Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

METÓDY RIEŠENIA DISKRÉTNYCH ÚLOH OPTIMÁLNEHO RIADENIA

Diplomová práca

2013 Bc. Martina Ďuratná

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Metódy riešenia diskrétnych úloh optimálneho riadenia

Diplomová práca

Evidenčné číslo: 98e05c3c-00c7-4406-81ac-050c1ab46285

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiteľ: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Bratislava, 2013 **Bc. Martina Ďuratná**

81940689

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Martina Ďuratná
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Metódy riešenia diskrétnych úloh optimálneho riadenia

Cieľ: Diskrétne úlohy optimálneho riadenia možno v mnohých prípadoch efektívne riešiť pomocou rovnice dynamického programovania. Táto v prípade úloh s nekonečným časovým horizontom predstavuje určitú funkcionálnu rovnicu, na riešenie ktorej sa v literatúre uvádzajú rozličné techniky riešenia. Cieľom práce je bližšie analyzovať niektoré z týchto techník a zamerať sa pritom hlavne na metódu neurčitých koeficientov, ktorá sa veľmi často uplatňuje v úlohách s ekonomickou tématikou.

Vedúci: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 25.01.2012

Dátum schválenia: 26.01.2012

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....
študent

....
vedúci práce

Abstrakt

Cieľom tejto diplomovej práce je oboznámiť sa so základnými pojmami optimálneho riadenia a metódami ich riešenia vybraných typov úloh. Následne na ne budeme aplikovať aproximačné metódy a metódy neurčitých koeficientov. Ide konkrétne o diskrétne úlohy optimálneho riadenia s diskontným faktorom a nekonečným časovým horizontom, pričom sa zameráme na systém s lineárnou dynamykou a na konkávne funkcie výnosu zo systému.

Kľúčové slová: diskrétne úlohy optimálneho riadenia, diskontný faktor, nekonečný časový horizont, funkcie užitočnosti, lineárna dynamika

The purpose of this thesis is to get acquainted with basic terms of optimal control and methods of solution for selected types of optimal control problems. Then we will apply approximation methods and the method of undetermined coefficients to the problems. In particular, those will be discrete-time problems, with a discount factor and an infinite time horizon, and we shall also focus on a system with linear dynamics and concave yield functions.

Key words: discrete-time optimal control problems, discount factor, infinite time, utility functions, linear dynamics

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne, pod dohľadom vedúceho diplomovej práce a s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, 22.4.2013

....

Martina Ďuratná

Poďakovanie

Ďakujem svojej školiteľke doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc., za pomoc a podporu pri písaní tejto diplomovej práce, za pripomienky a všetok obetovaný čas.

Obsah

1 Úvod

Predstavme si nejaký systém, napríklad rybník plný rýb, ktorý sa môže určítým spôsobom meniť. My máme možnosť tento systém ovplyvňovať - v prípade rybníka objemom vylovených rýb. Každý zásah nám spôsobí zisk, alebo stratu, v závislosti na druhu zásahu a tento zisk by sme prirodzene chceli maximalizovať. Aj takýto problém je možné formulovať ako úlohu oprimálneho riadenia.

V ekonómii sa čoraz častejšie stretávame s potrebou riešiť úlohy optimálneho riadenia. Ide totiž o problémy, ktoré zahŕňajú viacstupňové zásahy, vo viacerých etapách. Tieto etapy na seba navzájom nadväzujú, a teda rozhodnutie v jednej ovplyvní možnosti rozhodnutia v nasledujúcej etapy a rovnako aj jej výsledok. Výsledky jednotlivých etáp sa potom budeme snažiť optimalizovať.

Riešením niektorých typov takýchto úloh sa budeme zaoberať v tejto diplomovej práci. Trochu konkrétnejšie pôjde o úlohy, kde máme nekonečne veľa etáp - s nekonečným časovým horizontom. Tieto úlohy sa dajú mnohokrát riešiť pomocou rovnice dynamického programovania, ktorá sa v našom prípade bude dať previesť na funkcionálnu rovnicu.

V literatúre sa najmä pri takýchto úlohách často stretávame s tým, že sa ich riešenia nejako ¨uhádnu¨. Máme tým na mysli metódu neurčitých koefientov, ktorej sa v tejto diplomovej práci budeme venovať.

Cieľom tejto diplomovej práce bude bližšie sa pozrieť na metódu neurčitých koeficientov a takisto aj na aproximačné metódy, aplikovať ich na vybrané typy úloh a porovnať ich riešenia.

Začneme najprv s teoretickým úvodom, kde si v skratke vysvetlíme základné pojmy optimálneho riadenia, predstavíme si všeobecnú úlohu optimálneho riadenia a rovnicu dynamického programovania. Cez pojem autonómnosti sa potom prenesieme k úlohe s diskontným faktorom a nekonečným časovým horizontom, kde si predstavíme rovnicu dynamického progamovania pre tento typ úloh.

V ďalšej kapitole si predstavíme metódy riešenia - aproximačné a metódy neurčitých koeficientov. Tiež si v nich prejdeme dve vety o konvergencii týchto metód, ktorých dôkazy sú zároveň riešením príkladov 2.23 a 2.24 z knihy [1].

V nasledujúcej kapitole sa zameráme na aplikáciu týchto metód na vybrané typy úloh optimálneho riadenia. Pôjde o úlohy, v ktorých budeme výnos zo systému počítať pomocou rôznych konkávnych funkcií. Výsledky získané pomocou jednotlivých metód následne porovnáme.

2 Teoretický základ

V tejto diplomovej práci sa budeme zaoberať diskrétnymi úlohami optimálneho riadenia, preto je vhodné si na začiatok uviesť pár pojmov a definícií, ktoré budeme v tejto práci potrebovať. Definície a pojmy v tejto kapitole pochádzajú z knihy [1].

2.1 Štandardná úloha optimálneho riadenia

Majme systém, ktorý je rozdelený na k etáp. Stav premennej na začiatku i-tej etapy opisuje **stavová premenná** $x_i \in X_i$. X_i je pritom množina povolených stavov v i-tej etape. Počiatočný stav systému je opísaný pomocou premennej x_0. Ďalšou požiadavkou bude to, aby hodnota stavovej premennej na konci systému - teda hodnota x_k - bola z množiny prípustných cieľových stavov C.

Správanie systému môžeme ovplyvňovať pomocou **riadiacej premennej** u_i, z množiny povolených hodnôt riadiacich premenných U_i.

Hodnota stavovej premennej x_{i+1} je potom jednoznačne určená pomocou diferenčnej rovnice $x_{i+1} = f_i(x_i, u_i)$.

Výnos zo systému v i-tej etape je potom daný ako hodnota funkcie $f_i^0(x_i, u_i)$. Je logické, že tento výnos sa budeme pokúšať maximalizovať.

Našou úlohou teda bude nájsť také hodnoty riadiacich premenných u_i pre každú etapu tak, aby sme splnili všetky podmienky a súčasne dosiahli maximálny možný zisk, ktorý je daný ako súčet výnosov jednotlivých etáp. Zápis tejto úlohy vyzerá nasledovne:

$$\max \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i) \tag{1}$$

pri podmienkach

$$x_{i+1} = f_i(x_i, u_i)\ ,\ \ i = 0, ..., k-1, \tag{2}$$

$$x_0 = a, \tag{3}$$

$$x_k \in C, \tag{4}$$

$$u_i \in U_i\ , \quad i = 0, ..., k, \tag{5}$$

$$x_i \in X_i\ , \quad i = 0, ..., k. \tag{6}$$

Definujme si pár základnúch pojmov.

Postupnosť hodnôt riadiacich premenných $\mathcal{U} = \{u_0, ..., u_{k-1}\}$, ktoré pre každé i spĺňajú rovnicu (5), nazývame **riadením**.

Môžeme si všimnúť, že stavové premenné x_i sú jednoznačne dané voľbou riadiacich premenných u_i ako riešenia **stavovej rovnice (2)** a **počiatočnej podmienky (3)**.

Postupnosť hodnôt stavových premenných $\mathcal{X} = \{x_0, ..., x_k\}$, kde $x_i = x_i(\mathcal{U})$, nazývame **odozvou** na riadenie $\mathcal{U}$. Ak odozva na príslušné riadenie $\mathcal{U}$ navyše spĺňa podmienky (4) a (6), tak hovoríme, že $\mathcal{U}$ je **prípustným riadením**. Triedu prípustných riadení zvykneme označovať písmenom $\mathcal{P}$.

Vidíme, že hodnota účelovej funkcie v (1) závisí od voľby riadenia $\mathcal{U}$. Budeme ju označovať nasledovne:

$$J(\mathcal{U}) = \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i(\mathcal{U}), u_i).$$

Definícia 1 ***Optimálnym riadením*** *nazveme také riadenie $\mathcal{U}$ z množiny prípustných riadení $\mathcal{P}$, v ktorom bude hodnotová funkcia $J(\mathcal{U})$ nadobúdať svoje maximum.*

Úlohu optimálneho riadenia môžeme zapísať nasledovným spôsobom:

$$\max_{\mathcal{U} \in \mathcal{P}} J(\mathcal{U}).$$

Ak si označíme úlohu (1)-(6) v závislosti od počiatočného času $j = 0$ a počiatočného stavu $x_0 = x$ ako $D_0(x)$, tak $D_0(x)$ je vlastne **úlohou optimálneho prechodu z bodu** x **do množiny** C **na intervale** $[0, k]$.

Definícia 2 *Systém úloh*

$$\mathcal{D} = \{D_j(x) : j \in [0, k-1], x \in X_j\},$$

kde $D_j(x)$ je úlohou optimálneho prechodu z bodu x do množiny C na intervale $[j, k]$ a vyzerá nasledovne:

$$\max \quad J_j(x, \mathcal{U}_j) := \sum_{i=j}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i) \tag{7}$$

pri podmienkach

$$x_{i+1} = f_i(x_i, u_i) \ , \ i = j, ..., k-1, \tag{8}$$

$$x_0 = x, \quad x \text{ je pevne zvolené z } X_j \tag{9}$$

$$x_k \in C, \tag{10}$$

$$u_i \in U_i \ , \qquad i = j, ..., k, \tag{11}$$

$$x_i \in X_i \ , \qquad i = j, ..., k.. \tag{12}$$

Pre takúto úlohu je prípustným riadením riadenie $\mathcal{U}_j = \{u_j, ..., u_{k-1}\}$ spĺňajúce (11), ktorého spätná odozva $\mathcal{X}_j = \{x_j, ..., x_k\}$ so začiatočnou hodnotou $x_j = x$ spĺňa (12) a (10). Triedu takýchto prípustných riadení označíme $\mathcal{P}_j(x)$.

Ďalej si definujeme pre každé $j \in [0, k-1]$ a $x \in X_j$ množinu $\Gamma_j(x)$ ako množinu takých $u \in U_j$, pre ktoré existuje $\mathcal{U}_j = \{u_j, ..., u_{k-1}\} \in \mathcal{P}_j(x)$ spĺňajúce $u_j = u$. Pre každé $j \in [0, k-1]$ definujeme funkciu

$$V_j(x) := \max_{\mathcal{U}_j \in \mathcal{P}_j(x)} J_j(x, \mathcal{U}_j). \tag{13}$$

Nazývame ju *hodnotovou funkciou* pre systém úloh $D_j := \{D_j(x) \ : \ x \in X_j\}$.

2.2 Rovnica dynamického programovania pre štandardnú úlohu optimálneho riadenia

Týmto sa dostávame k **Bellmanovej rovnici dynamického programovania**. Z rovnice (13) ju odvodíme nasledovným spôsobom.

Vieme, že pre $j = k-1$ platí:

$$V_{k-1}(x) = \max_{\mathcal{U}_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}(x)} J_{k-1}(x, \mathcal{U}_{k-1}) = \max_{u_{k-1} \in \gamma_{k-1}(x)} f^0_{k-1}(x, u_{k-1}). \tag{14}$$

Pre $j = 0, ..., k-2$ podobným spôsobom dostaneme:

$$\begin{aligned}
V_j(x) &= \max_{\mathcal{U}_j \in \mathcal{P}_j(x)} J_j(x, \mathcal{U}_j) \\
&= \max_{\mathcal{U}_j \in \mathcal{P}_j(x)} \left[f^0_j(x, u_j) + J_{j+1}(f_j(x, u_j), \mathcal{U}_{j+1}) \right] \\
&= \max_{u_j \in \gamma_j(x)} \quad \max_{\mathcal{U}_{j+1} \in \mathcal{P}_{j+1}(f_j)} \left[f^0_j(x, u_j) + J_{j+1}(f_j(x, u_j), \mathcal{U}_{j+1}) \right] \\
&= \max_{u_j \in \gamma_j(x)} \quad \left[f^0_j(x, u_j) + \max_{\mathcal{U}_{j+1} \in \mathcal{P}_{j+1}(f_j)} J_{j+1}(f_j(x, u_j), \mathcal{U}_{j+1}) \right] \\
&= \max_{u_j \in \gamma_j(x)} \quad \left[f^0_j(x, u_j) + V_{j+1}(f_j(x, u_j)) \right].
\end{aligned} \tag{15}$$

Koncovú podmienku (4) resp. (10) vieme do vzťahov (14) a (15) doplniť dodefinovaním funkcie $V_k(x)$, ktorá bude pre $x \in C$ nadobúdať hodnotu 0 a pre ostatné x hodnotu $-\infty$.

Ak to teda zhrnieme, dostávame:

Definícia 3 ***Rovnica dynamického programovania*** *nadobúda tvar:*

$$V_j(x) = \max_{u \in \Gamma_j(x)} \left[f^0_j(x, u) + V_{j+1}(f_j(x, u)) \right], \tag{16}$$

pre $j = 0, ..., k-1, \ \ x \in X_j,$ *a*

$$V_k(x) \begin{cases} 0, & \textit{pre } x \in C, \\ -\infty, & \textit{pre } x \notin C. \end{cases} \tag{17}$$

Rovnica dynamického programovania je nutnou aj postačujúcou podmienkou optimality pre úlohu danú rovnicami (1) - (6). V učebnici [1] sa nachádza dôkaz tohto tvrdenia.

Definícia 4 ***Optimálna spätná väzba*** *v je postupnosť funkcií* $v_0, ..., v_{k-1}$ *ktoré spĺňajú:*

$$v_j(x) = \arg \max_{u \in \Gamma_j(x)} \left[f_j^0(x, u) + V_{j+1}(f_j(x, u)) \right], \quad j = 0, ...k - 1. \tag{18}$$

Teda v rovnici dynamického programovania platí, že pre každé $j = 0, ...k - 1$:

$$V_j(x) = f_j^0(x, v_j(x)) + V_{j+1}(f_j(x, v_j(x))). \tag{19}$$

2.3 Neautonómna úloha, autonómna úloha, úloha s diskontným faktorom

Štandardná úloha optimálneho riadenia (1)-(6) je vo všeobecnosti **neautonómnou úlohou s pevným časom**.

Definícia 5 *V prípade, ak funkcie* f_i^0, f_i *a množiny* U_i, X_i *nezávisia od* i *- teda ich tvar je pre každé* i *rovnaký - budeme hovoriť o* ***autonómnej úlohe****.*

Špeciálnym prípadom je ten, v ktorom je funkcia f_i a množiny U_i, X_i nezávislá od i a funkcia f_i^0 nadobúda tvar

$$f_i^0 = \beta^i F(x_i, u_i), \tag{20}$$

kde $0 < \beta < 1$.

Definícia 6 *Úlohu optimálneho riadenia tvaru:*

$$\max \quad \sum_{i=0}^{k-1} \beta^i F(x_i, u_i) \tag{21}$$

pri podmienkach

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i) \ , \ i = 0, ..., k - 1 \tag{22}$$

$$x_0 = a \tag{23}$$

$$x_k \in C \tag{24}$$

$$u_i \in U \ , \quad i = 0, ..., k \tag{25}$$

$$x_i \in X \ , \quad i = 0, ..., k \tag{26}$$

nazývame ***autonómna úloha s diskontným faktorom****.*

Úlohy optimálneho riadenia ekonomického charakteru častu nadobúdajú tvar autonómnych úloh s diskontným faktorom. Funkcia opisujúca výnos zo systému je v každej etape rovnaká, rovná $F(x, u)$. Diskontný faktor predstavuje odúročovanie tohoto výnosu na začiatok obdobia, teda do $i = 0$.

2.4 Úloha s diskontným faktorom a nekonečným časovým horizontom, rovnica dynamického programovania pre tento typ úlohy

Pri ekonomických úlohách - autonómnych s diskontným faktorom - sa však často stáva, že nemáme počet etáp obmedzený, teda máme k dispozícii nekonečne veľa etáp. Inak povedané, platí, že $k = \infty$.

Takéto úlohy nazývame autonómne s diskontným faktorom a nekonečným časovým horizontom.

Definícia 7 ***Autonómna úloha optimálneho riadenia s diskontným faktorom a nekonečným časovým horizontom*** *je úloha tvaru:*

$$\max \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i F(x_i, u_i) \tag{27}$$

pri podmienkach

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i)\ ,\ \ i = 0, 1, ... \tag{28}$$

$$x_0 = a \tag{29}$$

$$u_i \in U\ , \qquad i = 0, 1, ... \tag{30}$$

$$x_i \in X\ , \qquad i = 0, 1, ... \tag{31}$$

$$\lim_{k \to \infty} x_k \in C \tag{32}$$

Aj pre tieto úlohy je možné definovať rovnicu dynamického programovania. Pre i-tu etapu bude mať klasická rovnica dynamického programovania tvar:

$$V_i(x) = \max_{u \in \Gamma(x)} \left[\beta^i F(x, u) + V_{i+1}(f(x, u))\right].$$

Táto rovnica už však nie je postačujúcou podmienkou, je len nutnou podmienkou optimality. Chýba nám totiž vzťah pre koncový stav. A keďže to nie je rekurentý vzťah, nedostávame na prvý pohľad ani návod na výpočet funkcie V.

Ak si však túto funkciu rozpíšeme, dosadením rovníc dynamického programovania pre $i+1, i+2, ...$, dostaneme:

$$V_i(x) = \max_{u \in \Gamma(x)} \left\{\beta^i F(x, u) + \max_{u \in \Gamma(x)} \left\{\beta^{i+1} F(f(x, u)) + \max_{u \in \Gamma(f(x,u))} \{\beta^{i+2} F(f(f(x, u), u)) + ...\}\right\}\right\}.$$

Ak následne vyjmeme β:

$$V_i(x) = \max_{u \in \Gamma(x)} \left\{\beta^i F(x, u) + \beta \max_{u \in \Gamma(x)} \left\{\beta^i F(f(x, u)) + \max_{u \in \Gamma(f(x,u))} \{\beta^{i+1} F(f(f(x, u), u)) + ...\}\right\}\right\},$$

tak si môžeme všimnúť, že táto rovnica je ekvivalentná rovnici:

$$V_i(x) = \max_{u \in \Gamma(x)} \left[\beta^i F(x, u) + \beta V_i(f(x, u))\right].$$

Rekurentý vzťah sa mení na funkcionálnu rovnicu. Nás však v konečnom dôsledku zaujíma len hodnotová funkcia v čase $i = 0$:

$$V_0(x) = \max_{u \in \Gamma(x)} \left[F(x,u) + \beta V_0(f(x,u)) \right]. \tag{33}$$

Funkciu $V_0(x)$ si ďalej pre skrátenie a sprehľadnenie budeme označovať ako $V(x)$. Vzťah (33) sa následne mení na:

$$V(x) = \max_{u \in \Gamma(x)} \left[F(x,u) + \beta V(f(x,u)) \right]. \tag{34}$$

respektíve:

$$V(x) = F(x, v(x)) + \beta V(f(x, v(x))). \tag{35}$$

kde:

$$v(x) = \arg \max_{u \in \Gamma(x)} \left[F(x,u) + \beta V(f(x,u)) \right] \tag{36}$$

je k funkcii $V(x)$ prislúchajúca spätnú väzba.

Riešeniu týchto funkcionálnych rovníc sa budeme venovať v nasledujúcich kapitolách.

Problematikou diskrétnych úloh optimálneho riadenia s diskontným faktorom na nekonečnom časovom horizonte sa bližšie zaoberajú knihy [3] a [4], rovnako ako práca [5]

3 Metódy riešenia diskrétnych úloh optimálneho riadenia s diskontným faktorom na nekonečnom časovom horizonte

Ako sme spomenulii v predchádzajúcej časti, nutnou podmienkou riešenia diskrétnych úloh optimálneho riadenia s diskontným faktorom na nekonečnom časovom horizonte je splnenie rovnice (34).

Ak teda chceme nájsť kandidátov pre optimálne riešenie úlohy (27)-(32), potrebujeme vyriešiť funkcionalnu rovnicu (34), resp. rovnicu (36). V knihe [1] sú uvedené nasledujúce metódy riešenia týchto funkcií:

(1) Aproximácia v priestore hodnotových funkcií

(2) Aproximácia v priestore spätných väzieb

(3) Metóda neurčitých koeficientov v priestore hodnotových funkcií

(4) Metóda neurčitých koeficientov v priestore spätných väzieb

Teraz si tieto metódy popíšeme

3.1 Aproximácia v priestore hodnotových funkcií

(I) Zvolíme počiatočnú iteráciu funkcie V, t.j. zvolíme $V^{(0)}(x)$, pre každé $x \in X$.

(II) Pre danú iteráciu i funkcie V vypočítame hodnoty funkcie $v^{(i+1)}$ v každom bode $x \in X$ podľa predpisu:

$$v^{(i+1)}(x) := \arg\max_{u} \left[F(x,u) + \beta V^{(i)}(f(x,u))\right]. \tag{37}$$

(III) Pre dané iterácie $V^{(i)}$ a $v^{(i+1)}$ vypočítame hodnoty novej iterácie $i+1$ funkcie V v každom $x \in X$ pomocou vzorcu:

$$V^{(i+1)}(x) := F(x, v^{(i+1)}(x)) + \beta V^{(i)}(f(x, v^{(i+1)}(x))), \tag{38}$$

(IV) Opakujeme body (II) a (III).

Ak si náročnosťou tejto metódy označíme počet iterácií, ktoré je nutné spočítať, tak je v tomto prípade pri počte iterácií n náročnosť rovná n.

3.2 Aproximácia v priestore spätných väzieb

(I) Zvolíme počiatočnú iteráciu funkcie v, t.j. zvolíme $v^{(0)}(x)$, pre každé $x \in X$.

(II) Pre danú iteráciu i funkcie v vypočítame hodnoty funkcie $V^{(i+1)}$ v každom bode $x \in X$ podľa predpisu

$$V^{(i+1)}(x) := \left[F(x, v^{(i)}(x)) + \beta V^{(i+1)}(f(x, v^{(i)}(x)))\right]. \tag{39}$$

(III) Pre danú iteráciu $V^{(i+1)}$ vypočítame hodnoty novej iterácie funkcie $v^{(i+1)}$ v každom $x \in X$ pomocou vzorcov

$$v^{(i+1)}(x) := \arg\max_u \left[F(x, u) + \beta V^{(i+1)}(f(x, u))\right]. \tag{40}$$

(IV) Opakujeme body (II) a (III).

Pri numerickej aplikácii tejto metódy je nutné numericky spočítať aj hodnotovú funkciu $V^{(i+1)}(x)$ v druhom kroku. Urobíme tak pomocou vnútorného cyklu:

$$V^{(i+1)}_{(j+1)}(x) := \left[F(x, v^{(i)}(x)) + \beta V^{(i+1)}_{(j)}(f(x, v^{(i)}(x)))\right].$$

Treba poznamenať, že ak je výpočtová náročnosť predchádzajúcej metódy n, tak náročnosť tejto metódy bude mn, kde m je počet iterácií vnútorného cyklu v kroku II. Pri neskorších výpočtoch sme volili $m = n$, teda náročnosť nám vzrástla na n^2

3.3 Metóda neurčitých koeficientov v priestore hodnotových funkcií

Pri tejto metóde ide to, že najprv urobíme ¨odhad výsledku¨. Buď na základe našich skúseností, alebo po tom, čo spočítame prvých pár iterácií predchádzajúcich metód odhadneme tvar funkcie V ako:

$$V(x) := g(x; c_1, c_2, ..., c_n),$$

kde $c_1, c_2, ..., c_n$ sú neznáme koeficienty a skúsime dopočítať príslušné koeficienty pomocou rovnice:

$$V(x) = \max_u [F(x, u) + \beta V(f(x, u))], \tag{41}$$

ktorá musí platiť pre každé $x \in X$.

3.4 Metóda neurčitých koeficientov v priestore spätných väzieb

Podobne ako pri predchádzajúcej metóde, najprv odhadneme tvar funkcie v ako:

$$v(x) := g(x; c_1, c_2, ..., c_n),$$

kde $c_1, c_2, ..., c_n$ sú neznáme koeficienty a skúsime dopočítať príslušné koeficienty pomocou rovnice:

$$v(x) = \arg\max_u [F(x,u) + \beta V(f(x,u))], \tag{42}$$

ktorá musí platiť pre každé $x \in X$.

Pred tým, než sa dostaneme k aplikácii týchto metód, uvedieme si ešte dve vety, ktoré sa zaoberajú otázkou konvergencie aproximačných metód.

3.5 Dve vety o konvergencii

Veta 1 *Majme úlohu optimálneho riadenia tvaru:*

$$\max \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i F(x_i, u_i)$$

pri podmienkach

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i)\ ,\ \ i = 0, 1, ...$$
$$x_0 = a$$

a platí, že $0 \leq F(x_i, u_i) \leq \gamma$*, potom postupnosť funkcií* $V^{(k)}$ *generovaná metódou aproximácií v priestore hodnotových funkcií podľa predpisu*

$$V^{(0)}(x) = 0.$$
$$V^{(k)}(x) = \max_u \left[F(x,u) + \beta V^{(k-1)}(f(x,u))\right]$$

konverguje.

Dôkaz: Táto veta je uvedená ako úloha 2.23 v knihe [1]. Jej dôkaz bude zároveň riešením spomínanej úlohy.

Dôkaz budeme robiť v dvoch krokoch. Najprv ukážeme, že postupnosť rastie, a potom, že je zhora ohaničená. Rastúcosť dokazujeme pomocou matemamtickej indukcie:

$$V^{(0)}(x) = 0.$$
$$V^{(1)}(x) = \max_u [F(x,u) + 0] = \max_u [F(x,u)] \geq 0 = V^0,$$
$$V^{(2)}(x) = \max_u \left[F(x,u) + \beta V^{(1)}(f(x,u))\right] \geq \max_u [F(x,u)] = V^{(1)}(x).$$

Nech teda platí $V^{(k)}(x) \geq V^{(k-1)}(x)$. Potom:

$$\begin{aligned} V^{(k+1)}(x) &= \max_u \left[F(x,u) + \beta V^{(k)}(f(x,u))\right] \\ &\geq \max_u \left[F(x,u) + \beta V^{(k-1)}(f(x,u))\right] = V^{(k)}(x). \end{aligned}$$

Ohraničenosť zhora vieme tiež dokázať pomocou matematickej indukcie:

$$\begin{aligned} &V^{(0)}(x) = 0. \\ &V^{(1)}(x) = \max_u \left[F(x,u) + \beta V^{(0)}(f(x,u))\right] = \max_u \left[F(x,u)\right] \leq \gamma = \frac{1-\beta^1}{1-\beta}\gamma, \\ &V^{(2)}(x) = \max_u \left[F(x,u) + \beta V^{(1)}(f(x,u))\right] \leq \gamma + \beta\gamma = (1+\beta)\gamma = \frac{1-\beta^2}{1-\beta}\gamma. \end{aligned}$$

Nech teda platí $V^{(k-1)} \leq \frac{1-\beta^{k-1}}{1-\beta}\gamma$. Potom:

$$\begin{aligned} V^{(k)}(x) &= \max_u \left[F(x,u) + \beta V^{(k-1)}(f(x,u))\right] \\ &\leq \gamma + \beta\frac{1-\beta^{k-1}}{1-\beta}\gamma \\ &= \left[1 + \beta\frac{1-\beta^{k-1}}{1-\beta}\right]\gamma \\ &= \frac{1-\beta^k}{1-\beta}\gamma \\ &\leq \frac{1}{1-\beta}\gamma. \end{aligned}$$

Využili sme pri tom fakt, že $\beta \in (0,1)$. Postupnosť funkcií $V(k)$ je rastúca a zhora ohraničená, a teda konverguje.

Vetu 1. sme tým dokázali a zároveň sme vyriešili úlohu 2.23 z knihy [1]. Ukázali sme, že metóda aproximácie v priestore hodnotových funkcií za istých podmienok konverguje. Teraz sa pozrieme na to, k čomu.

Veta 2 *Dokážte, že ak v úlohe (27)-(32) platí:*

- $X = C = \mathbb{R}^n$,
- *U je kompaktná podmnožina* $\mathbb{R}^m$,
- *funkcie f, F sú spojité, F je ohraničená,*

potom metóda aproximácií v priestore hodnotových funkcií konverguje k riešeniu rovnice

$$\tilde{V}(x) = \max_{u\in\Gamma}\left[F(x,u) + \beta\tilde{V}(f(x,u))\right].$$

Dôkaz: Ukážeme, že zobrazenie:

$$TV(x) = \max_{u \in U}[F(x,u) + \beta V(f(x,u))]$$

je v priestore spojitých ohraničených funkcií na X kontrakciou. Z *Banachovej vety o pevnom bode* kontraktívnych zobrazení nám potom vyplynie dôkaz tohto tvrdenia. Ak je funkcia V spojitá, potom $F(x,u) + \beta V(f(x,u))$ je tiež spojitá a ohraničená funkcia, lebo aj F bola spojitá a ohraničená a f bola spojitá. Keďže U je kompaktná, môžeme použiť vetu, ktorá hovorí, že maximum spojitej ohraničenej funkcie na kompaktnej množine je tiež spojitou ohraničenou funkciou.

Ďaľej vieme, že priestor spojitých ohraničených funkcií je úplným metrickým priestorom so suprémovou metrikou.

$$\rho(V_1, V_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |V_1(x) - V_2(x)|.$$

Označme si:

$$F(x,u) + \beta V_i(f(x, v_i(x))) := \max_{u \in U}[F(x,u) + \beta V_i(f(x,u))].$$

Pre spojité funkcie $V_1(x)$ a $V_2(x)$ potom platí:

$$\begin{aligned} TV_1(x) - TV_2(x) &= F(x, v_1(x)) + \beta V_1(f(x, v_1(x))) - F(x, v_2(x)) - \beta V_2(f(x, v_2(x))) \\ &\leq F(x, v_1(x)) + \beta V_1(f(x, v_1(x))) - F(x, v_1(x)) - \beta V_2(f(x, v_1(x))) \\ &= \beta[V_1(f(x, v_1(x))) - V_2(f(x, v_1(x)))], \end{aligned}$$

lebo $F(x, v_2(x)) + \beta V_2(f(x, v_2(x))) = \max_{u \in U}[F(x,u) + \beta V_2(f(x,u))] \geq F(x, v_1(x)) - \beta V_2(f(x, v_1(x)))$.

Podobným postupom dostávame:

$$\begin{aligned} TV_2(x) - TV_1(x) &= F(x, v_2(x)) + \beta V_2(f(x, v_2(x))) - F(x, v_1(x)) - \beta V_1(f(x, v_1(x))) \\ &\leq F(x, v_2(x)) + \beta V_2(f(x, v_2(x))) - F(x, v_2(x)) - \beta V_1(f(x, v_1(x))) \\ &= \beta[V_2(f(x, v_2(x))) - V_1(f(x, v_2(x)))]. \end{aligned}$$

Ak spojíme tieto dve nerovnosti, dostávame:

$$\beta[V_1(f(x, v_2(x))) - V_2(f(x, v_2(x)))] \leq TV_1(x) - TV_2(x) \leq \beta[V_1(f(x, v_1(x))) - V_2(f(x, v_1(x)))].$$

Pre absolútnu hodnotu z rozdielu $TV_1(x)$ a $TV_2(x)$ platí:

$$|TV_1(x) - TV_2(x)| \leq \beta \max\{|V_1(f(x, v_2(x))) - V_2(f(x, v_2(x)))|; |V_1(f(x, v_1(x))) - V_2(f(x, v_1(x)))|\}.$$

Ozačme

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{ak } |V_1(f(x, v_2(x))) - V_2(f(x, v_2(x)))| \leq |V_1(f(x, v_1(x))) - V_2(f(x, v_1(x)))| \\ v_2(x) & \text{ak } |V_1(f(x, v_2(x))) - V_2(f(x, v_2(x)))| \geq |V_1(f(x, v_1(x))) - V_2(f(x, v_1(x)))| \end{cases}$$

Potom

$$|TV_1(x) - TV_2(x)| \leq \beta |V_1(f(x, v(x))) - V_2(f(x, v(x)))|,$$

a teda aj

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |TV_1(x) - TV_2(x)| \leq & \sup_{x\in\mathbb{R}} \{\beta |V_1(f(x, v(x))) - V_2(f(x, v(x)))|\} \\
&= \beta \sup_{x\in\mathbb{R}} |V_1(f(x, v(x))) - V_2(f(x, v(x)))| \\
&\leq \beta \sup_{x\in\mathbb{R}} |V_1(x) - V_2(x)|.
\end{aligned}$$

Dostali sme

$$\rho(TV_1(x), TV_2(x)) \leq \beta\rho(V_1(x), V_2(x)),$$

a keďže $0 < \beta < 1$, tak sme ukázali, že zobrazenie $TV(x)$ je naozaj kontraktívne.

Kontraktívnosť je dokázaná, môžeme teda použiť Banachovu vetu, ktorú máme uvedenú napríklad v skriptách [2], a znie:

Veta 3 (Banachova veta o pevnom bode) *Nech $(X, \|.\|)$ je úplný priestor, nech $M \subset X$ je uzavretá množina. Nech zobrazenie $f : M \to M$ je kontraktívne, t.j. existuje konštanta kontrakcie $\theta \in (0, 1)$ taká, že:*

$$\forall x, y \in M : \|f(x) - f(y)\| \leq \theta \|x - y\|.$$

Potom pre ľubovoľné štartovacie $x^0 \in M$ postupnosť $\{x^n\}$ definovaná ako $x^{n+1} = f(x^n)$ je konvergentná, $x^n \to x^* \in M$, kde x^* je jediný pevný bod zobrazenia f na M, teda $x* = f(x^*)$.

Dôkaz tejto vety si tu uvádzať nebudeme, no vidíme, že z nej už priamo vyplýva dôkaz vety 2.

Táto veta je uvedená ako úloha 2.24 v knihe [1]. Jej dokázaním sme teda zároveň túto úlohu vyriešili.

4 Aplikácie metód riešenia na vybrané typy úloh

V tejto časti si ukážeme aplikáciu metód, spomínaných v predchádzajúcej kapitole na vybrané typy úloh.

Ako už bolo uvedené, úlohy ekonomického charakteru často nadobúdajú tvar diskrétnych úloh optimálneho riadenia s diskontným faktorom na nekonečnom časovom horizonte. Preto sa v prvom rade zameráme na také úlohy, kde funkcia $F(x,u)$ bude nadobúdať tvar rôznych funkcií užitočnosti.

Ak by boli tieto funkcie zhora ohraničené, môžeme v rámci ich konvergencie aplikovať Vety 1 a 2. Pri ekonomických úlohách to tak ale často nebýva. Budeme teda analyzovať, čo sa stane s aplikáciou jednotlivých metód v takomto prípade.

V knihe [6] sa dozvdedáme, že dobrá funkcia užitočnosti spĺňa nasledujúcu vlastnosť:

Definícia 8 (Konkávnosť) - *Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je na konvexnej množine X konkávna, ak pre každé $x_1, x_2 \in X$ a $\alpha \in (0,1)$ platí*

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \leq f(\alpha x_1 + (1-\alpha x_2)).$$

Konkávnosť nám navyše zaručuje, že podmienka prvého rádu pre extrém funkcie, t.j. že derivácia funkcie v bode extrému je rovná nule, bude zároveň postačujúcou podmienkou pre nájdenia maxima.

Po dlhšej úvahe sme nakoniec zvolili nasledujúce typy konkávnych funkcií:

A) Logaritmická - $F(x,u) = \ln(\gamma x + u)$, kde $\gamma > 0$

B) Exponenciálna - $F(x,u) = 1 - \gamma^{-u}$, kde $\gamma > 0$

C) Mocninová - $F(x,u) = u^{\gamma}$, kde $\gamma \in (0,1)$

D) Kvadratická - $F(x,u) = -\gamma x^2 - u^2$, kde $\gamma > 0$

Prvé tri typy funkcií sú navyše v u rastúce, čo je ďaľšia z vlastostí, ktorú podľa knihy [6] dobré funkcie užitočnosti spĺňajú. Túto vlastnosť neskôr využijeme pri analytickej aplikácii metódy aproximácie v priestore hodnotových funkcií.

Vidíme, že posledná z funkcií - kvadratická funkcia nespĺňa vlastnosť rastúcosti. Do zoznamu funkcií však bola zaradená najmä z toho dôvodu, že v zjednodušenom tvare $F(x,u) = -x^2 - u^2$, a pri hodnote diskontného faktora $\beta = 1$ bola uvedená ako príklad 2.22 v knihe [1].

Chceme sa pokúsiť ako o numerické, tak aj o analytické riešenie týchto úloh. Z tohoto dôvodu sa obmedzíme na jednorozmerné úlohy, bez ohraničení na riadenie. Samozrejme pôjde zároveň o úlohy s diskontným faktorom na nekonečnom časovom horizonte.

Tiež sa obmedzíme na lineárnu dynamiku, to znamená, že vo všetkých úlohách bude platiť:

$$f(x,u) = \alpha x - u,$$

kde α je konštanta, ktorá spĺňa $\alpha > 0$.

4.1 Úloha OR s logaritmickou funkciou užitočnosti

Začneme teda s prípadom, kedy výnos zo systému počítame pomocou funkcie:

$$F(x,u) = \ln(\gamma x + u).$$

Ako už bolo naznačené, funkcia $F(x,u)$ je rastúca v x aj v u. Tiež vidíme, že sa jedná o konkávnu funkciu, teda v tomto prípade pôjde o dobrého kandidáta na funkciu užitočnosti.

Môžeme si všimnúť, že výraz, ktorý budeme v tejto úlohe optimalizovať, teda:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \ln(\gamma x_i + u_i),$$

je po odlogaritmovaní rovný výrazu

$$\prod_{i=0}^{\infty} (\gamma x_i + u_i)^{\beta^i},$$

ktorý má tvar Cobb-Douglasovej funkcie užitočnosti s klesajúcimi výnosmi z rozsahu[1]. Keďže logaritmus je rastúca funkcia, takáto transformácia hľadanie maxima nepokazí. Namiesto hľadania maxima Cobb-Douglasovej funkcie teda môžeme hľadať maximum súčtu logaritmov.

Tiež by sme mohli opäť zdôrazniť, že sa budeme zaoberať systémom s lineárnou dynamikou, to znamená, že:

$$f(x,u) = \alpha x - u \quad , \alpha > 0.$$

Ďalej sa zameráme na prípad, kedy začíname v kladnom bode $x_0 = a > 0$ a pridáme aj podmienku na koncový stav $\lim_{k\to\infty} x_k > 0$. Vynecháme však ohraničenia na stav aj spätnú väzbu.

Úloha optimálneho riadenia, ktorou sa budeme v tejto časti zaoberať, bude teda na-

[1] Cobb-Douglasova funkcia má klesajúce výnosy z rozsahu vtedy, keď je suma mocnín menšia než číslo jeden. Platí, že $0 < \beta < 1$, teda $\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i = \frac{1}{1-\beta} < 1$.

dobúdať tvar:

$$\max \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \ln(\gamma x_i + u_i) \ , \tag{43}$$

pri podmienkach

$$x_{i+1} = \alpha x_i - u_i \ , \ i = 0, 1, \dots \ , \tag{44}$$

$$x_0 = a > 0 \ , \tag{45}$$

$$\lim_{k \to \infty} x_k > 0 \ , \tag{46}$$

pričom $\alpha > 0$, $\beta \in (0, 1)$, $\gamma \geq 0$.

Môžeme si všimnúť, že ak dosadíme $\gamma = 0$, tak dostávame príklad uvedený v knihe [1]. Teraz si ukážeme aplikácie jednotlivých metód spomínaných v tretej kapitole na úlohu (43)-(46).

4.1.1 Metóda aproximácie v priestore hodnotových funkcií

Začneme s metódou aproximácie v priestore hodnotových funkcií. Táto metóda je v prvom rade určená na numerické riešenie, no v tomto jednoduchom prípade ju je možné aplikovať aj analyticky.

Zvolíme si teda počiatočnú iteráciu $V^{(0)}(x)$ hodnotovej funkcie, napríklad ako:

$$V^{(0)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \geq 0 \\ -\infty & \text{ak } x < 0 \end{cases} . \tag{47}$$

Ide o rovnakú počiatonú iteráciu, akú si zvolili aj autori knihy [1]. Je to vhodná voľba najmä s ohľadom na podmienku (46).[2]

Ďalším krokom tejto metódy je nájdenie riešenia rovnice:

$$v^{(1)}(x) = \arg\max_{u \in \mathbb{R}} \left[\ln(\gamma x + u) + \beta V^{(0)}(\alpha x - u) \right]. \tag{48}$$

Vidíme, že $\ln(\gamma x + u)$ je rastúcou funkciou vzhľadom na u. Teda čím väčšie u zvolíme, tým bude hodnota tejto časti výrazu vyššia. Na druhú stranu $V^{(0)}(\alpha x - u)$ nadobúda svoje maximum pre $u \leq \alpha x$. Spojením týchto dvoch poznatkov nám jednoznačne vyplýva:

$$v^{(1)}(x) = \alpha x.$$

Teraz tento výsledok dosadíme do výrazu:

$$\begin{aligned} V^{(1)}(x) &= F(x, v^{(1)}(x)) + \beta V^{(0)}(f(x, v^{(1)}(x))) \\ &= \ln(\gamma x + v^{(1)}(x)) + \beta V^{(0)}(\alpha x - v^{(1)}(x)). \end{aligned}$$

[2] Prvá časť výrazu v hranatej zátvorke - $\ln(\gamma x + u)$ - je rastúcou funkciou vzhľadom na u. Teda ak by sme za $V^{(0)}(x)$ zvolili konštantnú funkciu ako napríklad $V^{(0)}(x) = 0$, vyšlo by nám $v^{(1)}(x) = \infty$ a následne aj $V^{(1)}(x) = \infty$. Aj všetky ostané iterácie by vyzerali takto a uviazli by sme tým na mŕtvom bode.

Dostávame:

$$\begin{aligned} V^{(1)}(x) &= \ln(\gamma x + \alpha x) + \beta V^{(0)}(\alpha x - \alpha x) \\ &= \ln[(\gamma + \alpha)x]. \end{aligned}$$

Jednoduchou úpravou tohto logaritmu dostaneme výraz pre prvú iteráciu hodnotovej funkcie:

$$V^{(1)}(x) = \ln x + \ln(\gamma + \alpha). \tag{49}$$

Prechádzame k druhej iterácii. Začneme výpočtom $v^{(2)}(x)$. Táto funkcia musí spĺňať rovnicu:

$$v^{(2)}(x) = \arg\max_{u} \left[\ln(\gamma x + u) + \beta V^{(1)}(\alpha x - u)\right]. \tag{50}$$

Keď dosadíme (49) do (50), máme:

$$v^{(2)}(x) = \arg\max_{u \in \mathbb{R}} [\ln(\gamma x + u) + \beta \ln(\alpha x - u) + \beta \ln(\gamma + \alpha)]. \tag{51}$$

V tomto momente využijeme fakt, že logaritmus je konkávna funkcia a na nájdenie riešenia rovnice (51) použijeme *podmienku prvého rádu pre maximum funkcie*. Výraz v hranatej zátvorke zderivujeme. Hodnota tejto derivácie vo $v^{(2)}(x)$ potom bude rovná nule. Čiže:

$$\frac{1}{\gamma x + v^{(2)}(x)} - \frac{\beta}{\alpha x - v^{(2)}(x)} = 0.$$

Tento výraz upravíme. Najprv ho prenásobíme oboma menovateľmi:

$$\alpha x - v^{(2)}(x) - \beta\left(\gamma x + v^{(2)}(x)\right) = 0,$$

potom roznásobíme zátvorku a dáme všetky členy s $v^{(2)}(x)$ na jednu stranu a zvyšok na druhú stranu:

$$v^{(2)}(x) + \beta v^{(2)}(x) = \alpha x - \beta\gamma x,$$

Obe strany predelíme $(1 + \beta)$ a dostaneme:

$$v^{(2)}(x) = \frac{\alpha - \beta\gamma}{1 + \beta} x.$$

Pomocou tohto vyrátame $V^{(2)}(x)$ ako:

$$\begin{aligned} V^{(2)}(x) &= F(x, v^{(2)}(x)) + \beta V^{(1)}(f(x, v^{(2)}(x))), \\ V^{(2)}(x) &= \ln\left(\gamma x + \frac{\alpha - \beta\gamma}{1 + \beta} x\right) + \beta \ln\left(\alpha x - \frac{\alpha - \beta\gamma}{1 + \beta} x\right) + \beta \ln(\gamma + \alpha), \\ V^{(2)}(x) &= \ln\left(\frac{\gamma + \alpha}{1 + \beta} x\right) + \beta \ln\left(\frac{\beta(\gamma + \alpha)}{1 + \beta} x\right) + \beta \ln(\gamma + \alpha), \\ V^{(2)}(x) &= (1 + \beta)\ln x + (1 + \beta)\ln\frac{\gamma + \alpha}{1 + \beta} + \beta \ln\beta + \beta \ln(\gamma + \alpha). \end{aligned}$$

Ešte si ukážeme jednu ďalšiu iteráciu:

$$v^{(3)}(x) = \arg\max_{u\in\mathbb{R}} \left[\ln(\gamma x + u) + \beta V^{(2)}(\alpha x - u)\right],$$

$$\begin{aligned} v^{(3)}(x) = \arg\max_{u\in\mathbb{R}} &\left[\ln(\gamma x + u) + \beta(1+\beta)\ln(\alpha x - u)\right. \\ &\left.+ \beta(1+\beta)\ln\frac{\gamma+\alpha}{1+\beta} + \beta^2\ln(\gamma+\alpha) + \beta^2\ln\beta\right]. \end{aligned} \tag{52}$$

Z výrazu (52) môžeme kľudne odstrániť členy $\beta(1+\beta)\ln\frac{\gamma+\alpha}{1+\beta}$, $\beta^2\ln(\gamma+\alpha)$ a $\beta^2\ln\beta$. Sú to konštanty a ich vynechanie výsledok nezmení. Teda riešime:

$$\begin{aligned} v^{(3)}(x) &= \arg\max_{u\in\mathbb{R}} \left[\ln(\gamma x + u) + \beta(1+\beta)\ln(\alpha x - u)\right] \\ &= \arg\max_{u\in\mathbb{R}} \left[\ln(\gamma x + u) + (\beta+\beta^2)\ln(\alpha x - u)\right] \end{aligned}$$

Opäť využijeme podmienku prvého rádu pre maximum funkcie. Dostaneme:

$$\frac{1}{\gamma x + v^{(3)}(x)} - \frac{\beta+\beta^2}{\alpha x - v^{(3)}(x)} = 0.$$

Vyjadríme si $v^{(3)}(x)$:

$$v^{(3)}(x) = \frac{\alpha - (\beta+\beta^2)\gamma}{1+\beta+\beta^2}x,$$

a následne vypočítame $V^{(3)}(x)$:

$$\begin{aligned} V^{(3)}(x) =& \ln\left[\gamma x + \frac{\alpha-(\beta+\beta^2)\gamma}{1+\beta+\beta^2}x\right] + \beta\left[(1+\beta)\ln\left(\alpha x - \frac{\alpha-(\beta+\beta^2)\gamma}{1+\beta+\beta^2}x\right)\right. \\ &\left.+(1+\beta)\ln\frac{\gamma+\alpha}{1+\beta} + \beta\ln(\gamma+\alpha) + \beta\ln\beta\right]. \end{aligned}$$

Roznásobíme, upravíme výrazy v logaritmoch a dostaneme:

$$\begin{aligned} V^{(3)}(x) =& \ln\left(\frac{\gamma+\alpha}{1+\beta+\beta^2}x\right) + (\beta+\beta^2)\ln\left[\frac{(\beta+\beta^2)(\gamma+\alpha)}{1+\beta+\beta^2}x\right] \\ &+ (\beta+\beta^2)\ln\frac{\gamma+\alpha}{1+\beta} + \beta^2\ln(\gamma+\alpha) + \beta^2\ln\beta. \end{aligned}$$

Využitím poznatku o tom, že logaritmus súčinu je rovný súčtu logaritmov tento výraz upravíme na:

$$\begin{aligned} V^{(3)}(x) =& \ln x + \ln\left(\frac{\gamma+\alpha}{1+\beta+\beta^2}\right) + (\beta+\beta^2)\ln x + (\beta+\beta^2)\ln\left(\frac{\gamma+\alpha}{1+\beta+\beta^2}\right) \\ &+ (\beta+\beta^2)\ln(\beta+\beta^2) + (\beta+\beta^2)\ln\frac{\gamma+\alpha}{1+\beta} + \beta^2\ln(\gamma+\alpha) + \beta^2\ln\beta. \end{aligned}$$

Spočítame logaritmy v prvom riadku a rozdelíme tie v druhom:

$$\begin{aligned} V^{(3)}(x) =& (1+\beta+\beta^2)\ln x + (1+\beta+\beta^2)\ln\frac{\gamma+\alpha}{1+\beta+\beta^2} \\ &+ (\beta+\beta^2)\ln\beta + (\beta+\beta^2)\ln(1+\beta) - (\beta+\beta^2)\ln(1+\beta) \\ &+ (\beta+\beta^2)\ln(\gamma+\alpha) + \beta^2\ln(\gamma+\alpha) + \beta^2\ln\beta. \end{aligned}$$

Ešte zrátame posledné dva riadky a dostávame:

$$V^{(3)}(x) = (1+\beta+\beta^2)\ln x + (1+\beta+\beta^2)\ln\frac{\gamma+\alpha}{1+\beta+\beta^2}$$
$$+ (\beta+2\beta^2)\ln(\gamma+\alpha) + (\beta+2\beta^2)\ln\beta.$$

Začíname mať dobrú predstavu, ako sa budú vyvíjať funkcie $v^{(i)}(x)$ a $V^{(i)}(x)$ pre nasledujúce iterácie. Pomocou matematickej indukcie sa dá ukázať, že pre $i \geq 2$ bude:

$$v^{(i)}(x) = \frac{\alpha - (\beta+\beta^2+...+\beta^{i-1})\gamma}{1+\beta+...+\beta^{i-1}}x. \tag{53}$$

$$V^{(i)}(x) = (1+\beta+...+\beta^{i-1})\ln x + (1+\beta+...+\beta^{i-1})\ln\frac{\gamma+\alpha}{1+\beta+...+\beta^{i-1}} \tag{54}$$
$$+ (\beta+2\beta^2+...+(i-1)\beta^{i-1})\ln(\gamma+\alpha) + (\beta+2\beta^2+...+(i-1)\beta^{i-1})\ln\beta.$$

Urobíme limitu pre i idúce do nekonečna a dostaneme výsledný tvar funkcie spätnej väzby:[3]

$$v(x) = \lim_{i\to\infty} v^{(i)}(x) \quad = (\alpha - \alpha\beta - \beta\gamma)x, \tag{55}$$

a takisto aj hodnotovú funkciu:

$$\begin{aligned} V(x) &= \lim_{i\to\infty} V^{(i)}(x) \\ &= \frac{1}{1-\beta}\ln x + \frac{1}{1-\beta}\ln\left[(\gamma+\alpha)(1-\beta)\right] + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln(\gamma+\alpha) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta. \end{aligned} \tag{56}$$

Rovnicu (56) upravíme rozdelením logaritmu v druhom sčítanci:

$$V(x) = \frac{1}{1-\beta}\ln x + \left[\frac{1}{1-\beta} + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\right]\ln(\gamma+\alpha) + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta,$$

a nakoniec zrátame výraz v hranatej zátvorke. Dostaneme výsledný tvar hodnotovej funkcie $V(x)$:

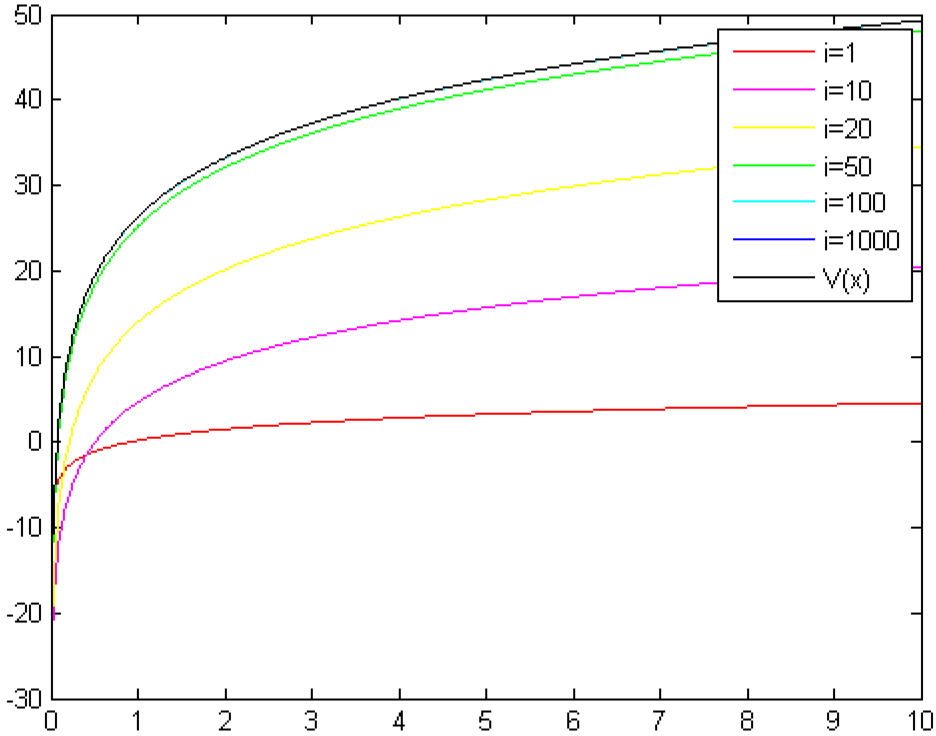
$$V(x) = \frac{1}{1-\beta}\ln x + \frac{1}{(1-\beta)^2}\ln(\gamma+\alpha) + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta. \tag{57}$$

Analyticky sme teda vypočítali hodnotovú funkciu $V(x)$ a funkciu spätnej väzby $v(x)$. Ako už bolo spomínané, táto metóda je však určená predovšetkým pre numerické riešenie.

Tu prichádza na rad výpočtová technika. Metódu aproximácie v priestore hodnotových funkcií sme aplikovali aj numericky, v programe MATLAB. Na Obr. 1 je preto uvedený grafický výstup tohto programu. Na konci diplomovej práce je k dispozícii zdrojový kód. Hodnoty parametrov α, β a γ boli zvolené ako:

$$\alpha = 0.8,$$
$$\beta = 0.9,$$
$$\gamma = 1.$$

[3]Vidíme, že máme splnenú podmienku (46), pretože $x_{i+1} = \alpha x - u = (\alpha - \alpha + \alpha\beta + \alpha\gamma)x = (\alpha\beta + \alpha\gamma)x$ a výraz $\alpha\beta + \alpha\gamma$ je kladný.



Obr. 1: Aproximácia $V^{(i)}(x)$ v priestore hodnotových funkcií - Logaritmická funkcia

Za $V^{(0)}(x)$ pre numerický výpočet sme volili $V^{(1)}(x)$ z analytického riešenia, teda:

$$V^{(0)}(x) = \ln x + \ln(\gamma + \alpha).$$

Iterácie 1, 10, 20, 50, 100 a 1000 sú v tomto poradí označené farbami: červená, magenta, žltá, zelená, cyan a modrá. Poslednou viditeľnou je zelená, farbu cyan by bolo možné vidieť len pri veľkom priblížení. Modrú nie je od čiernej rozoznať ani pri najvyššom možnom priblížení, ktoré nám program Matlab ponúka.

Čiernou farbou je potom na obrázku znázornený priebeh funkcie $V(x)$, ktorá nám vyšla pri analytickom výpočte. Môžeme si všimnúť, že numerické riešenie k nami spočítanému riešeniu naozaj konverguje.

4.1.2 Metódou aproximácie v priestore spätných väzieb

Aj táto metóda je v prvom rade určená na numerické riešenie, my sa ju však najprv pokúsime vyriešiť analyticky. Pri tejto metóde najprv zvolíme počiatočnú iteráciu funkcie spätnej väzby, napríklad:

$$v^{(0)}(x) = (\alpha - 1)x.$$

Takúto funkciu $v^{(0)}(x)$ sme zvolili preto, aby sme si zjednodušili nasledujúci krok - výpočet funkcie $V^{(1)}(x)$. Tú vypočítame ako riešenie rovnice (39), teda:

$$V^{(1)}(x) = F(x, v^{(0)}(x)) + \beta V^{(1)}(f(x, v^{(0)}(x))).$$

Keď dosadíme príslušne funkcie f, F a $v^{(0)}$, dostaneme:

$$V^{(1)}(x) = \ln\left[\gamma x + (\alpha - 1)x\right] + \beta V^{(1)}(\alpha x - (\alpha - 1)x),$$

a vďaka vhodne zvolenej funkcii $v^{(0)}$ sa nám tento krok zjednodušil na výpočet rovnice:

$$V^{(1)}(x) = \ln\left[\gamma x + (\alpha - 1)x\right] + \beta V^{(1)}(x).$$

Po jednoduchej úprave dostávame:

$$V^{(1)}(x) = \frac{1}{1-\beta}\ln\left[(\gamma + \alpha - 1)x\right].$$

Túto funkciu potom dosadíme do:

$$v^{(1)}(x) = \arg\max_{u\in\mathbb{R}} \left\{F(x,u) + \beta V^{(1)}(f(x,u))\right\},$$

spolu s funkciami f a F a dostaneme:

$$v^{(1)}(x) = \arg\max_{u\in\mathbb{R}} \left\{\ln\left[\gamma x + u\right] + \beta\frac{1}{1-\beta}\ln\left[(\gamma + \alpha - 1)(\alpha x - u)\right]\right\}.$$

Z podmienky prvého rádu pre maximum funkcie máme:

$$\frac{1}{\gamma x + v^{(1)}(x)} - \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{\alpha x - v^{(1)}(x)} = 0.$$

Oba sčítance vynásobíme menovateľmi:

$$(1-\beta)(\alpha x - v^{(1)}(x)) - \beta\gamma x - \beta v^{(1)}(x) = 0,$$

a následne vyjadríme $v^{(1)}(x)$:

$$v^{(1)}(x) = (\alpha - \alpha\beta - \beta\gamma)x.$$

Pomocou $v^{(1)}(x)$ potom môžeme vyrátať ďalšiu iteráciu hodnotovej funkcie z rovnice:

$$V^{(2)}(x) = F(x, v^{(0)}(x)) + \beta V^{(2)}(f(x, v^{(0)}(x))),$$

teda:

$$V^{(2)}(x) = \ln\left[\gamma x + (\alpha - \alpha\beta - \beta\gamma)x\right] + \beta V^{(2)}(\alpha x - (\alpha - \alpha\beta - \beta\gamma)x),$$

čo je možné upraviť na:

$$V^{(2)}(x) = \ln\left[(\alpha + \gamma)(1-\beta)x\right] + \beta V^{(2)}((\alpha + \gamma)\beta x). \tag{58}$$

Funkciu $V^{(2)}(x)$ potom môžeme riešiť opäť buď numericky, alebo analyticky, pomocou metódy neurčitých koeficientov. Hodnotová funkcia v tejto iterácii bude pravdepodobne nadobúdať tvar:

$$V^{(2)}(x) = c\ln x + d, \tag{59}$$

kde c a d sú koeficienty, ktorých hodnotu sa teraz pokúsime nájsť. Výraz (59) dosadíme do (58):

$$c\ln x + d = \ln[(\alpha+\gamma)(1-\beta)x] + \beta c\ln[(\alpha+\gamma)\beta x] + \beta d.$$

Upravíme pravú stranu:

$$c\ln x + d = \ln x + \ln(\alpha+\gamma) + \ln(1-\beta) + \beta c\ln x + \beta c\ln(\alpha+\gamma) + \beta c\ln\beta + \beta d,$$

a sčítance preusporiadame:

$$c\ln x + d = (1+\beta c)\ln x + (1+\beta c)\ln(\alpha+\gamma) + \ln(1-\beta) + \beta c\ln\beta + \beta d.$$

Aby boli výrazy na pravej a ľavej strane rovnaké pre všetky x, musí pre koeficienty c a d platiť:

$$c = 1 + \beta c, \tag{60}$$

a

$$d = (1+\beta c)\ln(\alpha+\gamma) + \ln(1-\beta) + \beta c\ln\beta + \beta d.. \tag{61}$$

Z (60) vyjadríme c:

$$c = \frac{1}{1-\beta}, \tag{62}$$

a dosadíme ho do (61):

$$d = \left[1 + \beta\frac{1}{1-\beta}\right]\ln(\alpha+\gamma) + \ln(1-\beta) + \beta\frac{1}{1-\beta}\ln\beta + \beta d.$$

Z tohto už poľahky vyjadríme druhý koeficient:

$$d = \frac{1}{(1-\beta)^2}\ln(\alpha+\gamma) + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta. \tag{63}$$

Následne dosadíme koeficienty c a d z rovníc (62) a (63) do rovnice (59):

$$\begin{aligned} V^{(2)}(x) &= c\ln x + d \\ &= \frac{1}{1-\beta}\ln x + \frac{1}{(1-\beta)^2}\ln(\alpha+\gamma) + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta. \end{aligned}$$

Teraz môžeme pristúpiť k výpočtu funkcie $v^{(2)}(x)$:

$$\begin{aligned} v^{(2)}(x) = \arg\max_u \Bigg\{ &\ln(\gamma x + u) + \beta\frac{1}{1-\beta}\ln(\alpha x - u) \\ &+ \beta\left[\frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta + \frac{1}{(1-\beta)^2}\ln(\alpha+\gamma) + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta)\right]\Bigg\}. \end{aligned}$$

Opäť použijeme podmienku prvého rádu pre maximum funkcie. Platí:

$$\frac{1}{\gamma x + v^{(2)}(x)} - \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{\alpha x - v^{(2)}(x)} = 0.$$

Keď si z tejto rovnice vyjadríme $v^{(2)}(x)$, tak vidíme, že platí:

$$v^{(2)}(x) = (\alpha - \alpha\beta - \beta\gamma)x = v^{(1)}(x).$$

Teda druhá iterácia funkcie $v^{(i)}(x)$ je rovnaká ako prvá. Z toho je jasné, že aj:

$$\begin{aligned} V^{(3)}(x) &= V^{(2)}(x) \\ &= \frac{1}{1-\beta}\ln x + \frac{1}{(1-\beta)^2}\ln(\alpha+\gamma) + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta. \end{aligned}$$

Je logické, že aj všetky ďalšie iterácie funkcií $v^{(i)}(x)$ a $V^{(i)}(x)$ budú rovné funkciám $v^{(1)}(x)$ a $V^{(2)}(x)$, a teda aj:

$$v(x) = (\alpha - \alpha\beta - \beta\gamma)x. \tag{64}$$

$$V(x) = \frac{1}{1-\beta}\ln x + \frac{1}{(1-\beta)^2}\ln(\alpha+\gamma) + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta. \tag{65}$$

Môžeme si všimnúť, že funkcie $v(x)$ a $V(x)$, ktoré nám dala metóda aproximácie v priestore spätných väzieb (výrazy (64) a (65)) sú rovnaké ako funkcie $v(x)$ a $V(x)$, ktoré nám dala metóda aproximácie v priestore hodnotových funkcií (výrazy (55) a (57)). Obe aproximačné metódy teda dali rovnaký výsledok.

Na obrázku 2 môžeme pozorovať numerický priebeh tejto aproximačnej metódy.Hodnoty parametrov α, β a γ boli opäť zvolené ako:

$$\alpha = 0.8,$$
$$\beta = 0.9,$$
$$\gamma = 1.$$

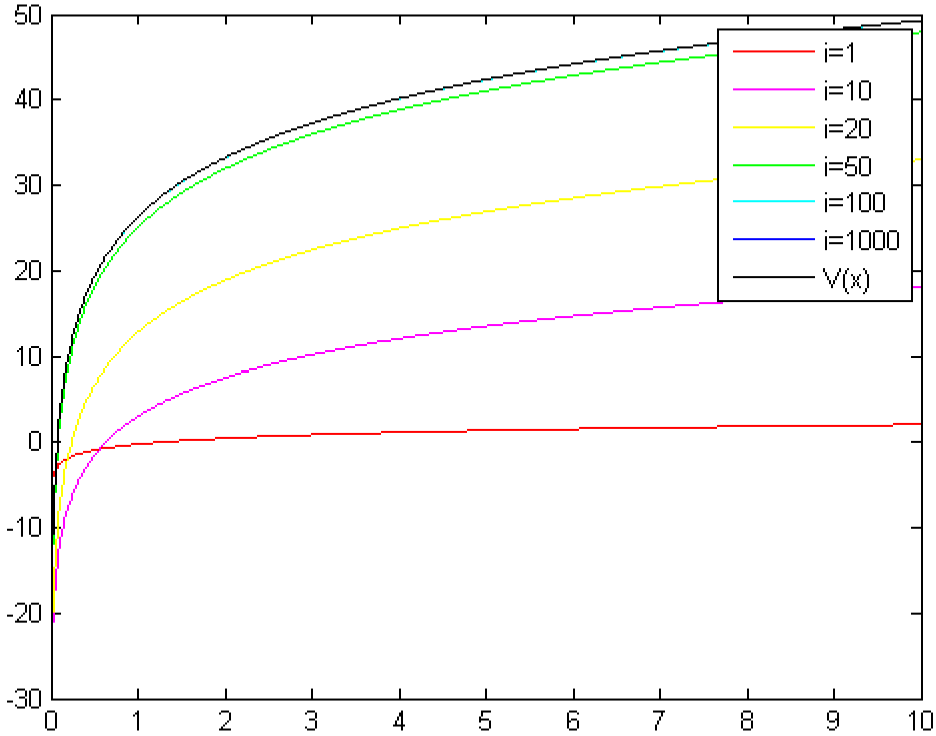
Za nultú ieráciu funkcie spätnej väzby $v^{(0)}(x)$ pre numerický výpočet sme volili:

$$v^{(0)}(x) = \alpha - 1,$$

čo je to isté, ako v prípade analytického riešenia.

Pri numerickej aplikácii metódy aproximácie v priestore spätných väzieb je nutné v každej iterácii urobiť numerický odhad funkcie $V^{(i)}(x)$. Táto numerická aproximácia prebieha vo vnorenom cykle. Počítame:

$$V^{(i)}_{(j+1)}(x) = F(x, v^{(i)}(x)) + \beta V^{(i)}_{(j)}(\alpha x - v^{(i)}(x)),$$



Obr. 2: Aproximácia $V^{(i)}(x)$ v priestore spätných väzieb - Logaritmická funkcia

pričom nultú iteráciu hodnotovej funkcie sme zvolili ako:

$$V_{(0)}^{(i)}(x) = 0.$$

Iterácie 1, 10, 20, 50, 100 a 1000 sú v tomto poradí opäť označené farbami: červená, magenta, žltá, zelená, cyan a modrá. Aj na obrázku 2 je poslednou viditeľnou je zelená. Cyan a modrá splývajú s čiernou, resp. sú ňou v tejto mierke prekryté.

Čiernou farbou je opäť znázornený priebeh funkcie $V(x)$, ktorá nám vyšla pri analytickom výpočte. Môžeme si všimnúť, že numerické riešenie k numericky spočítanému riešeniu naozaj konverguje.

4.1.3 Metóda neurčitých koeficientov aplikovaná na hodnotovú funkciu

Už po pár iteráciách metódy aproximácie v priestore hodnotových funkcií vidíme, že každá z nich má tvar konštanta číslo 1 krát logaritmus plus konštanta dva. Riešenie teda hľadáme v tvare:

$$V(x) = c \ln x + d. \tag{66}$$

Výraz (66) dosadíme do rovnice (41):

$$c \ln x + d = \max_{u \in \mathbb{R}} [\ln(\gamma x + u) + \beta(c \ln(\alpha x - u) + d)], \tag{67}$$

a skúsime nájsť také konštanty c, d, ktoré ju spĺňajú pre každé x. Z podmienky prvého rádu pre maximalizáciu funkcie na pravej strane máme:

$$\frac{1}{\gamma x + v(x)} - \frac{\beta c}{\alpha x - v(x)} = 0.$$

Z tohoto výrazu vyjadríme $v(x)$ ako:

$$v(x) = \frac{(\alpha - \gamma\beta c)x}{1 + \beta c}, \tag{68}$$

a dosadíme do rovnice (67). Dostávame:

$$\begin{aligned} c\ln x + d = \; & \ln\left(\gamma x + \frac{(\alpha - \gamma\beta c)x}{1+\beta c}\right) + \beta\left[c\ln\left(\alpha x - \frac{(\alpha-\gamma\beta c)x}{1+\beta c}\right) + d\right] \\ = \; & \ln\left(\frac{\alpha+\gamma}{1+\beta c}x\right) + \beta c\ln\left[\frac{(\alpha+\gamma)\beta c}{1+\beta c}x\right] + \beta d \\ = \; & \ln x + \ln\frac{\alpha+\gamma}{1+\beta c} + \beta c\ln x + \beta c\ln\frac{(\alpha+\gamma)\beta c}{1+\beta c} + \beta d \\ = \; & (1+\beta c)\ln x + \ln\frac{\alpha+\gamma}{1+\beta c} + \beta c\ln\frac{(\alpha+\gamma)\beta c}{1+\beta c} + \beta d \end{aligned}$$

Chceme, aby táto rovnica platila pre všetky x. Preto musí platiť:

$$c = \; 1 + \beta c \tag{69}$$

$$d = \; \ln\frac{\alpha+\gamma}{1+\beta c} + \beta c\ln\frac{(\alpha+\gamma)\beta c}{1+\beta c} + \beta d. \tag{70}$$

Z rovnice (69) si vieme vyjadriť:

$$c = \; \frac{1}{1-\beta},$$

a to potom dosadíme do rovnice (70) a dostaneme:

$$\begin{aligned} d = & \ln\frac{\alpha+\gamma}{1+\beta\frac{1}{1-\beta}} + \beta\frac{1}{1-\beta}\ln\frac{(\alpha+\gamma)\beta\frac{1}{1-\beta}}{1+\beta\frac{1}{1-\beta}} + \beta d \\ = & \ln\left[(\alpha+\gamma)(1-\beta)\right] + \frac{\beta}{1-\beta}\ln\left[(\alpha+\gamma)\beta\right] + \beta d \\ = & \ln(\alpha+\gamma) + \ln(1-\beta) + \frac{\beta}{1-\beta}\ln(\alpha+\gamma) + \frac{\beta}{1-\beta}\ln\beta + \beta d \\ = & \frac{1}{1-\beta}\ln(\alpha+\gamma) + \ln(1-\beta) + \frac{\beta}{1-\beta}\ln\beta + \beta d. \end{aligned}$$

Od pravej aj od ľavej strany odpočítame βd:

$$(1-\beta)d = \frac{1}{1-\beta}\ln(\alpha+\gamma) + \ln(1-\beta) + \frac{\beta}{1-\beta}\ln\beta,$$

a následne predelíme $(1-\beta d)$:

$$d = \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{1}{1-\beta}\ln(\alpha+\gamma) + \ln(1-\beta) + \frac{\beta}{1-\beta}\ln\beta\right].$$

Roznásobením zátvorky na pravej strane potom dostávame:

$$d = \frac{1}{(1-\beta)^2}\ln(\alpha+\gamma) + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta. \tag{71}$$

Ak teraz dosadíme výrazy (69) a (71) do výrazu (66), tak dostaneme:

$$V(x) = \frac{1}{1-\beta}\ln x + \frac{1}{(1-\beta)^2}\ln(\alpha+\gamma) + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta. \tag{72}$$

Vyšla nám teda rovnaká hodnotová funkcia ako v predošlých dvoch metódach.

Rovnako nám po dosadení výrazu (69) do výrazu (68) dostávame:

$$v(x) = \frac{(\alpha - \gamma\beta\frac{1}{1-\beta})x}{1+\beta\frac{1}{1-\beta}},$$

čo nám po úprave pravej strany dáva:

$$v(x) = (\alpha - \alpha\beta - \beta\gamma)x. \tag{73}$$

To je opäť tá istá funkcia spätnej väzby, aká vyšla v predošlých dvoch metódach.

Zatiaľ nám všetky tri metódy dali rovnaký výsledok.

4.1.4 Metóda neurčitých koeficientov aplikovaná na spätnú väzbu

Poslednou metódou bude metóda neurčitých koeficientov aplikovaná na spätnú väzbu. Pri tejto metóde potrebujeme mať predstavu o tom, v akom tvare bude výsledná funkcia spätnej väzby. Keďže máme systém s lineárnou dynamikou, dá sa očakávať to, že aj funkcia spätnej väzby bude lineárna. Budeme hľadať také riešenie úlohy (43)-(46), aby spätná väzba mala tvar:

$$v(x) = Cx. \tag{74}$$

Toto riešenie musí spĺňať rovnicu (42), teda:

$$Cx = \arg\max_u \left[\ln\left[\gamma x + u\right) + \beta V(\alpha x - u)\right].$$

Z podmienky prvého rádu pre maximum funkcie dostávame:

$$\frac{1}{\gamma x + u} - \beta V'(\alpha x - u) = 0.$$

Toto musí byť splnené pre $u = Cx$, teda:

$$\frac{1}{(\gamma + C)x} - \beta V'((\alpha - C)x) = 0.$$

Ak teraz urobíme substitúciu $(\alpha - C)x = y$, respektíve $x = \frac{y}{\alpha - C}$,dostaneme:

$$\frac{\alpha - C}{(\gamma + C)y} - \beta V'(y) = 0.$$

Zlomok dáme na pravú stranu a predelíme $-\beta$:

$$V'(y) = \frac{\alpha - C}{\beta(\gamma + C)y}.$$

Keď vyriešime túto diferenciálnu rovnicu, dostávame:

$$V(y) = \frac{\alpha - C}{\beta(\gamma + C)} \ln y + D. \tag{75}$$

Vieme, že pre funkciu $V(x)$ platí:

$$V(x) = \ln(\gamma x + u) + \beta V(\alpha x - u). \tag{76}$$

Ak za $V(x)$ dosadíme funkciu z (75) a za u dosadíme (74), dostávame:

$$\frac{\alpha - C}{\beta(\gamma + C)} \ln x + D = \ln(\gamma x + Cx) + \beta \frac{\alpha - C}{\beta(\gamma + C)} \ln (\alpha x - Cx) + \beta D.$$

Ľavú stranu tejto rovnice upravíme rozdelením logaritmov súčinu na súčet logaritmov:

$$\frac{\alpha - C}{\beta(\gamma + C)} \ln x + D = \ln x + \ln(\gamma + C) + \frac{\alpha - C}{(\gamma + C)} \ln x + \frac{\alpha - C}{(\gamma + C)} \ln (\alpha - C) + \beta D,$$

a sčítame koeficienty pri $\ln x$:

$$\frac{\alpha - C}{\beta(\gamma + C)} \ln x + D = \frac{\alpha + \gamma}{\gamma + C} \ln x + \ln (\gamma + C) + \frac{\alpha - C}{(\gamma + C)} \ln (\alpha - C) + \beta D.$$

Táto rovnica musí platiť pre všetky x, teda musí platiť:

$$\frac{\alpha - C}{\beta(\gamma + C)} = \frac{\alpha + \gamma}{\gamma + C}, \tag{77}$$

$$D = \ln (\gamma + C) + \frac{\alpha - C}{(\gamma + C)} \ln (\alpha - C) + \beta D. \tag{78}$$

Z (77) vyjadríme konštantu C:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - C}{\beta} &= \alpha + \gamma, \\ \alpha - C &= \alpha\beta + \gamma\beta, \\ C &= \alpha - \alpha\beta - \beta\gamma. \end{aligned} \tag{79}$$

Výraz (79) dosadíme do výrazu (78):

$$\begin{aligned} D &= \ln (\gamma + \alpha - \alpha\beta - \beta\gamma) + \frac{\alpha - \alpha + \alpha\beta + \beta\gamma}{\gamma + \alpha - \alpha\beta - \beta\gamma} \ln (\alpha - \alpha + \alpha\beta + \beta\gamma) + \beta D, \\ D &= \ln [(\gamma + \alpha)(1 - \beta)] + \frac{(\alpha + \gamma)\beta}{(\gamma + \alpha)(1 - \beta)} \ln [(\gamma + \alpha)\beta]) + \beta D, \\ D &= \ln (1 - \beta) + \ln (\gamma + \alpha) + \frac{\beta}{1 - \beta} \ln (\gamma + \alpha) + \frac{\beta}{1 - \beta} \ln [(\gamma + \alpha)\beta] + \beta D, \\ D &= \ln (1 - \beta) + \frac{1}{1 - \beta} \ln (\gamma + \alpha) + \frac{\beta}{1 - \beta} \ln [(\gamma + \alpha)\beta] + \beta D. \end{aligned}$$

Z oboch strán odpočítame βD a pravú stranu trochu preusporiadame:

$$(1-\beta)D = \frac{1}{1-\beta}\ln(\gamma+\alpha) + \ln(1-\beta) + \frac{\beta}{1-\beta}\ln[(\gamma+\alpha)\beta].$$

Predelíme $1-\beta$:

$$D = \frac{1}{(1-\beta)^2}\ln(\gamma+\alpha) + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta, \tag{80}$$

a dostávame vyjadrený koeficient D.

Výraz (79) dosadíme do (74) a dostávame optimálnu spätnú väzbu:

$$v(x) = (\alpha - \alpha\beta - \beta\gamma)x. \tag{81}$$

Dosadením oboch koeficientov C a D z výrazov (79) a (80) do rovnice (75) dostávame hodnotovú funkciu $V(x)$:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\alpha - \alpha + \alpha\beta + \beta\gamma}{\beta(\gamma + \alpha - \alpha\beta - \beta\gamma)}\ln x + \frac{1}{(1-\beta)^2}\ln(\gamma+\alpha) + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta \\ &= \frac{(\alpha+\gamma)\beta}{\beta(\alpha+\gamma)(1-\beta)}\ln x + \frac{1}{(1-\beta)^2}\ln(\gamma+\alpha) + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta \\ &= \frac{1}{1-\beta}\ln x + \frac{1}{(1-\beta)^2}\ln(\gamma+\alpha) + \frac{1}{1-\beta}\ln(1-\beta) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2}\ln\beta. \end{aligned} \tag{82}$$

Opäť nám vyšla rovnaká hodnotová funkcia i spätná väzbe ako v predchádzajúcich troch metódach. Všetky štyri metódy nám teda dali rovnaký výsledok.

Dosadením $\gamma = 0$ navyše dostávame riešenie úlohy 2.20 z knihy [1].

4.2 Úloha OR s exponenciálnou funkciou užitočnosti

V poradí druhou zvolenou funkciou je exponenciálna funkcia tvaru:

$$F(x,u) = 1 - \gamma^{-u},$$

kde γ je kladná konštanta, rôzna od nuly, často rovná Eulerovmu číslu.

Ako už bolo spomenuté, aj v tomto prípade zostaneme pri lineárnej dynamike systému, teda:

$$f(x,u) = \alpha x - u,$$

s trochu odlišnými požiadavkami na konštantu α. Kvôli ďalším výpočtom budeme požadovať $\alpha > 1$.

Ak si to zhrnieme, tak budeme riešiť úlohu optimálneho riadenia v tvare:

$$\max \sum_{i=0}^{\infty} 1 - \gamma^{-u}, \tag{83}$$

pri podmienkach

$$x_{i+1} = \alpha x_i - u_i \ , \ i = 0, 1, .., \tag{84}$$

$$x_0 = a > 0, \tag{85}$$

s konštantami $\alpha > 1$, $\beta \in (0,1)$, $\gamma > 0$,$\gamma \neq 1$.

4.2.1 Metóda aproximácie v priestore hodnotových funkcií

Opäť začneme metódou aproximácie v priestore hodnotových funkcií. Aj v tomto prípade je možné túto metódu aplikovať analyticky, preto si teraz jej analytické riešenie uvedieme.

Začneme voľbou $V^{(0)}(x)$. Môžeme použiť rovnakú začiatočnú funkciu ako pri logaritmickej funkcii, teda:

$$V^{(0)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \geq 0 \\ -\infty & \text{ak } x < 0 \end{cases} .$$

Vypočítame teda prvú iteráciu funkcie spätnej väzby:

$$v^{(1)}(x) = \arg\max_{u \in \mathbb{R}} \left[1 - \gamma^{-u} + \beta V^{(0)}(\alpha x - u)\right]$$

Funkcia $1 - \gamma^{-u}$ je vzhľadom na u rastúca, preto budeme voliť najväčšie možné u tak, aby $V^{(0)}(\alpha x - u) = 0$. Z toho nám vychádza:

$$v^{(1)}(x) = \alpha x.$$

Teraz vypočítame $V^{(1)}(x)$ ako:

$$\begin{aligned}V^{(1)}(x) &= 1-\gamma^{-v^{(1)}(x)}+\beta V^{(0)}(\alpha x-v^{(1)}(x))\\ &= 1-\gamma^{-\alpha x}+\beta V^{(0)}(\alpha x-\alpha x)\\ &= 1-\gamma^{-\alpha x}.\end{aligned}$$

Tento výraz použijeme pre vypočítanie nasledujúcej iterácie funkcie spätnej väzby:

$$\begin{aligned}v^{(2)}(x) &= \arg\max_{u\in\mathbb{R}}\left\{1-\gamma^{-u}+\beta V^{(1)}(\alpha x-u)\right\}\\ &= \arg\max_{u\in\mathbb{R}}\left\{1-\gamma^{-u}+\beta-\beta\gamma^{-\alpha(\alpha x-u)}\right\}.\end{aligned}$$

Z podmienky prvého rádu pre maximalizáciu funkcie dostávame:

$$\gamma^{-v^{(2)}(x)}\ln\gamma-\alpha\beta\gamma^{-\alpha(\alpha x-v^{(2)}(x))}\ln\gamma=0.$$

Z tejto rovnice vyjadríme $v^{(2)}(x)$:

$$v^{(2)}(x)=\frac{\alpha^2}{1+\alpha}x-\frac{1}{1+\alpha}\log_\gamma\alpha\beta,$$

a dopočítame hodnotovú funkciu:

$$\begin{aligned}V^{(2)}(x) &= 1-\gamma^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}x+\frac{1}{1+\alpha}\log_\gamma\alpha\beta}+\beta-\beta\gamma^{-\alpha\left(\alpha x-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}x+\frac{1}{1+\alpha}\log_\gamma\alpha\beta\right)}\\ &= 1-\gamma^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}x+\frac{1}{1+\alpha}\log_\gamma\alpha\beta}+\beta-\beta\gamma^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}x-\frac{\alpha}{1+\alpha}\log_\gamma\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Využijeme vzťah $y=a^{\log_a y}$ a hodnotovú funkciu ešte upravíme:

$$\begin{aligned}V^{(2)}(x) &= 1-\gamma^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}x}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}+\beta-\beta\gamma^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}x}(\alpha\beta)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\\ &= 1+\beta-\gamma^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}x}\left[(\alpha\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}+\beta(\alpha\beta)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right]\\ &= 1+\beta-\gamma^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}x}\left[(\alpha\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}+\beta(\alpha\beta)^{\left(\frac{1}{1+\alpha}-1\right)}\right]\\ &= 1+\beta-\gamma^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}x}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}\left[1+\beta(\alpha\beta)^{-1}\right]\\ &= 1+\beta-\gamma^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}x}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(1+\alpha^{-1}\right).\end{aligned}$$

Pokračujem ďalej, výpočtom tretej iterácie funkcie spätnej väzby:

$$\begin{aligned}v^{(3)}(x) &= \arg\max_{u\in\mathbb{R}}\left[1-\gamma^{-u}+\beta V^{(2)}(\alpha x-u)\right]\\ &= \arg\max_{u\in\mathbb{R}}\left[1-\gamma^{-u}+\beta+\beta^2-\beta(\alpha\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(1+\alpha^{-1}\right)\gamma^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}(\alpha x-u)}\right],\end{aligned}$$

za pomoci podmienky prvého rádu pre maximum funkcie, podľa ktorej platí:

$$\gamma^{-v^{(3)}(x)}\ln\gamma-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\beta(\alpha\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(1+\alpha^{-1}\right)\gamma^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}(\alpha x-v^{(3)}(x))}\ln\gamma=0.$$

Z tohto vzťahu vyjadríme $v^{(3)}(x)$:

$$v^{(3)}(x) = \frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x - \frac{2+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}\log_\gamma \alpha\beta.$$

Následne vypočítame hodnotovú funkciu:

$$\begin{aligned} V^{(3)}(x) = \quad & 1 - \gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x + \frac{2+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}\log_\gamma \alpha\beta} \\ & + \beta + \beta^2 - \beta\gamma^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\left(\alpha x - \frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x + \frac{2+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}\log_\gamma \alpha\beta\right)}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(1+\alpha^{-1}\right) \end{aligned}$$

Výraz upravíme roznásobením zátvorky:

$$\begin{aligned} V^{(3)}(x) = \quad & 1 - \gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x}(\alpha\beta)^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}} \\ & + \beta + \beta^2 - \beta\gamma^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\frac{\alpha+\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2}x}(\alpha\beta)^{\frac{-2\alpha^2-\alpha^3}{(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)}}(\alpha\beta)^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(1+\alpha^{-1}\right), \end{aligned}$$

roznásobením a sčítaním zlomkov:

$$\begin{aligned} V^{(3)}(x) = \quad & 1 - \gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x}(\alpha\beta)^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}} \\ & + \beta + \beta^2 - \beta\gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x}(\alpha\beta)^{\frac{1+\alpha+\alpha^2-2\alpha^2-\alpha^3}{(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)}}\left(1+\alpha^{-1}\right), \end{aligned}$$

sčítaním výrazu $1+\alpha+\alpha^2-2\alpha^2-\alpha^3$:

$$\begin{aligned} V^{(3)}(x) = \quad & 1 - \gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x}(\alpha\beta)^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}} \\ & + \beta + \beta^2 - \beta\gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x}(\alpha\beta)^{\frac{1+\alpha-\alpha^2-\alpha^3}{(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)}}\left(1+\alpha^{-1}\right), \end{aligned}$$

a jeho rozložením na súčin dvoch zátvoriek:

$$\begin{aligned} V^{(3)}(x) = \quad & 1 - \gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x}(\alpha\beta)^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}} \\ & + \beta + \beta^2 - \beta\gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x}(\alpha\beta)^{\frac{(1+\alpha)(1-\alpha^2)}{(1+\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)}}\left(1+\alpha^{-1}\right). \end{aligned}$$

Vykrátime, pripočítame a odpočítame v menovateli výraz $\alpha+1$:

$$\begin{aligned} V^{(3)}(x) = \quad & 1 - \gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x}(\alpha\beta)^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}} \\ & + \beta + \beta^2 - \beta\gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x}(\alpha\beta)^{\frac{1-\alpha^2-\alpha-1+\alpha+1}{(1+\alpha+\alpha^2)}}\left(1+\alpha^{-1}\right), \end{aligned}$$

a následne tento zlomok rozdelíme:

$$V^{(3)}(x) = \quad 1 - \gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x}(\alpha\beta)^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}} + \beta + \beta^2 - \beta\gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x}(\alpha\beta)^{\frac{2+\alpha}{(1+\alpha+\alpha^2)}-1}\left(1+\alpha^{-1}\right).$$

Prehodíme poradie jednotlivých členov súčtu a rovnaké výrazy vyjmeme pred zátvorku:

$$V^{(3)}(x) = 1 + \beta + \beta^2 - \gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x}(\alpha\beta)^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}}\left[1 + \beta(\alpha\beta)^{-1}\left(1+\alpha^{-1}\right)\right].$$

Výraz v hranatej zátvorke spočítame:

$$V^{(3)}(x) = 1 + \beta + \beta^2 - \gamma^{-\frac{\alpha^3}{1+\alpha+\alpha^2}x} (\alpha\beta)^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}} \left(1 + \alpha^{-1} + \alpha^{-2}\right),$$

a dostávame tým konečné vyjadrenie tretej iterácie hodnotovej funkcie.

Dá sa ukázať, že i-ta iterácia funkcie spätnej väzby pre $i \geq 2$ bude mať tvar:

$$v^{(i)}(x) = \frac{\alpha^i}{1 + \alpha + ... + \alpha^{i-1}} x - \frac{(i-1) + (i-2)\alpha + ... + \alpha^{i-2}}{1 + \alpha + ... + \alpha^{i-1}} \log_\gamma \alpha\beta, \tag{86}$$

a i-ta iterácia hodnotovej funkcie bude mať tvar:

$$\begin{aligned} V^{(i)}(x) = \quad & (1 + \beta + ... + \beta^{i-1}) \\ & - \gamma^{-\frac{\alpha^i}{1+\alpha+...+\alpha^{i-1}}x} (\alpha\beta)^{\frac{(i-1)+(i-2)\alpha+...+\alpha^{i-2}}{1+\alpha+...+\alpha^{i-1}}} \left(1 + \alpha^{-1} + ... + \alpha^{-(i-1)}\right). \end{aligned} \tag{87}$$

Ostáva nám spočítať limity výrazov (86) a (87) pre i idúce do nekonečna. Dostávame spätnú väzbu:

$$v(x) = \lim_{i\to\infty} v^{(i)}(x) = (\alpha - 1)x - \frac{1}{\alpha - 1} \log_\gamma \alpha\beta, \tag{88}$$

a hodnotovú funkciu:

$$V(x) = \lim_{i\to\infty} V^{(i)}(x) = \frac{1}{1-\beta} - \frac{\alpha}{\alpha - 1} (\alpha\beta)^{\frac{1}{\alpha-1}} \gamma^{-(\alpha-1)x}. \tag{89}$$

Na obrázku 3 môžeme pozorovať numerický priebeh tejto aproximačnej metódy, pri konštantách:

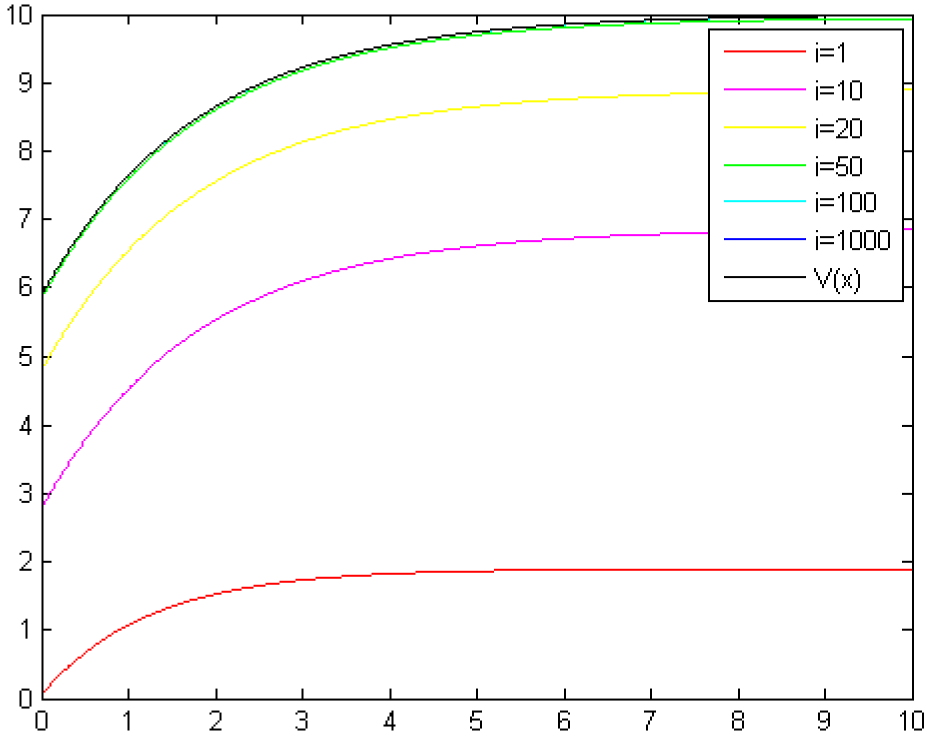
$$\begin{aligned} \alpha &= 1.8, \\ \beta &= 0.9, \\ \gamma &= 2. \end{aligned}$$

Začínali sme s:

$$V^{(0)}(x) = 1 - \gamma^{-\alpha x},$$

čo je tá istá funkcia ako $V^{(1)}(x)$ pri analytickom riešení.

$V(x)$ na obrázku znázorňuje analytické riešenie tejto metódy. Opäť si môžem všimnúť, že numerické riešenie naozaj konverguje k analytickému. $i = 50$ je ešte na farebnom obrázku možno odlíšiť od funkcie $V(x)$, vyššie iterácie s ňou už však splývajú.



Obr. 3: Aproximácia $V^{(i)}(x)$ v priestore hodnotových funkcií - Exponenciálna funkcia

4.2.2 Metódou aproximácie v priestore spätných väzieb

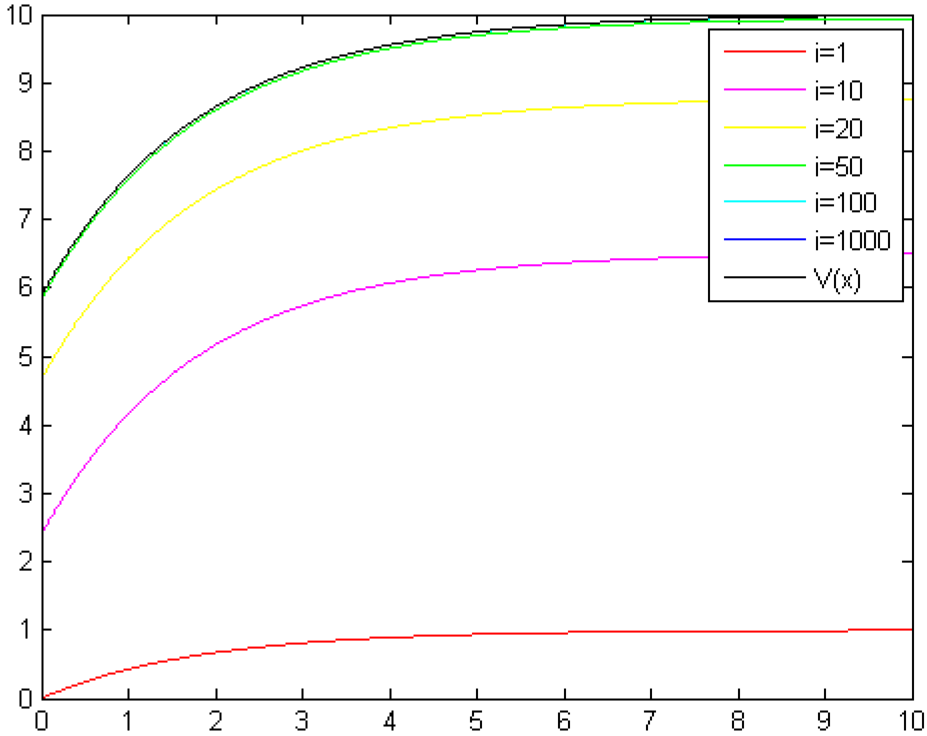
Túto metódu už analyticky počítať nebudeme, vyriešime ju len numericky. Numerický priebeh tejto aproximačnej metódy pri konštantách:

$$\alpha = 1.8,$$
$$\beta = 0.9,$$
$$\gamma = 2,$$

môžeme pozorovať na obrázku 4. Počiatočnú iteráciu funkcie spätnej väzby sme pri tom volili ako:

$$v^{(0)}(x) = (\alpha - 1)x.$$

Čierna čiara, označená ako $V(x)$, opäť znázorňuje analytické riešenie metódy aproximácie v priestore hodnotových funkcií. Metóda aproximácie v priestore spätných väzieb nám konverguje k tomuto riešeniu.Aj v tomto prípade je $i = 50$ ešte na farebnom obrázku možno odlíšiť od $V(x)$, vyššie iterácie s ňou už však opäť splývajú.



Obr. 4: Aproximácia $V^{(i)}(x)$ v priestore spätných väzieb - Exponenciálna funkcia

4.2.3 Metóda neurčitých koeficientov aplikovaná na hodnotovú funkciu

Hľadáme riešenie v tvare:

$$V(x) = b - c\gamma^{-dx}. \tag{90}$$

Skúsime nájsť také konštanty c, d, aby platilo:

$$b - c\gamma^{-dx} = \max_{u \in \mathbb{R}} \left[1 - \gamma^{-u} + \beta b - \beta c a^{-d(\alpha x - u)}\right].$$

Z podmienky prvého rádu pre maximalizáciu funkcie na pravej strane máme:

$$\gamma^{-v(x)} \ln \gamma - \beta c d \gamma^{-d(\alpha x - v(x))} \ln \gamma = 0.$$

Z tejto rovnice vyjadríme funkciu spätnej väzby ako:

$$v(x) = \frac{d\alpha}{1+d} x - \frac{\log_\gamma \beta c d}{1+d}. \tag{91}$$

Dosadíme do rovnice:

$$b - c\gamma^{-dx} = 1 - \gamma^{-v(x)} + \beta b - \beta c a^{-d(\alpha x - v(x))}.$$

a dostávame:

$$
\begin{aligned}
b - c\gamma^{-dx} = \quad & 1 - \gamma^{-\frac{d\alpha}{1+d}x + \frac{\log_\gamma \beta cd}{1+d}} + \beta b - \beta c \gamma^{-d\alpha x + \frac{d^2\alpha}{1+d}x - \frac{d \log_\gamma \beta cd}{1+d}} \\
= \quad & 1 + \beta b - \gamma^{-\frac{d\alpha}{1+d}x} \left[\gamma^{\frac{\log_\gamma \beta cd}{1+d}} + \beta c \gamma^{-\frac{d \log_\gamma \beta cd}{1+d}} \right] \\
= \quad & 1 + \beta b - \gamma^{-\frac{d\alpha}{1+d}x} \left[(\beta cd)^{\frac{1}{1+d}} + \beta c (\beta cd)^{-\frac{d}{1+d}} \right] \\
= \quad & 1 + \beta b - \gamma^{-\frac{d\alpha}{1+d}x} (\beta cd)^{\frac{1}{1+d}} \left(1 + d^{-1} \right).
\end{aligned}
$$

Chceme, aby táto rovnica platila pre všetky x. Preto musí platiť:

$$
b = \quad 1 + \beta b, \tag{92}
$$

$$
c = \quad (\beta cd)^{\frac{1}{1+d}} \left(1 + d^{-1} \right), \tag{93}
$$

$$
d = \quad \frac{d\alpha}{1+d}. \tag{94}
$$

Z rovníc (92) a (94) vieme poľahky vyjadriť koeficienty b a d:

$$
b = \quad \frac{1}{1-\beta}, \tag{95}
$$

$$
d = \quad \alpha - 1. \tag{96}
$$

Výraz (96) potom dosadíme do (93) a vyjadríme koeficient c:

$$
\begin{aligned}
c = \quad & [\beta c(\alpha-1)]^{\frac{1}{1+\alpha-1}} \left(1 + (\alpha-1)^{-1} \right), \\
c^{1-\frac{1}{\alpha}} = \quad & [\beta(\alpha-1)]^{\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{1}{\alpha-1} \right), \\
c^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = \quad & [\beta(\alpha-1)]^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\alpha-1+1}{\alpha-1} \right), \\
c = \quad & [\beta(\alpha-1)]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},
\end{aligned}
$$

$$
c = \quad [\beta(\alpha-1)]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \tag{97}
$$

Teraz dosadíme koeficienty b, c, d, vyjadrené rovnicami (95), (96) a (97) do rovnice (90):

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \frac{1}{1-\beta} - [\beta(\alpha-1)]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \gamma^{-(\alpha-1)x} \\
&= \frac{1}{1-\beta} - \beta^{\frac{1}{\alpha-1}} (\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \gamma^{-(\alpha-1)x} \\
&= \frac{1}{1-\beta} - \beta^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{\alpha^{\frac{\alpha-1+1}{\alpha-1}}}{(\alpha-1)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}-\frac{1}{\alpha-1}}} \gamma^{-(\alpha-1)x} \\
&= \frac{1}{1-\beta} - \beta^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha-1}}}{(\alpha-1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-1}}} \gamma^{-(\alpha-1)x} \\
&= \frac{1}{1-\beta} - (\beta\alpha)^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{\alpha}{\alpha-1} \gamma^{-(\alpha-1)x}.
\end{aligned}
$$

Ak trochu preusporiadame členy v tomto výraze, dostávame:

$$V(x) = \frac{1}{1-\beta} - \frac{\alpha}{\alpha - 1} (\alpha\beta)^{\frac{1}{\alpha-1}} \gamma^{-(\alpha-1)x}. \tag{98}$$

Táto hodnotová funkcia je rovnaká, akú nám dala metóda aproximácie v priestore hodnotových funkcií.

Taktiež môžeme spočítať funkciu spätnej väzby dosadením (95), (96) a (97) do rovnice (91):

$$\begin{aligned}
v(x) &= \frac{(\alpha-1)\alpha}{1+\alpha-1}x - \frac{\log_\gamma \left\{ \beta \left[\beta(\alpha-1)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (\alpha-1) \right\}}{1+\alpha-1}, \\
v(x) &= \frac{(\alpha-1)\alpha}{\alpha}x - \frac{\log_\gamma \left[\beta^{1+\frac{1}{\alpha-1}} (\alpha-1)^{1+\frac{1}{\alpha-1}-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right]}{\alpha}, \\
v(x) &= (\alpha-1)x - \frac{1}{\alpha} \log_\gamma \left[\beta^{\frac{\alpha-1+1}{\alpha-1}} (\alpha-1)^{\frac{\alpha-1+1-\alpha}{\alpha-1}} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right], \\
v(x) &= (\alpha-1)x - \frac{1}{\alpha} \log_\gamma \left[\beta^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (\alpha-1)^0 \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right], \\
v(x) &= (\alpha-1)x - \frac{1}{\alpha} \log_\gamma \left[(\beta\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right], \\
v(x) &= (\alpha-1)x - \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha}{\alpha-1} \log_\gamma \alpha\beta, \\
v(x) &= (\alpha-1)x - \frac{1}{\alpha-1} \log_\gamma \alpha\beta. \qquad (99)
\end{aligned}$$

Aj spätná väzba je rovnaká ako tá, ktorú nám dala metóda aproximácie v priestore hodnotových funkcií.

4.2.4 Metóda neurčitých koeficientov aplikovaná na spätnú väzbu

Budeme hľadať také riešenie, aby spätná väzba mala tvar:

$$v(x) = Cx - D. \tag{100}$$

Toto riešenie musí spĺňať:

$$Cx - D = \arg\max_{u\in\mathbb{R}} \left[\gamma^{-u} + \beta V(\alpha x - u)\right].$$

Z podmienky prvého rádu pre maximum funkcie dostávame:

$$\gamma^{-v(x)} \ln\gamma - \beta V'(\alpha x - v(x)) = 0.$$

Toto musí byť splnené pre $v(x) = Cx - D$, teda:

$$\gamma^{-Cx+D} \ln\gamma - \beta V'(\alpha x - Cx + D) = 0.$$

Ak teraz urobíme substitúciu $(\alpha - C)x - D = y$, dostaneme:

$$\gamma^{\frac{-Cy+\alpha D}{\alpha - C}} \ln\gamma - \beta V'(y) = 0.$$

Iný zápis:

$$V'(y) = \frac{\ln \gamma}{\beta} \gamma^{\frac{-Cy+\alpha D}{\alpha - C}}.$$

Keď vyriešime túto diferenciálnu rovnicu, dostávame:

$$V(y) = -\frac{\alpha - C}{C\beta} \gamma^{\frac{-Cy+\alpha D}{\alpha - C}} + B. \tag{101}$$

Vieme, že pre funkciu $V(x)$ platí:

$$V(x) = 1 - \gamma^{-u} + \beta V(\alpha x - u). \tag{102}$$

Ak za $V(x)$ dosadíme funkciu z (102) a za u dosadíme (100), dostávame:

$$-\frac{\alpha - C}{C\beta} \gamma^{\frac{-Cx+\alpha D}{\alpha - C}} + B = 1 - \gamma^{-Cx+\alpha D} + \beta B - \beta \frac{\alpha - C}{C\beta} \gamma^{\frac{-C(\alpha x - Cx + D)+\alpha D}{\alpha - C}}.$$

Úpravami ľavej strany tejto rovnice dostávame:

$$B - \frac{\alpha - C}{C\beta} \gamma^{\frac{-Cx+\alpha D}{\alpha - C}} = 1 + \beta B - \frac{\alpha}{C} \gamma^{-Cx+D}.$$

Táto rovnica musí platiť pre všetky x, teda musí platiť:

$$B = 1 - \beta B, \tag{103}$$

$$C = \frac{C}{\alpha - C}, \tag{104}$$

$$\frac{\alpha - C}{C\beta} \gamma^{\frac{\alpha D}{\alpha - C}} = \gamma^{D} \frac{\alpha}{C}. \tag{105}$$

Z (103) a(104) vyjadríme koeficienty:

$$B = \frac{1}{1 - \beta}, \tag{106}$$

$$C = \alpha - 1. \tag{107}$$

C potom dosadíme do (105) a vyjadríme koeficient D:

$$\frac{\alpha - \alpha + 1}{(\alpha - 1)\beta} \gamma^{\frac{\alpha D}{\alpha - \alpha + 1}} = \gamma^{D} \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

$$\frac{1}{(\alpha - 1)\beta} \gamma^{\alpha D} = \gamma^{D} \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

$$\gamma^{\alpha D - D} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\beta}{\alpha - 1},$$

$$\gamma^{(\alpha - 1)D} = \alpha\beta,$$

$$D = \frac{1}{\alpha - 1} \log_{\gamma} \alpha\beta. \tag{108}$$

Koeficienty B, C, D vyjadrené rovnicami (106), (107) a (108) následne využijeme pri výpočte hodnototvej funkcie, ktorú máme danú rovnicou (101):

$$V(x) = -\frac{\alpha-(\alpha-1)}{(\alpha-1)\beta}\gamma^{\frac{-(\alpha-1)x+\alpha\frac{1}{\alpha-1}\log_\gamma \alpha\beta}{\alpha-(\alpha-1)}} + \frac{1}{1-\beta},$$
$$V(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)\beta}\gamma^{-(\alpha-1)x+\frac{\alpha}{\alpha-1}\log_\gamma \alpha\beta} + \frac{1}{1-\beta},$$
$$V(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)\beta}(\alpha\beta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\gamma^{-(\alpha-1)x} + \frac{1}{1-\beta},$$
$$V(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)\beta}(\alpha\beta)^{1+\frac{1}{\alpha-1}}\gamma^{-(\alpha-1)x} + \frac{1}{1-\beta},$$
$$V(x) = -\frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)\beta}(\alpha\beta)^{\frac{1}{\alpha-1}}\gamma^{-(\alpha-1)x} + \frac{1}{1-\beta},$$
$$V(x) = -\frac{\alpha}{(\alpha-1)}(\alpha\beta)^{\frac{1}{\alpha-1}}\gamma^{-(\alpha-1)x} + \frac{1}{1-\beta}.$$

Ak ešte prehodíme poradie sčítancov v poslednom výraze:

$$V(x) = \frac{1}{1-\beta} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)}(\alpha\beta)^{\frac{1}{\alpha-1}}\gamma^{-(\alpha-1)x}, \tag{109}$$

dostaneme rovnaký tvar hodnotovej funkcie ako v metóde aproximácie v priestore hodnotových funkcií.

Dosadením koeficientov C, D z rovníc (107) a (108) do (100) zase dostávame:

$$v(x) = (\alpha-1)x - \frac{1}{\alpha-1}\log_\gamma \alpha\beta, \tag{110}$$

čo je rovnaká funkcia spätnej väzby, aká nám vyšla v metóde aproximácie v priestore hodnotových funkcií.

4.3 Úloha OR s mocninovou funkciou užitočnosti

Prechádzame k ďalšiemu typu úlohy. Výnos zo systému budeme počítať pomocou funkcie:

$$F(x,u) = u^p \quad ,$$

kde $0 < p < 1$. Aj táto funkcia je konkávna, preto budeme môcť používať podmienku prvého rádu pre extrém funkcie ako podmienku prvého rádu pre jej maximum.

Systém si naďalej ponecháva lineárnu dynamiku, teda:

$$f(x,u) = \alpha x - u \quad ,$$

pričom budeme požadovať $\alpha > 0$.

Riešime teda nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia:

$$\max \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u^p, \tag{111}$$

pri podmienkach

$$x_{i+1} = \alpha x_i - u_i \ , \ i = 0, 1, ..., \tag{112}$$

$$x_0 = a > 0, \tag{113}$$

pričom $\alpha > 0$, $\beta \in (0,1)$ a $p \in (0,1)$.

4.3.1 Metóda aproximácie v priestore hodnotových funkcií

Budeme hľadať numerické riešenie tejto metódy. Nultá iterácia hodnotovej funkcie tvaru:

$$V^{(0)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \geq 0 \\ -\infty & \text{ak } x < 0 \end{cases} .$$

by sa do programu dosádzala ťažšie, preto znovu najprv vypočítame $V^{(1)}(x)$ a túto funkciu potom použijeme ako našu počiatočnú iteráciu. Najprv však vypočítame $v^{(1)}(x)$ ako:

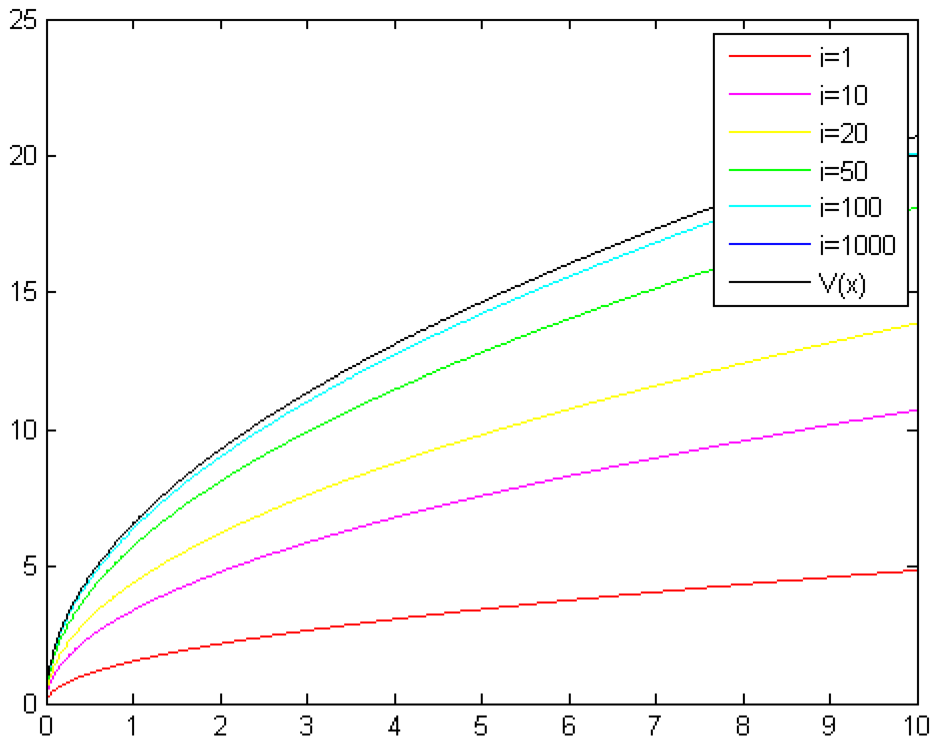
$$\begin{aligned} v^{(1)}(x) &= \arg\max_{u \in \mathbb{R}} \{F(x,u) + \beta V^{(0)}(f(x,u))\} \\ &= \arg\max_{u \in \mathbb{R}} \{u^p + \beta V^{(0)}(\alpha x - u)\}. \end{aligned}$$

Keďže je funkcia u^p rastúca, tak budeme musieť voliť čo najväčšie u, tak aby bol výraz $\alpha x - u$ nezáporný. Teda:

$$v^{(1)}(x) = \alpha x.$$

Pomocou toho potom vyrátame $V^{(1)}(x)$ ako:

$$\begin{aligned} V^{(1)}(x) &= F(x, v^{(1)}(x)) + \beta V^{(0)}(f(x, v^{(1)}(x))) \\ &= (\alpha x)^p + \beta V^{(0)}(\alpha x - \alpha x) \\ &= \alpha^p x^p. \end{aligned}$$



Obr. 5: Aproximácia $V^{(i)}(x)$ v priestore hodnotových funkcií - Mocninová funkcia

Túto funkciu sme použili ako $V^{(0)}(x)$ pri numerickom výčpote.

Numerický priebeh tejto aproximačnej metódy pri konštantách:

$$\alpha = 1.2,$$
$$\beta = 0.9,$$
$$p = 1/2,$$

môžeme pozorovať na obrázku 5. Počiatočnú iteráciu hodnotovej funkcie sme pri tom volili ako:

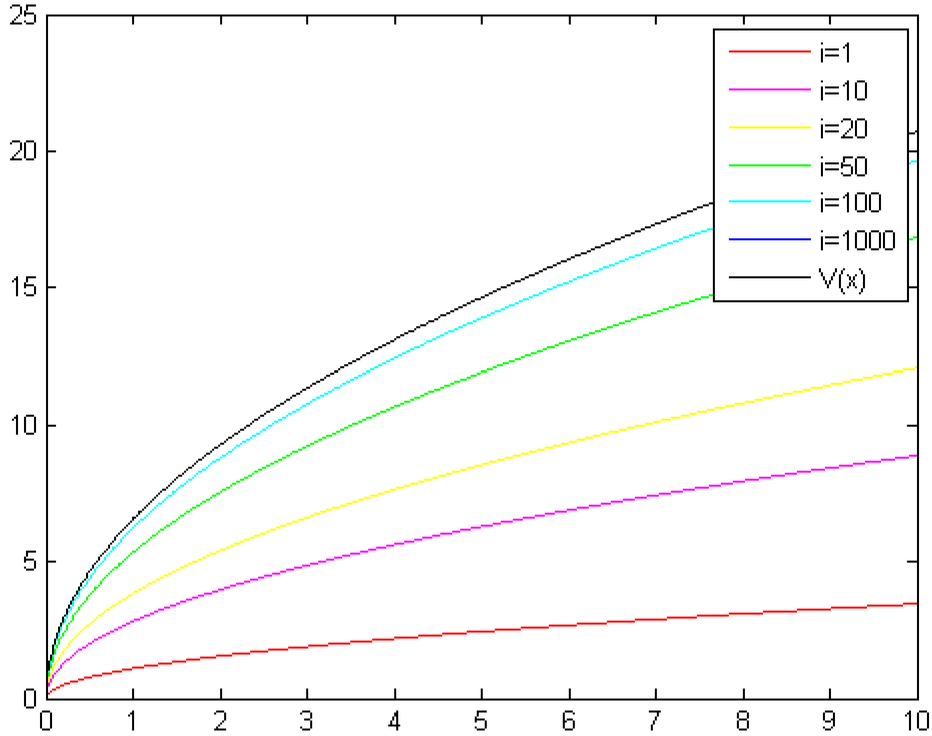
$$V^{(0)}(x) = \alpha^p x^p.$$

Čierna čiara, označená ako $V(x)$, opäť znázorňuje analytické riešenie metódy neurčitých koeficientov aplikovanej na hodnotovú funkciu. Metóda aproximácie v priestore spätných väzieb nám konverguje k tomuto riešeniu. Modrá linka $i = 1000$ na obrázku splýva s $V(x)$.

4.3.2 Metódou aproximácie v priestore spätných väzieb

Opäť hľadáme len numerické riešenie tejto metódy. Tentoraz sme za počiatočnú iteráciu funkcie spätnej väzby volili ako:

$$v^{(0)}(x) = \alpha x.$$



Obr. 6: Aproximácia $V^{(i)}(x)$ v priestore spätných väzieb - Mocninová funkcia

Ide o rovnakú funkciu, akou bola funkcia $v^{(1)}(x)$ v predvýpočte predchádzajúcej metódy. Konštanty boli zvolené ako:

$$\alpha = 1.2,$$
$$\beta = 0.9,$$
$$p = 1/2.$$

V každej iterácii i bolo tiež nutne voliť nultú iteráciu funkcie $V_{(0)}^{(i)}(x)$ pre vnorený cyklus, ktorým sa aproximovala funkcia $V^{(i)}(x)$. Pre naše potreby sme túto funkciu vždy volili ako:

$$V_{(0)}^{(i)}(x) = 0.$$

Priebeh tejto metóy môžeme pozorovať na obrázku 6.

$V(x)$ tentoraz znázorňuje analytické riešenie pomocou metódy neurčitých koeficientov aplikovanej na hodnotovú funkciu. Metóda aproximácie v priestore spätných väzieb nám aj tentoraz konverguje k tomuto riešeniu. $i = 1000$ na obrázku opäť splýva s $V(x)$.

4.3.3 Metóda neurčitých koeficientov aplikovaná na hodnotovú funkciu

Hľadáme riešenie v tvare:

$$V(x) = cx^p. \tag{114}$$

Skúsime nájsť takú konštantu c, aby platilo:

$$cx^p = \max_{u \in \mathbb{R}} \{u^p + \beta c(\alpha x - u)^p\}.$$

Z podmienky prvého rádu pre maximalizáciu funkcie na pravej strane máme:

$$\begin{aligned} p(v(x))^{p-1} - \beta cp(\alpha x - v(x))^{p-1} = 0, \\ (v(x))^{p-1} &= \beta c(\alpha x - v(x))^{p-1}, \\ v(x) &= (\beta c)^{\frac{1}{p-1}}(\alpha x - v(x)), \\ v(x) &= \frac{(\beta c)^{\frac{1}{p-1}}\alpha}{1 + (\beta c)^{\frac{1}{p-1}}} x \end{aligned} \tag{115}$$

Dosadíme výrazy (117) a (115)do vzorcu $V(x) = F(x, v(x)) + \beta V(\alpha x - v(x))$ a dostávame:

$$\begin{aligned} cx^p &= \left[\frac{(\beta c)^{\frac{1}{p-1}}\alpha}{1 + (\beta c)^{\frac{1}{p-1}}} x\right]^p + \beta c \left[\alpha x - \frac{(\beta c)^{\frac{1}{p-1}}\alpha}{1 + (\beta c)^{\frac{1}{p-1}}} x\right]^p \\ &= x^p \left\{\frac{(\beta c)^{\frac{p}{p-1}}\alpha^p}{\left[1 + (\beta c)^{\frac{1}{p-1}}\right]^p} + \beta c \frac{\alpha^p}{\left[1 + (\beta c)^{\frac{1}{p-1}}\right]^p}\right\} \\ &= x^p \left\{\frac{(\beta c)^{1+\frac{1}{p-1}}\alpha^p + \beta c\alpha^p}{\left[1 + (\beta c)^{\frac{1}{p-1}}\right]^p}\right\} \\ &= x^p \frac{\beta c\alpha^p}{\left[1 + (\beta c)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}}. \end{aligned}$$

Chceme, aby táto rovnica platila pre všetky x. Preto musí platiť:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\beta c\alpha^p}{\left[1 + (\beta c)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}}, \\ \left[1 + (\beta c)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1} &= \beta\alpha^p, \\ 1 + (\beta c)^{\frac{1}{p-1}} &= \beta^{\frac{1}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}}, \\ \beta c &= \left(\beta^{\frac{1}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}} - 1\right)^{p-1}, \\ c &= \frac{1}{\beta}\left(\beta^{\frac{1}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}} - 1\right)^{p-1}. \end{aligned} \tag{116}$$

Konštantu c z rovnice (116) dosadíme do (117):

$$V(x) = \frac{1}{\beta}\left(\beta^{\frac{1}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}} - 1\right)^{p-1} x^p. \tag{117}$$

Dostali sme všeobecné riešenie hodnotovej funkcie.

Dosadením (116) do (115) dostávame funkciu spätnej väzby:

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \frac{\left[\beta\frac{1}{\beta}\left(\beta^{\frac{1}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}}-1\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p-1}}\alpha}{1+\left[\beta\frac{1}{\beta}\left(\beta^{\frac{1}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}}-1\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p-1}}}x,\\
v(x) &= \frac{\left(\beta^{\frac{1}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}}-1\right)\alpha}{1+\beta^{\frac{1}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}}-1}x,\\
v(x) &= \frac{\left(\beta^{\frac{1}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}}-1\right)\alpha}{\beta^{\frac{1}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}}}x,\\
v(x) &= \left(1-\frac{1}{\beta^{\frac{1}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}}}\right)\alpha x,\\
v(x) &= \left(\alpha-\frac{1}{\beta^{\frac{\alpha}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}}}\right)x,\\
v(x) &= \left(\alpha-\frac{1}{\beta^{\frac{1}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}-1}}\right)x,\\
v(x) &= \left[\alpha-(\alpha\beta)^{-\frac{1}{1-p}}\right]x. \qquad (118)
\end{aligned}
$$

4.3.4 Metóda neurčitých koeficientov aplikovaná na spätnú väzbu

Budeme hľadať také riešenie, aby spätná väzba mala tvar:

$$v(x) = Cx. \qquad (119)$$

Toto riešenie musí spĺňať:

$$Cx = \arg\max_{u\in\mathbb{R}}\,[u^p + \beta V(\alpha x - u)].$$

Z podmieno prvého rádu pre maximum funkcie dostávame:

$$p(v(x))^{p-1} - \beta V'(\alpha x - v(x)) = 0.$$

Toto musí byť splnené pre $v(x) = Cx$, teda:

$$p(Cx)^{p-1} - \beta V'(\alpha x - Cx) = 0.$$

Ak teraz urobíme substitúciu $(\alpha - C)x = y$, dostaneme:

$$p\left(\frac{Cy}{\alpha - C}\right)^{p-1} - \beta V'(y) = 0.$$

Z tejto rovnice vyjadríme $V'(y)$:

$$V'(y) = p\frac{1}{\beta}\left(\frac{C}{\alpha - C}\right)^{p-1} y^{p-1}.$$

Keď vyriešime túto diferenciálnu rovnicu, dostávame:

$$V(y) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{C}{\alpha - C}\right)^{p-1} y^{p} + D. \tag{120}$$

Vieme, že pre funkciu $V(x)$ platí:

$$V(x) = u^p + \beta V(\alpha x - u).$$

Ak za $V(x)$ dosadíme funkciu z (120) a za u dosadíme (119), dostávame:

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{C}{\alpha - C}\right)^{p-1} x^{p} + D = (Cx)^p + \beta\frac{1}{\beta}\left(\frac{C}{\alpha - C}\right)^{p-1} (\alpha x - Cx)^p + \beta D.$$

Úpravami ľavej strany tejto rovnice dostávame:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta}\left(\frac{C}{\alpha - C}\right)^{p-1} x^{p} + D &= \left[C^p + (\alpha - C)^{p-(p-1)}C^{p-1}\right] x^p + \beta D,\\
\frac{1}{\beta}\left(\frac{C}{\alpha - C}\right)^{p-1} x^{p} + D &= \left[C^p + (\alpha - C)C^{p-1}\right] x^p + \beta D,\\
\frac{1}{\beta}\left(\frac{C}{\alpha - C}\right)^{p-1} x^{p} + D &= \left(C^p + \alpha C^{p-1} - C^p\right) x^p + \beta D, \qquad (121)\\
\frac{1}{\beta}\left(\frac{C}{\alpha - C}\right)^{p-1} x^{p} + D &= \alpha C^{p-1} x^p + \beta D.
\end{aligned}$$

Táto rovnica musí platiť pre všetky x, teda musí platiť:

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{C}{\alpha - C}\right)^{p-1} = \alpha C^{p-1}, \tag{122}$$

$$D = \beta D. \tag{123}$$

Z (123) vidíme, že:

$$D = 0. \tag{124}$$

Ďalej upravíme rovnicu (122):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta}\frac{C^{p-1}}{(\alpha - C)^{p-1}} &= \alpha C^{p-1},\\
\frac{1}{\beta}\frac{1}{(\alpha - C)^{p-1}} &= \alpha,\\
\frac{1}{\alpha\beta} &= (\alpha - C)^{p-1},\\
(\alpha\beta)^{-\frac{1}{p-1}} &= \alpha - C,\\
C &= \alpha - (\alpha\beta)^{-\frac{1}{p-1}}. \qquad (125)
\end{aligned}$$

Koeficienty C, D z (124) a (125) dosadíme do rovnice pre hodnotovú funkciu (120):

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha-(\alpha\beta)^{-\frac{1}{p-1}}}{\alpha-\alpha+(\alpha\beta)^{-\frac{1}{p-1}}}\right)^{p-1} x^p + 0,\\
V(x) &= \frac{1}{\beta}\left(\frac{\alpha-(\alpha\beta)^{-\frac{1}{p-1}}}{(\alpha\beta)^{-\frac{1}{p-1}}}\right)^{p-1} x^p,\\
V(x) &= \frac{1}{\beta}\left(\alpha^{1+\frac{1}{p-1}}\beta^{\frac{1}{p-1}}-1\right)^{p-1} x^p,\\
V(x) &= \frac{1}{\beta}\left(\alpha^{\frac{p}{p-1}}\beta^{\frac{1}{p-1}}-1\right)^{p-1} x^p.
\end{aligned}
$$

Prehodením poradia α a β v poslednom výraze dostaneme rocnaký tvar hodnotovej funkcie ako v predchádzajúcej metóde.

$$V(x) = \frac{1}{\beta}\left(\beta^{\frac{1}{p-1}}\alpha^{\frac{p}{p-1}}-1\right)^{p-1} x^p. \tag{126}$$

Ak ešte dosadíme koeficient C z výrazu (124) do (119):

$$v(x) = \left[\alpha-(\alpha\beta)^{-\frac{1}{p-1}}\right]x, \tag{127}$$

dostaneme tú istú spätnú väzbu ako v metóde neurčitých koeficientov aplikovanej na hodnotovú funkciu .

4.4 Úloha OR s kvadratickou funkciou užitočnosti

Posledným tvarom funkcie výnosu zo systému, ktorém sa budeme v tejto diplomovej práci venovať, je kvadratická funkcia tvaru:

$$F(x,u) = -\gamma x^2 - u^2.$$

Táto funkcia je pre $\gamma > 0$ konkávna. Pre zjednodušenie však budeme namiesto:

$$\max \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \left(-\gamma x_i^2 - u_i^2\right),$$

počítať:

$$\min \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \left(\gamma x_i^2 + u_i^2\right),$$

teda funkcia $F(x,u)$ bude mať tvar:

$$F(x,u) = \gamma x^2 + u^2.$$

Tieto úlohy sú však ekvivalentné vzhľadom na riešenie funkcie spätnej väzby a výsledná hodnotová funkcia minimalizačnej úlohy bude rovná mínus hodnotovej funkcii maximalizačnej úlohy.

Systém bude mať aj naďalej lineárnu dynamiku, teda:

$$f(x,u) = \alpha x - u,$$

pričom budeme požadovať $\alpha > 0$.

Úloha optimálneho riadenia s kvadratickou funkciou užitočnosti bude mať tvar:

$$\min \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \left(\gamma x_i^2 + u_i^2\right), \tag{128}$$

pri podmienkach

$$x_{i+1} = \alpha x_i - u_i \ , \ i = 0, 1, ..., \tag{129}$$

$$x_0 = a > 0, \tag{130}$$

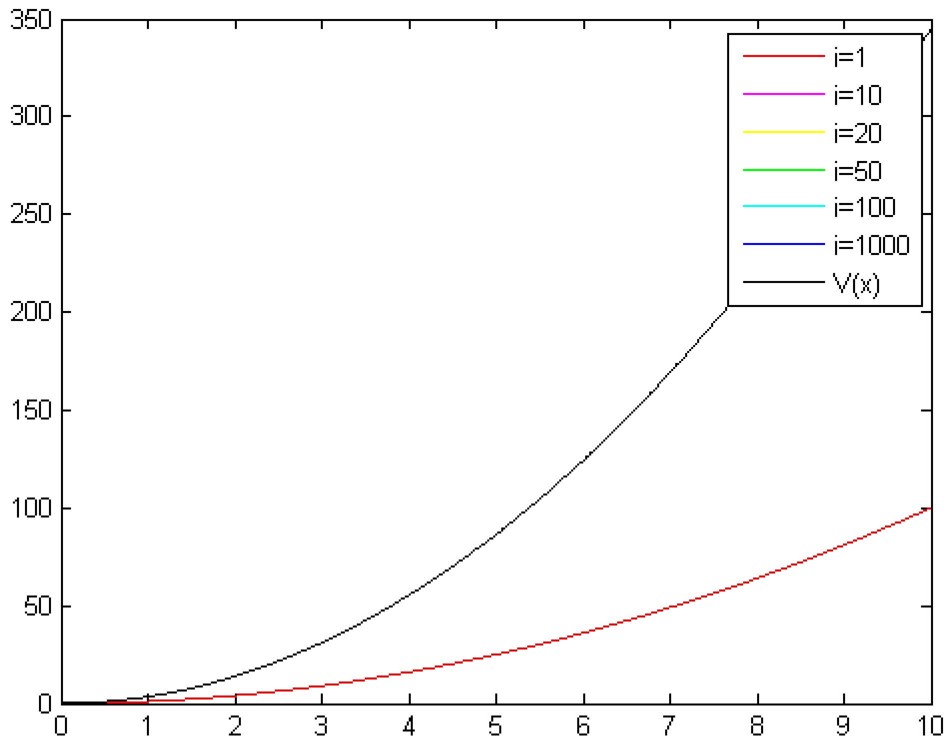
$$\lim_{k \to \infty} x_k > 0, \tag{131}$$

kde $\alpha > 0$, $\beta \in (0,1)$, $\gamma > 0$.

4.4.1 Metóda aproximácie v priestore hodnotových funkcií

Začneme metódou aproximácie v priestore hodnotových funkcií. Zvolíme nultú iteráciu hodnotovej funkcie:

$$V^{(0)}(x) = 0.$$



Obr. 7: Aproximácia $V^{(i)}(x)$ v priestore hodnotových funkcií - Kvadratická funkcia

Numerický priebeh tejto aproximačnej metódy pri konštantách:

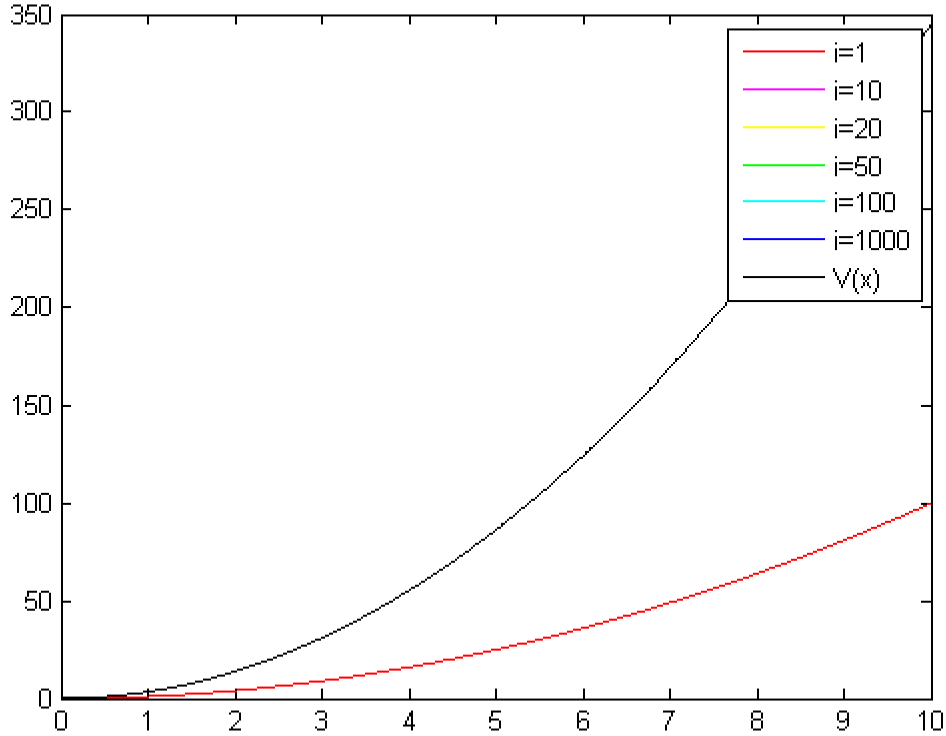
$$\alpha = 1.8,$$
$$\beta = 0.9,$$
$$\gamma = 1,$$

je zobrazený na obrázku 7. $V(x)$ znázorňuje riešenie metódy neurčitých koeficientov aplikovanej na hodnotovú funkciu, ktorú budeme robiť neskôr. Vidíme, že metóda aproximácie v priestore hodnotových funkcií nám konverguje k tomuto riešeniu. Viditeľná je len červenou znázornená iterácia $i = 1$ a čiernou farbou označená funkcia $V(x)$. Ostatné iterácie pri tomto priblížení splývajú s $V(x)$.

4.4.2 Metódou aproximácie v priestore spätných väzieb

Pri numerickom riešení pomocou tejto metódy budeme voliť nultú iteráciu funkcie spätnej väzby ako:

$$v^{(0)}(x) = 0.$$



Obr. 8: Aproximácia $V^{(i)}(x)$ v priestore spätných väzieb - Kvadratická funkcia

Pri vnútornej aproximácii funkcie $V^{(i)}(x)$, budeme v každej iterácii i voliť nultú iteráciu funkcie $V_{(0)}^{(i)}(x)$ ako:

$$V_{(0)}^{(i)}(x) = 0.$$

Numerický priebeh tejto aproximačnej metódy pri konštantách:

$$\alpha = 1.8,$$
$$\beta = 0.9,$$
$$\gamma = 1,$$

môžeme pozorovať na obrázku 8. $V(x)$ opäť znázorňuje riešenie nasledujúcej metódy, t.j. metódy neurčitých koeficientov aplikovanej na hodnotovú funkciu. Metóda aproximácie v priestore spätných väzieb nám konverguje k tomuto riešeniu. Viditeľná je opäť len červenoá iterácia $i = 1$ a čierna funkcia $V(x)$. Ostatné iterácie splývajú s $V(x)$.

4.4.3 Metódou neurčitých koeficientov aplikovanou na hodnotovú funkciu

Pri metóde neurčitých koeficientov aplikovanou na hodnotovú funkciu začíname odhadom tvaru hodnotovej funkcie. V tomto prípade bude mať tvar:

$$V(x) = cx^2, \tag{132}$$

kde c je koeficient, ktorého hodnotu budeme teraz hľadať. Musí platiť:

$$cx^2 = \min_{u \in \mathbb{R}} \{\gamma x^2 + u^2 + \beta c(\alpha x - u)^2\}. \tag{133}$$

V prípade, ak $c > 0$, je z podmienka prvého rádu pre extrém funkcie zároveň aj podmienkou pre minimum funkcie. Dostávame tak:

$$\begin{aligned} 2v(x) - 2\beta c(\alpha x - v(x)) &= \quad 0, \\ (1 + \beta c)v(x) - \alpha\beta cx &= \quad 0, \\ v(x) &= \frac{\alpha\beta cx}{1 + \beta c}. \end{aligned} \tag{134}$$

Dosadíme do (133):

$$\begin{aligned} cx^2 &= \gamma x^2 + \left(\frac{\alpha\beta cx}{1 + \beta c}\right)^2 + \beta c\left(\alpha x - \frac{\alpha\beta cx}{1 + \beta c}\right)^2 \\ cx^2 &= \left[\gamma + \frac{\alpha^2\beta^2c^2 + \alpha^2\beta c}{(1 + \beta c)^2}\right] x^2 \\ cx^2 &= \left[\gamma + \frac{\alpha^2\beta c}{1 + \beta c}\right] x^2. \end{aligned}$$

Keďže toto musí platiť pre všetky x, tak musí platiť tiež:

$$\begin{aligned} c &= \gamma + \frac{\alpha^2\beta c}{1 + \beta c} \\ \beta c^2 + c &= \gamma + \beta\gamma c + \alpha^2\beta c \\ \beta c^2 + (1 - \beta\gamma - \alpha^2\beta)c - \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice vyjadríme c:

$$c = \frac{-1 + \beta\gamma + \alpha^2\beta \pm \sqrt{(1 - \beta\gamma - \alpha^2\beta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\beta}. \tag{135}$$

Keďže chceme, aby $c > 0$, tak:

$$c = \frac{-1 + \beta\gamma + \alpha^2\beta + \sqrt{(1 - \beta\gamma - \alpha^2\beta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\beta}.$$

Dosadením do (132) dostávame predpis pre hodnotovú funkciu:

$$V(x) = \frac{-1 + \beta\gamma + \alpha^2\beta + \sqrt{(1 - \beta\gamma - \alpha^2\beta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\beta}x^2.$$

Koeficient c, vyjadrený rovnicou (135), dosadíme do výrazu (134):

$$v(x) = \frac{\alpha\beta\frac{-1+\beta\gamma+\alpha^2\beta+\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma}}{2\beta}x}{1+\beta\frac{-1+\beta\gamma+\alpha^2\beta+\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma}}{2\beta}}, \tag{136}$$

$$= \frac{\alpha(-1+\beta\gamma+\alpha^2\beta+\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma})x}{2+-1+\beta\gamma+\alpha^2\beta+\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma}}, \tag{137}$$

$$= \alpha\frac{-1+\beta\gamma+\alpha^2\beta+\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma}}{1+\beta\gamma+\alpha^2\beta+\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma}}x \tag{138}$$

$$\frac{1+\beta\gamma+\alpha^2\beta-\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma}}{1+\beta\gamma+\alpha^2\beta-\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma}}. \tag{139}$$

Posledným krokom bolo rozšírenie zlomku tak, aby sme sa zbavili odmocniny v čitateli. Upravíme čitateľ:

$$\begin{aligned}
(-1+\beta\gamma+\alpha^2\beta+\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma})\\
(1+\beta\gamma+\alpha^2\beta-\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma}) =\\
-1-\beta\gamma-\alpha^2\beta+\beta\gamma+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2\gamma+\alpha^2\beta+\alpha^2\beta^2\gamma+\alpha^4\beta^2 \quad &+\\
(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma} \quad &+\\
(1+\beta\gamma+\alpha^2\beta)\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma} \quad &+\\
-1+\beta\gamma+\alpha^2\beta+\beta\gamma-\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2\gamma+\alpha^2\beta-\alpha^2\beta^2\gamma-\alpha^4\beta^2-4\beta\gamma =\\
-2+2\beta\gamma+2\alpha^2\beta-4\beta\gamma+2\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma} =\\
-2-2\beta\gamma+2\alpha^2\beta+2\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma},
\end{aligned}$$

následne upravíme menovateľ:

$$\begin{aligned}
(1+\beta\gamma+\alpha^2\beta+\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma})\\
(1+\beta\gamma+\alpha^2\beta-\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma}) =\\
1+\beta\gamma+\alpha^2\beta+\beta\gamma+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2\gamma+\alpha^2\beta+\alpha^2\beta^2\gamma+\alpha^4\beta^2 \quad &+\\
-1+\beta\gamma+\alpha^2\beta+\beta\gamma-\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2\gamma+\alpha^2\beta-\alpha^2\beta^2\gamma-\alpha^4\beta^2-4\beta\gamma =\\
2\beta\gamma+2\alpha^2\beta+2\beta\gamma+2\alpha^2\beta-4\beta\gamma =\\
4\alpha^2\beta,
\end{aligned}$$

a dostávame:

$$v(x) = \alpha\frac{-2-2\beta\gamma+2\alpha^2\beta+2\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma}}{4\alpha^2\beta}x.$$

Ešte vykrátime 2α a dostávame výsledný tvar funkcie spätnej väzby:

$$v(x) = \frac{-1-\beta\gamma+\alpha^2\beta+\sqrt{(1-\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\beta\gamma}}{2\alpha\beta}x. \tag{140}$$

4.4.4 Metóda neurčitých koeficientov aplikovaná na spätnú väzbu

Budeme hľadať také riešenie, aby spätná väzba mala tvar:

$$v(x) = Cx. \tag{141}$$

Toto riešenie musí spĺňať:

$$Cx = \arg\min_{u\in\mathbb{R}} \left[\gamma x^2 + u^2 + \beta V(\alpha x - u)\right].$$

Z podmienky prvého rádu pre minimum funkcie dostávame:

$$2v(x) - \beta V'(\alpha x - v(x)) = 0.$$

Toto musí byť splnené pre $v(x) = Cx$, teda:

$$2Cx - \beta V'(\alpha x - Cx) = 0.$$

Ak teraz urobíme substitúciu $(\alpha - C)x = y$, dostaneme:

$$\frac{2Cy}{\alpha - C} - \beta V'(y) = 0.$$

Iný zápis:

$$V'(y) = \frac{2Cy}{(\alpha - C)\beta}.$$

Keď vyriešime túto diferenciálnu rovnicu, dostávame:

$$V(y) = \frac{C}{(\alpha - C)\beta} y^2. \tag{142}$$

Vieme, že pre funkciu $V(x)$ platí:

$$V(x) = \gamma x^2 + u^2 + \beta V(\alpha x - u). \tag{143}$$

Ak za $V(x)$ dosadíme funkciu z (142) a za u dosadíme (141), dostávame:

$$\frac{C}{(\alpha - C)\beta} x^2 = \gamma x^2 + (Cx)^2 + \frac{C}{\alpha - C}(\alpha x - Cx)^2.$$

Úpravami ľavej strany tejto rovnice dostávame:

$$\frac{C}{(\alpha - C)\beta} x^2 = (\gamma + \alpha C)x^2.$$

Táto rovnica musí platiť pre všetky x, teda musí platiť:

$$\frac{C}{(\alpha - C)\beta} = \gamma + \alpha C,$$

$$C = (\alpha - C)\beta(\gamma + \alpha C),$$

$$C = \alpha\beta\gamma - \beta\gamma C + \alpha^2\beta C - \alpha\beta C^2,$$

$$\alpha\beta C^2 + (1 + \beta\gamma - \alpha^2\beta)C - \alpha\beta\gamma = 0.$$

Vyjadríme C:

$$C = \frac{-1 - \beta\gamma + \alpha^2\beta \pm \sqrt{(1 + \beta\gamma - \alpha^2\beta)^2 + 4\alpha^2\beta^2\gamma}}{2\alpha\beta}. \tag{144}$$

Dá sa ukázať, že

$$(1 + \beta\gamma - \alpha^2\beta)^2 + 4\alpha^2\beta^2 = (1 - \beta\gamma - \alpha^2\beta)^2 + 4\beta\gamma,$$

teda v prípade, že zvolíme:

$$C = \frac{-1 - \beta\gamma + \alpha^2\beta + \sqrt{(1 + \beta\gamma - \alpha^2\beta)^2 + 4\alpha^2\beta^2\gamma}}{2\alpha\beta},$$

tak je funkcia spätnej väzby $v(x)$:

$$v(x) = \frac{-1 - \beta\gamma + \alpha^2\beta + \sqrt{(1 + \beta\gamma - \alpha^2\beta)^2 + 4\alpha^2\beta^2\gamma}}{2\alpha\beta}x, \tag{145}$$

totožná s tou, ktorá nám vyšla v predchádzajúcej metóde.[4]

Dosadením koeficientu C do (142) dostávame:

$$V(x) = \frac{\frac{-1-\beta\gamma+\alpha^2\beta+\sqrt{(1+\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\alpha^2\beta^2\gamma}}{2\alpha\beta}}{(\alpha - \frac{-1-\beta\gamma+\alpha^2\beta+\sqrt{(1+\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\alpha^2\beta^2\gamma}}{2\alpha\beta})\beta}x^2.$$

Podobnými úpravami ako v predchádzajúcej metóde vyjadríme hodnotovú funkciu:

$$V(x) = \frac{-1 + \beta\gamma + \alpha^2\beta + \sqrt{(1 + \beta\gamma - \alpha^2\beta)^2 + 4\alpha^2\beta^2\gamma}}{2\beta}x^2. \tag{146}$$

Teda rovnaká, ako v predchádzajúcej metóde.

Dosadením $\beta = 1$ a $\gamma = 1$ dostávame riešenie úlohy 2.22 z knihy [1].

[4] Je prirodzené voliť $C = \frac{-1-\beta\gamma+\alpha^2\beta+\sqrt{(1+\beta\gamma-\alpha^2\beta)^2+4\alpha^2\beta^2\gamma}}{2\alpha\beta}$, vzhľadom na podmienku (131). Dá sa totiž jednoducho ukázať, že pri opačnej voľbe by táto podmienka splnená nebola, zatiaľ čo pri našej voľbe konštanty C splnená je.

5 Záver

Na začiatku tejto diplomovej práce sme si zopakovali základné pojmy optimálneho riadenia a predastavili úlohy optimálneho riadenia s diskontným faktorom a nekonečným časovým horizontom a k nej prislúchajúcu rovnicu dynamického programovania. Potom sme si uviedli rôzne metódy riešenia tejto rovnice. Taktiež sme si uviedli dve vety o konvergencii týchto metód, a ich dokázaním sme vyriešili úlohy 2.23 a 2.24 z knihy [1]. Nkoniec sme prešli k aplikácii týchto metód na úlohy s vybranými typmi konkávnych výnosových funkcií $F(x,u)$. Tam sme, okrem iného, ukázali riešenia úloh 2.20 a 2.22 z knihy [1].

Zhrňme si teraz výsledky prechádzajúcej kapitoly. Metóda neuritých koeficientov sa ukázala ako jednoduchšia alternatíva k aproximačným metódam, avšak je pri nej nutné poznať vlastnosti hodnotovej funkcie, resp. mali by sme byť schopní odhadnúť jej tvar. Aproximačné metódy nám vo všetkých prípadoch konvergovali k riešeniu získanému pomocou metód neurčitých koeficientov. Obe metódy neurčitých koeficientov - metóda neurčitých koeficientov aplikovaná na hodnotovú funkciu aj tá, aplikovaná na funkciu spätnej väzby - nám pre všetky štyri typy úloh dali rovnaké rie3enie pre $V(x)$ aj $v(x)$.

Vzniká nám tiež hypotéza, že vďaka lineárnej dynamike $f(x,u)$ v x aj v u sa vlastnosti funkcie $F(x,u)$ prenášajú na vlastnosti hodnotovej funkcie $V(x)$. Hovoríme konkrétne o rastúcosti a konkávnosti. Toto pravdepodobne platí aj pre širšie triedy úloh než tie, ktoré sme analyzovali v tejto diplomovej práci.

Ďalšim rozšírením by mohlo byť zapojenie inej, nelineárnej dynamiky systému, resp. prejdenie k viacerým stavovým a riadiacim premenným.

Literatúra

[1] Halická M., Brunovský P., Jurča P., *Optimálne riadenie - Viacetapové rozhodovacie procesy v ekonómii a financiách*, EPOS, Bratislava, 2009, ISBN 978-80-8057-793-3.

[2] Barnovksá M., Smítalová K., *Matematická Analýza III*, FMFI UK, Bratislava, 1991, ISBN 80-223-0057-8.

[3] Stokey N. L., Lucas R. L., *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts and London, 1989, ISBN 0-674-75096-9.

[4] Bertsekas D. P., Shreve S. E., *Sochastic Optimal Control: The Discrete - Time Case*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts 1996, ISBN 1-886529-03-5.

[5] Beran J., *Maximum Principle for Infinite Horizon Discrete Time Optimal Control Problems*, FMFI UK, Bratislava, 2011.

[6] Turnovec F., *Úvod do Mikroekonomickej Teórie*, Ekonomická Univerzita, Bratislava, 1992, ISBN 80-225-0367-3.

A Príloha

V prílohe sú uvedené algoritmy použité pri numerických výpočtoch.

A.1 Metóda aproximácie v priestore hodnotových funkcií - Logaritmická funkcia

```
function[x,vi,Vi,v,V]=LogHF(i,alpha,beta,gamma)
vi=[];
Vi=[];
m=10;
c=1;
d=log(gamma + alpha);
for j=1:1:i
    vc=(alpha - beta * c * gamma)/(1+beta * c);
    c=1+beta * c;
    d=log(gamma + vc) + beta * c * log(alpha - vc)+ d*beta;
end
l=1;
x=0.01:0.01:m;
for k=0.01:0.01:m
    vi(l)= vc * x(l);
    Vi(l)=c* log(x(l)) + d;
    l=l+1;
end
l=1;
x=0.01:0.01:m;
for k=0.01:0.01:m
    v(l)= (alpha - alpha * beta - beta * gamma) * x(l);
    V(l)= (1/(1- beta))* log(x(l)) + (1/(1- beta))* log((alpha+ gamma)*(1- beta))
          + (beta/((1- beta)^2))* log((alpha + gamma)*beta);
    l=l+1;
end
```

A.2 Metóda aproximácie v priestore spätných väzieb - Logaritmická funkcia

```
function[x,vi,Vi,v,V]=LogSV(i,alpha,beta,gamma)
vi=[];
Vi=[];
m=10;
c=0;
d=0;
vc=alpha-1;
for j=1:1:i
    c=0;
    d=0;
    for k=1:1:i
        c= 1+beta*c;
        d=beta*d+log(gamma+vc)+beta*c*log(alpha-vc);
    end
    vc=(alpha-gamma*beta*c)/(1+beta*c);
end
l=1;
x=0.01:0.01:m;
for k=0.01:0.01:m
    vi(l)= vc * x(l);
    Vi(l)= c * log(x(l))+d;
    l=l+1;
end
l=1;
x=0.01:0.01:m;
for k=0.01:0.01:m
    v(l)= (alpha - alpha * beta - beta * gamma) * x(l);
    V(l)= (1 / (1- beta)) * log(x(l)) + (1 / (1- beta)) * log((alpha+ gamma) * (1- beta))
          + (beta / ((1- beta)^2)) * log((alpha + gamma) * beta);
    l=l+1;
end
```

A.3 Metóda aproximácie v priestore hodnotových funkcií - Exponenciálna funkcia

```
function[x,vi,Vi,v,V]=ExpHF(i,alpha,beta,gamma)
vi=[];
Vi=[];
vc=alpha;
vd=0;
b=1;
c=1;
d=alpha;
for j=1:1:i
    vc=alpha*d/(1+d);
    vd=(1/(1+d))*log(beta*c*d)/log(gamma);
    b=1+beta*b;
    c= gamma^(vd)+beta*c*gamma^(-d*vd);
    d=alpha*d/(1+d);
end
l=1;
m=10;
x=0.01:0.01:m;
for k=0.01:0.01:m
    vi(l)= vc * x(l) - vd;
    Vi(l)= b - c*gamma^(-d*x(l)) ;
    l=l+1;
end
l=1;
x=0.01:0.01:m;
for k=0.01:0.01:m
    v(l)= (alpha - 1) * x(l) - log(alpha*beta) /((alpha-1)*log(gamma));
    V(l)= (1/(1-beta)) - gamma^(-v(l)) * (alpha/(alpha-1));
    l=l+1;
end
```

A.4 Metóda aproximácie v priestore spätných väzieb - Exponenciálna funkcia

```
function[x,vi,Vi,v,V]=ExpSV(i,alpha,beta,gamma)
vi=[];
Vi=[];
vc=alpha-1;
vd=0;
for j=1:1:i
    b=0;
    c=0;
    d=vc;
    for j=1:1:i
        b= 1 + beta*b;
        c= (gamma^(vd)) + beta*c*(gamma^(-d*vd));
    end
    vc=d*alpha/(1+d);
    vd= (1/(1+d)) * log(beta * d * c)/log(gamma);
end
m=10;
l=1;
x=0.01:0.01:m;
for k=0.01:0.01:m
    vi(l)= vc * x(l) - vd;
    Vi(l)=b - c * gamma^(-d*x(l));
    l=l+1;
end
l=1;
x=0.01:0.01:m;
for k=0.01:0.01:m
    v(l)= (alpha - 1) * x(l) - log(alpha*beta) /((alpha-1)*log(gamma));
    V(l)= (1/(1-beta)) - gamma^(-v(l)) * (alpha/(alpha-1));
    l=l+1;
end
```

A.5 Metóda aproximácie v priestore hodnotových funkcií - Mocninová funkcia

```
function[x,vi,Vi,v,V]=MocHF(i,alpha,beta,p)
vi=[];
Vi=[];
vc=alpha;
c=alpha^p;
for j=1:1:i
    vc=alpha * ((beta * c)^(1/(p-1)))/(1+((beta * c)^(1/(p-1))));
    c= vc^p+ beta *c*(alpha-vc)^p;
end
m=10;
l=1;
x=0.01:0.01:m;
for k=0.01:0.01:m
    vi(l)= vc * x(l);
    Vi(l)= c * x(l)^p;
    l=l+1;
end
l=1;
x=0.01:0.01:m;
c=(1/beta)*(((beta^(1/(p-1))) * (alpha^(p/(p-1)))) -1)^(p-1);
for k=0.01:0.01:m
    v(l)= ((beta*c)^(1/(p-1))*alpha / (1 + (beta*c)^(1/(p-1)))) *x(l);
    V(l)= c* x(l)^p;
    l=l+1;
end
```

A.6 Metóda aproximácie v priestore spätných väzieb - Mocninová funkcia

```
function[x,vi,Vi,v,V]=MocSV(i,alpha,beta,p)
vi=[];
Vi=[];
V=[];
vc=alpha;
for j=1:1:i
    c=0;
    for k=1:1:i
        c=vc^p+beta*c*(alpha-vc)^p;
    end
    vc=alpha * ((beta * c)^(1/(p-1)))/(1+((beta * c)^(1/(p-1))));
end
l=1;
m=10;
x=0.01:0.01:m;
for k=0.01:0.01:m
    vi(l)= vc * x(l);
    Vi(l)= c * x(l)^p;
    l=l+1;
end
l=1;
m=10;
x=0.01:0.01:m;
c=(1/beta)*(((beta^(1/(p-1))) * (alpha^(p/(p-1)))) -1)^(p-1);
for k=0.01:0.01:m
    v(l)= ((beta*c)^(1/(p-1))*alpha / (1 + (beta*c)^(1/(p-1)))) *x(l);
    V(l)= c* x(l)^p;
    l=l+1;
end
```

A.7 Metóda aproximácie v priestore hodnotových funkcií - Kvadratická funkcia

```
function[x,vi,Vi,v,V]=KvaHF(i,alpha,beta,gamma)
vi=[];
Vi=[];
V=[];
vc=0;
c=0;
for j=1:1:i
    vc=alpha*beta*c/(1+beta*c);
    c= gamma + vc^2 + beta*c*(alpha-vc)^2;
end
m=10;
l=1;
x=0.01:0.01:m;
for k=0.01:0.01:m
    vi(l)= vc * x(l);
    Vi(l)= c * x(l)^2;
    l=l+1;
end
l=1;
x=0.01:0.01:m;
c=(-1+beta*gamma + alpha^2 *beta + sqrt((1-beta*gamma - alpha^2 * beta)^2
    + 4*beta*gamma))/(2*beta);
for k=0.01:0.01:m
    v(l)=c*alpha*beta*x(l)/(1+ c* beta);
    V(l)= c* x(l)^2;
    l=l+1;
end
```

A.8 Metóda aproximácie v priestore spätných väzieb - Kvadratická funkcia

```
function[x,vi,Vi,v,V]=KvaSV(i,alpha,beta,gamma)
vi=[];
Vi=[];
V=[];
vc=0;
c=0;
for j=1:1:i
    c=0;
    for k=1:1:i
        c= gamma + vc^2 + beta*c*(alpha-vc)^2;
    end
    vc=alpha*beta*c/(1+beta*c);
end
m=10;
l=1;
x=0.01:0.01:m;
for k=0.01:0.01:m
    vi(l)= vc * x(l);
    Vi(l)= c * x(l)^2;
    l=l+1;
end
l=1;
x=0.01:0.01:m;
c=(-1+beta*gamma + alpha^2 *beta + sqrt((1-beta*gamma - alpha^2 * beta)^2
    + 4*beta*gamma))/(2*beta);
for k=0.01:0.01:m
    v(l)=c*alpha*beta*x(l)/(1+ c* beta);
    V(l)= c* x(l)^2;
    l=l+1;
end
```

A.9 Vykreslenie

```
n=1;

    [x,vi,Vi,v,V]=LogHF(1,0.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=LogSV(1,0.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=ExpHF(1,1.8,0.9,2);
% [x,vi,Vi,v,V]=ExpSV(1,1.8,0.9,2);
% [x,vi,Vi,v,V]=MocHF(1,1.2,0.9,1/2);
% [x,vi,Vi,v,V]=MocSV(1,1.2,0.9,1/2);
% [x,vi,Vi,v,V]=KvaHF(1,1.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=KvaSV(1,1.8,0.9,1);
plot(x,Vi,'red')
hold on
pause(n)
    [x,vi,Vi,v,V]=LogHF(10,0.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=LogSV(10,0.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=ExpHF(10,1.8,0.9,2);
% [x,vi,Vi,v,V]=ExpSV(10,1.8,0.9,2);
% [x,vi,Vi,v,V]=MocHF(10,1.2,0.9,1/2);
% [x,vi,Vi,v,V]=MocSV(10,1.2,0.9,1/2);
% [x,vi,Vi,v,V]=KvaHF(10,1.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=KvaSV(10,1.8,0.9,1);
plot(x,Vi,'magenta')
hold on
pause(n)
    [x,vi,Vi,v,V]=LogHF(20,0.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=LogSV(20,0.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=ExpHF(20,1.8,0.9,2);
% [x,vi,Vi,v,V]=ExpSV(20,1.8,0.9,2);
% [x,vi,Vi,v,V]=MocHF(20,1.2,0.9,1/2);
% [x,vi,Vi,v,V]=MocSV(20,1.2,0.9,1/2);
% [x,vi,Vi,v,V]=KvaHF(20,1.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=KvaSV(20,1.8,0.9,1);
plot(x,Vi,'yellow')
hold on
pause(n)
    [x,vi,Vi,v,V]=LogHF(50,0.8,0.9,1);
```

```
% [x,vi,Vi,v,V]=LogSV(50,0.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=ExpHF(50,1.8,0.9,2);
% [x,vi,Vi,v,V]=ExpSV(50,1.8,0.9,2);
% [x,vi,Vi,v,V]=MocHF(50,1.2,0.9,1/2);
% [x,vi,Vi,v,V]=MocSV(50,1.2,0.9,1/2);
% [x,vi,Vi,v,V]=KvaHF(50,1.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=KvaSV(50,1.8,0.9,1);
plot(x,Vi,'green')
hold on
pause(n)
   [x,vi,Vi,v,V]=LogHF(100,0.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=LogSV(100,0.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=ExpHF(100,1.8,0.9,2);
% [x,vi,Vi,v,V]=ExpSV(100,1.8,0.9,2);
% [x,vi,Vi,v,V]=MocHF(100,1.2,0.9,1/2);
% [x,vi,Vi,v,V]=MocSV(100,1.2,0.9,1/2);
% [x,vi,Vi,v,V]=KvaHF(100,1.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=KvaSV(100,1.8,0.9,1);
plot(x,Vi,'cyan')
hold on
pause(n)
   [x,vi,Vi,v,V]=LogHF(1000,0.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=LogSV(1000,0.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=ExpHF(1000,1.8,0.9,2);
% [x,vi,Vi,v,V]=ExpSV(1000,1.8,0.9,2);
% [x,vi,Vi,v,V]=MocHF(1000,1.2,0.9,1/2);
% [x,vi,Vi,v,V]=MocSV(1000,1.2,0.9,1/2);
% [x,vi,Vi,v,V]=KvaHF(1000,1.8,0.9,1);
% [x,vi,Vi,v,V]=KvaSV(1000,1.8,0.9,1);
plot(x,Vi,'blue')
hold on
pause(n)
plot(x,V,'black')
legend('i=1','i=10','i=20','i=50','i=100','i=1000','V(x)')
```