76	-23,93%	49	Výskum a vývoj	2,04	1,62	-20,44%
21	Hotové kovové výrobky	1,83	1,60	-12,56%	50	Iné obchodné služby	1,77	1,70	-4,03%
22	Stroje, zariadenia, i.n.	1,69	1,62	-4,26%	51	Verejná správa a obrana	1,67	1,54	-7,67%
23	Kancelárske stroje a počítače	1,30	1,71	31,36%	52	Školstvo	1,29	1,32	2,30%
24	Elektrické stroje a prístroje, i.n.	1,75	1,76	0,81%	53	Zdravotníctvo a sociál. star.	1,68	1,63	-3,35%
25	Rádiové, televízne zariad.	1,49	1,76	18,26%	54	Čistenie odpadových vôd	2,12	1,75	-17,26%
26	Zdravotnícke, presné prístr.	1,41	1,31	-7,56%	55	Činnosti členských organizácií, i.n.	2,93	1,81	-38,20%
27	Motorové vozidlá	1,98	1,87	-5,38%	56	Rekreačné, kultúr. činnosti	2,09	1,89	-9,40%
28	Ostatné dopravné zariadenia	1,82	1,82	0,24%	57	Ostatné služby	1,37	1,40	2,55%
29	Nábytok	1,96	1,84	-6,14%					

Obr. 10: Multiplikátory produkcie.

Môžeme pozorovať, že vo väčšine komoditných kategórií nastal pokles multiplikátorov produkcie. Najväčší pokles sme zaznamenali v prípade *Pomocných služieb finančného spotredkovania* (-47%), *Činnosti členských organizácií, i.n.* (-38%)

a *Tabakových výrobkov, služieb* (-36%). Výraznejší nárast tohto multiplikátora nastal v kategórii *Kancelárske stroje a počítače* (+31%) a *Rádiové, televízne zariadenia* (+18%).

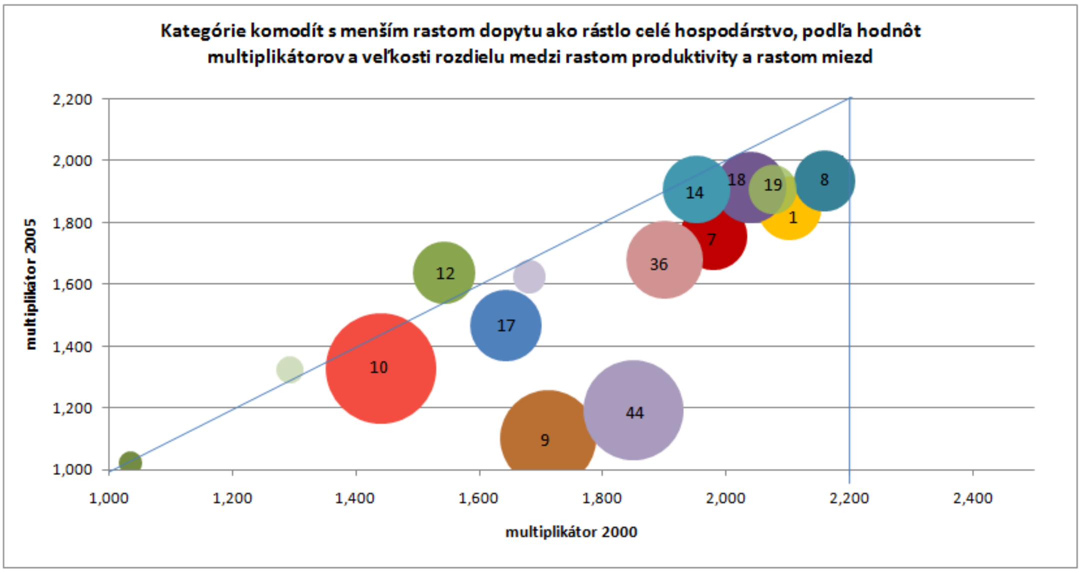
Posledným faktorom, ktorý vstupuje do nášho modelu štrukturálnej dekompozície, je konečná spotreba. Nasledujúci graf zobrazuje zmenu konečnej spotreby v prekrížení s rozdielom medzi rastom produktivity práce a rastom priemerných ročných miezd (kladný rozdiel znamená rýchlejší rast produktivity práce v porovnaní s rastom miezd, záporný naopak):



Obr. 11: Zmena konečnej spotreby vs. rozdiel rastu produktivity práce a priemernej ročnej mzdy.

Z Obrázka 11 vidíme, že takmer vo všetkých kategóriách komodít nastal nárast konečnej spotreby. Najvýraznejší nárast prislúcha kategórii *Kovové rudy* (+1200%), *Počítačové služby* (+752%) a *Pomoc. služby fin. sprostr.* (+460%). Pokles môžeme pozorovať iba pre 4 kategórie, pričom na obrázku sú zaznačené červenou farbou. Najvýraznejšie sa tento pokles prejavil v kategórii *Druhotné suroviny* (-67%). V rámci celého hospodárstva došlo k nárastu konečnej spotreby o 66%. Môžeme pozorovať, že aj v prípade komodít, kde je rast produktivity práce vyšší ako rast priemerných ročných miezd (prvý kvadrant grafu), aj v prípade komodít, kde je to naopak (štvrtý kvadrant), je zmena konečnej spotreby rôznorodá. Na základe štrukturálneho modelu (105) budeme očakávať, že rastový efekt, teda rast konečnej spotreby, bude pôsobiť na rast objemu miezd pozitívne, ale v prípade komodít, kde rast produktivity práce prevyšuje rast priemerných ročných miezd, bude tento efekt potláčaný. Sila tohto faktora závisí aj od veľkosti multiplikátora produkcie.

Nasledujúci graf zobrazuje tie komoditné kategórie, u ktorých bol rast konečnej spotreby menší ako rast za celé hospodárstvo, teda menej ako 66%. Osi grafu znázorňujú veľkosť multiplikátora produkcie v roku 2000 a 2005 a veľkosť bubliny reprezentuje rozdiel v raste produktivity práce a raste priemerných ročných miezd.



Obr. 12: Kategórie komodít s predpokladom zníženia objemu miezd.

Predpokladáme teda, že v prípade zobrazených kategórií komodít by mohlo dôjsť k poklesu objemu miezd, pretože rastový efekt, ktorý ovplyvňuje rast objemu miezd pozitívne, je slabší a produktivita práce v rámci zobrazených kategórií rástla rýchlejšie ako priemerné ročné mzdy, čo pôsobí na rast objemu miezd negatívne. Väčšina bublín sa nachádza pod diagonálou, čo znamená pokles multiplikátorov produkcie a teda negatívny efekt na rast objemu miezd. Čím väčšia je bublina a čím väčšie sú multiplikátory produkcie, tým väčší je náš predpoklad poklesu objemu miezd v rámci danej kategórie. Pre prehľadnosť grafov sú jednotlivé komodity označené číslami, ktoré sú uvedené v každej tabuľke s komoditami.

3.2 Štrukturálna dekompozícia zmien objemu miezd

Pripomeňme si model (105), ktorý sme odvodili na konci druhej kapitoly:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{w} = &\frac{1}{2}\underbrace{(\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{m}})((\hat{\mathbf{p}}^{-1})^{\mathbf{0}}\mathbf{L}^{\mathbf{0}}\mathbf{f}^{\mathbf{0}} + (\hat{\mathbf{p}}^{-1})^{\mathbf{1}}\mathbf{L}^{\mathbf{1}}\mathbf{f}^{\mathbf{1}})}_{\text{Zmena priemerných ročných miezd}} \\ &+ \frac{1}{2}\underbrace{[\hat{\mathbf{m}}^{\mathbf{0}}(\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{p}}^{-1})\mathbf{L}^{\mathbf{1}}\mathbf{f}^{\mathbf{1}} + \hat{\mathbf{m}}^{\mathbf{1}}(\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{p}}^{-1})\mathbf{L}^{\mathbf{0}}\mathbf{f}^{\mathbf{0}}]}_{\text{Zmena koeficientu pracnosti}} \\ &+ \frac{1}{2}\underbrace{[\hat{\mathbf{m}}^{\mathbf{0}}(\hat{\mathbf{p}}^{-1})^{\mathbf{0}}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{L})\mathbf{f}^{\mathbf{1}} + \hat{\mathbf{m}}^{\mathbf{1}}(\hat{\mathbf{p}}^{-1})^{\mathbf{1}}(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{L})\mathbf{f}^{\mathbf{0}}]}_{\text{Zmena technológie}} \\ &+ \frac{1}{2}\underbrace{[\hat{\mathbf{m}}^{\mathbf{0}}(\hat{\mathbf{p}}^{-1})^{\mathbf{0}}\mathbf{L}^{\mathbf{0}} + \hat{\mathbf{m}}^{\mathbf{1}}(\hat{\mathbf{p}}^{-1})^{\mathbf{1}}\mathbf{L}^{\mathbf{1}}](\boldsymbol{\Delta}\mathbf{f})}_{\text{Zmena konečnej spotreby}}.\end{aligned} \tag{107}$$

Pomocou uvedeného vzťahu rozložíme zmenu objemu miezd na efekt zmeny priemernej ročnej mzdy, zmeny koeficientu pracnosti (inverzná hodnota produktivity práce), zmeny v technológiách výroby a efekt zmeny konečného dopytu.

V predošlej časti sme zanalyzovali tieto zmeny izolovane, avšak, ako sme už spomenuli, ekonomiky súčasných krajín sú charakterizované nielen deľbou práce v rámci ekonomiky, ale aj intenzívnymi väzbami medzi sektormi daného hospodárstva a takisto väzbami s inými ekonomikami ([4]). Input - output model a následná štrukturálna dekompozícia tieto väzby zahŕňajú. Porovnajme teda naše predpoklady z predchádzajúcej časti s výsledkami dekompozície.

	Zmena objemu miezd										
	Komodita	efekt zmeny priemer. r. miezd	%	efekt zmeny koeficientu pracnosti	%	efekt zmeny technológie	%	efekt zmeny konečnej spotreby	%	Spolu	Percentuálna zmena
1	Produkty poľn., poľov. a služby	100,87	-1850%	-162,73	2985%	-66,77	1225%	123,18	-2260%	-5,45	-1,6%
2	Produkty lesníctva	86,52	103%	-67,46	-80%	-9,48	-11%	74,61	89%	84,18	98,2%
3	Ryby, produkty rybolovu	0,14	21%	0,15	22%	0,14	22%	0,24	36%	0,67	148,5%
4	Čierne a hnedé uhlie	6,62	-213%	-27,76	894%	-3,41	110%	21,45	-691%	-3,10	-7,6%
5	Ropa a zemný plyn	12,82	2947%	-13,10	-3010%	-4,54	-1044%	5,25	1206%	0,44	3,8%
6	Kovové rudy	0,90	-41%	-7,08	319%	0,04	-2%	3,92	-177%	-2,22	-36,7%
7	Ostatné nerasty	18,97	-1896%	-25,41	2540%	-5,91	590%	11,35	-1134%	-1,00	-2,7%
8	Potravinárske výrobky	57,94	596%	-115,19	-1185%	-16,03	-165%	83,00	854%	9,72	3,4%
9	Tabakové výrobky, služby	-4,72	95%	-0,02	0%	-0,11	2%	-0,13	3%	-4,98	-65,0%
10	Textilné výrobky	13,02	-303%	-61,79	1439%	10,86	-253%	33,62	-783%	-4,29	-4,9%
11	Odevné výrobky	58,11	148%	-17,83	-46%	-2,31	-6%	1,18	3%	39,15	35,4%
12	Koža, brašn. sedlár. výr.	23,90	124%	-37,01	-193%	3,79	20%	28,55	149%	19,22	30,9%
13	Výrobky z dreva a korku	29,39	114%	-54,14	-210%	-0,37	-1%	50,92	197%	25,80	28,7%
14	Celulóza, papier	26,51	-519%	-40,13	785%	-11,83	231%	20,34	-398%	-5,11	-7,1%
15	Vydavateľstvo a tlač	17,91	599%	-44,73	-1496%	-22,95	-768%	52,75	1765%	2,99	3,5%
16	Koks, rafinérske ropné produkty	63,29	144%	-42,83	-98%	0,73	2%	22,72	52%	43,91	148,6%
17	Chemikálie, chemické výrobky	2,25	-36%	-44,15	704%	-15,98	255%	51,60	-823%	-6,27	-4,5%
18	Výrobky z gumy a plastov	24,12	39%	-42,17	-68%	5,89	9%	74,39	120%	62,23	67,9%
19	Ost.nekovové minerál. výrobky	61,66	138%	-79,75	-179%	10,52	24%	52,19	117%	44,63	31,4%
20	Základné kovy	175,91	110%	-135,85	-85%	-67,98	-42%	187,89	117%	159,97	65,3%
21	Hotové kovové výrobky	53,47	44%	-117,42	-97%	2,42	2%	182,71	151%	121,18	71,4%
22	Stroje, zariadenia, i.n.	147,88	101%	-168,82	-116%	-59,32	-41%	226,39	155%	146,13	45,7%
23	Kancelárske stroje a počítače	25,81	65%	-6,37	-16%	-2,34	-6%	22,42	57%	39,53	613,7%
24	Elektrické stroje a prístroje, i.n.	41,98	31%	-59,47	-43%	0,66	0%	153,73	112%	136,91	86,8%
25	Rádiové, televízne zariad.	12,99	30%	-81,51	-186%	21,14	48%	91,13	208%	43,74	66,8%
26	Zdravotnícke, presné prístr.	-4,45	-13%	-30,95	-90%	8,91	26%	60,76	177%	34,27	60,4%
27	Motorové vozidlá	106,33	71%	-76,13	-51%	23,04	15%	96,18	64%	149,42	160,7%
28	Ostatné dopravné zariadenia	16,02	75%	-6,76	-32%	6,37	30%	5,72	27%	21,35	44,6%
29	Nábytok	43,41	58%	-25,13	-34%	-7,11	-10%	63,15	85%	74,32	135,2%
30	Druhotné suroviny	5,65	121%	-0,78	-17%	-1,46	-31%	1,26	27%	4,67	142,8%
31	El. energia, plyn, teplá voda	168,65	-1369%	-311,54	2529%	-63,60	516%	194,17	-1576%	-12,32	-3,3%
32	Výroba a rozvod vody	63,60	238%	-38,44	-144%	-9,25	-35%	10,79	40%	26,69	55,1%
33	Stavebné práce	352,22	91%	-343,26	-88%	43,80	11%	335,19	86%	387,95	70,7%
34	Predaj motorových vozidiel	48,25	53%	-34,11	-37%	-10,08	-11%	87,23	96%	91,29	88,3%
35	Veľkoobchod	280,68	90%	-103,83	-33%	-88,09	-28%	224,08	72%	312,84	53,6%
36	Maloobchod	99,77	-1278%	-277,84	3558%	23,00	-294%	147,27	-1886%	-7,81	-1,3%
37	Hotelové a reštauračné služby	62,03	132%	-83,90	-178%	-39,09	-83%	108,08	229%	47,12	25,9%
38	Pozemná doprava	278,69	132%	-96,42	-46%	-181,46	-86%	210,44	100%	211,25	46,7%
39	Vodná doprava	-0,75	52%	-5,26	362%	-0,25	17%	4,81	-331%	-1,45	-13,2%
40	Vzdušná doprava	6,00	51%	-4,36	-37%	3,08	26%	7,05	60%	11,77	425,1%
41	Vedľajšie služby v doprave	32,82	45%	-36,90	-51%	14,44	20%	62,45	86%	72,81	106,2%
42	Služby pôšt a telekomunikácií	93,38	115%	-157,38	-194%	-50,50	-62%	195,62	241%	81,11	38,2%
43	Peňažníctvo a súvisiace služby	168,57	193%	-328,18	-376%	-16,93	-19%	263,74	302%	87,20	30,2%
44	Poisťovníctvo	29,90	167%	-94,44	-527%	-17,78	-99%	100,24	559%	17,92	22,3%
45	Pomoc. služby fin. sprostr.	17,90	89%	-23,77	-118%	-2,10	-10%	28,19	139%	20,22	103,2%
46	Služby v oblasti nehnuteľností	62,33	51%	8,27	7%	-28,55	-23%	80,09	66%	122,13	117,3%
47	Prenájmom strojov	11,99	518%	-10,42	-450%	-26,71	-1153%	27,46	1185%	2,32	4,4%
48	Počítačové služby	69,37	39%	-59,59	-33%	-64,64	-36%	233,21	131%	178,35	126,9%
49	Výskum a vývoj	31,69	89%	-9,88	-28%	-13,58	-38%	27,53	77%	35,75	88,2%
50	Iné obchodné služby	127,69	39%	-6,83	-2%	-77,40	-24%	282,90	87%	326,36	62,5%
51	Verejná správa a obrana	492,54	76%	-242,47	-37%	-35,84	-6%	433,84	67%	648,07	79,6%
52	Školstvo	474,45	123%	-501,01	-130%	8,21	2%	402,53	105%	384,18	57,1%
53	Zdravostníctvo a sociál. star.	349,03	208%	-376,02	-224%	-6,41	-4%	201,12	120%	167,72	31,7%
54	Čistenie odpadových vôd	41,69	-136%	-160,80	525%	15,82	-52%	72,66	-237%	-30,63	-20,2%
55	Činnosti členských organizácií, i.n.	71,75	119%	-37,03	-61%	-16,87	-28%	42,42	70%	60,26	169,5%
56	Rekreačné, kultúr. činnosti	13,20	84%	-92,73	-590%	-7,86	-50%	103,09	656%	15,71	9,3%
57	Ostatné služby	33,20	131%	-18,01	-71%	-5,91	-23%	16,14	63%	25,43	115,0%
	Total	4705,85	104%	-5038,45	-112%	-857,94	-19%	5704,78	126%	4514,24	46,3%

Obr. 13: Rozklad zmeny objemu miezd.

Obrázok 13 znázorňuje číselné hodnoty jednotlivých faktorov v členení podľa komodít. Hodnoty v stĺpcoch s nadpisom "%" znamenajú podiel príslušnej zmeny na celkovú zmenu objemu miezd pri výrobe danej komodity. Podľa našich očakávaní je efekt zmeny priemerných ročných miezd v prevažnej väčšine kategórií pozitívny, efekt zmeny koeficientu pracnosti je negatívny okrem dvoch kategórií, kde došlo k poklesu produktivity práce, a teda k nárastu koeficientu pracnosti. Pri efekte zmeny v technológiách sú výsledky v jednotlivých kategóriách rôznorodé, avšak za celé hospodárstvo bol tento vplyv na rast objemu miezd negatívny. Posledný faktor, zmena konečnej spotreby, mal pozitívny efekt na rast objemu miezd vo všetkých komoditných kategóriách okrem komodity *Tabakové výrobky, služby*, pričom v tomto prípade nastal síce pokles konečnej spotreby, ale vplyv tohto faktora bol veľmi nízky na zmenu objemu miezd (3%).

Pokles miezd nastal v prípade 12-tich komoditných kategórií. Porovnajme tieto výsledky s "kandidátmi" zobrazenými v grafe 12. Nachádza sa tu 8 z 12 spomenutých kategórií. Medzi štyri zostávajúce komoditné kategórie patrí *Čierne a hnedé uhlie*; *Kovové rudy*; *El. energia, plyn, teplá voda* a *Čistenie odpadových vôd*. Vo všetkých týchto kategóriách bol pomerne veľký rast konečnej spotreby, ale tento rastový efekt potlačil rozdiel v raste produktivity práce a priemerných ročných miezd, prípadne zosilnený vysokým multiplikátorom. V prípade *Kovových rúd* sme síce zaznamenali obrovský rast konečnej spotreby (+1200%) a nízke hodnoty multiplikátorov produkcie, ale fakt, že produktivita práce pri výrobe tejto komodity rástla oveľa rýchlejšie ako priemerné ročné mzdy (rozdiel 257%), prevážil nad rastovým efektom. Aj tento príklad je ukážkou toho, prečo je dôležité nezabúdať na väzby a prepojenia medzi jednotlivými sektormi ekonomiky.

Objem miezd v rámci celého hospodárstva narástol o 46%. Po priereze hospodárstva na jednotlivé komodity pozorujeme veľkú rôznorodosť tohto rastu, v 12-tich kategóriách dokonca pokles, preto je dôležité nahliadnuť do štruktúry ekonomiky a nesledovať výsledky len za hospodárstvo ako celok.

V interpretácii pre celú ekonomiku je pozitívny efekt zmeny priemerných ročných miezd vo veľkej miere utlmený negatívnym efektom koeficientu pracnosti, a teda rastom produktivity práce. Efekt zmeny technológii pôsobí tiež negatívne, hlavným "ťahúňom" zvyšovania objemu miezd v hospodárstve je rast konečnej spotreby.

Aká zmena objemu miezd by nastala v prípade stagnácie konečného dopytu, teda keby sa konečný dopyt nezmenil oproti roku 2000 a aká v prípade, keby priemerné ročné mzdy rástli rovnako ako produktivita práce? Uvažujme situáciu, že konečná spotreba roku 2005 sa nezmenila oproti roku 2000. Po rozklade pomocou vzťahu (105) za predpokladu, že $f^1 = f^0$, by sme dostali podobné výsledky ako pre reálnu situáciu, a teda pozitívny efekt rastu priemerných ročných miezd by bol vo veľkej miere potlačený negatívnym efektom rastu produktivity práce, takisto zmena technológií by mala negatívny vplyv na objem miezd v hospodárstve. Avšak, keďže rastový efekt je v takomto prípade nulový, došlo by k poklesu objemu miezd v celom hospodárstve o 8,5%, pričom v 22 kategóriách komodít by nastal rast objemu miezd a vo zvyšných 35 kategóriách pokles, viď Obrázok 14.

Druhá hypotetická situácia je v prípade, kedy by rast priemerných ročných miezd zodpovedal rastu produktivity práce. Po rozklade pomocou vzťahu (105) by bol pozitívny efekt rastu priemerných ročných miezd presne vyvážený negatívnym efektom rastu produktivity práce (resp. poklesu koeficientu pracnosti) vo všetkých kategóriách. Tieto dva faktory by teda nemali žiaden vplyv na zmenu objemu miezd. Táto zmena by závisela len od efektu zmeny v technológiách, ktorý je negatívny a efektu zmeny konečnej spotreby, ktorý je samozrejme pozitívny. Rastový efekt v takomto prípade by bol silnejší a v rámci celého hospodárstva by došlo k rastu objemu miezd o 52%. Nárast by nastal takmer vo všetkých komoditných kategóriách, okrem komodity *Druhotné suroviny*; *Odevné výrobky* a *Tabakové výrobky, služby*. V prípade prvých dvoch kategórií bol negatívny efekt zmeny technológií silnejší ako pozitívny rastový efekt a v prípade *Tabakových výrobkov a služieb* boli oba efekty negatívne. Výsledky zobrazuje Obrázok 15.

	Zmena objemu miezd bez rastu konečnej spotreby										
	Komodita	efekt zmeny priemer. r. miezd	%	efekt zmeny koeficientu pracnosti	%	efekt zmeny technológie	%	efekt zmeny konečnej spotreby	%	Spolu	Percentuál na zmena
1	Produkty poľn., poľov. a služby	87,84	-83%	-139,43	131%	-54,71	51%	0,00	0%	-106,30	-31,7%
2	Produkty lesníctva	67,33	828%	-53,65	-660%	-5,55	-68%	0,00	0%	8,13	9,5%
3	Ryby, produkty rybolovu	0,11	33%	0,12	37%	0,10	30%	0,00	0%	0,34	75,2%
4	Čierne a hnedé uhlie	5,41	-29%	-21,21	113%	-2,91	16%	0,00	0%	-18,71	-46,0%
5	Ropa a zemný plyn	11,50	-297%	-11,72	303%	-3,65	94%	0,00	0%	-3,87	-33,6%
6	Kovové rudy	0,75	-18%	-4,89	118%	0,01	0%	0,00	0%	-4,13	-68,2%
7	Ostatné nerasty	17,21	-172%	-22,79	227%	-4,45	44%	0,00	0%	-10,03	-26,9%
8	Potravinárske výrobky	51,44	-83%	-100,87	162%	-12,73	20%	0,00	0%	-62,17	-21,9%
9	Tabakové výrobky, služby	-4,78	97%	-0,02	0%	-0,11	2%	0,00	0%	-4,91	-64,1%
10	Textilné výrobky	11,12	-35%	-50,06	160%	7,57	-24%	0,00	0%	-31,37	-35,8%
11	Odevné výrobky	58,08	149%	-17,82	-46%	-1,25	-3%	0,00	0%	39,02	35,3%
12	Koža, brašn. sedlár. výr.	20,04	-252%	-30,48	383%	2,48	-31%	0,00	0%	-7,96	-12,8%
13	Výrobky z dreva a korku	23,80	-125%	-42,61	224%	-0,18	1%	0,00	0%	-18,99	-21,1%
14	Celulóza, papier	23,99	-112%	-35,86	167%	-9,62	45%	0,00	0%	-21,49	-29,6%
15	Vydavateľstvo a tlač	14,18	-38%	-33,88	91%	-17,59	47%	0,00	0%	-37,29	-43,6%
16	Koks, rafinérske ropné produkty	53,46	325%	-37,74	-229%	0,75	5%	0,00	0%	16,47	55,7%
17	Chemikálie, chemické výrobky	1,92	-4%	-36,58	77%	-12,68	27%	0,00	0%	-47,35	-33,8%
18	Výrobky z gumy a plastov	17,44	-153%	-29,79	261%	0,92	-8%	0,00	0%	-11,43	-12,5%
19	Ost.nekovové minerál. výrobky	53,75	-901%	-68,93	1156%	9,21	-155%	0,00	0%	-5,96	-4,2%
20	Základné kovy	137,82	-694%	-108,31	546%	-49,36	249%	0,00	0%	-19,85	-8,1%
21	Hotové kovové výrobky	36,70	-98%	-76,54	204%	2,25	-6%	0,00	0%	-37,58	-22,1%
22	Stroje, zariadenia, i.n.	115,81	-206%	-131,24	233%	-40,91	73%	0,00	0%	-56,34	-17,6%
23	Kancelárske stroje a počítače	14,27	175%	-4,54	-56%	-1,58	-19%	0,00	0%	8,15	126,5%
24	Elektrické stroje a prístroje, i.n.	29,28	-294%	-40,94	411%	1,70	-17%	0,00	0%	-9,96	-6,3%
25	Rádiové, televízne zariad.	8,10	-31%	-43,13	166%	9,06	-35%	0,00	0%	-25,97	-39,7%
26	Zdravotnícke, presné prístr.	-2,93	19%	-18,75	124%	6,58	-44%	0,00	0%	-15,10	-26,6%
27	Motorové vozidlá	78,41	211%	-57,77	-155%	16,55	45%	0,00	0%	37,19	40,0%
28	Ostatné dopravné zariadenia	15,01	116%	-6,37	-49%	4,33	33%	0,00	0%	12,96	27,1%
29	Nábytok	30,20	412%	-18,14	-248%	-4,73	-65%	0,00	0%	7,33	13,3%
30	Druhotné suroviny	5,11	170%	-0,74	-24%	-1,37	-45%	0,00	0%	3,00	91,8%
31	El. energia, plyn, teplá voda	143,28	-92%	-253,38	163%	-44,89	29%	0,00	0%	-154,99	-41,2%
32	Výroba a rozvod vody	60,04	393%	-36,82	-241%	-7,94	-52%	0,00	0%	15,28	31,5%
33	Stavebné práce	285,52	686%	-278,64	-670%	34,72	83%	0,00	0%	41,60	7,6%
34	Predaj motorových vozidiel	35,56	1731%	-25,51	-1242%	-7,99	-389%	0,00	0%	2,05	2,0%
35	Veľkoobchod	243,58	301%	-91,73	-113%	-71,03	-88%	0,00	0%	80,83	13,8%
36	Maloobchod	89,87	-67%	-245,67	184%	22,57	-17%	0,00	0%	-133,23	-22,9%
37	Hotelové a reštauračné služby	49,95	-110%	-66,67	147%	-28,79	63%	0,00	0%	-45,51	-25,0%
38	Pozemná doprava	237,72	6284%	-84,69	-2239%	-149,25	-3945%	0,00	0%	3,78	0,8%
39	Vodná doprava	-0,61	12%	-3,95	75%	-0,71	13%	0,00	0%	-5,27	-47,8%
40	Vzdušná doprava	3,45	123%	-2,63	-94%	1,98	71%	0,00	0%	2,80	101,1%
41	Vedľajšie služby v doprave	24,20	225%	-27,05	-252%	13,60	127%	0,00	0%	10,74	15,7%
42	Služby pôšt a telekomunikácií	68,63	-88%	-110,42	141%	-36,47	47%	0,00	0%	-78,27	-36,9%
43	Peňažníctvo a súvisiace služby	129,27	-116%	-232,12	208%	-8,69	8%	0,00	0%	-111,54	-38,7%
44	Poisťovníctvo	20,87	-46%	-56,13	123%	-10,46	23%	0,00	0%	-45,72	-56,8%
45	Pomoc. služby fin. sprostr.	11,95	-228%	-15,15	289%	-2,05	39%	0,00	0%	-5,24	-26,8%
46	Služby v oblasti nehnuteľností	47,33	155%	6,65	22%	-23,50	-77%	0,00	0%	30,48	29,3%
47	Prenájmom strojov	9,88	-52%	-8,61	46%	-20,10	107%	0,00	0%	-18,84	-36,1%
48	Počítačové služby	39,96	-104%	-34,74	90%	-43,69	114%	0,00	0%	-38,46	-27,4%
49	Výskum a vývoj	25,45	378%	-8,30	-123%	-10,41	-155%	0,00	0%	6,74	16,6%
50	Iné obchodné služby	102,25	323%	-5,58	-18%	-65,02	-205%	0,00	0%	31,66	6,1%
51	Verejná správa a obrana	406,88	236%	-204,73	-119%	-29,71	-17%	0,00	0%	172,44	21,2%
52	Školstvo	389,79	-2902%	-410,17	3053%	6,95	-52%	0,00	0%	-13,43	-2,0%
53	Zdravostníctvo a sociál. star.	307,10	-1112%	-329,70	1193%	-5,03	18%	0,00	0%	-27,63	-5,2%
54	Čistenie odpadových vôd	35,72	-46%	-125,30	162%	12,40	-16%	0,00	0%	-77,18	-50,9%
55	Činnosti členských organizácií, i.n.	54,73	511%	-30,85	-288%	-13,17	-123%	0,00	0%	10,72	30,1%
56	Rekreačné, kultúr. činnosti	10,36	-16%	-68,52	108%	-5,35	8%	0,00	0%	-63,51	-37,5%
57	Ostatné služby	27,53	379%	-15,68	-216%	-4,58	-63%	0,00	0%	7,27	32,9%
	Total	3842,59	-465%	-4010,73	485%	-658,47	80%	0,00	0%	-826,61	-8,5%

Obr. 14: Stagnácia konečnej spotreby.

Zmena objemu miezd, ak by bol rast miezd rovnaký ako rast produktivity

	Komodita	efekt zmeny priemer. r. miezd	%	efekt zmeny koeficientu pracnosti	%	efekt zmeny technológie	%	efekt zmeny konečnej spotreby	%	Spolu	Percentuál na zmena
1	Produkty poľn., poľov. a služby	180,54	292%	-180,41	-292%	-71,84	-116%	133,48	216%	61,77	18,4%
2	Produkty lesníctva	62,28	104%	-62,29	-104%	-9,06	-15%	69,23	115%	60,16	70,2%
3	Ryby, produkty rybolovu	-0,13	-44%	0,13	44%	0,12	39%	0,18	61%	0,29	64,7%
4	Čierne a hnedé uhlie	36,00	159%	-35,98	-159%	-4,15	-18%	26,77	118%	22,64	55,7%
5	Ropa a zemný plyn	13,13	2157%	-13,23	-2174%	-4,57	-752%	5,28	868%	0,61	5,3%
6	Kovové rudy	12,80	214%	-12,79	-214%	0,04	1%	5,94	99%	5,99	99,0%
7	Ostatné nerasty	28,24	478%	-28,24	-478%	-6,29	-106%	12,20	206%	5,91	15,8%
8	Potravinárske výrobky	127,36	174%	-127,49	-174%	-17,27	-24%	90,80	124%	73,39	25,8%
9	Tabakové výrobky, služby	0,03	-7%	-0,03	10%	-0,16	44%	-0,19	54%	-0,36	-4,7%
10	Textilné výrobky	80,35	143%	-80,39	-143%	12,87	23%	43,42	77%	56,25	64,1%
11	Odevné výrobky	14,91	-1564%	-14,90	1563%	-2,12	222%	1,16	-122%	-0,95	-0,9%
12	Koža, brašn. sedlár. výr.	40,45	115%	-40,45	-115%	4,01	11%	31,22	89%	35,23	56,7%
13	Výrobky z dreva a korku	60,58	107%	-60,59	-107%	-0,39	-1%	56,87	101%	56,47	62,9%
14	Celulóza, papier	45,10	478%	-45,00	-477%	-12,77	-135%	22,11	234%	9,44	13,0%
15	Vydavateľstvo a tlač	52,06	152%	-52,10	-152%	-25,58	-75%	59,86	175%	34,23	40,0%
16	Koks, rafinérske ropné produkty	33,00	175%	-32,82	-174%	0,57	3%	18,07	96%	18,83	63,7%
17	Chemikálie, chemické výrobky	50,89	125%	-50,99	-125%	-17,86	-44%	58,79	144%	40,83	29,1%
18	Výrobky z gumy a plastov	44,76	52%	-44,70	-52%	5,95	7%	80,06	93%	86,07	93,9%
19	Ost.nekovové minerál. výrobky	84,24	128%	-84,30	-128%	11,02	17%	55,08	83%	66,04	46,4%
20	Základné kovy	127,19	113%	-127,19	-113%	-64,88	-58%	177,26	158%	112,38	45,8%
21	Hotové kovové výrobky	130,17	62%	-130,30	-62%	2,72	1%	206,78	99%	209,37	123,4%
22	Stroje, zariadenia, i.n.	173,38	101%	-173,33	-101%	-60,40	-35%	231,88	135%	171,53	53,7%
23	Kancelárske stroje a počítače	4,08	37%	-4,08	-37%	-1,64	-15%	12,76	115%	11,11	172,5%
24	Elektrické stroje a prístroje, i.n.	61,19	38%	-61,23	-38%	0,73	0%	159,52	100%	160,20	101,5%
25	Rádiové, televízne zariad.	102,09	69%	-102,06	-69%	24,08	16%	124,66	84%	148,77	227,2%
26	Zdravotnícke, presné prístr.	35,73	42%	-35,67	-42%	10,35	12%	74,52	88%	84,94	149,7%
27	Motorové vozidlá	69,84	65%	-69,91	-65%	21,51	20%	86,64	80%	108,09	116,2%
28	Ostatné dopravné zariadenia	6,27	56%	-6,25	-56%	6,03	54%	5,10	46%	11,15	23,3%
29	Nábytok	22,97	46%	-22,97	-46%	-6,62	-13%	56,90	113%	50,27	91,5%
30	Druhotné suroviny	0,43	-373%	-0,43	372%	-0,87	763%	0,76	-662%	-0,11	-3,5%
31	El. energia, plyn, teplá voda	386,46	250%	-386,53	-250%	-71,96	-46%	226,85	147%	154,82	41,1%
32	Výroba a rozvod vody	29,02	2391%	-29,03	-2391%	-7,63	-628%	8,85	729%	1,21	2,5%
33	Stavebné práce	341,27	91%	-341,25	-91%	43,59	12%	333,14	88%	376,75	68,7%
34	Predaj motorových vozidiel	32,72	45%	-32,71	-45%	-9,70	-13%	83,16	113%	73,47	71,1%
35	Veľkoobchod	91,37	77%	-91,52	-77%	-79,52	-67%	199,08	167%	119,41	20,5%
36	Maloobchod	324,11	166%	-324,22	-166%	26,40	13%	169,53	87%	195,82	33,7%
37	Hotelové a reštauračné služby	88,53	122%	-88,50	-122%	-40,61	-56%	113,27	156%	72,69	39,9%
38	Pozemná doprava	79,72	331%	-79,82	-331%	-156,94	-651%	181,15	751%	24,11	5,3%
39	Vodná doprava	6,76	116%	-6,77	-116%	-0,45	-8%	6,27	108%	5,81	52,7%
40	Vzdušná doprava	4,07	45%	-4,08	-45%	2,86	32%	6,20	69%	9,05	326,8%
41	Vedľajšie služby v doprave	37,48	48%	-37,47	-48%	14,70	19%	63,70	81%	78,41	114,4%
42	Služby pôšt a telekomunikácií	177,30	109%	-177,18	-109%	-54,98	-34%	217,91	134%	163,05	76,8%
43	Peňažníctvo a súvisiace služby	412,11	137%	-412,00	-137%	-18,86	-6%	320,54	106%	301,79	104,7%
44	Poisťovníctvo	126,82	117%	-126,84	-117%	-21,07	-19%	129,52	119%	108,43	134,7%
45	Pomoc. služby fin. sprostr.	25,93	91%	-25,93	-91%	-2,30	-8%	30,85	108%	28,56	145,7%
46	Služby v oblasti nehnuteľností	-6,70	-17%	6,72	17%	-23,35	-58%	63,49	158%	40,15	38,6%
47	Prenájmom strojov	10,27	1364%	-10,26	-1362%	-26,40	-3505%	27,13	3603%	0,75	1,4%
48	Počítačové služby	58,71	36%	-58,63	-36%	-63,72	-39%	228,73	139%	165,10	117,5%
49	Výskum a vývoj	8,05	71%	-8,05	-71%	-11,60	-103%	22,88	203%	11,29	27,9%
50	Iné obchodné služby	6,34	3%	-6,30	-3%	-71,58	-38%	258,72	138%	187,17	35,9%
51	Verejná správa a obrana	216,73	61%	-216,97	-61%	-32,50	-9%	385,87	109%	353,13	43,4%
52	Školstvo	509,16	122%	-509,10	-122%	8,32	2%	408,76	98%	417,14	62,0%
53	Zdravostníctvo a sociál. star.	385,39	194%	-385,44	-194%	-6,52	-3%	205,48	103%	198,91	37,5%
54	Čistenie odpadových vôd	247,81	202%	-247,80	-202%	20,63	17%	102,20	83%	122,84	81,1%
55	Činnosti členských organizácií, i.n.	26,05	142%	-26,06	-142%	-13,20	-72%	31,61	172%	18,40	51,8%
56	Rekreačné, kultúr. činnosti	112,20	97%	-112,24	-97%	-8,99	-8%	124,45	108%	115,42	68,2%
57	Ostatné služby	13,62	172%	-13,62	-172%	-4,88	-62%	12,81	161%	7,93	35,9%
	Total	5 451,20	108%	-5 452	-108%	-817	-16%	5 869	116%	5 052	51,8%

Obr. 15: Rovnaký rast miezd a produktivity.

3.3 Zmena mzdovej kvóty

V predchádzajúcej časti sme analyzovali rast objemu miezd o 46% pre celé hospodárstvo. Aká je však zmena mzdovej kvóty, ktorú sme definovali ako podiel objemu miezd a pridanej hodnoty? Je zrejmé, že keď rástol objem produkcie, rástol aj objem pridanej hodnoty. Bol rast pridanej hodnoty väčší ako rast objemu miezd? Nasledujúci obrázok zobrazuje porovnanie zmien objemu miezd a pridanej hodnoty.

Zmena objemu miezd vs. zmena pridanej hodnoty								
		objem miezd (mil. eur)			pridaná hodnota (mil. eur)			rozdiel rastu pridanej h. a miezd
		2000	2005	Δ	2000	2005	Δ	
1	Produkty poľn., poľov. a služby	335	329	-2%	973	3 040	213%	214,2%
2	Produkty lesníctva	86	170	98%	233	725	211%	113,3%
3	Ryby, produkty rybolovu	0	1	139%	1	6	841%	701,6%
4	Čierne a hnedé uhlie	41	38	-8%	64	116	80%	88,1%
5	Ropa a zemný plyn	11	12	5%	88	157	79%	73,9%
6	Kovové rudy	6	4	-37%	11	20	79%	115,8%
7	Ostatné nerasty	37	36	-3%	67	221	232%	234,8%
8	Potravinárske výrobky	284	294	3%	793	3 656	361%	357,4%
9	Tabakové výrobky, služby	8	3	-65%	45	22	-50,6%	14,3%
10	Textilné výrobky	88	83	-5%	157	504	221%	226,2%
11	Odevné výrobky	111	150	35%	235	630	168%	133,0%
12	Koža, brašn. sedlár. výr.	62	81	31%	163	576	254%	223,2%
13	Výrobky z dreva a korku	90	116	29%	237	1 127	376%	347,0%
14	Celulóza, papier	72	67	-7%	333	1 155	247%	253,9%
15	Vydavateľstvo a tlač	85	89	4%	189	762	303%	299,3%
16	Koks, rafinérske ropné produkty	30	73	148%	233	2 957	1171%	1022,6%
17	Chemikálie, chemické výrobky	140	134	-4%	689	2 154	213%	217,1%
18	Výrobky z gumy a plastov	92	154	68%	241	1 847	668%	600,1%
19	Ost.nekovové minerál. výrobky	142	187	31%	409	1 659	305%	273,9%
20	Základné kovy	245	405	65%	693	4 695	578%	512,7%
21	Hotové kovové výrobky	170	291	71%	411	2 513	512%	440,1%
22	Stroje, zariadenia, i.n.	320	466	46%	586	3 531	502%	456,6%
23	Kancelárske stroje a počítače	6	46	615%	12	777	6179%	5564,3%
24	Elektrické stroje a prístroje, i.n.	158	295	87%	356	2 762	676%	589,5%
25	Rádiové, televízne zariad.	65	109	67%	142	2 168	1422%	1354,7%
26	Zdravotnícke, presné prístr.	57	91	60%	146	579	296%	235,4%
27	Motorové vozidlá	93	242	161%	409	6 933	1596%	1435,5%
28	Ostatné dopravné zariadenia	48	69	45%	77	451	482%	437,8%
29	Nábytok	55	129	135%	112	1 309	1066%	930,5%
30	Druhotné suroviny	3	8	143%	33	71	116%	-27,1%
31	El. energia, plyn, teplá voda	376	364	-3%	1 415	7 664	442%	444,8%
32	Výroba a rozvod vody	48	75	55%	126	286	128%	72,6%
33	Stavebné práce	549	937	71%	2 029	9 827	384%	313,7%
34	Predaj motorových vozidiel	103	195	88%	281	1 049	274%	185,5%
35	Veľkoobchod	584	897	54%	1 668	5 113	207%	153,0%
36	Maloobchod	582	574	-1%	1 273	3 489	174%	175,3%
37	Hotelové a reštauračné služby	182	229	26%	438	1 100	151%	125,5%
38	Pozemná doprava	452	664	47%	1 593	4 943	210%	163,6%
39	Vodná doprava	11	10	-13%	16	35	122%	135,3%
40	Vzdušná doprava	3	14	423%	3	251	9209%	8785,9%
41	Vedľajšie služby v doprave	69	141	106%	207	1 651	697%	590,4%
42	Služby pôšt a telekomunikácií	212	293	38%	771	2 306	199%	161,0%
43	Peňažníctvo a súvisiace služby	288	375	30%	500	2 125	325%	294,6%
44	Poisťovníctvo	80	98	22%	235	865	268%	245,5%
45	Pomoc. služby fin. sprostr.	20	40	103%	21	227	998%	895,0%
46	Služby v oblasti nehnuteľností	104	226	117%	2 607	4 923	88,9%	-28,4%
47	Prenájmom strojov	52	55	4%	306	659	115%	110,7%
48	Počítačové služby	141	319	127%	293	1 279	336%	209,2%
49	Výskum a vývoj	41	76	88%	60	165	177%	88,9%
50	Iné obchodné služby	522	848	63%	1 223	4 223	245,2%	182,7%
51	Verejná správa a obrana	814	1 463	80%	1 990	4 549	129%	48,9%
52	Školstvo	673	1 057	57%	998	1 904	91%	33,7%
53	Zdravotníctvo a sociál. star.	530	698	32%	990	2 200	122%	90,5%
54	Čistenie odpadových vôd	152	121	-20%	114	456	299%	319,1%
55	Činnosti členských organizácií, i.n	36	96	170%	12	236	1816%	1646,6%
56	Rekreačné, kultúr. činnosti	169	185	9%	322	1 454	352%	342,4%
57	Ostatné služby	22	48	115%	160	403	152%	37,1%
	Spolu	9 755	14 269	46%	27 788	110 503	298%	251,4%

Obr. 16: Porovnanie zmien objemu miezd a pridanej hodnoty 2000/2005.

Takmer vo všetkých komoditných kategóriách bol rast pridanej hodnoty vyšší ako rast objemu miezd. Najvýraznejší rozdiel sme zaznamenali pre kategóriu *Vzdušná doprava* (8786%) a *Kancelárske stroje a počítače* (5564%). Len v prípade dvoch druhov komodít bol rast pridanej hodnoty nižší ako rast objemu miezd, a to v kategórii *Druhotné suroviny* a *Služby v oblasti nehnuteľností*. V rámci celého hospodárstva bol rast pridanej hodnoty väčší o 251%.

Aj zmenu pridanej hodnoty možno rozložiť na faktory pomocou štrukturálnej dekompozície. Označme $(a_h)_j^t$ pridanú hodnotu na jednotku produkcie sektora j v čase t, teda

$$(a_h)_j^t = \frac{h_j^t}{x_j^t}. \tag{108}$$

Pridanú hodnotu v jednotlivých sektoroch v čase t, označenú $\mathbf{h^t}$, môžeme vyjadriť ako

$$\mathbf{h^t} = \mathbf{\hat{a_h}^t x^t} = \mathbf{\hat{a_h}^t L^t f^t} \tag{109}$$

a zmenu pridanej hodnoty môžeme rozložiť podľa vzoru (75):

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta h} = \frac{1}{2} & \underbrace{(\mathbf{\Delta \hat{a_h}})(\mathbf{L^0 f^0} + \mathbf{L^1 f^1})}_{\text{Zmena pridanej hodnoty na jednotku produkcie}} \\ + \frac{1}{2} & \underbrace{[\mathbf{\hat{a_h}^0 (\Delta L) f^1} + \mathbf{\hat{a_h}^1 (\Delta L) f^0}]}_{\text{Zmena technológie}} \\ + \frac{1}{2} & \underbrace{(\mathbf{\hat{a_h}^0 L^0} + \mathbf{\hat{a_h}^1 L^1})(\mathbf{\Delta f})}_{\text{Zmena konečnej spotreby}}. \end{aligned} \tag{110}$$

Výsledky uvedeného rozkladu sú zobrazené na Obrázku 17. Vo všetkých komoditných kategóriách okrem kategórie *Tabakové výrobky a služby* došlo k nárastu pridanej hodnoty, pričom tento nárast bol pozitívne ovplyvnený nielen rastovým efektom, ale aj efektom rastu pridanej hodnoty na jednotku produkcie. Negatívny efekt zmeny pridanej hodnoty na jednotku produkcie sme zaznamenali iba v prípade už spomínaných *Tabakových výrobkov a služieb* (kde bol negatívny aj efekt zmeny konečnej spotreby) a v kategórii *Kovové rudy*. Efekt zmeny v technológiách bol podobne ako v predošlom rozklade rôznorodý. Celkovo tento faktor pôsobil síce negatívne, ale s veľmi slabým účinkom.

	zmena pridanej hodnoty								
	Komodita	efekt zmeny prid.h. na jednotku produkcie	%	efekt zmeny technológie	%	efekt zmeny konečnej spotreby	%	Spolu	Percentuál na zmena
1	Produkty poľn., poľov. a služby	1 740,7	84,3%	-348,7	-16,9%	672,6	32,6%	2 064,5	212%
2	Produkty lesníctva	265,1	53,4%	-30,3	-6,1%	261,5	52,7%	496,3	213%
3	Ryby, produkty rybolovu	3,7	73,6%	0,4	8,4%	0,9	18,0%	5,0	843%
4	Čierne a hnedé uhlie	16,2	29,5%	-7,1	-12,8%	45,9	83,3%	55,1	86%
5	Ropa a zemný plyn	66,4	89,3%	-48,7	-65,5%	56,7	76,2%	74,3	84%
6	Kovové rudy	-3,5	-50,6%	0,1	1,1%	10,2	149,5%	6,8	62%
7	Ostatné nerasty	132,9	86,7%	-19,2	-12,5%	39,5	25,8%	153,2	230%
8	Potravinárske výrobky	2 368,4	83,3%	-99,5	-3,5%	574,6	20,2%	2 843,6	358%
9	Tabakové výrobky, služby	-22,1	93,5%	-0,7	2,9%	-0,9	3,6%	-23,7	-52%
10	Textilné výrobky	203,1	57,8%	30,9	8,8%	117,0	33,3%	351,0	224%
11	Odevné výrobky	406,0	100,9%	-6,4	-1,6%	2,6	0,7%	402,3	171%
12	Koža, brašn. sedlár. výr.	256,1	63,0%	15,0	3,7%	135,1	33,3%	406,2	250%
13	Výrobky z dreva a korku	597,2	67,2%	-1,5	-0,2%	292,6	32,9%	888,3	375%
14	Celulóza, papier	739,1	89,4%	-108,8	-13,2%	196,1	23,7%	826,4	248%
15	Vydavateľstvo a tlač	427,1	74,3%	-99,3	-17,3%	247,2	43,0%	575,0	304%
16	Koks, rafinérske ropné produkty	2 049,2	76,1%	20,4	0,8%	624,1	23,2%	2 693,7	1158%
17	Chemikálie, chemické výrobky	1 129,3	76,7%	-138,6	-9,4%	482,5	32,8%	1 473,2	214%
18	Výrobky z gumy a plastov	1 052,3	65,5%	19,0	1,2%	535,5	33,3%	1 606,7	668%
19	Ost.nekovové minerál. výrobky	886,2	71,2%	56,5	4,5%	302,4	24,3%	1 245,2	304%
20	Základné kovy	3 098,0	77,5%	-423,4	-10,6%	1 322,5	33,1%	3 997,1	577%
21	Hotové kovové výrobky	1 146,9	54,8%	11,9	0,6%	932,7	44,6%	2 091,5	509%
22	Stroje, zariadenia, i.n.	2 176,4	73,7%	-223,7	-7,6%	999,0	33,8%	2 951,7	503%
23	Kancelárske stroje a počítače	509,6	66,5%	-21,6	-2,8%	278,2	36,3%	766,2	6192%
24	Elektrické stroje a prístroje, i.n.	1 542,8	63,8%	7,3	0,3%	866,5	35,9%	2 416,6	679%
25	Rádiové, televízne zariad.	1 105,4	54,6%	101,1	5,0%	818,2	40,4%	2 024,7	1421%
26	Zdravotnícke, presné prístr.	159,0	35,9%	32,7	7,4%	250,8	56,7%	442,6	302%
27	Motorové vozidlá	4 393,6	67,4%	324,8	5,0%	1 796,7	27,6%	6 515,1	1594%
28	Ostatné dopravné zariadenia	318,3	86,1%	21,8	5,9%	29,7	8,0%	369,7	477%
29	Nábytok	832,7	69,6%	-35,6	-3,0%	399,6	33,4%	1 196,7	1066%
30	Druhotné suroviny	39,7	104,9%	-13,5	-35,8%	11,7	30,8%	37,8	115%
31	El. energia, plyn, teplá voda	4 793,7	77,3%	-556,1	-9,0%	1 965,5	31,7%	6 203,1	438%
32	Výroba a rozvod vody	155,3	96,8%	-29,8	-18,6%	34,9	21,7%	160,4	128%
33	Stavebné práce	5 118,9	65,5%	280,7	3,6%	2 417,4	30,9%	7 817,0	385%
34	Predaj motorových vozidiel	444,2	58,3%	-38,6	-5,1%	356,0	46,7%	761,7	271%
35	Veľkoobchod	2 832,9	82,4%	-364,9	-10,6%	970,1	28,2%	3 438,1	206%
36	Maloobchod	1 550,2	70,4%	87,4	4,0%	565,2	25,7%	2 202,8	173%
37	Hotelové a reštauračné služby	420,7	63,2%	-126,9	-19,1%	371,7	55,9%	665,5	152%
38	Pozemná doprava	3 167,0	95,0%	-978,4	-29,3%	1 146,3	34,4%	3 334,9	209%
39	Vodná doprava	9,9	48,9%	-1,0	-4,7%	11,3	55,8%	20,2	126%
40	Vzdušná doprava	147,8	59,8%	20,4	8,3%	79,0	31,9%	247,2	9185%
41	Vedľajšie služby v doprave	884,2	61,4%	100,8	7,0%	454,9	31,6%	1 439,9	695%
42	Služby pôšt a telekomunikácií	755,1	48,7%	-250,4	-16,1%	1 045,9	67,5%	1 550,6	201%
43	Peňažníctvo a súvisiace služby	820,6	50,3%	-43,0	-2,6%	853,3	52,3%	1 630,9	326%
44	Poisťovníctvo	223,9	35,6%	-72,7	-11,6%	478,3	76,0%	629,5	267%
45	Pomoc. služby fin. sprostr.	125,5	60,3%	-6,5	-3,1%	89,2	42,8%	208,2	1005%
46	Služby v oblasti nehnuteľností	1 107,8	48,3%	-666,6	-29,1%	1 851,1	80,8%	2 292,3	88%
47	Prenájmom strojov	346,9	98,1%	-218,8	-61,9%	225,5	63,8%	353,6	115%
48	Počítačové služby	473,4	47,8%	-177,5	-17,9%	694,8	70,1%	990,7	338%
49	Výskum a vývoj	79,2	74,9%	-24,5	-23,2%	50,9	48,2%	105,6	177%
50	Iné obchodné služby	2 230,5	74,1%	-275,1	-9,1%	1 053,0	35,0%	3 008,4	246%
51	Verejná správa a obrana	1 441,4	56,3%	-98,4	-3,8%	1 216,9	47,5%	2 559,9	129%
52	Školstvo	221,4	24,7%	13,3	1,5%	660,5	73,8%	895,2	90%
53	Zdravotníctvo a sociál. star.	723,9	59,7%	-15,2	-1,3%	503,1	41,5%	1 211,8	122%
54	Čistenie odpadových vôd	194,8	56,8%	23,3	6,8%	124,8	36,4%	342,8	300%
55	Činnosti členských organizácií, i.n.	180,1	80,5%	-23,7	-10,6%	67,3	30,1%	223,7	1814%
56	Rekreačné, kultúr. činnosti	720,2	64,1%	-27,5	-2,4%	431,7	38,4%	1 124,5	349%
57	Ostatné služby	160,1	66,2%	-46,2	-19,1%	127,9	52,9%	241,8	151%
	Total	56 965,26	69%	-4 500,34	-5%	30 147,98	36%	82 612,89	297%

Obr. 17: Rozklad zmeny pridanej hodnoty.

V rámci celého hospodárstva narástla pridaná hodnota o 297%. Najprudší percentuálny rast pozorujeme v kategórii *Vzdušná doprava* (9185%) a *Kancelárske stroje a počítače* (6192%) a najväčší absolútny nárast nastal v kategórii *Stavebné práce* (7817 mil. eur), *Motorové vozidlá* (6515 mil. eur) a *El. energia, plyn, teplá voda* (6203 mil. eur).

Nasledujúci obrázok zobrazuje zmenu mzdovej kvóty v jednotlivých komoditných kategóriách:

Zmena mzdovej kvóty								
1	Produkty poľn., poľov. a služby	-68,5%	20	Základné kovy	-75,6%	39	Vodná doprava	-60,9%
2	Produkty lesníctva	-36,4%	21	Hotové kovové výrobky	-72,0%	40	Vzdušná doprava	-94,4%
3	Ryby, produkty rybolovu	-74,6%	22	Stroje, zariadenia, i.n.	-75,8%	41	Vedľajšie služby v doprave	-74,1%
4	Čierne a hnedé uhlie	-48,8%	23	Kancelárske stroje a počítače	-88,6%	42	Služby pôšt a telekomunikácií	-53,8%
5	Ropa a zemný plyn	-41,4%	24	Elektrické stroje a prístroje, i.n.	-75,9%	43	Peňažníctvo a súvisiace služby	-69,3%
6	Kovové rudy	-64,7%	25	Rádiové, televízne zariad.	-89,0%	44	Poisťovníctvo	-66,8%
7	Ostatné nerasty	-70,7%	26	Zdravotnícke, presné prístr.	-59,5%	45	Pomoc. služby fin. sprostr.	-81,5%
8	Potravinárske výrobky	-77,6%	27	Motorové vozidlá	-84,6%	46	Služby v oblasti nehnuteľností	15,1%
9	Tabakové výrobky, služby	-28,9%	28	Ostatné dopravné zariadenia	-75,2%	47	Prenájmom strojov	-51,5%
10	Textilné výrobky	-70,4%	29	Nábytok	-79,8%	48	Počítačové služby	-48,0%
11	Odevné výrobky	-49,5%	30	Druhotné suroviny	12,6%	49	Výskum a vývoj	-32,1%
12	Koža, brašn. sedlár. výr.	-63,0%	31	El. energia, plyn, teplá voda	-82,1%	50	Iné obchodné služby	-52,9%
13	Výrobky z dreva a korku	-72,9%	32	Výroba a rozvod vody	-31,9%	51	Verejná správa a obrana	-21,4%
14	Celulóza, papier	-73,2%	33	Stavebné práce	-64,8%	52	Školstvo	-17,7%
15	Vydavateľstvo a tlač	-74,3%	34	Predaj motorových vozidiel	-49,6%	53	Zdravotníctvo a sociál. star.	-40,7%
16	Koks, rafinérske ropné produkty	-80,5%	35	Veľkoobchod	-49,9%	54	Čistenie odpadových vôd	-80,0%
17	Chemikálie, chemické výrobky	-69,4%	36	Maloobchod	-64,0%	55	Činnosti členských organizácií, i.n.	-85,9%
18	Výrobky z gumy a plastov	-78,1%	37	Hotelové a reštauračné služby	-49,9%	56	Rekreačné, kultúr. činnosti	-75,8%
19	Ost.nekovové minerál. výrobky	-67,6%	38	Pozemná doprava	-52,7%	57	Ostatné služby	-14,7%
				-63,2%				

Obr. 18: Zmena mzdovej kvóty.

V rámci celého hospodárstva došlo v roku 2005 k výraznému poklesu mzdovej kvóty až o 63% oproti roku 2000 (absolútna zmena o 22 percentuálnych bodov z 35% na 13%). Najvýraznejší je tento pokles v kategórii *Vzdušná doprava* (-94,4%), *Rádiové, televízne zariad.* (-89%) a *Kancelárske stroje a počítače* (-88,6%).

Z medzinárodného prehľadu vyplýva, že vyššej ekonomickej výkonnosti krajiny väčšinou zodpovedá vyššia mzdová kvóta. Nárast ekonomickej úrovne SR bol však spojený s poklesom mzdovej kvóty. Slovensko spolu s Poľskom, Tureckom, Gréckom a Mexikom tvoria skupinu krajín s neobvyklou hodnotou mzdovej kvóty. Za nízkou mzdovou kvótou v SR môže byť slabý rast zamestnanosti - aj v dôsledku silného rastu produktivity práce, a slabý rast mzdovej hladiny. Riskantné na takejto nízkej a stále klesajúcej mzdovej kvóte je, že pri súčasnom modeli fungovania systému sociálneho zabezpečenia spôsobuje jeho nestabilitu. Príjmy systému sociálneho zabezpečenia boli v sledovanom období závislé od vývoja miezd.

A štruktúrna zmena v neprospech miezd je limitujúcim faktorom pre rast príjmov systému sociálneho zabezpečenia. Ak nie je vo výhľade zvrat takejto štruktúrnej zmeny príjmov, je to výzva pre definovanie takého modelu sociálneho zabezpečenia, ktorý nie je závislý od tých príjmov, ktorých váha klesá ([13]).

Na druhej strane je dôležité zvyšovať produktivitu práce z dôvodu udržania príťažlivosti pre zahraničné investície. Teda z pohľadu konkurencieschopnosti je pozitívom, že rast produktivity práce je väčší ako rast miezd.

Podobné štúdie existujú aj pre USA za obdobie 1982-1997 ([3]), kde takisto došlo k poklesu mzdovej kvóty a rastu produktivity práce, pričom najvplyvnejším faktorom bol rastový efekt.

Záver

Jednou z možných príčin súčasných ekonomických problémov v Európskej Únii je nárast rozdielov konkurencieschopnosti medzi členmi EU. Z hľadiska udržania konkurenčnej schopnosti je dôležité dosiahnuť primeraný rozdiel medzi rastom produktivity práce a rastom mzdových nákladov.

Cieľom tejto práce bola analýza zmien produktivity práce a mzdovej kvóty, resp. miezd, pre Slovenskú ekonomiku v období 2000-2005. Keďže konkurencieschopnosť ekonomiky nie je daná jednoduchým súčtom výkonnosti jednotlivých odvetví, ale je výsledkom komplexnej siete vzájomných vzťahov medzi nimi, použili sme na analýzu priamych aj nepriamych vzťahov, otvorený statický Leontiefov model, ktorý tieto väzby zahŕňa.

Pomocou štrukturálnej dekompozície sme rozložili zmenu objemu miezd na efekt zmeny priemernej ročnej mzdy, zmeny produktivity práce, zmeny v technológiách výroby a efekt zmeny konečného dopytu, pričom pozitívny efekt zmeny priemerných ročných miezd na rast objemu miezd bol vo veľkej miere utlmený negatívnym efektom koeficientu pracnosti, a teda rastom produktivity práce. Efekt zmeny technológii pôsobil tiež negatívne, hlavným "ťahúňom"zvyšovania objemu miezd v hospodárstve bol rast konečnej spotreby. Objem miezd v rámci celého hospodárstva narástol o 46%. Aj napriek rastu objemu miezd sme zaznamenali výrazný pokles mzdovej kvóty, definovanej ako podiel objemu miezd na pridanú hodnotu, pretože pridaná hodnota rástla oveľa rýchlejšie takmer vo všetkých komoditných kategóriách. Rast pridanej hodnoty bol pozitívne ovplyvnený rastom konečnej spotreby a pridanej hodnoty na jednotku produkcie, negatívny, avšak veľmi slabý vplyv, mal efekt zmeny v technológiách.

Otázkou pre ďalší výskum je, ako by sa zmeny miezd, ako cena za primárny faktor - práca, premietli do zmien cien jednotlivých produktov. Základom tejto analýzy by bol cenový input - output model.

Literatúra

[1] Miller, R.– Blair, P. 2009. *Input - Output Analysis*: Foundation and Extension (second edition). Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK, ISBN-13 978-0-511-65103-8.

[2] Nikaido, H. 1968. *Convex structures and economic theory*, Academic Press, New York, UK

[3] Dietzenbacher, E. – Lahr, Michael L. – Los, B. Ekonomický článok: *The decline in labor compensation's share of GDP: a structural decomposition analysis for the United States*, 1982 to 1997

[4] Lábaj, M. – Luptáčik, M. – Rumpelová, D. 2008. Ekonomický článok: *Structural Interdependencies in the Slovak Economy Based On Input-Output Analysis*

[5] Leontief, W. 1951. *The Structure of American Economy , 1919-1939: An Empirical Application of Equilibrium Analysis*, New York, Oxford University Press

[6] Hawkins, D. – Simon, H.A. 1949. *Note:Some conditions of mscroeconomic stability*, Econometrica 17, No.3,4

[7] *Nariadenie Európskeho Parlamentu a Rady o Európskom systéme národných a regionálnych účtov v Európskej únii*, Príloha A/Kapitola 09, Brusel 2010, http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=COM:2010 :0774%2859%29:FIN:SK:PDF

[8] website: http://epp.eurostat.ec.europa.eu/cache/ITY_OFFPUB/KS-RA-07-013/EN/KS-RA-07-013-EN.PDF

[9] Husár, J. *Tabuľka medziodvetvových vzťahov a bázický input - output model* http://www.fem.uniag.sk/cvicenia/ksov/husar/HUSAR%20MAKRO.doc.

[10] Vavrla, L. – Rojíček, M. *Sestavování symetrických input - output tabulek a jejich aplikace*
http://panda.hyperlink.cz/cestapdf/pdf06c1/vavrla.pdf.

[11] Thage, B. 2002. *Symmetric Input-Output Tables and Quality Standards for Official Statistics*. Montreal, Canada.
http://io2002conference.uqam.ca/abstracts_papers/new16janv03/thage_bent.doc

[12] Štatistický úrad Slovenskej republiky
http://portal.statistics.sk/showdoc.do?docid=1924

[13] Morvay, K. 2012. *Štruktúrne špecifiká vývoja zamestnanosti a príjmov v SR a ich súvislosti s povahou ekonomického rastu*. Ekonomický ústav SAV, Bratislava 2012, ISSN 1337 - 5598 (elektronická verzia)
http://ekonom.sav.sk/uploads/journals/217_wp43_morvay_karol_2012.pdf

[14] Luptáčik, M. 2012. *Structures and Interdependencies of the Austrian Economy: Input-Output Analysis*, prednášky zo Seminára z ekonómie