

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFOMATIKY



**MODELOVANIE PREPADU EKONOMIKY MODELMI
ČASOVÝCH RADOV**

Diplomová práca

Bratislava, 2013

Bc. Zoltán Gál

MODELOVANIE PREPADU EKONOMIKY MODELMI ČASOVÝCH RADOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bc. Zoltán Gál

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY
A ŠTATISTIKY**

9.1.9. Aplikovaná matematika

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce

doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky


ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Zoltán Gál
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský


Názov: Modelovanie prepadu ekonomiky modelmi časových radov.
Cieľ: Využitie nelineárnych časových radov na modelovanie prepadu HDP.

Vedúci: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Dátum zadania: 25.01.2012

Dátum schválenia: 26.01.2012


prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu


študent


vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne pod dohľadom vedúceho diplomovej práce a s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave, apríl 2013

.....
Bc. Zoltán Gál

Pod'akovanie

Vo veľkej miere by som sa chcel poďakovať môjmu vedúcemu diplomovej práce, doc. RNDr. Jánovi Pekárovi, PhD., za cenné rady, pripomienky a čas, ktorý mi poskytoval pri tvorbe tejto práce.

Abstrakt

GÁL, Zoltán: *Modelovanie prepadu ekonomiky modelmi časových radov* [Diplomova práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky – Vedúci bakalárskej práce: Doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., 2013, 56 s.

Cieľom tejto práce je využitie nelineárnych časových radov na modelovanie prepadu HDP. V práci sa zaoberáme základnou teóriou časových radov, dekompozíciou časového radu, lineárnymi modelmi a nelineárnymi modelmi. Získanú teóriu aplikujeme na vybrané časové rady HDP Fínska a Cypru. Výstupy jednotlivých modelov porovnáme medzi sebou. Následne spravíme predikcie, ktoré porovnáme so skutočnými hodnotami.

Kľúčové slová: časový rad, HDP Fínska, HDP Cypru, SETAR, STAR

Abstract

GÁL, Zoltán: *Modeling economic overfall with time series models*
[Diploma thesis] - Comenius Univerzity Bratislava. Faculty of mathematics, physics and informatics; Department of Applied Mathematics and Statistics, Tutor: : Doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., 2013, 56 p.

The goal of this work is constructing models for GDP overfall with the help of nonlinear models of time series. In this thesis we describe the basic theory of time series analysis, decomposition of the time series, linear and nonlinear models. This theory is further used on a chosen GDP time series of Cyprus and Finland. We compare the results and we make predictions compared to the real data.

Key words: time series, GDP of Finnland, GDP of Cyprus, SETAR, STAR

Obsah

Úvod.....	9
1. Základné pojmy.....	10
1.1 Časový rad.....	10
1.2 Stochastický proces.....	10
1.3 Stacionarita.....	11
1.4 Autokorelačná funkcia (ACF) a parciálna autokorelačná funkcia (PACF).....	12
1.5 Dekompozícia časového radu.....	13
2. Lineárne modely.....	17
2.1 AR(p) model.....	17
2.2 MA(q) model.....	17
2.3 ARMA(p, q) model.....	18
2.4 ARIMA(p, d, q) model.....	18
2.5 Rozšírený Dickey – Fullerov test jednotkového koreňa.....	18
2.6 Box – Jenkinsova metodológia.....	19
2.7 Rozhodovacie kritériá.....	20
2.8 Informačné kritéria.....	22
3. Nelineárne modely.....	24
3.1 Prahový autoregresný model TAR (Threshold Autoregressive).....	24
3.2 Modely SETAR (Self-Exciting Threshold Autoregressive).....	24
3.3 Modelovanie procesu SETAR(p, d, c).....	26
3.4 Test prahovej nelinearity.....	26
3.5 Určenie hodnoty parametra omeškania d	27
3.6 Určenie prahových hodnôt.....	28
3.7 Modely STAR (Smooth Transition Autoregressive).....	28
3.8 Modelovanie procesu STAR.....	30
3.9 Test linearity verzus LSTAR.....	31
3.10 Test linearity verzus ESTAR.....	32
3.11 Určenie hodnoty parametra omeškania d	34
3.12 Odhadnutie parametrov.....	35
4. Analýza časového radu HDP pre vybrané štáty.....	36
4.1 Dáta a programy.....	37
4.2 Fínsko.....	37
4.3 Cyprus.....	45
Záver.....	54
Literatúra.....	56

Úvod

V posledných rokoch bolo venované stále viac a viac pozornosti nelineárnemu modelovaniu časových radov v rôznych makroekonomických ukazovateľoch, aké sú napríklad HDP, miera nezamestnanosti a inflácia. Nelineárne modely, alebo inými slovami viacrežimové modely, sa od lineárnych odlišujú tým, že daný časový rad modelujú pomocou viacerých rovníc, ktoré sa prepínajú na základe hodnoty prahovej premennej.

V tejto práci sa budeme zaoberať dvojrežimovými nelineárnymi modelmi, konkrétne modelmi SETAR, LSTAR a ESTAR. Slovo dvojrežimový naznačuje, že daný časový rad bude modelovaný dvoma rovnicami. Prvý režim bude modelovať časový rad v dobe ekonomického rastu a druhý v období krízy alebo ekonomickej recesie. Na to, aby sme mohli modelovať časové rady nelineárnymi modelmi si musíme zdefinovať základné pojmy týkajúce sa časových radov a rovnako modelovanie týchto radov lineárnymi modelmi. Postupne v jednotlivých kapitolách tejto práce oboznámime čitateľa s prislúchajúcou teóriou.

Práca pozostáva zo štyroch kapitol. Prvá kapitola v sebe zahŕňa základné pojmy týkajúce sa časových radov, t.j. definícia časového radu, stochastický proces a stacionárnosť časového radu. Ďalej si definujeme autokorelačnú a parciálnu autokorelačnú funkciu a oboznamujeme čitateľa s metódou dekompozície časového radu. V druhej kapitole sa venujeme lineárnym modelom AR, MA, ARMA a ARIMA. Predstavíme čitateľovi Dickey-Fullerov test jednotkového koreňa a Box – Jenkinsovu metodológiu, ktorá slúži na výber vhodného lineárneho modelu. Následne definujeme jednotlivé rozhodovacie a informačné kritériá, pomocou ktorých budeme vylepšovať a porovnávať náš lineárny a nelineárny model. V tretej kapitole sa zaoberáme nelineárnymi modelmi SETAR, LSTAR a ESTAR. V tejto kapitole popisujeme ako vyzerajú jednotlivé nelineárne modely, testy *linearita verzus nelinearita*, určenie najvhodnejšieho parametra omeškania a takisto hodnoty parametra prahu. V poslednej, štvrtej kapitole sa venujeme aplikácii teórie opísanej v prvých troch kapitolách na určenie najvhodnejšieho lineárneho a nelineárneho modelu na časové rady HDP Fínska a Cypru.

1. Základné pojmy

V tejto kapitole si zadefinujeme základné pojmy ako časový rad, stochastický proces, stacionarita, autokorelačná funkcia, parciálna autokorelačná funkcia a dekompozícia časového radu, od ktorých sa táto práca bude ďalej odvíjať.

1.1 Časový rad

Časový rad je chronologická postupnosť (alebo množina) pozorovaní, resp. meraní X_t zaznamenaných v jednotlivých okamihoch t . Predpokladáme, že časový interval medzi jednotlivými pozorovaniami je konštantný (ekvidištančný). Zväčša tieto pozorovania predstavujú alebo reprezentujú diskretnú množinu (spočítateľnú), začínajúc v určitom čase (napr.: $t = 1$) a končiac v inom (napr.: $t = T$):

$$\{X_t\}_{t=1}^T = (X_1, X_2, \dots, X_T) \quad (1.1)$$

Jeden z predpokladov, aby sme mohli časový rad modelovať je, že musí byť daný časový rad stacionárny.

1.2 Stochastický proces

Nech (Ω, A, P) je pravdepodobnostný priestor, A je σ -algebra merateľných množín na množine Ω a P je pravdepodobnostná miera na množine Ω . Pomocou neho môžeme definíciu stochastického procesu formulovať:

Definícia 1.1. Stochastický proces $X = \{X_t, t \in T\}$ je súbor náhodných veličín na pravdepodobnostnom priestore (Ω, A, P) .

Pre každé t z indexovej množiny T platí, že X_t je náhodná veličina. Zvyčajne t označuje čas. Pripomeňme si, že náhodná funkcia $Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Každá realizácia náhodného procesu X sa nazýva trajektória. X_t a popisuje stav procesu v čase t .

Delenie stochastických procesov:

- ak T je konečná alebo spočítateľná množina, hovoríme, že X_t je stochastický proces s diskretným časom
- ak T je interval, hovoríme, že X_t je stochastický proces so spojitým časom

Ďalšie delenie podľa hodnôt, ktoré nadobúda veličina X_t

- stochastický proces s diskretnými hodnotami
- stochastický proces so spojitými hodnotami

Časový rad je interpretovaný stochastickým procesom s diskretným časom. Preto v tejto práci budeme ďalej uvažovať len stochastické procesy s diskretným časom.

1.3 Stacionarita

Stacionárny jav je charakterizovaný nemennosťou svojich vlastností vzhľadom k posunu v čase. Rozlišujeme dva typy stacionarity – silnú a slabú. Zdefinujeme si obe stacionarity, avšak v našej práci budeme používať slabú stacionaritu, nakoľko silná stacionarita je z praktického hľadiska príliš silná požiadavka a veľakrát v praxi nie je možné odhadnúť združené distribučné funkcie z nameraných údajov.

Definícia 1.2. Stochastický proces $\{X_t, t \in T\}$ sa nazýva (silno) stacionárny, ak združené distribučné funkcie náhodných vektorov $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ a $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_k+h})$ sú rovnaké pre všetky prirodzené čísla k a pre všetky celé čísla t_1, t_2, \dots, t_k a h , t.j.:

$$F(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}) = F(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_k+h}) \quad (1.2)$$

pre každé $k \in \mathbb{N}$ a všetky $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{Z}^k$ a každé $h \in \mathbb{Z}$.

Definícia 1.3. Stochastický proces $\{X_t, t \in T\}$ sa nazýva (slabo) stacionárny, ak:

- $\mu(t)$ nezávisí na čase t , t.j.:

$$E(X_r) = E(X_s) \quad \text{pre každé } r, s \in \mathbb{Z}$$

- $\gamma(t+h, t)$ nezávisí na čase t pre každé $h \in \mathbb{Z}$, t.j.:

$$\gamma(r, s) = \gamma(r+h, s+h) \text{ pre každé } r, s, h \in \mathbb{Z}.$$

Kde $\gamma(r, s)$ je autokovariančná funkcia:

$$\gamma(r, s) = \text{cov}(X_r, X_s) = E[(X_r - \mu)(X_s - \mu)] \quad (1.3)$$

a tiež platí:

$$\gamma(r, s) = \gamma(0, |r - s|) \quad (1.4)$$

V prípade, keď daný časový rad je nestacionárny, vhodnou transformáciou sa dá docieľiť, aby sa stal stacionárnym. Na testovanie stacionarity v modeli sa používa augmented Dickey-Fuller test (ADF test), ktorý testuje prítomnosť jednotkového koreňa.

1.4 Autokorelačná funkcia (ACF) a parciálna autokorelačná funkcia (PACF)

V tejto podkapitole si zadefinujeme autokorelačnú a parciálno-autokorelačnú funkciu (ACF a PACF), ktoré majú významnú úlohu pri výbere a určovaní najlepšieho lineárneho modelu pre daný časový rad.

Definícia 1.4. Nech je daný stacionárny časový rad $\{X_t, t \in T\}$. Potom autokorelačnou funkciou radu $\{X_t\}$ nazývame funkciu:

$$\rho(h) = \text{cor}(X_{t+h}, X_t) = \frac{\text{cov}(X_{t+h}, X_t)}{\sqrt{\text{Var}(X_{t+h})\text{Var}(X_t)}} = \text{cor}(X_h, X_0) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \quad (1.5)$$

pre každé $h \in \mathbb{Z}$.

Pre autokorelačnú funkciu platí:

- $\rho(0) = 1$
- $\rho(h) = \rho(-h)$

Parciálna autokorelačná funkcia PACF zisťuje, či korelácia medzi dvomi premennými X_t a X_{t-h} nie je spôsobená treťou (alebo inou) premennou, s ktorou sú obe premenné korelované. Formálne môže koreláciu premenných X_t a X_{t-h} spôsobiť korelácia s premennými $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-h+1}$. PACF nám poskytuje údaj o korelácií dvoch premenných, pričom zanedbáva vplyv ostatných premenných na X_t a X_{t-h} . Parciálna autokorelácia $\phi_{h,h}$ je daná vzťahom:

$$X_t = \phi_{h,1}X_{t-1} + \phi_{h,2}X_{t-2} + \dots + \phi_{h,h}X_{t-h} + \varepsilon_t \quad (1.6)$$

$\phi_{h,h}$ počítame ako podmienenú strednú hodnotu:

$$\phi_{h,h} = E[(X_t - \mu_t)(X_{t-h} - \mu_{t-h}) | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-h+1}] \quad (1.7)$$

1.5 Dekompozícia časového radu

Dekompozíciu, teda rozklad časových radov môžeme interpretovať nasledujúcim spôsobom na všeobecnom príklade:

$$X_t = T_t + C_t + S_t + I_t \quad (1.8)$$

kde

X_t – je modelovaný časový rad

T_t – je trendová zložka

C_t – je cyklická zložka

S_t – je sezónna zložka

I_t – je reziduálna(náhodná) zložka

Trendová zložka

Trendová zložka je charakterizovaná dlhotrvajúcou a nemeniacou sa zmenou v danom časovom rade (napr. dlhodobý rast alebo pokles). Aby sme v modeli vedeli odhaliť trend, môžeme vyjadriť daný časový rad nasledujúcimi funkciami:

- konštantný trend: $T_t = c$
- lineárny trend: $T_t = a + bt$
- kvadratický trend: $T_t = a + bt + ct^2$
- exponenciálny trend: $T_t = e^{a+bt}$

kde a, b, c sú parametre a t je časový index. Na to, aby sme vybrali najvhodnejší typ funkcie trendu nám posluži metóda najmenších štvorcov. Získané odhady porovnávame medzi sebou a na základe štatistických vlastností a informačných kritérií si vyberieme tú najvhodnejšiu funkciu.

Trendové očistenie

Na identifikovanie trendovej zložky budeme používať Hodrick- Prescottov filter (HP filter). Je to štatistická metóda, ktorá rozkladá časový rad na dve zložky: dlhodobý trend a neperiodickú cyklickú zložku. Matematicky to môžeme zapísať:

$$\sum_{t=1}^T (X_t - s_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} ((s_{t+1} - s_t) - (s_t - s_{t-1}))^2 \quad (1.9)$$

kde X_t je modelovaný časový rad, s_t je vyhladený rad a $\lambda > 0$ je parameter vyhladzovania. Výsledný vyhladený rad s_t , čiže trendovú zložku získame minimalizovaním s_t v rovnici (1.9). Parameter λ optimalizuje vyhladzovanie trendu. Čím je jeho hodnota väčšia, tým je rad s_t hladší. Pre λ idúce do nekonečna sa rad s_t blíži k lineárnemu trendu. Nevýhodou tejto metódy je, že nejestvuje nijaké explicitné kritérium pre zadanie veľkosti tohto parametra. Napriek tomu sa odporúča hodnota 100 ako parameter λ pre ročné časové rady, hodnota 1600 pre štvrťročné časové rady a hodnota 14400 pre mesačné časové rady.

Sezónna zložka

Sezónna zložka sa väčšinou vyskytuje pri frekventovanejších pozorovaniach. To znamená, že časový rad je modelovaný napr. dennými, mesačnými alebo štvrťročnými dátami a vyznačuje sa najmä periodickosťou (7-dňovou, 12-mesačnou, poprípade štvrťročnou periodickosťou). Sezónnosť je zapríčinená takými faktormi ako striedanie ročných období, vianočné a veľkonočné sviatky, prázdniny, dovolenky a pod.

Sezónne očistenie

Sezónna zložka je ľahko odhaliteľná pomocou grafickej analýzy. Stačí, ak pri pohľade na graf daného časového radu vidíme, že jednotlivé hodnoty sa pravidelne periodicky opakujú. Na odstránenie sezónnosti existuje viacero metód. V tejto práci budeme používať program TRAMO/SEATS, ktorá patrí medzi najpoužívanejšie metódy súčasnosti. Hlavným nástrojom programu TRAMO/SEATS sú ARIMA modely. Program sa skladá z dvoch častí – program TRAMO (Time Series Regression with ARIMA Noise, Missing Observations, and Outliers), ktorý slúži na odhad, interpoláciu a predpoveď ARIMA modelu, ktorý môže obsahovať chýbajúce pozorovania a rôzne typy extrémnych hodnôt. Takisto program testuje, či je potrebná logaritmická transformácia a či sa vyskytuje v danom časovom rade kalendárny efekt. Program SEATS (Signal Extraction in ARIMA Time Series) odhaduje trendovú, cyklickú, sezónnu a náhodnú zložku z linearizovaného modelu. Teda daný časový rad odhadneme pomocou lineárneho modelu požitím TRAMO a následne z linearizovaného časového radu odhadneme jednotlivé zložky pomocou SEATS.

Cyklická zložka

Cyklická zložka je veľmi podobná sezónnej zložke. Hlavný rozdiel medzi nimi je v jednej perióde. Kým sezónna zložka má maximálnu dĺžku periódy jeden rok, cyklická zložka môže mať dĺžku jednej periódy aj niekoľko rokov. Typickým príkladom cyklickej zložky sú napr. cyklus ekonomických kríz, výrobný cyklus.

Reziduálna zložka

Náhodná (reziduálna) zložka je zložka, ktorá po odstránení trendovej, sezónnej a cyklickej zložky ostáva ako jediná v časovom rade. Vyjadruje náhodné výkyvy, ktoré nemajú systematický charakter. Toto kolísanie je vyvolané náhodnými faktormi, ktoré nie je možné predvídať. Takými faktormi sú napr. zemetrasenie, štrajk, rôzne epidémie alebo rôzne iné neidentifikovateľné vplyvy. Reziduálna zložka je vo väčšine prípadov označovaná ako biely šum (white noise) - ε_t . Biely šum je charakteristický tým, že náhodné veličiny sú nekorelované a majú nulovú strednú hodnotu a rovnakú disperziu σ^2 . Biely šum sa nazýva gaussovský, ak je jeho združené rozdelenie pravdepodobnosti normálne.

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (1.10)$$

2. Lineárne modely

V tejto kapitole sa budeme zaoberať lineárnymi modelmi AR, MA, ARMA, ARIMA a rozšíreným Dickey-Fullerovým testom jednotkového koreňa na určenie stacionarity časového radu. Zdefinujeme si rozhodovacie a informačné kritériá, pomocou ktorých budeme môcť lepšie odhadnúť náš lineárny model a oboznámime čitateľa metodológiou Boxa – Jenkinsa, ktorá slúži na výber vhodného lineárneho modelu.

2.1 AR(p) model

Autoregresný proces p -teho rádu AR(p) má tvar:

$$X_t - \delta = \phi_1(X_{t-1} - \delta) + \phi_2(X_{t-2} - \delta) + \dots + \phi_p(X_{t-p} - \delta) + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

kde $\delta = E(X_t)$, ε_t je biely šum a $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ sú koeficienty. Znamená to, že hodnota X_t v čase t závisí od jej hodnoty v predchádzajúcich p obdobiach. Ak $E(X_t) = 0$, tak rovnica(2.1) má nasledujúci tvar:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.2)$$

2.2 MA(q) model

Model kĺzavých priemerov q -teho rádu MA(q) má tvar:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.3)$$

kde μ je konštanta, ε_t je biely šum a $\theta_1, \dots, \theta_q$ sú koeficienty. Znamená to, že proces kĺzavých priemerov je lineárnou kombináciou histórie bieleho šumu.

2.3 ARMA(p, q) model

ARMA(p, q) model je kombináciou autoregresného procesu AR(p) a modelu kľzavých priemerov MA(q). Centrovany ($E(X_t) = 0$) ARMA(p, q) má nasledujúci tvar:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.4)$$

2.4 ARIMA(p, d, q) model

Predchádzajúce modely sú založené na predpoklade, že dané časove rady sú stacionárne. No v reálnom svete sa často stretávame s nestacionárnymi časovými radmi, ktoré treba najprv ošetriť, aby sa z nich stali stacionárne. Jedna z možností je diferencovanie daného časového radu. Na tejto myšlienke je založený aj ARIMA (p, d, q) model, ktorý je zložený z autoregresného procesu p -teho rádu, procesu kľzavých priemerov q -teho rádu a parameter d označuje počet diferencovaní. Na testovanie stacionarity budeme používať rozšírený Dickey-Fullerov test jednotkového koreňa, ktorý si priblížime v nasledujúcej podkapitole.

2.5 Rozšírený Dickey-Fullerov test jednotkového koreňa

Dickey-Fullerov test jednotkového koreňa určuje, či daný časový rad je stacionárny. Konkrétne, či test zamietá nulovú hypotézu, že časový rad obsahuje jednotkový koreň. Test jednotkového koreňa vychádza z nasledujúcej regresie:

$$\Delta X_t = \mu + \beta t + \alpha X_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

Rovnica (2.5) sa nazýva test jednotkového koreňa s driftom a trendovou zložkou. ΔX_t je diferencovaný časový rad, ΔX_{t-i} pre $i = 1, \dots, p$ sú posunuté diferencované rady, μ

predstavuje drift a βt trendovú zložku, p označuje počet lagov. μ , βt , α , δ_i pre $i = 1, \dots, p$ označujú koeficienty. O rezíduách ε_t predpokladáme, že sú bielym šumom. Koeficienty driftu alebo trendovej zložky môžu byť v rovnici (2.5) nesignifikantné. V takomto prípade ich môžeme odstrániť. Následne sa rovnica (2.5) sa zredukuje na tvar:

$$\Delta X_t = \alpha X_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2.6)$$

V Dickey-Fullerovom teste sa testuje hypotéza:

H_0 : časový rad obsahuje jednotkový koreň, t.j. $\alpha = 0$

oproti alternatíve

H_1 : časový rad neobsahuje jednotkový koreň, t.j. $\alpha < 0$

pomocou testovacej štatistiky:

$$t_\alpha = \frac{\hat{\alpha}}{se(\hat{\alpha})} \quad (2.7)$$

kde $\hat{\alpha}$ je odhad parametra α a $se(\hat{\alpha})$ je štandardná chyba, no táto t -štatistika nekopíruje štandardné Studentovo t -rozdelenie. Jej hodnota sa porovnáva s MacKinnovými kritickými hodnotami. Pomocou informačných kritérií, ktoré si priblížime v ďalšej podkapitole, sa odporúča vhodný výber počtu lagov p .

2.6 Box – Jenkinsova metodológia

Box – Jenkinsova metodológia slúži na výber vhodného lineárneho modelu a výberu vhodných parametrov p, d, q pre vybrané lineárne modely, na základe pozorovania autokorelačnej funkcie (ACF) a parciálnej autokorelačnej funkcie (PACF).

Táto metóda pozostáva zo štyroch krokov: identifikácia, odhad, verifikácia a prognóza modelu.

Pri identifikácii alebo určení, ktorý lineárny model je najvhodnejší pre náš časový rad, nám stačí pozrieť na grafy korelogramov ACF a PACF. Pri čistom $AR(p)$ procese, graf korelogramu ACF monotónne alebo oscilujúco klesá a zároveň graf korelogramu PACF je približne rovný 0 po k lagoch. Pri čistom $MA(q)$ procese to je naopak. ACF je približne rovný 0 po k lagoch a PACF monotónne alebo oscilujúco klesá. Lineárny model $ARMA(p, q)$ sa používa, ak nevieme s určitosťou povedať pri pohľade na grafy ACF a PACF, či ide o čistý AR alebo čistý MA proces. Spomenuté lineárne modely používame, ak je daný časový rad stacionárny. Pri nestacionárnom časovom rade sa používa $ARIMA(p, d, q)$ model, ktorý je podobný $ARMA(p, q)$ modelu. Rozdiel medzi nimi je, že $ARMA(p, q)$ skúma daný časový rad s pôvodnými úrovňami a $ARIMA(p, d, q)$ skúma daný časový rad so zodpovedajúcimi diferenciami d , ktorý je po diferencovaní už stacionárny.

Pre odhad parametrov Box-Jenkinsových modelov sa používa iteračná metóda ako je napríklad metóda najmenších štvorcov, ktorú podporuje väčšina štandardných štatistických alebo ekonometrických programových balíkov.

Pri verifikácii modelu skúmame, či má náš model dostatočný fit na základe už spomenutých informačných kritérií. To znamená, či po zmenení niektorého z parametrov p, d alebo q nedostaneme lepší fit modelu (t.j. menšiu hodnotu informačných kritérií). Ďalšou možnosťou je, že sa pozrieme na graf korelogramu rezíduí ACF a PACF daného modelu a jej hodnoty Q – štatistiky. Ak žiadna hodnota Q – štatistiky nepresiahne 95%-ný interval spoľahlivosti, môžeme z toho odvodiť si, že náš model netreba obmieňať.

2.7 Rozhodovacie kritériá

Rozhodovacie kritériá nám dávajú informácie o našom regresnom modeli, vzhľadom na fit daného modelu. Ako rozhodovacie kritériá si spomenieme tie najdôležitejšie, ktoré sú:

- koeficient determinácie R^2

- upravený koeficient determinácie R_A^2 (adjusted R_A^2)
- Durbin – Watsonova štatistika (DW)

Predtým, ako si opíšeme jednotlivé rozhodovacie kritériá si musíme zadať pojmy: celková suma štvorcov (TSS), vysvetlená suma štvorcov (ESS) a reziduálna suma štvorcov (RSS). Pre ne platí:

$$TSS = ESS + RSS \quad (2.8)$$

$$TSS = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (2.9)$$

$$ESS = \sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - \bar{X})^2 \quad (2.10)$$

$$RSS = \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_i)^2 \quad (2.11)$$

Koeficient determinácie R^2

Vyjadruje, akú časť celkovej variability endogénnej premennej vysvetľuje model. Teda aká časť celkovej variability je determinovaná kvantifikovaným ekonometrickým modelom (najčastejšie sa uvádza v %). Vypočítame ho podľa vzťahu:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{TSS - RSS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (2.12)$$

Koeficient determinácie R^2 môže nadobúdať hodnoty z uzavretého intervalu $(0,1)$. Ideálny fit modelu nastane, ak $R^2 = 1$. Koeficient determinácie R^2 neklesá pridávaním ďalších premenných do modelu. Tento problém je odstránený pri upravenom koeficiente determinácie R^2 .

Upravený koeficient determinácie R_A^2 (adjusted R_A^2)

Upravený koeficient determinácie R_A^2 penalizuje pridávanie ďalšej premennej do modelu. Má tvar:

$$R_A^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k} (1 - R^2) \quad (2.13)$$

Upravený koeficient determinácie R_A^2 sa správa podobne ako koeficient determinácie, t.j. čím je číslo bližšie k jednotke, tým je náš model lepší.

Durbin – Watsonova štatistika (DW)

Durbin – Watsonova štatistika slúži na overenie autokorelácie rezíduí. Má tvar:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i)^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \quad (2.14)$$

Hodnoty tejto štatistiky sa pohybujú od nuly do štyri. Kým sa táto štatistika rovná, alebo je blízka číslu 2, reziduá nevykazujú žiadnu autokoreláciu. Hodnoty DW menšie ako 2 značia pozitívnu autokoreláciu a hodnoty väčšie ako 2 vykazujú negatívnu autokoreláciu. V praxi môžeme zjednodušene postupovať nasledujúcim spôsobom: ak hodnota testovacej štatistiky DW je z intervalu $\langle 1,5 \ 2,5 \rangle$, reziduá nevykazujú autokoreláciu. Ak je hodnota pod 1,5, značí to kladnú autokoreláciu, a ak je hodnota nad 2,5, značí to zápornú autokoreláciu.

2.8 Informačné kritériá

Pomocou informačných kritérií vieme lepšie odhadnúť náš regresný model. Podľa hodnoty jednotlivých kritérií vieme rozhodnúť, či je potrebné do daného modelu pridať nejakú ešte nepoužitú premennú alebo lagovanú hodnotu inej premennej, prípadne nejakú premennú odobrať z modelu. Ak po pridaní ešte nepoužitej premennej alebo lagovanej hodnoty inej premennej sa hodnoty informačných kritérií znížia, náš model je lepšie odhadnutý ako ten predošlý. A teda našou úlohou je minimalizácia hodnôt týchto informačných kritérií. Medzi najznámejšie informačné kritériá patria Akaikeho informačné kritérium (AIC), Schwarzovo informačné kritérium (SIC) a Hannah-Quinnovo informačné kritérium (HQC).

$$AIC = 2k + n \ln\left(\frac{RSS}{n}\right) \quad (2.15)$$

$$SIC = k \ln(n) + n \ln\left(\frac{RSS}{n}\right) \quad (2.16)$$

$$HQC = 2k \ln(\ln(n)) + n \ln\left(\frac{RSS}{n}\right) \quad (2.17)$$

kde k je počet parametrov – vysvetľujúce premenné a konštanta, n je počet pozorovaní a RSS je suma štvorcov rezíduí.

3. Nelineárne modely

V tejto kapitole sa budeme zaoberať nelineárnymi modelmi časových radov. Ako prvý model si spomenieme prahový autoregresný model TAR, od ktorého sa ďalej odvíjajú ďalšie nelineárne modely ako sú SETAR, LSTAR a ESTAR modely. Ďalej čitateľovi priblížime proces modelovania jednotlivých nelineárnych modelov. Jednotlivé procesy v sebe zahŕňajú testy linearity oproti danému nelineárnemu modelu, určenie parametra omeškania, určenie parametra prahu a odhady jednotlivých vysvetľujúcich premenných v danom nelineárnom modeli.

3.1 Prahový autoregresný model TAR (Threshold Autoregressive)

Model TAR poskytuje triedu nelineárnych modelov s konečným počtom parametrov. TAR modely patria medzi autoregresné modely s parametrami, ktoré závisia od predchádzajúcich hodnôt. TAR(1) má tvar:

$$X_t = \begin{cases} \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-1} \leq c \\ \phi_2 X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-1} > c \end{cases} \quad (3.1)$$

Časový rad X_t je modelovaný dvoma autoregresnými procesmi. Časový rad X_t „sa prepína“ medzi týmito autoregresnými procesmi v závislosti od toho, či posledná hodnota daného radu v čase $t - 1$ bola nad alebo pod prahovou premennou c .

3.2 Modely SETAR (Self-Exciting Threshold Autoregressive)

SETAR model je špeciálnym prípadom TAR modelu, kde sa ako indikačná premenná q_t berie hodnota časového radu posunutá v čase o $d \in N$ časových intervalov, teda $q_t = X_{t-d}$ pre určité prirodzené číslo d . Hodnoty indikačnej premennej

q_t sú porovnávané s prahovou hodnotou c . Výsledný model sa nazýva SETAR model (Self-Exciting TAR). SETAR model je lineárny vo vnútri každého režimu, ale prechádza z jedného režimu do druhého pri prekročení prahovej hodnoty premennou q_t (pri dvojrežimovom modeli prvý režim nastane, ak $q_t \leq c$, a druhý, ak $q_t > c$).

Dvojrežimový SETAR model s režimami $AR(p_1)$ a $AR(p_2)$ má tvar:

$$X_t = \begin{cases} \phi_{1,0} + \phi_{1,1}X_{t-1} + \dots + \phi_{1,p_1}X_{t-p_1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-d} \leq c \\ \phi_{2,0} + \phi_{2,1}X_{t-1} + \dots + \phi_{2,p_2}X_{t-p_2} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-d} > c \end{cases} \quad (3.2)$$

Pomocou indikačnej funkcie I_t to môžeme zapísať ako:

$$X_t = I_t(\phi_{1,0} + \phi_{1,1}X_{t-1} + \dots + \phi_{1,p_1}X_{t-p_1}) + (1 - I_t)(\phi_{2,0} + \phi_{2,1}X_{t-1} + \dots + \phi_{2,p_2}X_{t-p_2}) + \varepsilon_t \quad (3.3)$$

kde

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{ak } X_{t-d} \leq c \\ 0 & \text{ak } X_{t-d} > c \end{cases}$$

kde c je prahová premenná, parametre p_1 a p_2 sú rády procesov v jednotlivých režimoch, $\{\varepsilon_t\}$ je proces bieleho šumu s nulovou strednou hodnotou a disperziou σ_ε^2 . Bežný predpoklad je, že parametre p_1 a p_2 sa rovnajú, t.j. $p_1 = p_2 = p$.

SETAR model a dvoma režimami, s $AR(1)$ v oboch režimoch má tvar:

$$X_t = \begin{cases} \phi_{1,0} + \phi_{2,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-d} \leq c \\ \phi_{2,0} + \phi_{2,1}X_{t-1} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-d} > c \end{cases} \quad (3.4)$$

3.3 Modelovanie procesu SETAR(p, d, c)

Modelovanie procesu SETAR(p, d, c) je jedna z najpopulárnejších metód na modelovanie nelineárnych časových radov, napriek tomu, že nepatrí medzi tie najľahšie metódy. Proces SETAR(p, d, c), kde p označuje príslušný rád autoregresie, d označuje parameter omeškania a c je hodnota prahov, pozostáva z týchto krokov:

1. Určenie parametra p AR(p) procesu a určenie všetkých možných hodnôt parametra omeškania d , ako $d \in S: d \leq p$.
2. Testovanie prahovej nelinearity štatistikou $\hat{F}(p, d)$ pomocou preusporiadanej bázovej základne procesu AR(p) a možných hodnôt omeškania d . Pri preukázaní nelinearity určíme parameter omeškania d .
3. Určenie hodnoty prahov c pomocou bodového grafu pre dané p a d .
4. Pomocou lineárnych autoregresných metód vylepšovať AR(p) proces a hodnoty prahových premenných.

V prvom kroku si určíme parameter p AR(p) procesu analyzovaním grafov autokorelačnej(ACF) a parciálnej autokorelačnej funkcie(PACF). V prípade viacerých kandidátov, si vyberieme podľa informačných kritérií (napr. Akaikeho informačné kritérium), tú najlepšiu hodnotu parametra p .

3.4 Test prahovej nelinearity

Test prahovej nelinearity určuje, či je daný časový rad lineárny, t.j. má jeden režim, alebo nelineárny, t.j. má viacero režimov. Testuje sa hypotéza:

H_0 : autoregresný proces AR je lineárny

oproti alternatíve

H_1 : opak H_0

Ak hodnota F -štatistiky prekročí kritickú hodnotu, hypotézu H_0 o lineárnom modeli zamietame a prijímame hypotézu H_1 . Konkrétny postup na výpočet F -štatistiky je nasledujúci:

Majme hodnotu p , ktorá určuje rád autoregresie časového radu X_t . Ďalej majme hodnotu prahovej premennej X_{t-d} , ktorá nadobúda hodnoty z množiny $O =$

$\{X_{p+1-d}, \dots, X_{n-d}\}$ a majme index (i) , čo je časový index najmenšieho pozorovania z množiny O . Následne skonštruujeme rolling order autoregression (ROA) alebo preusporiadaný autoregresný proces podľa prahovej premennej X_{t-d} :

$$\begin{pmatrix} X_{(1)+d} \\ X_{(2)+d} \\ \vdots \\ X_{(j)+d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{(1)+d-1} & \dots & X_{(1)} & \dots & X_{(1)+d-p} \\ 1 & X_{(2)+d-1} & \dots & X_{(2)} & \dots & X_{(2)+d-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{(j)+d-1} & \dots & X_{(j)} & \dots & X_{(j)+d-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{(1)+d} \\ \varepsilon_{(2)+d} \\ \vdots \\ \varepsilon_{(j)+d} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

kde $j = m, m + 1, \dots, n - p$ a m je počiatkový počet pozorovaní v ROA. Navrhuje sa zvolit' si počiatkovú hodnotu m v tvare $\frac{n}{10+p}$. Z regresie (3.5) vieme vypočítať o jeden krok dopredu prediktívne rezíduá ROA - $\hat{e}_{(j+1)+d}$, a to pre každé j . Získané rezíduá potom dosadíme do nasledujúcej regresie:

$$e = X\beta + \eta \quad (3.6)$$

kde $e = (\hat{e}_{(m+1)+d}, \dots, \hat{e}_{(n-p)+d})^T$, X je matica regresorov $\{X_{(j+1)+d-1}, \dots, X_{(j+1)+d-p}\}$ pre $j = m, m + 1, \dots, n - p - 1$, β je p - dimenzionálny vektor parametrov a η je vektor rezíduí. Následne na testovanie prahovej nelinearity nám stačí vypočítať F - štatistiku danú vzťahom:

$$\hat{F}(p, d) = \frac{(\sum_{t=m+1}^{n-p} e_t^2 - \sum_{t=m+1}^{n-p} \varepsilon_t^2) / (p+1)}{\sum_{t=m+1}^{n-p} \varepsilon_t^2 / (n-m-2p-1)} \quad (3.7)$$

Veta 3.1: Nech časový rad X_t je lineárny stacionárny autoregresný proces p -teho rádu. Potom pre veľké n má štatistika() asymptoticky približne Fischerovo F -rozdelenie s $(p + 1)$ a $(n - m - 2p - 1)$ stupňami voľnosti.

3.5 Určenie hodnoty parametra omeškania d

Určenie hodnoty parametra omeškania patrí medzi najnáročnejšie časti procesu modelovania SETAR modelu. Jednu metódu na výber najvhodnejšieho parametra si popíšeme v ďalších riadkoch. Pri výbere najvhodnejšieho parametra omeškania d daného $AR(p)$ procesu budeme postupovať podľa štatistiky() takým spôsobom, že

si vyberieme parameter omeškania d , pre ktoré nadobúda štatistika() svoje maximum pre $d \in S = \{1, 2, \dots, p\}$, t.j.:

$$\hat{F}(p, d_p) = \max_{v \in S} \{\hat{F}(p, v)\} \quad (3.8)$$

$$d_p = \arg \max_{v \in S} \{\hat{F}(p, v)\} \quad (3.9)$$

kde index p označuje závislosť parametra d od rádu autoregresie.

3.6 Určenie prahových hodnôt

V tejto práci, na určenie prahových hodnôt, budeme používať metódu analyzovania bodových grafov rôznych štatistík verzus špecifikovaná prahová premenná. Konkrétne, budeme analyzovať bodový graf prediktívnych reziduálov, získaných v rekurzívnych lineárnych regresiach, pri teste nelinearity verzus príslušná prahová premenná modelu X_{t-d_p} .

3.7 Modely STAR (Smooth Transition Autoregressive)

V modeli SETAR je prechod medzi jednotlivými režimami okamžitý, pretože indikačná funkcia I_t je nespojitá. Nahradením tejto indikačnej funkcie spojitou prechodovou funkciou $G(X_{t-d}; \gamma, c)$ sa stáva z modelu SETAR, model STAR-autoregresný model hladkého prechodu. V prechodovej funkcii $G(X_{t-d}; \gamma, c)$ γ reprezentuje parameter hladkosti (smoothness parameter), ktorý určuje rýchlosť prechodu medzi jednotlivými režimami, X_{t-d} je prahová premenná a c je prahová hodnota. Model STAR pomocou autoregresného procesu AR(p) môžeme zapísať ako:

$$\begin{aligned} X_t = & (1 - G(X_{t-d}; \gamma, c)) (\phi_0^{(1)} + \phi_1^{(1)} X_{t-1} + \dots + \phi_p^{(1)} X_{t-p}) + \\ & + G(X_{t-d}; \gamma, c) (\phi_0^{(2)} + \phi_1^{(2)} X_{t-1} + \dots + \phi_p^{(2)} X_{t-p}) + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (3.10)$$

Hodnoty prechodovej funkcie hladko prechádzajú z 0 do 1. V praxi sa najviac využívajú dva typy prechodových funkcií: logistická a exponenciálna funkcia.

Logistická funkcia:

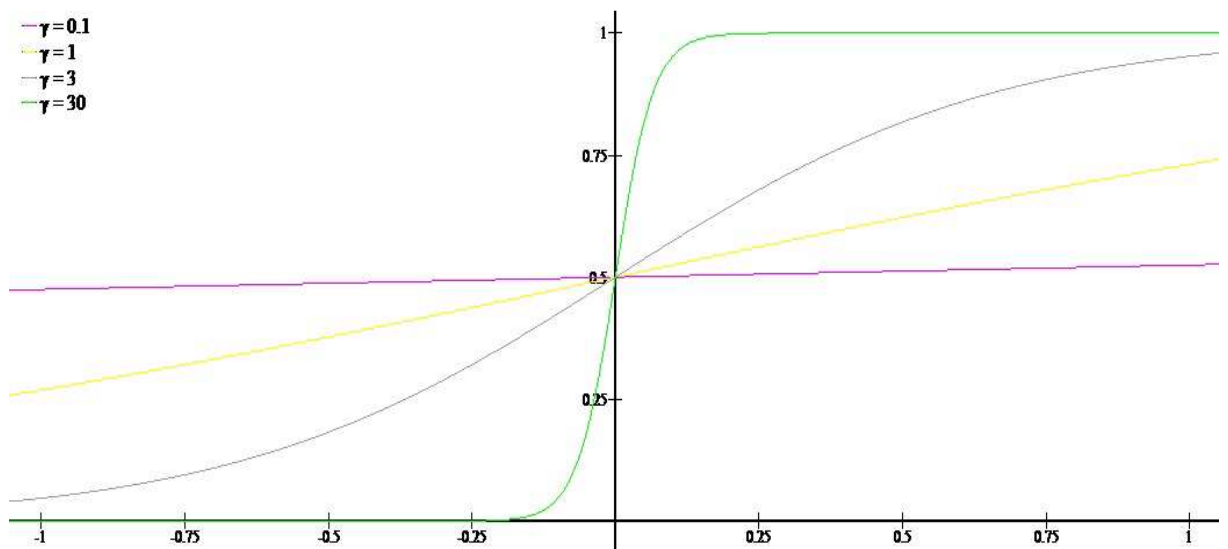
$$G(X_{t-d}; \gamma, c) = \frac{1}{1 + \exp[-\gamma(X_{t-d} - c)]} \quad (3.11)$$

Ak je v modeli (3.10) funkcia prechodu logistická, model sa nazýva LSTAR. Všimnime si, že keď je hodnota parametra hladkosti (γ) veľmi veľká ($\gamma \rightarrow \infty$), tak LSTAR model sa blíži k modelu SETAR. Naopak ak $\gamma \rightarrow 0$, tak LSTAR model sa redukuje na lineárny model. Pre $X_{t-d} = c$ je definované $G(c; \gamma, c) = 0,5$.

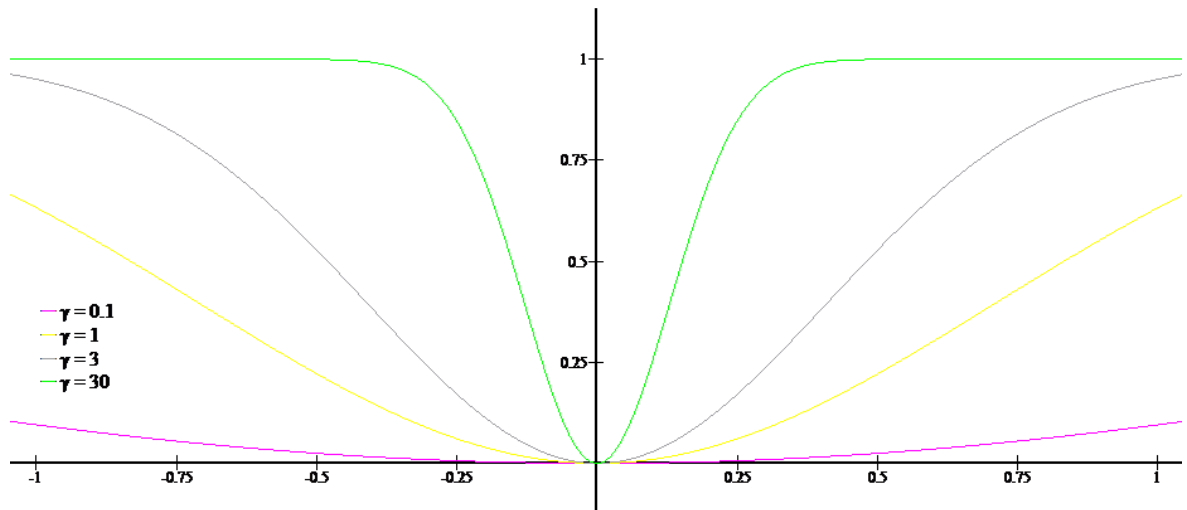
Exponenciálna funkcia:

$$G(X_{t-d}; \gamma, c) = 1 - \exp[-\gamma(X_{t-d} - c)^2] \quad (3.12)$$

Model (3.10) sa označuje ako ESTAR. Keď $\gamma \rightarrow \infty$ alebo $\gamma \rightarrow 0$, tak sa z modelu stane lineárny model. Pre $X_{t-d} = c$ je $G(c; \gamma, c) = 0$.



obr.3.1: Graf logistickej funkcie $G(X_{t-d}; \gamma, c)$ pre $c = 0$ a rozličné γ



obr.3.2: Graf exponenciálnej funkcie $G(X_{t-d}; \gamma, c)$ pre $c = 0$ a rozličné γ

3.8 Modelovanie procesu STAR

Modelovanie procesu STAR pozostáva z týchto krokov:

1. Určenie parametra p $AR(p)$ procesu pomocou informačných kritérií.
2. Testovanie nulovej hypotézy o linearite oproti alternatívnej hypotéze o STAR nelinearite pre rôzne parametre omeškania d . V prípade zamietnutia nulovej hypotézy o lineárnom modeli určiť d .
3. Vybranie typu prechodovej funkcie medzi LSTAR a ESTAR.
4. Odhadnutie parametrov.

Test linearity a výber vhodnej prechodovej funkcie $G(X_{t-d}; \gamma, c)$ sú základným princípom určenia vhodného modelu pri modelovaní procesu STAR. Pri testovaní hypotézy o linearite verus nelinearite budeme vychádzať z modelu (3.10), kde ako nulovú hypotézu budeme predpokladať, že koeficienty parametrov sa rovnajú oproti alternatíve, že aspoň jeden z parametrov sa nerovná:

$$H_0: \phi_i^{(1)} = \phi_i^{(2)}, \text{ kde } i \in \{0, \dots, p\}$$

oproti alternatíve

$$H_1: \phi_i^{(1)} \neq \phi_i^{(2)}, \text{ kde } i \in \{0, \dots, p\}$$

Procedúrou testovania linearity oproti nelinearite STAR sa zaoberali Luukkonen et al. (1988) a navrhujú použiť vhodnú aproximáciu Taylorovho rozvoja na prechodovú funkciu $G(X_{t-d}; \gamma, c)$ a získanú rovnicu následne otestovať pomocou štatistiky Lagrangeovho multiplikátora, ktorá má asymptotické χ^2 rozdelenie. V ďalších podkapitolách si bližšie opíšeme testovanie nulovej hypotézy o linearite modelu oproti alternatívnej hypotéze nelinearite jednotlivých LSTAR a ESTAR modelov, ktoré boli navrhnuté v práci Luukkonen et al (1988). Ďalej si popíšeme, ako náš model správne odhadnúť.

3.9 Test linearity verzus LSTAR

Budeme pracovať so STAR modelom (3.10) a s logistickou prechodovou funkciou (3.11), ktorú napíšeme vo vektorovom tvare:

$$X_t = \phi^{(1)T} y_t + (\phi^{(2)} - \phi^{(1)})^T y_t G(X_{t-d}; \gamma, c) + \varepsilon_t \quad (3.13)$$

kde $y_t = (1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$, $\phi^{(1)} = (\phi_0^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \dots, \phi_p^{(1)})$, $\phi^{(2)} = (\phi_0^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \dots, \phi_p^{(2)})$ a X_{t-d} je prechodová funkcia pre číslo d , pre ktoré platí $1 \leq d \leq p$. Luukkonen et al.(1988) nahradili prechodovú funkciu $G(X_{t-d}; \gamma, c)$ aproximáciou Taylorovým polynómom tretieho stupňa, pomocou ktorej získal pomocnú regresiu:

$$X_t = \beta_0^T y_t + \beta_1^T y_t X_{t-d} + \beta_2^T y_t (X_{t-d})^2 + \beta_3^T y_t (X_{t-d})^3 + e_t \quad (3.14)$$

kde $e_t = \varepsilon_t + (\varphi_2 - \varphi_1)^T y_t R^3(X_{t-d}; \gamma, c)$ a R^3 je zvyšok Taylorovho rozvoja prechodovej funkcie $G(X_{t-d}; \gamma, c)$. V rovnici (3.14) β_i pre $i = 0, 1, 2, 3$ sú funkcie parametrov $\varphi_1, \varphi_2, \gamma$ a c . Po aproximácii Taylorovým polynómom tretieho stupňa sa nám zmenia testovacie hypotézy testu nelinearity. Pôvodná hypotéza $H_0: \phi_{1,i} = \phi_{2,i}$, kde $i \in \{0, \dots, p\}$ sa nám pretransformuje na hypotézu $H_0': \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. Teda pri testovaní linearity verzus nelinearity LSTAR modelu budú hypotézy znieť nasledovne:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

oproti alternatíve

$$H_1: \text{aspoň jeden z parametrov } \beta_i \text{ pre } i = 1, 2, 3 \text{ je nenulový}$$

Podľa Luukkonen et al. (1988) by mal test pozostávať z týchto krokov:

1. Odhadnutie modelu za platnosti nulovej hypotézy linearity zbehnutím regresie X_t na y_t , výpočet rezíduí $\hat{\varepsilon}_t$ a sumy štvorcov rezíduí $SSR_0 = \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t^2$.
2. Odhadnutie pomocnej regresie X_t na y_t a $y_t(X_{t-d})^i$, $i = 1, 2, 3$, výpočet rezíduí $\hat{\varepsilon}_t$ a sumy štvorcov rezíduí $SSR_3 = \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t^2$.
3. Výpočet štatistiky:

$$LM_3 = (n - p) \frac{SSR_0 - SSR_3}{SSR_0}, \quad (3.15)$$

ktorá sa dá previesť na Fischerovu štatistiku:

$$F_3 = \frac{(SSR_0 - SSR_3)/3p}{SSR_0/(n - 5p)}. \quad (3.16)$$

LM_3 štatistika má asymptotické χ^2 rozdelenie s $3p$ stupňami voľnosti a štatistika F_3 má Fischerovo F- rozdelenie s $3p$ a $(n - 5p)$ stupňami voľnosti.

3.10 Test linearity verzus ESTAR

Test linearity verzus ESTAR je podobný testu linearity verzus LSTAR. V rovnici (3.13) Luukkonen et al. (1988) nahradili exponenciálnu prechodovú funkciu $G(X_{t-d}; \gamma, c)$ aproximáciou Taylorovým polynómom prvého stupňa, pomocou ktorej získal pomocnú regresiu:

$$X_t = \beta_0^T y_t + \beta_1^T y_t X_{t-d} + \beta_2^T y_t (X_{t-d})^2 + e_t \quad (3.17)$$

kde $e_t = \varepsilon_t + (\varphi_2 - \varphi_1)^T y_t R^2(X_{t-d}; \gamma, c)$ a R^2 je zvyšok Taylorovho rozvoja exponenciálnej prechodovej funkcie $G(X_{t-d}; \gamma, c)$, β_i pre $i = 0, 1, 2$ sú funkcie parametrov $\varphi_1, \varphi_2, \gamma$ a c . Po aproximácii Taylorovým polynómom prvého stupňa sa nám zmenia testovacie hypotézy testu nelinearity nasledujúcim spôsobom:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$

oproti alternatíve

$$H_1: \text{aspoň jeden z parametrov } \beta_i \text{ pre } i = 1, 2 \text{ je nenulový}$$

Testovanie by malo pozostávať z týchto krokov:

1. Odhadnutie modelu za platnosti nulovej hypotézy lineariry zbehnutím regresie X_t na y_t , výpočet rezíduí $\hat{\varepsilon}_t$ a sumy štvorcov rezíduí $SSR_0 = \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t^2$.
2. Odhadnutie pomocnej regresie X_t na y_t a $y_t(X_{t-d})^i$, $i = 1, 2$, výpočet rezíduí $\hat{\varepsilon}_t$ a sumy štvorcov rezíduí $SSR_2 = \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t^2$.
3. Výpočet štatistiky:

$$LM_2 = (n - p) \frac{SSR_0 - SSR_2}{SSR_0}, \quad (3.18)$$

ktorá sa dá previesť na Fischerovu štatistiku:

$$F_2 = \frac{(SSR_0 - SSR_2)/2p}{SSR_0/(n-4p)}. \quad (3.19)$$

LM_2 štatistika má asymptotické χ^2 rozdelenie s $2p$ stupňami voľnosti a štatistika F_2 má Fischerovo F- rozdelenie s $2p$ a $(n - 4p)$ stupňami voľnosti.

Escibano- Jordá (1999) vyslovili tvrdenie, že aproximácia exponenciálnej prechodovej funkcie Taylorovým polynómom prvého stupňa nevystihuje jej charakteristickú vlastnosť, a navrhli ju nahradiť Taylorovým polynómom druhého stupňa. Po jej nahradení dostávame regresiu:

$$X_t = \beta_0^T y_t + \beta_1^T y_t X_{t-d} + \beta_2^T y_t (X_{t-d})^2 + \beta_3^T y_t (X_{t-d})^3 + \beta_4^T y_t (X_{t-d})^4 + e_t \quad (3.20)$$

kde budeme testovať hypotézy:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

oproti alternatíve

$$H_1: \text{aspoň jeden z parametrov } \beta_i \text{ pre } i = 1, 2, 3, 4 \text{ je nenulový}$$

Testovanie bude pozostávať z týchto krokov:

1. Odhadnutie modelu za platnosti nulovej hypotézy lineariry zbehnutím regresie X_t na y_t , výpočet rezíduí $\hat{\varepsilon}_t$ a sumy štvorcov rezíduí $SSR_0 = \sum_{t=p+1}^n \hat{\varepsilon}_t^2$.

2. Odhadnutie pomocnej regresie X_t na y_t a $y_t(X_{t-d})^i$, $i = 1, 2, 3, 4$, výpočet rezíduí \hat{e}_t a sumy štvorcov rezíduí $SSR_4 = \sum_{t=p+1}^n \hat{e}_t^2$.

3. Výpočet štatistiky:

$$LM_4 = (n - p) \frac{SSR_0 - SSR_4}{SSR_0}, \quad (3.21)$$

ktorá sa dá previesť na Fischerovu štatistiku:

$$F_4 = \frac{(SSR_0 - SSR_4)/4p}{SSR_0/(n - 6p)}. \quad (3.22)$$

LM_4 štatistika má asymptotické χ^2 rozdelenie s $4p$ stupňami voľnosti a štatistika F_4 má Fischerovo F -rozdelenie s $4p$ a $(n - 6p)$ stupňami voľnosti.

3.11 Určenie hodnoty parametra omeškania d

Postup pri určení hodnoty parametra omeškania je podobný ako pri SETAR modeli. Rozhodujeme sa na základe pravdepodobnostných hodnôt (p -hodnota) štatistík buď Lagrangeovho multiplikátora alebo F -štatistiky. Nech $p_F(d)$ je pravdepodobnostná hodnota F -štatistiky testu linearity verzus ESTAR pri parametri omeškania d . Potom za parameter omeškania si vyberieme také d , $d \in S = \{1, 2, \dots, p\}$, pre ktoré platí:

$$p_F(\hat{d}) = \min_S p_F(d) \quad (3.23)$$

Po určení prahovej hodnoty parametra d môžeme vykonať špecifikáciu prechodovej funkcie $G(X_{t-d}; \gamma, c)$, čiže výber medzi modelmi LSTAR a ESTAR. Po zbehnutí oboch testov nelinearity na LSTAR a ESTAR si vyberieme model, ktorý má v testovacích štatistikách menšie pravdepodobnostné hodnoty.

7. Odhadnutie parametrov

Na odhadnutie parametrov $\hat{\theta} = (\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \gamma, c)$ budeme vychádzať z rovnice (3.10) a použijeme nelineárnu metódu najmenších štvorcov:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{t=0}^n (X_t - F(\mathbf{X}_t, \theta))^2 \quad (3.24)$$

kde

$$F(\mathbf{X}_t, \theta) = \phi^{(1)T} \mathbf{X}_t (1 - G(X_{t-d}; \gamma, c)) + \phi^{(2)T} \mathbf{X}_t G(X_{t-d}; \gamma, c) + \varepsilon_t, \phi^{(1)} = (\phi_0^{(1)}, \phi_1^{(1)}, \dots, \phi_p^{(1)})', \phi^{(2)} = (\phi_0^{(2)}, \phi_1^{(2)}, \dots, \phi_p^{(2)})' \text{ a } \mathbf{X}_t = (1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})'.$$

4. Analýza časového radu HDP pre vybrané štáty

V tejto kapitole budeme aplikovať hore uvedenú teóriu časových radov na HDP Fínska a Cypru. Ako prvé vykonáme dekompozíciu jednotlivých časových radov, čiže odstránime sezónnu a trendovú zložku. Po ich odstránení nám ostane už iba reziduálna zložka, ktorú otestujeme na normalitu a stacionaritu. Po splnení predpokladov o normalite a stacionarite, odhadneme najvhodnejší lineárny model pre daný časový rad. Z autoregresnej časti lineárneho modelu následne použitím testu prahovej nelinearity určíme parameter omeškania pre nelineárny model SETAR. V ďalšom kroku si zdefinujeme počet režimov a hodnotu prahovej premennej a následne odhadneme nelineárny model SETAR. Najlepšie odhadnutý model STAR potom porovnáme s lineárnym modelom. Zameriame sa najmä na koeficient determinácie, upravený koeficient determinácie a hodnotu Durbin–Watsonovej testovacej štatistiky. Nakoniec urobíme predikciu rezíduí na ďalší rok pomocou modelu SETAR, ku ktorým pripočítame trend a sezónnosť, a porovnáme ich so skutočnými hodnotami HDP daného štátu.

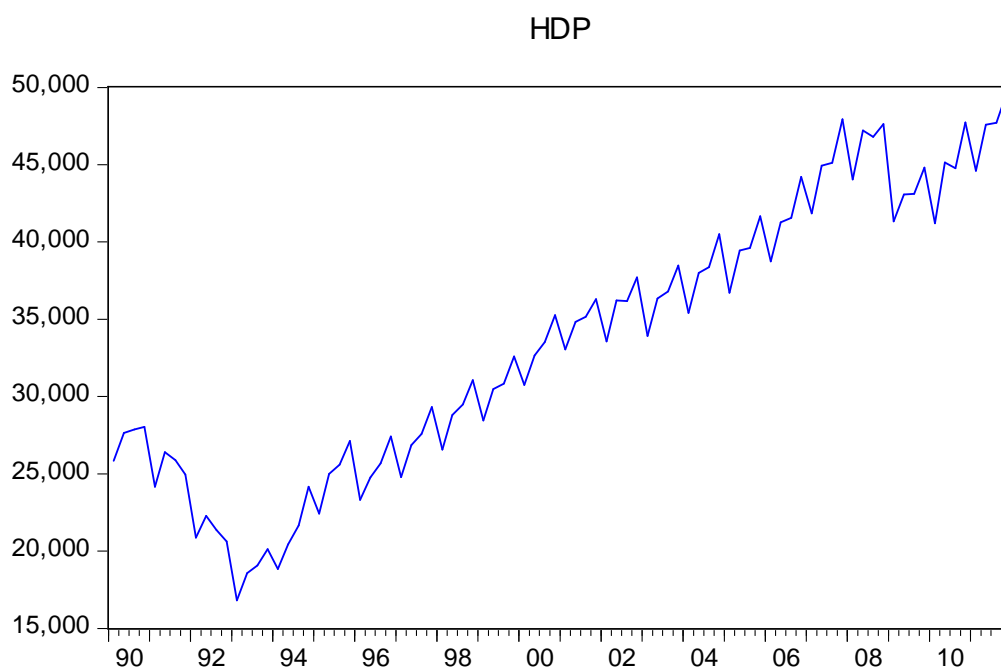
Pôvodne v praktickej časti mojej práce som sa mal zaoberať okrem nelineárneho modelu SETAR, aj s nelineárnymi modelmi STAR. Konkrétne s modelmi typu LSTAR a ESTAR. Avšak pri modelovaní časových radov HDP Fínska a Cypru sa vyskytli pri týchto modeloch komplikácie. Jeden z najzávažnejších problémov bol, že reziduálna zložka HDP jednotlivých krajín obsahovala veľmi vysoké kladné a záporné čísla (obrázky 4.4 a 4.17). Pri zadaní hodnoty parametra prahu $c = 0$ a po dosadení týchto hodnôt rezíduí do príslušných rovníc XXX a XXX modelov LSTAR a ESTAR, nám program na hľadanie parametra hladkosti γ - parametra hladkosti, určil γ veľmi vysoké (pri modeli LSTAR) alebo naopak, γ malo veľmi malú hodnotu blízku nule (pri modeli ESTAR). Z dôvodu vysokej γ prechod v LSTAR modeli nie je hladký, ale skokovitý, preto sa model podobá na model SETAR. Pri ESTAR modeli je to práve naopak. Z dôvodu hodnoty blízkej nule pre γ , sa daný model podobal na lineárny model. Z tohto dôvodu sme sa rozhodli vynechať z praktickej časti práce modelovanie nelineárnymi modelmi LSTAR a ESTAR.

4.1 Dáta a programy

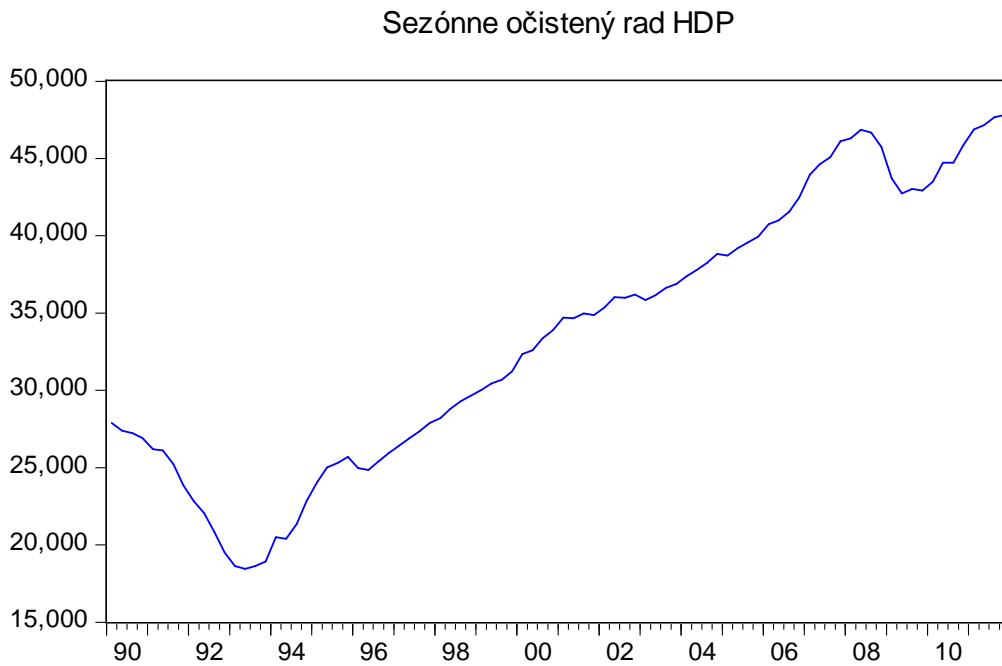
Naše dáta, časové rady HDP Fínska a Cypru, pochádzajú zo stránky Eurostat [], štatistického úradu Európskej Únie. Opisujú, ako sa vyvíjalo HDP v jednotlivých kvartáloch daných štátov. Dáta predstavujú HDP daného štátu v trhových cenách a v miliónoch eur (od 1. 1. 1999, do 31. 12. 1998 boli v miliónoch ECU – Európskej menovej jednotky). Na modelovanie týchto dát časových radov sme použili program EViews 7.

4.2 Fínsko

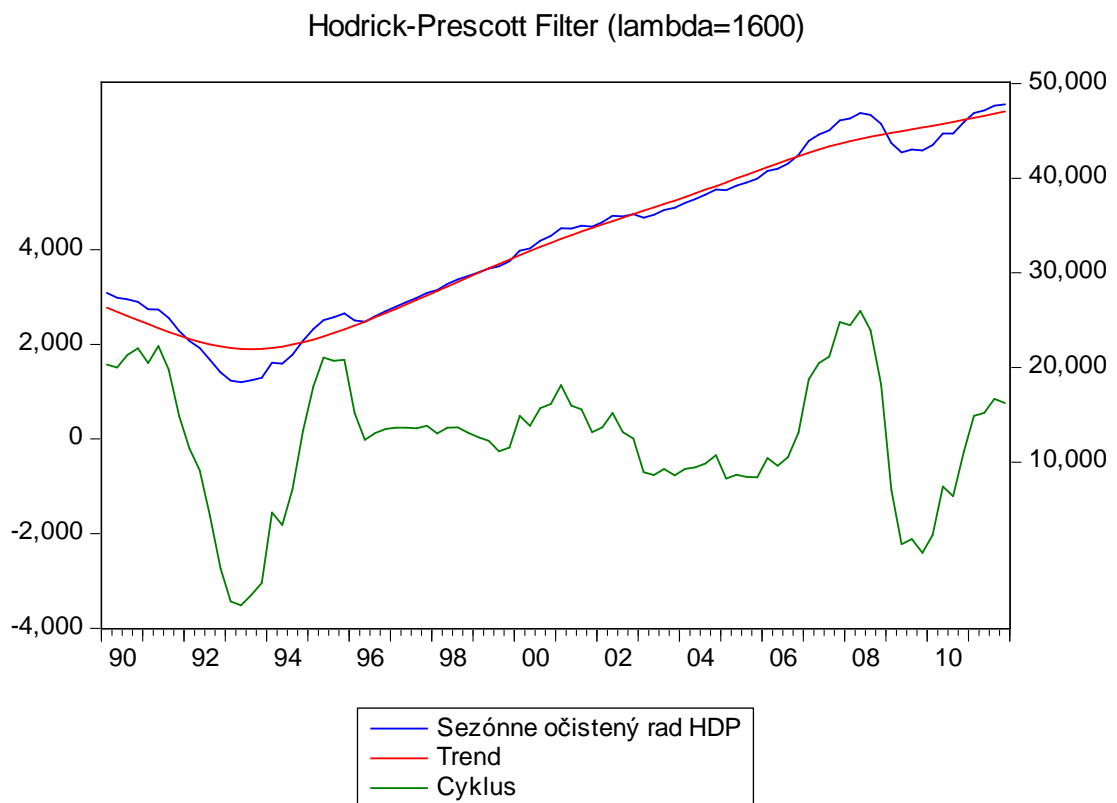
V tejto podkapitole sa budeme zaoberať časovým radom HDP Fínska od prvého kvartálu 1990 až po štvrtý kvartál 2011 (obr. 4.1). Na obrázku 4.1 je evidentná prítomnosť sezónnosti. V prvom kroku odstránime sezónnosť pomocou TRAMO/SEATS metodiky (obr. 4.2). Po odstránení sezónnosti HDP Fínska musíme odstrániť trendovú zložku daného časového radu. Na odstránenie trendovej zložky použijeme Hodrick – Prescottov filter, ktorý slúži na detekciu trendu. Výsledný graf vidíme na obrázku č. 4.3.



obr.4.1: HDP Fínska od prvého kvartálu 1990 až po 4 kvartál 2011.

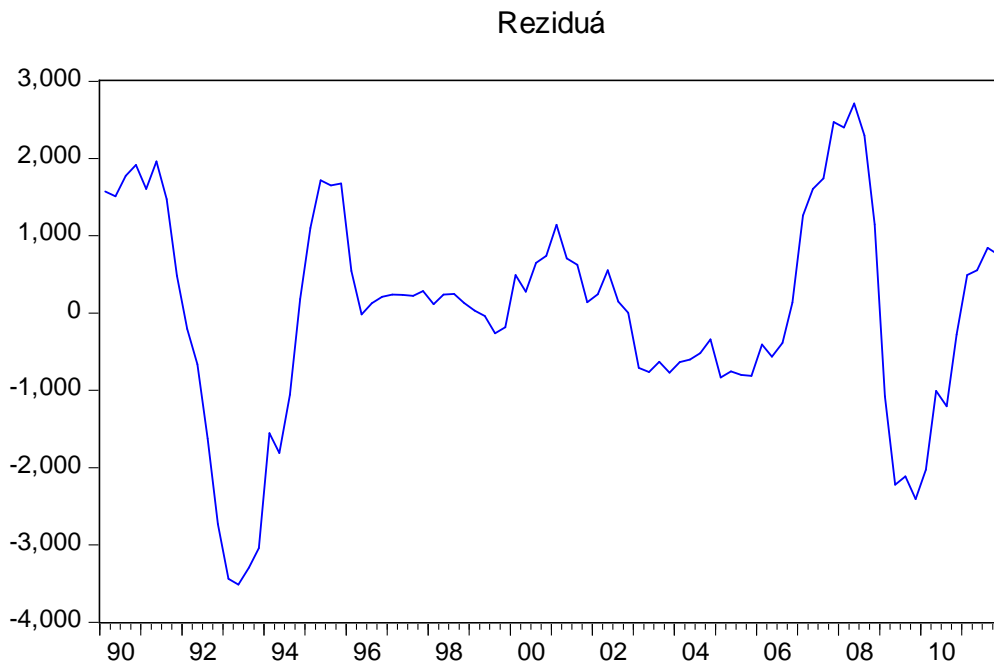


obr.4.2: HDP Fínska po odstránení sezónnosti pomocou metódou TRAMO/SEATS.



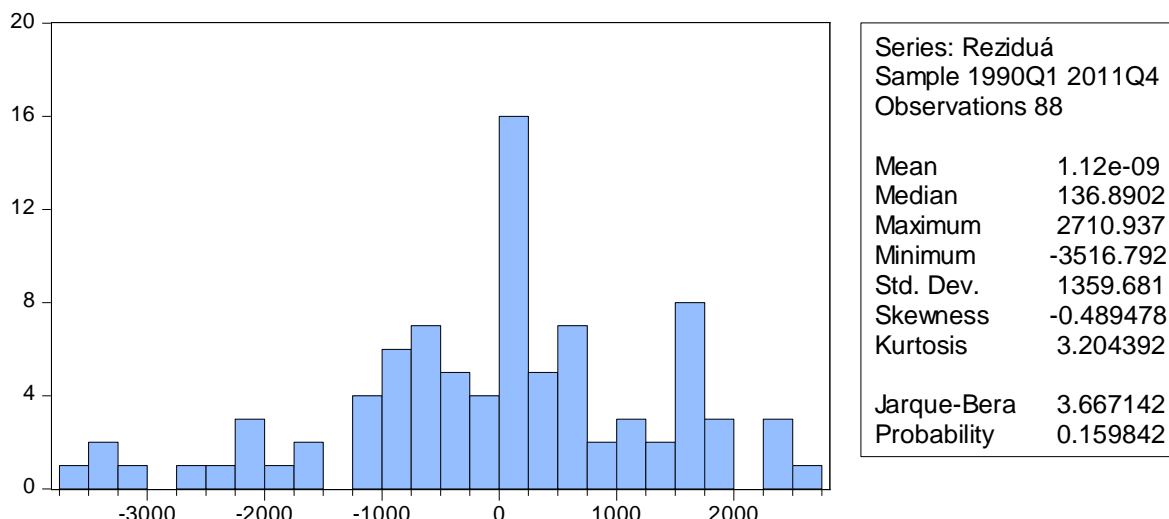
obr.4.3: Detekcia trendovej a cyklickej zložky pomocou HP – filtra.

V našom časovom rade nám ostali iba reziduá a cyklická zložka. Cyklická zložka je však veľmi ťažko badateľná, preto sme sa ju rozhodli zanedbať a predpokladáme, že daný časový rad obsahuje už len reziduálnu zložku (obr. 4.4).



obr.4.4: Výsledné reziduá po odstránení trendu zo sezónne očisteného radu.

Na modelovanie časového radu rezíduí HDP Fínska lineárnymi a nelineárnymi modelmi budeme vychádzať z obrázku č. 4.4, ale ešte predtým musíme overiť, či dané reziduá spĺňajú jednotlivé predpoklady o normalite a stacionarite. Na otestovanie normality sme použili Jarque – Bera test na normalitu. V tomto teste nulová hypotéza H_0 hovorí, že dáta z daného časového radu pochádzajú z normálneho rozdelenia oproti hypotéze H_1 , ktorá tvrdí opak. Výstup Jarque – Bera testu je viditeľný na obrázku č. 4.5. Pravdepodobnostná hodnota tejto štatistiky nám vyšla $0,159845 > 0,05$, čo nám hovorí, že hypotéza H_0 sa nezamieta, čiže dané reziduá pochádzajú z normálneho rozdelenia. Na testovanie stacionarity sme použili rozšírený Dickey - Fullerov test jednotkového koreňa (obr.4.6), ktorý na základe p -hodnoty ($0,0004$) zamieta hypotézu H_0 , že daný časový rad obsahuje jednotkový koreň. Náš časový rad je teda stacionárny.



obr.4.5: Jarque – Bera test na normalitu.

Null Hypothesis: REZIDUA has a unit root
 Exogenous: Constant
 Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=11)

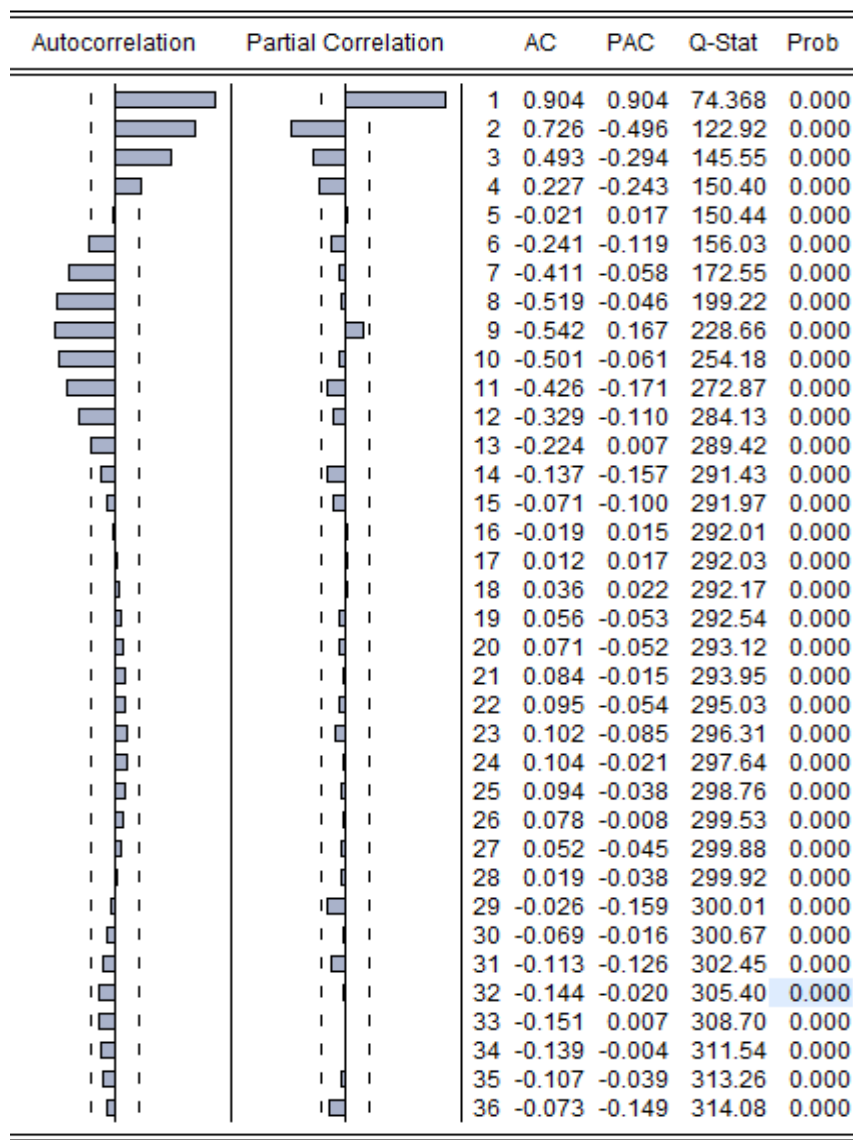
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-4.521217	0.0004
Test critical values:		
1% level	-3.509281	
5% level	-2.895924	
10% level	-2.585172	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

obr.4.6: Test jednotkového koreňa.

Po splnení podmienok o normalite a stacionarite reziduí časového radu HDP Fínska môžeme začať modelovať časový rad lineárnym modelom. V prvom kroku sa pozrieme na grafy korelogramov ACF a PACF (obr. 4.7). Z obrázka č. 4.7 vidíme, že daný lineárny model sa bude modelovať $AR(p)$ modelom, pretože graf korelogramu ACF oscilujúco klesá a zároveň graf korelogramu PACF je približne rovný 0 po piatich lagoch. Treba určiť príslušný rád p autoregrescie $AR(p)$ modelu. Najlepší lineárny model sme získali pre $AR(4)$ model:

$$X_t = 1,049629X_{t-1} - 0,291550X_{t-4} + \varepsilon_t \quad (4.1)$$



obr.4.7: Korelogram ACF a PACF reziduí.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	1.049629	0.041751	25.14042	0.0000
AR(4)	-0.291550	0.040869	-7.133818	0.0000
R-squared	0.891193	Mean dependent var		-80.63493
Adjusted R-squared	0.889866	S.D. dependent var		1338.582
S.E. of regression	444.2274	Akaike info criterion		15.05407
Sum squared resid	16181717	Schwarz criterion		15.11195
Log likelihood	-630.2710	Hannan-Quinn criter.		15.07734
Durbin-Watson stat	1.772412			
Inverted AR Roots	.87-.32i	.87+.32i	-.34+.47i	-.34-.47i

obr.4.8: Výstup lineárneho modelu AR(4).

Na obrázku č. 4.8 je znázornený výstup lineárneho modelu AR(4). Konštanta a členy AR(2) a AR(3) boli z modelu odobraté z dôvodu nesignifikantnosti parametrov (ich pravdepodobnostné hodnoty v štvrtom stĺpci s názvom Prob. boli väčšie ako 0,05). Získaný model je pre nás uspokojivý, pretože má pomerne vysoký koeficient determinácie R^2 (0,891193) a hodnota Durbin –Watsonovej testovacej štatistiky DW (1,772412) je z intervalu $\langle 1,5 \ 2,5 \rangle$, čo značí, že sa v modeli nenachádza autokorelácia v rezíduách. Na detekciu autokorelácie rezíduí nám posluži aj pohľad na pravdepodobnostné hodnoty korelogramu rezíduí daného lineárneho modelu (ľavá časť obr. 4.9). Ak sú všetky p - hodnoty (ľavý stĺpec Prob. v obrázku č. 4.9) väčšie ako 0,05 tak sa v danom modeli nenachádza autokorelácia. Z obrázka vidíme, že všetky p - hodnoty sú väčšie ako 0,05, takže autokoreláciu rezíduí sme aj týmto spôsobom vylúčili. Obrázok č. 4.9 (pravá časť) obsahuje ešte jeden výstup, korelogram štvorcov rezíduí. Ak sú pravdepodobnostné hodnoty korelogramu štvorcov rezíduí (pravý stĺpec Prob. v obrázku č. 4.9) väčšie ako 0,05, znamená to, že sa v našom modeli nenachádza heteroskedasticita. Všetky p -hodnoty pri korelograme štvorcov rezíduí sú väčšie ako 0,05, z čoho usudzujeme neprítomnosť heteroskedasticity, takže náš model je uspokojivý.

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.111	0.111	1.0684							1	-0.018	-0.018	0.0273	
		2	-0.085	-0.099	1.7111							2	0.074	0.074	0.5153	
		3	-0.122	-0.103	3.0304	0.082						3	0.022	0.025	0.5603	0.454
		4	-0.082	-0.066	3.6360	0.162						4	-0.080	-0.085	1.1323	0.568
		5	0.050	0.048	3.8625	0.277						5	0.146	0.141	3.0710	0.381
		6	0.052	0.017	4.1090	0.391						6	0.066	0.084	3.4780	0.481
		7	0.087	0.075	4.8166	0.439						7	0.040	0.023	3.6255	0.604
		8	-0.231	-0.249	9.8819	0.130						8	0.143	0.125	5.5637	0.474
		9	-0.108	-0.030	11.013	0.138						9	-0.058	-0.039	5.8919	0.552
		10	0.113	0.121	12.270	0.140						10	-0.026	-0.060	5.9565	0.652
		11	0.051	-0.022	12.528	0.185						11	-0.073	-0.090	6.4851	0.691
		12	-0.071	-0.132	13.034	0.222						12	-0.036	-0.028	6.6124	0.761
		13	0.044	0.108	13.228	0.279						13	-0.048	-0.094	6.8490	0.811
		14	0.039	0.049	13.387	0.342						14	-0.028	-0.041	6.9279	0.862
		15	0.025	0.045	13.453	0.413						15	-0.062	-0.059	7.3253	0.885
		16	-0.097	-0.180	14.448	0.417						16	0.078	0.098	7.9788	0.890
		17	0.004	0.015	14.450	0.492						17	-0.079	-0.041	8.6484	0.895
		18	-0.103	-0.060	15.617	0.480						18	-0.075	-0.056	9.2683	0.902
		19	-0.072	-0.028	16.188	0.511						19	-0.043	-0.007	9.4743	0.924
		20	-0.031	-0.166	16.295	0.572						20	-0.057	-0.009	9.8374	0.937
		21	-0.031	-0.016	16.406	0.630						21	-0.034	-0.049	9.9663	0.954
		22	0.031	0.075	16.516	0.684						22	-0.044	-0.052	10.191	0.965
		23	-0.026	-0.014	16.599	0.735						23	0.007	0.035	10.197	0.976
		24	0.132	0.036	18.708	0.663						24	0.060	0.047	10.631	0.980
		25	-0.010	-0.026	18.720	0.717						25	-0.045	-0.023	10.877	0.984
		26	-0.059	-0.030	19.158	0.744						26	-0.032	-0.027	11.007	0.989
		27	-0.082	-0.086	20.019	0.746						27	0.002	0.039	11.008	0.993
		28	0.048	0.025	20.316	0.776						28	0.063	0.074	11.515	0.994
		29	0.014	-0.045	20.340	0.816						29	-0.013	-0.038	11.539	0.996
		30	0.072	0.108	21.032	0.824						30	-0.042	-0.073	11.780	0.997
		31	-0.033	-0.080	21.180	0.853						31	-0.021	-0.033	11.838	0.998
		32	-0.120	-0.080	23.183	0.808						32	-0.003	-0.034	11.840	0.999
		33	-0.058	-0.001	23.661	0.824						33	-0.013	-0.041	11.865	0.999
		34	-0.021	-0.043	23.726	0.854						34	-0.052	-0.063	12.254	0.999
		35	0.133	0.032	26.330	0.788						35	-0.022	-0.027	12.327	1.000
		36	-0.104	-0.178	27.952	0.758						36	0.043	0.044	12.603	1.000

obr.4.9: Korelogram rezíduí (ľavá časť) a korelogram štvorcov rezíduí (pravá časť) lineárneho modelu AR(4).

V ďalšom kroku budeme pomocou lineárneho modelu AR(4) modelovať model SETAR(p, d, c) pomocou metodiky uvedenej v kapitole 3. Vzhľadom na náš rád autoregresie $p = 4$, náš parameter omeškania d môže nadobúdať hodnoty z $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Na určenie najvhodnejšieho parametra omeškania d sme použili test prahovej nelinearity, ktorý nám na základe F -štatistiky a k nej prislúchajúcej pravdepodobnostnej hodnote určí najlepšie d .

Parameter omeškania	1	2	3	4
F- štatistika	0.196712	2.076303	2.416243	3.119611
P- hodnota	0.962816	0.078052	0.043921	0.013151
Kritická hodnota	2.340028	2.340028	2.340028	2.340028

tab.4.1: Test prahovej nelinearity.

Z tabuľky č. 4.1 vidíme výsledok testu prahovej nelinearity pre jednotlivé parametre omeškania d . Hypotézu H_0 o linearite modelu sme zamietli pre parametre omeškania 3 a 4. Spomedzi nich si vyberieme ten, ktorý má vyššiu hodnotu F -štatistiky, čiže náš najlepší parameter omeškania bude $d = 4$. To znamená, že naša indikačná premenná $q_t = X_{t-d}$, ktorá sa bude porovnávať s prahom c a bude vyzeráť nasledovne: $q_t = X_{t-4}$.

Ďalej už môžeme namodelovať dvojrežimový SETAR model s prislúchajúcou prahovou hodnotou c . Po analýze bodových grafov rôznych štatistík verzus špecifikovaná prahová premenná sme si určili prahovú hodnotu $c = 0$. Prahová hodnota $c = 0$ nám rozdelila dáta na 38 a 46 pozorovaní. Výsledný, už upravený SETAR(4, 4, 0), vyzerá nasledovne:

$$X_t = \begin{cases} 1,061871X_{t-1} - 0,275358X_{t-4} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-4} \leq 0 \\ 1,174566X_{t-1} - 0,398693X_{t-3} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-4} > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Na obrázku č. 4.10 je znázornený výstup nelineárneho modelu SETAR(4, 4, 0). Z dôvodu nesignifikantnosti parametrov boli z oboch rovníc odstránené konštanty a jednotlivé AR_2_1 AR_3_1 členy z prvej a AR_2_2 a AR_4_2 členy z druhej

rovnice. Získaný model je lepší ako lineárny model AR(4), predovšetkým podľa Durbin – Watsonovej testovacej štatistiky, kde sa jej hodnota (1.975783) priblížila k číslu 2, pričom hodnota lineárneho modelu AR(4) bola iba 1,772412. Rovnako koeficient determinácie R^2 (0,893042) je o niečo vyšší ako pri lineárnom modeli AR(4) (0,891193). Pri pohľade na korelogram rezíduí a korelogram štvorcov rezíduí (obr. 4.11) vidíme, že všetky p -hodnoty sú väčšie ako 0,05, z čoho nám vyplýva, že v našom nelineárnom modeli sa nenachádza ani autokorelácia ani heteroskedasticita.

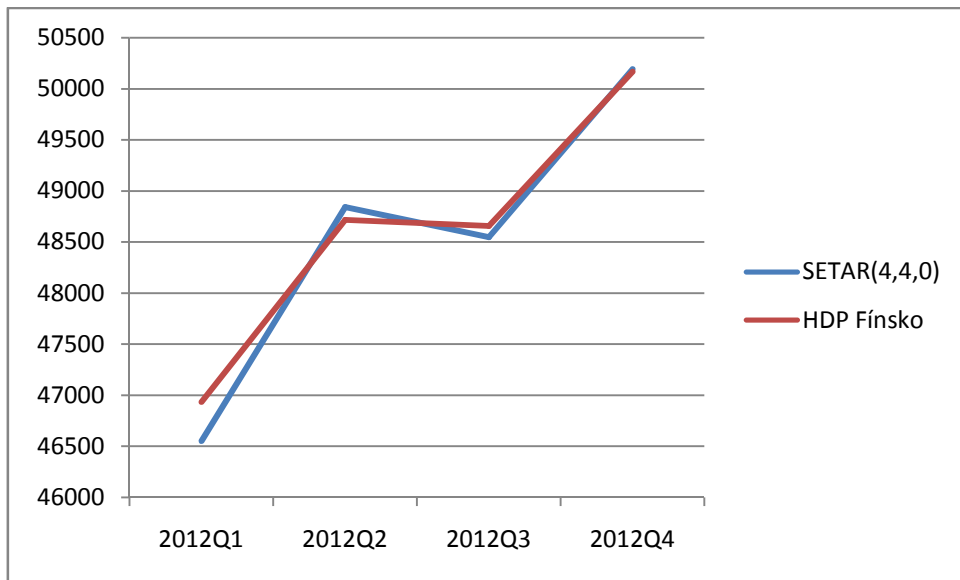
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR_1_1	1.061871	0.059926	17.71982	0.0000
AR_4_1	-0.275358	0.058304	-4.722755	0.0000
AR_1_2	1.174566	0.073738	15.92886	0.0000
AR_3_2	-0.398693	0.073350	-5.435498	0.0000
R-squared	0.893042	Mean dependent var	-80.63493	
Adjusted R-squared	0.889031	S.D. dependent var	1338.582	
S.E. of regression	445.9093	Akaike info criterion	15.08456	
Sum squared resid	15906809	Schwarz criterion	15.20031	
Log likelihood	-629.5514	Hannan-Quinn criter.	15.13109	
Durbin-Watson stat	1.975783			

obr.4.10: Výstup nelineárneho modelu SETAR(4, 4, 0).

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob			
		1	0.011	0.011	0.0099	0.921				1	-0.025	-0.025	0.0543	0.816
		2	-0.138	-0.138	1.6825	0.431				2	0.098	0.097	0.8925	0.640
		3	0.041	0.046	1.8361	0.607				3	0.055	0.060	1.1585	0.763
		4	-0.058	-0.080	2.1434	0.709				4	-0.067	-0.074	1.5600	0.816
		5	0.025	0.041	2.1995	0.821				5	0.237	0.227	6.7020	0.244
		6	0.004	-0.020	2.2009	0.900				6	0.081	0.107	7.3061	0.293
		7	0.122	0.142	3.5931	0.825				7	0.099	0.070	8.2282	0.313
		8	-0.260	-0.291	10.011	0.264				8	0.111	0.080	9.4066	0.309
		9	-0.147	-0.085	12.078	0.209				9	-0.044	-0.029	9.5939	0.384
		10	0.183	0.106	15.347	0.120				10	0.030	-0.038	9.6804	0.469
		11	-0.006	0.002	15.351	0.167				11	-0.035	-0.072	9.8005	0.548
		12	-0.086	-0.105	16.100	0.187				12	-0.053	-0.098	10.079	0.609
		13	0.020	0.025	16.140	0.242				13	-0.075	-0.154	10.646	0.640
		14	0.047	0.040	16.369	0.291				14	0.001	-0.010	10.646	0.714
		15	0.012	0.078	16.385	0.357				15	-0.044	-0.046	10.851	0.763
		16	-0.122	-0.202	17.955	0.327				16	0.036	0.055	10.987	0.810
		17	0.028	-0.042	18.040	0.386				17	-0.103	-0.057	12.125	0.792
		18	-0.091	-0.071	18.938	0.396				18	-0.069	-0.003	12.647	0.812
		19	-0.064	0.025	19.396	0.432				19	-0.027	0.027	12.726	0.852
		20	0.006	-0.152	19.401	0.496				20	-0.090	-0.020	13.639	0.848
		21	-0.002	0.007	19.401	0.559				21	-0.007	-0.011	13.644	0.884
		22	0.018	0.035	19.438	0.618				22	-0.058	-0.030	14.029	0.900
		23	-0.050	0.033	19.732	0.658				23	0.022	0.060	14.084	0.924
		24	0.116	0.010	21.351	0.618				24	0.011	0.017	14.099	0.944
		25	-0.001	-0.049	21.351	0.673				25	-0.080	-0.046	14.886	0.944
		26	-0.038	-0.005	21.531	0.714				26	-0.007	-0.021	14.893	0.959
		27	-0.046	-0.086	21.793	0.748				27	-0.024	0.019	14.965	0.970
		28	0.049	0.025	22.109	0.776				28	0.044	0.049	15.213	0.976
		29	-0.004	-0.068	22.111	0.816				29	-0.022	-0.046	15.278	0.983
		30	0.015	0.088	22.142	0.849				30	-0.057	-0.082	15.705	0.985
		31	-0.004	-0.060	22.144	0.878				31	-0.023	-0.046	15.777	0.989
		32	-0.068	-0.027	22.788	0.885				32	-0.048	-0.046	16.102	0.991
		33	-0.040	-0.058	23.012	0.903				33	-0.009	-0.039	16.113	0.994
		34	-0.009	-0.026	23.024	0.923				34	-0.054	-0.075	16.536	0.995
		35	0.102	0.029	24.556	0.906				35	-0.047	-0.049	16.868	0.996
		36	-0.118	-0.165	26.650	0.872				36	-0.002	0.036	16.869	0.997

obr.4.11: Korelogram rezíduí (ľavá časť) a korelogram štvorcov rezíduí (pravá časť) daného nelineárneho modelu SETAR(4, 4, 0).

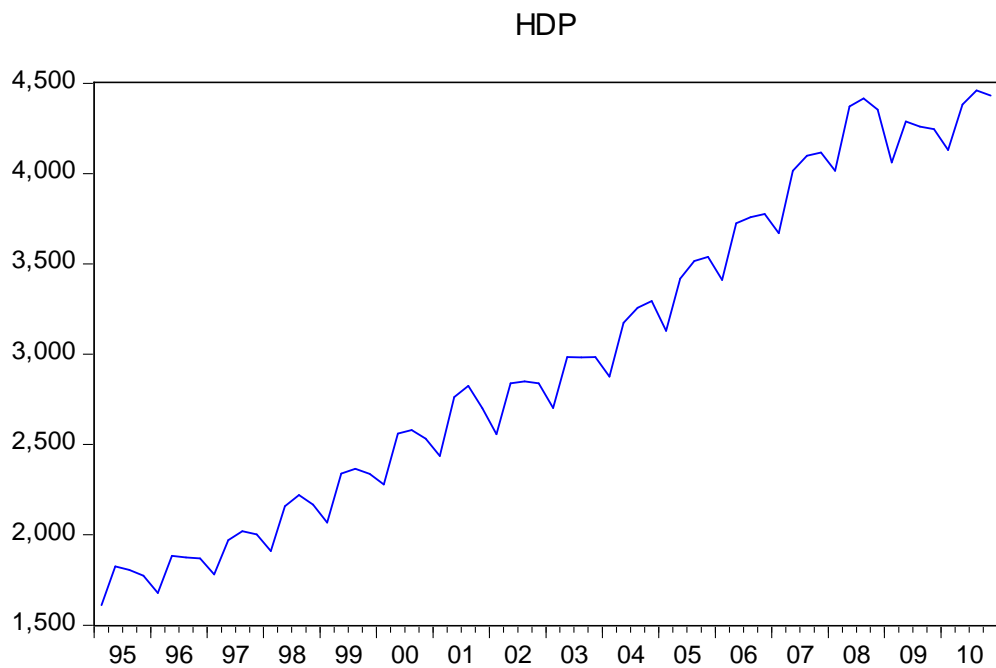
Na záver tejto podkapitoly si spravíme predikciu SETAR(4, 4, 0) modelu na rok 2012 a porovnáme to so skutočnými hodnotami HDP Fínska. Z rovnice (4.2) vypočítame prognózy rezíduí na daný rok pre jednotlivé kvartály. Následne k týmto prognózam pripočítame trend a sezónnosť, pomocou ktorých získame odhad HDP Fínska na tento rok (obr. 4.12).



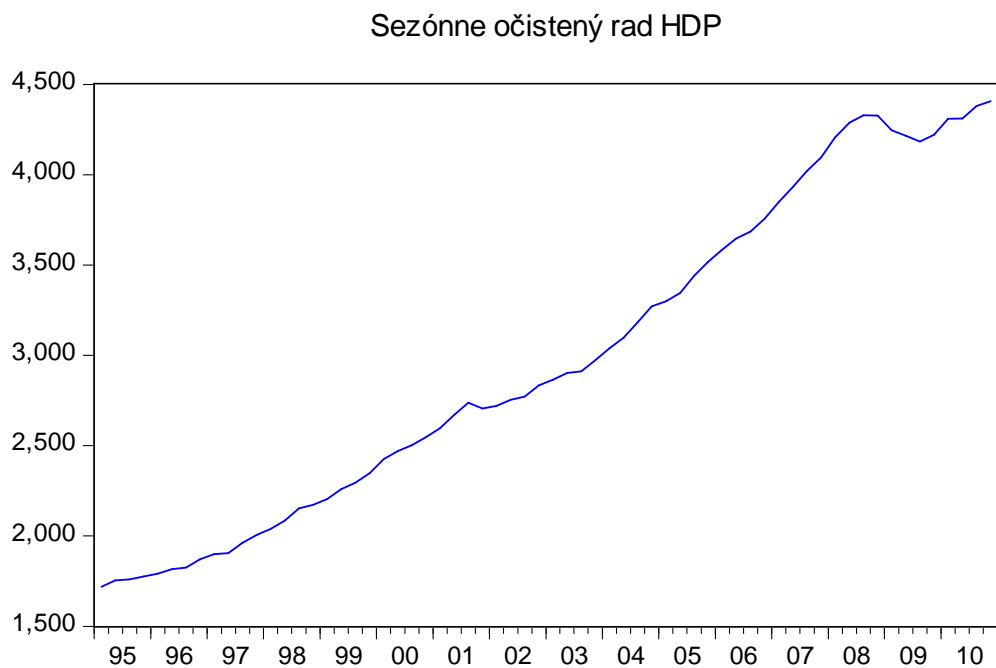
obr.4.12: Porovnanie predikcie HDP modelu SETAR(4,4;0) so skutočnými hodnotami HDP.

4.3 Cyprus

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať časovým radom HDP Cypru od prvého kvartálu 1995 až po štvrtý kvartál 2010 (obr. 4.13). Vidíme, že na obrázku 4.13 je prítomná sezónnosť. Pri dekompozícií časového radu HDP Cypru budeme postupovať podobne ako v predchádzajúcej kapitole pri dekompozícií radu HDP Fínska. Najprv odstránime sezónnosť pomocou metódy TRAMO/SEATS (obr. 4.14), následne určíme trendovú zložku pomocou HP filtra (obr. 4.15), ktorú odčítame od sezónne očisteného radu (obr. 4.16). Ako v prípade HDP Fínska aj pri HDP Cypru zanedbáme cyklickú zložku, pretože je ťažko identifikovateľná a predpokladáme, že daný časový rad na obrázku č. 4.16 obsahuje už len reziduálnu zložku.

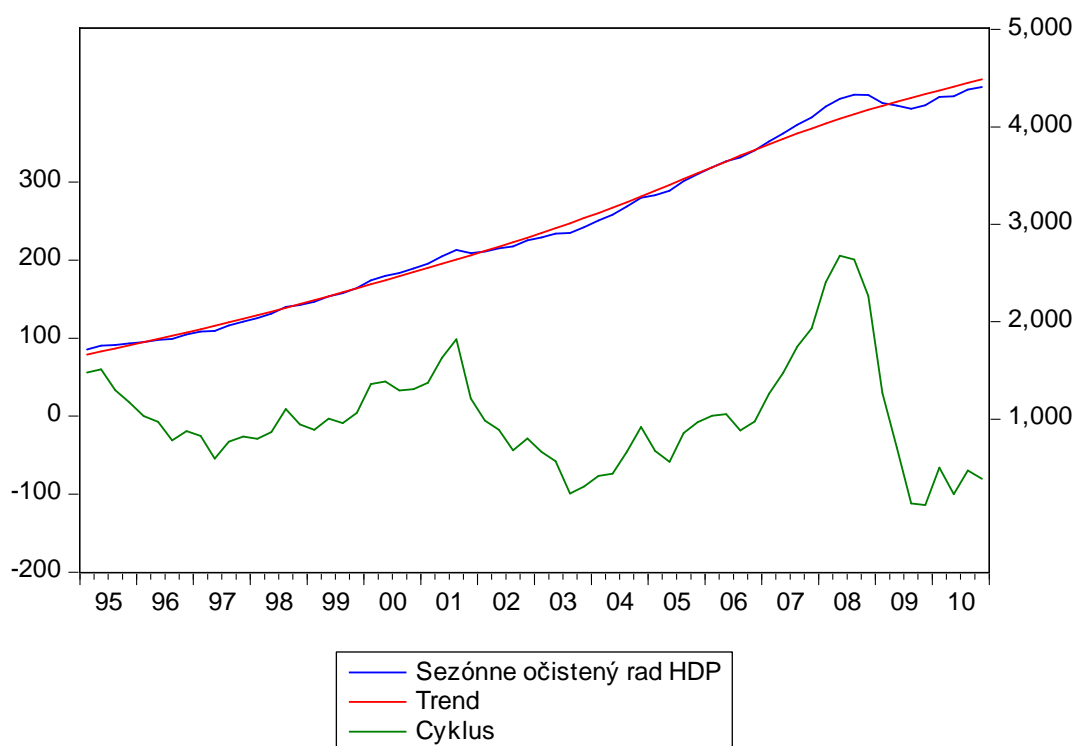


obr.4.13: HDP Cypru od prvého kvartálu 1995 až po štvrtý kvartál 2010.



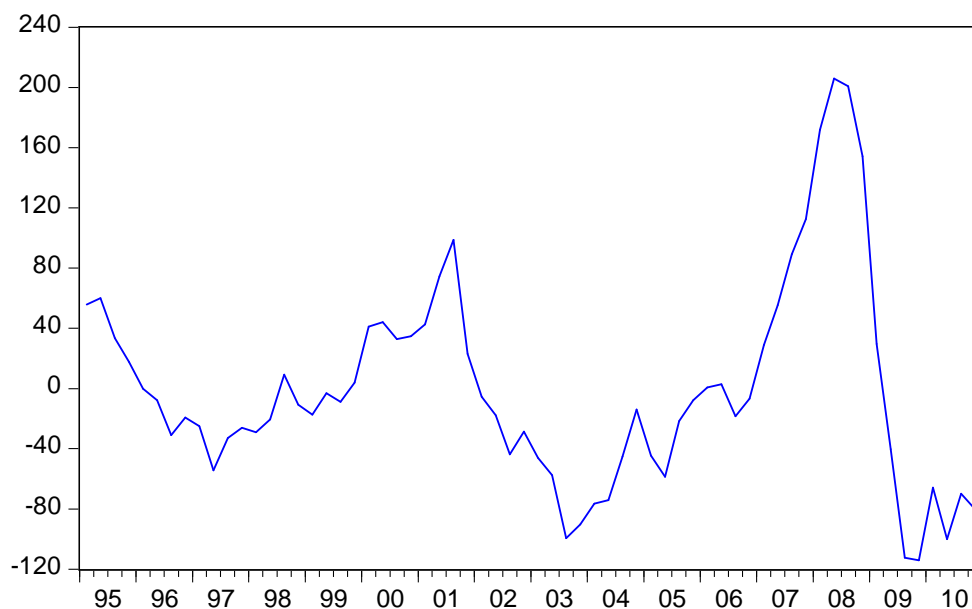
obr.4.14: HDP Cypru po odstránení sezónnosti pomocou metódou TRAMO/SEATS.

Hodrick-Prescott Filter (lambda=1600)



obr.4.15: Detekcia trendovej a cyklickej zložky pomocou HP filtra

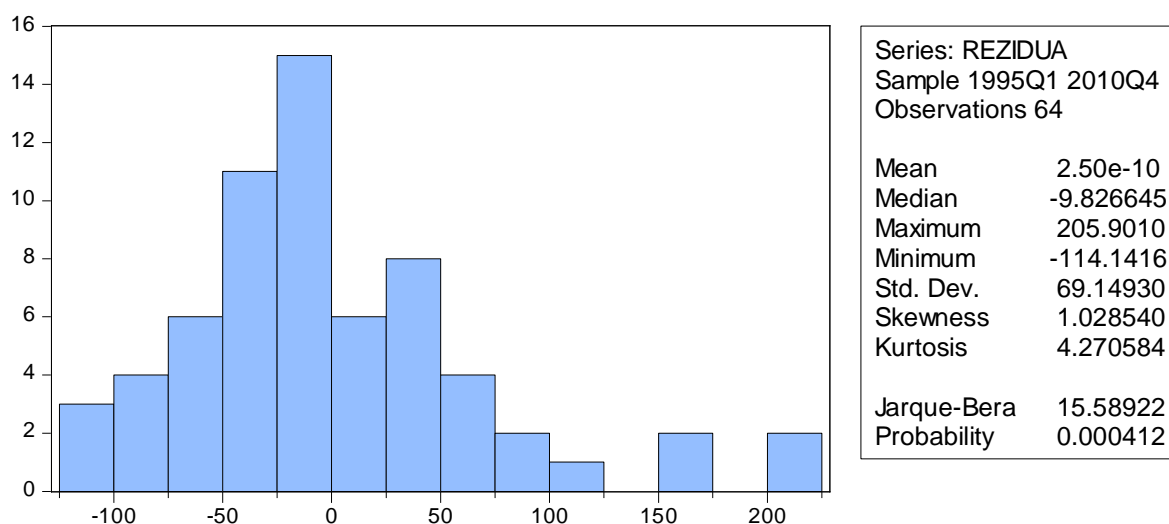
REZIDUA



obr.4.16: Výsledné rezíduá po odstránení trendu zo sezónne očisteného radu.

V ďalšom kroku sa pozrieme na predpoklady o normalite a stacionarite rezíduí. Jarque – Bera test na normalitu (obr. 4.17) nám zamieta hypotézu H_0 , že rezíduá pochádzajú z normálneho rozdelenia. p -hodnota tohto testu nám vyšla $0,000412 < 0,05$.

Vzhľadom k tomu, že v praxi asi 95% rezíduí nepochádza z normálneho rozdelenia sme sa rozhodli zanedbať výsledok testu o normalite rezíduí a pokračovať v modelovaní HDP Cypru lineárnymi a nelineárnymi modelmi ďalej. Predpoklad o stacionarite otestujeme rozšíreným Dickey – Fullerovým testom jednotkového koreňa (obr.4.18), ktorý zamieta na základe p -hodnoty (0,0453) prítomnosť jednotkového koreňa. To znamená, že náš časový rad je stacionárny.



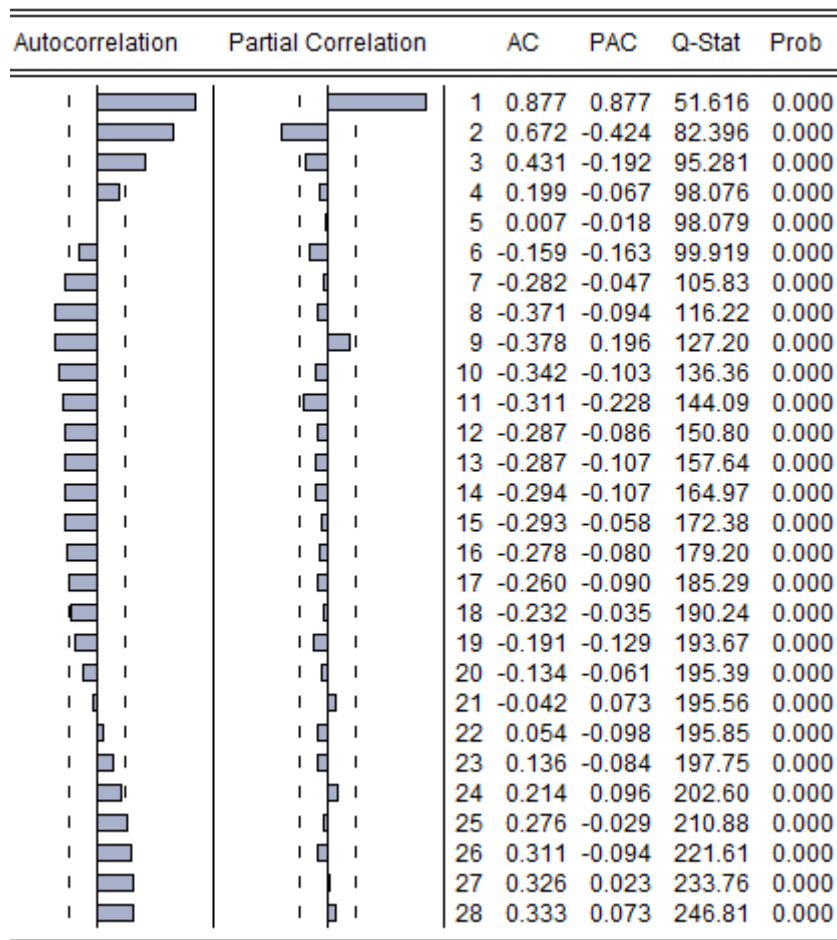
obr.4.17: Jarque – Bera test na normalitu rezíduí

Null Hypothesis: REZIDUA has a unit root
 Exogenous: Constant
 Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=10)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.951631	0.0453
Test critical values:		
1% level	-3.540198	
5% level	-2.909206	
10% level	-2.592215	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

obr.4.18: Test jednotkového koreňa.



obr.4.19: Korelogram ACF a PACF reziduů.

Ďalším krokom je určenie vhodného lineárneho modelu na základe analýzy grafov korelogramov ACF a PACF (obr. 4.19). Na základe pozorovania môžeme vyhlásiť, že daný časový rad sa bude modelovať AR(p) modelom. Vidíme tu ten istý priebeh jednotlivých korelogramov ako pri rezíduách Fínska, t.j. graf korelogramu ACF oscilujúco klesá a zároveň graf korelogramu PACF je približne rovný 0 po štyroch lagoch. Najlepší lineárny model pre príslušný rád p autoregrescie AR(p) modelu sme si určili pre $p = 2$. Týmto sme získali daný AR(2) model:

$$X_t = 1,319785X_{t-1} - 0,479252X_{t-2} + \varepsilon_t \quad (4.3)$$

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	1.319785	0.113669	11.61078	0.0000
AR(2)	-0.479252	0.114017	-4.203325	0.0001
R-squared	0.839802	Mean dependent var		-1.870951
Adjusted R-squared	0.837132	S.D. dependent var		69.45787
S.E. of regression	28.03108	Akaike info criterion		9.536231
Sum squared resid	47144.47	Schwarz criterion		9.604848
Log likelihood	-293.6232	Hannan-Quinn criter.		9.563172
Durbin-Watson stat	2.098569			
Inverted AR Roots	.66-.21i	.66+.21i		

obr.4.20: Výstup pre lineárny model AR(2).

Na obrázku č. 4.20 je znázornený výstup lineárneho modelu AR(2). Konštanta bola z modelu odobratá z dôvodu nesignifikantnosti parametra. Daný lineárny model je pre nás dobrý, na čo poukazuje pomerne vysoká hodnota koeficientu determinácie $R^2(0,839802)$ a hodnota blízka k číslu 2 Durbin –Watsonovej testovacej štatistiky $DW(2.098569)$. Z pravdepodobnostných hodnôt z obrázka č. 4.21 nám vyplýva, že v tomto lineárnom modeli AR(2) nie je prítomná ani autokorelácia ani heteroskedasticita, pretože všetky p -hodnoty sú vyššie ako hodnota 0,05.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 -0.068	-0.068	0.2979				1 -0.081	-0.081	0.4226	
		2 0.054	0.049	0.4892				2 0.081	0.075	0.8584	
		3 0.153	0.161	2.0625	0.151			3 -0.018	-0.006	0.8802	0.348
		4 -0.205	-0.193	4.9387	0.085			4 0.156	0.149	2.5346	0.282
		5 0.076	0.038	5.3373	0.149			5 0.185	0.216	4.9154	0.178
		6 0.007	0.015	5.3408	0.254			6 0.049	0.068	5.0865	0.279
		7 0.061	0.122	5.6058	0.346			7 0.026	0.016	5.1367	0.399
		8 -0.217	-0.293	9.0698	0.170			8 0.032	0.010	5.2098	0.517
		9 -0.093	-0.111	9.7131	0.205			9 0.065	0.005	5.5238	0.596
		10 0.023	0.033	9.7541	0.283			10 0.023	-0.032	5.5655	0.696
		11 -0.124	0.013	10.943	0.280			11 -0.071	-0.115	5.9555	0.744
		12 0.001	-0.124	10.943	0.362			12 0.016	-0.026	5.9758	0.817
		13 -0.031	-0.063	11.019	0.442			13 0.038	0.026	6.0908	0.867
		14 -0.143	-0.100	12.710	0.390			14 -0.037	-0.055	6.2053	0.905
		15 -0.061	-0.036	13.024	0.446			15 -0.042	-0.037	6.3569	0.932
		16 -0.023	-0.085	13.070	0.521			16 0.024	0.064	6.4072	0.955
		17 -0.086	-0.137	13.724	0.547			17 -0.108	-0.103	7.4312	0.945
		18 0.024	-0.005	13.777	0.615			18 0.022	-0.002	7.4763	0.963
		19 -0.011	-0.021	13.787	0.682			19 -0.043	0.008	7.6453	0.974
		20 -0.224	-0.312	18.534	0.421			20 -0.064	-0.065	8.0354	0.978
		21 0.045	-0.068	18.725	0.475			21 0.026	0.044	8.1011	0.986
		22 0.049	0.055	18.962	0.524			22 0.002	0.053	8.1016	0.991
		23 -0.026	-0.038	19.033	0.583			23 -0.088	-0.079	8.8903	0.990
		24 0.104	-0.130	20.171	0.572			24 -0.043	-0.023	9.0864	0.993
		25 0.018	-0.083	20.205	0.630			25 0.138	0.175	11.135	0.982
		26 -0.004	0.001	20.207	0.685			26 0.007	0.030	11.139	0.988
		27 0.033	-0.003	20.327	0.729			27 0.017	0.029	11.173	0.992
		28 0.149	-0.064	22.925	0.637			28 -0.078	-0.045	11.875	0.992

obr.4.21: Korelogram reziduí (ľavá časť) a korelogram štvorcov reziduí (pravá časť) daného lineárneho modelu AR(2).

V ďalšom kroku sme pomocou lineárneho modelu AR(2) namodelovali model SETAR(p, d, c). Postupovali sme podobne ako pri určovaní SETAR modelu HDP Fínska. Autoregresia má rád $p = 2$, z čoho vyplýva, že náš parameter omeškania d môže nadobúdať hodnoty z množiny $S = \{1, 2\}$. Na určenie najvhodnejšieho parametra omeškania d sme použili test prahovej nelinearity, ktorý nám na základe F -štatistiky a k nej prislúchajúcej pravdepodobnostnej hodnote určí najlepšie d .

Parameter omeškania	1	2
F- štatistika	2.024720	5.904432
P- hodnota	0.121067	0.001442
Kritická hodnota	2.772537	2.772537

tab.4.2: Test prahovej nelinearity.

Z tabuľky č. 4.2 vidíme výsledok testu prahovej nelinearity pre jednotlivé parametre omeškania d . Hypotézu o linearite modelu sme zamietli pre parameter omeškania 2. To znamená, že naša indikačná premenná $q_t = X_{t-d}$, ktorá sa bude porovnávať s prahom c , bude vyzeráť nasledovne: $q_t = X_{t-2}$.

Následne sme namodelovali dvojrežimový SETAR model s prahovou hodnotou $c = 0$, ktorá nám rozdelila dáta na 37 a 25 pozorovaní. Výsledný, už upravený SETAR(2, 2, 0) vyzerá nasledovne:

$$X_t = \begin{cases} 0,891996X_{t-1} + 1,557299X_{t-2} + \varepsilon_t & ak \ X_{t-2} \leq 0 \\ -0,737294X_{t-2} + \varepsilon_t & ak \ X_{t-2} > 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR_1_1	0.891996	0.081792	10.90566	0.0000
AR_1_2	1.557299	0.131085	11.88010	0.0000
AR_2_2	-0.737294	0.130418	-5.653303	0.0000
R-squared	0.865494	Mean dependent var		-1.870951
Adjusted R-squared	0.860934	S.D. dependent var		69.45787
S.E. of regression	25.90191	Akaike info criterion		9.393688
Sum squared resid	39583.63	Schwarz criterion		9.496614
Log likelihood	-288.2043	Hannan-Quinn criter.		9.434099
Durbin-Watson stat	2.147559			

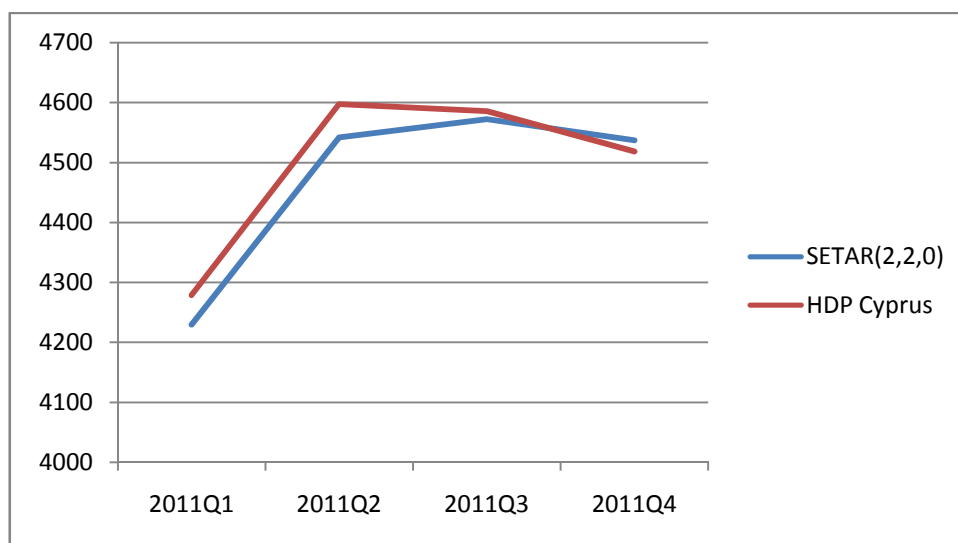
obr.4.22: Nelineárny model SETAR(2, 2, 0).

Na obrázku č. 4.22 je znázornený výstup nelineárneho modelu SETAR(2, 2, 0). Obe konštanty boli z modelu odobraté a takisto aj člen AR_1_2 z druhej rovnice z dôvodu nesignifikantnosti parametrov. V porovnaní s lineárnym modelom AR(2) môžeme vyhlásiť, že SETAR model je lepší. Síce hodnota Durbin –Watsonovej štatistiky DW (2,147559) je o niečo horšia ako pri lineárnom modeli (2.098569), ale hodnota koeficientu determinácie R^2 (0,865494) je o 0,03 väčšia ako pri lineárnom modeli (0,839802), čo značí, že náš SETAR model lepšie modeluje daný časový rad. Ani v tomto modeli sa nenachádza autokorelácia ani heteroskedasticita, čo môžeme vidieť z pravdepodobnostných hodnôt korelogramu rezíduí a korelogramu štvorcov rezíduí z obrázka č. 4.23.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob		
		1	-0.088	-0.088	0.5029	0.478			1	-0.023	-0.023	0.0350	0.852
		2	-0.007	-0.015	0.5061	0.776			2	-0.051	-0.051	0.2045	0.903
		3	0.221	0.221	3.7926	0.285			3	-0.072	-0.075	0.5529	0.907
		4	-0.157	-0.125	5.4712	0.242			4	0.187	0.182	2.9341	0.569
		5	0.145	0.134	6.9300	0.226			5	0.006	0.006	2.9365	0.710
		6	0.024	-0.009	6.9721	0.323			6	-0.023	-0.012	2.9756	0.812
		7	-0.030	0.036	7.0386	0.425			7	0.161	0.195	4.8470	0.679
		8	-0.125	-0.223	8.1799	0.416			8	0.015	-0.015	4.8642	0.772
		9	-0.085	-0.071	8.7179	0.464			9	-0.027	-0.019	4.9188	0.841
		10	0.041	0.008	8.8466	0.547			10	-0.069	-0.035	5.2851	0.871
		11	-0.121	-0.054	9.9805	0.532			11	-0.107	-0.193	6.1765	0.861
		12	-0.062	-0.097	10.286	0.591			12	-0.001	-0.020	6.1765	0.907
		13	-0.004	0.004	10.287	0.670			13	0.045	0.042	6.3426	0.933
		14	-0.088	-0.016	10.922	0.692			14	0.026	-0.013	6.3978	0.955
		15	-0.044	-0.058	11.083	0.747			15	-0.061	0.005	6.7117	0.965
		16	-0.111	-0.167	12.139	0.734			16	-0.104	-0.089	7.6516	0.959
		17	-0.183	-0.214	15.088	0.589			17	-0.127	-0.154	9.0817	0.938
		18	-0.027	-0.061	15.154	0.651			18	0.083	0.130	9.7043	0.941
		19	0.024	0.033	15.206	0.709			19	-0.057	-0.079	10.005	0.953
		20	-0.200	-0.235	18.998	0.522			20	-0.065	-0.084	10.402	0.960
		21	0.015	-0.048	19.021	0.584			21	-0.008	0.062	10.409	0.973
		22	0.020	0.013	19.062	0.642			22	0.086	0.015	11.141	0.973
		23	-0.007	0.074	19.066	0.697			23	-0.103	-0.065	12.222	0.967
		24	0.127	-0.026	20.750	0.653			24	-0.064	0.058	12.645	0.972
		25	0.061	0.018	21.149	0.684			25	0.223	0.200	17.976	0.843
		26	0.023	-0.018	21.207	0.731			26	-0.010	-0.071	17.987	0.876
		27	0.007	-0.043	21.213	0.776			27	-0.014	0.032	18.008	0.903
		28	0.116	-0.036	22.778	0.744			28	-0.022	-0.007	18.063	0.925

obr.4.23: Korelogram reziduí (vľavo) a korelogram štvorcov reziduí (v pravo) daného nelineárneho modelu SETAR(2,2;0).

Na záver urobíme predikciu nelineárneho modelu SETAR (2, 2, 0) na rok 2011 a porovnáme ju so skutočnými hodnotami HDP Cypru. Budeme postupovať ako v predchádzajúcej podkapitole pri predikcii HDP Fínska. Z rovnice (4.4) vypočítame prognózy reziduí na daný rok pre jednotlivé kvartály. Následne k týmto prognózam pripočítame trend a sezónnosť, pomocou ktorých získame odhad HDP Cypru na rok 2011 (obr. 4.24).



obr.4.24: Porovnanie predikcie HDP modelu SETAR(2,2;0) so skutočnými hodnotami HDP.

Záver

V diplomovej práci sme sa zaoberali nelineárnymi modelmi časových radov SETAR, LSTAR a ESTAR. V tretej kapitole sme si bližšie priblížili, ako tieto modely vyzerajú a podrobne opísali metodológiu ich modelovania. V štvrtej kapitole sme pomocou teórie časových radov a lineárnych modelov aplikovali nelineárne modely na časové rady HDP Fínska a Cypru.

Analýzu časových radov sme začali ich dekompozíciou. Postupne sme odstránili sezónnosť pomocou TRAMO/SEATS metódy a trendovú zložku použitím HP filtra. Cyklickú zložku sme zanedbali z dôvodu veľmi ťažkej identifikácie a predpokladali sme, že po dekompozícií nám ostala už len reziduálna zložka. Následne sme rezíduá podrobili testom na normalitu a stacionaritu. Jarque – Bera test na normalitu nám potvrdil pri HDP Fínska, že rezíduá pochádzajú z normálneho rozdelenia. Pri HDP Cypru nám test zamietol normálne rozdelenie rezíduí, ale vzhľadom k tomu, že v praxi asi 95% rezíduí nepochádza z normálneho rozdelenia, sme sa rozhodli zanedbať výsledok testu o normalite rezíduí a pokračovať v modelovaní ďalej. Pomocou Dickey - Fullerovho testu jednotkového koreňa sme otestovali stacionaritu rezíduí. V oboch prípadoch nám test zamietol prítomnosť jednotkového koreňa, čím sme ukázali, že rezíduá sú stacionárne. Po preukázaní normality a stacionarity sme našli najlepší lineárny model. Pri hľadaní modelu sme postupovali pomocou Box – Jenkinsonovej metodológie grafickej analýzy korelogramov ACF a PACF. Najlepší lineárny model sme si vybrali pomocou hodnôt rozhodovacích (koeficient determinácie R^2 , hodnota Durbin –Watsonovej testovacej štatistiky) a informačných kritérií (Akaikeho informačné kritérium).

V ďalšom kroku sme pomocou najlepších lineárnych modelov určili nelineárne modely SETAR pre jednotlivé štáty. Modelovanie pozostávalo z nájdenia najlepšieho parametra omeškania pomocou testu prahovej nelinearity, zadefinovania hodnoty prahovej premennej a nakoniec určenia najlepšieho nelineárneho modelu SETAR pomocou hodnôt už známych rozhodovacích a informačných kritérií. Po nájdení najlepšieho modelu sme porovnali jednotlivé rozhodovacie a informačné kritériá medzi lineárnym a nelineárnym modelom. V prípade oboch štátov sa ukázalo, že daný časový rad lepšie modeluje nelineárny model.

Ako poslednú krok v tejto práci sme spravili predikciu SETAR modelu na ďalší rok. K odhadom modelu na jednotlivé kvartály sme pripočítali trendovú zložku a sezónnosť a porovnali sme to so skutočnými hodnotami HDP krajín Fínska a Cypru. Pri porovnávaní predikcií a skutočných hodnôt HDP Fínska boli predikcie modelu SETAR nadmieru uspokojivé. Vedeli sme predpovedať mierny pokles HDP medzi druhým a tretím kvartálom, ale ani ostatné hodnoty predikcií sa veľmi nelíšili od skutočných. Pri porovnaní predikcie a skutočných hodnôt HDP Cypru, už neboli výsledky až tak uspokojivé ako u HDP Fínska. Model SETAR vedel odhadnúť, ako sa bude správať ekonomika v jednotlivých kvartáloch daného roku, ale jej hodnoty sa väčšmi líšili od skutočných hodnôt ako v prípade fínskej predikcie. Toto mohol zapríčiniť fakt, že reziduálna zložka časového radu Cypru nepochádzala z normálneho rozdelenia, ale viac sa prikláňame k možnosti, že na modelovanie SETAR modelu sme mali k dispozícii malý počet pozorovaní, čím náš model stratil na presnosti.

Na príkladoch fínskej a cyperskej ekonomiky sa nelineárne modely ukázali presnejšie ako lineárne a v prípade Fínska dokázali predpovedať budúci vývoj HDP s veľmi vysokou presnosťou. Zdá sa teda, že nelineárne modely by mohli v budúcnosti zohrávať veľmi dôležitú úlohu v oblasti štatistického modelovania dát.

Literatúra

- [1] Anděl, J.: Statistická analýza časových rad (1976)
- [2] Granger, C. W. J., Teräsvirta, T.: Modeling nonlinear economic relationships (1993)
- [3] Luukkonen, R., Saikkonen, P., Teräsvirta, T.: Testing linearity against smooth transition autoregressive models (1988)
- [4] Teräsvirta, T.: Specification, estimation, and evaluation of smooth transition autoregressive models (1994)
- [5] Chan, W. S., C. S. Wong, A., Tong, H.: Some nonlinear threshold autoregressive time series models for actuarial use (2004)
- [6] Tsay, R. S.: Testing and modeling threshold autoregressive processes (1989)
- [7] Tsay, R. S.: Analysis of Financial time series (2002)
- [8] Tong, H., Lim, K. S.: Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data (1980)
- [9] Pekár, J.: Autoregresné modely hrubého domáceho produktu Slovenska (2004)
- [10] Senaj, Š.: Nelineárne autoregresné modely miery nezamestnanosti vybraných krajín (2012)
- [11] Machalec, M.: Modely a metódy analýzy ekonomických časových radov (2011)
- [12] Grom, S.: Autoregresné modely inflácie Slovenska (2010)
- [13] Erdélyi, E.: Nelineárne autoregresné modely (2010)
- [14] Petričková, A.: Modely časových radov s premenlivými režimami (2009)
- [15] <http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/eurostat/home/>