

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Sférické metódy pre úlohy lineárneho programovania

Diplomová práca



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Sférické metódy pre úlohy lineárneho programovania

Diplomová práca

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Vedúci diplomovej práce: prof. RNDr. Ján Plesník, DrSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jozef Jakubík
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Sféricke metódy pre úlohy lineárneho programovania

Cieľ: Preštudovať a spracovať dostupné pramene o sférických metódach. Naprogramovať program v MATLABe a porovnať sféricke metódy s tradičnými metódami. Pokúsiť sa zlepšiť sféricke metódy na základe numerických experimentov.

Vedúci: prof. RNDr. Ján Plesník, DrSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 25.01.2012

Dátum schválenia: 26.01.2012
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 24. 4. 2013

.....

Bc. Jozef Jakubík

Podakovanie

Touto cestou by som sa rád poďakoval vedúcemu diplomovej práce za cenné rady a pripomienky, za poskytnutie literatúry a hlavne za trpezlivosť a prejavení dôveru.

Abstrakt

Jakubík, Jozef: Sférické metódy pre úlohy lineárneho programovania [Diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Vedúci diplomovej práce: prof. RNDr. Ján Plesník, DrSc.

Bratislava 2013

V diplomovej práci spracovávame dostupné pramene o sférických metódach. Ide o optimalizačné metódy vnútorného bodu, ktoré sa v súčasnosti dostávajú do povedomia vďaka tomu, že pri riešení úlohy lineárneho programovania nevyžadujú operáciu maticovej inverzie, ktorá je výpočtovo zložitá pre husté matice. Prejdeme všetkými v súčasnosti zverejnenými metódami vnútorného bodu, aby sme zachytili ich vývoj a posun od metód, ktoré využívajú operáciu maticovej inverzie sporadicky po metódy, ktoré nevyžadujú operáciu maticovej inverzie v žiadnej podobe.

Momentálne sa pracuje na implementácii týchto metód v nízkoúrovňovom programovacom jazyku, aby sa ukázala ich konkurencieschopnosť s už existujúcimi metódami. My sa v práci pokúsime porovnať metódy v prostredí Matlab a na základe numerických experimentov sa pokúsime zlepšiť sférické metódy.

Kľúčové slová

lineárne programovanie • metódy vnútorného bodu • sférické metódy • stred visanej gule polytopu

Abstract

Jakubík, Jozef: Sphere Methods for Linear Programming [Master's Thesis]. Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Department of Applied Mathematics and Statistics.

Supervisor: prof. RNDr. Ján Plesník, DrSc.

Bratislava 2013

In this paper we look at available sources of information on sphere methods for linear programming. These are interior point optimisation methods that have come to light mainly thanks to the absence of matrix inversion, which is known to have a high computational complexity. We will go through all interior point methods known up to date, with the aim of capturing their development and the movement from methods that make sporadic use of matrix inversion towards methods that make no use of it whatsoever.

Currently, progress is being made in the field of implementation of such methods in low-level programming languages, but whether these methods can compete with existing methods remains yet to be seen. In this work, we will try to compare the methods in Matlab environment and propose a number of improvements to the sphere methods on the basis of conducted numerical experiments.

Key words

linear programming • interior point methods • sphere methods • ball centers of a polytope

Obsah

Úvod	9
Použité značenie	11
1 Sféricke metódy pre úlohy lineárneho programovania	12
1.1 Sféricke metódy a primárno-duálna metóda	13
1.2 Stred vpísanej gule	14
1.2.1 Stred vpísanej gule na nadrovine $\{x : c^T x = t\}$	15
1.2.2 Aproximatívny výpočet stredu vpísanej gule	16
1.2.3 LSFN, line serch steps in facetal normal directions	17
1.2.4 LSCPD, line search using computed profitable directions	18
1.2.5 Aproximácia stredu vpísanej gule ležiacom na nadrovine $x : c^T x = t$.	20
1.3 Sféricke metódy	20
1.3.1 Centrujúce kroky	21
1.3.2 Napredujúce kroky	27
1.4 Metóda použitá na vyriešenie dvojrozmernej úlohy LP tvaru (1.2-3)	31
2 Numerické experimenty	34
3 Úpravy na základe numerických experimentov	38
Záver	40
Zoznam použitej literatúry	41
Príloha	42

Úvod

Lineárne programovanie je odvetvie optimalizácie, ktoré sa zaoberá riešením problémov nájdania minima (resp. maxima) lineárnej funkcie na množine popísanej sústavou lineárnych rovníc alebo nerovnic. Rôzne praktické problémy, napríklad diétny problém, dopravná úloha a mnohé ďalšie, možno previesť na úlohu lineárneho programovania.

Na riešenie úloh lineárneho programovania existuje viacero spoľahlivých algoritmov. V súčasnosti je softvér na riešenie úloh lineárneho programovania založený najmä na simplexových metódach a metódach vnútorného bodu, hlavne na primárno-duálnej metóde vnútorného bodu. Tieto populárne metódy majú svoje výhody a nevýhody. Simplexové metódy je vhodnejšie využiť pri malých úlohách, so zväčšujúcim sa počtom premenných a ohraničení úlohy začína byť riešenie úlohy pomocou simplexovej metódy výpočtovo náročné. Primárno-duálna metóda si poradí aj s väčšími úlohami ale nedáva nám presné riešenie, iba jeho aproximáciu. Jej výhoda je, že rieši súčasne primárnu aj duálnu úlohu lineárneho programovania. Primárno-duálne metódy si vyžadujú operáciu maticovej inverzie, preto sa tieto metódy používajú najmä na riešenie úloh s riedkymi maticami. V praxi sa vyskytujú aj úlohy s hustými maticami, ktorých riešenie pomocou týchto metód je výpočtovo náročné. Preto je snaha vyvinúť algoritmus, ktorý by sa zaobišiel bez akejkoľvek formy maticovej inverzie.

Cielom tejto práce je predstaviť čitateľovi sférické metódy [Murty, 2010a], ktoré využívajú operáciu maticovej inverzie striedmo, prípadne ju vôbec nevyužívajú. Preto môžu byť potenciálne vhodné na riešenie veľkých úloh s hustými maticami.

Sférické metódy sú moderné metódy vnútorného bodu na riešenie úloh lineárneho programovania, ktoré predstavil a rozvíja najmä profesor Katta G. Murty <<http://www-personal.umich.edu/~murty/>>, ktorý podal dôkaz o tom, že počet iterácií sférických metód pri riešení úloh lineárneho programovania sa dá zhora ohraničiť $O(m)$ [Murty, 2012]. V dôkaze bola ale chyba.

V práci postupne predstavíme jednotlivé sférické metódy, z ktorých niektoré používajú operáciu maticovej inverzie, iné nie. Metódy taktiež naprogramujeme v prostredí Matlab a porovnáme ich výsledky s výsledkami revidovanej simplexovej metódy a primárno-duálnej

metódy vnútorného bodu. Nakoniec sa na základe numerických experimentov pokúsime navrhnúť zlepšenia daných metód.

Použité značenie

V tejto práci budeme používať nasledovné značenie.

K = Množina prípustných riešení základnej úlohy (1.0-1).

K^0 = Vnútro množiny K , $\{x : Ax > b\}$.

Aktualizovaná množina prípustných riešení,
 K^{r+1} = $\{x : Ax \geq b, c^T x \leq c^T x^r + \epsilon\}$, kde x^r je bod z ktorého začíname r -tú iteráciu a ϵ je malá kladná konštanta.

$\delta(x)$ = Polomer najväčšej možnej gule vpísanej do množiny K so stredom v bode $x \in K^0$, $\min \{A_i x - b_i : i = 1, \dots, m\}$.

$T(x)$ = Množina nadrovín, ktorých sa dotýka najväčšia vpísaná guľa so stredom v $x \in K^0$, $\{i : A_i x = \delta(x), i = 1, \dots, m\}$.

c^i = $(I - (A_i)^T A_i)c$, ortogonálna projekcia vektora c na množinu $\{x : A_i x = 0, i = 1, \dots, m\}$.

1 Sféricke metódy pre úlohy lineárneho programovania

Sféricke metódy patria medzi prediktor-korektor metódy vnútorného bodu a riešia úlohu LP v tvare

$$\begin{aligned} \min z(x) &= c^T x \\ Ax &\geq b \end{aligned} \tag{1.0-1}$$

pričom poznáme štartovací vnútorný bod x^0 , ktorý splňa $Ax^0 > b$. Predpokladáme, že každý riadok matice $A_{m \times n}$ a rovnako aj vektor c je normalizovaný, teda $\|A_i\| = 1$ pre $i = 1 \dots m$ a $\|c\| = 1$ ($\|\cdot\|$ je euklidovská norma). Toto zabezpečí ľahký výpočet vzdialeností pri riešení úlohy.

Pri riešení úlohy (1.0-1) pomocou metód vnútorného bodu vyžadujeme, aby bolo vnútro množiny prípustných riešení neprázdne, teda $K^0 \neq \emptyset$. Na spustenie sférických metód potrebujeme počiatočný prípustný vnútorný bod. Na určenie počiatočného prípustného vnútorného bodu použijeme poznatok, že keď „potlačíme“ steny vzad o rovnakú vzdialenosť, tak sa poloha stredu vpísanej gule nezmení.

Ak máme ľubovoľný počiatočný bod x^0 , tak určíme hodnotu

$$\Delta_0 = \text{minimum} \{A_i x^0 - b_i : i = 1, \dots, m\}.$$

Ak je hodnota Δ_0 kladná, počiatočný bod je vnútorný. V takom prípade začneme riešiť úlohu (1.0-1) s bodom x^0 , ako počiatočným prípustným vnútorným riešením.

Ak $\Delta_0 = 0$, ide o bod z hranice. V prípade ak $\Delta_0 < 0$, tak ide o vonkajší bod. V týchto prípadoch definujeme $\Delta = 1 + |\Delta_0|$ a „odtláčime“ ohraničenia úlohy o hodnotu Δ . Dostaneme tak pozmenené podmienky úlohy (1.0-1)

$$Ax \geq b - \Delta e, \tag{1.0-2}$$

kde e je vektor samých jednotiek prislúchajúcich rozmerov. Teraz je bod x^0 vnútorný bod pre podmienky (1.0-2). Presný stred vpísanej gule množiny (1.0-2) je aj stred vpísanej gule množiny prípustných riešení pôvodnej úlohy (1.0-1), a teda aj prípustný vnútorný bod danej úlohy. Aplikujme aproximatívny centrujúci krok (uvedené nižšie) na množinu (1.0-2) z bodu

x^0 , kým nenájdeme aproximáciu stredu, ktorá bude prípustným vnútorným riešením pôvodnej úlohy (1.0-1). Tento bod použijeme ako počiatočné prípustné vnútorné riešenie pre úlohu (1.0-1).

1.1 Sféricke metódy a primárno-duálna metóda

Primárno-duálna metóda je v praxi veľmi obľúbená na implementáciu, lebo súčasne rieši primárnu aj duálnu úlohu a v každom kroku vieme odhadnúť ako ďaleko sme od optimálneho riešenia z primárno-duálnej medzery. Ukážeme, ako previesť riešenie úlohy LP primárno-duálnym algoritmom na sféricke metódy a teda, ako môžeme pomocou sférických metód získať súčasne riešenie primárnej aj duálnej úlohy LP. Uvažujme úlohu LP v tvare

$$\begin{aligned} \min f^T x \\ Fx = h \\ Gx \geq g \end{aligned} \tag{1.1-1}$$

kde F je matica rozmerov $p \times q$. Nech π, μ sú duálne vektory prislúchajúce k jednotlivým riadkom v (1.1-1). Riešenie (1.1-1) primárno-duálnym algoritmom zahŕňa nájdenie prípustného riešenia pre úlohu

$$\begin{aligned} Fx = h \\ \pi F + \mu G = f \\ (Gx, \mu, -fx - \pi h + \mu g) \geq (g, 0, 0). \end{aligned} \tag{1.1-2}$$

Danej sústave (1.1-2) zodpovedá nasledujúca úloha LP.

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^p (F_{i \cdot} x - h_i) + \sum_{j=1}^q (\pi F_{\cdot j} + \mu G_{\cdot j} - f_j) \\ (Fx, Gx) \geq (h, g) \\ (\pi F + \mu G, \mu, -fx - \pi h + \mu g) \geq (f, 0, 0) \end{aligned} \tag{1.1-3}$$

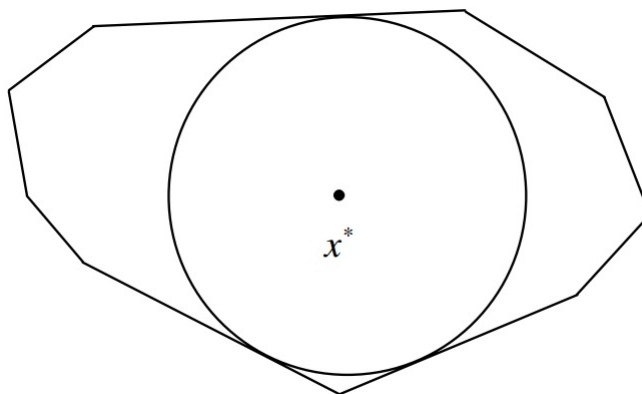
Táto úloha je rovnakého tvaru ako úloha (1.0-1). Aj napriek zložitému tvaru nemusí byť numericky neriešiteľná. A takáto forma úlohy dáva ľahko overiteľnú podmienku optimality, lebo v optime je hodnota účelovej funkcie nulová.

1.2 Stred vpísanej gule

Stred vpísanej gule označuje stred vpísanej gule s najväčším možným polomerom. Stred vpísanej gule x^* môžeme dostať riešením úlohy LP v tvare

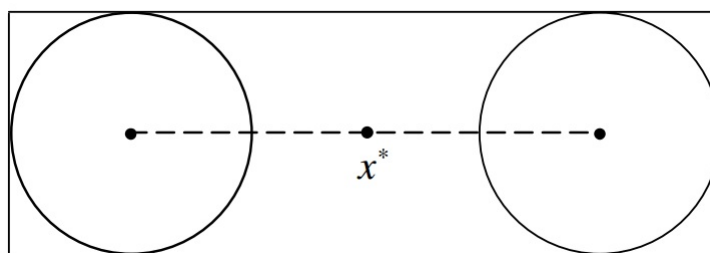
$$\begin{aligned} \max \delta \\ \delta \leq A_i x - b_i, \quad i = 1 \dots m \end{aligned} \tag{1.2-1}$$

δ označuje polomer vpísanej gule. Ak existuje jediné riešenie (δ^*, x^*) úlohy (1.2-1), potom je stred x^* jednoznačne definovaný ako vidno na obrázku (1.2).



Obr. 1–1 Množina prípustných riešení K s jednoznačne určeným stredom najväčšej možnej vpísanej gule x^* .

Ako vidno na obrázku (1.2), môže nastať prípad, keď stred vpísanej gule nie je jednoznačne definovaný. V takomto prípade postupujeme rekurentne. Vezmeme množinu všetkých optimálnych riešení S úlohy (1.2-1) a nájdeme stred vpísanej gule množiny S . V každom kroku sa dimenzia množiny S zmenší a polytop dimenzie 1 je úsečka, ktorá má dobre definovaný stred, preto dostávame jednoznačne vyjadrenie stredu vpísanej gule.



Obr. 1–2 Ukážka množiny prípustných riešení K takej, že stred najväčšej možnej vpísanej gule nie je jednoznačne určený. V tomto prípade bude stred najväčšej vpísanej gule bod x^* , stred úsečky spájajúcej dva vyznačené stredy

1.2.1 Stred vpísanej gule na nadrovine $\{x : c^T x = t\}$

Za stred vpísanej gule na nadrovine $\{x : c^T x = t\}$ budeme považovať stred vpísanej gule s najväčším možným polomerom, pre ktorý platí $\{x : c^T x = t\}$. Je to optimálne riešenie úlohy

$$\begin{aligned} \max \delta \\ \delta - A_i \cdot x \leq -b_i, \quad i = 1 \dots m \\ c^T x = t \end{aligned} \quad (1.2-2)$$

Opäť môže nastať prípad nejednoznačnosti riešenia, v takom prípade postupujeme opäť rekurentne ako v predchádzajúcom prípade. Teda stred vpísanej gule na nadrovine $\{x : c^T x = t\}$ je jednoznačne definovaný.

V prípade, že množina prípustných riešení K je neohraničená môže nastať jedna z nasledujúcich situácií:

- polomer δ najväčšej vpísanej gule je neohraničený,
- neexistuje jednoznačný stred vpísanej gule, teda množina všetkých optimálnych riešení úlohy (1.2-1) je neohraničená.

V oboch prípadoch vieme zvoliť nadrovinu H takú, že ak množina $K \cap H$ je ohraničená, tak stred vpísanej gule tejto množiny je dobre definovaný a riešenie úlohy na množine $K \cap H$ je rovnaké ako na množine K . Ak je množina $K \cap H$ neohraničená, tak aj pôvodná úloha je neohraničená.

1.2.2 Aproximatívny výpočet stredu vpísanej gule

V praxi na výpočet stredu vpísanej gule použijeme aproximatívny postup pozostávajúci z výberu kladných smerov (smery, v ktorých hodnota polomeru vpísanej gule rastie) a výpočtu dĺžky optimálneho kroku v týchto smeroch.

Začíname z aktuálneho vnútorného bodu \bar{x} . Smer y z \bar{x} nazývame *kladný* ak platí, že existuje dĺžka kroku α v smere y taká, že polomer vpísanej gule so stredom v $(\bar{x} + \alpha y)$ je väčší ako polomer vpísanej gule so stredom v \bar{x} ($\delta(\bar{x} + \alpha y) > \delta(\bar{x})$).

Veta 1.1. y je kladný smer zo súčasného vnútorného bodu \bar{x} , práve vtedy ak $A_i y > 0$ pre všetky $i \in T(\bar{x})$. Tiež platí, že \bar{x} je stred vpísanej gule K práve vtedy ak $A_i y > 0$ pre všetky $i \in T(\bar{x})$ nemá riešenie.

Dôkaz. Existuje α pre ktoré platí $\delta(\bar{x} + \alpha y) = \min\{A_i(\bar{x} + \alpha y) - b_i : i = 1 \dots m\}$ a $\delta(\bar{x} + \alpha y) = \delta(\bar{x})$ keď $\alpha = 0$. Z definície $T(\bar{x})$ máme $\delta(\bar{x}) = A_i \bar{x} - b_i$ pre všetky $i \in T(\bar{x})$.

Dôsledok 1. Pre všetky $i \notin T(\bar{x})$ platí $A_i \bar{x} - b_i > \delta(\bar{x})$, a preto pre α kladné, dostatočne malé platí $A_i(\bar{x} + \alpha y) - b_i > \delta(\bar{x})$, nezávisle od znamienka $A_i y$.

Dôsledok 2. Ak $A_i y > 0$ pre všetky $i \in T(\bar{x})$, tak $A_i(\bar{x} + \alpha y)$ je ostro rastúca funkcia premennej α .

Z dôsledkov 1 a 2 vyplýva, že ak α je kladné, ale dostatočne malé a y spĺňa $A_i y > 0$ pre všetky $i \in T(\bar{x})$, tak $\delta(\bar{x} + \alpha y) = \min\{A_i(\bar{x} + \alpha y) - b_i : i = 1 \dots m\} > \delta(\bar{x})$; t.j. $\delta(\bar{x} + \alpha y)$ je ostro rastúca funkcia premennej α . Tým sme ukázali, že za podmienok uvedených v znení vety je y kladným smerovým vektorom pre bod \bar{x} .

Ak existuje aspoň jeden index, povedzme $i_1 \in T(\bar{x})$, pre ktorý platí $A_{i_1} y \leq 0$, tak pre kladné, ale dostatočne malé α platí $A_{i_1}(\bar{x} + \alpha y) - b_{i_1} \leq A_{i_1} \bar{x} - b_{i_1} = \delta(\bar{x})$, keďže $i_1 \in T(\bar{x})$. S prihliadnutím na definíciu $\delta(\bar{x} + \alpha y)$ sme týmto ukázali, že v tomto prípade $\delta(\bar{x} + \alpha y)$ buď ostáva nezmenené alebo ostro klesá.

Pre $x \in K$, $\delta(x) = \min\{A_i(\bar{x} + \alpha y) - b_i : i = 1 \dots m\}$ je po častiach afinne lineárna funkcia, ktorá je bodovým infimom konečnej množiny afinných funkcií, a preto je $\delta(x)$ konkávna

funkcia. Ak pre \bar{x} neexistuje kladný smer, potom \bar{x} je maximom konkávnej funkcie $\delta(x)$ nad K , t.j. \bar{x} je stredom gule K . \square

Keďže $\delta(\bar{x} + \alpha y) = \min\{A_i(\bar{x} + \alpha y) - b_i : i = 1 \dots m\}$, tak $\delta(\bar{x} + \alpha y) \leq A_i\bar{x} + \alpha A_i y - b_i$ pre všetky $i = 1 \dots m$.

Takže pre nejaké y označme $\bar{\delta}$ maximálnu hodnotu $\delta(\bar{x} + \alpha y)$ pre $\alpha \geq 0$ a $\bar{\alpha} \geq 0$ tú hodnotu α , pre ktorú $\delta(\bar{x} + \alpha y)$ maximum nadobúda. Potom $(\bar{\delta}, \bar{\alpha})$ je optimálne riešenie nasledujúcej úlohy LP s premennými δ a α .

$$\begin{aligned} & \max \delta \\ & \delta - \alpha A_i y \leq A_i \bar{x} - b_i, \quad i = 1 \dots m \\ & \delta, \alpha \geq 0. \end{aligned} \tag{1.2-3}$$

Takže optimálnu dĺžku kroku v úlohe maximalizácie $\delta(\bar{x} + \alpha y)$ pre $\alpha \geq 0$ v danom smere y môžeme nájsť riešením tejto dvojrozmernej úlohy LP.

Uvedieme dva aproximatívne postupy na výpočet stredy vpísanej gule.

1.2.3 LSFN, line serch steps in facet normal directions

Tento postup začína s počiatočnou hodnotou $x^{r,0} = x^r$, ktorá generuje postupnosť bodov $x^{r,k}$, $k = 1, 2, \dots$ pozdĺž ktorej je polomer vpísanej gule δ rýdzo rastúci. Výhoda tohoto postupu je, že nevyžaduje operáciu maticovej inverzie.

Či je daný smer y kladný alebo nie zo súčasného $x^{r,k}$ sa dá overovať veľmi efektívne použitím vety (1.1) ($A_i y > 0$ pre všetky $i \in T(x^{r,k})$). Cieľom tohoto postupu je zvýšiť minimálnu vzdialenosť od x od každej steny K . Na to procedúra LSFN využíva smery kolmé na steny K . $\Gamma_1 = \{A_i^T, -A_i^T : i = 1 \dots m\}$ je množina smerov kolmých na steny K . Táto procedúra pokračuje, kým množina Γ_1 obsahuje kladné smery a ukončíme ju s aproximovaným stredom vpísanej kružnice K .

Dĺžku kroku v nájdenom kladnom smere v tejto metóde môžeme vypočítať pomocou dvojrozmernej úlohy LP. Nech máme kladný smer y z bodu $x^{r,k}$. Optimálna dĺžka kroku α maximalizujúca $\delta(x^{r,k} + \alpha y)$ pre $\alpha \geq 0$ je $\bar{\alpha}$, pričom $(\bar{\delta}, \bar{\alpha})$ je optimálne riešenie dvojrozmernej

úlohy LP

$$\begin{aligned} & \max \delta \\ & \delta - \alpha A_i y \leq A_i x^{r,k} - b_i, \quad i = 1 \dots m \\ & \delta, \alpha \geq 0 \end{aligned} \tag{1.2-4}$$

pričom $\bar{\delta}$ je optimálne hodnoty $\delta(x^{r,k} + \bar{\alpha}y)$. Na riešenie dvojrozmernej úlohy LP, môžeme efektívne využiť napríklad simplexový algoritmus. My však využijeme na vyriešenie dvojrozmernej úlohy LP inú aproximatívnu metódu popísanú nižšie.

1.2.4 LSCPD, line search using computed profitable directions

Tento postup pozostáva najviac z n krokov, v ktorých sa vypočíta rastúci smer vyriešením sústavy lineárnych rovníc. V každom kroku vzrastie počet stien, ktorých sa vpísaná guľa dotýka. Algoritmus ukončíme, keď sa množina stien, ktorých sa vpísaná guľa dotýka stane lineárne závislá. Preto je počet krokov v tomto algoritme najviac n . Pri tomto algoritme budeme potrebovať operáciu maticovej inverzie, ale priamy výpočet inverznej matice môžeme nahradiť výpočtom, ktorého zložitosť je menšia ako priamy výpočet.

Algoritmus začíname s počiatočnou hodnotou $x^{r,0} = x^r$. Ak $x^{r,k}$ je súčasné riešenie z vety (1.1) vieme, že každé riešenie rovnice

$$A_i y = d_i \quad i \in T(x^{r,k}) \tag{1.2-5}$$

kde $d = (d_i : i \in T(x^{r,k})) > 0$ je ľubovoľný kladný kladný vektor, je kladný smer na posun z $x^{r,k}$.

V praktických výpočtoch budeme počítať s $d = \mathbf{1}$. Keď už poznáme rastúci smer y optimálnu dĺžku kroku v tomto smere vypočítame rovnako ako v LSFN, teda vyriešením dvojrozmernej úlohy LP (1.2-4).

Ak pre počiatočnú hodnotu $x^{r,k}$ pre $k = 0$ nemá systém (1.2-5) pre $d = \mathbf{1}$ riešenie, tak skončíme s počiatočným bodom ako s aproximáciou stredu vpísanej gule K .

Ak existuje riešenie y^k predpokladajme, že je to bázické riešenie. Nech vektor y_{B^k} je bázická časť vektora y^k a B^k je štvorcová matica v ktorej stĺpce prislúchajú k stĺpce zo systému

(1.2-5), vybratým na základe y_B^k . Ak kladné α^k je dĺžka optimálneho kroku maximalizujúca $\delta(x^{r,k} + \alpha y^k)$, tak $A_i(x^{r,k} + \alpha y^k) = A_i x^{r,k} + \alpha$ sa pre každé $i \in T(x^{r,k})$ zväčší o rovnakú hodnotu *alpha*. Z toho vyplýva $T(x^{r,k+1}) \supset T(x^{r,k})$ ak $x^{r,k+1} = x^{r,k} + \alpha^k y^k$.

Algoritmus bude teraz pokračovať rovnakým spôsobom s počiatočným bodom $x^{r,k+1}$. Predpokladajme, že $T(x^{r,k}) = \{1 \dots s\}$ a $T(x^{r,k+1}) = \{1 \dots s, s+1\}$. Potom môžeme kladný smer vypočítať riešením systému

$$A_i y = d_i \quad i \in \{1 \dots s, s+1\} \quad (1.2-6)$$

Nech $\mathcal{A}^k = (B^k : D^k)$ je preusporiadanie stĺpcov systému (1.2-5), tak že prvé idú stĺpce prislúchajúce k bázickým zložkám vektora y^k a $(A_{s+1}^{B^k}, A_{s+1}^{D^k})$ je rovnako rozdelený vektor A_{s+1} . Množina stien, ktorých sa vpísaná guľa dotýka $\{A_i : i \in T(x^{r,k+1})\}$ je lineárne nezávislá práve vtedy ak $A_{s+1}^{D^k} - A_{s+1}^{B^k} (B^k)^{-1} D^k \neq 0$. Preto ak je splnená podmienka $A_{s+1}^{D^k} - A_{s+1}^{B^k} (B^k)^{-1} D^k = 0$ môžeme prerušiť algoritmus s $x^{r,k+1}$ a vyhlásiť ho za finálnu aproximáciu stredu vpísanej gule K . V opačnom prípade, ak je výsledný vektor rôzny od $\mathbf{0}$ vyberieme z neho nenulový prvok. Predpokladajme, že vybraný prvok prislúcha k premennej y_j , \mathcal{A}_j^k je stĺpec prislúchajúci k y_j v \mathcal{A}^k . Vektor $y_{B^{k+1}} = (y_B^k, y_j)$ je bázická časť vektora $y^k + 1$ pre (1.2-6). Prislúchajúce B^{k+1} je

$$B^{k+1} = \begin{pmatrix} B^k & \vdots & \mathcal{A}_j^k \\ \dots & & \dots \\ A_{s+1}^{B^k} & \vdots & a_{s+1,j} \end{pmatrix}$$

kde $a_{s+1,j}$ je koeficient prislúchajúci k y_j v A_{s+1} . Potom

$$(B^{k+1})^{-1} = \begin{pmatrix} P & \vdots & Q \\ \dots & & \dots \\ R & \vdots & S \end{pmatrix}$$

kde

$$\begin{aligned} S &= 1 / \left(a_{s+1,j} - A_{s+1}^{B^k} \cdot (B^k)^{-1} \mathcal{A}_{.j}^k \right) \\ R &= \left(-A_{s+1}^{B^k} \cdot (B^k)^{-1} \right) / \left(a_{s+1,j} - A_{s+1}^{B^k} \cdot (B^k)^{-1} \mathcal{A}_{.j}^k \right) \\ Q &= - (B^k)^{-1} \mathcal{A}_{.j}^k S \\ P &= (B^k)^{-1} + QR/S \end{aligned}$$

Teda $(B^{k+1})^{-1}$ môžeme vypočítať pomocou $(B^k)^{-1}$ využitím horeuvedeného výpočtu.

Obe uvedené metódy majú svoje nedostatky preto je vhodné ich pri praktický výpočtoch kombinovať, čím dostaneme lepšiu aproximáciu stredu vpísanej gule. Ak teda začíname prípustným vnútorným riešením najskôr použijeme metódu LSFN a s jej výsledkom potom inicializujeme LSCPD metódu.

1.2.5 Aproximácia stredu vpísanej gule ležiacom na nadrovine $x : c^T x = t$

Jediný rozdiel od predchádzajúceho prípadu je pridanie dodatočnej podmienky $c^T x = t$. Obe vyššie zmienené techniky môžeme použiť priamo, len s drobný úpravami. V LSFN metóde hľadáme kladné smery namiesto v množine Γ_1 v množine $\Gamma_2 = \{P_{.1}, \dots, P_{.m}, -P_{.1}, \dots, -P_{.m}\}$, kde $P_{.i} = (I - c^T c)(A_i)^T$ je ortogonálna projekcia A_i na nadrovinu $\{x : c^T x = 0\}$, pre $i = 1 \dots m$.

V metóde LSCPD musíme pridať podmienku $c^T y = 0$ do všetkých systémov z (1.2-6).

1.3 Sféricke metódy

V súčasnosti autor uvádza päť verzií sférických metód. Všetky metódy sa sa skladajú z dvoch krokov: centrujúci krok a napredujúci krok. Centrujúci krok sa pokúša presunúť súčasné vnútorné prípustné riešenie do iného s väčšou hodnotou $\delta(x)$ pričom nemusí zlepšovať hodnotu účelovej funkcie. Potom nasleduje napredujúci krok, ktorý vychádza so stredu vpísanej gule, ktorý sme našli v centrujúcom kroku a jeho úlohou je čo najviac zlepšiť hodnotu účelovej funkcie. Z týchto dvoch krokov je výpočtovo náročnejší centrujúci krok. Výpočet napredujúceho kroku je v porovnaní s centrujúcim krokom takmer zanedbateľný, preto môžeme počítať

napredujúci krok viacerými spôsobmi a nakoniec si vybrať najvhodnejší krok. S takto získaným vnútorným riešením pokračujeme do ďalšej iterácie, až kým nie je rozdiel dvoch po sebe idúcich hodnôt dostatočne malý.

Najskôr uvedieme rôzne centrujúce kroky a potom napredujúce kroky.

1.3.1 Centrujúce kroky

Úlohou centrujúceho kroku je dostať sa do najlepšej možnej východzej pozície pred napredujúcim krokom. Z určitého pohľadu môžeme stred najväčšej možnej vpísanej gule považovať za stred množiny prípustných riešení. Predpokladáme, že zo stredu množiny prípustných riešení sa nám podarí spraviť lepší napredujúci krok ako z bodu, ktorý je blízko pri hranici množiny prípustných riešení. Stred maximálnej vpísanej gule sa snažíme dosiahnuť, aby sme sa pred centrujúcim krokom čo najviac vzdialili od hranice množiny prípustných riešení.

Centrujúci krok pre sférickú metódu 1

Popíšeme postup $r + 1$ iterácie. Tá začína z prípustného vnútorného bodu x^r , ktorý sme obdržali na konci predchádzajúcej iterácie. Hľadáme stred vpísanej gule úlohy (1.0-1) na nadrovine $\{x : c^T x = t\}$, kde $t = c^T x^r$ za použitia metódy popísanej v (1.2.5).

Dôvod, prečo maximalizujeme stred vpísanej gule na nadrovine $\{x : c^T x = t\}$, kde $t = c^T x^r$ je ten aby sme s maximalizáciou $\delta(x)$ nestrácali hodnotu účelovej funkcie $c^T x$, čo by mohlo v určitých prípadoch nastať. Ďalší dôvod je ten, aby sme mohli tento centrujúci krok použiť opakovane. Ak by sme neobmedzili hľadanie stredu vpísanej gule, tak by sme boli schopní nájsť len stred vpísanej gule pre množinu K pre ľubovoľný počiatkový bod a v takom prípade by bolo zbytočné opakovať tento krok viackrát.

Najskôr aplikujeme metódu LSFN upravenú podľa (1.2.5), teda hľadáme kladné smery v množine Γ_2 namiesto množiny Γ_1 . Túto časť ukončíme s bodom $x^{r,k}$, s ktorým naštartujeme upravenú metódu LSCPD z (1.2.5). V tomto prípade bude LSCPD metóda vyzeráť nasledovne.

Ak sme v bode $x^{r,s}$ hľadáme kladný smer ako riešenie systému

$$A_i y = 1 \text{ pre všetky } y \in T(x^{r,s}).$$

Podmienka $c^T y = 0$ z (1.2.5) nie je obsiahnutá v (1.3.1). Predpokladajme, že dostaneme riešenie y^0 tohoto systému. Nech y_{B^0} je bázický vektor a B^0 je báza. môžu nastať dva prípady.

Prípady 1 Ak $c^T y^0 \leq 0$, potom y^0 nie je len kladný smer ale aj napredujúci krok, ktorý zlepšuje aj hodnotu účelovej funkcie $c^T x$. V tomto prípade nájdeme dĺžku kroku v danom smere rovnako ako je popísané v sekcii (1.2.4). Tento posun zlepší hodnotu $\delta(x)$ a tiež môže zlepšiť aj hodnotu účelovej funkcie.

Prípady 2 Ak $c^T y^0 \leq 0$, potom môžu nastať dva prípady. Rozdelíme maticu z (1.3.1) na bázickú a nebázickú časť $(B^0:D^0)$ rešpektujúc y_{B^0} . Rovnako na bázickú a nebázickú časť $(c_{B^0}:c_{D^0})$ rozdelíme aj účelovú funkciu.

- V prípade ak $c_{D^0} - c_{B^0}(B^0)^{-1}D^0 = 0$ platí, že $c^T y = c^T y^0 > 0$ je konštantné pre každé riešenie (1.3.1). Ak by sme použili ľubovoľné riešenie (1.3.1) na zväčšenie polomeru vpísanej gule $\delta(x)$, tak by sa nám zároveň zhoršila hodnota účelovej funkcie $c^T x$. V takomto prípade ukončíme centrujúci krok s bodom $x^{r,s}$ a pokračujeme na napredujúci krok.
- Ak existuje nenulová zložka vo vektore $c_{D^0} - c_{B^0}(B^0)^{-1}D^0$, ktorá prislúcha ku stĺpcu nebázickej premennej y_j a nenulovú zložku označme \bar{c}_j . Vektor v D^0 prislúchajúci k premennej y_j označme $(D^0)_{.j}$. Potom riešenie y^1 úlohy (1.3.1) také že: všetky premenné okrem y_j v nebázickom vektore y_{D^0} sú nulové a

$$y_{B^0} = y_{B^0}^0 - \theta(B^0)^{-1}(D^0)_{.j}$$

$$\text{nebázické } y_j = \theta$$

kde $\theta = (-1 - c^T y^0)/\bar{c}_j$, splňa $c^T y^1 = -1$. Opäť nájdeme dĺžku kroku z bodu $x^{r,s}$ v smere y^1 rovnako ako v časti (1.2.4). Rovnako ako v prípade 1 tento posun zväčší polomer vpísanej gule ako aj vylepší hodnotu účelovej funkcie $c^T x$.

Centrujúci krok pre sférickú metódu 2

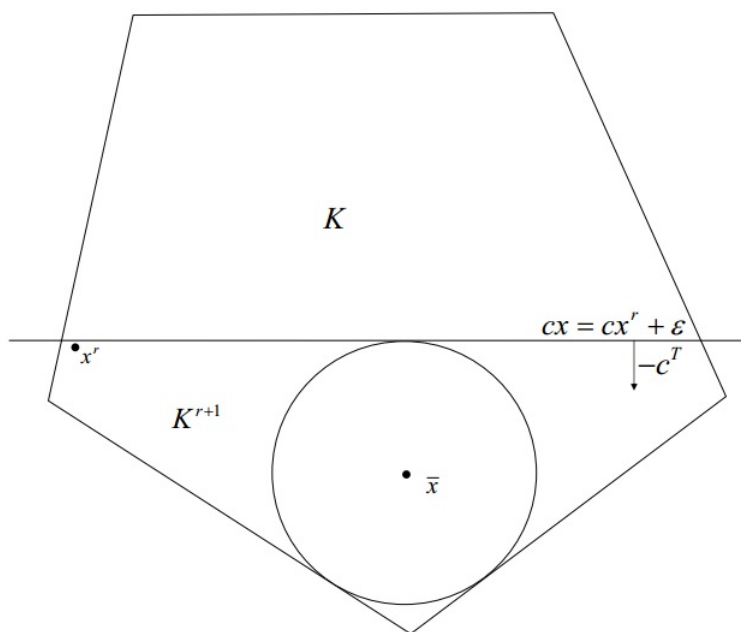
V sférických metódach 2 bránime poklesu účelovej funkcie pri maximalizácii polomeru vpísanej gule $\delta(x)$ tak, že v každom kroku príhodne znižujeme množinu prípustných riešení. K^r označuje množinu prípustných riešení v aktuálnej iterácii. Pre množiny prípustných

riešení v jednotlivých iteráciách vždy platí $K^r \subset K^{r-1} \subset K$. Všetky kroky v oboch centrujú-
cich metódach (LSFN a LSCPD) budú zlepšovať aj hodnotu polomeru vpísanej gule ako aj
hodnotu účelovej funkcie. Prvú iteráciu začneme z vnútorného prípustného bodu x^0 . Ďalej
popíšeme iteráciu $r + 1$ tejto metódy.

x^r je vnútorné prípustné riešenie obdržané v predchádzajúcej iterácii. Definujme novú
množinu prípustných riešení K^{r+1} pre tento krok nasledovne:

$$K^{r+1} = \{x : Ax \geq b, \text{ a súčasne } c^T x \leq c^T x^r + \epsilon\}$$

kde ϵ je kladný tolerančný parameter. Aproximujeme stred vpísanej gule množiny K^{r+1} ako
je popísané v (1.2.2).



Obr. 1–3 K je pôvodná množina prípustných riešení. K^{r+1} je aktuálna množina prípustných riešení v iterácii
 $r + 1$, ktorá bola určená na základe bodu x^r , z ktorého sme začínali túto iteráciu. Vyznačená dvojrozmerná
gula je najväčšia možná guľa, ktorú môžeme vpísať do aktuálnej množiny prípustných riešení K^{r+1} .

LSFN: Množina smerov kolmých na fazety množiny K^{r+1} je

$$\Gamma_1^{r+1} = \{\pm c^T, \pm A_i : i = 1, \dots, m\}.$$

LSFN aplikujeme na množinu K^{r+1} , pričom kladné smery hľadáme v množine Γ_1^{r+1} .

LSCPD: Začínáme z prípustného vnútorného bodu \hat{x} , ktorý sme obdržali na konci LSFN fázy. Po rozšírení úlohy o dodatočnú podmienku, rozšírime aj systém (1.2-5) na:

$$\begin{aligned} A_i y &= 1 & i \in T(\hat{x}) \\ -c^T y &= \beta \end{aligned} \tag{1.3-1}$$

pričom β je kladný parameter. Pri praktických výpočtoch môžeme použiť $\beta = 1$ alebo môžeme pokračovať v nižšie popísanom parametrickom postupe. Parametrické riešenie (1.3-1) pre parameter β môžeme vyjadriť v tvare $p + \beta q$.

Podobne ako v časti (1.2.4) nech B je báza asociovaná k bázickému vektoru y_B a nech y_D je vektor nebázických premenných pre riešenie (1.3-1). Nech sú $p = (p_B; p_D)$ a $q = (q_B; q_D)$ prislúchajúce časti vektorov p, q prislúchajúce k bázickým a nebázickým častiam ($y_B; y_D$) vektora y . Potom $q_D = p_D = 0$ a q_B je posledný stĺpec B^{-1} a p_B je suma zostávajúcich stĺpcov B^{-1} .

Trojrozmerná úloha LP na nájdenie dĺžky kroku v tomto kroku: Pre všetky $\beta > 0$ je $p + \beta q$ kladný smer z \hat{x} . Optimálna dĺžka kroku α v smere $p + \beta q$, ktorá maximalizuje $\delta(\hat{x} + \alpha(p + \beta q))$, polomer vpísanej gule v K^{r+1} s bodom $\hat{x} + \alpha(p + \beta q)$ ako stredom môžeme dostať ako riešenie trojrozmernej úlohy LP premenných δ, α, γ .

$$\begin{aligned} \max \delta \\ \delta - \alpha A_i p - \gamma A_i q &\leq A_i \hat{x} - b_i, & i = 1 \dots m \\ \delta - \alpha(-c)p - \gamma(-c)q &\leq (-c)\hat{x} - ((-c)\hat{x} - \epsilon) \\ \delta, \alpha, \gamma &\geq 0. \end{aligned}$$

γ je súčin $\alpha\beta$. Ak $(\bar{\delta}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ je optimálna riešenie danej trojrozmernej úlohy LP, potom na konci kroku dostaneme bod $\hat{x} + \bar{\alpha}p + \bar{\gamma}q$. Či už postupujeme pri riešení s fixnou hodnotou parametra β alebo pokračujeme parametricky, dostaneme aproximáciu stredu vpísanej gule s ktorou pokračujeme do napredujúcich krokov.

Doterajšie verzie sférických metód používajú určitú formu maticovej inverzie. Nasledujúce verzie sférických metód sú verzie predchádzajúcich metód upravené tak aby sa vyhlo

použitíu ľubovoľnej maticovej inverzie. Výhodou nepoužitia maticovej inverzie je aj ľahšia implementácia a možná paralelizácia výpočtov pri ľepšej implementácii. Tieto centrujúce kroky boli uverejnené v 2010 v článku [Murty, 2010b].

Centrujúci krok pre sférickú metódu 3

Sférická metóda 3 je verzia odvodená zo sférickej metódy 1. Centrujúci krok s formou maticovej inverzie je nahradený nasledujúcim krokom bez maticovej inverzie.

Nech x^r je počiatočné prípustné vnútorné riešenie pre r -tú iteráciu. Rozoberme dva prípady.

Prípád 1 Existuje aspoň jedno $i \in T(x^r)$ spĺňajúce $c^T(A_i)^T < 0$.

Pre každé $i \in T(x^r)$ spĺňajúce $c^T(A_i)^T < 0$, riešme dvojrozmernú úlohu LP: maximalizujeme $\delta(x^r + \lambda(A_i)^T)$ za podmienky $\lambda \geq 0$.

Taktiež riešme inú dvojrozmernú úlohu LP: maximalizujeme $\delta(x^r + \lambda y)$ za podmienky $\lambda \geq 0$, kde $y =$ aritmetický priemer $(A_i)^T$ pre i spĺňajúcom $c^T(A_i)^T < 0$

Ako výsledný bod tohoto centrujúceho kroku vyberieme ten stred vpísanej gule, ktorý má najlepšiu hodnotu účelovej funkcie.

Prípád 2 Pre všetky $i \in T(x^r)$ platí $c^T(A_i)^T \geq 0$.

Pre každé $i \in T(x^r)$ nájdeme ortogonálnu projekciu y^i , $(A_i)^T$ na nadrovinu $\{x : c^T x = c^T x^r\}$.

Riešime dvojrozmernú úlohu LP maximalizujeme $\delta(x^r + \lambda y^i)$ pre $\lambda \geq 0$. Ako výsledný bod centrujúceho kroku v tomto prípade vyberieme bod s najväčšou hodnotou polomeru vpísanej gule $\delta(x)$.

Centrujúci krok pre sférickú metódu 4

Tento centrujúci krok je založený na sférickej metóde 2, pričom centrujúci krok je nahradený krokom bez maticovej inverzie založenom na sférickej metóde 3. Popíšeme iteráciu $r + 1$, ktorá bude začínať z prípustného vnútorného riešenia x^r .

K^{r+1} , množina prípustných riešení pre túto iteráciu $\{x : A_i^r x \geq b_i^r; i = 1, \dots, m + 1\}$, pričom $A_i^r = A_i$, $b_i^r = b_i$ pre $i = 1, \dots, m$ a $A_{m+1}^r = -c$, $b_{m+1}^r = -c^T x^r - \epsilon$, kde ϵ je malá kladná

konštanta. Úloha LP na maximalizáciu polomeru vpísanej gule vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} \max \delta \\ \delta \leq A_i^r x - b_i^r \quad i = 1, \dots, m + 1 \end{aligned} \tag{1.3-2}$$

Ak je x^r vnútorné prípustné riešenie pôvodnej úlohy LP, potom vieme, že $A_i^r x^r - b_i^r > 0$ pre všetky $i = 1, \dots, m + 1$. Vyberieme δ^r spĺňajúce $0 < \delta^r < \min \{A_i^r x^r - b_i^r : i = 1, \dots, m + 1\}$. Potom (δ^r, x^r) je vnútorné prípustné riešenie úlohy (1.3-2), ktoré použijeme ako štartujúci bod pre sférickú metódu 3, pomocou ktorej nájdeme optimálne riešenie $(\bar{x}^r, \bar{\delta}^r)$ tejto úlohy. Centrujúci krok ukončíme s hodnotou \bar{x}^r .

Centrujúci krok pre sférickú metódu 5

Tento centrujúci krok je založený na centrujúcom kroku sférickej metódy 2. Tento centrujúci krok bol publikovaný v [Murty, 2011] roku 2011 a bol odvodený na základe výsledkov [Xie et al., 2006] a [Clarkson, 2010]. Nech x^r je štartovací prípustný vnútorný bod na súčasnej množine prípustných riešení K^{r+1} .

Definujme nový vektor premenných $y = x - x^r$. Množina prípustných riešení v premennej y sa dá vyjadriť $K^{r+1} = \{y : A^r y \geq b^r - A^r x^r\}$ (označenie ako v sférických metódach 4). V priestore y k x^r prislúcha počiatok 0. Keďže x^r je vnútorný bod $K^r + 1$ a platí $b^r - A^r x^r < 0$ môžeme dobre definovať $\dot{A}_i^r = A_i^r / (b_i^r - A_i^r x^r)$ pre $i = 1, \dots, m + 1$. Potom v priestore y platí $K^{r+1} = \{y : \dot{A}^r y \leq e\}$, kde e je vektor samých jednotiek a matica \dot{A}^r je sa skladá z usporiadaných riadkov \dot{A}_i^r .

\dot{A}^r má rozmery $(m + 1) \times n$. Nech $S = \{P_i = (\dot{A}_i^r)^T : i = 1, \dots, m + 1\}$.

Nech Q označuje stred najmenšej opísanej gule množine bodov z $S = \{P_1, \dots, P_{m+1}\}$ (najmenšia guľa obsahujúca všetky body z množiny S).

Schéma na výpočet Q : Začíname s Q_0 , aritmetickým priemerom bod bodov z S a budeme aproximovať Q s hodnotami Q_t , $t = 1, 2, \dots$

S hodnotou Q_t určíme P^{t+1} , najvzdialenejší bod (v euklidovskej norme) od Q_t spomedzi bodov množiny S . Potom určíme $Q_{t+1} = (1-a)Q_t + aP^{t+1}$ kde $a = 2/(t+3)$. Postup ukončíme, keď bude relatívny rozdiel hodnôt Q_t a Q_{t+1} dosť malý.

K aproximovanej hodnote Q prislúcha v priestore x bod $Q + x^r$. Na nájdenie dĺžky kroku na priamke prechádzajúcej bodmi $Q + x^r$ a x^r na množine K^{r+1} použijeme dvojrozmernú úlohu LP maximalizujúcu δ . Výsledný prípustný vnútorný bod označíme x^{r+1} a zopakujeme s ním centrujúci krok. S opakovaním centrujúceho kroku skončíme, keď bude zmena polomeru vpísanej gule δ malá. S výsledným bodom pokračujeme do napredujúcich krokov.

1.3.2 Napredujúce kroky

Nech \bar{x}^r označuje aproximovaný stred vpísanej gule, ktorý obdržíme v centrujúcom kroku. Pre každý z nasledujúcich napredujúcich krokov potrebujeme taktiež určiť dĺžku tohoto kroku. Dĺžku kroku γ v každom z nižšie uvedených smerov určíme ako:

$$\gamma = \text{minimum} \left\{ \frac{-A_i \bar{x}^r + b_i + \epsilon_1}{A_i y} : i \text{ splňajúce } A_i y < 0 \right\}$$

kde ϵ_1 je malá kladná konštanta, ktorá zabezpečí, aby bol výsledný bod stále vnútorný a y je prislúchajúci smer. Na konci každého z uvedených napredujúcich krokov teda dostaneme bod $\bar{x}^r + \gamma y$ ak γ je konečné. V opačnom prípade je hodnota účelovej funkcie neohraničená na polpriamka $\{\bar{x}^r + \lambda y : \lambda \geq 0\}$ (y je smer neohraničenosti). V takomto prípade môžeme ukončiť metódu.

Teraz uvedieme možné napredujúce kroky. Na konci vyberieme z bodov ktoré obdržíme v napredujúcich krokoch, ten s najlepšou hodnotou účelovej funkcie a prehlásime ho za konečný bod tejto iterácie a pokračujeme s ním do ďalšej iterácie.

Napredujúci krok 1.1: Zo stredy vpísanej gule x^r zvolíme napredujúci krok v smere $d^{1.1} = -c^T$.

Napredujúci krok 1.2: Nech $G = \{(A_i)^T : i \in T(x^r) \text{ pre ktoré platí } c^T(A_i)^T < 0\} \cup \{(-A_i)^T : i \in T(x^r) \text{ pre ktoré platí } c^T(A_i)^T > 0\}$. Zvolíme napredujúci krok zo stredy vpísanej gule x^r v smere, ktorý je aritmetickým priemerom všetkých smerov v G .

Napredujúci krok 2: Zo stredy vpísanej gule zvolíme napredujúci krok v smere $d^2 = -x^r - x^{r-1}$, kde x^{r-1} je stred vpísanej gule z predchádzajúcej iterácie. Toto je teda napredujúci krok v smere stredov vpísaných gúl, ktoré sú generované v algoritme.

vykonajme krok v každom z GPTC $-c^i$ smerov a taktiež v smere, ktorý je aritmetickým priemerom GPTC smerov. Bod s najlepšou hodnotou účelovej funkcie označme \tilde{x}^2 . Ak je rozdiel $c^T \tilde{x}^1 - c^T \tilde{x}^2$:

> ako zvolená tolerančná konštanta ϵ opakujeme tento krok a ako počiatočný bod vezmeme bod \tilde{x}^2 .

$\leq \epsilon$ tak ukončíme tento napredujúci krok a s bodom \tilde{x}^2 pokračujeme do ďalšieho napredujúceho kroku.

Napredujúci krok 5.3: Pokračujeme s bodom, ktorý sme dostali v predchádzajúcom napredujúcom kroku, označme ho x^s . Pre každé $i \in T(x^s)$ definujme $x^{is} = x^s + (A_i)^T (b_i - A_i x^s)$, čo je ortogonálna projekcia x^s na stenu. Označme $\bar{x}^* = \left[\sum_{i \in T(x^s)} x^{is} \right] / |T(x^s)|$. Zvyčajne krok z x^s v smere $x^s - \bar{x}^*$ prechádza cez stred K^* (K^* je aktualizované K), preto môže viesť k vylepšeniu účelovej hodnoty. Môžu nastať dva prípady.

Prípad 1: Ak $c^T(x^s - x^*) < 0$ urobíme z x^s krok v smere $(x^s - x^*)$ a so získaným bodom opakujeme tento napredujúci krok, kým nie je zlepšenie účelovej funkcie menšie ako daná tolerančná konštanta.

Prípad 2: Aj $c^T(x^s - x^*) \geq 0$, nech y je ortogonálna projekcia $(x^s - x^*)$ na nadrovinu $\{x : c^T x = 0\}$, $y = (I - c^T c)(x^s - x^*)$.

Vyriešime dvojrozmernú úlohu LP: $\max \delta$ za podmienok $\delta - \alpha A_i y \leq A_i x^s - b_i$ pre všetky i a $\delta, \alpha \geq 0$. Nech $\bar{\delta}, \bar{\alpha}$ označujú optimálne riešenie danej dvojrozmernej úlohy LP. Hodnota účelovej funkcie v bode $x^s + \bar{\alpha} y$ je rovnaká ako v bode x^s , lebo $c^T y = 0$. Z bodu $x^s + \bar{\alpha} y$ spravíme opäť napredujúce kroky 1 až 5.2. Najlepší spomedzi týchto bodov vezmeme a zopakujeme s ním (ako s novým x^s) napredujúci krok 5.3. Toto opakujeme, kým zlepšenie hodnoty účelovej funkcie nie menšie ako daná tolerančná konštanta.

Napredujúci krok 5.4: Vezmime body, ktoré sme dostali v poslednom napredujúcom kroku 5.1 a označme ich x^1, \dots, x^s . Predpokladajme, že x^s je bod s najlepšou hodnotou účelovej funkcie. Nech $H = \{x : c^T x = c^T x^s\}$, ϵ_1 je malá kladná konštanta ($\epsilon_1 = 0,1$ alebo menej) a s je počet prvkov množiny $T(x^r)$ pre stred vpísanej gule x^r z ktorého sme štartovali napredujúci krok 5.1.

Pre každé $t \in \{1, \dots, s-1\}$ označuje \tilde{x}^t ortogonálnu projekciu $x^s + \epsilon_1(x^t + x^s)$ na H . Ak $\tilde{x}^t \in K$, pokračujeme ďalej.

Ak $\tilde{x}^t \notin K$ pre každé $i = 1, \dots, m+1$ spĺňajúce $A_i \tilde{x}^t < b_i$, tak platí $(A_i x^s - b_i) - (A_i \tilde{x}^t - b_i) = A_i x^s - A_i \tilde{x}^t > 0$, keďže $A_i \tilde{x}^t - b_i < 0$ a $A_i x^s - b_i > 0$. Preto pre i , najmenšia hodnota β , ktorá spĺňa $A_i(\beta x^s + (1-\beta)\tilde{x}^t) = \beta(A_i x^s - A_i \tilde{x}^t) + A_i \tilde{x}^t \geq b_i$, je $\beta = (b_i - A_i \tilde{x}^t)/(A_i x^s - A_i \tilde{x}^t)$, pre ktorú platí $0 < \beta < 1$.

Definujme $\theta = \text{maximum} \left\{ -(A_i \tilde{x}^t - b_i)/(A_i x^s - A_i \tilde{x}^t) : \text{cez } i \text{ spĺňajúce } A_i - b_i < 0 \right\}$. Potom $\theta x^s + (1-\theta)\tilde{x}^t$ je vnútorný bod množiny K^{r+1} a týmto vektorom nahradíme vektor \tilde{x}^t .

Nech y je aritmetický priemer vektorov $\{(\tilde{x}^t - x^s)/\|\tilde{x}^t - x^s\| : t = 1, \dots, s-1\}$. Vektory \tilde{x}^t sú distribuované v rôznych smeroch okolo $K^{r+1} \cap H$. Bod maximalizujúci $\delta(x^s + \alpha y)$ pre $\alpha \geq 0$ by mohol dobre aproximovať stred vpísanej gule množiny K^{r+1} na nadrovine H . Vyriešením dvojrozmernej úlohy LP dostaneme bod \bar{x}^2 .

Nech $S(\bar{x}^2) = \left\{ (A_i)^T : i \in T(\bar{x}^2), \text{ pre ktoré platí } c^T(A_i)^T < 0 \right\} \cup \left\{ (-A_i)^T : i \in T(\bar{x}^2), \text{ pre ktoré platí } c^T(A_i)^T > 0 \right\}$ a vektor y je aritmetický priemer vektorov z $S(\bar{x}^2)$. Zmeníme aktuálnu množinu prípustných riešení K^{r+1} tak, že zmeníme hodnotu b_{m+1} na hodnotu $-c^T \bar{x}^2 - \epsilon$ (ϵ je malá kladná konštanta). Na tejto množine vyriešime dve dvojrozmerné úlohy LP maximalizujúce polomer vpísanej gule na polpriamkach vychádzajúcich z \bar{x}^2 v smeroch $-c$ a y . \bar{x}^3 je stred vpísanej gule s väčším polomerom.

S bodom \bar{x}^3 vykonáme napredujúce kroky D1 až D5.3 a opakujeme napredujúci krok D5.4, kým nie je zmena dosiahnutej výslednej hodnoty malá.

Napredujúci krok 5.5: Vezmime body, ktoré sme dostali v poslednom napredujúcom kroku 5.1 a označme ich x^1, \dots, x^s . Predpokladajme, že x^s je bod s najlepšou hodnotou účelovej funkcie.

Pre $t = 1$ až $s-1$ definujme $x^t(\alpha) = x^s + \alpha(x^t - x^s)$ kde $\alpha = 2^{-p}$ (začneme s $p = 1$) spravíme krok z $x^t(\alpha)$ v smere $-c^T$. Ak je hodnota účelovej funkcie vo výslednom bode lepšia ako $c^T x^s$ označme bod \tilde{x}^t a pokračujme pre ďalšie t . Ak je hodnota účelovej funkcie vo výslednom bode horšia ako $c^T x^s$, nezmeníme hodnotu t ale zvýšime hodnotu p o jedna a zopakujeme tento krok.

Najlepšiu hodnotu spomedzi \tilde{x}^t označme \tilde{x} a použijme ho ako počiatočný bod pre napredujúci krok 5.2.

Napredujúci krok 5.6: Tento napredujúci krok nie je výhodné použiť, ak je počet ohraničení m úlohy príliš veľký.

Položme $c^{m+1} = c$. Pre $i = 1, \dots, m + 1$ spravíme x^{ri} ortogonálnu projekciu x^r na každú stenu $\{x : A_i = b_i\}$, čo je $x^r + (A_i)^T(b_i - A_i x^r)$. Môžu nastať dva prípady:

Prípád 1: Ak $x^{ri} \in K^*$, nech $\hat{x}^{ri} = \epsilon x^r + (1 - \epsilon)x^{ri}$ je konvexná kombinácia x^r a x^{ri} . Z \hat{x}^{ri} spravme krok v GPTC smere $-c^i$.

Prípád 2: Ak $x^{ri} \notin K^*$, nech α_i je najväčšia hodnota α pre ktorú $x^r + \alpha(x^{ri} - x^r) \in K^*$. V tomto prípade definujeme $\hat{x}^{ri} = x^r + (\alpha_i - \epsilon)(x^{ri} - x^r)$. Z \hat{x}^{ri} spravíme opäť krok v GPTC smere $-c^i$.

Bod s najlepšou hodnotou účelovej funkcie vyberieme ako výstup z tohoto napredujúceho kroku.

1.4 Metóda použitá na vyriešenie dvojrozmernej úlohy LP tvaru (1.2-3)

Pri sférických metódach je nutné riešiť dvojrozmernú úlohu LP v premenných (δ, α) tvaru (1.2-3) v rôznych fázach metódy. Riešenie dvojrozmernej úlohy LP vyvstáva pri hľadaní optimálnej dĺžky kroku z vnútorného, prípustného riešenia \bar{x} v kladnom smere y . Úloha tvaru (1.2-3) má vždy prípustné riešenie $(\delta(\bar{x}), 0)$, ktoré môžeme vziať ako počiatočné riešenie pri riešení tohoto problému. Na vyriešenie použijeme nasledovnú iteračnú metódu.

Nech Γ označuje množinu prípustných riešení úlohy tvaru (1.2-3) v 2-dimenzionálnom priestore (δ, α) s premennou α na horizontálnej osi a premennou δ na vertikálnej osi. Každá iterácia začína z prípustného riešenia z hranice množiny Γ . Vykonáme horizontálny posun + vertikálny posun (dvakrát) a na záver diagonálny posun. Prvú iteráciu začneme s riešením $(\delta(\bar{x}), 0)$, ktoré sa nachádza na hranici množiny Γ . Teraz popíšeme priebeh základnej iterácie.

Iteráciu začneme z počiatočného riešenia (δ_0, α_0) . Ak y nie je kladný smer tak optimálna hodnota premennej α je nula. Ak je y kladný smer a nech sa maximum účelovej funkcie δ

nadobúda v hodnote $\hat{\alpha}$. Potom je funkcia definovaná ako maximálna možná hodnota δ pre zafixované α rastúca na intervale $\langle 0, \hat{\alpha} \rangle$.

Prvý horizontálny posun: Položíme $\delta = \delta_0$ a hľadáme stred úsečky $\{(\delta_0, \alpha) \in \Gamma\}$. Z ohraničení úlohy (1.2-3) vyplýva $\theta_1(\delta_0) \leq \alpha \leq \theta_2(\delta_0)$ kde

$$\theta_1(\delta_0) = \text{Maximum} \left\{ 0, (A_i \bar{x} - b_i - \delta_0) / (-A_i y) : \text{pre } i \text{ spĺňajúce } A_i y > 0 \right\}$$

$$\theta_2(\delta_0) = \text{Minimum} \left\{ (A_i \bar{x} - b_i - \delta_0) / (-A_i y) : \text{pre } i \text{ spĺňajúce } A_i y < 0 \right\}.$$

Nie je problém ukázať, že hodnota $\theta_1(\delta_0) = 0$ či už je y kladný smer alebo nie. Ak y nie je kladný smer potom aj $\theta_2(\delta_0) = 0$, lebo ak y nie je kladný smer, tak $A_i y < 0$ platí aspoň pre jedno $i \in T(\bar{x})$. Ak by sa teda stala chyba a vybratý smer y nie je kladný, ukončíme vyhľadávanie optimálnej dĺžky kroku v tomto smere s hodnotou $(\delta_0, \alpha_0 = 0)$.

Ak je hodnota $\theta_2(\delta_0) > 0$, tak potom hľadaný stred úsečky $\{(\delta_0, \alpha) \in \Gamma\}$ $\alpha_1 = (\theta_1(\delta_0) + \theta_2(\delta_0))/2$. Prvý horizontálny posun teda ukončíme s hodnotou (δ_0, α_1) .

Vertikálny posun: V tomto kroku zafixujeme α na α_1 a maximalizujeme δ na množine Γ . Maximálnu hodnotu δ označíme δ_1 a rovná sa:

$$\delta_1 = \text{Minimum} \{A_i \bar{x} - b_i + \alpha_1 A_i y : i = 1 \dots m\}.$$

Vertikálny posun ukončíme s hodnotou (δ_1, α_1) .

Druhý horizontálny a vertikálny posun: Pri druhom horizontálnom posune zafixujeme δ na hodnote δ_1 . Nájdeme dolnú a hornú hranicu $\theta_1(\delta_1)$, $\theta_2(\delta_1)$ pre premennú α cez množinu $(\delta_1, \alpha) \in \Gamma$ použitím vzorcov uvedených vyššie. Ak $\theta_1(\delta_1) = \theta_2(\delta_1)$, potom $(\delta = \delta_1, \alpha = \theta_1(\delta_1))$ je optimálne riešenie danej dvojrozmernej úlohy LP.

V prípade ak $\theta_1(\delta_1) < \theta_2(\delta_1)$ položíme $\alpha_2 = (\theta_1(\delta_1) + \theta_2(\delta_1))/2$. Teraz vykonáme druhý vertikálny posun so zafixovaným α na hodnote α_2 a nájdeme maximálnu hodnotu δ (rovnako ako je uvedené vyššie), označíme ju δ_2 .

Diagonálny posun: Tento posun maximalizuje hodnotu δ na priamke p spájajúcej dva body obdržané na konci horizontálneho posunu (δ_0, α_1) , (δ_1, α_2) pričom $\delta_1 > \delta_0$. Predpis priamky p má tvar:

$$\delta = \delta_0 + s(\alpha - \alpha_1)$$

kde $s = (\delta_1 - \delta_0) / (\alpha_2 - \alpha_1)$. Nech

$$\beta_1 = \text{maximum} \left\{ 0, (A_i \bar{x} - b_i - \delta_0 + s \alpha_1) / (s - A_i y) : \text{pre } i \text{ spĺňajúce } s - A_i y < 0 \right\}$$

$$\beta_2 = \text{minimum} \{ (A_i \bar{x} - b_i - \delta_0 + s\alpha_1) / (s - A_i y) : \text{pre } i \text{ splňajúce } s - A_i y > 0 \}.$$

Potom maximálna hodnota premennej δ na množine $p \cap \Gamma$ označme δ_3 pričom

$$\delta_3 = \delta_0 + (\beta_2 - \alpha_1)s \text{ a prislúchajúci bod } (\delta_3, \beta_2) \text{ ak } \alpha_2 > \alpha_1 \text{ alebo}$$

$$\delta_3 = \delta_0 + (\beta_1 - \alpha_1)s \text{ a prislúchajúci bod } (\delta_3, \beta_1) \text{ ak } \alpha_2 < \alpha_1.$$

Označme $\delta_4 = \text{maximum} \{ \delta_2, \delta_3 \}$ a určíme prislúchajúcu hodnotu α . $\alpha_4 = \alpha_2$ ak $\delta_4 = \delta_2$ respektíve ak $\delta_4 = \delta_3$ potom $\alpha_4 = \beta_2$ alebo β_1 v závislosti či $\alpha_2 > \alpha_1$ alebo $\alpha_2 < \alpha_1$.

Bod (δ_4, α_4) je konečný bod danej iterácie a s týmto bodom pokračujeme do ďalšej iterácie. Túto metódu ukončíme, ak je zmena hodnoty δ medzi po sebe nasledujúcimi krokmi dost malá.

2 Numerické experimenty

Autor sférických metod uvádza, že sférické metódy vyvíja so zámerom vytvoriť metódu, ktorá by nevyžadovala žiadnu formu maticovej inverzie. Toto je motiváciou aj tejto práce, a preto sa implementácia a numerické experimenty zameriavajú na tie sférické metódy, ktoré nevyužívajú operáciu maticovej inverzie v žiadnej podobe, teda nevyužívajú krok LSCPD (1.2.4). Prvé výsledky potvrdili slová autora [Murty, 2010a], že centrujúce kroky sférických metod 1 a 3 sú pomalšie a tým, že držia stred vpísanej gule na určitej nadrovine nedovoľujú vo väčšine prípadov napredovať tak rýchlo ako metódy založené na princípe centrujúceho kroku sférickej metódy 2. V drvinej väčšine prípadov vykazoval najlepšie výsledky centrujúci krok sférickej metódy 5. Preto je nižšie porovnaná sférická metóda 5 s revidovanou simplexovou metódou a primárno-duálnou metódou (použili sme logaritmickú bariérovú funkciu a Newtonovu metódu pre nájdenie dĺžky kroku). Rôzne metódy využívajú rôzne v Matlabe už implementované funkcie (od výpočtu inverznej matice po určenie dĺžky kroku pomocou nelineárnej optimalizácie v primárno-duálnej metóde), preto netreba prikladať veľký význam výsledným časom, ktorý trvalo riešenie a presnosti riešenia. Zaujímavejšie je ako sa prejaví zmena počtu premenných a hustota matice úlohy na výsledkoch.

Rôzne metódy pri mojej implementácii dávajú rôzne presné výsledky. Simplexova metóda má vysokú úspešnosť pri riešení úloh, pričom jej presnosť závisí len od jedného malého kladného parametra ϵ . Oproti tomu presnosť oboch metod vnútorného bodu závisí od viacerých parametrov (pri implementácii sférickej metódy 5 sme použili deväť rôznych malých kladných parametrov ϵ). Pri rôznej konfigurácii týchto parametrov môžeme dosiahnuť rôznu rýchlosť konverencie a rôznu presnosť. Všetky nižšie uvedené výsledky sú dosiahnuté pri použití rovnakej konfigurácie parametrov a snahe dosiahnuť rovnakú presnosť oboch metod vnútorného bodu.

Pri riešení niektorých úloh pomocou metod vnútorného bodu sa stalo, že metódy konvergovali pomaly. Ak čas konverencie prekročil určitú hranicu alebo sa riešenie príliš líšilo od riešenia dosiahnutého pomocou funkcie *linprog*, riešenie vyhlásime za nesprávne. Preto budeme uvádzať aj úspešnosť sférickej metódy v percentách a do dosiahnutého času nebudeme

započítavať čas dosiahnutý pri nesprávnom riešení. Do výsledného času rôznych metód bude vždy započítaný čas potrebný na správne vyriešenie rovnakého počtu úloh.

Úlohy s riedkymi a hustými maticami

Primárno-duálna metóda vnútorného bodu sa stala populárnou vďaka tomu, že sa s ňou dajú veľké riedke úlohy riešiť efektívnejšie ako pomocou simplexovej metódy. Táto výhoda spočíva v tom, že pri výpočte inverznej matice (výpočtovo najzložitejší krok) sa dá pri riedkych maticiach ušetriť čas využitím rýchlejších algoritmov.

Na porovnanie sme nechali úspešne vypočítať tisíc úloh s riedkymi maticami s rozmermi 50×50 a tisíc úloh s hustými maticami s rovnakými rozmermi. Ako vidíme, primárno-duálna

	úlohy s riedkymi maticami	úlohy s hustými maticami
sférická metóda 5	749	732
simplexova metóda	342	364
primárno-duálna metóda	298	787

Tabuľka 2–1 Čas v sekundách, ktorý trvalo úspešné vyriešenie tisíc úloh.

metóda výrazne zrýchliť na riedkych maticiach, keď sme použili príkaz $inv(\text{sparse}(A))$, ktorý je asi desaťkrát rýchlejší ako príkaz $inv(A)$. Simplexova metóda, ako aj sférická metóda, bežali asi rovnako dlho v oboch prípadoch, z čoho sa dá usúdiť, že ich rýchlosť je nezávislá od hustoty matice. Na porovnanie, funkcia *linprog* vyriešila danú sadu úloh asi za minútu a pol.

Sférická metóda 5 skončila nepresne alebo konvergovala príliš dlho asi v siedmich percentách prípadov. Podrobnejšie sa pokúsime na príčiny pozrieť nižšie.

Rozmer úlohy

Ako je vidieť vyššie, pre malé úlohy na všeobecných maticiach je asi najlepšia simplexova metóda. To sa začína meniť pri úlohách s rozmermi asi 100×100 . Na porovnanie sme nechali úspešne vypočítať sto úloh s riedkymi maticami s rozmermi 100×50 a sto úloh s hustými

maticami s rovnakými rozmermi. Simplexova metóda začína strácať svoju rýchlosť v porov-

	úlohy s riedkymi maticami	úlohy s hustými maticami
sférická metóda 5	405	415
simplexova metóda	677	682
primárno-duálna metóda	312	726

Tabuľka 2–2 Čas v sekundách, ktorý trvalo úspešné vyriešenie sto úloh.

naní s metódami vnútorného bodu. Opäť vidieť, že pri riešení pomocou sférickej metódy 5 nenastáva veľký rozdiel v časoch potrebných na vyriešenie úloh s riedkymi maticami a úloh s hustými maticami. Sférická metóda 5 skončila nepresne alebo konvergovala príliš dlho asi v 12 percentách prípadov.

Najväčší úspech ktorý, dosiahla sférická metóda 5 je, že vyriešila jednoduchú úlohu rozmerov 10000×10000 , pri ktorej funkcia *linprog* skončila s upozornením o nedostatku pamäti.

Pozorovania a skúsenosti s numerickými experimentami

Na základe numerických experimentov môžeme konštatovať, že sférická metóda 5 dokáže rovnako rýchlo riešiť úlohy s hustou ako aj s riedkou maticou, čo je jej veľkou výhodou v porovnaní s primárno-duálnou úlohou, ktorá má skôr výhodu na úlohách s riedkou maticou. V porovnaní so simplexovou metódou lepšie zvláda riešenie väčších úloh.

Pri implementácii a numerických experimentoch sa ukázalo ako veľmi dôležité citlivé nastavovanie malých konštánt, ktoré majú veľký vplyv na presnosť ako aj čas výpočtu. Nemôžeme napríklad očakávať veľkú presnosť, ak si ϵ , ktoré je zodpovedné za to, aby sme sa pri určovaní dĺžky kroku v napredujúcom kroku (1.3.2) nedostali príliš blízko ku stenám, nastavíme na hodnotu väčšiu ako je hodnota $1/\text{dimenzia úlohy}$.

Ďalej sa pokúsime analyzovať, kedy nastávajú problémy pri behu programu a program konverguje pomaly alebo nepresne.

V niektorých prípadoch je centrujúci krok príliš zdĺhavý a ťažko sa hľadá vhodný smer, v ktorom by bol polomer vpísanej gule rastúci. Toto nastáva najmä v prípadoch, keď sa nachádzame medzi nadrovinami, ktoré zvierajú malý uhol.

Ak vychádzame z bodu, ktorého vzdialenosť od jednej steny je relatívne malá v porovnaní s ostatnými stenami, metóda hľadajúca smer nárastu polomeru vpísanej gule v centrujúcom kroku môže trvať dlhšie ako keby sme začínali z bodu, ktorého vzdialenosti od strán sú rovnomernejšie. Toto sa pokúsime ďalej vyriešiť aplikovaním metódy LSFN (1.2.3) ešte pred aplikovaním centrujúceho kroku.

Z numerických experimentov vyplýva, že nie vždy musíme byť prehnane citliví pri aproximácii stredu vpísanej gule a často si vystačíme aj s horšou aproximáciou.

Častý bol malý prínos niektorých napredujúcich krokov, napríklad napredujúci krok 5.4 málokedy priniesol výrazné zlepšenie hodnoty účelovej funkcie berúc do úvahy jeho výpočtovú zložitosť.

3 Úpravy na základe numerických experimentov

Na konci predchádzajúcej kapitoly sme sa pokúsili určiť faktory, ktoré negatívne ovplyvňujú beh sférickej metódy 5. Teraz sa pokúsime na základe pozorovaní navrhnúť zmeny, ktoré by mohli zrýchliť beh programu.

Zmeny v centrujúcom kroku

V sférickej metóde 5 spustíme pred centrujúcim krokom ešte LSFN metódu (1.2.3), ktorá „odtlačí“ aktuálny stred od stien a zväčší tak jeho vzdialenosť od stien, čo môže pomôcť rovnomernejšie distribuovať body v množine S centrujúceho kroku pre sféricкую metódu 5.

Ďalej sa osvedčil krok, ktorý sa pokúsi „odtlačiť“ stred vpísanej gule od vrcholu, a to tak, že určíme vektory, y^i ktoré smerujú z ortogonálnej projekcie stredu vpísanej gule na stenu, ktorej sa guľa dotýka, $x^{ir} = x^r + (A_i)^T(b_i - A_i x^r)$, do stredu vpísanej gule x^r . Výsledný smer y potom určíme ako súčet smerov $y^i = x^{ir} - x^r$ pre $i \in T(x^r)$.

Obe tieto procedúry spustíme v každom centrujúcom kroku ešte pred centrujúcim algoritmom popísaným v centrujúcom kroku sférickej metódy 5.

Ako bolo spomenuté v predchádzajúcej kapitole, nie vždy je potrebná vysoká presnosť aproximácie stredu vpísanej gule a dobré výsledky sa dajú dosiahnuť aj s horšou aproximáciou. Experimenty s rýchlosťou konvergenencie metódy, ktorá určuje smer, v ktorom sa polomer vpísanej gule zväčšuje v centrujúcom kroku sférickej metódy 5, ukázali, že schéma na výpočet Q sa dá urýchliť zmenou váh pri výpočte $Q_{t+1} = (1 - a)Q_t + aP^{t+1}$, kde $a = 2/(t + 3)$. Osvedčila sa zmena hodnoty a na $a = 2/(t^2 + 3)$.

Zmeny v napredujúcom kroku

Pre malý prínos niektorých napredujúcich krokov sme tieto kroky vynechali a použili sme len napredujúce kroky po napredujúci krok 5.2.

Numerické experimenty s vylepšenou metódou

Vylepšenú metódu sme skúšali na rovnakých úlohách ako všetky metódy v predchádzajú-

cej kapitole. Celkový čas potrebný na vyriešenie úloh, ktoré sa podarilo vyriešiť aj pôvodnej verzii sférickej metódy 5, sa takmer nezmenil. Zmena nastala pri úlohách, ktoré pri riešení pomocou sférickej metódy 5 konvergovali príliš dlho. V prípade úloh s maticami s rozmermi 50×50 klesla chybovosť zo siedmich na štyri percentá a v prípade úloh s maticami s rozmermi 100×100 klesla chybovosť z dvanástich na osem percent. V niektorých prípadoch boli výsledky upravenej metódy o málo horšie ako výsledky pôvodnej sférickej metódy, všetky však boli stále dostatočne presné.

Záver

V prvej kapitole sme zhrnuli súčasné poznatky o sférických metódach. Prešli sme päť verzií sférických metód, z ktorých prvé dve využívajú určitú formu operácie maticovej inverzie. Zvyšné tri metódy sú vyvinuté tak, aby nepotrebovali operáciu maticovej inverzie v žiadnej forme. Uviedli sme, že sférické metódy pozostávajú z dvoch krokov. Prvý je centrujúci krok, v ktorom sa metódy líšia. Tento krok je výpočtovo zložitejší a snaží sa do aktuálnej množiny prípustných riešení vpísať guľu s čo najväčším polomerom. Druhý krok je napredujúci. Tento krok majú všetky metódy spoločný a pozostáva z výpočtu kandidátov viacerými spôsobmi a následného výberu bodu s najlepšou hodnotou účelovej funkcie. Tento krok je výpočtovo menej náročný a jeho úloha je čo najviac zlepšiť hodnotu účelovej funkcie. Tieto kroky opakujeme, až kým nedostaneme požadovanú presnosť.

V druhej kapitole sme vyhodnotili numerické experimenty, na základe ktorých sa dá usúdiť, že výpočtová zložitosť sférickej metódy 5 nezávisí od hustoty matice prislúchajúcej k úlohe. Ukázali sme, že na úrovni našej implementácie dokáže táto metóda súperiť s primárno-duálnou metódou a simplexovou metódou. Na konci tejto kapitoly sme sa pokúsili zhrnúť svoje poznatky o nedostatkoch implementácie sférickej metódy 5.

Na základe týchto poznatkov sme sa pokúsili v poslednej kapitole navrhnúť vylepšenia, ktoré sme taktiež implementovali. Navrhované vylepšenia nepriniesli takmer žiadne zrýchlenie behu programu pri úlohách, ktoré sa dali dobre riešiť pomocou sférickej metódy ale podarilo sa nám s nimi vylepšiť sféricкую metódu 5 tak, že poklesol počet prípadov, kedy sférická metóda 5 konvergovala príliš pomaly.

Sférické metódy sú relatívne mladé metódy, ktoré majú potenciál presadiť sa a rýchlo sa rozvíjať. Postupne sa začínajú dostávať do povedomia a implementácií programov riešiacich úlohy lineárneho programovania.

Literatúra

- [Clarkson, 2010] Clarkson, K. L. (2010). Coresets, sparse greedy approximation, and the Frank-Wolfe algorithm. *ACM Trans. Algorithms* 6, 63:1–63:30.
- [Murty, 2010a] Murty, K. G. (2010a). Optimization for decision making: linear and quadratic models, vol. 137,. Springer Science+ Business Media.
- [Murty, 2010b] Murty, K. G. (2010b). Fast Descent Methods for LPs With Minimal or No Matrix Inversions. <<http://www-personal.umich.edu/~murty/Spheremethods11-new.pdf>>.
- [Murty, 2011] Murty, K. G. (2011). Fast Descent Methods for LPs With No Matrix Inversions. <<http://www-personal.umich.edu/~murty/Spheremethods14.pdf>>.
- [Murty, 2012] Murty, K. G. (2012). $O(m)$ Bound on Number of Iterations in Sphere Methods for LP. *Algorithmic Operations Research* 7, 30–40.
- [Xie et al., 2006] Xie, Y., Snoeyink, J. and Xu, J. (2006). Efficient algorithm for approximating maximum inscribed sphere in high dimensional polytope. In Proceedings of the twenty-second annual symposium on Computational geometry pp. 21–29, ACM.

Príloha

Súčasťou tejto práce je CD príloha s programom pre prostredie Matlab. Program bol testovaný vo verzii 8.0.0.783 (R2012b). Kompatibilita so staršími verziami by nemala byť problémová.

Ukážku výsledkov programu spustíme pomocou príkazu *ukazka* z príslušného priečinka. Program vygeneruje úlohu, ktorú vyrieši pomocou funkcie *linprog* a pomocou sférickej metódy 5 a vypíše vzdialenosť výsledných bodov a rozdiel hodnôt účelových funkcií v príslušných bodoch.

Zdrojový kód implementujúci sféricкую metódu je uložený vo funkcii *sfermet.m*.

Radi by sme ešte upozornili, že pri nastavovaní „epsilonov“ v programe treba byť opatrný. Neopatrné zmeny môžu výrazne predĺžiť beh program alebo zväčšiť nepresnosť výpočtu.