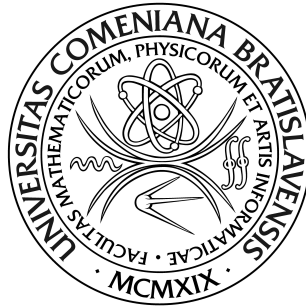


UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



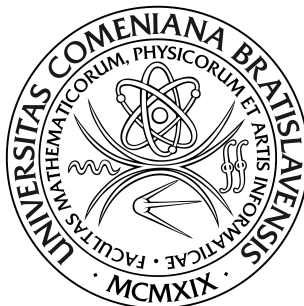
KALIBRÁCIA KONVERGENČNÉHO
MODELU ÚROKOVÝCH MIER
VAŠÍČKOVHO TYPU

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2013

BC. SIMONA CHATTOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



KALIBRÁCIA KONVERGENČNÉHO
MODELU ÚROKOVÝCH MIER
VAŠÍČKOVHO TYPU

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Evidenčné číslo: 9bf58c65-a546-4e68-84aa-261f79294fc0



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Simona Chattová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Kalibrácia konvergenčného modelu úrokových mier Vašíčkovho typu

Cieľ: Pri kalibrácii modelov úrokových mier sa dajú uvažovať dve kritériá: hodnota funkcie vierohodnosti a kvalita fitovania výnosových kriviek. V závislosti od toho, ktoré kritérium považujeme za dôležitejšie, môžeme ho optimalizovať v prvom kroku, a zostávajúce parametre určiť na základe druhého kritéria. Cieľom práce bude kalibrovať oboma spôsobmi (t. j. oboma výbermi prioritného kritéria) konvergenčný model Vašíčkovho typu - odvodiť potrebné účelové funkcie, navrhnúť spôsob ich optimalizácie a aplikovať ho na reálne dáta.

Vedúci: RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 25.01.2012

Dátum schválenia: 26.01.2012
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Abstrakt

CHATTOVÁ, Simona : **Kalibrácia konvergenčného modelu úrokových mier Vašíčkovho typu**. [Diplomová práca] - Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. - Vedúci diplomovej práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., - Bratislava 2013 /60 s./

Táto diplomová práca sa zaoberá kalibráciou konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou. Ide o dvojfaktorový model úrokovej miery, ktorý popisuje dynamiku európskej úrokovej miery (úrokovej miery v rámci eurozóny), o ktorej predpokladáme, že ovplyvňuje vývoj domácej úrokovej miery, t.j. úrokovej miery krajiny, ktorá sa má onedlho stať členským štátom eurozóny. V práci navrhujeme metódu kalibrácie daného modelu, ktorá súčasne využíva časový rad hodnôt krátkodobej úrokovej miery aj výnosové krivky a teda berie do úvahy dve hodnotiace kritéria - hodnotu vierohodnostnej funkcie a kvalitu fitovania výnosových kriviek (t.j. váženú strednú kvadratickú chybu medzi teoretickými a trhovými výnosovými krivkami). Odvodíme príslušné účelové funkcie, určíme spôsob ich optimalizácie a aplikujeme navrhnutú metódu na reálne trhové dáta.

Kľúčové slová : dlhopisy • časová štruktúra úrokových mier • okamžitá úroková miera • konvergenčný model Vašíčkovho typu • kalibrácia

Abstract

CHATTOVÁ, Simona : **Calibration of the convergence model of interest rates of Vasicek type**. [Master's thesis] - Comenius University in Bratislava. Faculty of mathematics, physics and informatics; Department of applied mathematics and statistics. - Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., - Bratislava 2013. /60 pp./

This work deals with the calibration of the convergence model of interest rates of Vasicek type with zero correlation. It is a two factor interest rate model that describes the dynamics of the european interest rate which is assumed to affect the development of the domestic interest rate (i.e. interest rate of a country entering the eurozone). The aim of this work is to provide new approach to estimation of the parameters in the given model - we propose a method, which uses time series of short-term interest rates and yield curves, and thus takes into account two criteria - likelihood function value and quality of yield curves fit (i.e. weighted mean square error between theoretical and market yield curves). We derive the cost functions, determine how to optimize them and apply the proposed method to real market data.

Keywords : bonds • term structure of interest rates • short rate • convergence model of Vasicek type • calibration

Obsah

Úvod	1
1 Teoretické základy modelovania úrokových mier	3
1.1 Dlhopisy a časová štruktúra úrokových mier	3
1.2 Okamžitá úroková miera	5
1.3 Deriváty úrokovej miery	5
1.4 Stochastické procesy a Itóova lema	6
2 Klasifikácia modelov úrokových mier	9
2.1 Jednofaktorové rovnovážne modely úrokových mier	10
2.1.1 Ceny dlhopisov v jednofaktorových modeloch úrokových mier .	12
2.1.2 Ceny dlhopisov v jednofaktorovom Vašíčkovom modeli	14
2.2 Pojem reálnej a rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miery	16
2.3 Dvojfaktorové rovnovážne modely úrokových mier	17
2.3.1 Ceny dlhopisov v dvojfaktorových modeloch úrokových mier .	19
3 Ako odhadovať parametre modelov úrokových mier	21
3.1 Metóda maximálnej vierohodnosti na odhad parametrov modelov úrokových mier	21
3.1.1 Podmienené rozdelenie okamžitej úrokovej miery pre Vašíčkov model	22
3.1.2 Metóda maximálnej vierohodnosti na odhad parametrov Vašíčkovho modelu	24
3.2 Kalibrácia modelu založená na minimalizácii miery vzdialenosti reálnej a odhadovanej výnosovej krivky	26
4 Konvergenčné modely úrokovej miery	28
4.1 Konvergenčný model Vašíčkovho typu	29
4.2 Konvergenčný model Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou	31
5 Odhad parametrov konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou	34
5.1 Odhad parametrov procesu pre európsku úrokovú mieru	34
5.1.1 Podmienené rozdelenie európskej úrokovej miery	34

5.1.2	Maximálne vierohodný odhad parametrov procesu pre európsku úrokovú mieru	35
5.1.3	Odhad parametrov procesu pre európsku úrokovú mieru na základe minimalizácie miery vzdialenosti reálnej a odhadovanej výnosovej krivky	35
5.2	Odhad trhovej ceny rizika v prípade jednofaktorového Vašíčkovho modelu	35
5.3	Odhad parametrov procesu pre domácu úrokovú mieru	36
5.3.1	Podmienené rozdelenie domácej úrokovej miery	36
5.3.2	Maximálne vierohodný odhad parametrov procesu pre domácu úrokovú mieru	39
5.3.3	Odhad parametrov procesu pre domácu úrokovú mieru na základe minimalizácie miery vzdialenosti reálnej a odhadovanej výnosovej krivky	41
5.4	Odhad trhovej ceny rizika pre domácu úrokovú mieru v prípade konvergenčného modelu Vašíčkovho typu	42
6	Kalibrácia vybraných modelov úrokových mier na reálnych dátach	44
6.1	Výber dát	44
6.2	Kalibrácia jednofaktorového Vašíčkovho modelu	45
6.3	Kalibrácia konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou	51
	Záver	58
	Literatúra	59

Úvod

Za posledné dve desaťročia sa úrokové miery a oceňovanie derivátov od nich odvodených stali predmetom intenzívneho výskumu. V súčasnosti sa na finančných trhoch obchoduje s rôznymi derivátmi úrokových mier, a preto sú analyzované modely popisujúce vývoj úrokových mier rozhodujúce z viacerých dôvodov, vrátane určovania cien derivátov úrokových mier, ale aj kvantifikovania a riadenia finančného rizika.

V tejto diplomovej práci sa budeme zaoberať kalibráciou konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou, ktorý patrí do triedy dvojfaktorových modelov okamžitej úrokovej miery. Daný model zachytáva vývoj európskej úrokovej miery, o ktorej sa predpokladá, že ovplyvňuje vývoj domácej úrokovej miery, t.j. úrokovej miery krajiny, ktorá sa v krátkom čase stane členským štátom eurozóny. Vývoj európskej úrokovej miery však nezávisí od vývoja domácej úrokovej miery. Cieľom práce je pre daný model navrhnúť metódu kalibrácie, ktorá súčasne zohľadňuje dve kritéria - hodnotu funkcie vierohodnosti a kvalitu fitovania výnosových kriviek (t.j. váženú strednú kvadratickú chybu medzi teoretickými a trhovými výnosovými krivkami). V závislosti od toho, ktoré kritérium považujeme za dôležitejšie, optimalizujeme ho v prvom kroku a zostávajúce parametre určíme na základe druhého kritéria.

Práca je rozdelená na 6 častí. Prvá kapitola predstavuje úvod do problematiky modelovania úrokových mier, vymedzuje pojmy dlhopisu, časovej štruktúry úrokovej miery a okamžitej úrokovej miery. Taktiež obsahuje prehľad hlavných pojmov a nástrojov stochastického kalkulu, ktoré budeme v tejto práci používať. Základným predpokladom pri modelovaní úrokovej miery je totiž fakt, že jej vývoj je charakterizovaný stochastickým procesom.

Druhá časť práce je venovaná klasifikácii modelov úrokových mier. Podrobnejšie sa v nej zaoberáme jednofaktorovými a dvojfaktorovými rovnovážnymi modelmi úrokových mier, ich formuláciou v reálnej a rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere a určením cien dlhopisov v týchto modeloch.

Tretia kapitola dáva odpoveď na otázku, akým spôsobom sa dajú odhadovať parametre modelov úrokových mier. Sú v nej analyzované dva prístupy v rámci kalibrácie jednofaktorového Vašíčkovho modelu a to odhad parametrov z časového radu krátkodobej úrokovej miery metódou maximálnej vierohodnosti a prístup zameraný na čo najlepšiu zhodu trhových a modelom implikovaných výnosových kriviek.

V kapitole 4 charakterizujeme konvergenčné modely úrokových mier, pričom sa zameriame na konvergenčný model Vašíčkovho typu s nulovou aj nenulovou koreláciou

a popíšeme odvodenie riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice pre ceny domácich dlhopisov implikované danými modelmi.

Odhad parametrov konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou je náplňou piatej kapitoly, v ktorej sú odvodené odhady parametrov procesu pre európsku aj domácu úrokovú mieru s využitím dvoch prístupov podrobnejšie popísaných v kapitole 3.

V záverečnej časti práce aplikujeme navrhnuté metódy kalibrácie jednofaktorového Vašíčkovho modelu a konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou na reálne trhové dáta a prezentujeme získané výsledky.

Kapitola 1

Teoretické základy modelovania úrokových mier

V úvode tejto práce definujeme základné pojmy týkajúce sa modelovania úrokových mier a to pojem dlhopisu, časovej štruktúry úrokových mier a okamžitej úrokovej miery. Uvedieme aj základné pojmy a nástroje stochastického kalkulu. Podrobnejšie informácie nájde čitateľ v [16].

1.1 Dlhopisy a časová štruktúra úrokových mier

Dlhopis je najjednoduchším derivátom úrokovej miery. Ide o cenný papier, s ktorým je spojené právo majiteľa požadovať splácanie dlžnej sumy (nominálnej hodnoty) a vyplácanie výnosov z nej (kupónov) v presne stanovenom čase. Dlhopis teda pre jeho vypisovateľa predstavuje určitú formu pôžičky.

Bezkupónový dlhopis s jednotkovou nominálnou hodnotou sa nazýva *diskontný dlhopis*. Pod dlhopisom budeme ďalej rozumieť práve diskontný dlhopis.

Označme $P(t, T)$ cenu dlhopisu v čase t uzavretia kontraktu so splatnosťou v čase T . Nech výraz $R(t, T)$ označuje spojitý úrok na obdobie od t do T . Potom pre cenu dlhopisu platí

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}.$$

Ak teda poznáme ceny dlhopisov, môžeme určiť krivku časovej štruktúry úrokovej miery využitím vzťahu

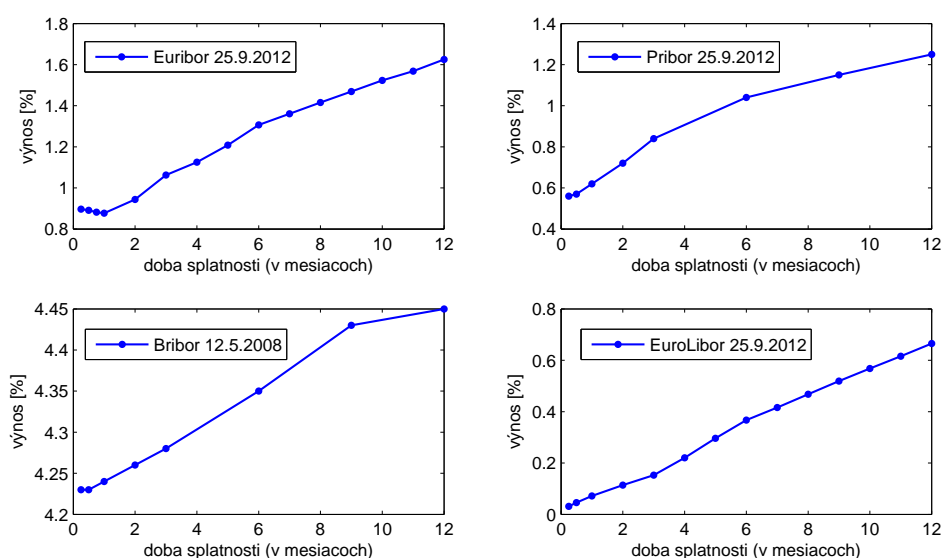
$$R(t, T) = -\frac{\ln [P(t, T)]}{T - t}. \quad (1.1)$$

Časová štruktúra úrokovej miery vyjadruje závislosť úrokovej miery v čase t od doby splatnosti dlhopisu T . Taktiež môžeme časovú štruktúru úrokovej miery ekvivalentne definovať ako funkcionálnu závislosť medzi výnosom dlhopisu a časom $T - t$ zostávajúcim do splatnosti daného dlhopisu. Preto sa krivka časovej štruktúry úrokovej miery označuje aj ako *výnosová krivka*, resp. *krivka výnosov pre bezkupónové dlhopisy*.

Tvar reálnej výnosovej krivky môže byť rôzny. Táto krivka je obvykle *rastúca*, keďže na dlhšie obdobie sa požičiava s vyšším úrokom. Pri očakávaní poklesu hodnôt úrokových mier je výnosová krivka *klesajúca*.

Dlhopisy s dlhšou maturitou teda nemusia mať nutne vyššiu úrokovú mieru a výnosová krivka môže mať aj nemonotónny charakter.

Obrázok 1.1 znázorňuje príklady časovej štruktúry úrokových sadziieb Euribor (Euro Interbank Offered Rate), Pribor (Prague Interbank Offered Rate), Brabor (Bratislava Interbank Offered Rate) a Libor (London Interbank Offered Rate) denominovaný v eurách (EuroLibor).



Obr. 1.1: Príklady časovej štruktúry úrokovej miery

*Euribor*¹ (*Euro Interbank Offered Rate*) je úroková sadzba, za ktorú si banky na medzibankovom trhu v rámci eurozóny požičiavajú peniaze. Táto medzibanková úverová sadzba sa určuje pre rôzne doby splatnosti a to 1, 2 alebo 3 týždne a 1 až 12 mesiacov. Je upravovaná na dennej báze a vypočíta sa ako aritmetický priemer odhadov úrokov referenčných bánk, za ktoré sú tieto banky ochotné platiť za pôžičky od iných bánk, pričom štvrtina najvyšších a najnižších sadziieb sa vynecháva.

Sadzba Euribor je kľúčová pre stanovovanie úrokov v Európskej menovej únii. Napríklad úver s variabilnou úrokovou sadzbou môže byť kombináciou fixnej zložky a sadzby Euribor.

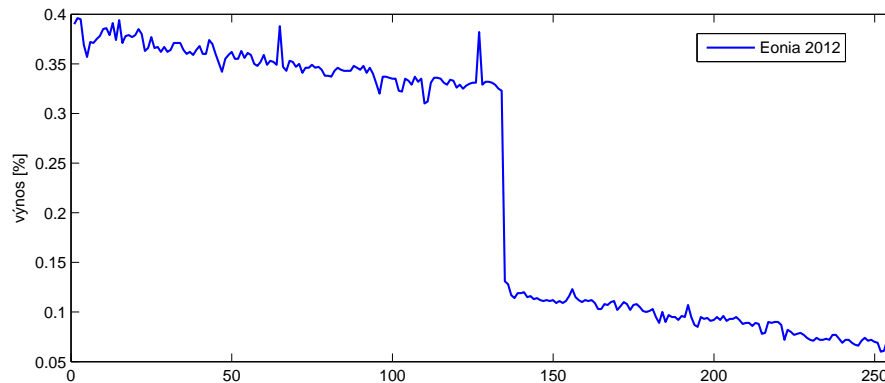
¹spracované podľa [25]

1.2 Okamžitá úroková miera

Okamžitá (označovaná aj ako *krátkodobá*) úroková miera $r(t)$ predstavuje začiatok krivky časovej štruktúry úrokovej miery a je definovaná vzťahom

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T).$$

Ide o bod reprezentujúci úrokovú mieru platnú na veľmi krátke obdobie. Nie je to však veličina, ktorá na trhu priamo existuje, preto ju musíme niečím nahradiť. Časovo má k okamžitej úrokovej miere najbližšie sadzba *EONIA* (*Euro Overnight Index Average*), ktorá predstavuje jednodňovú medzibankovú úverovú sadzbu v rámci eurozóny. V praxi sa však short rate zvykne aproximovať týždennou, príp. mesačnou úrokovou mierou ².



Obr. 1.2: Priebeh jednodňovej úrokovej sadzby EONIA za rok 2012

Modely krátkodobej úrokovej miery (tzv. *short-rate modely*) popisujú budúci vývoj úrokových mier na základe budúceho vývoja krátkodobej úrokovej miery.

1.3 Deriváty úrokovej miery

Hodnoty derivátov úrokovej miery závisia od hodnoty úrokovej miery v určitom čase, príp. od hodnôt počas určitého časového intervalu. Existuje veľa obchodovaných finančných derivátov, ktorých hodnota závisí od vývoja úrokovej miery. Okrem už spomínaného dlhopisu sú to opcie na dlhopisy, swapy, deriváty typu cap a floor a mnohé iné. Deriváty úrokovej miery sa používajú na zaistenie voči fluktuáciám vo vývoji úrokovej miery a detailnejší popis ich vlastností a spôsobov oceňovania sa dá nájsť v [16], [17].

²napr. autori práce [4] používajú ako proxy short rate výnosy štátnych pokladničných poukážok so splatnosťou 1 mesiac, zatiaľ čo v práci [2] sú použité výnosy 3-mesačných štátnych pokladničných poukážok, v článku [1] je short rate aproximovaná eurodolarovou sadzbu s dobou splatnosti 1 týždeň

1.4 Stochastické procesy a Itóova lema

Základným predpokladom pri modelovaní úrokovej miery je fakt, že dynamika úrokovej miery je charakterizovaná stochastickým procesom. Vývoj hodnôt úrokovej miery sa totiž nedá popísať deterministickou funkciou.

V tejto časti práce uvidíme základy stochastického kalkulu, ktorý sa využíva pri oceňovaní derivátov úrokovej miery, pričom vychádzame z [16], [18].

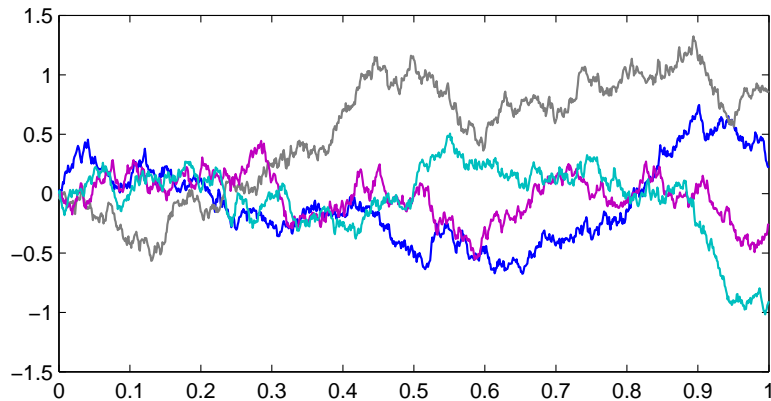
Definícia 1.4.1. *Stochastický proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je t -parametrický systém náhodných premenných X_t definovaných na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{F}, P) .*

Vo finančnej matematike sú modely krátkodobej úrokovej miery obvykle formulované v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice. Ide o diferenciálnu rovnicu, v ktorej jeden alebo viacero členov je stochastickým procesom. Základným typom stochastického procesu je tzv. Wienerov proces, z ktorého sú odvodené mnohé ďalšie.

Definícia 1.4.2. *Wienerov proces $\{W_t, t \geq 0\}$ je stochastický proces s nasledujúcimi vlastnosťami:*

- s pravdepodobnosťou 1 sú trajektórie tohto procesu spojité a $W(0) = 0$,
- náhodná premenná $W(t)$ má $N(0, t)$ rozdelenie,
- a pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$ sú prírastky $W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ nezávislými náhodnými premennými.

Na obrázku 1.3 je znázornených niekoľko realizácií Wienerovho procesu.



Obr. 1.3: Realizácie Wienerovho procesu

Definícia 1.4.3. *Nech pre merateľnú funkciu $f : \langle a, b \rangle \rightarrow R$ platí $\int_a^b f^2(y)dy < \infty$. Potom integrál*

$$\int_a^b f(y)dw(y) := \lim_{v \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(y_i) (w(y_{i+1}) - w(y_i)),$$

kde $v = \max(y_{i+1} - y_i)$ je norma delenia $a = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b$ intervalu $\langle a, b \rangle$ a $\{w(y), y \geq 0\}$ je Wienerov proces, sa nazýva Itóov integrál.

Nasledujúca veta charakterizuje Itóov integrál pre merateľnú funkciu reálnej premennej ako náhodnú premennú s normálnym rozdelením.

Veta 1.1. *Nech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow R$ je spojitá funkcia. Potom platí*

$$\int_a^b f(t)dw_t \sim N\left(0, \int_a^b f^2(t)dt\right),$$

to znamená, že platia nasledujúce rovnosti

$$\begin{aligned} E\left(\int_a^b f(t)dw_t\right) &= 0, \\ E\left(\left[\int_a^b f(t)dw_t\right]^2\right) &= \int_a^b f^2(t)dt. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Rovnosť (1.2) popisuje vlastnosť Itóovho integrálu, ktorá sa označuje ako tzv. Itóova izometria a v tejto práci sa použije na výpočet variancie stochastického procesu.

Na určenie diferenciálu funkcie stochastického procesu sa používa *Itóova lema*, ktorá vyjadruje vzťah medzi malou zmenou hodnoty funkcie náhodnej premennej a malou zmenou hodnoty samotnej náhodnej premennej.

Veta 1.2. *(Jednorozmerná Itóova lema). Nech funkcia x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw.$$

Nech $f \in C^2$, $f(x, t) : R \times \langle 0, \infty \rangle \rightarrow R$. Potom pre diferenciál funkcie f platí

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma(x, t)\frac{\partial f}{\partial x}dw.$$

Itóova lema teda dáva odpoveď na otázku, ako vyzerá stochastická diferenciálna rovnica popisujúca vývoj funkcie $f(x, t)$ v prípade, že premenná x je riešením inej zadanej stochastickej diferenciálnej rovnice.

Viacrozmerná verzia Itóovej lemy je sformulovaná v nasledujúcej vete.

Veta 1.3. (*Viacrozmerná Itóova lema*).

Nech vektor premenných $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ splňa nasledujúcu sústavu stochastických diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} dX_1 &= \mu_1(X, t)dt + \sigma_{11}(X, t)dw_1 + \dots + \sigma_{1m}(X, t)dw_m \\ &\vdots \\ dX_n &= \mu_n(X, t)dt + \sigma_{n1}(X, t)dw_1 + \dots + \sigma_{nm}(X, t)dw_m, \end{aligned}$$

kde $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ je vektor Wienerových procesov, ktorých prírastky sú navzájom nezávislé, t.j.

$$E(dw_i dw_j) = 0 \quad \text{pre } i \neq j, \quad E[(dw_i)^2] = dt.$$

Nech $f \in \mathcal{C}^2$, $f(X, t) : R^n \times (0, \infty) \rightarrow R$. Potom diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + (\nabla_X f)^T dX + \frac{1}{2} (dX)^T (\nabla_X^2 f) dX,$$

pričom $\nabla_X f$ resp. $\nabla_X^2 f$ predstavujú gradient resp. Hessovu maticu funkcie f vzhľadom na premenné X_1, X_2, \dots, X_n a zároveň

$$(dw_i)(dw_j) = \delta_{ij} dt.$$

Naviac členy rádu $(dt)^2, (dw_i)(dt)$ sú zanedbateľné v porovnaní s ostatnými členmi, ktoré vystupujú vo vzťahu pre df .

Kapitola 2

Klasifikácia modelov úrokových mier

V rámci modelovania úrokových mier existujú dva základné prístupy a teda rozlišujeme dva základné typy modelov:

- *bezarbitrážne modely* – tieto modely sú založené na princípe vylúčenia arbitráže, a preto vychádzajú zo súčasnej krivky časovej štruktúry úrokovej miery, parametre v týchto modeloch sú teda funkciami času,
- *rovnovážne modely* – tieto modely nepoužívajú aktuálnu výnosovú krivku ako vstupnú informáciu, ale aktuálne úrokové miery získame ako výstup modelu, v takomto prípade však dochádza k nekonzistencii medzi skutočnými (trhovými) a modelovanými úrokovými mierami v čase zostavovania modelu.

Modely krátkodobých úrokových mier popisujú časovú štruktúru úrokových mier a sú obvykle formulované v tvare **stochastickej diferenciálnej rovnice** pre **okamžitú úrokovú mieru**, o ktorej predpokladáme, že je funkciou konečného počtu náhodných faktorov.

Na základe počtu náhodných faktorov, pomocou ktorých modelujeme krátkodobú úrokovú mieru, rozlišujeme *jednofaktorové* a *viacfaktorové* modely. Voľba modelu úrokovej miery závisí od toho, ktoré z vlastností úrokovej miery sú pre konkrétne ocenenie dôležité. Avšak v prípade príliš zložitých modelov vznikajú problémy s oceňovaním derivátov úrokových mier.

V praxi je vhodné pracovať s modelom, ktorý spĺňa predovšetkým tieto vlastnosti

- jednoduchosť a z nej vyplývajúca prijateľná výpočtová náročnosť,
- čo najlepšia zhoda s reálnymi dátami.

Na druhej strane je vhodné požadovať, aby úroková miera nebola záporná ani nenadobúdala veľmi veľké hodnoty, a teda disperzia by mala byť v súlade s očakávaniami možných hodnôt. Ďalej sa aj na základe historických časových radov dá očakávať, že úrokové miery sú z dlhodobého hľadiska priťahované k nejakej dlhodobej priemernej úrovni, čo znamená, že príliš vysoké úrokové miery majú tendenciu klesať a naopak,

príliš nízke úrokové miery stúpajú. Vo všeobecnosti tiež platí, že volatility úrokových mier rozličných maturít sú rôzne. Úrokové miery platné na kratšie obdobia sa totiž zvyčajne vyznačujú výraznejšími fluktuáciami.

Podrobnejšie informácie týkajúce sa rôznych modelov úrokových mier sa dajú nájsť v knihách [3], [9], [13].

2.1 Jednofaktorové rovnovážne modely úrokových mier

Samotný názov jednofaktorové modely vychádza z toho, že v týchto modeloch je zahrnutý iba jeden náhodný faktor. Týmto faktorom je **okamžitá úroková miera** r , o ktorej predpokladáme, že sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou v tvare

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw,$$

kde $\mu(r, t)$ predstavuje trend vo vývoji úrokovej miery, $\sigma(r, t)$ vyjadruje volatilitu procesu a dw je diferenciál Wienerovho procesu. Čím väčšia je hodnota stochastického člena $\sigma(r, t)dw$, tým väčšie sú náhodné fluktuácie úrokovej miery v okolí jej trendu.

Pri úrokových mierach môžeme na príslušnom časovom horizonte identifikovať tendenciu ich návratu k tzv. *dlhodobej rovnovážnej hodnote*. Takáto vlastnosť procesu sa označuje ako *mean-reversion* a je dôvodom obvyklej voľby driftovej funkcie $\mu(r, t)$ v tvare

$$\mu(r, t) = \kappa(\theta - r),$$

kde κ a θ sú kladné konštanty. Stredná hodnota úrokovej miery je v takom prípade rýchlosťou κ priťahovaná k limitnej hodnote θ . Je zrejmé, že platí

$$dE(r_t) = E(dr_t) = \kappa(\theta - E(r_t))dt,$$

pričom riešenie danej diferenciálnej rovnice pre strednú hodnotu úrokovej miery vyzerať nasledovne

$$E(r_t) = r_0e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t})$$

a z toho vyplýva, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(r_t) = \theta.$$

Od tvaru funkcie volatility $\sigma(r, t)$ potom závisia ďalšie vlastnosti modelov úrokových mier.

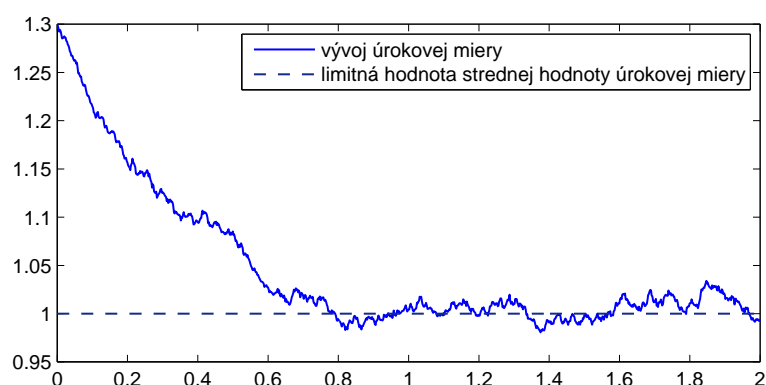
Teraz popíšeme najdôležitejšie a najznámejšie jednofaktorové rovnovážne modely úrokovej miery, s ktorými sa čitateľ môže oboznámiť aj v [17].

Vašíčkov model publikovaný v [24] patrí k prvým navrhnutým modelom okamžitej úrokovej miery, ktorej vývoj je popísaný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw.$$

Funkcia volatility tohto modelu je konštantná (deterministická) a teda nezávisí od aktuálnej hodnoty úrokovej miery. Ak je hodnota úrokovej miery blízka nule, tak z dôvodu konštantnej volatility môže úroková miera s nenulovou pravdepodobnosťou nadobudnúť zápornú hodnotu. A práve predpoklad konštantnej volatility a z toho vyplývajúci fakt, že úroková miera sa môže dostať do záporných hodnôt, sú považované za pomerne veľké nevýhody Vašíčkovho modelu.

Poznamenajme, že pravdepodobnosť s akou úroková miera nadobudne zápornú hodnotu, je funkciou času, aktuálnej hodnoty úrokovej miery a zvolených parametrov (pozri vzťah (3.3), ktorý je odvodený v nasledujúcej kapitole, v ktorej sa zaoberáme aj pravdepodobnostným rozdelením úrokových mier).



Obr. 2.1: Simulácia vývoja úrokovej miery charakterizovanej Vašíčkovým modelom s parametrami $\kappa = 3, \theta = 1, \sigma = 0.05$

Cox-Ingersoll-Ross model navrhnutý v [8] je ďalším často používaným jednofaktorovým modelom, ktorý je reprezentovaný stochastickým procesom

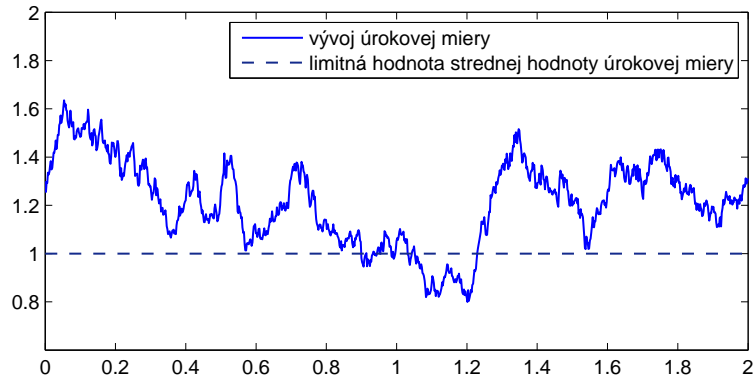
$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw.$$

Volatilita, ktorú predstavuje výraz $\sigma\sqrt{r}$ je úmerná odmocnine z r , čo implikuje, že jej hodnota sa s rastúcou úrokovou mierou zvyšuje (táto vlastnosť sa označuje ako tzv. *level effect*). Pri nízkych úrokových mierach je teda hodnota volatility malá a ak by sa dosiahla nulová hodnota úrokovej miery, tak volatilita by bola tiež nulová. Ďalší vývoj by bol potom deterministický a určený driftom, ktorý je pre $r = 0$ kladný. Preto nie je možné, aby úroková miera nadobudla zápornú hodnotu, čo je výhodou tohto modelu v porovnaní s Vašíčkovým modelom.

Zovšeobecnením uvedených dvoch modelov je tzv. **Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders model** daný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw,$$

ktorý bol navrhnutý v [4] za účelom porovnania modelov pre rôzne hodnoty parametra γ . Pre takýto proces vo všeobecnosti neexistuje explicitné riešenie parciálnej



Obr. 2.2: Simulácia vývoja úrokovej miery charakterizovanej CIR modelom s parametrami $\kappa = 2, \theta = 1, \sigma = 0.05$

diferenciálnej rovnice pre ceny dlhopisov (len pre špeciálnu voľbu parametra $\gamma = 0$ alebo $\gamma = \frac{1}{2}$).

V jednofaktorových modeloch úrokovej miery je teda výnosová krivka určená okamžitou úrokovou mierou a parametrami modelu. To znamená, že pre dané hodnoty parametrov modelu je *výnosová krivka* jednoznačne určená hodnotou *okamžitej úrokovej miery*.

2.1.1 Ceny dlhopisov v jednofaktorových modeloch úrokových mier

Ako sme už spomenuli, bezkupónový dlhopis je najjednoduchším a základným derivátom úrokovej miery. Jeho oceňovaním sa zaoberáme z toho dôvodu, že ak poznáme ceny dlhopisov, tak na základe vzťahu (1.1) vieme určiť časovú štruktúru úrokovej miery.

V tejto časti práce odvodíme *parciálnu diferenciálnu rovnicu* pre cenu $P(r, t, T)$ bezkupónového dlhopisu, ktorá je funkciou maturity T , aktuálneho času t a hodnoty okamžitej úrokovej miery r v čase t , pričom využijeme rovnaký postup ako v [17]. Predpokladajme, že okamžitá úroková miera r sa riadi stochastickým procesom

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw.$$

Využitím *Itóovej lemy* 1.2 dostaneme nasledujúcu rovnicu pre diferenciál funkcie P

$$\begin{aligned} dP &= \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw \\ &= \mu_B(r, t)dt + \sigma_B(r, t)dw, \end{aligned}$$

kde $\mu_B(r, t)$ a $\sigma_B(r, t)$ označujú drift a volatilitu ceny dlhopisu.

Ďalej vytvoríme portfólio pozostávajúce z jedného dlhopisu s maturitou v čase T_1 a Δ dlhopisov s maturitou v čase T_2 . Hodnota Π takéhoto portfólia je

$$\Pi = P(r, t, T_1) + \Delta P(r, t, T_2).$$

Pre zmenu hodnoty daného portfólia potom platí

$$\begin{aligned} d\Pi &= dP(r, t, T_1) + \Delta dP(r, t, T_2) \\ &= [\mu_B(r, t, T_1) + \Delta\mu_B(r, t, T_2)] dt + [\sigma_B(r, t, T_1) + \Delta\sigma_B(r, t, T_2)] dw. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Chceme však, aby toto portfólio bolo bezrizikové. To znamená, že musíme eliminovať náhodnú časť rovnice (2.1) a to nasledovnou voľbou parametra Δ

$$\Delta = -\frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)}.$$

Vývoj hodnoty portfólia je napokon určený deterministickou rovnicou

$$d\Pi = \left[\mu_B(r, t, T_1) - \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)} \mu_B(r, t, T_2) \right] dt. \quad (2.2)$$

Z princípu vylúčenia arbitráže vyplýva, že výnos bezrizikového portfólia sa rovná hodnote bezrizikovej úrokovej miery. Inak povedané, zmena hodnoty portfólia sa musí rovnať výnosu portfólia v prípade jeho spojitého úročenia v banke pri úrokovej miere r , t.j. $d\Pi = r\Pi dt$. Ako dôsledok tejto podmienky a rovnice (2.2) dostaneme

$$\mu_B(r, t, T_1) - \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)} \mu_B(r, t, T_2) = r \left[P(r, t, T_1) - \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)} P(r, t, T_2) \right],$$

čo implikuje rovnosť

$$\frac{\mu_B(r, t, T_1) - rP(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_1)} = \frac{\mu_B(r, t, T_2) - P(r, t, T_2)}{\sigma_B(r, t, T_2)}. \quad (2.3)$$

Všimnime si, že ľavá strana rovnosti (2.3) je funkciou iba premennej T_1 a pravá strana funkciou iba T_2 . Hodnoty T_1 a T_2 sme však na začiatku zvolili ľubovoľné. Výrazy na jednotlivých stranách rovnosti teda nemôžu závisieť od času do splatnosti T , t.j. existuje taká funkcia $\lambda(r, t)$, že platí

$$\lambda(r, t) = \frac{\mu_B(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\sigma_B(r, t, T)}. \quad (2.4)$$

Funkcia $\lambda(r, t)$ sa nazýva *trhová cena rizika (market price of risk)* a vyjadruje očakávaný nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika. Po dosadení μ_B a σ_B do (2.4) dostaneme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu $P(r, t, T)$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (2.5)$$

s koncovou podmienkou $P(r, T, T) = 1$ pre každé $r > 0$.

Ceny dlhopisov s rôznymi splatnosťami určené ako riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (2.5) sú funkciou jediného faktora a to okamžitej úrokovej miery. Preto aj zmeny cien dlhopisov sú determinované iba zmenami v príslušnom faktore.

Poznamenajme, že proces pre okamžitú úrokovú mieru sa dá sformulovať aj v tzv. *rizikovo-neutrálnej pravdepodobnostnej miere* a k tomu sa dá odvodiť parciálna diferenciálna rovnica pre cenu dlhopisu bez trhovej ceny rizika s rizikovo-neutrálnymi parametrami. V takom prípade sa však tieto parametre nedajú odhadovať z historických dát o priebehu short rate, lebo tie pochádzajú z náhodného procesu v reálnej pravdepodobnostnej miere.

2.1.2 Ceny dlhopisov v jednofaktorovom Vašíčkovom modeli

V tejto časti práce sa budeme bližšie zaoberať určením ceny dlhopisu v jednofaktorovom Vašíčkovom modeli a to z toho dôvodu, že túto cenu neskôr využijeme pri kalibrácii konvergenčného modelu Vašíčkovho typu, v rámci ktorého je vývoj európskej úrokovej miery popísaný práve jednofaktorovým Vašíčkovým modelom.

Okamžitá úroková miera je vo Vašíčkovom modeli charakterizovaná stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw.$$

Parciálna diferenciálna rovnica, ktorej riešením je cena bezkupónového dlhopisu, vyzerá nasledovne

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma] \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (2.6)$$

so zadanou začiatočnou podmienkou $P(r, 0) = 1$ pre každé $r > 0$. Poznamenajme, že predpokladáme konštantnú trhovú cenu rizika $\lambda(r, t) = \lambda$.

Teraz rovnakým spôsobom ako v [24] odvodíme explicitné riešenie danej parciálnej diferenciálnej rovnice, ktoré budeme hľadať v tvare

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}.$$

Je zrejmé, že zo začiatočnej podmienky $P(r, 0) = 1$ pre každé $r > 0$ vyplýva

$$A(0) = 1, B(0) = 0.$$

Dosadením predpokladaného tvaru riešenia a jeho príslušných derivácií do rovnice (2.6) dostaneme nasledovnú identitu

$$-e^{-Br} \left(\dot{A} - A\dot{B}r \right) - [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma] AB e^{-Br} + \frac{1}{2}\sigma^2 AB^2 e^{-Br} - rAe^{-Br} = 0,$$

ktorú upravíme tak, že združíme členy, ktoré obsahujú r a tie, ktoré neobsahujú r

$$\left(-\dot{A} + \frac{1}{2}\sigma^2 AB^2 - AB\kappa\theta + \lambda\sigma AB \right) + rA \left(\dot{B} + \kappa B - 1 \right) = 0. \quad (2.7)$$

Rovnosť (2.7) musí byť splnená pre ľubovoľné r , čo implikuje platnosť nasledujúcich obyčajných diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} -\dot{A} + \frac{1}{2}\sigma^2 AB^2 - AB\kappa\theta + \lambda\sigma AB &= 0, \\ \dot{B} + \kappa B - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Problém určenia funkcie $P(r, \tau)$ sme teda transformovali na úlohu nájsť funkcie $A(\tau), B(\tau)$ vyhovujúce systému obyčajných diferenciálnych rovníc (2.8).

Na tomto mieste využijeme fakt, že obyčajná diferenciálna rovnica

$$\dot{x}(t) = Gx + f(t),$$

kde G je konštanta, so začiatočnou podmienkou $x(t_0) = x_0$ má vo všeobecnosti riešenie v tvare

$$x(t) = x_0 e^{G(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{G(t-s)} f(s) ds, \quad (2.9)$$

a preto riešenie diferenciálnej rovnice pre funkciu B spĺňajúce začiatočnú podmienku $B(0) = 0$ má tvar

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}.$$

Keď poznáme funkciu B , vieme dopočítať aj A a to integrovaním výrazu $\frac{\dot{A}}{A}$

$$\int \left(\frac{\dot{A}}{A} \right) d\tau = \int \left(\frac{d \ln A}{d\tau} \right) d\tau = \ln A(\tau) = \int \left[\frac{1}{2}\sigma^2 B^2 - B(\kappa\theta - \lambda\sigma) \right] d\tau,$$

a teda platí

$$\begin{aligned} \ln A(\tau) &= \int \left[\frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right)^2 - \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau})(\kappa\theta - \lambda\sigma) \right] d\tau \\ &= - \left(\tau + \frac{e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \right) \left(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (e^{-2\kappa\tau} - 2e^{-\kappa\tau}) + c. \end{aligned}$$

Využitím začiatočnej podmienky $A(0) = 1$ určíme hodnotu konštanty c :

$$c = \frac{1}{\kappa} \left(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}$$

a nakoniec dostaneme

$$\ln A(\tau) = \left(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) \left(\frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} - \tau \right) - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - e^{-\kappa\tau})^2.$$

Riešením parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu ako derivátu okamžitej úrokovej miery, ktorej dynamika je charakterizovaná jednofaktorovým Vašíčkovým modelom, je teda funkcia

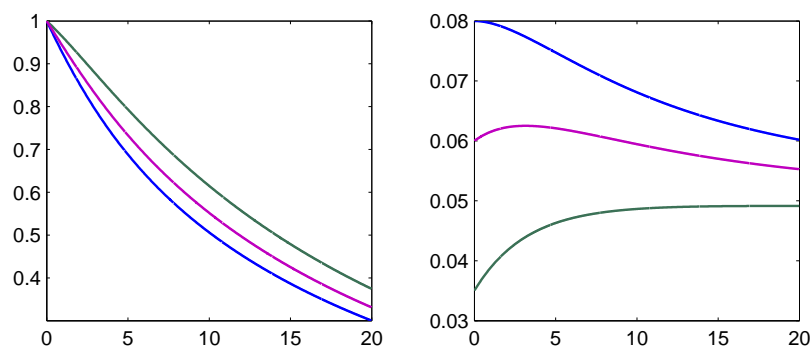
$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r},$$

kde

$$A(\tau) = \exp \left[\left(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) \left(\frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau}) - \tau \right) - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - e^{-\kappa\tau})^2 \right],$$

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}.$$

Na nasledujúcom obrázku sú okrem kriviek cien dlhopisov (vľavo) znázornené aj rôzne tvary výnosových kriviek (vpravo), ktoré je možné získať s využitím jednofaktorového Vašíčkovho modelu. A to rastúcu (zelená), klesajúcu (modrá) a výnosovú krivku, ktorá je najprv rastúca a potom má klesajúcu tendenciu (fialová).



Obr. 2.3: Príklady cien dlhopisov (vľavo) a k nim prislúchajúcich výnosov (vpravo) v jednofaktorovom Vašíčkovom modeli s parametrami $\kappa = 0.2$, $\theta = 0.08$, $\sigma = 0.05$, $\lambda = 0$

2.2 Pojem reálnej a rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miery

Dynamiku okamžitej úrokovej miery charakterizovanú stochastickou diferenciálnou rovnicou môžeme analyzovať v rámci dvoch prístupov a to v *reálnej* alebo *rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere*.

Formulácia modelu v reálnej miere nám umožňuje zachytiť niektoré vlastnosti úrokovej miery, ako napr. mean reversion, zatiaľ čo rizikovo neutrálna pravdepodobnostná miera reflektuje neexistenciu arbitráže na trhu a používa sa pri oceňovaní derivátov úrokovej miery.

Vo všeobecnosti je rizikovo neutrálna pravdepodobnostná miera definovaná ako pravdepodobnostná miera, pri ktorej je súčasná hodnota finančného nástroja rovná očakávanej budúcej výpláte vyplývajúcej z držania daného nástroja, diskontovanej do súčasnosti bezrizikovou úrokovou mierou.

Vysvetlenie problematiky zmeny miery si vyžaduje definovať pojmy podmienenej strednej hodnoty a martingalu. V tejto časti práce popíšeme princíp zmeny miery iba okrajovo, detailnejšie vysvetlenie nájde čitateľ v [16].

V rámci zmeny miery ide z matematického hľadiska o prechod od vychýleného Wienerovho procesu v reálnej pravdepodobnostnej miere ku štandardnému Wienerovmu procesu v rizikovo neutrálnej miere. Dá sa ukázať, že ak formulujeme model v reálnej miere, tak musí existovať taká funkcia $\lambda(r)$, ktorá vyjadruje nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika. Takáto funkcia sa potom nazýva *trhová cena rizika* a je spoločná pre všetky dlhopisy, nezávisí preto od maturity dlhopisu.

Model úrokovej miery môže byť teda zadaný dvoma spôsobmi

- stochastickou diferenciálnou rovnicou v reálnej miere a trhovou cenou rizika,
- stochastickou diferenciálnou rovnicou v rizikovo neutrálnej miere.

Funkcia volatility je však v oboch mierach rovnaká a pre funkciu vyjadrujúcu drift platí nasledujúci prevodný vzťah

$$[\text{rizikovo neutrálny drift}] = [\text{reálny drift}] - [\text{trhová cena rizika}] \times [\text{volatilita}].$$

Jednofaktorový Vašíčkov model charakterizuje vývoj hodnôt short rate v reálnej miere v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw,$$

čo zodpovedá zápisu

$$dr = (\alpha + \beta r) dt + \sigma dw,$$

v rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere, pričom

$$\alpha = \kappa\theta - \lambda\sigma, \beta = -\kappa.$$

Všimnime si, že výraz $\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma$ je presne člen pri $\frac{\partial P}{\partial r}$ v parciálnej diferenciálnej rovnici (2.6) pre cenu dlhopisu v jednofaktorovom Vašíčkovom modeli.

2.3 Dvojfaktorové rovnovážne modely úrokových mier

V jednofaktorových modeloch je časová štruktúra úrokových mier jednoznačne určená začiatkom výnosovej krivky. Dôvodom zavedenia ďalšieho faktora do modelu je získanie väčších možností pre zachytenie vývoja analyzovanej úrokovej miery, ako aj širšieho spektra tvarov výnosových kriviek, ktoré model implikuje. V práci [12] nájde čitateľ dôkaz toho, že v rámci jednofaktorového modelu úrokovej miery je možné získať práve 3 rôzne tvary výnosovej krivky, ktoré sú znázornené na obr. 2.3. Použitie jednofaktorového modelu teda nemôže implikovať napr. časovú štruktúru úrokovej miery znázornenú na obr. 4.2 v kapitole 4.1, v ktorej odvodíme ceny dlhopisov v dvojfaktorovom konvergenčnom modeli Vašíčkovho typu.

V dvojfaktorových modeloch je úroková miera vysvetľovaná ako *funkcia dvoch náhodných faktorov*. Predpokladajme, že tieto náhodné faktory, označme ich x a y , vyhovujú stochastickým diferenciálnym rovniciam

$$dx = \mu_x(x, y)dt + \sigma_x(x, y)dw_1, \quad (2.10)$$

$$dy = \mu_y(x, y)dt + \sigma_y(x, y)dw_2, \quad (2.11)$$

pričom

$$\text{cov}(dw_1, dw_2) = E(dw_1 dw_2) = \rho dt,$$

t.j. predpokladáme konštantnú koreláciu ρ medzi prírastkami Wienerových procesov dw_1 a dw_2 . Okamžitá úroková miera je teda funkciou náhodných faktorov x, y

$$r = r(x, y).$$

Uvedený model sa dá prepísať na tvar, v ktorom prírastky Wienerových procesov $d\bar{w}_1, d\bar{w}_2$ sú nezávislé

$$\begin{aligned} dx &= \mu_x(x, y)dt + \sigma_x(x, y)d\bar{w}_1, \\ dy &= \mu_y(x, y)dt + \sigma_y(x, y) \left[\left(\sqrt{1 - \rho^2} \right) d\bar{w}_2 + \rho d\bar{w}_1 \right] \end{aligned}$$

a takýto tvar sa využíva pri simuláciách.

V rámci dvojfaktorových modelov úrokovej miery existujú také, kde druhým faktorom je finančná premenná (napr. dlhodobá úroková miera, príp. rozdiel medzi dlhodobou a krátkodobou úrokovou mierou), alebo druhým faktorom môže byť niektorý z parametrov rovnice popisujúcej dynamiku krátkodobej úrokovej miery. Prehľad základných dvojfaktorových rovnovážnych modelov úrokových mier je uvedený v [17].

Medzi najznámejšie dvojfaktorové modely patrí **dvojfaktorový Vašíčkov model** a **dvojfaktorový CIR model**. V týchto modeloch je okamžitá úroková miera súčtom dvoch nezávislých faktorov, ktorých dynamika je charakterizovaná stochastickou diferenciálnou rovnicou rovnakého typu ako okamžitá úroková miera v príslušnom jednofaktorovom modeli (pozri [17]). Dvojfaktorový Vašíčkov model má teda tvar

$$\begin{aligned} dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1 dw_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2 dw_2 \end{aligned}$$

a dvojfaktorový CIR model vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned} dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1 \sqrt{r_1} dw_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2 \sqrt{r_2} dw_2. \end{aligned}$$

Konvergenčné modely úrokových mier tvoria podtriedu dvojfaktorových modelov a práve týmito modelmi sa v tejto práci budeme zaoberať podrobnejšie. Najjednoduchším konvergenčným modelom je **konvergenčný model Vašíčkovho typu**, ktorý bol navrhnutý v práci [7] a to v nasledovnom tvare

$$\begin{aligned} dr_d &= [a + b(r_e - r_d)] dt + \sigma_d dw_d, \\ dr_e &= c(d - r_e)dt + \sigma_e dw_e, \\ \text{cov}(dw_1, dw_2) &= \rho dt, \end{aligned}$$

kde r_d je domáca úroková miera, r_e predstavuje úrokovú mieru v rámci eurozóny a ρ je koeficientom korelácie medzi prírastkami Wienerových procesov dw_1, dw_2 . Daný konvergenčný model popisuje vývoj európskej úrokovej miery, o ktorej sa predpokladá, že ovplyvňuje vývoj domácej úrokovej miery.

Fong - Vašíčkov model analyzovaný v [10] patrí medzi dvojfaktorové modely so stochastickou volatilitou. V tomto modeli je okamžitá úroková miera r charakterizovaná pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice a volatilita y okamžitej úrokovej miery je riešením inej stochastickej diferenciálnej rovnice

$$\begin{aligned} dr &= \kappa_1(\theta_1 - r)dt + \sqrt{y}dw_1, \\ dy &= \kappa_2(\theta_2 - y)dt + v\sqrt{y}dw_2. \end{aligned}$$

2.3.1 Ceny dlhopisov v dvojfaktorových modeloch úrokových mier

Na odvodenie ceny dlhopisu ako derivátu okamžitej úrokovej miery, ktorej dynamika je popísaná dvojfaktorovým modelom, sa využije podobný postup ako v prípade jednofaktorového modelu, pričom vychádzame z [17].

Uvažujme dvojfaktorový rovnovážny model úrokovej miery v tvare

$$\begin{aligned} r &= r(x, y) \\ dx &= \mu_x(x, y)dt + \sigma_x(x, y)dw_1, \\ dy &= \mu_y(x, y)dt + \sigma_y(x, y)dw_2, \end{aligned}$$

pričom

$$\text{cov}(dw_1, dw_2) = \rho dt,$$

t.j. prírastky Wienerových procesov sú navzájom korelované s koeficientom korelácie ρ . Cena dlhopisu P so splatnosťou v čase T je preto funkciou aktuálneho času t a ďalších dvoch premenných x a y , teda $P = P(x, y, t)$. Aplikovaním viacrozmernej Itóovej lemy 1.3 na funkciu $P(x, y, t)$ dostaneme predpis pre diferenciál tejto funkcie v tvare

$$dP = \mu dt + \sigma_1 dw_1 + \sigma_2 dw_2, \quad (2.12)$$

kde

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_x \frac{\partial P}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_1 &= \sigma_x \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \sigma_2 = \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}$$

Teraz zostavíme portfólio pozostávajúce z troch typov dlhopisov s rôznymi maturitami T_1, T_2, T_3 . Hodnota takéhoto portfólia je

$$\Pi = P(T_1)V_1 + P(T_2)V_2 + P(T_3)V_3,$$

kde $P(T_i)$ je cena dlhopisu so splatnosťou v čase T_i a V_i je počet dlhopisov v portfóliu so splatnosťou v čase T_i pre $i = 1, 2, 3$. Využitím vzťahu (2.12) dostaneme, že pre zmenu hodnoty daného portfólia platí

$$\begin{aligned} d\Pi &= V_1 dP(T_1) + V_2 dP(T_2) + V_3 dP(T_3) \\ &= [V_1 \mu(T_1) + V_2 \mu(T_2) + V_3 \mu(T_3)] dt + [V_1 \sigma_1(T_1) + V_2 \sigma_1(T_2) + V_3 \sigma_1(T_3)] dw_1 \\ &\quad + [V_1 \sigma_2(T_1) + V_2 \sigma_2(T_2) + V_3 \sigma_2(T_3)] dw_2. \end{aligned}$$

Aby sme eliminovali náhodné zložky v predchádzajúcej rovnici, a teda aby hodnota portfólia bola deterministická, musia byť splnené nasledovné rovnosti

$$V_1 \sigma_1(T_1) + V_2 \sigma_1(T_2) + V_3 \sigma_1(T_3) = 0, \quad (2.13)$$

$$V_1 \sigma_2(T_1) + V_2 \sigma_2(T_2) + V_3 \sigma_2(T_3) = 0. \quad (2.14)$$

Ďalej z dôvodu vylúčenia arbitráže sa miera návratnosti uvažovaného dlhopisového portfólia musí rovnať bezrizikovému výnosu, t.j. $d\Pi = r\Pi dt$. Z toho vyplýva, že

$$V_1 \mu(T_1) + V_2 \mu(T_2) + V_3 \mu(T_3) = r [P(T_1)V_1 + P(T_2)V_2 + P(T_3)V_3]$$

a po úprave dostaneme

$$V_1 [\mu(T_1) - rP(T_1)] + V_2 [\mu(T_2) - rP(T_2)] + V_3 [\mu(T_3) - rP(T_3)] = 0. \quad (2.15)$$

Systém pozostávajúci z rovníc (2.13), (2.14), (2.15) môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} \sigma_1(T_1) & \sigma_1(T_2) & \sigma_1(T_3) \\ \sigma_2(T_1) & \sigma_2(T_2) & \sigma_2(T_3) \\ \mu(T_1) - rP(T_1) & \mu(T_2) - rP(T_2) & \mu(T_3) - rP(T_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

pričom nás zaujíma nenulové riešenie tohto systému, ktoré existuje práve vtedy, keď riadky matice sú lineárne závislé. Rovnosti (2.13), (2.14) však musia byť lineárne nezávislé, lebo ak by bol druhý riadok nejakým násobkom prvého riadku matice, tak v modeli by bol iba jeden náhodný faktor a v konečnom dôsledku by sme dostali jednofaktorový model. To znamená, že tretí riadok musí byť lineárnou kombináciou prvých dvoch a teda existujú také λ_1, λ_2 , že

$$\mu(T_i) - rP(T_i) = \lambda_1 \sigma_1(T_i) + \lambda_2 \sigma_2(T_i) \quad \text{pre } i = 1, 2, 3. \quad (2.16)$$

Parametre λ_1, λ_2 , ktoré predstavujú trhové ceny rizika prislúchajúce faktorom x, y , nemôžu byť funkciou doby splatnosti, keďže T_1, T_2, T_3 boli zvolené ľubovoľne a preto

$$\lambda_1 = \lambda_1(x, y, t), \quad \lambda_2 = \lambda_2(x, y, t).$$

Dosadením μ, σ_1, σ_2 z (2.12) do rovnice (2.16) dostaneme nasledujúcu parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom rovnovážnom modeli úrokovej miery

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_x - \lambda_1 \sigma_x) \frac{\partial P}{\partial x} + (\mu_y - \lambda_2 \sigma_y) \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \sigma_y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \rho \sigma_x \sigma_y \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - rP = 0.$$

Kapitola 3

Ako odhadovať parametre modelov úrokových mier

Kalibrácia modelov úrokových mier nepatrí medzi problémy s jednoznačným a priamočiarym riešením. Základným cieľom konkrétnej metódy kalibrácie modelu je určiť hodnoty parametrov analyzovaného modelu tak, aby model čo najlepšie popisoval skutočný vývoj úrokovej miery.

Parametre modelu môžeme odhadnúť z časového radu krátkodobej úrokovej miery, ale aj prístupom, ktorý je zameraný na čo najlepšiu zhodu teoretických a skutočných výnosových kriviek. Tieto dva spôsoby sa dajú kombinovať ako napr. v článku [7], v ktorom autori všetky parametre okrem trhovej ceny rizika odhadli z časového radu short rate a výnosové krivky použili iba na odhad trhovej ceny rizika. Dá sa aplikovať aj opačný postup (pozri napr. [23]), kde sa najskôr optimalizuje účelová funkcia vyjadrujúca váženú strednú kvadratickú chybu medzi teoretickými a modelom implikovanými výnosovými krivkami a potom funkcia vierohodnosti.

Táto časť práce je venovaná štúdiu daných dvoch prístupov v rámci kalibrácie jednofaktorového Vašíčkovho modelu a tvorí základ pre návrh novej metódy kalibrácie, ktorá súčasne využíva priebeh krátkodobej úrokovej miery aj výnosové krivky. Poznamenajme, že jednofaktorovým Vašíčkovým modelom sa na tomto mieste zaoberáme podrobnejšie, pretože ho neskôr využijeme v rámci konvergenčného modelu Vašíčkovho typu.

3.1 Metóda maximálnej vierohodnosti na odhad parametrov modelov úrokových mier

Na odhad parametrov procesu, ktorý popisuje dynamiku úrokovej miery, môžeme v prípade, že poznáme rozdelenie hodnôt procesu, použiť metódu maximálnej vierohodnosti. Je to pomerne často používaný prístup, ktorého cieľom je nájsť také hodnoty parametrov, aby daná realizácia dát bola čo najpravdepodobnejšia. Podrobnejšie informácie týkajúce sa metódy maximálnej vierohodnosti nájde čitateľ v [15].

Nech X_1, X_2, \dots, X_n je náhodný výber z rozdelenia s hustotou $f(x|\theta)$, t.j. $X_1, X_2,$

\dots, X_n sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné premenné s hustotou $f(x|\theta)$, a nech x_1, x_2, \dots, x_n je realizácia daného náhodného výberu. Potom **funkcia vierohodnosti** L ako funkcia parametra θ je definovaná nasledovne

$$L(\mathbf{x}|\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

Metóda maximálnej vierohodnosti spočíva v tom, že sa za odhad parametra θ zvolí taká hodnota $\hat{\theta}$, pre ktorú pri daných realizovaných hodnotách premenných funkcia vierohodnosti nadobúda svoje maximum. To znamená, že

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

Obvykle namiesto funkcie vierohodnosti maximalizujeme jej prirodzený logaritmus, ktorý nazývame logaritmicou funkciou vierohodnosti. Použitím monotónnej transformácie sa totiž argument maxima nezmení, a preto

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \sum_{i=1}^n \ln f(x_i|\theta).$$

3.1.1 Podmienené rozdelenie okamžitej úrokovej miery pre Vašíčkov model

V tejto časti práce odvodíme podmienené rozdelenie okamžitej úrokovej miery, pričom budeme postupovať rovnakým spôsobom ako v [17]. Predpokladajme, že jednofaktrový Vašíčkov model je daný v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dw \quad (3.1)$$

a definujme proces $y = e^{\kappa t}r$. Pomocou Itôovej lemy určíme diferenciál $d(e^{\kappa t}r)$ tohto nového procesu

$$dy = d(e^{\kappa t}r) = (\kappa e^{\kappa t}r + \kappa(\theta - r)e^{\kappa t})dt + \sigma e^{\kappa t}dw.$$

Po úprave dostaneme nasledujúcu rovnosť

$$d(e^{\kappa t}r) = \kappa\theta e^{\kappa t}dt + \sigma e^{\kappa t}dw,$$

ktorá sa integrovaním na intervale $(t, t + \Delta t)$ zmení na

$$\begin{aligned} e^{\kappa(t+\Delta t)}r_{t+\Delta t} - e^{\kappa t}r_t &= \kappa\theta \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s}ds + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s}dw_s \\ &= \theta(e^{\kappa(t+\Delta t)} - e^{\kappa t}) + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s}dw_s. \end{aligned}$$

Napokon dostávame explicitné vyjadrenie náhodnej premennej $r_{t+\Delta t}$ pomocou stochastického integrálu

$$r_{t+\Delta t} = e^{-\kappa\Delta t}r_t + \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \sigma e^{-\kappa(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s,$$

ktoré nám umožní určiť podmienené rozdelenie náhodnej premennej $r_{t+\Delta t}$ pri danej hodnote r_t .

Pre strednú hodnotu daného podmieneného rozdelenia teda platí

$$E(r_{t+\Delta t}|r_t) = e^{-\kappa\Delta t}r_t + \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}),$$

keďže podľa tvrdenia 1.1 je $E\left(\int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s\right) = 0$. Variancia rozdelenia premennej $r_{t+\Delta t}$ sa dá vyjadriť nasledovne

$$\begin{aligned} Var(r_{t+\Delta t}|r_t) &= \sigma^2 e^{-2\kappa(t+\Delta t)} Var\left(\int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s\right) \\ &= \sigma^2 e^{-2\kappa(t+\Delta t)} E\left[\left(\int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s\right)^2\right], \end{aligned}$$

pričom využitím Itóovej izometrie (1.2) taktiež formulovanej v tvrdení 1.1 dostaneme

$$Var(r_{t+\Delta t}|r_t) = \sigma^2 e^{-2\kappa(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} (e^{\kappa s})^2 ds = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa\Delta t}).$$

Teda štatistický zápis podmieneného rozdelenia okamžitej úrokovej miery, ktorej vývoj je popísaný pomocou jednofaktorového Vašíčkovho modelu, má tvar

$$r_{t+\Delta t}|r_t \sim N\left(e^{-\kappa\Delta t}r_t + \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}), \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t})\right). \quad (3.2)$$

Toto rozdelenie sa dá odvodiť aj iným spôsobom (a to použitím tzv. Fokker - Plancovej rovnice), ktorý čitateľ nájde v [17].

Teraz s využitím tvaru podmieneného rozdelenia úrokovej miery charakterizovanej jednofaktorovým Vašíčkovým modelom určíme pravdepodobnosť, s akou sa úroková miera môže dostať do záporných hodnôt:

$$\begin{aligned} P(r_{t+\Delta t} < 0|r_t) &= P\left(\frac{r_{t+\Delta t} - E(r_{t+\Delta t}|r_t)}{\sqrt{Var(r_{t+\Delta t}|r_t)}} < \frac{-E(r_{t+\Delta t}|r_t)}{\sqrt{Var(r_{t+\Delta t}|r_t)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{-E(r_{t+\Delta t}|r_t)}{\sqrt{Var(r_{t+\Delta t}|r_t)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{-e^{-\kappa\Delta t}r_t + \theta(e^{-\kappa\Delta t} - 1)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t})}}\right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde $\Phi(\cdot)$ je distribučná funkcia rozdelenia $N(0, 1)$. Všimnime si, že analyzovaná pravdepodobnosť je funkciou času, aktuálnej hodnoty úrokovej miery a zvolených parametrov. Napríklad pre odhady parametrov $\kappa = 1.521, \theta = 0.0141, \sigma = 0.0026$ z tabuľky 6.4, ktoré získame kalibráciou Vašíčkovho modelu na denných dátach sadzby Euribor za druhý kvartál roku 2011, a začiatočnú hodnotu úrokovej miery $r_t = 0.007$ je pravdepodobnosť toho, že short rate o rok nadobudne zápornú hodnotu, rovná $3.1671e - 018$, čo je prakticky nulová pravdepodobnosť.

3.1.2 Metóda maximálnej vierohodnosti na odhad parametrov Vašíčkovho modelu

Vzťahy pre odhady parametrov κ, θ, σ Vašíčkovho modelu metódou maximálnej vierohodnosti sú bez dôkazu uvedené v [3]. Jedným z prínosov tejto práce je aj ich odvodenie, ktorým sa zaoberáme práve v tejto časti práce.

Majme diskkrétne pozorovania procesu (3.1), t.j. časový rad r_1, \dots, r_{n+1} hodnôt úrokovej miery, o ktorej predpokladáme, že jej dynamika je charakterizovaná pomocou jednofaktorového Vašíčkovho modelu.

Nech Δt je časový interval medzi dvoma pozorovaniami. Zavedieme nové premenné $\eta = e^{-\kappa\Delta t}, v^2 = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t})$ a teda podľa (3.2) platí

$$r_{t+\Delta t}|r_t \sim N(\eta r_t + \theta(1 - \eta), v^2).$$

Využitím explicitného vyjadrenia hustoty normálneho rozdelenia v tomto prípade v tvare

$$f(r_{i+1}|r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp\left\{-\frac{[r_{i+1} - \eta r_i - \theta(1 - \eta)]^2}{2v^2}\right\}$$

vieme za predpokladu nezávislosti pozorovaní napísať hodnotu vierohodnostnej funkcie ako súčin hustôt náhodných premenných s normálnym rozdelením, t.j.

$$L(\eta, \theta, v^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi v^2}} \exp\left\{-\frac{[r_{i+1} - \eta r_i - \theta(1 - \eta)]^2}{2v^2}\right\}.$$

Logaritmickej vierohodnostná funkcia má potom tvar

$$\ell(\eta, \theta, v^2) = \ln L(\eta, \theta, v^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi v^2) - \frac{1}{2v^2} \sum_{i=1}^n [r_{i+1} - \eta r_i - \theta(1 - \eta)]^2.$$

Cieľom je nájsť hodnoty parametrov η, θ a v^2 , ktoré budú predstavovať bod maxima pre funkciu $\ell(\eta, \theta, v^2)$. Takéto hodnoty sa spravidla (v prípade existencie parciálnych derivácií) získajú riešením tzv. vierohodnostných rovníc (t.j. parciálne derivácie položíme rovné nule)

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{(1-\eta)}{v^2} \sum_{i=1}^n [r_{i+1} - \eta r_i - \theta(1-\eta)] = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \eta} = -\frac{1}{v^2} \sum_{i=1}^n \{[r_{i+1} - \eta r_i - \theta(1-\eta)](\theta - r_i)\} = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial v^2} = -\frac{n}{2v^2} + \frac{1}{2v^4} \sum_{i=1}^n [r_{i+1} - \eta r_i - \theta(1-\eta)]^2 = 0. \quad (3.6)$$

Pre odhady hodnôt parametrov θ a v^2 dostaneme nasledujúce výrazy

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n(1-\hat{\eta})} \left[\sum_{i=1}^n (r_{i+1} - \hat{\eta} r_i) \right], \quad (3.7)$$

$$\hat{v}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [r_{i+1} - \hat{\eta} r_i - \hat{\theta}(1-\hat{\eta})]^2. \quad (3.8)$$

Ostáva už iba určiť odhad parametra η , a to takým spôsobom, aby závisel len od pozorovaných hodnôt a aby sme tak mohli na základe odhadu $\hat{\eta}$ explicitne určiť odhad $\hat{\theta}$ a nakoniec využitím daných dvoch odhadov priamo určiť odhad parametra v^2 .

Pre jednoduchosť zavedieme nasledujúce označenie:

$$s_x = \sum_{i=1}^n r_i, \quad s_y = \sum_{i=1}^n r_{i+1}, \quad s_{xy} = \sum_{i=1}^n r_i r_{i+1}, \quad s_{xx} = \sum_{i=1}^n r_i^2.$$

Potom rovnosť (3.7) sa dá prepísať na tvar

$$\hat{\theta} = \frac{s_y - \hat{\eta} s_x}{n(1-\hat{\eta})},$$

pričom dosadením takto vyjadrenej hodnoty $\hat{\theta}$ do (3.4) dostaneme nasledujúcu rovnicu

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(r_{i+1} - \eta r_i - \frac{(s_y - \eta s_x)}{n} \right) \left(\frac{s_y - \eta s_x}{n(1-\eta)} - r_i \right) \right] = 0.$$

Jednoduchými algebraickými úpravami danej rovnice napokon dostaneme vzťah pre odhad parametra η v tvare

$$\hat{\eta} = \frac{s_x s_y - n s_{xy}}{s_x^2 - n s_{xx}},$$

a teda

$$\hat{\eta} = \left[\left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n r_i^2 \right]^{-1} \left(\sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i+1} - n \sum_{i=1}^n r_i r_{i+1} \right). \quad (3.9)$$

Odhady parametrov κ, θ, σ Vašíčkovho modelu (3.1) metódou maximálnej viero-
hodnosti sa teda dajú explicitne vyjadriť využitím nasledujúcich vzťahov

$$\begin{aligned}\widehat{\kappa} &= -\frac{1}{\Delta t} \ln \widehat{\eta}, \\ \widehat{\theta} &= \frac{1}{n(1-\widehat{\eta})} \left[\sum_{i=1}^n (r_{i+1} - \widehat{\eta} r_i) \right], \\ \widehat{\sigma}^2 &= \frac{2\widehat{\kappa}}{(1 - e^{-2\widehat{\kappa}\Delta t})} \widehat{v}^2,\end{aligned}$$

kde $\widehat{\eta}, \widehat{v}^2$ spĺňajú (3.9), (3.8).

3.2 Kalibrácia modelu založená na minimalizácii miery vzdialenosti reálnej a odhadovanej výnosovej krivky

Parametre modelu, ktorý charakterizuje vývoj úrokovej miery, sa dajú odhadnúť aj na základe fitovania výnosových kriviek. Cieľom tohto prístupu je minimalizovať nejakú mieru vzdialenosti reálnej a odhadovanej výnosovej krivky.

V článku [23] sa využíva minimalizácia váženého súčtu druhých mocnín rozdielov skutočných a modelom implikovaných výnosov a takýto spôsob použijeme aj v tejto práci. Budeme teda minimalizovať funkcionál F , ktorý vyzerá nasledovne

$$F = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} [R(\tau_j, r_i) - R_{ij}]^2,$$

kde $R(\tau_j, r_i) = -\frac{\ln P(\tau_j, r_i)}{\tau_j}$ je teoretický výnos v i -ty deň pre j -tu splatnosť implikovaný modelom a R_{ij} predstavuje skutočný výnos v i -ty deň pre dobu splatnosti τ_j . Môžeme si všimnúť, že vstupnými dátami sú výnosové krivky z určitého časového obdobia, pričom váhy w_{ij} vyjadrujú, aký vplyv majú jednotlivé odchýlky výnosových kriviek v rôznych časoch a pre rôzne maturity.

Uvažujme teda stochastickú diferenciálnu rovnicu, ktorá definuje jednofaktorový Vašíčkov model v rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma dw. \quad (3.10)$$

Z časti 2.1.2 vieme, že cena dlhopisu v prípade Vašíčkovho modelu (3.10) má tvar

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r},$$

kde

$$\begin{aligned}A(\tau) &= \exp \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \right) \left(\frac{1}{\beta}(1 - e^{\beta\tau}) + \tau \right) + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - e^{\beta\tau})^2 \right], \\ B(\tau) &= \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta}.\end{aligned}$$

Na výpočet hodnoty $R(\tau_j, r_i)$ potrebujeme logaritmus danej ceny dlhopisu

$$\begin{aligned}\ln P(\tau_j, r_i) &= \ln A(\tau_j) - B(\tau_j)r_i \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sigma^2}{2\beta^2}\right) \left(\frac{1}{\beta}(1 - e^{\beta\tau_j}) + \tau_j\right) + \frac{\sigma^2}{4\beta^3} (1 - e^{\beta\tau_j})^2 + \frac{1 - e^{\beta\tau_j}}{\beta} r_i,\end{aligned}$$

ktorý sa za predpokladu fixovanej hodnoty β dá upraviť na tvar (uvedený v práci [21])

$$\ln P(\tau_j, r_i) = c_0(\tau_j, r_i) + c_1(\tau_j)\alpha + c_2(\tau_j)\sigma^2,$$

kde

$$\begin{aligned}c_0(\tau_j, r_i) &= \frac{r_i(1 - e^{\beta\tau_j})}{\beta}, \\ c_1(\tau_j) &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{1 - e^{\beta\tau_j}}{\beta} + \tau_j \right], \\ c_2(\tau_j) &= \frac{1}{2\beta^2} \left[\frac{1 - e^{\beta\tau_j}}{\beta} + \tau_j + \frac{(1 - e^{\beta\tau_j})^2}{2\beta} \right].\end{aligned}$$

Minimalizujeme teda účelovú funkciu

$$\begin{aligned}F(\alpha, \beta, \sigma) &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left[\frac{\ln P(\tau_j, r_i)}{\tau_j} + R_{ij} \right]^2 \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left[\frac{c_0(\tau_j, r_i) + c_1(\tau_j)\alpha + c_2(\tau_j)\sigma^2}{\tau_j} + R_{ij} \right]^2\end{aligned}$$

a keďže sme predpokladali, že hodnota parametra β je daná, tak optimálne hodnoty parametrov α a σ sa dajú nájsť derivovaním účelovej funkcie a tým pádom sú určené ako riešenie nasledujúceho systému lineárnych rovníc

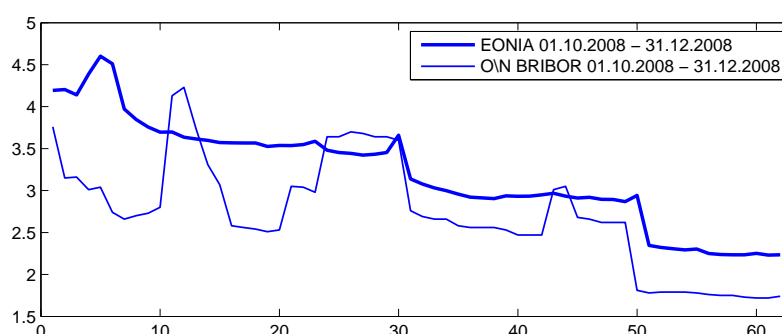
$$\begin{aligned}\alpha \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_1^2 + \sigma^2 \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 &= - \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_0 + R_{ij} \tau_j) c_1 \\ \alpha \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 + \sigma^2 \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_2^2 &= - \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_0 + R_{ij} \tau_j) c_2.\end{aligned}$$

Následný odhad parametra β predstavuje jednorozmerný optimalizačný problém.

Kapitola 4

Konvergenčné modely úrokovej miery

Štúdium konvergenčných modelov úrokovej miery podnietil fakt, že medzi vývojom úrokovej miery v rámci eurozóny a vývojom úrokovej miery v krajine vstupujúcej do eurozóny existuje korelácia. Na obrázku 4.1 je znázornený vývoj slovenskej a európskej jednotňovej úrokovej miery, čo potvrdzuje existenciu korelácie.



Obr. 4.1: Vývoj úrokových sadzieb Eonia a overnight Bribor v období od 1.10.2008 do 31.12.2008, t.j. 3 mesiace pred vstupom Slovenska do eurozóny

Konvergenčný model úrokovej miery pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice popisuje vývoj európskej úrokovej miery, o ktorej sa predpokladá, že ovplyvňuje vývoj domácej úrokovej miery. Vývoj európskej úrokovej miery však nie je ovplyvnený vývojom domácej úrokovej miery.

4.1 Konvergenčný model Vašíčkovho typu

Konvergenčný model Vašíčkovho typu bol navrhnutý v práci [7] a to v nasledovnom tvare

$$\begin{aligned} dr_d &= [a + b(r_e - r_d)] dt + \sigma_d dw_d, \\ dr_e &= c(d - r_e) dt + \sigma_e dw_e, \\ cov(dw_d, dw_e) &= \rho dt, \end{aligned} \quad (4.1)$$

kde r_d je domáca úroková miera a r_e predstavuje úrokovú mieru v rámci eurozóny.

Stredná hodnota európskej úrokovej miery je teda rýchlosťou c priťahovaná k limitnej hodnote d . Na druhej strane stochastická diferenciálna rovnica pre domácu úrokovú mieru sa dá prepísať na tvar

$$dr_d = b \left(\frac{a}{b} + r_e - r_d \right) dt + \sigma dw,$$

z ktorého je zrejmé, že domáca úroková miera je priťahovaná k hodnote $\frac{a}{b} + r_e$ a rýchlosť reverzie je b .

Môžeme si všimnúť, že na popis dynamiky európskej úrokovej miery je použitý jednofaktorový Vašíčkov model a preto európska okamžitá úroková miera je jediným faktorom, ktorý ovplyvňuje cenu európskeho dlhopisu, ktorý už vieme pomerne jednoducho oceniť, pozri časť 2.1.2. Ukážeme, že za predpokladu konštantných trhových cien rizika

$$\lambda_d(r_d, r_e, \tau) = \lambda_d, \quad \lambda_e(r_d, r_e, \tau) = \lambda_e$$

sa aj ceny domácich dlhopisov dajú vyjadriť v explicitnom tvare.

Cena domáceho dlhopisu je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P_d}{\partial \tau} + [a + b(r_e - r_d) - \lambda_d \sigma_d] \frac{\partial P_d}{\partial r_d} + [c(d - r_e) - \lambda_e \sigma_e] \frac{\partial P_d}{\partial r_e} + \\ + \frac{\sigma_d^2}{2} \frac{\partial^2 P_d}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_e^2}{2} \frac{\partial^2 P_d}{\partial r_e^2} + \rho \sigma_d \sigma_e \frac{\partial^2 P_d}{\partial r_d \partial r_e} - r_d P_d = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

so začiatočnou podmienkou $P(r_d, r_e, 0) = 1$. Pri riešení (4.2) postupujeme rovnakým spôsobom ako v [14]. Riešenie budeme hľadať v tvare

$$P_d(r_d, r_e, \tau) = e^{A(\tau) - r_d D(\tau) - r_e E(\tau)},$$

pričom $A(0) = 0, D(0) = 0, E(0) = 0$. Dosadením tohto predpokladaného tvaru riešenia do rovnice (4.2) dostaneme nasledovnú identitu

$$\begin{aligned} r_d(\dot{D} + bD - 1) + r_e(\dot{E} - bD + cE) - \dot{A} - aD + \lambda_d \sigma_d D - cdE + \lambda_e \sigma_e E \\ + \frac{\sigma_d^2}{2} D^2 + \frac{\sigma_e^2}{2} E^2 + \rho \sigma_d \sigma_e DE = 0, \end{aligned}$$

ktorá by mala platiť pre ľubovoľné hodnoty premenných r_d, r_e . To nastáva práve vtedy, keď sú splnené nasledujúce rovnosti

$$\begin{aligned} \dot{D} &= -bD + 1, \\ \dot{E} &= -cE + bD, \\ \dot{A} &= -aD + \lambda_d \sigma_d D - cdE + \lambda_e \sigma_e E + \frac{\sigma_d^2}{2} D^2 + \frac{\sigma_e^2}{2} E^2 + \rho \sigma_d \sigma_e DE. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Využitím vzťahu (2.9) a za predpokladu, že $b \neq c$ získame explicitné vyjadrenie funkcií $D(\tau), E(\tau)$

$$\begin{aligned} D(\tau) &= \frac{1 - e^{-b\tau}}{b}, \\ E(\tau) &= \frac{1}{c(c-b)} [c(1 - e^{-b\tau}) - b(1 - e^{-c\tau})] \end{aligned}$$

a následne integrovaním poslednej rovnice systému (4.3) dostaneme predpis pre funkciu $A(\tau)$

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \int_0^\tau \left[-(a - \lambda_d \sigma_d) D(y) - (cd - \lambda_e \sigma_e) E(y) + \frac{\sigma_d^2}{2} D(y)^2 + \frac{\sigma_e^2}{2} E(y)^2 \right. \\ &\quad \left. + \rho \sigma_d \sigma_e D(y) E(y) \right] dy. \end{aligned}$$

Ak kvôli zjednodušeniu matematických zápisov zavedieme nasledujúcu substitúciu

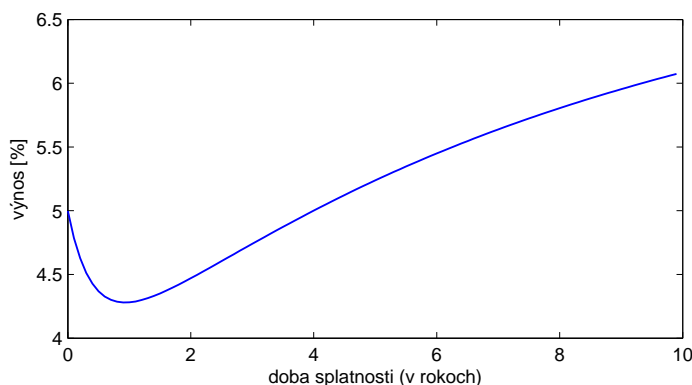
$$F(\tau) = \frac{1 - e^{-c\tau}}{c},$$

tak v explicitnom vyjadrení funkcie $A(\tau)$ vystupujú nasledujúce členy

$$\begin{aligned} \int_0^\tau D(y) dy &= \frac{\tau - D(\tau)}{b}, \\ \int_0^\tau E(y) dy &= \frac{b}{c-b} \left[\frac{\tau - D(\tau)}{b} - \frac{\tau - F(\tau)}{c} \right], \\ \int_0^\tau D^2(y) dy &= \frac{\tau - 2D(\tau)}{b^2} + \frac{1 - e^{-2b\tau}}{2b^3}, \\ \int_0^\tau F^2(y) dy &= \frac{\tau - 2F(\tau)}{c^2} + \frac{1 - e^{-2c\tau}}{2c^3}, \\ \int_0^\tau E^2(y) dy &= \frac{b^2}{(c-b)^2} \left(\int_0^\tau [D^2(y) + F^2(y)] dy - \frac{2}{bc} \tau + \frac{2}{bc} [D(\tau) + F(\tau)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(e^{-(b+c)\tau} - 1)}{bc(b+c)} \right). \end{aligned}$$

Vzťahy pre funkcie $D(\tau)$, $E(\tau)$, $A(\tau)$ v prípade, že $b = c$ nájde čitateľ v [14].

Na obrázku 4.2 je na ilustráciu znázornená časová štruktúra domácej úrokovej miery v rámci konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s parametrami $a = 0.0938$, $b = 3.67$, $c = 0.2087$, $d = 0.035$, $\sigma_d = 0.032$, $\sigma_e = 0.016$, $\lambda_d = 3.315$, $\lambda_e = -0.655$, $r_d = 0.05$, $r_e = 0.04$, $\rho = 0.5$ prevzatými z [14].



Obr. 4.2: Príklad časovej štruktúry domácej úrokovej miery v rámci konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s parametrami $a = 0.0938$, $b = 3.67$, $c = 0.2087$, $d = 0.035$, $\sigma_d = 0.032$, $\sigma_e = 0.016$, $\lambda_d = 3.315$, $\lambda_e = -0.655$, $\rho = 0.5$, $r_d = 0.05$, $r_e = 0.04$

4.2 Konvergenčný model Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou

V práci [14] je okrem iného analyzovaný vplyv korelácie na zmenu ceny domáceho dlhopisu s tým, že cena domáceho dlhopisu v konvergenčnom modeli Vašíčkovho typu s nenulovou koreláciou je aproximovaná cenou domáceho dlhopisu v rámci uvažovaného modelu s nulovou koreláciou. Autor dospel k výsledkom, ktoré naznačujú, že rozdiely medzi výnosmi implikovanými príslušnými cenami dlhopisov sú pri maturite do jedného roka zanedbateľné.

V tabuľke 4.1 sú na ukážku vypísané domáce výnosy implikované konvergenčným modelom Vašíčkovho typu s parametrami $a = 0.0938$, $b = 3.67$, $c = 0.2087$, $d = 0.035$, $\sigma_d = 0.032$, $\sigma_e = 0.016$, $\lambda_d = 3.315$, $\lambda_e = -0.655$, $r_d = 0.05$, $r_e = 0.04$, $\rho = 0.5$ prevzatými z [14], výnosy implikované takým istým modelom s rovnakými parametrami, ale s nulovou koreláciou a ich percentuálne rozdiely pre rôzne doby splatnosti. Všimnime si, že rozdiely medzi príslušnými výnosmi sú naozaj minimálne.

maturita (v rokoch)	výnos [%] pre $\rho = 0.5$	výnos [%] pre $\rho = 0$	rozdiel [%]
1/12	4.818826	4.818832	-1.1507e-06
2/12	4.677121	4.677157	-7.8153e-06
0.25	4.566897	4.567000	-2.2469e-05
0.5	4.368465	4.368962	-1.1389e-04
0.75	4.292115	4.293204	-2.5374e-04
1	4.281101	4.282873	-4.1369e-04
2	4.470232	4.474836	-1.0288e-03
5	5.237746	5.249230	-2.1879e-03
10	6.086080	6.104659	-3.0435e-03

Tabuľka 4.1: Výnosy pre domácu úrokovú mieru implikované konvergenčným modelom Vašíčkovho typu s parametrami $a = 0.0938$, $b = 3.67$, $c = 0.2087$, $d = 0.035$, $\sigma_d = 0.032$, $\sigma_e = 0.016$, $\lambda_d = 3.315$, $\lambda_e = -0.655$, $r_d = 0.05$, $r_e = 0.04$ a $\rho = 0.5$ (druhý stĺpec), $\rho = 0$ (tretí stĺpec)

Aj preto sme sa v tejto práci rozhodli zaoberať práve konvergenčným modelom Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou, ktorého formulácia v rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere je nasledovná

$$dr_d = [\gamma + \delta(r_e - r_d)] dt + \sigma_d dw_d, \quad (4.4)$$

$$dr_e = [\alpha + \beta r_e] dt + \sigma_e dw_e, \quad (4.5)$$

pričom korelácia medzi prírastkami Wienerových procesov dw_d , dw_e je nulová. Tento systém stochastických diferenciálnych rovníc zodpovedá modelu (4.1), ak

$$\gamma = a - \lambda_d \sigma_d, \delta = b, \beta = -c, \alpha = cd - \lambda_e \sigma_e.$$

Uvažujme, že už poznáme reálne aj rizikovo neutrálne parametre rovnice popisujúcej vývoj európskej úrokovej miery. A teda s využitím predchádzajúcej časti dostaneme, že cena domáceho dlhopisu sa dá vyjadriť v tvare

$$P_d(r_d, r_e, \tau) = e^{A(\tau) - r_d D(\tau) - r_e E(\tau)},$$

kde

$$D(\tau) = \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta},$$

$$E(\tau) = \frac{1}{c(c - \delta)} [c(1 - e^{-\delta\tau}) - \delta(1 - e^{-c\tau})],$$

$$A(\tau) = \int_0^\tau \left[-\gamma D(y) - \alpha E(y) + \frac{\sigma_d^2}{2} D(y)^2 + \frac{\sigma_e^2}{2} E(y)^2 \right] dy.$$

Toto vyjadrenie pre cenu domáceho dlhopisu použijeme v nasledujúcej časti pri odhade rizikovo neutrálnych parametrov domácej úrokovej miery, ktorý je založený

na minimalizácii váženej strednej kvadratickej chyby medzi teoretickými a trhovými výnosovými krivkami.

Ďalším významným konvergenčným modelom, ktorý je analyzovaný v [14], je konvergenčný model CIR typu, v ktorom volatility európskej aj domácej úrokovej miery sú úmerné odmocnине príslušnej úrokovej miery. Tým je zabezpečené, že európska aj domáca úroková miera nadobúdajú záporné hodnoty s nulovou pravdepodobnosťou.

Najvšeobecnejším konvergenčným modelom je konvergenčný model CKLS typu, ktorý je hlavným predmetom záujmu práce [20], v ktorej sa pri kalibrácii daného modelu využíva analytická aproximácia cien dlhopisov. Tá spočíva v tom, že v riešení parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu v jednofaktorovom Vašíčkovom modeli sa konštantná volatilita nahradí aktuálnou hodnotou volatility σr^γ . Takto upravené riešenie potom predstavuje aproximáciu ceny európskeho dlhopisu v jednofaktorovom CKLS modeli, ktorý v konvergenčnom modeli CKLS typu popisuje vyvoj európskej úrokovej miery. Pre cenu domáceho dlhopisu je definovaná analogická aproximácia, v rámci ktorej sa členy σ_d, σ_e v riešení parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu domáceho dlhopisu v konvergenčnom modeli Vašíčkovho typu nahradia členmi $\sigma_d r^{\gamma_d}, \sigma_e r^{\gamma_e}$.

Poznamenajme teda, že výpočty realizované v rámci tejto diplomovej práce sa možno budú dať po nejakých úpravách využiť aj pri kalibrácii konvergenčného modelu CKLS typu.

Kapitola 5

Odhad parametrov konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou

Odhad parametrov konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou realizujeme v dvoch hlavných krokoch. Najprv sa odhadnú parametre procesu, ktorý charakterizuje dynamiku európskej úrokovej miery a s využitím týchto parametrov sa následne odhadnú parametre rovnice popisujúcej vývoj domácej úrokovej miery.

5.1 Odhad parametrov procesu pre európsku úrokovú mieru

Z formulácie modelu (4.1) je zrejmé, že v rámci odhadu parametrov procesu, ktorý charakterizuje dynamiku európskej úrokovej miery, ide o odhad parametrov jednofaktorového Vašíčkovho modelu.

5.1.1 Podmienené rozdelenie európskej úrokovej miery

Keďže európska úroková miera je v konvergenčnom modeli Vašíčkovho typu charakterizovaná jednofaktorovým Vašíčkovým modelom, tak jej podmienené rozdelenie sa odvodí analogicky ako v časti 3.1.1 a teda

$$r_e(t + \Delta t) = e^{-c\Delta t} r_e(t) + d(1 - e^{-c\Delta t}) + \sigma_e e^{-c(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{cs} dw_s. \quad (5.1)$$

Potom podmienená stredná hodnota európskej úrokovej miery má tvar

$$E[r_e(t + \Delta t)|r_e(t)] = e^{-c\Delta t} r_e(t) + d(1 - e^{-c\Delta t}),$$

a podmienená variancia vyzerá nasledovne

$$Var[r_e(t + \Delta t)|r_e(t)] = \frac{\sigma_e^2}{2c}(1 - e^{-2c\Delta t}).$$

5.1.2 Maximálne vierohodný odhad parametrov procesu pre európsku úrokovú mieru

Uvažujme diskkrétne pozorovania r_e^1, \dots, r_e^{n+1} hodnôt európskej úrokovej miery, o ktorej predpokladáme, že jej dynamika je charakterizovaná jednofaktorovým Vašíčkovým modelom

$$dr_e = c(d - r_e)dt + \sigma_e dw_e.$$

Explicitné vyjadrenie odhadov parametrov c, d, σ_e metódou maximálnej vierohodnosti je totožné s odhadom parametrov κ, θ, σ v časti 3.1.2, ak $\kappa = c, \theta = d$ a $\sigma = \sigma_e$. Ide teda iba o preznačenie parametrov procesu.

5.1.3 Odhad parametrov procesu pre európsku úrokovú mieru na základe minimalizácie miery vzdialenosti reálnej a odhadovanej výnosovej krivky

Predpokladajme, že máme k dispozícii denné dáta výnosových kriviek a európska úroková miera sa v reálnej pravdepodobnostnej miere riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr_e = c(d - r_e)dt + \sigma_e dw_e.$$

Cieľom je teda minimalizovať vážený súčet štvorcov rozdielov skutočných a modelom implikovaných výnosov a odvodenie optimálnych hodnôt parametrov procesu je analogické ako v časti 3.2 s tým, že vo výsledných vzťahoch zavedieme nasledujúcu substitúciu $\beta = -c, \alpha = cd - \lambda_e \sigma_e, \sigma = \sigma_e$.

5.2 Odhad trhovej ceny rizika v prípade jednofaktorového Vašíčkovho modelu

Máme už popísané dva hlavné prístupy v rámci odhadu parametrov jednofaktorového Vašíčkovho modelu, a to metódu maximálnej vierohodnosti a prístup založený na minimalizácii váženého súčtu štvorcov rozdielov skutočných a modelom implikovaných výnosov. Ak odhadneme parametre modelu metódou maximálnej vierohodnosti, tak môžeme následne analyzovať priebeh short rate, nie však výnosové krivky. Dôvod je ten, že potrebujeme odhadnúť ešte jeden parameter a tým je *trhová cena rizika*.

Poznamenajme, že pomocou výnosových kriviek vieme odhadnúť rizikovo neutrálné parametre, zatiaľ čo z priebehu short rate sa dajú odhadnúť reálne parametre modelu úrokovej miery. Na tomto mieste teda vzniká otázka, akým spôsobom určíme trhovú cenu rizika a odpoveď na ňu dáva práve táto podkapitola.

Uvažujme, že máme odhadnuté parametre κ, θ, σ jednofaktorového Vašíčkovho modelu

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dw \tag{5.2}$$

metódou maximálnej vierohodnosti aplikovanou na časový rad hodnôt krátkodobej úrokovej miery. Ak sa chceme zaoberať presnosťou odhadnutých výnosových kriviek,

potrebujeme aj odhad trhovej ceny rizika, ktorá vystupuje vo vzťahu pre cenu dlhopisu.

Trhovú cenu rizika odhadneme minimalizáciou nasledujúcej účelovej funkcie

$$F(\lambda) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [R(\tau_j, r_i) - R_{ij}]^2$$

kde $R(\tau_j, r_i)$ je teoretický výnos v i -ty deň pre j -tu splatnosť implikovaný modelom (5.2) a R_{ij} predstavuje skutočný (trhový) výnos v i -ty deň pre dobu splatnosti τ_j . Znovu teda ide o minimalizáciu súčtu štvorcov rozdielov skutočných a modelom implikovaných výnosov s tým, že už poznáme hodnoty parametrov modelu a teda jediným neznámym parametrom je trhovú cenu rizika.

S využitím explicitného vzťahu pre cenu dlhopisu v jednofaktorovom Vašíčkovom modeli dostaneme

$$F(\lambda) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\frac{c_0(\tau_j, r_i) + c_1(\tau_j) (\kappa\theta - \lambda\sigma) + c_2(\tau_j)\sigma^2}{\tau_j} + R_{ij} \right]^2,$$

pričom

$$\begin{aligned} c_0(\tau_j, r_i) &= \frac{r_i(e^{-\kappa\tau_j} - 1)}{\kappa}, \\ c_1(\tau_j) &= \frac{1}{\kappa} \left[\frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa} - \tau_j \right], \\ c_2(\tau_j) &= \frac{1}{2\kappa^2} \left[\frac{e^{-\kappa\tau_j} - 1}{\kappa} + \tau_j - \frac{(1 - e^{-\kappa\tau_j})^2}{2\kappa} \right]. \end{aligned}$$

Ak funkciu $F(\lambda)$ zderivujeme podľa premennej λ a deriváciu položíme rovnú nule, tak odhad λ je daný vzťahom

$$\hat{\lambda} = \frac{\kappa\theta}{\sigma} + \left(\sigma \sum_{i,j} \left[\frac{c_1(\tau_j)}{\tau_j} \right]^2 \right)^{-1} \sum_{i,j} \frac{c_1(\tau_j)}{\tau_j^2} [c_0(\tau_j, r_i) + c_2(\tau_j)\sigma^2 + R_{ij}\tau_j]. \quad (5.3)$$

5.3 Odhad parametrov procesu pre domácu úrokovú mieru

Jedným z hlavných prínosov tejto práce je odvodenie vzťahu pre podmienené rozdelenie domácej úrokovej miery, ktorý využijeme pri kalibrácii konvergenčného modelu Vašíčkovho typu.

5.3.1 Podmienené rozdelenie domácej úrokovej miery

Ovodenie podmieneného rozdelenia domácej úrokovej miery je o niečo zložitejšie ako v prípade európskej úrokovej miery, keďže v rovnici pre domácu úrokovú mieru

vystupuje európska úroková miera, ktorá je síce sama osebe riešením stochastickej diferenciálnej rovnice, ale pri výpočte odhadov domácich parametrov už považujeme odhady európskych parametrov za známe.

Uvažujme teda proces popisujúci vývoj domácej úrokovej miery pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dr_d = [a + b(r_e - r_d)] dt + \sigma_d dw_d,$$

a zaveďme nový proces y v tvare

$$y = e^{bt} r_d.$$

Pomocou Itóovej lemy 1.2 určíme diferenciál tohto procesu

$$dy = d(e^{bt} r_d) = (be^{bt} r_d + [a + b(r_e - r_d)] e^{bt}) dt + \sigma_d e^{bt} dw_d$$

a po úprave dostaneme nasledujúcu rovnosť

$$dy = (a + br_e) e^{bt} dt + \sigma_d e^{bt} dw_d,$$

ktorá sa integrovaním na intervale $(t, t + \Delta t)$ zmení na

$$\begin{aligned} e^{b(t+\Delta t)} r_d(t + \Delta t) - e^{bt} r_d(t) &= \int_t^{t+\Delta t} (a + br_e(s)) e^{bs} ds + \sigma_d \int_t^{t+\Delta t} e^{bs} dw(s) \\ &= \int_t^{t+\Delta t} a e^{bs} ds + b \int_t^{t+\Delta t} r_e(s) e^{bs} ds + \sigma_d \int_t^{t+\Delta t} e^{bs} dw(s) \end{aligned} \quad (5.4)$$

S využitím vzťahu (5.1) vypočítame hodnotu integrálu, v ktorom vystupuje európska úroková miera

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} r_e(s) e^{bs} ds &= \int_t^{t+\Delta t} [e^{-c(s-t)} r_e(t) + d(1 - e^{-c(s-t)})] e^{bs} ds \\ &\quad + \int_t^{t+\Delta t} \left[\sigma_e \int_t^s e^{-c(s-z)} dw(z) \right] e^{bs} ds \\ &= r_e(t) e^{ct} \int_t^{t+\Delta t} e^{(b-c)s} ds + d \int_t^{t+\Delta t} (1 - e^{-c(s-t)}) e^{bs} ds \\ &\quad + \sigma_e \left(\int_t^s e^{-c(s-z)} dw(z) \right) \int_t^{t+\Delta t} e^{bs} ds \\ &= \frac{r_e(t) e^{bt}}{b-c} (e^{(b-c)\Delta t} - 1) + d \left[\frac{e^{b(t+\Delta t)} - e^{bt}}{b} + \frac{e^{bt} - e^{-c\Delta t} e^{b(t+\Delta t)}}{b-c} \right] \\ &\quad + \frac{\sigma_e}{b} (e^{b(t+\Delta t)} - e^{bt}) \int_t^s e^{-c(s-z)} dw(z), \end{aligned} \quad (5.5)$$

a dosadením (5.5) do rovnice (5.4) a jej vydelením výrazom $e^{b(t+\Delta t)}$ napokon dostaneme vzťah pre podmienené rozdelenie domácej úrokovej miery

$$\begin{aligned} r_d(t + \Delta t) &= e^{-b\Delta t} r_d(t) + \frac{a}{b} (1 - e^{-b\Delta t}) + \frac{br_e(t)}{b-c} (e^{-c\Delta t} - e^{-b\Delta t}) + d (1 - e^{-b\Delta t}) \\ &\quad + \frac{bd}{b-c} (e^{-b\Delta t} - e^{-c\Delta t}) + \sigma_e (1 - e^{-b\Delta t}) \int_t^s e^{-c(s-z)} dw(z) \\ &\quad + \sigma_d e^{-b(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{bs} dw(s). \end{aligned}$$

Podmienená stredná hodnota domácej úrokovej miery má teda tvar

$$\begin{aligned} E[r_d(t + \Delta t) | r_d(t), r_e(t)] &= e^{-b\Delta t} r_d(t) + \left(\frac{a}{b} + d\right) (1 - e^{-b\Delta t}) \\ &\quad + \frac{b(r_e(t) - d)}{b-c} (e^{-c\Delta t} - e^{-b\Delta t}) \end{aligned}$$

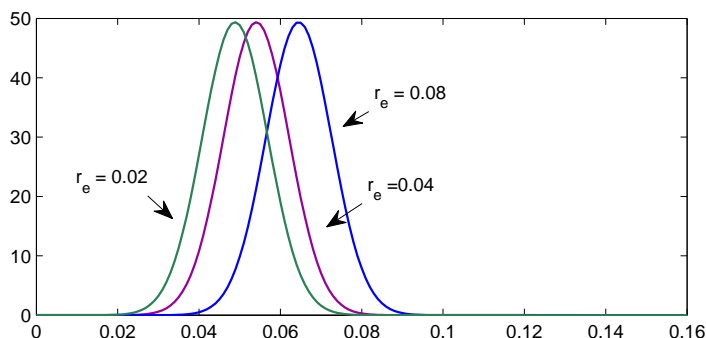
keďže stredná hodnota Itóovho integrálu je podľa vety 1.1 rovná nule. Pri výpočte podmienenej variancie rozdelenia domácej úrokovej miery taktiež využijeme tvrdenie 1.1 a dostaneme

$$\begin{aligned} Var[r_d(t + \Delta t) | r_d(t), r_e(t)] &= \sigma_e^2 (1 - e^{-b\Delta t})^2 Var \left[\int_t^s e^{-c(s-z)} dw(z) \right] \\ &\quad + \sigma_d^2 e^{-2b(t+\Delta t)} Var \left[\int_t^{t+\Delta t} e^{bs} dw(s) \right] \\ &= \sigma_e^2 (1 - e^{-b\Delta t})^2 \int_t^s e^{-2c(s-z)} dz \\ &\quad + \sigma_d^2 e^{-2b(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{2bs} ds \\ &= \frac{\sigma_e^2}{2c} (1 - e^{-2c\Delta t}) (1 - e^{-b\Delta t})^2 + \frac{\sigma_d^2}{2b} (1 - e^{-2b\Delta t}). \end{aligned}$$

Na obrázku 5.3.1 je znázornená podmienená hustota (*conditional density*) domácej úrokovej miery o 3 mesiace, a teda pravdepodobnostný popis toho, akú hodnotu nadobudne domáca úroková miera o 3 mesiace s tým, že poznáme aktuálnu hodnotu domácej aj európskej úrokovej miery. Výpočet parametrov podmieneného rozdelenia a následné určenie podmienenej hustoty domácej úrokovej miery je realizované pre parametre $a = 0.0938$, $b = 3.67$, $c = 0.2087$, $d = 0.035$, $\sigma_d = 0.032$, $\sigma_e = 0.016$, $\lambda_d = 3.315$, $\lambda_e = -0.655$, $r_d = 0.05$, $r_e = 0.04$ konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou prevzaté z [14].

Tento obrázok je v súlade s tým, čo očakávame od vývoja podmienenej hustoty domácej úrokovej miery vzhľadom na to, ako sú zvolené parametre daného modelu. Ak je aktuálny úrokový difereciál, t.j. $r_e - r_d$, pomerne veľký, tak domáca úroková miera sa za uvažované obdobie (3 mesiace) viac vzdiali od svojej začiatkovej hodnoty. Má to logické vysvetlenie, keďže parameter, ktorý predstavuje vychýlenie domácej od európskej úrokovej miery, je takmer nulový ($\frac{a}{b} = 0.026$) a rýchlosť reverzie domácej

úrokovej miery k hodnote, ktorá je súčtom európskej úrokovej miery a vychýlenia $\frac{a}{b}$, je dosť veľká ($b = 3.67$). Tým pádom je domáca úroková miera výrazne priťahovaná k aktuálnej hodnote európskej úrokovej miery o 3 mesiace, ku ktorej je ešte pripočítané vychýlenie $\frac{a}{b}$. Európska úroková miera však nemá tendenciu rýchlo sa blížiť k svojej dlhodobej rovnovážnej úrovni ($d = 0.035$), čo je spôsobené malou hodnotou parametra rýchlosti reverzie ($c = 0.2087$) v rovnici pre vývoj európskej úrokovej miery.



Obr. 5.1: Funkcia podmienenej hustoty náhodnej premennej, ktorou je domáca úroková miera, pri rôznych začiatočných hodnotách r_e európskej úrokovej miery, pričom začiatočná hodnota $r_d = 0.05$ a $\Delta t = 0.25$

5.3.2 Maximálne vierohodný odhad parametrov procesu pre domácu úrokovú mieru

Uvažujme diskrétna pozorovania r_d^1, \dots, r_d^{n+1} hodnôt domácej úrokovej miery, o ktorej predpokladáme, že jej dynamika je charakterizovaná stochastickou diferenciálnou rovnicou v tvare

$$dr_d = [a + b(r_e - r_d)] dt + \sigma_d dw_d.$$

Poznamenajme, že c, d, σ_e sú parametre rovnice popisujúcej vývoj európskej úrokovej miery, pričom odhad týchto parametrov v rámci uvažovaného konvergenčného modelu (4.1) môžeme chápať ako samostatný problém.

Nech Δt je dĺžka časového intervalu medzi dvoma pozorovaniami. Kvôli zjednodušeniu matematických zápisov zavedme nasledujúcu substitúciu

$$y^2 = \frac{\sigma_e^2}{2c}(1 - e^{-2c\Delta t})(1 - e^{-b\Delta t})^2 + \frac{\sigma_d^2}{2b}(1 - e^{-2b\Delta t}),$$

potom štatistický zápis podmieneného rozdelenia domácej úrokovej miery má tvar

$$r_d^{t+\Delta t} | r_d^t, r_e^t \sim N \left(e^{-b\Delta t} r_d^t + \left(\frac{a}{b} + d \right) (1 - e^{-b\Delta t}) + \frac{b(r_e^t - d)}{b - c} (e^{-c\Delta t} - e^{-b\Delta t}), y^2 \right).$$

Pre funkciu hustoty domácej úrokovej miery teda platí

$$f(r_d^{i+1}|r_d^i, r_e^i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^2}} \exp\{-\xi(r_d^i, r_e^i, a, b, y^2)\},$$

kde

$$\xi(r_d^i, r_e^i, a, b, y^2) = \frac{\left[r_d^{i+1} - e^{-b\Delta t} r_d^i - \left(\frac{a}{b} + d\right) (1 - e^{-b\Delta t}) - \frac{b(r_e^i - d)}{b-c} (e^{-c\Delta t} - e^{-b\Delta t}) \right]^2}{2y^2}$$

a s využitím predpokladu nezávislosti pozorovaní môžeme napísať hodnotu vierohodnostnej funkcie ako súčin hustôt náhodných premenných s normálnym rozdelením, t.j.

$$L(a, b, y^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi y^2}} \exp\{-\xi(r_d^i, r_e^i, a, b, y^2)\}.$$

Logaritmická vierohodnostná funkcia potom vyzerá nasledovne

$$\ell(a, b, y^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi y^2) - \sum_{i=1}^n \xi(r_d^i, r_e^i, a, b, y^2).$$

Teraz je cieľom nájsť také hodnoty parametrov a, b, y^2 , v ktorých funkcia $\ell(a, b, y^2)$ nadobúda svoje maximum. Budeme postupovať nasledovne. Fixujeme hodnotu parametra b a derivácie funkcie $\ell(a, b, y^2)$ podľa premenných a, y^2 položíme rovné nule. Dostaneme tak systém rovníc

$$\sum_{i=1}^n \left[r_d^{i+1} - e^{-b\Delta t} r_d^i - \left(\frac{a}{b} + d\right) (1 - e^{-b\Delta t}) - \frac{b(r_e^i - d)}{b-c} (e^{-c\Delta t} - e^{-b\Delta t}) \right] = 0,$$

$$\frac{1}{2y^4} \sum_{i=1}^n \left[r_d^{i+1} - e^{-b\Delta t} r_d^i - \left(\frac{a}{b} + d\right) (1 - e^{-b\Delta t}) - \frac{b(r_e^i - d)}{b-c} (e^{-c\Delta t} - e^{-b\Delta t}) \right]^2 = \frac{n}{2y^2},$$

ktorého riešením je

$$\hat{a} = \frac{b}{n(1 - e^{b\Delta t})} \sum_{i=1}^n \left[r_d^{i+1} - e^{-b\Delta t} r_d^i - d(1 - e^{-b\Delta t}) - \frac{b(r_e^i - d)}{b-c} (e^{-c\Delta t} - e^{-b\Delta t}) \right],$$

$$\hat{y}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[r_d^{i+1} - e^{-b\Delta t} r_d^i - \left(\frac{a}{b} + d\right) (1 - e^{-b\Delta t}) - \frac{b(r_e^i - d)}{b-c} (e^{-c\Delta t} - e^{-b\Delta t}) \right]^2.$$

Rôznym hodnotám parametra b prislúchajú rozličné kombinácie odhadov parametrov \hat{a}, \hat{y}^2 a teda odhad parametra b je v tomto kroku jednorozmerným optimalizačným problémom.

5.3.3 Odhad parametrov procesu pre domácu úrokovú mieru na základe minimalizácie miery vzdialenosti reálnej a odhadovanej výnosovej krivky

Tento prístup spočíva v minimalizovaní miery vzdialenosti reálnej a odhadovanej výnosovej krivky a teda cieľom je minimalizovať účelovú funkciu, ktorá má tvar

$$F = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} [R_d(r_d^i, r_e^i, \tau_j) - R_d^{ij}]^2,$$

kde $R_d(r_d^i, r_e^i, \tau_j)$ predstavuje teoretický výnos domáceho dlhopisu v i -ty deň a pre splatnosť j a R_d^{ij} je skutočným výnosom (pozorovaným na trhu) domáceho dlhopisu v i -ty deň pre dobu splatnosti τ_j . Cena domáceho dlhopisu sa podľa časti 4.1 dá vyjadriť v explicitnom tvare

$$P_d(r_d, r_e, \tau) = e^{A(\tau) - r_d D(\tau) - r_e E(\tau)},$$

kde

$$\begin{aligned} D(\tau) &= \frac{1 - e^{-\delta\tau}}{\delta}, \\ E(\tau) &= \frac{1}{c(c - \delta)} [c(1 - e^{-\delta\tau}) - \delta(1 - e^{-c\tau})], \\ A(\tau) &= \int_0^\tau \left[-\gamma D(y) - \alpha E(y) + \frac{\sigma_d^2}{2} D(y)^2 + \frac{\sigma_e^2}{2} E(y)^2 \right] dy. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Môžeme si všimnúť, že logaritmus ceny domáceho dlhopisu je teda lineárnou funkciou domácej aj európskej úrokovej miery

$$\ln P_d(r_d, r_e, \tau) = A(\tau) - D(\tau)r_d - E(\tau)r_e.$$

Pripomeňme, že parametre $c, d, \sigma_e, \lambda_e$ týkajúce sa procesu popisujúceho vývoj európskej úrokovej miery už máme odhadnuté. Vývoj európskej úrokovej miery totiž nezávisí od vývoja domácej úrokovej miery a tým pádom môžeme najprv samostatne odhadnúť parametre procesu pre európsku úrokovú mieru, ktoré následne využijeme pri odhade parametrov rovnice pre domácu úrokovú mieru.

Pri fixovanej hodnote parametra δ sa logaritmus ceny domáceho dlhopisu dá vyjadriť v tvare

$$\ln P_d(r_d, r_e, \tau) = c_0(r_d, r_e, \tau) + c_1(\tau)\gamma + c_2(\tau)\sigma_d^2,$$

kde

$$\begin{aligned} c_0(r_d, r_e, \tau) &= \int_0^\tau \left[\frac{\sigma_e^2}{2} E^2(y) - (cd - \lambda_e \sigma_e) E(y) \right] dy - D(\tau)r_d - E(\tau)r_e \\ c_1(\tau) &= - \int_0^\tau D(y) dy \\ c_2(\tau) &= \frac{1}{2} \int_0^\tau D^2(y) dy. \end{aligned}$$

a funkcie $E(\tau)$, $D(\tau)$ splňajú vzťahy (5.6).

Ako sme už spomenuli, cieľom tohto prístupu je minimalizovať funkcionál

$$\begin{aligned} F(a, b, \sigma_d) &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left[\frac{\ln P(\tau_j, r_i)}{\tau_j} + R_{ij} \right]^2 \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left[\frac{c_0(r_d^i, r_e^i, \tau_j) + c_1(\tau_j)\gamma + c_2(\tau_j)\sigma_d^2}{\tau_j} + R_{ij} \right]^2, \end{aligned}$$

pričom predpoklad fixovanej hodnoty parametra δ nám umožní nájsť optimálne hodnoty parametrov γ, σ_d derivovaním funkcie F . Ak derivácie funkcie F podľa premenných γ, σ_d položíme rovné nule, tak napokon dostaneme odhady daných premenných ako riešenie nasledujúceho systému lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} \gamma \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_1^2 + \sigma_d^2 \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 &= - \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_0 + R_{ij} \tau_j) c_1 \\ \gamma \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_1 c_2 + \sigma_d^2 \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_2^2 &= - \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_0 + R_{ij} \tau_j) c_2. \end{aligned}$$

Parametre γ, σ_d vyjadrené z nutných podmienok optimality teraz dosadíme do účelovej funkcie, ktorá tak bude funkciou jediného parametra δ , ktorého odhad predstavuje podobne ako v predchádzajúcej časti jednorozmerný optimalizačný problém.

5.4 Odhad trhovej ceny rizika pre domácu úrokovú mieru v prípade konvergenčného modelu Vašíčkovho typu

Proces riadiaci vývoj domácej krátkodobej úrokovej miery je v rámci konvergenčného modelu Vašíčkovho typu charakterizovaný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr_d = [a + b(r_e - r_d)] dt + \sigma_d dw_d. \quad (5.7)$$

Predpokladajme, že parametre a, b, σ_d už máme odhadnuté metódou maximálnej vierohodnosti aplikovanou na časový rad domácej short rate. Taktiež uvažujme, že máme k dispozícii aj odhady parametrov $c, d, \sigma_e, \lambda_e$ procesu, ktorý charakterizuje vývoj európskej úrokovej miery. Trhovú cenu rizika potom odhadneme minimalizáciou účelovej funkcie

$$F(\lambda_d) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [R(\tau_j, r_i) - R_{ij}]^2$$

kde $R(\tau_j, r_i)$ je teoretický výnos v i -ty deň pre j -tu splatnosť implikovaný modelom (5.7) a R_{ij} predstavuje trhovú cenu výnosu v i -ty deň pre dobu splatnosti τ_j . Jediným neznámym parametrom je v tomto prípade trhovú cenu rizika

S využitím explicitného vzťahu pre cenu domáceho dlhopisu v konvergenčnom modeli Vašíčkovho typu dostaneme

$$F(\lambda_d) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\frac{c_0(r_d^i, r_e^i, \tau_j) + c_1(\tau_j)(a - \lambda_d \sigma_d) + c_2(\tau_j) \sigma_d^2}{\tau_j} + R_{ij} \right]^2,$$

pričom

$$\begin{aligned} c_0(r_d^i, r_e^i, \tau_j) &= \int_0^{\tau_j} \left[\frac{\sigma_e^2}{2} E^2(y) - (cd - \lambda_e \sigma_e) E(y) \right] dy - D(\tau_j) r_d^i - E(\tau_j) r_e^i, \\ c_1(\tau_j) &= - \int_0^{\tau_j} D(y) dy, \\ c_2(\tau_j) &= \frac{1}{2} \int_0^{\tau_j} D^2(y) dy, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} D(\tau_j) &= \frac{1 - e^{-b\tau_j}}{b}, \\ E(\tau_j) &= \frac{1}{c(c-b)} [c(1 - e^{-b\tau_j}) - \delta(1 - e^{-c\tau_j})]. \end{aligned}$$

Derivovaním funkcie $F(\lambda_d)$ podľa premennej λ_d a položením danej derivácie rovné nule napokon dostaneme vzťah pre odhad trhovej ceny rizika pre domácu úrokovú mieru v tvare

$$\hat{\lambda}_d = \frac{a}{\sigma_d} + \left(\sigma_d \sum_{i,j} \left[\frac{c_1(\tau_j)}{\tau_j} \right]^2 \right)^{-1} \sum_{i,j} \frac{c_1(\tau_j)}{\tau_j^2} [c_0(\tau_j, r_d^i, r_e^i) + c_2(\tau_j) \sigma_d^2 + R_{ij} \tau_j]. \quad (5.8)$$

Kapitola 6

Kalibrácia vybraných modelov úrokových mier na reálnych dátach

Z dôvodu použitia modelov úrokovej miery v praxi je nutné správne zvoliť parametre, ktoré sa v daných modeloch vyskytujú, t.j. nakalibrovať ich. Táto časť práce podrobne popisuje nami navrhnutú metódu (ktorá je kombináciou už známych prístupov) týkajúcu sa kalibrácie dvojfaktorového konvergenčného modelu Vašíčkovho typu. Ide o dvojkrokovú optimalizačnú metódu využívajúcu priebeh krátkodobej úrokovej miery a súčasne výnosové krivky.

Zároveň v tejto časti práce prezentujeme výsledky získané aplikovaním navrhnutej metódy kalibrácie na reálne trhové dáta.

6.1 Výber dát

Konvergenčný model Vašíčkovho typu popisuje súvislosť medzi vývojom úrokovej miery v rámci eurozóny a vývojom úrokovej miery krajiny, ktorá v dohľadnej dobe do eurozóny vstúpi. Preto sme sa rozhodli, že budeme pracovať s dátami týkajúcimi sa sadziab Euribor a Bribor za referenčné obdobie od 1. októbra 2008 do 31. decembra 2008, t.j. tri mesiace pred vstupom Slovenska do Európskej menovej únie.

Za krátkodobú európsku úrokovú mieru budeme považovať týždenný Euribor a krátkodobú domácu (slovenskú) úrokovú mieru budeme aproximovať sadzbou Bribor na jeden týždeň. Keďže Bribor bol na rozdiel od Euriboru kótovaný pre menej rôznych maturít, pre naše účely použijeme doby splatnosti 1, 2, 3, 6, 9 a 12 mesiacov.

Najprv však na ilustráciu podrobne popíšeme kalibráciu jednofaktorového Vašíčkovho modelu na denných dátach výnosových kriviek prislúchajúcich úrokovej miere Euribor za rok 2011.

Dáta týkajúce sa sadzby Euribor sú dostupné na <http://www.euribor-ebf.eu> a historické časové rady sadzby Bribor sú zverejnené na <http://www.nbs.sk>.

6.2 Kalibrácia jednofaktorového Vašíčkovho modelu

Predpokladajme, že jednofaktorový Vašíčkov model je daný v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dw, \quad (6.1)$$

pričom r_t predstavuje hodnotu krátkodobej úrokovej miery v čase t . Pri aplikovaní tohto modelu na trhové dáta nebudeme aproximovať krátkodobú (okamžitú) úrokovú mieru jednoduchou sadzbou Eonia, ktorá môže byť príliš ovplyvnená špekuláciami na trhu, ale za proxy krátkodobej úrokovej miery zoberieme týždennú úrokovú mieru.

Nasledujúca schéma popisuje prvý z algoritmov, ktorý navrhujeme pre odhad parametrov jednofaktorového Vašíčkovho modelu.

Metodológia 1

Vstupné dáta

- vektor splatností τ dĺžky m
- časový rad n hodnôt krátkodobej úrokovej miery
- matica, ktorej zložkami sú trhové výnosy \mathbf{R}_{ij} pre i -ty deň a dobu splatnosti τ_j , $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$

Algoritmus

- metóda maximálnej vierohodnosti aplikovaná na časový rad hodnôt short rate s cieľom odhadnúť parametre κ, θ, σ Vašíčkovho modelu
- minimalizácia súčtu štvorcov odchýlok medzi teoretickými a skutočnými výnosmi s cieľom odhadnúť trhovú cenu rizika λ

Výstup

- parametre $\kappa, \theta, \sigma, \lambda$

Uvažujme teda, že máme k dispozícii časový rad hodnôt krátkodobej úrokovej miery a denné dáta výnosových kriviek za obdobie jedného roka. Budeme pracovať s dennými dátami vyjadrujúcimi sadzbu Euribor za rok 2011 s dobami splatnosti 1 týždeň a 1 až 12 mesiacov.

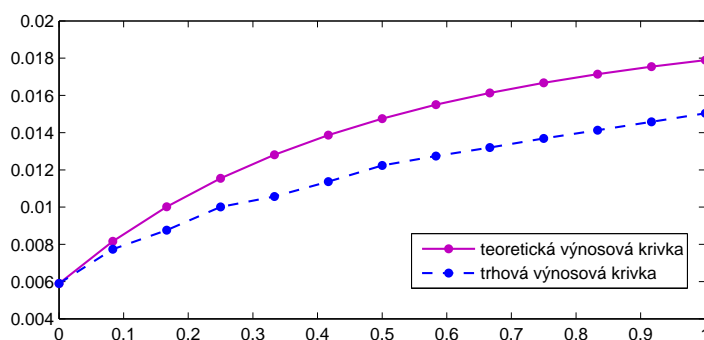
Na časový rad krátkodobej úrokovej miery, ktorú aproximujeme týždenným Euriborom, aplikujeme metódu maximálnej vierohodnosti, čím získame odhady parametrov κ, θ, σ modelu (6.1). Na odhad trhovej ceny rizika použijeme výnosové krivky, pričom optimálna hodnota trhovej ceny rizika je tým parametrom, pre ktorý je hodnota funkcionálu, ktorý predstavuje súčet štvorcov rozdielov skutočných a modelom implikovaných výnosov, minimálna. Odhad parametra λ je teda daný vzťahom (5.3).

Tabuľka 6.1 obsahuje príslušné odhady parametrov jednofaktorového Vašíčkovho modelu.

κ	θ	σ	λ
3.6774	0.0105	0.0050	-8.5225

Tabuľka 6.1: Parametre jednofaktorového Vašíčkovho modelu odhadnuté s využitím metodológie 1

Z nasledujúceho grafu, ktorý znázorňuje odhadnutú a reálnu časovú štruktúru analyzovanej úrokovej miery, môžeme vidieť, že teoretické výnosy sú výrazne nadhodnotené v porovnaní s reálnymi trhovými výnosmi. To, že sme dostali dosť nepresný odhad reálnej výnosovej krivky, sme v podstate aj očakávali, keďže v rámci uvedeného postupu zohráva najdôležitejšiu úlohu vývoj hodnôt krátkodobej úrokovej miery, a teda jediný časový rad, z ktorého sa odhadnú všetky parametre modelu okrem trhovej ceny rizika. Informácia o úrokových mierach pre ostatné doby splatnosti sa použije iba pri odhade trhovej ceny rizika. Preto sa zdá byť vhodné využiť informáciu obsiahnutú vo výnosových krivkách aj pri odhade iných parametrov modelu ako len trhovej ceny rizika.



Obr. 6.1: Porovnanie odhadnutej a reálnej časovej štruktúry úrokovej miery, ktorej dynamika je charakterizovaná jednofaktorovým Vašíčkovým modelom, na odhad parametrov ktorého je aplikovaná metodológia 1

Teraz prejdeme k druhému navrhovanému spôsobu odhadu parametrov Vašíčkovho modelu, ktorý v prvom kroku používa prístup založený na minimalizácii váženého súčtu štvorcov rozdielov skutočných a modelom implikovaných výnosov. Takýmto spôsobom odhadneme z výnosových kriviek rizikovo neutrálne parametre α, β, σ Vašíčkovho modelu (3.10).

Keďže $\beta = -\kappa$, máme už odhadnuté reálne parametre κ, σ modelu (6.1). Pre dané κ, σ teraz nájdeme optimálnu hodnotu parametra θ maximalizáciou logaritmickej

vierohodnostnej funkcie, ktorá je daná vzťahom

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n(1 - e^{-\kappa\Delta t})} \left[\sum_{i=1}^n (r_{i+1} - e^{-\kappa\Delta t} r_i) \right]. \quad (6.2)$$

Nakoniec dorátame trhovú cenu rizika λ a to zo vzťahu $\alpha = \kappa\theta - \lambda\sigma$. Celý tento postup je stručne zhrnutý v nasledujúcej schéme.

Metodológia 2

Vstupné dáta

- vektor splatností τ dĺžky m
- časový rad n hodnôt krátkodobej úrokovej miery
- matica, ktorej zložkami sú trhové výnosy \mathbf{R}_{ij} pre i -ty deň a dobu splatnosti τ_j

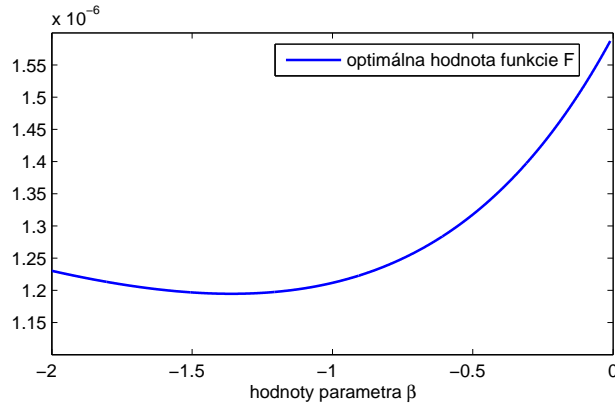
Algoritmus

- minimalizácia váženej strednej kvadratickej chyby medzi skutočnými a modelom implikovanými výnosovými krivkami s cieľom odhadnúť parametre α, β, σ jednofaktorového Vašíčkovho modelu (3.10) formulovaného v rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere
- maximalizácia logaritmickej vierohodnostnej funkcie s cieľom odhadnúť parameter θ pre dané hodnoty parametrov κ, σ
- výpočet trhovej ceny rizika λ zo vzťahu $\alpha = \kappa\theta - \lambda\sigma$

Výstup

- parametre $\kappa, \theta, \sigma, \lambda$

Skúsme teda aplikovať *metodológiu 2* na výnosové krivky týkajúce sa úrokovej miery Euribor za rok 2011 s dobami splatnosti 1 až 12 mesiacov a na časový rad hodnôt short rate, ktorý aj v tomto prípade aproximujeme týždenným Euribor-om. Pre jednoduchosť zatiaľ zvolíme $w_{ij} = 1$ pre $\forall i, j$. Na obrázku 6.2 sú znázornené hodnoty účelovej funkcie F , t.j. váženej strednej kvadratickej chyby medzi teoretickými a trhovými výnosovými krivkami, v závislosti od hodnôt parametra $\beta = -\kappa$.



Obr. 6.2: Optimálne hodnoty funkcie F pre rôzne hodnoty parametra β

Optimálnu hodnotu parametra θ vypočítame zo vzťahu (6.2) a trhovú cenu rizika λ je určená rovnosťou

$$\lambda = \frac{\kappa\theta - \alpha}{\sigma}.$$

V tabuľke 6.2 sú uvedené hodnoty príslušných odhadov parametrov jednofaktorového Vašíčkovho modelu.

κ	θ	σ	λ	F
1.3600	0.0121	0.1182	- 0.2468	1.1946e-006

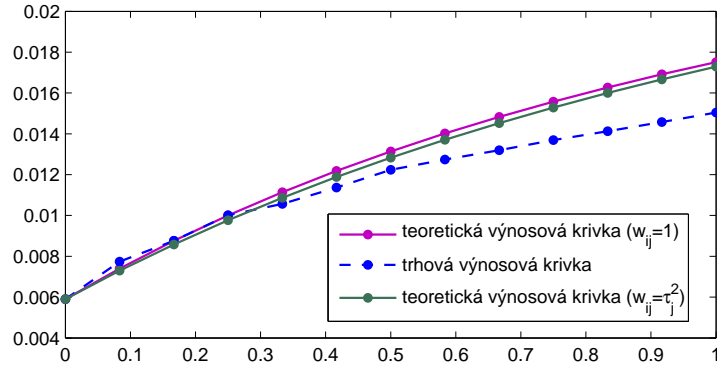
Tabuľka 6.2: Parametre jednofaktorového Vašíčkovho modelu odhadnuté s využitím metodológie 2, pričom $w_{ij} = 1$

Na základe kriviek (červenej a modrej) na obrázku 6.3 si môžeme všimnúť, že začiatok a aj stredná časť výnosovej krivky je fitovaná pomerne dobre, čo sa však nedá povedať o výnosoch dlhopisov s dlhšou maturitou. Napriek tomu sa druhý navrhovaný spôsob kalibrácie jednofaktorového Vašíčkovho modelu zdá byť vhodnejší.

Doteraz sme predpokladali, že váhy w_{ij} sú rovné jednej pre $\forall i, j$. Ak váhy w_{ij} zvolíme v tvare τ_j^2 , tak zabezpečíme lepšiu zhodu odhadovaných a presných výnosov dlhopisov s dlhšou splatnosťou. Takýto prístup je použitý v [23]. V našom prípade sú nové odhady parametrov nasledovné

κ	θ	σ	λ	F
1.0638	0.0126	0.1217	-0.2272	4.3817e-007

Tabuľka 6.3: Parametre jednofaktorového Vašíčkovho modelu odhadnuté s využitím metodológie 2, pričom $w_{ij} = \tau_j^2$



Obr. 6.3: Porovnanie odhadnutej a reálnej časovej štruktúry úrokovej miery, ktorej dynamika je charakterizovaná jednofaktorovým Vašíčkovým modelom, na odhad parametrov ktorého je aplikovaná metodológia 2

Všimnime si, že nové odhady sa v porovnaní s odhadmi uvedenými v tabuľke 6.2 nejakovo výrazne nezmenili a na základe obrázku 6.3 tiež môžeme konštatovať, že zhoda odhadovaných a presných výnosov dlhopisov s dlhšou maturitou sa zlepšila iba veľmi málo. Poznamenajme, že hodnoty účelových funkcií v tabuľkách 6.2 a 6.3 sa nedajú navzájom porovnávať, ide totiž o rôzne účelové funkcie.

Skúsme teraz údaje za rok 2011 rozdeliť na skupiny dát za jednotlivé kvartály. Pri kalibrácii sme však narazili na problém a to, že odhad parametra σ vyšiel záporný pre všetky kvartály. Ako teda budeme postupovať?

Jednou z možností je pre zvolené hodnoty β a rôzne fixné hodnoty parametra σ odhadnúť parameter α a nájsť takú kombináciu daných parametrov, pre ktorú účelová funkcia F nadobúda svoje minimum. Keďže v takomto prípade optimálna σ vždy nadobúda zvolenú ľavú krajnú hodnotu, rozhodli sme sa pre inú alternatívu. Parameter σ odhadneme metódou maximálnej vierohodnosti aplikovanou na časový rad short rate za daný kvartál. Potom pre zvolenú hodnotu parametra β je odhad α daný vzťahom

$$\alpha(\beta) = - \left(\sum_{i,j} w_{ij} \left[\frac{c_1(\tau_j)}{\tau_j} \right]^2 \right)^{-1} \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} c_1(\tau_j) [c_0(\tau_j, r_i) + c_2(\tau_j)\sigma^2 + R_{ij}\tau_j],$$

kde

$$c_0(\tau_j, r_i) = \frac{r_i(1 - e^{\beta\tau_j})}{\beta},$$

$$c_1(\tau_j) = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1 - e^{\beta\tau_j}}{\beta} + \tau_j \right],$$

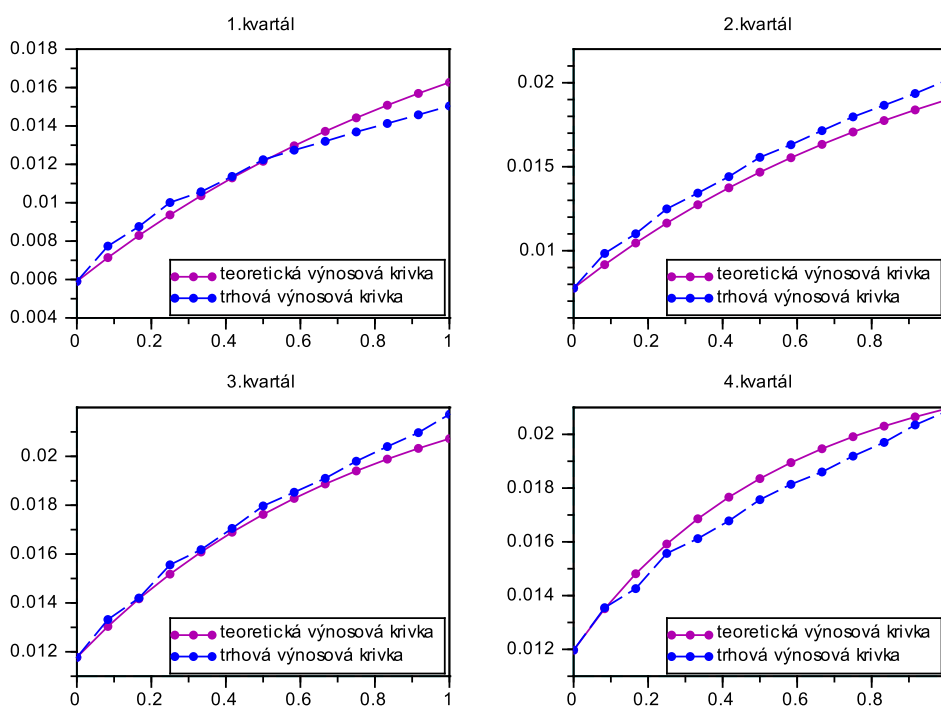
$$c_2(\tau_j) = \frac{1}{2\beta^2} \left[\frac{1 - e^{\beta\tau_j}}{\beta} + \tau_j + \frac{(1 - e^{\beta\tau_j})^2}{2\beta} \right].$$

Odhady parametrov jednofaktorového Vašíčkovho modelu aplikovaného na dáta za jednotlivé kvartály roku 2011 sú zaznamenané v tabuľke 6.4, z ktorej si môžeme všimnúť, že vážená stredná kvadratická chyba prislúchajúca jednotlivým štvrťrokom nadobúda menšie hodnoty v porovnaní s váženou strednou kvadratickou chybou, ktorú dostaneme, ak danú metódu kalibrácie aplikujeme na denné dáta výnosových kriviek za celý rok a to sme vlastne aj očakávali.

EURIBOR 2011	κ	θ	σ	λ	F
1.kvartál	1.3360	0.0092	0.0026	-10.3822	5.7178e-007
2.kvartál	1.5210	0.0141	0.0026	-9.8461	1.2921e-007
3.kvartál	2.0890	0.0120	0.0026	-12.4259	8.6013e-008
4.kvartál	3.1010	0.0080	0.0022	-24.1936	3.4777e-008

Tabuľka 6.4: Odhady parametrov jednofaktorového Vašíčkovho modelu pre dáta za jednotlivé kvartály a príslušné optimálne hodnoty účelovej funkcie

Na nasledujúcom obrázku sú znázornené odhadnuté a trhové výnosové krivky sadzby Euribor za jednotlivé kvartály roku 2011, pričom trhová výnosová krivka prislúcha prvému obchodovateľnému dňu v danom štvrťroku.



Obr. 6.4: Porovnanie odhadnutej a reálnej časovej štruktúry úrokovej miery za jednotlivé kvartály

6.3 Kalibrácia konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou

Uvažujme konvergenčný model Vašíčkovho typu v tvare

$$\begin{aligned}dr_d &= [a + b(r_e - r_d)] dt + \sigma_d dw_d, \\dr_e &= c(d - r_e)dt + \sigma_e dw_e, \\cov(dw_d, dw_e) &= 0,\end{aligned}\tag{6.3}$$

kde r_d je domáca úroková miera a r_e predstavuje úrokovú mieru v rámci eurozóny.

Vývoj domácej úrokovej miery teda závisí od vývoja európskej úrokovej miery, avšak vývoj európskej úrokovej miery nie je ovplyvnený vývojom domácej úrokovej miery, čo podstatne zjednodušuje daný dvojfaktorový model, keďže vývoj európskej úrokovej miery môžeme chápať ako samostatný proces, ktorého dynamika sa riadi jednofaktorovým Vašíčkovým modelom.

Preto najprv nakalibrujeme jednofaktorový Vašíčkov model pre európsku úrokovú mieru a následne s využitím odhadov európskych parametrov (parametrov modelu, ktorý popisuje vývoj európskej úrokovej miery) odhadneme parametre rovnice pre domácu úrokovú mieru.

Nasledujúca schéma popisuje prvý navrhovaný spôsob odhadu parametrov konvergenčného modelu Vašíčkovho typu, v rámci ktorého sa väčšina parametrov odhadne z časových radov európskej a domácej úrokovej miery a iba odhad trhovej ceny rizika sa realizuje minimalizáciou strednej kvadratickej chyby medzi teoretickými a skutočnými výnosovými krivkami.

Metodológia 1

Vstupné dáta

- vektor splatností τ dĺžky m
- časový rad n hodnôt európskej krátkodobej úrokovej miery a časový rad n hodnôt domácej krátkodobej úrokovej miery
- matice, ktorých zložkami sú trhové výnosy \mathbf{R}_{ij} pre i -ty deň a dobu splatnosti τ_j pre európsku a domácu úrokovú mieru

Algoritmus

- metóda maximálnej vierohodnosti aplikovaná na časový rad hodnôt európskej short rate s cieľom odhadnúť parametre \mathbf{c} , \mathbf{d} , σ_e
- minimalizácia súčtu štvorcov odchýlok medzi teoretickými a skutočnými európskymi výnosovými krivkami s cieľom odhadnúť trhovú cenu rizika λ_e pre európsku úrokovú mieru

- metóda maximálnej vierohodnosti aplikovaná na časový rad hodnôt domácej short rate s cieľom odhadnúť parametre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \sigma_d$
- minimalizácia súčtu štvorcov odchýlok medzi teoretickými a skutočnými domácimi výnosovými krivkami s cieľom odhadnúť trhovú cenu rizika λ_d pre domácu úrokovú mieru

Výstup

- parametre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \sigma_d, \lambda_d, \sigma_e, \lambda_e$

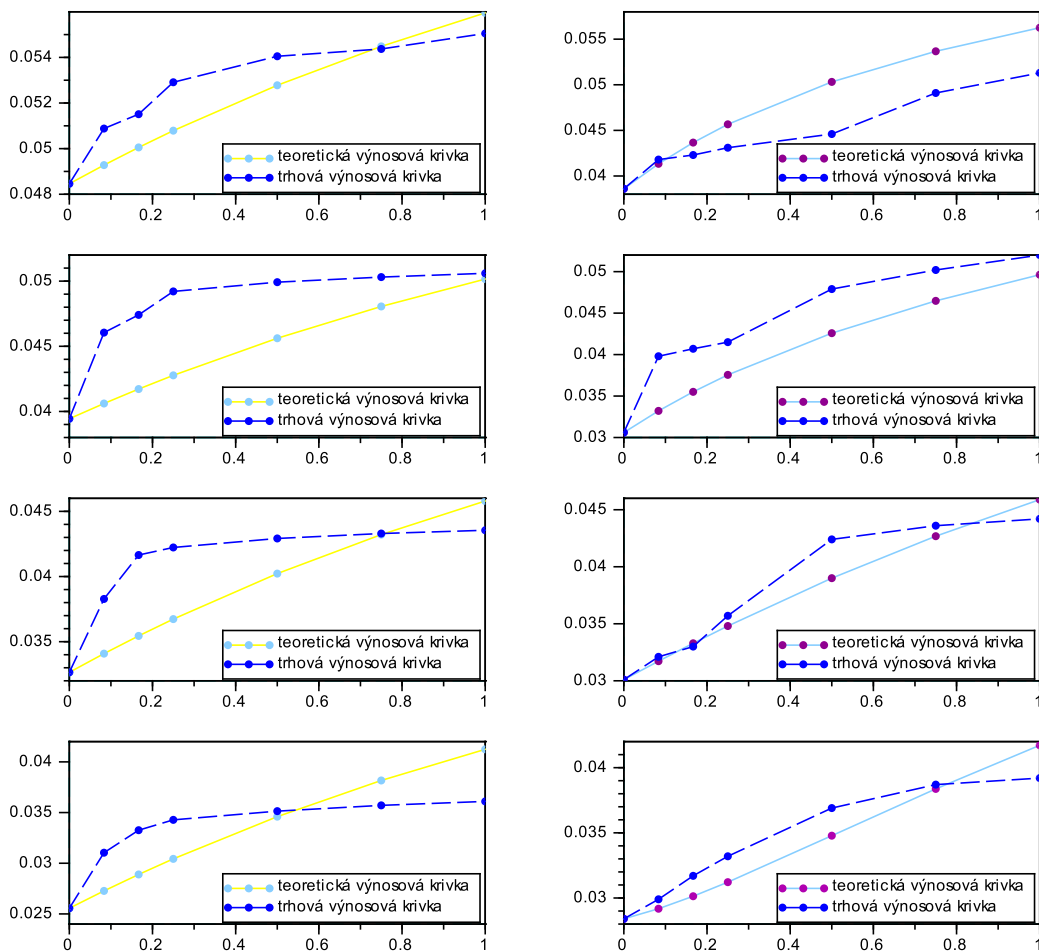
Najprv teda aplikujeme metodológiu 1 popísanú v časti 6.2 na odhad parametrov procesu, ktorý charakterizuje vývoj európskej úrokovej miery. Odhady európskych parametrov totiž vstupujú do výpočtu odhadov parametrov domácej úrokovej miery. Na časový rad hodnôt domácej úrokovej miery následne aplikujeme metódu maximálnej vierohodnosti s cieľom odhadnúť parametre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \sigma_d$, pričom trhovú cenu rizika λ_d prislúchajúca domácej úrokovej miere je určená rovnosťou (5.8) ako dôsledok minimalizácie súčtu štvorcov odchýlok medzi teoretickými a trhovými domácimi výnosovými krivkami.

Pripomeňme, že budeme pracovať s dátami týkajúcimi sa úrokových mier Euribor a Bribor za obdobie od 1. októbra 2008 do 31. decembra 2008, t.j. za obdobie troch mesiacov pred vstupom Slovenska do Európskej menovej únie. Za krátkodobú európsku úrokovú mieru budeme považovať týždenný Euribor a podobne za proxy domácej krátkodobej úrokovej miery zoberieme týždenný Bribor. Na tieto dáta sme aplikovali metodológiu 1 a získané odhady parametrov konvergenčného modelu Vašíčkovho typu sú vypísané v tabuľke 6.5.

\mathbf{c}	\mathbf{d}	σ_e	λ_e
0.9612	0.0085	0.0057	-10.2734
\mathbf{a}	\mathbf{b}	σ_d	λ_d
0.0097	4.383	0.0269	-0.6888

Tabuľka 6.5: Parametre konvergenčného modelu Vašíčkovho typu pre európsku a domácu úrokovú mieru odhadnuté s využitím metodológie 1

Na obrázku 6.5 je znázornené porovnanie niekoľkých teoretických a odhadnutých európskych aj domácich výnosových kriviek. Všimnime si, že domáce výnosové krivky sa zdajú byť fitované lepšie v porovnaní s európskymi výnosovými krivkami, čo je dosť paradoxné, keďže sme očakávali, že nepresnosť v odhade európskych parametrov, ktoré vstupujú do výpočtu domácich parametrov, sa prejaví aj na domácich výnosových krivkách.



Obr. 6.5: Porovnanie odhadnutých a reálnych výnosových kriviek pre európsku (vľavo) a domácu úrokovú mieru (vpravo) /metodológia 1/

Druhá navrhovaná metodológia pre odhad parametrov konvergenčného modelu Vašíčkovho typu je postavená na tom, že v prvom kroku sa odhadnú rizikovo neutrálne parametre α, β, σ_e európskej úrokovej miery minimalizáciou váženej strednej kvadratickej chyby medzi teoretickými a trhovými výnosovými krivkami a následne maximalizujeme logaritmickejšiu vierohodnostnú funkciu s cieľom odhadnúť reálny parameter d pri daných hodnotách parametrov $c = -\beta, \sigma_e$. Trhová cena rizika pre európsku úrokovú mieru je určená vzťahom

$$\lambda_e = \frac{cd - \alpha}{\sigma_e}.$$

Druhý krok spočíva v odhade rizikovo neutrálnych parametrov γ, δ, σ_d domácej úrokovej miery taktiež minimalizáciou váženej strednej kvadratickej chyby medzi teoretickými a trhovými výnosovými krivkami. V rámci druhého kroku sa ešte metódou maximálnej vierohodnosti odhadne parameter a domácej úrokovej miery pri daných odhadoch parametrov $b = -\delta, \sigma_d$. Trhová cena rizika pre domácu úrokovú mieru sa

napokon vypočíta zo vzťahu $\lambda_d = (\mathbf{a} - \gamma) / \sigma_d$. Metodológia 2 je stručne zhrnutá do nasledujúcej schémy.

Metodológia 2

Vstupné dáta

- vektor splatností τ dĺžky m
- časový rad n hodnôt európskej krátkodobej úrokovej miery a časový rad n hodnôt domácej krátkodobej úrokovej miery
- matice, ktorých zložkami sú trhové výnosy \mathbf{R}_{ij} pre i -ty deň a dobu splatnosti τ_j pre európsku a domácu úrokovú mieru

Algoritmus

- minimalizácia váženej strednej kvadratickej chyby medzi skutočnými a modelom implikovanými európskymi výnosovými krivkami s cieľom odhadnúť parametre α, β, σ_e procesu (4.5) pre európsku úrokovú mieru formulovaného v rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere
- maximalizácia logaritmickéj vierohodnostnej funkcie s cieľom odhadnúť parameter \mathbf{d} pre dané hodnoty parametrov \mathbf{c}, σ_e
- výpočet trhovej ceny rizika λ_e zo vzťahu $\alpha = \mathbf{c}\mathbf{d} - \lambda_e\sigma_e$
- minimalizácia váženej strednej kvadratickej chyby medzi skutočnými a modelom implikovanými domácimi výnosovými krivkami s cieľom odhadnúť parametre γ, δ, σ_d procesu (4.4) pre domácu úrokovú mieru formulovaného v rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere
- maximalizácia logaritmickéj vierohodnostnej funkcie s cieľom odhadnúť parameter \mathbf{a} pre dané hodnoty parametrov \mathbf{b}, σ_d
- výpočet trhovej ceny rizika λ_d zo vzťahu $\gamma = \mathbf{a} - \lambda_d\sigma_d$

Výstup

- parametre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \sigma_d, \lambda_d, \sigma_e, \lambda_e$

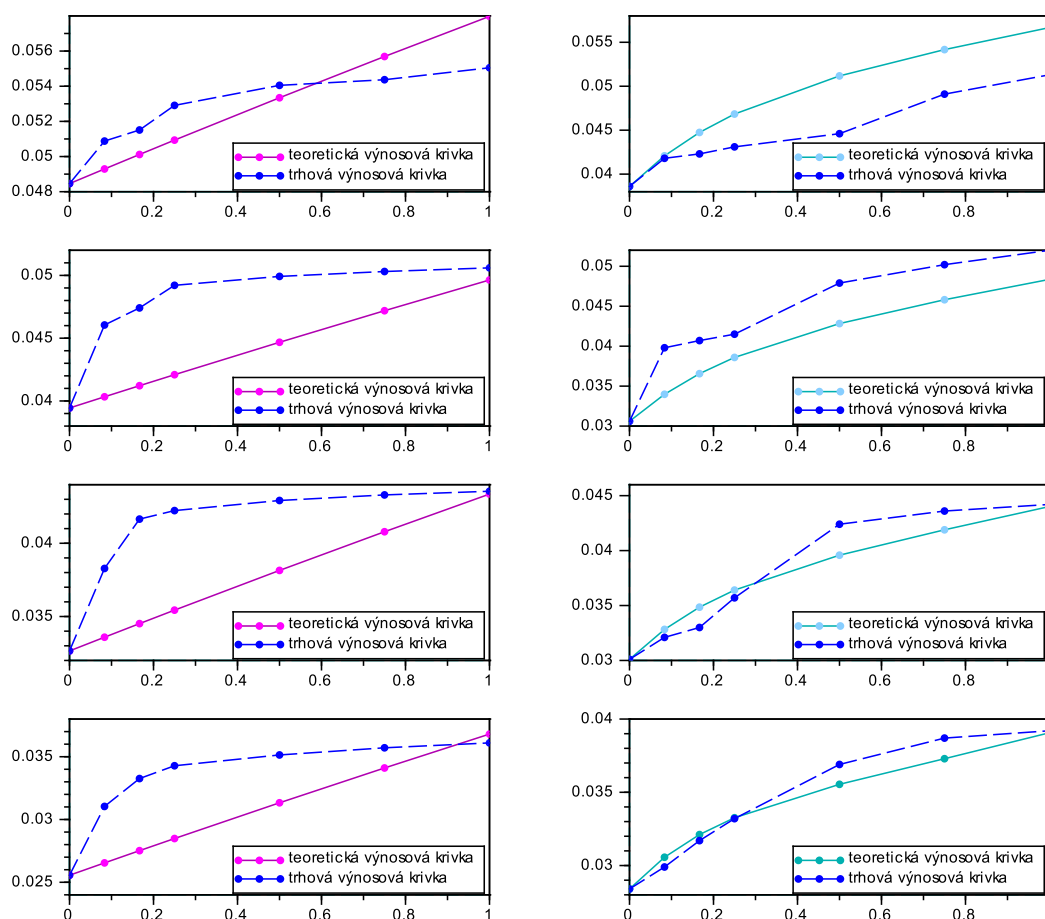
Očakávame, že metodológia 2 bude lepšie fitovať európske aj domáce výnosové krivky. Skúsme ju teda aplikovať na trhové dáta. Pri kalibrácii európskych parametrov sme dostali výrazne záporný odhad parametra \mathbf{d} . Tento parameter však predstavuje dlhodobú rovnovážnu úroveň európskej úrokovej miery, o ktorej predpokladáme, že by mala byť nezáporná. Preto sme sa rozhodli, že parameter \mathbf{d} a aj parameter σ_e odhadneme metódou maximálnej vierohodnosti. Odhad rizikovo neutrálnych parametrov α, β sme realizovali analogicky ako v časti 6.2 pri rozdelení dát na jednotlivé

kvartály. Následne sme už postupovali presne podľa popísanej metodológie 2, pričom získané odhady parametrov európskej aj domácej úrokovej miery sú zaznamenané v tabuľke 6.6.

c	d	σ_e	λ_e	F
0.1590	0.0085	0.0057	-4.6343	2.3252e-006
a	b	σ_d	λ_d	F
2.7689e-004	2.6950	0.5472	-0.1263	8.4143e-006

Tabuľka 6.6: Parametre konvergenčného modelu Vašíčkovho typu pre európsku a domácu úrokovú mieru odhadnuté s využitím metodológie 2

Na obrázku 6.6 ilustrujeme odhadnutú aj reálnu časovú štruktúru európskej a domácej úrokovej miery pre niekoľko dní posledného kvartálu roku 2008.



Obr. 6.6: Porovnanie odhadnutých a reálnych výnosových kriviek pre európsku (vľavo) a domácu úrokovú mieru (vpravo) /metodológia 2/

Poznamenajme, že v rovnici popisujúcej vývoj domácej úrokovej miery

$$dr_d = [a + b(r_e - r_d)] dt + \sigma_d w_d$$

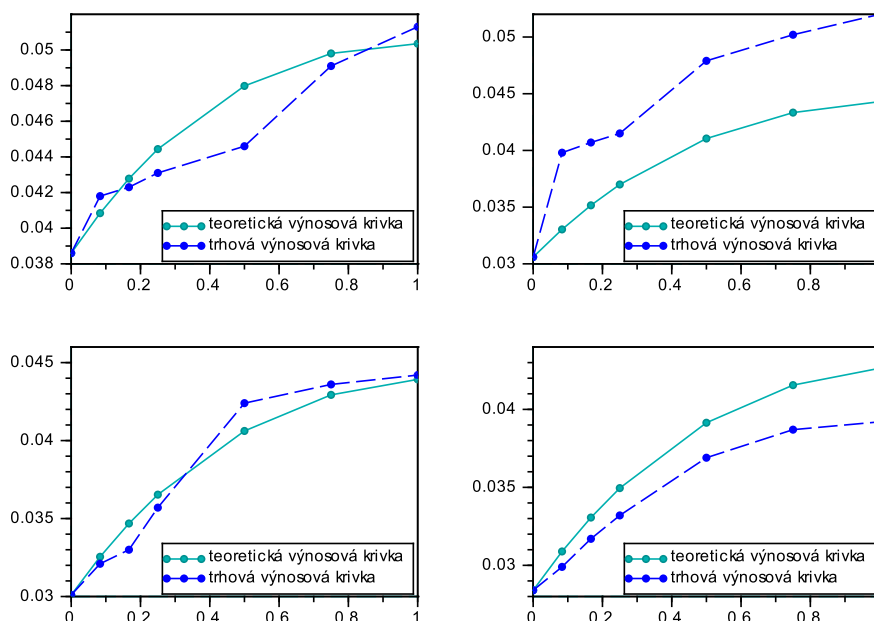
koeficient b vyjadruje silu priťahovania domácej úrokovej miery k hodnote $\frac{a}{b} + r_e$, zatiaľ čo parameter $\frac{a}{b}$ predstavuje výchýlenie domácej od európskej úrokovej miery. V tabuľke 6.6 si môžeme všimnúť, že odhad parametra a je číslo veľmi blízke nule, čo je v súlade s intuíciou, pretože trojmesačné obdobie pred vstupom Slovenska do eurozóny je príliš krátke na zaznamenanie aj malých odchýlok.

Na porovnanie sme skúsili modelovať domácu úrokovú mieru pomocou jednofaktorového Vašíčkovho modelu, ktorého parametre sme odhadli metodológiou 2 popísanou v časti 6.2. Tieto parametre sú vypísané v nasledujúcej tabuľke.

κ	θ	σ	λ	F
0.587	0.0082	0.3335	-0.2266	2.7232e-006

Tabuľka 6.7: Parametre jednofaktorového Vašíčkovho modelu pre domácu úrokovú mieru odhadnuté s využitím metodológie 2

Na obrázku 6.3 sú znázornené trhové a modelom implikované výnosové krivky týkajúce sa domácej úrokovej miery, ktorej dynamika je charakterizovaná jednofaktorovým Vašíčkovým modelom.



Obr. 6.7: Teoretické a trhové výnosové krivky prislúchajúce domácej úrokovej miere charakterizovanej jednofaktorovým Vašíčkovým modelom

Ide o rovnaké domáce trhové výnosové krivky ako na obrázku 6.6 a zdá sa, že fitovanie týchto kriviek je o niečo lepšie v prípade, ak domácu úrokovú mieru modelujeme s využitím konvergenčného modelu Vašíčkovho typu, týka sa to však iba niekoľkých konkrétnych kriviek. Kritériom lepšieho fitovania je totiž optimálna hodnota účelovej funkcie F a tá nadobúda menšiu hodnotu v prípade modelovania domácej úrokovej miery pomocou jednofaktorového Vašíčkovho modelu.

Na záver tejto kapitoly zhrnieme niekoľko pozorovaní, ku ktorým sme dospeli pri aplikovaní navrhovaných metód kalibrácie konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou na reálne trhové dáta. Zdá sa, že vývoj európskej úrokovej miery za posledný kvartál roku 2008 nie je vhodné modelovať jednofaktorovým Vašíčkovým modelom. Na druhej strane aplikovaním jednofaktorového Vašíčkovho modelu na denné dáta výnosových kriviek sadzby Euribor za jednotlivé kvartály roku 2011 s parametrami odhadnutými s využitím metodológie 2 sme dostali veľmi dobré fitovanie výnosových kriviek (viď tab. 6.4 a obr. 6.2). Ďalej sme očakávali, že nepresnosť v odhade európskych parametrov, ktoré vstupujú do výpočtu domácich parametrov, sa premietne aj na domácich výnosových krivkách, čo sa vzhľadom na merateľné kritérium presnosti, ktorým je hodnota účelovej funkcie, aj potvrdilo. Európske výnosové krivky sú teda fitované o čosi lepšie (pozri tab. 6.6, v ktorej hodnota účelovej funkcie pre európsku úrokovú mieru je $2.3252e - 006$, čo je menej ako hodnota účelovej funkcie $8.4143e - 006$ pre domácu úrokovú mieru).

Záver

V tejto diplomovej práci sme sa zaoberali kalibráciou konvergenčného modelu Vašíčkovho typu s nulovou koreláciou. Tento model popisuje vývoj európskej úrokovej miery (t.j. úrokovej miery v eurozóne), o ktorej predpokladáme, že ovplyvňuje vývoj domácej úrokovej miery, t.j. úrokovej miery krajiny, ktorá sa onedlho stane členským štátom eurozóny.

V rámci odhadu parametrov modelov úrokových mier existujú dva základné prístupy - parametre modelu môžeme odhadnúť metódou maximálnej vierohodnosti aplikovanou na časový rad hodnôt krátkodobej úrokovej miery alebo minimalizáciou váženej strednej kvadratickej chyby medzi trhovými a modelom implikovanými výnosovými krivkami. V tejto práci je navrhnutá nová metóda kalibrácie, ktorá súčasne berie do úvahy oba prístupy a teda je ich kombináciou. V závislosti od toho, ktoré kritérium (hodnota funkcie vierohodnosti resp. kvalita fitovania výnosových kriviek) považujeme za dôležitejšie, optimalizujeme ho v prvom kroku a zostávajúce parametre určíme na základe druhého kritéria. Hlavným prínosom tejto práce je odvodenie príslušných účelových funkcií a návrh spôsobu ich optimalizácie.

Vývoj domácej úrokovej miery v konvergenčnom modeli Vašíčkovho typu závisí od vývoja európskej úrokovej miery, avšak vývoj európskej úrokovej miery nie je ovplyvnený vývojom domácej úrokovej miery, čo podstatne zjednodušuje daný dvojfaktorový model, keďže vývoj európskej úrokovej miery môžeme chápať ako samostatný proces, ktorého dynamika sa riadi jednofaktorovým Vašíčkovým modelom. Preto môžeme najprv nakalibrovať jednofaktorový Vašíčkov model pre európsku úrokovú mieru a následne s využitím odhadov európskych parametrov odhadnúť parametre rovnice pre domácu úrokovú mieru. Zdôraznime, že pri odhade parametrov domácej úrokovej miery metódou maximálnej vierohodnosti bolo potrebné odvodiť podmienené rozdelenie domácej úrokovej miery, čo považujeme za ďalší prínos tejto práce.

V poslednej kapitole sú navrhnuté metódy kalibrácie aplikované na reálne trhové dáta a prezentované získané výsledky. Celkovo sme dospeli k uspokojivým výsledkom a predmetom ďalšieho výskumu v tejto oblasti by mohla byť kalibrácia konvergenčného modelu typu CKLS, v ktorej by sa s určitými úpravami využili metódy kalibrácie navrhnuté v tejto diplomovej práci.

Literatúra

- [1] AÏT-SAHALIA, Y.: *Testing continuous time models of the spot interest rate*, Review of Financial Studies Vol. 9 (1996), pp. 385-426.
- [2] ANDERSEN, T.G., LUND, J.: *Estimating continuous time stochastic volatility models of the short term interest rate*, Journal of Econometrics, Vol. 77 (1997), pp. 343-377.
- [3] BRIGO, D., MERCURIO, F.: *Interest rate models: theory and practice: with smile, inflation, and credit*, Springer 2006.
- [4] CHAN, K. C., KAROLYI, G. A., LONGSTAFF, F. A., SANDERS, A. B.: *An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate*, The Journal of Finance 47(3), 1992, pp. 1209-1227.
- [5] CHAPMAN, D.A., LONG, J.B., PEARSON, N.D.: *Using Proxies for the Short Rate: When Are Three Months Like an Instant?*, Review of Financial Studies, Vol. 12 (1999), pp. 763-806.
- [6] CHOI, Y., WIRJANTO, T.: *An analytic approximation formula for pricing zero-coupon bonds*, Finance Research Letters 4 (2007), pp. 116–126.
- [7] CORZO, T., SCHWARTZ, E.S.: *Convergence within the European Union: Evidence from Interest Rates*, Economic Notes, Vol. 29 (2000), pp. 243-268.
- [8] COX, J., INGERSOLL, J., ROSS, S.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica 53 (1985), pp. 385-408.
- [9] FILIPOVIC, D.: *Term-Structure Models*, Springer 2009.
- [10] FONG, H. G., VASICEK, O. A.: *Fixed-Income Volatility Management*, Journal of Portfolio Management 17(4), 1991, pp. 41-42.
- [11] HULL, J.C.: *Options, Futures and Other Derivatives*, 5th ed., Prentice Hall 2002, New Jersey.
- [12] KELLER-RESSEL M., STEINER, T.: *Yield curve shapes and the asymptotic short rate distribution in affine one-factor models*, Finance and stochastics 12 (2008), pp. 147-172.
- [13] KWOK, Y.K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer 2008.

- [14] LACKO, V.: *Two-Factor Convergence Model Of Cox-Ingersoll-Ross Type*, Master's Thesis, 2010.
- [15] LAMOŠ, F., POTOCKÝ, R.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*, Alfa 1989, Bratislava.
- [16] MELICHERČÍK I., OLŠAROVÁ L., ÚRADNÍČEK V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos 2005, Bratislava.
- [17] MIKULA K., STEHLÍKOVÁ B., ŠEVČOVIČ D.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU 2009, Bratislava.
- [18] OKSENDAL, B.: *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 4th ed., Springer-Verlag, New York 1995.
- [19] ROGERS, L. C. G.: *Which model for term structure of interest rates should one use?*, Mathematical Finance, IMA Volume 65, New York 1995, pp. 93-116.
- [20] STEHLÍKOVÁ, B., ZÍKOVÁ Z.: *Convergence model of interest rates of CKLS type*, Kybernetika, pp. 567-586, 2012.
- [21] STEHLÍKOVÁ, B.: *Approximate formula for the bond price based on the Vasicek model*, Preprint submitted to Finance Research Letters, 2011.
- [22] ŠESTÁK, Ľ.: *Mathematical Analysis and Calibration of a Multifactor Panel Model for Credit Spreads and Risk-free Interest Rate*, Dissertation thesis, 2012.
- [23] ŠEVČOVIČ, D., URBÁNOVÁ CSAJKOVÁ A.: *On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model*, Central European Journal of Operations Research 13, pp. 169–188, 2005.
- [24] VASICEK, O.: *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*, Journal of Financial Economics 5 (1977), pp. 177-188.
- [25] www.euribor-ebf.eu
- [26] www.bbalibor.com/rates