

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**

**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A  
INFORMATIKY**

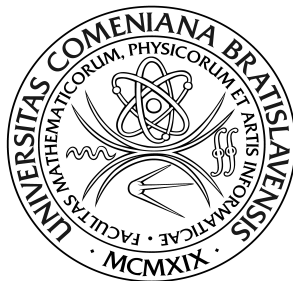
**LIBOR model oceňovania časovej štruktúry úrokových  
mier a jeho kalibrácia**

Diplomová práca

**2013**

**Bc. Jakub Guliš**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A  
INFORMATIKY



**LIBOR model oceňovania časovej štruktúry úrokových  
mier a jeho kalibrácia**

Diplomová práca

Evidenčné číslo: 338cdb70-7866-45f7-9f08-c3105b7ef731

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2013

Jakub Guliš



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Jakub Guliš  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** LIBOR model oceňovania časovej štruktúry úrokových mier a jeho kalibrácia  
**Cieľ:** Cieľom práce bude analyzovať LIBOR model oceňovania časových štruktúr úrokových mier. Zameriame sa na Brace-Gatarek-Musiellov LIBOR model a možnosti kalibrácie jeho parametrov.

**Vedúci:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 25.01.2012

**Dátum schválenia:** 26.01.2012  
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne, iba s pomocou literatúry uvedenej v zozname a konzultácií s vedúcim diplomovej práce.

V Bratislave, 19. apríla 2013

Jakub Guliš

Týmto sa chcem poďakovať prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za odbornú pomoc, pripomienky a rady, ako aj za ochotu, prejavenu pri vedení práce.

## Abstrakt

V našej práci sa zaoberáme LIBOR modelom a jeho kalibráciou. Model slúži na oceňovanie derivátov úrokovej miery, predovšetkým exotických derivátov.

Namiesto okamžitých úrokových mier alebo okamžitých forwardových mier sa modelujú forwardové LIBOR miery, ktoré sú pozorovateľné na trhu.

Na rozdiel od tradičných prístupov, tento model je ľahko aplikovateľný na najviac obchodované deriváty úrokovej miery, ako sú capy (a swapcie). Z tohto dôvodu ukážeme, ako sa na trhu bežne oceňujú capy prostredníctvom formuly vyplývajúcej z modelu Black 76.

Odvodíme LIBOR model a ukážeme, že tento model nám dáva rovnakú formulu ako Blackov model. Tento fakt umožňuje kalibrovať model tak, aby bolo možné oceňovať a zaisťovať exotické deriváty úrokovej miery konzistentne s cenami likvidných capov (a swapcií.).

Kľúčové slová: forwardové úrokové miery, stochastické diferenciálne rovnice, capy, LIBOR model

## **Abstrakt**

In our work we investigate LIBOR model and his calibration. The model is used for pricing interest rate derivatives, especially exotic derivatives.

The quantities that are modeled, rather than instantaneous (spot or forward) rates are a set of forward LIBOR rates, which are observable in the market.

In contrast to more traditional approaches, this model is tailored to handle the most actively traded interest rate options, such as caps (and swaptions). For this reason, we will describe how market practitioners value caps by means of the Black 76 caplet formula.

We will derive the LIBOR model and show that this model gives us the same caplet formula as the Black model. This enables us to calibrate the model in such a way that we could price and hedge exotic interest rate derivatives consistently with the prices of liquid caps (and swaptions).

Keywords: forward rates, stochastic differential equations, caps, LIBOR model

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Ciele práce</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Definície a základné poznatky</b>	<b>5</b>
3.1	Stochastický kalkulus . . . . .	5
3.2	Úrokové miery . . . . .	7
3.3	Základné deriváty úrokovej miery . . . . .	10
3.3.1	Cap a floor . . . . .	10
3.4	Zmena numérairesu . . . . .	14
<b>4</b>	<b>HJM model</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>LIBOR model</b>	<b>21</b>
5.1	Značenie . . . . .	21
5.2	Odvođenje dynamiky . . . . .	23
5.3	Odvođenje Blackovej formule . . . . .	31
5.4	Ilustrácie . . . . .	34
5.4.1	Caplet . . . . .	35
5.4.2	Cap . . . . .	36
5.4.3	Ázijský caplet . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Kalibrácia</b>	<b>40</b>
6.1	Volatility . . . . .	40
6.2	Korelácie . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Záver</b>	<b>58</b>



# 1 Úvod

V starších modeloch úrokovej miery sa pozornosť sústreďovala na spojito úročené okamžité úrokové miery. K nim sa podľa potreby skonštruovali okamžité forwardové miery a celý súbor diskontných faktorov. Následne sa skúmané deriváty ocenili použitím rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti, pričom ako numéraire sa uvažoval spojite úročný peňažný dlhopis.

Avšak na skutočnom trhu sú miery spojené s derivátmi úrokovej miery, medzi nimi predovšetkým s LIBOR a swap derivátmi, uvádzané pre periódy dĺžky zvyčajne tri alebo šesť mesiacov a úročené sú spravidla diskkrétne, nie spojite.

Modelovať vývoj týchto priamo pozorovateľných veličín namiesto rôznych okamžitých úrokových mier by bolo omnoho pohodlnejšie. Prínajmenšom ich aktuálna hodnota je vždy presne daná trhom, nemusí sa nijakým spôsobom dopočítavať podľa príslušného modelu.

Dôvod, prečo sa však vývoj vydal práve smerom k LIBOR modelom, je trhová prax oceňovania capov a (európskych) swapcií a potreba konzistentne s nimi oceňovať exotické deriváty.

V priebehu rokov sa trh derivátov úrokovej miery stal najväčším trhom derivátov na svete, pričom najväčšiu časť tohto trhu predstavujú capy a swapcie, ktoré sa sami osebe kvôli svojej likvidite prakticky stali podkladovými aktívami.

Obchodníci ich desiatky rokov oceňovali Blackovou formulou (veľmi podobnou Black-Scholesovej formule pre opcie), hoci predpoklady Black-76 modelu, z ktorého vychádza, splnené neboli. Tento model stojí na predpoklade lognormality pre LIBOR a swapové miery. Úrokové miery pre seba nasledujúce časové intervaly však nemôžu, ako zdôrazňovali akademici, byť všetky lognormálne rozdelené pri tej istej pravdepodobnostnej miere. Ako ale ukáže LIBOR model, môžu byť lognormálne rozdelené každá pri vlastnej forwardo-

vej pravdepodobnostnej miere, čím istým spôsobom ospravedlnil dovtedajšiu prax oceňovania capov a swapcií.

Každopádne, nedbajúc na teoretické výhrady, prax oceňovania pomocou modelu Black-76 sa ujala a capy a swapcie sú na trhu uvádzané prostredníctvom volatilití implikovaných práve týmto modelom.

Požadovaná konzistencia LIBOR modelu teda predstavuje jeho vlastnosť, vďaka ktorej môžu obchodníci oceňovať exotickéjšie typy derivátov modelom, ktorý je v súlade s trhom uvádzanými cenami likvidných capov a swapcií. K dispozícii máme dve varianty LIBOR modelu, jeden kompatibilný s cenami capov (LFM), druhý kompatibilný s cenami swapcií (LSM), pričom tieto dva modely nie sú navzájom konzistentné, a teda podľa typu derivátu, ktorý chceme ohodnotiť, musíme sa rozhodnúť, ktorý z týchto modelov bude vhodnejší.

## 2 Ciele práce

V našej práci sa budeme zaoberať výlučne s cenami capov kompatibilným LFM modelom, v literatúre tiež označovanom ako BGM model podľa Bracea, Gatareka a Musielu, ktorí model odvodili vo svojej práci [1]. Keďže nemôže dôjsť k zámene s LSM modelom, budeme o skúmanom LFM modeli písať ako o LIBOR modeli.

V kapitole 3 zavedieme najdôležitejšie pojmy, ktoré budeme používať a ozrejmime spôsob, ako možno od pravdepodobnostnej miery viazanej k istému numéraireu prejsť k inej pravdepodobnostnej miere spojenjej s iným numéraireom. Technika zmeny numéraireu bude veľmi užitočná pri odvádzaní LIBOR modelu a posluží nám k tomu, aby sme pre každú LIBOR mieru získali jej už v úvode spomínanú vlastnú forwardovú pravdepodobnostnú mieru, pri ktorej je lognormálne rozdelená.

Keďže pri odvádzaní LIBOR modelu budeme vychádzať z HJM modelu, venujeme tomuto modelu kapitolu 4, pri čom budeme používať predovšetkým [12].

V kapitole 5 detailne odvodíme LIBOR model, tak ako je jeho odvedenie načrtnuté v [1]. Tiež uvedieme niekoľko ilustrácií použitia tohto modelu, aplikujeme ho na ohodnotenie troch jednoduchých derivátov.

Následne sa pokúsime LIBOR model kalibrovať na trhové ceny capov. Toto bude obsahom kapitoly 6. V [2] je uvedených niekoľko možností, ako to možno spraviť. Nie všetky však budeme môcť realizovať úplne, pri mnohých z nich je ešte potrebné previesť kalibráciu na ceny swapcií, čo ale v tejto práci robiť nebudeme.

Na záver sa ešte zmienime o koreláciách, ktoré sú dôležitou časťou LIBOR modelu.

### 3 Definície a základné poznatky

V tejto časti uvedieme základné definície a vzťahy, ktoré budeme používať v celom nasledujúcom texte. Väčšinou sa budeme držať značenia použitého v [2].

#### 3.1 Stochastický kalkulus

Pojmy, s ktorými budeme v práci často narábať, sú predovšetkým Brownov pohyb a martingal. Uvedieme ich definície, a tiež definíciu Itôvho procesu, ako ich možno nájsť v knihe [10].

**Definícia 1 (Brownov pohyb)** *Brownov pohyb je stochastický proces s nasledujúcimi vlastnosťami:*

1. s pravdepodobnosťou 1 sú trajektórie  $W_t(\omega)$  spojité a platí  $W_0 = 0$
2. náhodná premenná  $W_t$  má normálne rozdelenie  $N(0, t)$
3.  $W_{t+s} - W_s$  má  $N(0, t)$  rozdelenie. Ďalej platí, že  $W_t$  má nezávislé prírastky, t.j.  $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$  sú nezávislé pre všetky  $0 \leq t_1 < \dots < t_k$ .

**Definícia 2 (Martingal)** *Stochastický proces  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sa nazýva martingal vzhľadom k filtrácii  $\{\mathcal{M}_t\}_{t \geq 0}$  (a miere  $P$ ), ak*

1. náhodná premenná  $M_t$  je  $\mathcal{M}_t$ -merateľná pre všetky  $t \geq 0$
2.  $E[|M_t|] < \infty$  pre všetky  $t \geq 0$
3.  $E[M_s | \mathcal{M}_t] = M_t$  pre všetky  $s \geq t$ .

**Definícia 3 (Itōv proces)** *Nech  $W_t(\omega)$  je Brownov pohyb na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Jednorozmerný Itōv proces je stochastický proces tvaru*

$$X_t(\omega) = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dW_s(\omega),$$

*tiež možno písať*

$$dX_t(\omega) = u(t, \omega) dt + v(t, \omega) dW_t(\omega),$$

*kde  $u, v$  sú funkcie integrovateľné v zmysle Itōvho integrálu a*

$$P \left( \int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty \forall t \geq 0 \right) = 1.$$

Veľmi často budeme v práci potrebovať rozhodnúť, kedy je daný Itōv proces martingalom. Na to nám poslúži nasledovné tvrdenie.

**Tvrdenie 1** *Itōv proces  $X_t$ ,*

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

*kde  $W_t$  je Brownov pohyb vzhľadom k miere  $P$ , je martingalom vzhľadom k miere  $P$  práve vtedy, keď  $\mu_t = 0$  pre všetky  $t$  a platí technická podmienka*

$$E \left[ \left( \int_0^T \sigma_s^2 ds \right)^{1/2} \right] < \infty,$$

*ktorá nám zaručuje, že  $E[X_t]$  je konečná.*

Dôležitým nástrojom pre nás bude Itōva lema, ktorú budeme používať v podobe, v akej ju možno nájsť v [6]. Uvádzame jej viacrozmernú verziu.

**Tvrdenie 2 (Itōva lema)** *Nech  $X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{mt}$  sú Itōve procesy*

$$dX_{1t} = \mu_{1t} dt + \sigma_{1t} dW_{1t}$$

$$dX_{2t} = \mu_{2t} dt + \sigma_{2t} dW_{2t}$$

$$dX_{mt} = \mu_{mt} dt + \sigma_{mt} dW_{mt},$$

kde  $W_{1t}, W_{2t}, \dots, W_{mt}$  sú Brownove pohyby, pričom koreláciu medzi  $dW_{it}$  a  $dW_{jt}$  značíme ako  $\rho_{ij}$ .

Pre diferencovateľnú funkciu  $f$  potom platí

$$df(X_t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial X_{it}} dX_{it} + \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial X_{it} \partial X_{jt}} Cov_t(dX_{it}, dX_{jt}),$$

kde

$$Cov_t(dX_i, dX_j) = \sigma_{it}\sigma_{jt}\rho_{ijt}dt.$$

## 3.2 Úrokové miery

Rozlišujeme niekoľko typov úrokových mier, predovšetkým ich však možno rozdeliť na medzibankové a vládne miery. Vládne sa odvodzujú od dlhopisov vypisovaných vládami, medzibankové sú mierami, pri ktorých sa vymieňajú depozity medzi bankami a pri ktorých sa uskutočňujú swapové transakcie medzi bankami. My sa budeme zaoberať výlučne medzibankovými mierami, z ktorých za najdôležitejšiu je považovaná LIBOR (London InterBank Offered Rate) miera, ktorá je fixovaná každý deň v Londýne. Termín "LIBOR" však budeme používať ako generický pojem, môže teda predstavovať akúkoľvek inú analogickú medzibankovú mieru (napr. EURIBOR).

**Definícia 4 (Peňažný dlhopis)**  $B(t)$  definujeme ako hodnotu peňažného dlhopisu v čase  $t \geq 0$ . Predpokladajme, že  $B(0) = 1$  a že peňažný dlhopis sa vyvíja podľa diferenciálnej rovnice

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \tag{1}$$

kde  $r(t)$  je kladnou funkciou času (a predstavuje okamžitú úrokovú mieru). Zrejme platí, že

$$B(t) = \exp \left\{ \int_0^t r(s)ds \right\}.$$

**Definícia 5 (Stochastický diskontný faktor)** *(Stochastický) diskontný faktor*  $D(t, T)$  medzi dvomi časovými okamihmi  $t$  a  $T$  je suma v čase  $t$ , ktorá je ekvivalentná jednotke meny splatnej v čase  $T$  a je daný vzťahom

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp \left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\}.$$

**Definícia 6 (Bezakupónový dlhopis)** *Bezakupónový dlhopis s maturitou v čase  $T$  je kontrakt, ktorý jeho držiteľovi garantuje jednotku meny v čase  $T$ . Hodnota kontraktu v čase  $t < T$  sa značí ako  $P(t, T)$ . Zrejme  $P(T, T) = 1$  pre všetky  $T$ .*

Ak je miera  $r$  deterministická, sú tiež  $D(t, T)$  a  $P(t, T)$  deterministické a  $P(t, T) = D(t, T)$ . Ak je však  $r$  stochastická (a takú ju budeme uvažovať v tejto práci),  $D(t, T)$  je náhodná premenná, ktorej hodnota v čase závisí od vývoja  $r$  od  $t$  do  $T$ , nie je teda v čase  $t$  známa. Naproti tomu cena dlhopisu musí byť v čase  $t$  známa. Pri rizikovo neutrálnej miere možno  $P(t, T)$  chápať ako očakávanú hodnotu  $D(t, T)$ . Presnejšie, ak pri tejto pravdepodobnostnej miere diskontovaný dlhopis  $P(t, T)$  je martingalom, t.j. ak

$$\frac{P(t, T)}{B(t)} = E^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{P(T, T)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

tak potom

$$\begin{aligned} P(t, T) &= E^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{B(t)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{\mathbb{Q}} [D(t, T) | \mathcal{F}_t]. \end{aligned} \tag{2}$$

Dobu medzi dvoma dátumami  $S$  a  $U$  budeme označovať symbolom  $\tau(S, U)$  a vždy ju budeme vyjadrovať v rokoch. Keď zavedieme časovú štruktúru  $\{T_i\}_{0 \leq i \leq M}$ , budeme kvôli prehľadnosti písať  $\tau_i := \tau(T_{i-1}, T_i)$ , pričom dodefinujeme  $\tau_0 := \tau(t, T_0)$ . Často tiež budeme používať  $\tau_i = \delta$  pre všetky  $i = 1, \dots, M$ .

**Definícia 7 (Spojitá spotová úroková miera)** *Spojitú spotovú úrokovú mieru platnú v čase  $t$  s maturitou  $T$  budeme označovať ako  $R(t, T)$ . Je to konštantná miera pri ktorej investovaním  $P(t, T)$  jednotiek meny v čase  $t$  dosiahneme jednu jednotku meny v čase  $T$ , t.j.*

$$R(t, T) := -\frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)}.$$

**Definícia 8 (Diskrétna spotová úroková miera)** *Diskrétnu spotovú úrokovú mieru platnú v čase  $t$  s maturitou  $T$  budeme označovať ako  $L(t, T)$ . Je diskrétnou obdovou spojitej spotovej úrokovej miery a definujeme ju ako*

$$L(t, T) := \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)}.$$

Mieru  $L(t, T)$  budeme tiež nazývať LIBOR mierou.

**Definícia 9 (Diskrétna forwardová úroková miera)** *Diskrétnu forwardovú úrokovú mieru platnú v čase  $t$  s expiráciou v čase  $T > t$  a maturitou v čase  $S > T$ , t.j. pokrývajúcu obdobie  $[T, S]$ , budeme označovať ako  $F(t, T, S)$  a definujeme ju ako*

$$F(t, T, S) := \frac{1}{\tau(T, S)} \left( \frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right).$$

Pri daných časoch  $\{T_i\}_{0 \leq i \leq M}$  budeme používať značenie  $F_i(t) := F(t, T_{i-1}, T_i)$ . Pre túto mieru budeme používať aj pojem forwardová LIBOR miera.

Zo samotnej definície vyplýva, že

$$F(T, T, S) = L(T, S)$$

a v časti 3.4 ukážeme, že  $F(t, T, S)$  predstavuje odhad miery  $L(T, S)$  v čase  $t$ .



**Definícia 10 (Okamžitá forwardová úroková miera)** *Okamžitá forwardová úroková miera platná v čase  $t$  pre maturitu  $T > t$  sa označuje ako  $f(t, T)$  a je definovaná ako*

$$f(t, T) := \lim_{S \rightarrow T^+} F(t; T, S) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T},$$

z čoho

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, u) du \right\}.$$

### 3.3 Základné deriváty úrokovej miery

#### 3.3.1 Cap a floor

Cap je kontrakt, pri ktorom môže kupujúci v stanovených termínoch požadovať od predávajúceho rozdiel medzi trhovou úrokovou mierou a realizačnou cenou tohto kontraktu  $\kappa$ .

Diskontovaný payoff capu s maturitou v čase  $T_\beta$ , budeme ho označovať ako  $T_\beta$ -cap, je daný vzťahom

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau(T_{i-1}, T_i) (L(T_{i-1}, T_i) - \kappa)^+. \quad (3)$$

Jednotlivé členy tejto sumy predstavujú caplety s maturitou v časoch  $T_{\alpha+1}$ ,  $T_{\alpha+2}$  až  $T_\beta$ , tieto budeme označovať ako  $T_\alpha$ -caplet,  $T_{\alpha+1}$ -caplet až  $T_{\beta-1}$ -caplet.

Analogicky možno pomocou jeho payoffu definovať floor

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau(T_{i-1}, T_i) (\kappa - L(T_{i-1}, T_i))^+ \quad (4)$$

zložený z jednotlivých floorletov.

Pre objasnenie pojmu cap uvažujme spoločnosť, ktorá má dlh, z ktorého úroky musí splácať v určitých časoch  $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$  a ktoré sú viazané na LIBOR miery nastavené v časoch  $T_\alpha, \dots, T_{\beta-1}$ , pričom pre jednoduchosť

uvažujme  $\tau(0, T_\alpha) = \tau(T_\alpha, T_{\alpha+1}) = \dots = \tau(T_{\beta-1}, T_\beta) = \delta$  a objem tohto kontraktu  $N = 1$ .

Spoločnosť sa obáva nárastu LIBOR mier, čím by, samozrejme, narástli aj výšky jej splátok, a chce sa poistiť voči nárastu nad istú hranicu. Práve toto jej umožní cap - preto jeho názov (strop). Úroky, ktoré bude musieť spoločnosť splácať, budú vždy

$$L - (L - \kappa)^+ = \min(L, \kappa),$$

teda nanajvyš  $\kappa$ .

Teraz uvedieme, ako sú capy ohodnocované na trhu.

**Blackova formula pre cap** Uvažujme  $T_n$ -cap, t.j. cap, pri ktorom k platbám dochádza v časoch  $T_1, T_2, \dots, T_n$  a tieto sú viazané k hodnotám úrokových mier nastavených v časoch  $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$ . Keďže, ako sme už videli, cap tvorí súčet capletov, v tomto prípade  $T_j$ -capletov pre  $j = 1, 2, \dots, n-1$ , cenu capu možno zrátať ako súčet cien capletov. Najprv teda odvodíme cenu ľubovoľného  $T_j$ -capletu.

Trhovou praxou je, ako to uvádzajú napríklad v [12], predpokladať, že forwardová LIBOR miera  $F_j(t) = F(t, T_{j-1}, T_j)$  platná pre časový interval  $[T_{j-1}, T_j]$  dĺžky  $\delta$  a predstavujúca odhad pre LIBOR mieru  $L(T_{j-1}, T_j)$  viazanú k uvažovanému  $T_{j-1}$ -capletu, sa pri istej trhovej miere, označme ju  $\mathbb{Q}$ , riadi rovnicou

$$dF_j(t) = F_j(t)v_j dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad (5)$$

kde  $W^{\mathbb{Q}}$  predstavuje Brownov pohyb vzhľadom k miere  $\mathbb{Q}$ , pričom  $\mathbb{Q}$  nie je nijako bližšie špecifikovaná, a  $v_j$  je kladnou konštantou.

Pre trhovú cenu uvažovaného capletu v čase  $t$ , označme ju  $Cpl_{T_{j-1}}(t)$ , prirodzene platí

$$Cpl_{T_{j-1}}(t) = \delta P(t, T_j) E^{\mathbb{Q}}[(F_j(T_{j-1}) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t].$$

Označme

$$M_t = E^{\mathbb{Q}}[(F_j(T_{j-1}) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t]. \quad (6)$$

Zrejme  $M_t$  je martingal vzhľadom k miere  $\mathbb{Q}$ , a preto musí platiť

$$E^{\mathbb{Q}}[dM_t] = 0. \quad (7)$$

Tiež predpokladáme, že

$$M_t = M(F_j, t). \quad (8)$$

Použitím Itôvej lemy dostávame zo vťahu (8)

$$\begin{aligned} dM_t &= \frac{\partial M}{\partial F_j} dF_j + \frac{\partial M}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial F_j^2} \text{Var}(dF_j) \\ &= \left( \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial F_j^2} F_j^2 v_j^2 \right) dt + \frac{\partial M}{\partial F_j} F_j v_j dW_t^{\mathbb{Q}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Spojením (6), (7) a (9) dostávame, že  $M_t$  musí byť riešením nasledovnej parciálnej diferenciálnej rovnice s koncovou podmienkou

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial F_j^2} F_j^2 v_j^2 &= 0, & F_j > 0, t \in [0, T_{j-1}] \\ V(F_j, T_{j-1}) &= (F_j - \kappa)^+, & F_j > 0 \end{aligned}}$$

Takúto parciálnu diferenciálnu rovnicu môžeme riešiť postupom, ktorý je uvedený napríklad v [7].

Dostávame riešenie

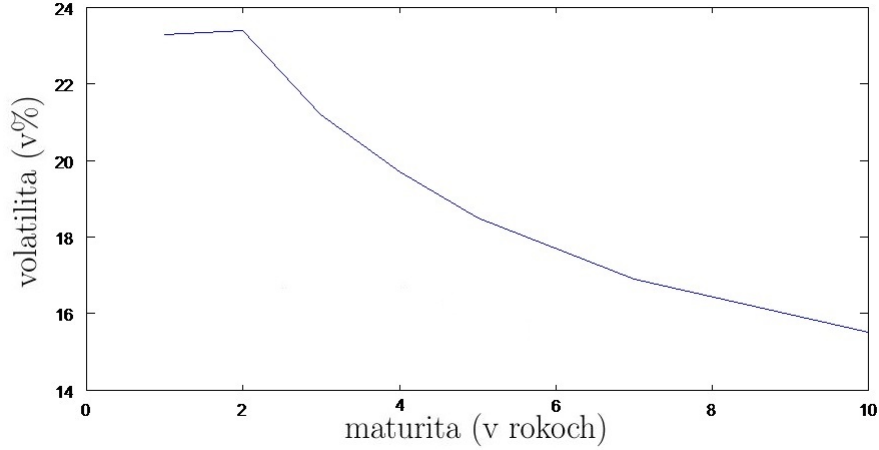
$$M(F_j, t) = F_j \phi(d_1) - \kappa \phi(d_2),$$

kde

$$d_{1,2} = \frac{\log \frac{F_j}{\kappa} \pm \frac{1}{2} v_j^2 (T_{j-1} - t)}{v_j \sqrt{T_{j-1} - t}}.$$

Následne pre cenu capletu platí

$$Cpl_{T_{j-1}}(t) = \delta P(t, T_j) (F_j(t) \phi(d_1) - \kappa \phi(d_2)) \quad (10)$$



Obr. 1: Krivka at-the-money Euro cap volatilit z dňa 12. augusta 2002

a pre celý cap

$$Cap_{T_n}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} Cpl_{T_{j-1}}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} \delta P(t, T_j)(F_j(t)\phi(d_1) - \kappa\phi(d_2)). \quad (11)$$

Vidíme, že pre každý caplet prislúcha jedna volatilita  $v_j$ . Na trhu je však uvedená iba priemerná volatilita pre cap, z ktorej potom možno získať volatilitu capletov.

Trhovou praxou je tiež, že capy (resp. ich implikované volatility) sú uvádzané s  $\alpha = 0$  a buď  $T_0$  rovná sa trom mesiacom a všetky ostatné  $T_i$  sú rovnako trojmesačne rozmiestnené alebo  $T_0$  rovné trom mesiacom,  $T_i$  do jedného roku rozmiestnené trojmesačne a všetky vyššie šesťmesačne.

Na obrázku 1 uvádzame príklad štruktúry cap volatilit, kde na vodorovnej osi sú  $T_\beta$  v rokoch ( $T_\alpha$  je fixné a rovné trom mesiacom), na zvislej volatility  $T_\beta$ -capu  $v_{T_\beta\text{-cap}}$ .

Pre pochopenie trhových ukazovateľov capov je dôležitá nasledujúca definícia.

**Definícia 11** Uvažujme cap s výplatami v časoch  $T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta}$  s prislúchajúcimi intervalmi  $\tau_{\alpha+1}, \dots, \tau_{\beta}$  a strikeom  $\kappa$ . Cap je v pozícii at-the-money (ATM) práve vtedy, keď

$$\kappa = \kappa_{ATM} := S_{\alpha, \beta}(0) = \frac{P(0, T_{\alpha}) - P(0, T_{\beta})}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i)}.$$

V pozícii in-the-money (ITM) je, keď  $\kappa < \kappa_{ATM}$  a out-of-the-money (OTM), keď  $\kappa > \kappa_{ATM}$ .

Pre floory platí definícia obrátene.

### 3.4 Zmena numérairesu

V tejto časti sa pokúsime priblížiť techniku zmeny numérairesu, ktorá nám bude veľmi užitočná pri odvodzovaní LIBOR modelu. Ako sme spomenuli už v úvode, forwardové LIBOR miery nie je možné modelovať ako lognormálne rozdelené pri klasickej rizikovo neutrálnej miere spojennej s peňažným dlhopisom, bude nutné prejsť k dlhopisom v úlohe numérairesu.

Uvažujme isté aktívum, ktorého vývoj opisuje rovnica

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t),$$

a pripomeňme si rovnicu (1) opisujúcu vývoj peňažného dlhopisu

$$dB(t) = r(t)B(t)dt.$$

Uvažujme samofinancovanú stratégiu  $(\phi, \psi)$ . Prislúchajúci hodnotový proces je

$$X(t) = \phi_t B(t) + \psi_t S(t)$$

a

$$\begin{aligned}
dX(t) &= \phi_t dB(t) + \psi_t dS(t) \\
&= r(t)(X(t) - \psi_t S(t))dt + \psi_t dS(t) \\
&= r(t)(X(t) - \psi_t S(t))dt + \psi_t(\mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t)) \\
&= r(t)X(t)dt + S(t)\psi_t\sigma(t) \left( \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma(t)}dt + dW(t) \right).
\end{aligned}$$

Ak určíme  $W^{\mathbb{Q}}(t)$ , pre ktoré platí

$$dW^{\mathbb{Q}}(t) = \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma(t)}dt + dW(t)$$

ako Brownov pohyb vzhľadom k pravdepodobnostnej miere  $\mathbb{Q}$ , tak dostávame

$$dX(t) = r(t)X(t)dt + S(t)\psi_t\sigma(t)dW^{\mathbb{Q}}(t)$$

Pomocou Itôvej lemy môžeme zrátať

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{X(t)}{B(t)}\right) &= \frac{1}{B(t)}dX(t) + \left(-\frac{X(t)}{B^2(t)}\right)dB(t) \\
&= \frac{r(t)X(t)}{B(t)}dt + \frac{S(t)}{B(t)}\psi_t\sigma(t)dW^{\mathbb{Q}}(t) - \frac{X(t)r(t)}{B(t)}dt \\
&= \frac{S(t)}{B(t)}\psi_t\sigma(t)dW^{\mathbb{Q}}(t).
\end{aligned}$$

Vidíme, že diskontovaný hodnotový proces je martingalom vzhľadom k pravdepodobnostnej miere  $\mathbb{Q}$ . Z toho vyplýva, že pre lubovoľnú samofinancovateľnou stratégiou dosiahnuteľnú výplatu  $H$  predstavujúcu hodnotu derivátu v čase vypršania  $T$  platí

$$\frac{\pi_t}{B(t)} = E^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{H(T)}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right] \quad (12)$$

$$\pi_t = E^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{B(t)}{B(T)} H(T) | \mathcal{F}_t \right]$$

$$\pi_t = E^{\mathbb{Q}} [D(t, T)H(T) | \mathcal{F}_t], \quad (13)$$

kde  $\pi_t$  je hodnota  $H$  v čase  $t$ .

V prípade deterministických úrokových mier je  $D(t, T)$  rovné  $P(t, T)$ , ktorého hodnotu poznáme v čase  $t$ , a teda

$$\pi_t = P(t, T)E^{\mathbb{Q}} [H(T)|\mathcal{F}_t],$$

čo nie je komplikované vyriešiť. Tak je tomu napr. v prípade oceňovania opcií, pri ktorých sa predpokladá, že variabilita úrokovej miery má podstatne menší vplyv na hodnotu opcie ako podkladové aktívum. Avšak pri derivátoch úrokovej miery je, pochopiteľne, dôležité modelovať vývoj práve úrokových mier a teda musíme uvažovať stochastické úrokové miery, kedy už  $D(t, T) \neq P(t, T)$ . V takejto situácii nám môže byť veľmi nápomocná zmena numérairesu.

**Definícia 12** *Numéraire je ľubovoľné kladné aktívum, ktoré nevypláca dividendy.*

V predchádzajúcom príklade plnil úlohu numérairesu peňažný dlhopis. Ďalej nás bude zaujímať, ako môžeme prejsť k inému. Nasledovná veta pochádza z [2].

**Tvrdenie 3** *Predpokladajme, že existuje numéraire  $N$  a pravdepodobnostná miera  $\mathbb{Q}^N$  ekvivalentná s nejakou pôvodnou mierou  $\mathbb{Q}_0$  taká, že relatívna cena obchodovaného aktíva  $X$  v pomere k  $N$  je martingal vzhľadom k pravdepodobnostnej miere  $\mathbb{Q}^N$ ,*

$$\frac{X_t}{N_t} = E^{\mathbb{Q}^N} \left[ \frac{X_T}{N_T} | \mathcal{F}_t \right] \quad 0 \leq t \leq T.$$

*Nech  $U$  je ľubovoľný numéraire. Potom existuje pravdepodobnostná miera  $\mathbb{Q}^U$  ekvivalentná s  $\mathbb{Q}_0$  taká, že relatívna cena ľubovoľnej dosiahnuteľnej hodnoty v čase expirácie,  $Y$ , v pomere k  $U$  je martingal vzhľadom k pravdepodobnostnej miere  $\mathbb{Q}^U$ , t.j.*

$$\frac{Y_t}{U_t} = E^{\mathbb{Q}^U} \left[ \frac{Y_T}{U_T} | \mathcal{F}_t \right] \quad 0 \leq t \leq T.$$

Navyše, Radon-Nikodýmova derivácia definujúca mieru  $\mathbb{Q}^U$  je daná vzťahom

$$\frac{d\mathbb{Q}^U}{d\mathbb{Q}^N} = \frac{U_T N_0}{U_0 N_T}.$$

Pre ozrejenie aplikujeme tvrdenie 3 na konkrétny príklad, pri ktorom nám pôjde o forwardovú LIBOR mieru  $F(t, T_1, T_2)$ .

Uvažujme dlhopis  $P(t, T)$  a rizikovo neutrálnu mieru  $\mathbb{Q}$  spojenú s numéraireom  $B(t)$  ekvivalentnú s istou pôvodnou pravdepodobnostnou mierou  $\mathbb{P}$ .

Keďže  $P(t, T)$  je obchodovaným aktívom, z (12) vieme, že

$$\frac{P(t, T)}{B(t)} = E^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{P(T, T)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Nech novým numéraireom je  $P(t, T_2)$ . Tvrdenie 3 nám potom zaručuje, že existuje pravdepodobnostná miera  $\mathbb{Q}^{T_2}$  ekvivalentná s  $\mathbb{P}$  taká, že

$$\begin{aligned} F_2(t) &= \frac{1}{T_2 - T_1} \frac{P(t, T_1) - P(t, T_2)}{P(t, T_2)} = E^{\mathbb{Q}^{T_2}} \left[ \frac{1}{T_2 - T_1} \frac{P(T_1, T_1) - P(T_1, T_2)}{P(T_1, T_2)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{\mathbb{Q}^{T_2}} \left[ \frac{1}{T_2 - T_1} \frac{1 - P(T_1, T_2)}{P(T_1, T_2)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{\mathbb{Q}^{T_2}} [L(T_1, T_2) | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Na tomto príklade tiež vidíme, čo sme už neformálne uviedli pri definícii 9, totiž že forwardovú LIBOR mieru možno chápať ako odhad budúcej LIBOR miery.



## 4 HJM model

Heath-Jarrow-Morton (HJM) model nám poskytuje stochastické diferenciálne rovnice pre vývoj forwardových mier  $f(t, T)$ . Pri jeho odvodení budeme postupovať podľa [5]. Niekedy je samotný LIBOR model označovaný jednoducho ako HJM model [13].

Rovnice opisujúce vývoj forwardovej miery  $f(t, T)$  a vývoj dlhopisu  $P(t, T)$  nám poslúžia v nasledovnej kapitole pri odvodzovaní LIBOR modelu.

Predpokladajme, že dynamika okamžitej forwardovej úrokovej miery je daná nasledovne:

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \gamma(t, T)dW(t), \quad (14)$$

v integrálnej forme

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(u, T)du + \int_0^t \gamma(u, T)dW(u). \quad (15)$$

Pozrime sa na vzťah pre výpočet hodnôt diskontných dlhopisov z definície 10.

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, u)du \right\}.$$

Naším cieľom je odvodiť rovnicu opisujúcu dynamiku diskontného dlhopisu. Najprv zrátajme

$$\begin{aligned} d \left( - \int_t^T f(t, u)du \right) &= f(t, t)dt - \int_t^T (df(t, u))du \\ &= r(t)dt - \int_t^T [\alpha(t, u)dt + \gamma(t, u)dW(t)] du \\ &= r(t)dt - \alpha^*(t, T)dt - \gamma^*(t, T)dW(t), \end{aligned} \quad (16)$$

kde

$$\begin{aligned}\alpha^*(t, T) &= \int_t^T \alpha(t, u) du \\ \gamma^*(t, T) &= \int_t^T \gamma(t, u) du.\end{aligned}$$

Teraz jednoduchým použitím Itôvej lemy dostávame, že

$$\begin{aligned}dP(t, T) &= \exp \left\{ - \int_t^T f(t, u) du \right\} [r(t)dt - \alpha^*(t, T)dt - \gamma^*(t, T)dW(t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \exp \left\{ - \int_t^T f(t, u) du \right\} \gamma^*(t, T)^2 dt \\ &= P(t, T) \left[ \left( r(t) - \alpha^*(t, T) + \frac{1}{2} \gamma^*(t, T)^2 \right) dt - \gamma^*(t, T) dW(t) \right].\end{aligned}\tag{17}$$

Ak položíme

$$\alpha^*(t, T) = \frac{1}{2} \gamma^*(t, T)^2,\tag{18}$$

bude platiť, že

$$E \left[ \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} \right] = r(t)dt,$$

t.j. pôvodná miera (označme ju  $\mathbb{P}$ ) bude rizikovo neutrálnou pravdepodobnostnou mierou.

V zmysle definícií  $\alpha^*$  a  $\sigma^*$  možno (18) prepísať ako

$$\int_0^T \alpha(t, u) du = \frac{1}{2} \left( \int_t^T \gamma(t, u) du \right)^2,$$

čo je napokon ekvivalentné s

$$\alpha(t, T) = \gamma(t, T) \int_t^T \gamma(t, u) du.\tag{19}$$

Po dosadení predchádzajúceho vzťahu (19) do (14) a dosadení (18) do (17) dostávame vzťahy pre  $f(t, T)$  a  $P(t, T)$ ,

$$df(t, T) = \sigma(t, T)\gamma^*(t, T)dt + \gamma(t, T)dW(t). \quad (20)$$

a

$$dP(t, T) = P(t, T) [r(t)dt - \gamma^*(t, T)dW(t)]. \quad (21)$$

## 5 LIBOR model

V tejto kapitole odvodíme LIBOR model vychádzajúc z predchádzajúceho HJM modelu.

Najprv zrátame, čomu sa rovná  $dF(t, T, T + \delta)$ . Ukáže sa, že pri uvažovanej pravdepodobnostnej miere má  $F(t, T, T + \delta)$  nenulový drift, a teda nemôže byť martingalom. Tu využijeme techniku zmeny numéraireu a ukážeme, že ak v úlohe numéraireu vymeníme peňažný dlhopis  $B(t)$  za dlhopis  $P(t, T + \delta)$ , bude forwardová LIBOR miera  $F(t, T, T + \delta)$  pri novej pravdepodobnostnej miere martingalom.

Následne získanú dynamiku forwardovej LIBOR miery zasadíme do časovej štruktúry a získame tak rovnice pre  $F_i(t) = F(t, T_{i-1}, T_i)$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Avšak tieto rovnice opisujú vývoj každej miery  $F_i(t)$  iba pri jej vlastnej forwardovej pravdepodobnostnej miere  $\mathbb{Q}^{T_i}$ . V poslednom kroku odvodíme dynamiku  $F_i(t)$  pri ľubolnej pravdepodobnostnej miere  $\mathbb{Q}^{T_k}$ ,  $k \neq i$ .

Na záver kapitoly odvodíme Blackovu formulu pre capy vychádzajúc z LIBOR modelu, čo predstavuje potvrdenie správnosti používania modelu Black 76 pre capy a uvedieme tiež niekoľko ilustrácií použitia LIBOR modelu.

### 5.1 Značenie

Pri odvádzaní modelu použijeme trochu pozmenené značenie - ako je tomu v [1].

Forwardové miery:

$$\begin{aligned}
g(t, x) &= f(t, t + x) \\
g(t, 0) &= f(t, t) = r(t) \\
\frac{\partial}{\partial x} g(t, x) &= \frac{\partial}{\partial T} f(t, t + x) \\
K(t, x) &= F(t, t + x, t + x + \delta)
\end{aligned}$$

Ceny dlhopisov:

$$\begin{aligned}
P(t, T) &= \exp \left\{ - \int_0^{T-t} g(t, u) du \right\} = \exp \left\{ \int_t^T f(t, u) du \right\} \\
U(t, x) &= P(t, t + x) = \exp \left\{ - \int_0^x g(t, u) du \right\} \\
\frac{\partial}{\partial x} U(t, x) &= \frac{\partial}{\partial T} P(t, t + x) = -g(t, x)U(t, x)
\end{aligned}$$

A tiež zavedieme

$$\begin{aligned}
\lambda(t, x) &= \gamma(t, t + x) \\
\lambda^*(t, x) &= \int_0^x \lambda(t, u) du,
\end{aligned}$$

vďaka čomu dostávame rovnice (20) a (21) pre HJM model v pozmenenej forme

$$df(t, t + x) = \lambda(t, x)\lambda^*(t, x)dt + \lambda(t, x)dW(t) \quad (22)$$

a

$$dP(t, t + x) = P(t, x)[r(t)dt - \lambda^*(t, x)dW(t)]. \quad (23)$$

## 5.2 Odvodenie dynamiky

V rovnakom duchu ako formuláciu HJM modelu (22) a (23) odvodíme dynamiku pre  $g(t, x)$  a  $U(t, x)$ .

$$\begin{aligned}
 dg(t, x) &= df(t, t+x) + \frac{\partial}{\partial T} f(t, t+x) dt \\
 &= \lambda(t, x) \lambda^*(t, x) dt + \lambda(t, x) dW(t) + \frac{\partial}{\partial x} g(t, x) dt \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ g(t, x) + \frac{1}{2} (\lambda^*(t, x))^2 \right] dt + \lambda(t, x) dW(t). \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dU(t, \tau) &= dP(t, t+x) + \frac{\partial}{\partial T} P(t, t+x) dt \\
 &= r(t)P(t, t+x) dt - \lambda^*(t, x)P(t, t+x) dW(t) - g(t, x)U(t, x) dt \\
 &= [g(t, 0) - g(t, x)] U(t, x) dt - \lambda^*(t, x)U(t, x) dW(t). \quad (25)
 \end{aligned}$$

Pred tým, ako pristúpime k odvodeniu vzťahu pre  $dK(t, x)$ , bude užitočné vopred spočítať

$$\begin{aligned}
 d \left( \int_x^{x+\delta} g(t, u) du \right) &= \int_x^{x+\delta} dg(t, u) du \\
 &= \int_x^{x+\delta} \frac{\partial}{\partial u} \left[ g(t, u) + \frac{1}{2} (\lambda^*(t, u))^2 \right] dt du \\
 &\quad + \int_x^{x+\delta} \lambda(t, u) dW(t) du \\
 &= \int_x^{x+\delta} \frac{\partial}{\partial u} \left[ g(t, u) + \frac{1}{2} (\lambda^*(t, u))^2 \right] du dt \\
 &\quad + \int_x^{x+\delta} \lambda(t, u) du dW(t) \\
 &= \left[ g(t, x+\delta) - g(t, x) + \frac{1}{2} (\lambda^*(t, x+\delta))^2 - \frac{1}{2} (\lambda^*(t, x))^2 \right] dt \\
 &\quad + [\lambda^*(t, x+\delta) - \lambda^*(t, x)] dW(t), \quad (26)
 \end{aligned}$$

z čoho je zrejmé, že

$$\text{Var} \left( d \left( \int_x^{x+\delta} g(t, u) du \right) \right) = (\lambda^*(t, x + \delta) - \lambda^*(t, x))^2 dt.$$

Teraz môžeme pristúpiť k odvodeniu rovnice pre forwardovú mieru  $K(t, x)$ .

Naším cieľom bude odvodiť diferenciálnu rovnicu v tvare

$$dK(t, x) = (\dots)dt + K(t, x)\sigma(t, x)dW(t).$$

$$\begin{aligned} dK(t, x) &= \delta^{-1} d \left( \exp \left\{ \int_x^{x+\delta} g(t, u) du \right\} \right) \\ &= \delta^{-1} \exp \left\{ \int_x^{x+\delta} g(t, u) du \right\} d \left( \int_x^{x+\delta} g(t, u) du \right) \\ &\quad + \delta^{-1} \frac{1}{2} \exp \left\{ \int_x^{x+\delta} g(t, u) du \right\} \text{Var} \left( d \left( \int_x^{x+\delta} g(t, u) du \right) \right) \\ &= \delta^{-1} \exp \left\{ \int_x^{x+\delta} g(t, u) du \right\} \left( \left[ g(t, x + \delta) - g(t, x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\lambda^*(t, x + \delta))^2 - \frac{1}{2} (\lambda^*(t, x))^2 \right] dt \right. \\ &\quad \left. + [\lambda^*(t, x + \delta) - \lambda^*(t, x)] dW(t) \right) \\ &\quad + \delta^{-1} \frac{1}{2} \exp \left\{ \int_x^{x+\delta} g(t, u) du \right\} (\lambda^*(t, x + \delta) - \lambda^*(t, x))^2 dt \\ &= \delta^{-1} (1 + \delta K(t, x)) ([g(t, x + \delta) - g(t, x)] dt \\ &\quad + \lambda^*(t, x + \delta) [\lambda^*(t, x + \delta) - \lambda^*(t, x)] dt \\ &\quad + [\lambda^*(t, x + \delta) - \lambda^*(t, x)] dW(t)) \end{aligned} \tag{27}$$

Keďže

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} K(t, \tau) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\exp \left\{ \int_x^{x+\delta} g(t, u) du \right\} - 1}{\delta} \right] \\
&= \delta^{-1} \exp \left\{ \int_x^{x+\delta} g(t, u) du \right\} [g(t, x + \delta) - g(t, x)] \\
&= \delta^{-1} [1 + \delta K(t, x)] [g(t, x + \delta) - g(t, x)], \tag{28}
\end{aligned}$$

možno písať

$$\begin{aligned}
dK(t, x) &= \frac{\partial}{\partial x} K(t, x) dt \\
&\quad + \delta^{-1} (1 + \delta K(t, x)) [\lambda^*(t, x + \delta) - \lambda^*(t, x)] [\lambda^*(t, x + \delta) dt + dW(t)]. \tag{29}
\end{aligned}$$

Následne vzťah

$$dK(t, x) = (\dots) dt + K(t, x) \sigma(t, x) dW(t),$$

ktorý sme sa snažili dosiahnuť, platí pre všetky  $x \geq 0$  práve vtedy, keď pre všetky  $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
\delta^{-1} (1 + \delta K(t, x)) [\lambda^*(t, x + \delta) - \lambda(t, x)] &= K(t, x) \sigma(t, x) \\
\lambda^*(t, x + \delta) - \lambda^*(t, x) &= \frac{\delta K(t, x)}{1 + \delta K(t, x)} \sigma(t, x).
\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}
dK(t, x) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} K(t, x) + K(t, x) \sigma(t, x) \lambda^*(t, x + \delta) \right) dt \\
&\quad + K(t, x) \sigma(t, x) dW(t) \tag{30}
\end{aligned}$$



Dostali sme stochastickú *parciálnu* diferenciálnu rovnicu. Tento problém sa však jednoducho vyrieši, keď sa vrátíme k pôvodným premenným, t.j.

$$F(t, T, T + \delta) = K(t, T - t).$$

Potom

$$dF(t, T, T + \delta) = dK(t, x) - \frac{\partial}{\partial \tau} K(t, x) dt$$

a

$$dF(t, T, T + \delta) = \sigma(t, T - t)F(t, T, T + \delta)[\lambda^*(t, T + \delta - t)dt + dW(t)] \quad (31)$$

$F(t, T, T + \delta)$  má nenulový drift, mi však potrebujeme, aby miera  $F(t, T, T + \delta)$  bola martingalom. Aby sme to dosiahli, bude nutné zmeniť doterajšiu mieru  $\mathbb{P}$  na nejakú inú. Ukážeme, že ňou bude práve miera  $\mathbb{Q}^{T+\delta}$ , pri ktorej dlhopis  $P(t, T + \delta)$  nahradí v úlohe numéraireu peňažný dlhopis  $B(t)$  spojený s pôvodnou mierou  $\mathbb{P}$ .

Z rovníc (1) a (23) definujúcich dynamiku peňažného dlhopisu a dlhopisu môžeme pomocou Itôvej lemy zrátať

$$\begin{aligned} d\left(\frac{P(t, T + \delta)}{B(t)}\right) &= \frac{1}{B(t)}dP(t, T + \delta) - \frac{P(t, T + \delta)}{B^2(t)}dB(t) \\ &= -\frac{P(t, T + \delta)}{B(t)}\lambda^*(t, T + \delta - t)dW(t). \end{aligned}$$

Ďalším použitím Itōvej lemy získame

$$\begin{aligned} d \ln \left( \frac{P(t, T + \delta)}{B(t)} \right) &= \frac{B(t)}{P(t, T + \delta)} d \left( \frac{P(t, T + \delta)}{B(t)} \right) - \\ &\quad \frac{1}{2} \left( \frac{B(t)}{P(t, T + \delta)} \right)^2 \left( \frac{P(t, T + \delta)}{B(t)} \right)^2 (\lambda^*(t, T + \delta - t))^2 dt \\ &= -\lambda^*(t, T + \delta - t) dW(t) - \frac{1}{2} (\lambda^*(t, T + \delta - t))^2 dt. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{P(t, T + \delta)}{B(t)} \right) &= \ln \left( \frac{P(0, T + \delta)}{B(0)} \right) \\ &\quad - \int_0^t \lambda^*(u, T + \delta - u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t (\lambda^*(u, T + \delta - u))^2 du \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \frac{P(t, T + \delta)}{B(t)} &= P(0, T + \delta) \exp \left\{ - \int_0^t \lambda^*(u, T + \delta - u) dW(u) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t (\lambda^*(u, T + \delta - u))^2 du \right\} \quad (32) \end{aligned}$$

Ak chceme prejsť od numéraireu  $B(t)$  k numéraireu  $P(t, T + \delta)$ , tak podľa tvrdenia 3 pre Radon-Nikodymovu deriváciu platí

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^{T+\delta}} = \frac{P(t, T + \delta)B(0)}{P(0, T + \delta)B(t)} = \frac{P(t, T + \delta)}{P(0, T + \delta)B(t)}. \quad (33)$$

Ak využijeme odvodený vzťah (32), tak

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^{T+\delta}} = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda^*(u, T + \delta - u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t (\lambda^*(u, T + \delta - u))^2 du \right\}. \quad (34)$$

Vidíme, že  $\lambda^*(u, T + \delta - u)$  je proces, o ktorom hovorí Girsanovova veta (ako ju možno nájsť napríklad v [10]), a preto možno definovať

$$W^{T+\delta}(t) = W(t) + \int_0^t \lambda^*(t, T + \delta - u) du \quad (35)$$

ako Brownov pohyb vzhľadom k pravdepodobnostnej miere  $\mathbb{Q}^{T+\delta}$ .

V diferenciálnej forme vyzerá (35) ako

$$dW^{T+\delta}(t) = dW(t) + \lambda^*(t, T + \delta - t)dt, \quad (36)$$

z čoho je už zrejmé, že rovnicu (31) možno prepísať do hľadaného tvaru

$$dF(t, T, T + \delta) = F(t, T, T + \delta)\sigma(t, T - t)dW^{T+\delta}(t). \quad (37)$$

Teraz model zasadíme do časovej štruktúry  $\{T_i\}_{0 \leq i \leq M}$ , pričom definujeme  $T_{-1} := 0$ .

Pre každé  $k = 1, \dots, M$  je forwardová LIBOR miera  $F_k(t) = F(t, T_{k-1}, T_k)$  nažive až do času  $T_{k-1}$  a platí pre ňu rovnica

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t)dW_k^{T_k}, \quad t \leq T_{k-1}, \quad (38)$$

kde  $\mathbf{W}^{T_k} = [W_1^{T_k}, W_2^{T_k}, \dots, W_M^{T_k}]^T$  je  $M$ -rozmerný vektor Brownových pohybov vzhľadom k miere  $\mathbb{Q}^{T_k}$  s kovariančnou maticou  $\rho_{M \times M}$ , pre ktorú platí

$$d\mathbf{W}^{T_k} (d\mathbf{W}^{T_k})^T = \rho dt.$$

Sama o sebe sa zdá mať každá miera vcelku jednoduchú dynamiku, avšak pri oceňovaní derivátov, ktoré závisia na viacerých forwardových mierach zároveň, potrebujeme fixovať práve jednu pravdepodobnostnú mieru a modelovať všetky forwardové miery vzhľadom k tejto pravdepodobnostnej miere.

Pri odvodzovaní dynamiky forwardových mier pri iných pravdepodobnostných mierach použijeme formulu z knihy [2], kapitoly 2, ktorá tvrdí, že, uvažujúc dva numéraires  $S$  a  $U$ ,

$$d\mathbf{Z}^S = d\mathbf{Z}^U - \rho \left[ \frac{DC(S)}{S} - \frac{DC(U)}{U} \right]^T dt, \quad (39)$$

kde  $DC$  predstavuje difúzny koeficient, t.j. ak máme proces  $X_t$ , pre ktorý platí

$$dX_t = (\dots)dt + \mathbf{v}^T(X_t)d\mathbf{Z}_t,$$

tak  $DC(X_t)$  je riadkový vektor  $\mathbf{v}^T(X_t)$ . Ak napríklad

$$dF_1 = \sigma_1 F_1 dZ_1^{T_1},$$

potom  $DC(F_1) = [\sigma_1 F_1, 0, \dots, 0] = \sigma_1 F_1 e_1^T$ .

Rovnicu (39) možno tiež prepísať ako

$$D\mathbf{Z}^S = d\mathbf{Z}^U - \rho \left( DC \left( \ln \frac{S}{U} \right) \right)^T dt, \quad (40)$$

keďže

$$\begin{aligned} \frac{DC(S)}{S} - \frac{DC(U)}{U} &= DC(\ln S) - DC(\ln U) \\ &= DC(\ln S - \ln U) = DC \left( \ln \frac{S}{U} \right) \end{aligned}$$

Aplikujme teraz formulu (40) na prípad  $S_t = P(t, T_k)$  a  $U_t = P(t, T_i)$ , pričom uvažujeme  $i < k$ . Odvodíme tak dynamiku miery  $F_k(t)$  vzhľadom k pravdepodobnostnej miere  $\mathbb{Q}^{T_i}$ .

Po dosadení do (40) dostávame

$$d\mathbf{W}^{T_k} = d\mathbf{W}^{T_i} - \rho DC \left( \ln \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i)} \right)^T dt. \quad (41)$$

Počítajme

$$\begin{aligned} \ln \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i)} &= \ln \left( \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i)} \frac{P(t, T_{k-1})}{P(t, T_{k-2})} \dots \frac{P(t, T_{i+1})}{P(t, T_i)} \right) \\ &= \ln \left( \frac{1}{1 + \tau_k F_k(t)} \frac{1}{1 + \tau_{k-1} F_{k-1}(t)} \dots \frac{1}{1 + \tau_{i+1} F_{i+1}(t)} \right) \\ &= \ln \left( \frac{1}{\prod_{j=i+1}^k (1 + \tau_j F_j(t))} \right) \\ &= - \sum_{j=i+1}^k \ln (1 + \tau_j F_j(t)). \end{aligned} \quad (42)$$

A teda

$$\begin{aligned}
DC\left(\ln \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_i)}\right) &= - \sum_{j=i+1}^k DC(\ln(1 + \tau_j F_j(t))) \\
&= - \sum_{j=i+1}^k \frac{DC(1 + \tau_j F_j(t))}{1 + \tau_j F_j(t)} \\
&= - \sum_{j=i+1}^k \tau_j \frac{DC(F_j(t))}{1 + \tau_j F_j(t)} \\
&= - \sum_{j=i+1}^k \tau_j \frac{\sigma_j(t) F_j(t) \mathbf{e}_j^T}{1 + \tau_j F_j(t)}. \tag{43}
\end{aligned}$$

Po dosadení do (41) dostávame

$$d\mathbf{W}^{T_k} = d\mathbf{W}^{T_i} + \rho \sum_{j=i+1}^k \tau_j \frac{\sigma_j(t) F_j(t) \mathbf{e}_j}{1 + \tau_j F_j(t)} dt,$$

a ak obe strany prenasobíme zľava riadkovým vektorom  $\mathbf{e}_k^T$ , tak

$$\begin{aligned}
dW_k^{T_k} &= dW_k^{T_i} + \begin{bmatrix} \rho_{k,1} & \rho_{k,2} & \cdots & \rho_{k,M} \end{bmatrix} \sum_{j=i+1}^k \tau_j \frac{\sigma_j(t) F_j(t) \mathbf{e}_j}{1 + \tau_j F_j(t)} dt \\
&= dW_k^{T_i} + \sum_{j=i+1}^k \tau_j \frac{\sigma_j(t) F_j(t) \rho_{k,j}}{1 + \tau_j F_j(t)} dt. \tag{44}
\end{aligned}$$

Ak nakoniec (44) dosadíme do (38), dostávame rovnicu opisujúcu dynamiku forwardovej LIBOR miery  $F_k(t)$  pri pravdepodobnostnej miere  $\mathbb{Q}^{T_i}$ ,  $i \leq k$ ,

$$dF_k(t) = \sigma_k(t) F_k(t) \left( dZ_k^{T_i} + \sum_{j=i+1}^k \tau_j \frac{\sigma_j(t) F_j(t) \rho_{k,j}}{1 + \tau_j F_j(t)} dt \right). \tag{45}$$

Pre  $i > k$  by sme postupovali analogicky.

Výsledok, konečnú formuláciu LIBOR modelu, zhŕňame v nasledovnom tvrdení.

**Tvrdenie 4 (Dynamika pri forwardových mierach)** *Dynamika forwardovej miery  $F_k(t) = F(t, T_{k-1}, T_k)$  vzhľadom k pravdepodobnostnej miere  $\mathbb{Q}^{T_i}$  pre  $i < k$ ,  $i = k$  a  $i > k$  je nasledovná:*

$$i < k, t \leq T_i : \quad dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\rho_{k,j}\tau_j\sigma_j(t)F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt \\ + \sigma_k(t)F_k(t)dW_k^{T_i}(t),$$

$$i = k, t \leq T_{k-1} : \quad dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t)dW_k^{T_i}(t),$$

$$i > k, t \leq T_{k-1} : \quad dF_k(t) = -\sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=k+1}^i \frac{\rho_{k,j}\tau_j\sigma_j(t)F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt \\ + \sigma_k(t)F_k(t)dW_k^{T_i}(t),$$

kde  $\mathbf{W}^{T_i} = [W_1^{T_i}, W_2^{T_i}, \dots, W_M^{T_i}]^T$  je  $M$ -rozmerný Brownov pohyb vzhľadom k miere  $\mathbb{Q}^{T_i}$ .

### 5.3 Odvodenie Blackovej formuly

V časti 3.3.1 sme pripomenuli odvodenie Blackovej formuly, ako ju používajú ľudia na trhu, za predpokladu, že

$$dF_k(t) = F_k(t)v_k dW^{\mathbb{Q}}(t),$$

pričom  $\mathbb{Q}$  je nejaká trhová, bližšie neurčená pravdepodobnostná miera.

Teraz sa pokúsime odvodiť vzorec pre výpočet ceny capu založený na LIBOR modeli. A očakávame, že nám poskytne tú istú formulu ako Blackov model, čo je jedna z hlavných výhod LIBOR modelu.

Potrebuje zrátať

$$Cpl_{T_{j-1}}(t) = \delta P(t, T_j) E^{\mathbb{Q}^{T_j}} [(F_j(T_{j-1}) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t]. \quad (46)$$

Pravdepodobnostnú mieru  $\mathbb{Q}^{T_j}$  sme zvolili preto, lebo pri nej má forwardová miera  $F_j$  najjednoduchšiu dynamiku, resp. pri nej je martingalom.

Označme

$$M_t = E^{\mathbb{Q}^{T_j}} [(F_j(T_{j-1}) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t]. \quad (47)$$

Zrejme

$$E^{\mathbb{Q}^{T_j}} [dM_t] = 0 \quad (48)$$

a ak predpokladáme, že

$$M_t = M(F_j, t), \quad (49)$$

tak potom pomocou Itōvej lemy dostávame

$$dM_t = \frac{\partial M}{\partial F_j} dF_j(t) + \frac{\partial M}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial F_j^2} Var(dF_j(t)). \quad (50)$$

Namiesto predpokladu Blackovho modelu teraz použijeme tvrdenie 4, podľa ktorého pri pravdepodobnostnej miere  $\mathbb{Q}^{T_j}$  pre vývoj miery  $F_j$  platí rovnica

$$dF_j(t) = \sigma_j(t) F_j(t) dW_j^{T_j}(t).$$

Rovnicu (50) tak možno prepísať na

$$dM_t = \left( \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial F_j^2} F_j^2 \sigma_j^2(t) \right) dt + \frac{\partial M}{\partial F_j} \sigma_j(t) F_j dW_j^{T_j}(t).$$

V spojení s (47) a (48) získame parciálnu diferenciálnu rovnicu s koncovou podmienkou

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial F_j^2} F_j^2 \sigma_j^2(t) &= 0, & F_j > 0, t \in [0, T_{j-1}] \\ M(F_j, T_{j-1}) &= (F_j - \kappa)^+, & F_j > 0. \end{aligned}$$

Postupom ako v [7] dostávame po niekoľkých transformáciách rovnicu

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, & x \in \mathbb{R}, \tau \in [0, T_{j-1}] \\ u(x, 0) &= e^{-\frac{1}{2}x}(e^x - \kappa)^+, & x \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

Teraz, aby sme sa zbavili od času závisiaceho člena  $\sigma(t)$ , čo je jediný rozdiel oproti rovnici z časti 3.3.1 ešte raz zmeníme čas. Definujme

$$d\xi = \sigma^2(T_{j-1} - \tau)d\tau$$

a

$$v(x, \xi) = v\left(x, \int_0^\tau \sigma^2(T_{j-1} - u)du\right) = u(x, \tau)$$

Keďže

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\tau} = \sigma^2(T_{j-1} - \tau) \frac{\partial v}{\partial \xi},$$

dostávame rovnicu

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, & x \in \mathbb{R}, \tau \in [0, T_{j-1}] \\ v(x, 0) &= e^{-\frac{1}{2}x}(e^x - \kappa)^+, & x \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

Pre riešenie takéhoto typu parciálnej diferenciálnej rovnice poznáme vzorec, v našom prípade riešenie vyzerá nasledovne:

$$v(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\pi\xi}} e^{-\frac{1}{2}s}(e^s - \kappa)^+ ds.$$

Počítaním dospejeme k výslednej formule

$$M(F_j, t) = F_j\phi(d_1) - \kappa\phi(d_2),$$

kde

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{F_j}{\kappa} \pm \frac{1}{2} \int_t^{T_{j-1}} \sigma_j^2(t) dt}{\sqrt{\int_0^{T_{j-1}} \sigma_j^2(t) dt}}.$$



Následne pre cenu capu platí

$$Cap_{T_n}(t) = \sum_{l=1}^n Cpl_{T_{l-1}}(t) = \sum_{l=1}^n \delta P(t, T_l)(F_l(t)\phi(d_1) - \kappa\phi(d_2)). \quad (51)$$

Vidíme, že, aby boli ceny capov oceňované Blackovým modelom, čo predstavuje trhovú prax, a ceny capov oceňované LIBOR modelom, totožné, musí platiť

$$\int_t^{T_{j-1}} \sigma_j^2(t) = (T_{j-1} - t)v_j^2 \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (52)$$

Vzťah (52) bude stredobodom nášho záujmu v časti o kalibrácii modelu na ceny capov.

## 5.4 Ilustrácie

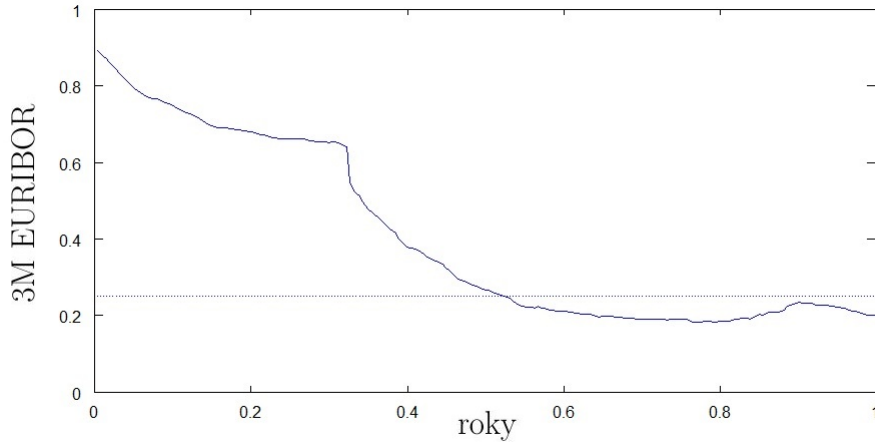
Odvođený model budeme teraz pre pochopenie ilustrovať na troch jednoduchých príkladoch. Pri všetkých budeme používať volatilitu a korelácie potrebných forwardových LIBOR mier, ktoré uvádzame v tabuľkách 1 a 2.

$\sigma(\%)$	$(0, T_0]$	$(T_0, T_1]$	$(T_1, T_2]$
$F_1(t)$	19.671	-	-
$F_2(t)$	14.138	14.138	-
$F_3(t)$	10.734	10.734	10.734

Tabuľka 1: Volatility

$\rho$	$F_1$	$F_2$	$F_3$
$F_1$	1	0.870	0.845
$F_2$	0.870	1	0.919
$F_3$	0.845	0.919	1

Tabuľka 2: Korelácie



Obr. 2: Vývoj 3M EURIBORu počas roku pred 12. marcom 2013

Štruktúra volatilit, pri ktorej pre každú mieru platí rovnaká hodnota volatility po celé trvanie jej života je obzvlášť jednoduchá a pre  $v_j$  potrebné pre Blackovu formulu v tomto prípade podľa vzťahu (52) platí  $v_j = \sigma_j$ .

#### 5.4.1 Caplet

Predstavme si, že dnes je 8. marca 2013 a uvažujme nasledovnú časovú štruktúru:  $T_{-1}$  definujeme ako 8. január 2013 a všetky časy uvažujme s rovnakými rozostupmi  $\delta=3$  mesiace, t.j.  $T_0$  je 8. apríl 2013,  $T_1$  8. júl 2013 a  $T_2$  8. október 2013. Chceme oceniť kontrakt, ktorý nám v čase  $T_2$ , t.j. sedem mesiacov odo dneška, vyplatí rozdiel medzi trojmesačnou EURIBOR mierou v čase  $T_1$ , t.j. štyri mesiace odo dneška, a dohodnutým strikeom. Jedná sa teda o  $T_1$ -caplet.

Pozrime sa na vývoj trojmesačnej EURIBOR miery (obrázok 2), keďže držiteľ capletu by mala zaujímať jej hodnota (resp. jej hodnota v čase expirácie).

Počas roka miera klesala, z 0.9 na súčasnú úroveň okolo 0.2. Položme strike rovný 0.25.

Cenu opisovaného capletu v čase  $t$  možno zapísať ako

$$Cpl_{T_1}(t) = \delta P(t, T_2) E^{\mathbb{Q}^{T_2}} [(L(T_1, T_2) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t],$$

kde  $L(T_1, T_2)$  predstavuje trojmesačnú EURIBOR mieru v čase  $T_1$ . Keďže platí

$$L(T_1, T_2) = F(T_1, T_1, T_2) = F_2(T_1),$$

možno ekvivalente písať

$$Cpl_{T_1}(t) = \delta P(t, T_2) E^{\mathbb{Q}^{T_2}} [(F_2(T_1) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t],$$

Samozrejme, toto je možné ľahko analyticky zrátať (a dostávame formulu Blackovho modelu), ale použijeme aj simulácie, keď pomocou rovnice opisujúcej dynamiku miery  $F_2$  vzhľadom k pravdedpodobnostnej miere  $\mathbb{Q}^{T_2}$  (z tvrdenia 4)

$$dF_2(t) = \sigma_2(t) F_2(t) dW^{T_2}(t)$$

vygenerujeme niekoľko hodnôt pre  $F_2(T_1)$  a z nich zrátame strednú hodnotu.

Výsledky uvádzame v tabuľke 3.

počet iterácií	100	500	1000	5000
simulácie	4.7419	4.7156	4.7747	4.7650
Black	4.7669			

Tabuľka 3: Ceny pre  $T_2$ -caplet počítané Monte-Carlo simuláciami resp. Black 76 modelom ( $\times 10^{-2}$ )

Vidíme, že zo zvyšujúcim sa počtom iterácií sa cena počítaná pomocou simulácií čoraz viac približuje presnej cene určenej Blackovou formulou.

#### 5.4.2 Cap

K časovej štruktúre z predošlého príkladu pridajme ešte jeden časový bod,  $T_3$ , zhodujúci sa s dátumom 8. január 2013. Uvažujme kontrakt,  $T_3$ -cap, ktorý

nám prinesie platby v časoch  $T_1$ ,  $T_2$  a  $T_3$  založené na hodnotách úrokových mier  $L(T_0, T_1)$ ,  $L(T_1, T_2)$  a  $L(T_2, T_3)$ . Cenu tohto ročného capu môžeme vypočítať podľa vzťahu

$$Cap_{T_3}(t) = \sum_{l=1}^3 Cpl_{T_{j-1}}(t) = \sum_{l=1}^3 \delta P(t, T_l) E^{\mathbb{Q}^{T_l}} [(F_l(T_{l-1}) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t].$$

Zaujímať nás bude vývoj troch mier riadiacich sa podľa rovníc

$$\begin{aligned} dF_1(t) &= \sigma_1(t) F_1(t) dW^{T_1}(t) \\ dF_2(t) &= \sigma_2(t) F_2(t) dW^{T_2}(t) \\ dF_3(t) &= \sigma_3(t) F_3(t) dW^{T_3}(t). \end{aligned}$$

Výsledky uvádzame v tabuľke 4.

počet iterácií	100	500	1000	5000
simulácie	11.644	11.684	11.673	11.675
Black	11.675			

Tabuľka 4: Ceny pre  $T_3$ -cap počítané Monte-Carlo simuláciami resp. Black 76 modelom ( $\times 10^{-2}$ )

Rovnako ako pri capletoch, aj v tomto prípade sa zo zvyšujúcim počtom iterácií cena rátaaná pomocou simulácií spresňuje.

### 5.4.3 Ázijský caplet

Zaujímavejšia situácia nastáva pri nasledovnom deriváte, ktorý sme nazvali ako ázijský caplet, keďže je istou obdbou ázijskej opcie. Predstavme si, opäť uvažujeme rovnakú časovú štruktúru, že v čase  $T_3$  dôjde k výplate  $(L(T_2, T_3) - \kappa)^+$ , t.j. obdobne ako by tomu bolo pri  $T_3$ -caplete. Avšak tentokrát bude strike určený ako priemerná hodnota 3M EURIBORu v časoch  $T_0$ ,  $T_1$  a  $T_2$ :

$$\kappa = \frac{1}{3} (F_1(T_0) + F_2(T_1) + F_3(T_2)).$$

V tomto prípade už nemôžeme, tak ako sme to urobili v prípade capu, popi-  
sovať miery  $F_1$ ,  $F_2$  a  $F_3$  každú pri inej pravdepodobnostnej miere ( $\mathbb{Q}^{T_1}$ ,  $\mathbb{Q}^{T_2}$   
a  $\mathbb{Q}^{T_3}$ ) a následne zrátať tri, k daným pravdepodobnostným mieram viazané,  
stredné hodnoty. Tentokrát musíme všetky tri forwardové miery modelovať  
vzhľadom k jedinej pravdepodobnostnej miere, a tou bude  $\mathbb{Q}^{T_3}$ . Dynamika  
úrokových mier bude pre náš derivát podľa tvrdenia 4 vyzeráť nasledovne:

$$\begin{aligned} dF_1(t) &= -\sigma_1(t)F_1(t) \sum_{j=2}^3 \frac{\rho_{1,j}\delta\sigma_j(t)F_j(t)}{1 + \delta F_j(t)} dt + \sigma_1(t)F_1(t)dW_1^{T_3}(t) \\ dF_2(t) &= -\sigma_2(t)F_2(t) \frac{\rho_{2,3}\delta_3\sigma_3(t)F_3(t)}{1 + \tau_3 F_3(t)} dt + \sigma_2(t)F_2(t)dW_2^{T_3}(t) \\ dF_3(t) &= \sigma_3(t)F_3(t)dW_3^{T_3}(t), \end{aligned}$$

kde  $\begin{bmatrix} W_1^{T_3} & W_2^{T_3} & W_3^{T_3} \end{bmatrix}^T$  je vektor Brownových pohybov vzhľadom k miere  
 $\mathbb{Q}^{T_3}$ , pričom platí  $dW_i^{T_3} dW_j^{T_3} = \rho_{i,j}dt, i, j = 1, 2, 3$ .

Otázkou zostáva, ako generovať takýto vektor závislých Brownových po-  
hybov.

Pre trojrozmerný Brownov pohyb platí

$$\mathbf{W}_{s+t} - \mathbf{W}_s \sim N(\mathbf{0}, \Sigma),$$

kde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \rho_{1,1}t & \rho_{1,2}t & \rho_{1,3}t \\ \rho_{2,1}t & \rho_{2,2}t & \rho_{2,3}t \\ \rho_{3,1}t & \rho_{3,2}t & \rho_{3,3}t \end{bmatrix},$$

t.j.

$$\frac{1}{\sqrt{t}}(\mathbf{W}_{s+t} - \mathbf{W}_s) \sim N(\mathbf{0}, \rho).$$

Ak použijeme Choleského rozklad, tak

$$\rho = AA^T,$$

a teda

$$\frac{1}{\sqrt{t}}A(\mathbf{W}_{s+t} - \mathbf{W}_s) \sim N(\mathbf{0}, I).$$

V tabuľke 5 sú uvedené výsledky simulácií, opäť pre rôzny počet iterácií.

počet iterácií	100	500	1000	5000
cena	2.6540	2.6869	2.7598	2.6615

Tabuľka 5: Ceny pre ázijský  $T_2$ -caplet počítané Monte-Carlo simuláciami ( $\times 10^{-2}$ )

## 6 Kalibrácia

Výhodou LIBOR modelu oproti iným modelom je, že ho možno presne kalibrovať vzhľadom k trhom uvádzaným cenám. Konkrétne na ceny capov a swapcií (resp. ich Blackovou formulou implikovaným volatilitám).

Náš LIBOR model (t.j. LFM model) ponúka presné riešenie pre ceny capov vo forme Blackovej formuly a teda možno dosiahnuť, že model bude dávať pre capy rovnaké výsledky aké sú uvádzané na trhu.

Kalibrácia na capy bude obsahom prvej časti tejto kapitoly. V druhej časti sa budeme venovať otázke určenia korelácií.

### 6.1 Volatility

Dáta, ktoré možno nájsť na trhu [9], uvádzame v tabuľke 6.

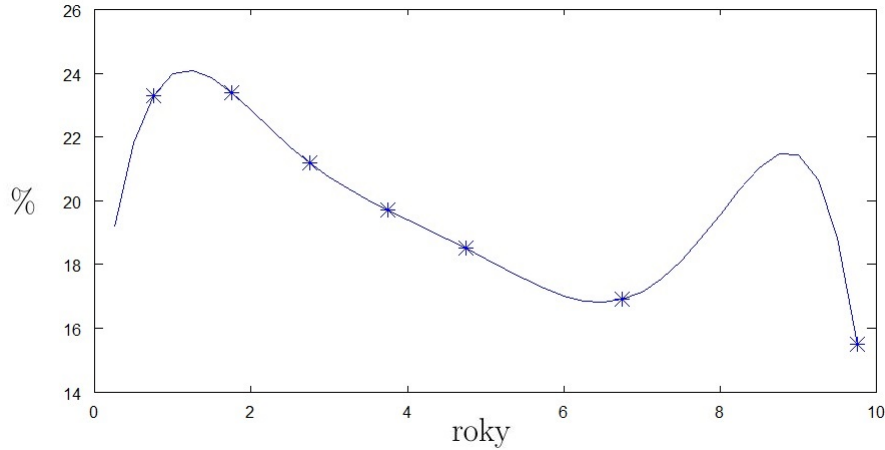
Maturita	1 rok	2 roky	3 roky	4 roky	5 rokov	7 rokov	10 rokov
Volatilita	23.3	23.4	21.2	19.7	18.5	16.9	15.5

Tabuľka 6: Cap-volatility zo dňa 12. Augusta 2002

Tieto volatility sa niekedy nazývajú forward volatility. Sú to volatility niekoľkoročných capov obchodovaných na trhu. Čo ale potrebujeme, sú volatility jednotlivých capletov, niekedy nazývané forward forward volatility.

Uvažujme časovú štruktúru  $\{T_0, T_1, \dots, T_{M(=39)}\}$ , kde  $T_i = (i + 1)\delta$ ,  $\delta$  je rovná trom mesiacom a súčasný čas definujeme ako  $t = T_{-1} := 0$ , čo v našom vzorovom príklade zodpovedá 12. augustu 2002. Máme daných 7 volatilit:  $v_{T_3-cap}$ ,  $v_{T_7-cap}$ ,  $v_{T_{11}-cap}$ ,  $v_{T_{15}-cap}$ ,  $v_{T_{19}-cap}$ ,  $v_{T_{27}-cap}$  a  $v_{T_{39}-cap}$ . Prvým naším krokom bude "dorobiť" všetky ostatné volatility, t.j. zvyšných 32 volatilit od  $v_{T_1-cap}$  po  $v_{T_{39}-cap}$ .

Najprv skúsme preložiť danými siedmimi bodmi polynóm. Na obrázku 3 vidíme, že výsledná krivka nemá želaný tvar.



Obr. 3: Forward volatility zo dňa 12. Augusta 2002

Pridajme v jednej rovine medzi  $v_{T_{27}}\text{-cap}$  a  $v_{T_{39}}\text{-cap}$  tri body, konkrétne  $v_{T_{31}}\text{-cap}$ ,  $v_{T_{35}}\text{-cap}$  a  $v_{T_{37}}\text{-cap}$ .

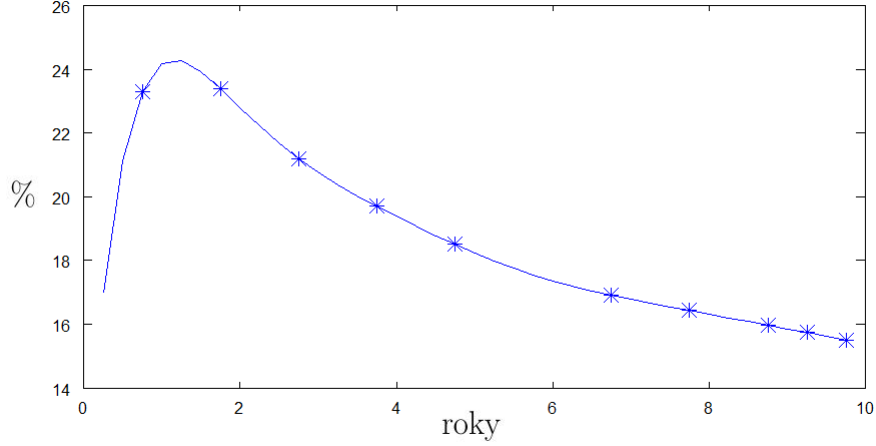
Opäť preložme bodmi polynóm. Na obrázku 4 vidno, že táto krivka omnoho lepšie zodpovedá našim očakávaniam.

Z týchto dát sa teraz pokúsime získať všetky forward forward volatility, t.j. volatility  $v_{T_0\text{-caplet}}, \dots, v_{T_{38}\text{-caplet}}$ . Aby sme toto mohli spraviť, musíme riešiť istý problém konzistentnosti [2], ku ktorému tu dochádza.

Uvažujme, že tá istá priemerná volatilita  $v_{T_j\text{-cap}}$  prislúcha všetkým capletom, z ktorých sa tento cap skladá, t.j.  $T_0\text{-}$  až  $T_{j-1}\text{-}$ capletom. Ďalej uvažujme napríklad nasledovný  $T_{j+1}\text{-cap}$  s inou priemernou volatilitou  $v_{T_{j+1}\text{-cap}}$ . Táto by mala opäť prislúchať všetkým capletom, z ktorých sa  $T_{j+1}\text{-cap}$  skladá, t.j.  $T_0\text{-}$  až  $T_j\text{-}$ capletom. Takto by sme sa ale dostali do situácie, keď tomu istému capletu, v našom príklade  $T_0\text{-}$  až  $T_{j-1}\text{-}$ capletom, prislúchajú dve rôzne volatility.

Aby sme sa tomuto problému vyhli, extrahovanie forward forward volatilit





Obr. 4: Forward volatility zo dňa 12. Augusta 2002

z forward volatilití bude založené na nutnej platnosti vzťahu

$$\sum_{j=1}^i F_j(0)\phi(d_1(v_{T_i-cap})) - \kappa\phi(d_2(v_{T_i-cap})) = \sum_{j=1}^i F_j(0)\phi(d_1(v_{T_{j-1}-caplet})) - \kappa\phi(d_2(v_{T_{j-1}-caplet})), \quad (53)$$

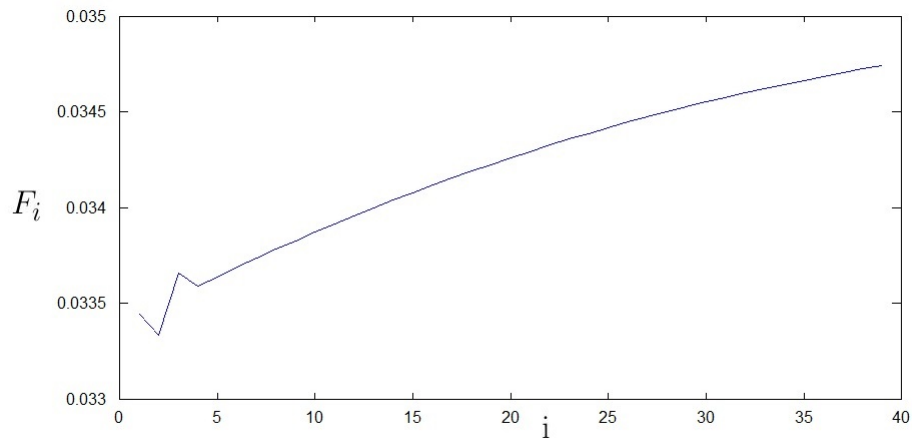
t.j. začíname tým, položíme  $v_{T_0-caplet} = v_{T_1-cap}$  a pokračujeme tak, aby zakaždým platilo, že cena capu je rovná súčtu cien capletov, z ktorých sa skladá.

Vidíme, že okrem jednotlivých volatilití  $v_{T_1-cap}, \dots, v_{T_{39}-cap}$ , potrebujeme poznať aj  $F_1(0), \dots, F_{39}(0)$  a  $\kappa$ .

$F_i(0)$  (obrázok 5) ľahko získame výpočtom podľa definície 9 z kapitoly 3, t.j.

$$\begin{aligned} F_i(0) = F(0, T_{i-1}, T_i) &= \frac{1}{\tau(T_{i-1}, T_i)} \left( \frac{P(0, T_{i-1})}{P(0, T_i)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \left( \frac{P(0, T_{i-1})}{P(0, T_i)} - 1 \right), \end{aligned} \quad (54)$$

pričom pre  $P(0, T_i)$  (obrázok 6) podľa definície 8 platí



Obr. 5: Forwardové LIBOR miery zo dňa 12. Augusta 2002

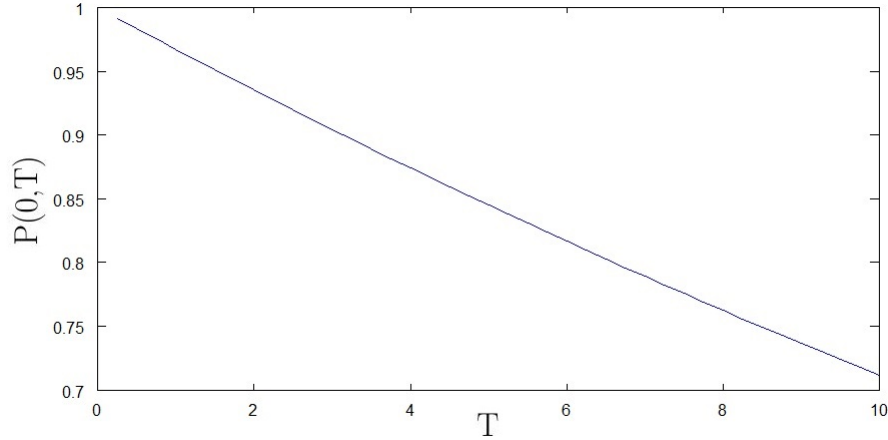
$$\begin{aligned}
 P(0, T_i) &= \frac{1}{1 + \tau(0, T_i)L(0, T_i)} \\
 &= \frac{1}{1 + (i + 1)\delta L(0, T_i)}, \tag{55}
 \end{aligned}$$

kde  $L(0, T_i)$ , LIBOR miery zo dňa 12. augusta 2012, sú vstupom nášho modelu (obrázok 7).

Poznamenajme, že vstupom sú v podstate iba  $L(0, T_0)$ ,  $L(0, T_1)$ ,  $L(0, T_2)$  a  $L(0, T_3)$ , keďže EURIBOR miery máme len nanajvýš ročné. Ostatné miery  $L(0, T_i)$ ,  $i = 4, \dots, 39$ , dopočítame podľa vzťahu

$$L(0, T_i) = L(0, T_{i-1}) \frac{L(0, T_{i-1})}{L(0, T_{i-2})}.$$

Zostáva nám určiť strike  $\kappa$ , ktorý bude pre každý cap iný. Podľa definície 11 bude pre  $\kappa$  prislúchajúce k  $T_i$ -capu s výplatami v časoch  $T_1, \dots, T_i$



Obr. 6: Ceny dlhopisov zo dňa 12. Augusta 2002

platiť

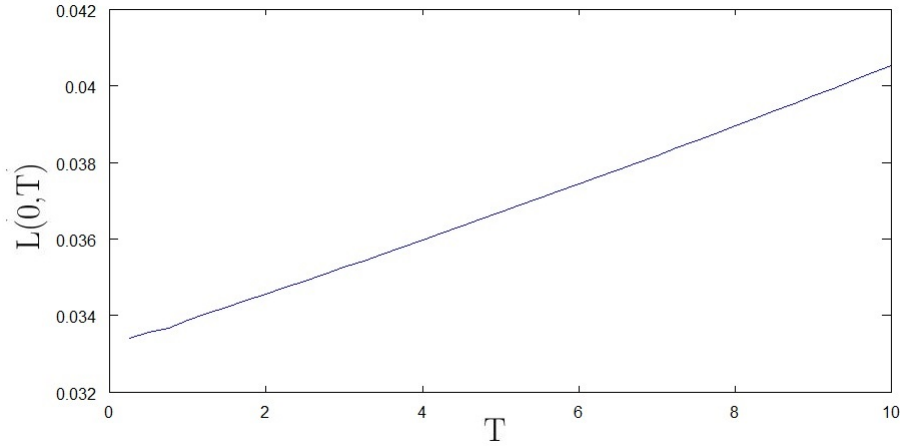
$$\begin{aligned} \kappa = S_{0,i}(0) &= \frac{P(0, T_0) - P(0, T_i)}{\sum_{l=1}^i \tau(T_{l-1}, T_l) P(0, T_l)} \\ &= \frac{P(0, T_0) - P(0, T_i)}{\sum_{l=1}^i \delta P(0, T_l)}, \end{aligned} \quad (56)$$

kde  $P(0, T_i)$  je, rovnako ako vyššie, definované vzťahom (55).

Teraz poznáme všetko, čo sme pre získanie caplet volatilit z daných volatilit capov potrebovali a výpočtom založeným na vzťahu (53) dostávame štruktúru caplet-volatilit ako je znázornená na obrázku 8.

Následne môžeme pristúpiť k tomu, aby sme z vypočítaných forward forward volatilit  $v_{T_{i-1}-caplet}$  pre  $i = 1, \dots, M (= 39)$  určili hodnoty samotných volatilit  $\sigma$  používaných v odvodenom LIBOR modeli. Vo všeobecnosti musí byť splnený už spomenutý vzťah (52)

$$v_{T_{i-1}-caplet}^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \int_0^{T_{i-1}} \sigma_i(t)^2 dt.$$



Obr. 7: LIBOR miery zo dňa 12. Augusta 2002

Avšak ešte pred tým, ako pristúpime k určeniu funkcií volatilit, zavedieme pojem časovej štruktúry volatility.

Uvažujme časy  $\{T_0, \dots, T_M\}$ . Časová štruktúra volatility v čase  $t = T_j$  je graf pozostávajúci z bodov

$$\{(T_{j+1}, V(T_j, T_{j+1})), (T_{j+2}, V(T_j, T_{j+2})), \dots, (T_{M-1}, V(T_j, T_{M-1}))\},$$

kde

$$V^2(T_j, T_{h-1}) = \frac{1}{\tau_{j,h-1}} \int_{T_j}^{T_{h-1}} \sigma_h^2(t) dt$$

pre  $h > j + 1$ .

Pre čas 0 (definujeme  $T_{-1} = 0$ ) dostávame súbor bodov

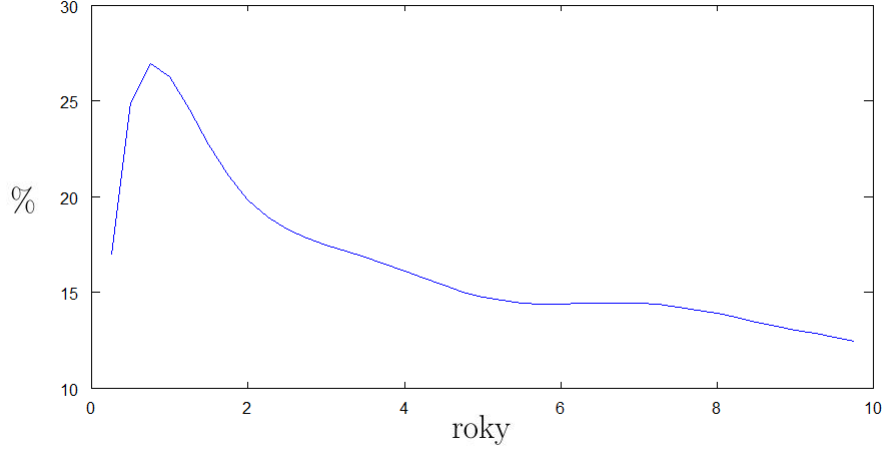
$$\{(T_0, V(0, T_0)), (T_1, V(0, T_{j+2})), \dots, (T_{M-1}, V(0, T_{M-1}))\},$$

kde

$$V^2(0, T_{h-1}) = \frac{1}{\tau_{0,h-1}} \int_0^{T_{h-1}} \sigma_h^2(t) dt = v_{T_{h-1}-caplet}^2,$$

a teda body

$$\{(T_0, v_{T_0-caplet}^2), \dots, (T_0, v_{T_{M-1}-caplet}^2)\}.$$



Obr. 8: Forward forward volatility zo dňa 12. Augusta 2002

V [2] je uvedených niekoľko možností, ako určiť funkcie  $\sigma$ , päť modelov po častiach konštantných funkcií volatilit a dva parametrické modely volatilit. Pri ktorých je to možné už z dát pre caplety, uvádzame aj numerické výsledky, mnohé formulácie však zostávajú so svojimi zvyšnými voľnými parametrami otvorené kalibrácii podľa swapcií.

**Formulácia 1** Pri prvej formulácii jednoducho uvažujeme, že volatilita forwardovej miery  $F_k(t) = F(t; T_{k-1}, T_k)$  je konštantná od  $T_{k-2}$  po  $T_{k-1}$ . Ako vyzerá takto definovaná štruktúra volatilit je zaznamenané v tabuľke 7.

Pre takto definovanú štruktúru volatilit musí platiť

$$v_{T_{i-1}-caplet}^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \sum_{j=1}^i \tau_{j-2, j-1} \sigma_{i,j}^2. \quad (57)$$

Vidíme, že z  $v_{T_0-caplet}^2$  poľahky určíme  $\sigma_{1,1}$ . Avšak už z  $v_{T_1-caplet}^2$  jednoznačný výsledok nemáme. Nevieme, ako rozložiť hodnotu  $v_{T_1-caplet}^2$  medzi  $\sigma_{2,1}$  a  $\sigma_{2,2}$ .

	$(0, T_0]$	$(T_0, T_1]$	$(T_1, T_2]$	$\dots$	$(T_{M-2}, T_{M-1}]$
$F_1(t)$	$\sigma_{1,1}$	—	—	$\dots$	—
$F_2(t)$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,2}$	—	$\dots$	—
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$F_M(t)$	$\sigma_{M,1}$	$\sigma_{M,2}$	$\sigma_{M,3}$	$\dots$	$\sigma_{M,M}$

Tabuľka 7: Formulácia 1

Aby sme redukovali množstvo voľných parametrov, ktoré by takto vznikali, v súčte by ich bolo  $\frac{M(M-1)}{2}$ , budeme uvažovať niekoľko zjednodušení tohto modelu.

**Formulácia 2** Nech

$$\sigma_k(t) = \sigma_{k,\beta(t)} =: \eta_{k-(\beta(t)-1)}, \quad (58)$$

čo znamená, že volatilita závisí len od času zostávajúceho do maturity, t.j.  $T_k - T_{\beta(t)-1}$ , pričom pre  $\beta(t)$  platí, že  $T_{\beta(t)-2} < t \leq T_{\beta(t)-1}$ . Túto situáciu zachytáva tabuľka 8.

	$(0, T_0]$	$(T_0, T_1]$	$(T_1, T_2]$	$\dots$	$(T_{M-2}, T_{M-1}]$
$F_1(t)$	$\eta_1$	—	—	$\dots$	—
$F_2(t)$	$\eta_2$	$\eta_1$	—	$\dots$	—
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$F_M(t)$	$\eta_M$	$\eta_{M-1}$	$\eta_{M-2}$	$\dots$	$\eta_1$

Tabuľka 8: Formulácia 2

V tomto prípade musí platiť

$$v_{T_{i-1}-caplet}^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \sum_{j=1}^i \tau_{j-2,j-1} \eta_{i-j+1}^2. \quad (59)$$

To znamená, že postupne z  $v_{T_0\text{-caplet}}^2$  určíme  $\eta_1$ , potom už môžeme z  $v_{T_1\text{-caplet}}^2$  určiť  $\eta_2$  atď:

$$\eta_1^2 = v_{T_0\text{-caplet}}^2$$

a

$$\eta_i^2 = \frac{T_{i-1}}{\tau} v_{T_{i-1}\text{-caplet}}^2 - \sum_{j=1}^{i-1} \eta_j^2, \quad i = 2, \dots, M.$$

V tabuľke 9 uvádzame výsledky pre prvých päť forwardových mier,  $F_1$  až  $F_5$ :

	$(0, T_0]$	$(T_0, T_1]$	$(T_1, T_2]$	$(T_3, T_4]$	$(T_4, T_5]$
$F_1(t)$	0.412	—	—	—	—
$F_2(t)$	0.574	0.412	—	—	—
$F_3(t)$	0.556	0.574	0.412	—	—
$F_4(t)$	0.492	0.556	0.574	0.412	—
$F_5(t)$	0.421	0.492	0.556	0.574	0.412

Tabuľka 9: Formulácia 2: výsledky

Ďalej sa pozrime na časovú štruktúru volatility pri tejto formulácii. V tomto prípade platí, že

$$\begin{aligned} V^2(T_j, T_{h-1}) &= \frac{1}{\tau_{j,h-1}} \int_{T_j}^{T_{h-1}} \sigma_h^2(t) dt \\ &= \frac{1}{\tau_{j,h-1}} \sum_{k=j+1}^{h-1} \eta_{h-k}^2 \tau \\ &= \frac{1}{h-1-j} \sum_{k=j+1}^{h-1} \eta_{h-k}^2. \end{aligned} \tag{60}$$

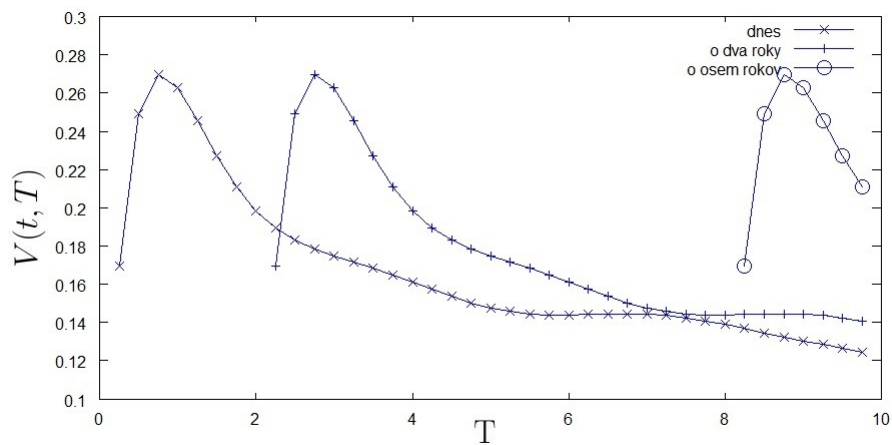
Vidno, že  $V(T_j, T_{h-1}) = V(T_{j+1}, T_h)$ , čo znamená, že pri posune z času  $T_j$  k času  $T_{j+1}$  tvar časovej štruktúry zostáva rovnaký až na to, že táto štruktúra sa skráti. T.j. krivka určená bodmi

$$\{(T_{j+1}, V(T_j, T_{j+1})), (T_{j+2}, V(T_j, T_{j+2})), \dots, (T_{M-1}, V(T_j, T_{M-1}))\}$$

sa zmení na krivku určenú bodmi

$$\{(T_{j+2}, V(T_j, T_{j+1})), \dots, (T_{M-1}, V(T_j, T_{M-2}))\}.$$

Príklady týchto kriviek sú na obrázku 9. Je zrejmé, že s postupujúcim časom sa štruktúra volatilití naozaj nemení, iba sa z krivky postupne odsekáva jej koncová časť.



Obr. 9: Formulácia 2: Časová štruktúra volatility

**Formulácia 3** Inou alternatívou je uvažovať, že každá forwardová miera  $F_k(t)$  má konštantnú volatilitu, t.j.

$$\sigma_k(t) = \sigma_{k,\beta(t)} =: s_k. \quad (61)$$

Situácia je znázornená v tabuľke 10.

Tu požadujeme, aby

$$v_{T_{i-1}-caplet}^2 = s_i^2, \quad (62)$$

z čoho je zrejmé, že výpočet bude v tomto prípade veľmi priamočiary.



	$(0, T_0]$	$(T_0, T_1]$	$(T_1, T_2]$	$\dots$	$(T_{M-2}, T_{M-1}]$
$F_1(t)$	$s_1$	–	–	$\dots$	–
$F_2(t)$	$s_2$	$s_2$	–	$\dots$	–
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$F_M(t)$	$s_M$	$s_M$	$s_M$	$\dots$	$s_M$

Tabuľka 10: Formulácia 3

	$(0, T_0]$	$(T_0, T_1]$	$(T_1, T_2]$	$(T_3, T_4]$	$(T_4, T_5]$
$F_1(t)$	0.170	–	–	–	–
$F_2(t)$	0.249	0.249	–	–	–
$F_3(t)$	0.269	0.269	0.269	–	–
$F_4(t)$	0.263	0.263	0.263	0.263	–
$F_5(t)$	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243

Tabuľka 11: Formulácia 3: výsledky

V tabuľke 11 uvedieme opäť výsledky pre prvých päť forwardových mier  $F_1$  až  $F_5$ :

Pozrime sa na časovú štruktúru volatility. Pri tejto formulácii platí

$$V^2(T_j, Th - 1) = V^2(T_{j+1}, T_{h-1}) = s_h^2 \quad \text{pre } h > j + 2,$$

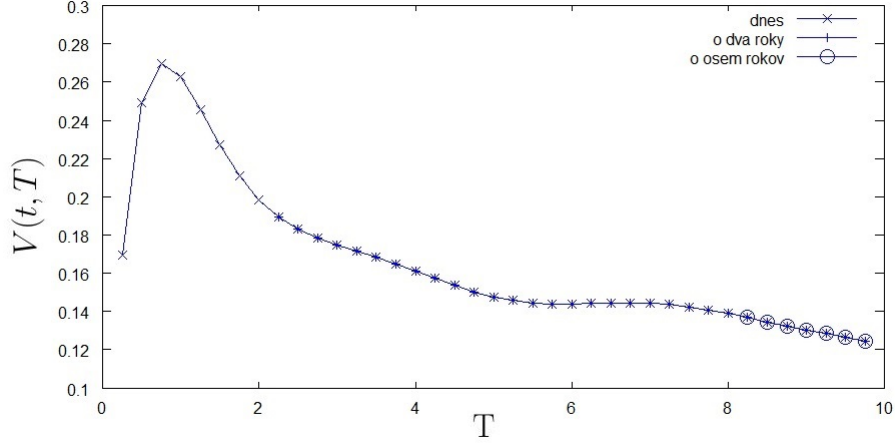
z čoho vyplýva, že pri posune z času  $T_j$  do času  $T_{j+1}$  sa posúvame od krivky definovanej bodmi

$$\{(T_{j+1}, V(T_j, T_{j+1})), (T_{j+2}, V(T_{j+1}, T_{j+2})), \dots, (T_{M-1}, V(T_{M-2}, T_{M-1}))\}$$

ku krivke definovanej bodmi

$$\{(T_{j+2}, V(T_{j+1}, T_{j+2})), \dots, (T_{M-1}, V(T_{M-2}, T_{M-1}))\},$$

ako je to vidieť na obrázku 10. Na rozdiel od predchádzajúcej formulácie, kde bola postupom času odsekávaná koncová časť, tu dochádza k odeskávaniu prednej časti. To spôsobuje, že časová štruktúra volatility sa časom mení.



Obr. 10: Formulácia 3: Časová štruktúra volatility

**Formulácia 4** Treťou alternatívou k formulácii 1 je predpokladať

$$\sigma_k(t) = \sigma_{k,\beta(t)} =: \Phi_k \Psi_{\beta(t)}, \quad (63)$$

situáciu vidno v tabuľke 12.

	$(0, T_0]$	$(T_0, T_1]$	$(T_1, T_2]$	$\dots$	$(T_{M-2}, T_{M-1}]$
$F_1(t)$	$\Phi_1 \Psi_1$	—	—	$\dots$	—
$F_2(t)$	$\Phi_2 \Psi_1$	$\Phi_2 \Psi_2$	—	$\dots$	—
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$F_M(t)$	$\Phi_M \Psi_1$	$\Phi_M \Psi_2$	$\Phi_M \Psi_3$	$\dots$	$\Phi_M \Psi_M$

Tabuľka 12: Formulácia 4

Pri tejto formulácii musí byť splnené

$$v_{T_{i-1}-caplet}^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \Phi_i^2 \sum_{j=1}^i \tau_{j-2,j-1} \Psi_j^2. \quad (64)$$

Parametre  $\Phi$  môžeme vyjadriť v závislosti od  $\Psi$ , keďže  $v_{T-caplet}^2$  sú trhom

dané hodnoty. Dostávame

$$\Phi_i^2 = \frac{T_{i-1} v_{T_{i-1}-caplet}^2}{\sum_{j=1}^i \tau_{j-2,j-1} \Psi_j^2}. \quad (65)$$

Určiť parametre  $\Psi_j, j = 1, \dots, M$  je úlohou pri kalibrácii podľa cien swapcií.

Pre časovú štruktúru volatility platí

$$V^2(T_j, T_{h-1}) = \frac{\Psi_h^2}{\tau_{j,h-1}} \sum_{k=j+1}^{h-1} \tau_{k-2,k-1} \Psi_{h-k}^2. \quad (66)$$

V [2] túto formuláciu neodporúčajú, namiesto nej uprednostňujú nasledovný model.

**Formulácia 5** Poslednou z možností pre po častiach konštantný model volatility je

$$\sigma_k(t) = \sigma_{k,\beta(t)} =: \Phi_k \psi_{k-(\beta(t)-1)}, \quad (67)$$

zachytáva ho tabuľka 13.

	$(0, T_0]$	$(T_0, T_1]$	$(T_1, T_2]$	$\dots$	$(T_{M-2}, T_{M-1}]$
$F_1(t)$	$\Phi_1 \psi_1$	—	—	$\dots$	—
$F_2(t)$	$\Phi_2 \psi_2$	$\Phi_2 \psi_1$	—	$\dots$	—
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$F_M(t)$	$\Phi_M \psi_M$	$\Phi_M \psi_{M-1}$	$\Phi_M \psi_{M-2}$	$\dots$	$\Phi_M \psi_1$

Tabuľka 13: Formulácia 5

Tu požadujeme, aby

$$v_{T_{i-1}-caplet}^2 = \Phi_i^2 \sum_{j=1}^i \tau_{j-2,j-1} \psi_{i-j+1}^2 \quad (68)$$

a opäť ako v predošlom príklade možno trhom dané volatility zakomponovať do modelu tým, že vyjadríme  $\Phi$  v závislosti od  $\psi$ :

$$\Phi_i^2 = \frac{T_{i-1} v_{T_{i-1}-caplet}^2}{\sum_{j=1}^i \tau_{j-2,j-1} \psi_{i-j+1}^2}.$$

Pre časovú štruktúru volatility platí

$$\begin{aligned} V^2(T_j, T_{h-1}) &= \frac{\Phi_h^2}{\tau_{j,h-1}} \sum_{k=j+1}^{h-1} \tau_{k-1,k} \psi_{h-k}^2 \\ &= \frac{\Phi_h^2}{h-j-1} \sum_{k=j+1}^{h-1} \psi_{h-k}^2. \end{aligned} \quad (69)$$

Poznamenanajme, že v prípade, že  $\Phi_i$  majú všetky rovnaké hodnoty, formulácia 5 je ekvivalentná formulácii 2. T.j. časová štruktúra volatility sa časom nemení. Túto vlastnosť si zachová aj so zmenou jednotlivých  $\Phi_i$ , ak ich hodnoty zostanú dostatočne blízko.

Teraz uvedieme dve parametrické formulácie volatilít.

**Formulácia 6** Prvá vyzerá nasledovne:

$$\sigma_i(t) = [a(T_{i-1} - t) + d] e^{-b(T_{i-1}-t)} + c. \quad (70)$$

Použijúc túto formuláciu, dostávame

$$v_{T_{i-1}-caplet}^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \int_0^{T_{i-1}} ([a(T_{i-1} - t) + d] e^{-b(T_{i-1}-t)} + c)^2 dt. \quad (71)$$

Ako sa píše v [2], flexibilita tejto formulácie nie je dostatočná pre praktické účely, keď potrebujeme model zároveň kalibrovať vzhľadom k trhovým cenám capov aj swapcií.

**Formulácia 7** Vylepšenie tejto formulácie, t.j. odstránenie problému s flexibilitou, ponúka formulácia

$$\sigma_i(t) = \phi_i ([a(T_{i-1} - t) + d] e^{-b(T_{i-1}-t)} + c). \quad (72)$$

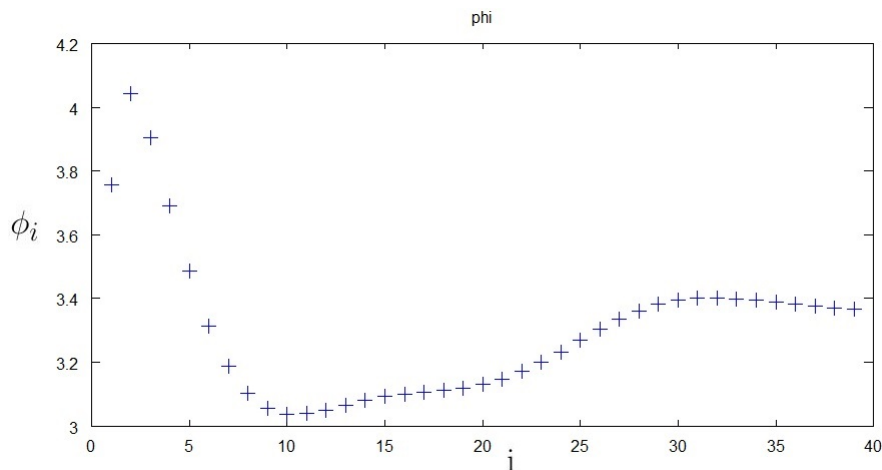
Má platiť, že

$$v_{T_{i-1}-caplet}^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \phi_i^2 \int_0^{T_{i-1}} ([a(T_{i-1} - t) + d] e^{-b(T_{i-1}-t)} + c)^2 dt. \quad (73)$$

Ako pri formuláciách 4 a 5, aj tu môžeme informáciu o trhom daných volatilitách postihnúť tým spôsobom, že vyjadríme  $\phi$  v závislosti od ostatných parametrov, v tomto prípade  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a  $d$ :

$$\phi_i^2 = \frac{T_{i-1} v_{T_{i-1}-caplet}^2}{\int_0^{T_{i-1}} ([a(T_{i-1} - t) + d] e^{-b(T_{i-1}-t)} + c)^2 dt}. \quad (74)$$

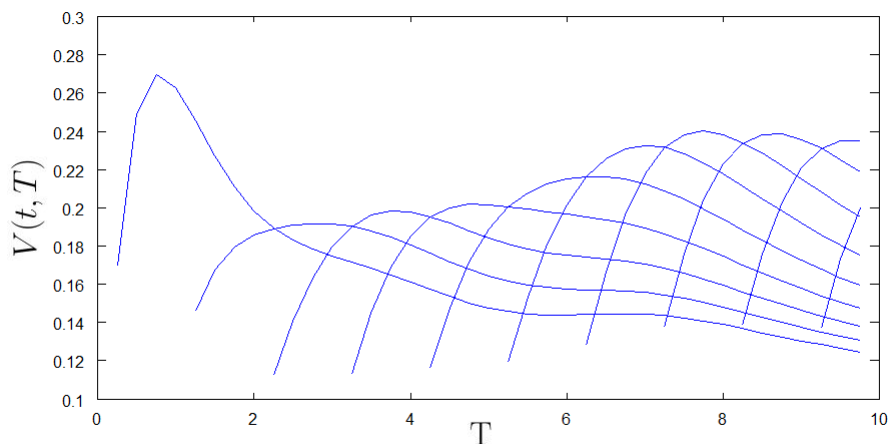
Pre hodnoty parametrov  $a = 0.19$ ,  $b = 0.97$ ,  $c = 0.08$  a  $d = 0.01$  uvádzame v nasledujúcich dvoch obrázkoch hodnoty parametrov  $\phi_i$  a časovú štruktúru volatility pri tejto formulácii.



Obr. 11: Formulácia 7: Parametre  $\phi_i$

**Zhrnutie** Ako sme už spomenuli v prehľade, formulácie 4 a 6 nie sú v [2] odporúčané a formulácia 1 vyžaduje priveľa parametrov. Formulácie 5 a 7 majú ešte niekoľko voľných parametrov pre ďalšiu kalibráciu, konkrétne formulácia 5 ich má  $M$  a formulácia 7 ich má 4.

Plne realizovať sa nám podarilo iba formulácie 2 a 3. Istou výhodou formulácie 3 môže byť jej jednoduchosť, pripomeňme, že  $s_k = \sigma_{k,\beta(t)}$ , avšak časová štruktúra volatility nezodpovedá našim očakávaniam na túto krivku.



Obr. 12: Formulácia 7: Časová štruktúra volatility

Tento problém nenastáva pri formulácii 2 a zdá sa, že ňou definovaná štruktúra volatility omnoho lepšie zodpovedá realite.

## 6.2 Korelácie

Ako sme videli v časti 5.4.3, aby bol LIBOR model plne funkčný, potrebujeme okrem volatilit aj korelácie. Nie je ale celkom jednoznačné ako ich získať. Jednou z možností je odhadnúť ich z historických dát. Tak sme postupovali už v spomínanej časti 5.4.3, kde sme dostali tabuľku 2, ktorú tu opäť uvádzame.

$\rho$	$F_1$	$F_2$	$F_3$
$F_1$	1	0.870	0.845
$F_2$	0.870	1	0.919
$F_3$	0.845	0.919	1

Potrebovali by sme však korelácie medzi všetkými mierami  $F_i, i = 1, \dots, M (= 39)$ , nielen medzi prvými tromi. Tu opäť narážame na problém so vstupnými dátami. Keďže poznáme iba EURIBOR miery, údaje v tabuľke 2 predstavujú

všetko, čo môžeme z dát získať. Ak by sme chceli získať celú tabuľku, potrebovali by sme poznať obdobu EURIBOR mier pre maturity od jedného do desiatich rokov.

V [2] uvádzajú niekoľko parametrických formulácií pre korelácie, pričom všetky vychádzajú z parametrizácie, s ktorou prišli Schoenmakers a Coffey [3]. Stačí uvažovať postupnosť reálnych čísel

$$1 = c_1 < c_2 < \dots < c_M, \quad \frac{c_1}{c_2} < \frac{c_2}{c_3} < \dots < \frac{c_{M-1}}{c_M}$$

a položiť

$$\rho_{i,j} := \frac{c_i}{c_j}, \quad i \leq j, \quad i, j = 1, \dots, M.$$

Takto definovaná korelačná matica spĺňa tri hlavné požiadavky, ktoré by sme od nej očakávali, t.j. všetky korelácie sú kladné, pohybujú sa po riadkoch alebo stĺpcoch, korelácie klesajú a pohybujú sa po subdiagonálach, korelácie narastajú.

V tabuľke 14 uvádzame korelačnú maticu získanú z hodnôt  $c_1, c_2, \dots, c_M = 1, 2, \dots, M$ .

$\rho$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$\dots$	$F_{39}$
$F_1$	1	0.5	0.333	0.25	$\dots$	0.026
$F_2$	0.5	1	0.667	0.5	$\dots$	0.051
$F_3$	0.333	0.667	1	0.75	$\dots$	0.077
$F_4$	0.25	0.5	0.75	1	$\dots$	0.103
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$F_{39}$	0.026	0.051	0.077	0.103	$\dots$	1

Tabuľka 14: Korelácie získané pomocou M-parametrickej formulácie

Pri tejto formulácii však potrebujeme  $M$  parametrov, čo by bolo pre prípadnú kalibráciu na ceny swapcií priveľa. Zjednodušením [2] možno získať

parametrizáciu s nižším počtom parametrov, ako napríklad nasledovnú dvojparametrickú formuláciu.

$$\rho_{i,j} = \exp \left\{ -\frac{|i-j|}{M-1} \left( -\ln \rho_{\infty} + \frac{\eta(i^2 + j^2 + ij - 3Mi - 3Mj + 3i + 3j + 2M^2 - m - 4)}{(M-2)(M-3)} \right) \right\}, \quad (75)$$

kde  $\rho_{\infty} = \rho_{1,M}$

V tabuľke 15 je korelačná matica pre hodnoty  $\rho_{\infty} = 0.2$  a  $\eta = 1.841$ , pričom  $\eta$  sme zvolili tak, aby sa  $\rho_{1,2}$  zhodovalo s  $\rho_{1,2}$  z korelačnej matice odhadnutej z historických dát.

$\rho$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$\dots$	$F_{39}$
$F_1$	1	0.87	0.763	0.674	$\dots$	0.2
$F_2$	0.87	1	0.877	0.775	$\dots$	0.23
$F_3$	0.763	0.877	1	0.884	$\dots$	0.262
$F_4$	0.674	0.775	0.884	1	$\dots$	0.297
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$F_{39}$	0.2	0.23	0.262	0.297	$\dots$	1

Tabuľka 15: Korelácie získané pomocou dvojparametrickej formulácie



## 7 Záver

V poslednej kapitole sme sa zamerali na kalibráciu LIBOR modelu. Prvou úlohou bolo z dostupných dát pre cap-volatility extrahovať volatility jednotlivých capletov. Pri riešení tohto problému možno postupovať rôzne. My sme zvolili aproximáciu cap-volatilit polynómom, ktorá nám zaručila, že výsledná krivka caplet-volatilit mala tvar, ktorý nám umožňoval použiť skúmané formulácie pre štruktúru volatility. týchto formulácií sme uviedli sedem, pri dvoch z nich sme uviedli aj konkrétnu realizáciu, ostatné ponechávali voľné parametre či už na kalibráciu podľa cien swapcií alebo pre zapracovanie štruktúry korelácií.

Nedostatkom týchto kalibrácií boli vstupné dáta, t.j. úrokové miery. Pre jeho odstránenie by bolo potrebné identifikovať na trhu úrokové miery, ktoré zodpovedajú EURIBORU pre maturity vyššie ako jeden rok.

Napokon sme spomenuli problém určenia korelačnej matice. Tiež sme uviedli ako príklad jednu parametrickú formuláciu, avšak ak by sme chceli získať skutočný odhad korelačnej matice, boli by potrebné ceny swapcií alebo, ak by sme sa spoliehali na historické odhady, potrebovali by sme reálne dáta pre vývoj úrokových mier.

Pri použití modelu na oceňovanie derivátov by bolo tiež nutné uvažovať nad znížením hodnosti korelačnej matice, čo je téma, ktorej sme sa v práci nevenovali.

## Literatúra

- [1] Alan Brace, Dariusz Gatarek, and Marek Musiela. The market model of interest rate dynamics. *Mathematical Finance*, 7(2), 1997.
- [2] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest rate models - theory and practice*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [3] Brian Coffey and John Schoenmakers. Stable implied calibration of a multifactor libor model via a semiparametric correlation structure. Weierstraß Institut für Angewandte Analysis und Stochastik preprint, 2000.
- [4] Nevena Šelić. The libor market model. Diplomová práca, University of the Witwatersrand, Johannesburg, 2006.
- [5] Robert J. Elliot and P. Ekkehard Kopp. *Mathematics of Financial Markets*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [6] Aleš Černý. *Mathematical Techniques in Finance*. Princeton University Press, Princeton, 2009.
- [7] Daniel Ševčovič. *Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie*. IRIS, Bratislava, 2008.
- [8] Farshid Jamshidian. Libor and swap market models and measures. *Finance Stochast.*, 1:293–330, 1997.
- [9] Lionel Martellini, Philippe Priaulet, and Stéphane Priauleti. *Fixed-income securities: valuation, risk management, and portfolio strategies*. Wiley, Chichester, 2003.
- [10] Igor Melicherčík, Ladislava Olšárová, and Vladimír Úradníček. *Kapitoly z finančnej matematiky*. Epos, Bratislava, 2005.

- [11] Marek Musiela and Marek Rutkowski. Continuous-time term structure models: Forward measure approach. *Finance Stochast.*, 1:261–291, 1997.
- [12] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [13] Riccardo Rebonato. *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives*. Princeton University Press, Princeton, 2002.