

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



**Metódy vnútorného bodu v lineárnom
programovaní a ich aplikácie vo financiách**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2013

Bc. Marek KABÁT

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Evidenčné číslo:

7e262bbe-5154-4395-9ae9-93f20a185656

**Metódy vnútorného bodu v lineárnom
programovaní a ich aplikácie vo financiách**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Školiteľ:	doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Bratislava 2013

Bc. Marek KABÁT



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Marek Kabát
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Metódy vnútorného bodu v lineárnom programovaní a ich aplikácie vo financiách

Cieľ: Spracovať teoretické základy metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní. Vhodne zvolenými úlohami z oblasti ekonómie a financií ilustrovať výhody použitia metód vnútorného bodu. Preskúmať možnosti riešenia týchto úloh pomocou existujúcich voľne dostupných programových kódov.

Vedúci: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 25.01.2012

Dátum schválenia: 26.01.2012
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie

Touto cestou by som sa chcel úprimne pod'akovať mojej vedúcej diplomovej práce doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. za odborné vedenie, pripomienky, cenné rady a množstvo času a trpezlivosti, ktoré mi venovala pri písaní diplomovej práce.

Abstrakt

KABÁT, Marek: *Metódy vnútorného bodu v lineárnom programovaní a ich aplikácie vo financiách*. [Diplomová práca] – Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. – Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc. – Bratislava: FMFI UK, 2013, 73 s.

Diplomová práca sa zaoberá metódami vnútorného bodu v lineárnom programovaní a možnosťami ich využitia pri riešení úloh z finančnej oblasti. Hlavným cieľom práce je spracovať teóriu metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní, ilustrovať výhody použitia metód vnútorného bodu na úlohách z oblasti financií a preskúmať možnosti riešenia týchto úloh pomocou programových kódov. Obsah diplomovej práce je rozdelený do dvoch častí. Prvá časť práce obsahuje základné predpoklady, hlavné pojmy a kľúčové výsledky z teórie metód vnútorného bodu. Druhá časť práce sa venuje algoritmom metód vnútorného bodu a ich implementáciou vo financiách. V rámci implementačnej časti sa práca zameriava na ilustráciu výhod metód vnútorného bodu v lineárnych modeloch optimalizácie portfólia.

Kľúčové slová: metódy vnútorného bodu • lineárne programovanie • centrálna trajektória • primárno-duálny algoritmus • aplikácie • optimalizácia portfólia.

Abstract

KABÁT, Marek: *Interior Point Methods in Linear Programming and Its Applications in Finance*. [Master Thesis] – Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Department of Applied Mathematics and Statistics. – Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc. – Bratislava: FMFI UK, 2013, 73 p.

The master thesis deals with interior point methods in linear programming and their applicability in solving problems from financial sector. The main objective of this work is to elaborate a theory of interior point methods in linear programming, to illustrate the advantages of using interior point methods on problems from finance and explore possibilities of solving these problems by using programming codes. The content of master thesis is divided into two parts. The first part contains basic assumptions, major concepts and key results of the theory of interior point methods. The second part is devoted to algorithms of interior point methods and their implementation in finance. Within the implementation part the thesis focuses on illustrating the advantages of interior point methods in linear models of portfolio optimization.

Keywords: interior point methods • linear programming • central path • primal-dual algorithm • applications • portfolio optimization.

Obsah

Úvod	1
I Teoretické základy	
metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní	3
1 Lineárne programovanie	4
1.1 Úloha lineárneho programovania	4
1.2 Základné výsledky z teórie duality	5
2 Relatívne vnútro množiny prípustných riešení	7
2.1 Predpoklad existencie vnútorného bodu	7
2.2 Ekvivalenty predpokladu existencie vnútorného bodu	9
2.3 Optimálny rozklad	12
3 Metódy vnútorného bodu	17
3.1 Základná myšlienka	17
3.2 Logaritmická bariérová funkcia	18
3.2.1 Primárna logaritmická bariérová funkcia	20
3.2.2 Duálna logaritmická bariérová funkcia	22
3.2.3 Ilustrácia logaritmickéj bariérovej funkcie	24
3.3 Centrálna trajektória	26
3.3.1 Výpočet centrálnej trajektórie	30
3.3.2 Konvergencia centrálnej trajektórie	38
3.3.3 Analytický stred množiny optimálnych riešení	40

II	Algoritmy a aplikácie	
	metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní	44
4	Algoritmy sledovania centrálnej trajektórie	45
4.1	Filozofia klasických prístupov	45
4.2	Filozofia moderných prístupov	46
4.2.1	Newtonova metóda	46
4.2.2	Všeobecná schéma primárno-duálneho algoritmu	47
4.3	Softvér MATLAB	51
4.3.1	Funkcia „linprog“	51
4.3.2	Programový balík LIPSOL	52
5	Metódy vnútorného bodu vo financiách	53
5.1	Aplikácie metód vnútorného bodu	53
5.2	Metódy vnútorného bodu v optimalizácii portfólia	53
5.2.1	MAXiMIN model	54
5.2.2	MAD model	55
5.2.3	Výhoda metód vnútorného bodu	56
	Záver	59
	Zoznam použitej literatúry	62
	Prílohy	65

Zoznam symbolov a značiek

V práci budeme používať nasledovné jednotné zaužívané označenie. Písmenami gréckej abecedy (α, β, γ) budeme označovať reálne skaláre a veľkými písanými písmenami (A, B, C) budeme označovať množiny. Malými tlačеныmi písmenami (a, b, c) budeme označovať reálne stĺpcové vektory a veľkými tlačеныmi písmenami (A, B, C) budeme označovať reálne matice. Výnimkami sú symboly m, n, i, j a (B, N) , ktorými budeme označovať rozmery vektorov, indexy a optimálny rozklad.

\mathbf{R}^n	Priestor reálnych n -rozmerných vektorov.
\mathbf{R}_+^n	Nezáporný ortant, $\{x \in \mathbf{R}^n \mid x \geq 0\}$.
\mathbf{R}_{++}^n	Kladný ortant, $\{x \in \mathbf{R}^n \mid x > 0\}$.
$\mathbf{R}^{m \times n}$	Priestor reálnych matíc rozmeru $m \times n$.
$(P), (D)$	Štandardná primárna, resp. duálna úloha lineárneho programovania.
x	Vektor premenných primárnej úlohy (P) , $x \in \mathbf{R}^n$.
y	Vektor premenných duálnej úlohy (D) , $y \in \mathbf{R}^m$.
s	Vektor doplnkových premenných duálnej úlohy (D) , $s \in \mathbf{R}^n$.
A	Matica vstupných koeficientov lineárneho programu, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$.
\mathcal{P}, \mathcal{D}	Množina prípustných riešení úlohy (P) , resp. úlohy (D) .
$\mathcal{P}^*, \mathcal{D}^*$	Množina optimálnych riešení úlohy (P) , resp. úlohy (D) .
$\mathcal{P}^\circ, \mathcal{D}^\circ$	Relatívne vnútro množiny prípustných riešení úlohy (P) , resp. úlohy (D) .
\emptyset	Prázdna množina.
u^T	Transpozícia vektora u .
$u^T v$	Skalárny súčin vektorov $u, v \in \mathbf{R}^n$, $u^T v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$.
$u \cdot v$	Hadamardov súčin vektorov $u, v \in \mathbf{R}^n$, $(u \cdot v)_i = u_i v_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
$\ u\ _2$	Euklidova norma vektora $u \in \mathbf{R}^n$, $\ u\ _2 = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2}$.
e	Vektor jednotiek príslušného rozmeru, $e = (1, 1, \dots, 1)^T$.

I	Jednotková matica príslušného rozmeru, $I = \text{diag}(e)$.
$h(A)$	Hodnosť matice A .
B^{-1}	Inverzná matica k regulárnej matici B , $BB^{-1} = B^{-1}B = I$.
u^{-1}	Vektor prevrátených hodnôt zložiek vektora $u > 0$.
u^{-2}	Vektor prevrátených hodnôt druhých mocnín zložiek vektora $u > 0$.
X	Diagonálna matica zložiek vektora x , $X = \text{diag}(x)$, $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$.
S	Diagonálna matica zložiek vektora s , $S = \text{diag}(s)$, $S \in \mathbf{R}^{n \times n}$.
X^{-2}	Diagonálna matica zložiek vektora x^{-2} , $X^{-2} = \text{diag}(x^{-2})$, $X^{-2} \in \mathbf{R}^{n \times n}$.
S^{-2}	Diagonálna matica zložiek vektora s^{-2} , $S^{-2} = \text{diag}(s^{-2})$, $S^{-2} \in \mathbf{R}^{n \times n}$.
$\sigma(u)$	Nosič nezáporného vektora $u \in \mathbf{R}_+^n$, $\{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid u_i > 0\}$.
(B, N)	Optimálny rozklad.
$f(\cdot)$	Funkcia f .
$\ln(\cdot)$	Prirodzený logaritmus.
$\nabla f(\cdot)$	Gradient funkcie f .
$\nabla^2 f(\cdot)$	Hessova matica funkcie f .
$J(\cdot)$	Jakobiho matica.
μ	Bariérový parameter, $\mu > 0$.
$f_\mu(\cdot), g_\mu(\cdot)$	Primárna, resp. duálna logaritmická bariérová funkcia.
$(P_\mu), (D_\mu)$	Primárna, resp. duálna transformačná bariérová úloha.
$x(\mu), (y(\mu), s(\mu))$	Optimálne riešenie úlohy (P_μ) , resp. úlohy (D_μ) .
$\mathcal{N}(A)$	Nulový priestor matice $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\{u \in \mathbf{R}^n \mid Au = 0\}$.
$\mathcal{R}(A)$	Riadkový priestor matice $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\{v \in \mathbf{R}^m \mid \exists u \in \mathbf{R}^n : A^T u = v\}$.

Úvod

*If I feel unhappy, I do mathematics to become happy.
If I am happy, I do mathematics to keep happy.*

Alfréd Rényi

Dôležitým odvetvím aplikovanej matematiky je matematické programovanie, ktoré rieši problém minimalizácie alebo maximalizácie účelovej funkcie na množine prípustných riešení. V priebehu vývoja optimalizačných metód vznikla určitá kategorizácia úloh matematického programovania, a to v závislosti od tvaru účelovej funkcie a štruktúry množiny prípustných riešení. Významnú kategóriu tvoria úlohy lineárneho programovania, ktorých charakteristickým znakom je linearita účelovej funkcie a linearita funkcií vytvárajúcich množinu prípustných riešení. Teoretické počiatky lineárneho programovania siahajú do konca 19. storočia, no jeho najväčší rozvoj nastal až po druhej svetovej vojne. Prvé matematické myšlienky lineárneho programovania sa zaznamenali v prácach Fouriera [6] a Farkasa [3], no za prvú pôvodnú prácu o lineárnom programovaní sa považuje práca Leonida Kantoroviča [12] z roku 1939. Logistické problémy počas druhej svetovej vojny podnietili rozvoj optimalizačných metód, čo viedlo k vzniku simplexovej metódy, ktorú v roku 1947 navrhol americký matematik George Dantzig [1]. Práve Dantzig je považovaný za zakladateľa lineárneho programovania v novodobých dejinách. Simplexová metóda sa stala prvým komplexným a zaužívaným algoritmom na riešenie úloh lineárneho programovania. Zdalo sa, že simplexová metóda je spoľahlivým a efektívnym algoritmom na riešenie všeobecných úloh lineárneho programovania, no túto domnienku sa dlho nedarilo teoreticky potvrdiť. Od efektívneho algoritmu sa požadovalo, aby mal časovo-polynomiálny charakter, čo znamená, že počet aritmetických operácií κ , potrebný na získanie dostatočne presného riešenia, je možné odhadnúť zhora polynómom v premennej κ . K prekvapujúcemu záveru prišli v roku 1972 matematici Klee a Minty [16], ktorí na príklade zdeformovanej kocky dokázali, že počet iterácií simplexovej metódy môže byť exponenciálny vzhľadom k počtu premenných a obmedzení. Toto zistenie podnietilo matematikov ku konštrukcii nového polynomiálneho algoritmu na riešenie úloh lineárneho programovania. V roku 1979 uviedol arménsky matematik Leonid Khachiyan [15] tzv. elipsoidný algoritmus. Síce mal slabo polynomiálny charakter, no v praxi sa neujal. Prevratným sa stal až tzv. projektívny algoritmus od indického matematika Narendra Karmarkara [14] z roku 1984. O dva roky neskôr sa zistilo, že Karmarkarov

algoritmus na riešenie úloh lineárneho programovania úzko súvisí s tzv. metódami vnútorného bodu, ktoré sa do toho obdobia aplikovali najmä na riešenie všeobecných úloh nelineárneho programovania [4]. Súvis Karmarkarovho algoritmu s metódami vnútorného bodu sa stal v ďalších rokoch objektom intenzívneho výskumu. V rámci neho sa matematici zaoberali možnosťami aplikácie Karmarkarovho prístupu aj na niektoré nelineárne konvexné úlohy, než len na úlohy lineárneho programovania. Najucelenejším výsledkom sa stala publikácia Nesterova a Nemirovského [24] z roku 1994 o tom, že mechanizmus metód vnútorného bodu je možné úspešne aplikovať aj na veľkú podtriedu štruktúrovaných úloh konvexného programovania. Karmarkarov algoritmus tak položil základy moderných metód vnútorného bodu – moderných optimalizačných metód, ktorými je možné úspešne riešiť širokú škálu úloh matematického programovania v polynomiálnom čase.

Diplomová práca sa zaoberá metódami vnútorného bodu v lineárnom programovaní a možnosťami ich využitia pri riešení úloh z finančnej oblasti. Cieľom práce je spracovať teóriu metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní, na úlohách z finančnej oblasti ilustrovať výhody použitia metód vnútorného bodu a preskúmať možnosti riešenia týchto úloh pomocou existujúcich programových kódov.

V súčasnosti je teória metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní podrobne spracovaná najmä v cudzojazyčných publikáciách. V slovenskom jazyku existujú len články a práce, ktoré sa teórii venujú len čiastočne a zaoberajú sa skôr aplikáciou teórie na riešenie konkrétnych úloh. Účelom práce je poskytnúť ucelenú podobu teórie metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní s dôkladnými vysvetleniami a podrobnými dôkazmi. Okrem podrobne spracovanej teórie je súčasťou práce aj aplikačná časť, ktorej účelom je prezentovať využitie algoritmov metód vnútorného bodu vo finančnom sektore. Práca vychádza najmä z publikácie [28] a jej obsah je koncipovaný podľa prednášok kurzu *Metódy vnútorného bodu v lineárnom programovaní* [9]. Práca je doplnená niekoľkými zaujímavými ilustráciami, ktorých zdrojové kódy sú uvedené v prílohe.

Diplomová práca je rozdelená do dvoch častí a piatich kapitol. Prvá časť práce obsahuje spracovanú teóriu metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní. Druhá časť práce sa venuje algoritmom metód vnútorného bodu a ich implementáciou vo finančnej oblasti. V prvej kapitole sú uvedené základné výsledky z teórie lineárneho programovania. Druhá kapitola sa zaoberá základnými predpokladmi, ktoré sú hlavným východiskom v metódach vnútorného bodu. Ústrednou časťou práce je tretia kapitola, ktorá vysvetľuje princíp metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní a zároveň uvádza kľúčové teoretické výsledky. Obsahom štvrtej kapitoly sú algoritmy metód vnútorného bodu na riešenie úloh lineárneho programovania. Aplikácia metód vnútorného bodu je témou piatej kapitoly, v rámci ktorej sú uvedené možnosti a výhody použitia metód vnútorného bodu vo finančnom sektore, špeciálne v lineárnych modeloch optimalizácie portfólia.

Časť I

**Teoretické základy metód
vnútorného bodu v lineárnom
programovaní**

LINEÁRNE PROGRAMOVANIE

Teória lineárneho programovania je východiskom pre spracovanie a vysvetlenie teoretických základov metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní. Prvá kapitola tejto práce je venovaná základom teórie lineárneho programovania. V tejto časti sformulujeme úlohu lineárneho programovania, vysvetlíme základné pojmy a uvedieme podstatné výsledky z teórie duality v lineárnom programovaní.

1.1 Úloha lineárneho programovania

Lineárne programovanie je špeciálnym prípadom matematického konvexného programovania, ktoré rieši problém optimalizácie lineárnej funkcie n premenných na množine popísanej sústavou lineárnych rovníc alebo neostrých nerovnic. Pod štandardnou primárnou úlohou lineárneho programovania budeme rozumieť úlohu formulovanú v tvare

$$(P) \min_x \{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\},$$

kde $c \in \mathbf{R}^n$ je vektor koeficientov účelovej funkcie, $x \in \mathbf{R}^n$ je vektor premenných, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ je matica vstupných koeficientov a $b \in \mathbf{R}^m$ je vektor ohraničujúcich podmienok. Formuláciu v tvare úlohy (P) ¹ môžeme uvažovať bez ujmy na všeobecnosti, pretože každú úlohu lineárneho programovania je možné previesť na úlohu v tvare (P) ².

Množinu

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

nazývame množinou prípustných riešení úlohy (P) a jej prvky nazývame prípustnými riešeniami úlohy (P) . Množinu

$$\mathcal{P}^* = \{x^* \in \mathcal{P} \mid c^T x^* \leq c^T x, \forall x \in \mathcal{P}\}$$

nazývame množinou optimálnych riešení úlohy (P) a jej prvky nazývame optimálnymi riešeniami úlohy (P) . Ak množina \mathcal{P} je prázdna, hovoríme, že úloha (P) je neprípustná. V prípade, že úloha (P) je prípustná a účelová funkcia $c^T x$ je zdola neohraničená na množine \mathcal{P} , hovoríme, že úloha (P) je neohraničená.

¹Úloha lineárneho programovania v tvare štandardnej úlohy (P) sa využíva v metódach vnútorného bodu v lineárnom programovaní, ktoré prezentoval Narendra Karmarkar v roku 1984 [14].

²Pozri knihu [26], str. 24-25.

1.2 Základné výsledky z teórie duality

Duálna úloha k úlohe lineárneho programovania (P) má tvar

$$\max_y \{b^T y \mid A^T y \leq c\}.$$

Použitím vektora doplnkových premenných $s \in \mathbf{R}^n$, $s \geq 0$ sformulujeme ekvivalentnú duálnu úlohu v štandardnom tvare, ktorú budeme označovať

$$(D) \max_{y,s} \{b^T y \mid A^T y + s = c, s \geq 0\}.$$

Dvojicu úloh (P) a (D) nazývame primárno-duálnou dvojicou a rozdiel hodnôt ich účelových funkcií $c^T x - b^T y$ nazývame duálnou medzerou. Analogicky, ako pre primárnu úlohu (P), tak aj pre duálnu úlohu (D) definujeme množinu prípustných riešení a množinu optimálnych riešení. Množinu

$$\mathcal{D} = \{(y, s) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \mid A^T y + s = c, s \geq 0\}$$

nazývame množinou prípustných riešení úlohy (D) a jej prvky nazývame prípustnými riešeniami úlohy (D). Množinu

$$\mathcal{D}^* = \{(y^*, s^*) \in \mathcal{D} \mid b^T y^* \geq b^T y, \forall (y, s) \in \mathcal{D}\}$$

nazývame množinou optimálnych riešení úlohy (D) a jej prvky nazývame optimálnymi riešeniami úlohy (D). Neprípustnosť a neohraničenosť duálnej úlohy (D) definujeme analogicky ako v prípade primárnej úlohy (P).

Analyzujme úlohu (D) z hľadiska jednoznačnosti vektora $s \geq 0$ pri danom vektore $y \in \mathbf{R}^m$ a naopak, tak, aby dvojica (y, s) bola prípustným riešením úlohy (D). Pre daný vektor y je vektor s jednoznačne určený vzťahom $s = c - A^T y$. V opačnom prípade, pri danom vektore s , už jednoznačnosť vektora y nie je zrejmá. Uvažujme, že by pre vektor s existovali dva rôzne vektory y_1 a y_2 také, že $(y_1, s) \in \mathcal{D}$ a $(y_2, s) \in \mathcal{D}$. Teda by platilo $A^T y_1 + s = c$ a $A^T y_2 + s = c$. Odčítaním jednej rovnice od druhej dostaneme $A^T(y_1 - y_2) = 0$. Ak by stĺpce matice A^T boli lineárne nezávislé, potom $A^T(y_1 - y_2) = 0$ práve vtedy, keď $y_1 - y_2 = 0$, resp. $y_1 = y_2$. Z toho vyplýva, že postačujúcou podmienkou pre jednoznačnosť vektora y pri danom vektore s je, aby $h(A) = m \leq n$.

Veta 1.1 (Slabá dualita). *Pre ľubovoľné prípustné riešenie $x \in \mathcal{P}$ primárnej úlohy (P) a ľubovoľné prípustné riešenie $(y, s) \in \mathcal{D}$ duálnej úlohy (D) platí $b^T y \leq c^T x$. Navyiac, ak pre nejaký vektor $x^* \in \mathcal{P}$ a dvojicu $(y^*, s^*) \in \mathcal{D}$ platí $b^T y^* = c^T x^*$, potom vektor x^* je optimálnym riešením úlohy (P) a dvojica (y^*, s^*) je optimálnym riešením úlohy (D). [28]*

Dôkaz. Najprv dokážeme prvú časť vety:

$$0 \leq s^T x = (c - A^T y)^T x = c^T x - y^T Ax = c^T x - b^T y.$$

Z toho vyplýva, že $c^T x$ je horným ohraničením $b^T y$, a preto $\forall x \in \mathcal{P} : c^T x \geq b^T y^*$. Zároveň, ak pre nejaké prípustné riešenia $x^* \in \mathcal{P}$ a $y^* \in \mathcal{D}$ platí $b^T y^* = c^T x^*$, potom $\forall x \in \mathcal{P} : c^T x \geq c^T x^*$. To znamená, že vektor x^* je optimálnym riešením úlohy (P). Analogicky sa dá ukázať optimalita prípustného riešenia (y^*, s^*) úlohy (D). \square

Priamym dôsledkom Vety 1.1 je, že ak jedna z dvojice úloh (P) a (D) je neohraničená, potom druhá je neprípustná. Všetky prípady, ktoré môžu nastať, uvádza nasledujúce tvrdenie, ktoré zároveň formuluje aj nutné a postačujúce podmienky optimality.

Veta 1.2 (Dualita). *Ak obe úlohy (P) a (D) sú prípustné, potom obe úlohy majú optimálne riešenie. Ak $x \in \mathcal{P}$ a $(y, s) \in \mathcal{D}$, potom x a (y, s) sú optimálnymi riešeniami práve vtedy, keď $x^T s = 0$. Ak žiadna z dvojice úloh (P) a (D) nemá optimálne riešenie, potom buď obe úlohy sú neprípustné, alebo jedna z dvojice úloh je neprípustná a druhá je neohraničená. [28]*

Časť Vety 1.2 hovorí o tom, že ak obe z množín \mathcal{P} a \mathcal{D} sú neprázdne, potom množiny \mathcal{P}^* a \mathcal{D}^* sú neprázdne. Tvrdenie zároveň zahŕňa podmienku komplementarity, ktorá hovorí o tom, že v optimálnom riešení $x^* \in \mathcal{P}^*$ a $(y^*, s^*) \in \mathcal{D}^*$ platí $(x^*)^T s^* = 0$. Navyše táto podmienka platí pre všetky optimálne riešenia, nielen pre konkrétnu dvojicu. Keďže všetky zložky vektorov $x \geq 0$ a $s \geq 0$ sú nezáporné, tak $x^T s = 0$ práve vtedy, keď $Xs = 0$. To znamená, že nutné a postačujúce podmienky optimality z Vety 1.2 môžeme sformulovať v tvare systému

$$Ax = b, x \geq 0, \tag{1.1}$$

$$A^T y + s = c, s \geq 0, \tag{1.2}$$

$$Xs = 0. \tag{1.3}$$

Veta 1.3 (Silná dualita). *Ak jedna z dvojice úloh (P) a (D) má optimálne riešenie, potom má aj druhá a optimálne hodnoty účelových funkcií sa rovnajú. [28]*

Veta 1.4 (Ostrá komplementarita). *Ak obe z dvojice úloh (P) a (D) sú prípustné, potom existuje ostro komplementárna primárno-duálna dvojica optimálnych riešení, t.j. dvojica $(x, s) \in \mathcal{P}^* \times \mathcal{D}^*$ spĺňajúca $x + s > 0$. [28]*

Poznamenajme, že úloha (P) je neprípustná práve vtedy, keď existuje vektor $y \in \mathbf{R}^m$ taký, že $A^T y < 0$ a $b^T y > 0$. Úloha (D) je neprípustná práve vtedy, keď existuje vektor $x \geq 0$ taký, že $Ax = 0$ a $c^T x < 0$. Tieto tvrdenia sú príkladmi tzv. viet o alternatívach, ktoré hovoria o riešiteľnosti práve jedného z dvojice systémov. Najznámejšími príkladmi viet o alternatívach sú Farkasova lema, Fredholmova alternatíva a Gordanova lema. Podrobný prehľad viet o alternatívach je možné nájsť v knihe [11] alebo [21].

RELATÍVNE VNÚTRO MNOŽINY PRÍPUSTNÝCH RIEŠENÍ

Najpodstatnejším elementom v metódach vnútorného bodu sú tie prípustné riešenia, ktoré v podmienkach prípustnosti ostro splňajú všetky ohraničenia. Tieto prípustné riešenia sa nazývajú vnútornými bodmi a množina všetkých vnútorných bodov sa nazýva relatívnym vnútrom množiny prípustných riešení. V tejto kapitole uvedieme základné predpoklady, ktoré sú hlavným východiskom v metódach vnútorného bodu v lineárnom programovaní. Zároveň sformulujeme niekoľko zaujímavých tvrdení a odvodíme ekvivalentné formulácie základných predpokladov. Posledná časť kapitoly je venovaná pojmu optimálneho rozkladu.

2.1 Predpoklad existencie vnútorného bodu

Pre dvojicu úloh (P) a (D) definujeme relatívne vnútro množiny prípustných riešení. Množiny

$$\mathcal{P}^\circ = \{x \in \mathcal{P} \mid x > 0\},$$

$$\mathcal{D}^\circ = \{(y, s) \in \mathcal{D} \mid s > 0\}$$

nazývame relatívnym vnútrom množiny \mathcal{P} , resp. množiny \mathcal{D} a ich prvky nazývame vnútornými bodmi alebo ostro prípustnými riešeniami úlohy (P) , resp. úlohy (D) . Dvojicu $(x, s) \in \mathcal{P}^\circ \times \mathcal{D}^\circ$ nazývame ostro prípustným primárno-duálnym riešením pre dvojicu úloh (P) a (D) . V prvej kapitole sme uviedli technický predpoklad $h(A) = m \leq n$, ktorý zabezpečí jednoznačnosť vektora $y \in \mathbf{R}^m$ pri danom vektore $s \geq 0$ tak, aby dvojica (y, s) bola prípustným riešením úlohy (D) . Druhým dôležitým a nevyhnutným predpokladom pre úlohy (P) a (D) je predpoklad existencie vnútorného bodu, t.j. $\mathcal{P}^\circ \neq \emptyset$ a $\mathcal{D}^\circ \neq \emptyset$. Pre jednoduchosť budeme uvedené základné predpoklady označovať nasledovne:

$$(P1) \quad h(A) = m \leq n,$$

$$(P2) \quad \mathcal{P}^\circ \neq \emptyset \wedge \mathcal{D}^\circ \neq \emptyset.$$

Lema 2.1. *Nech platí $(P1)$. Potom Jakobiho matica systému (1.1)-(1.3) v ľubovoľnom vnútornom bode $x \in \mathcal{P}^\circ$, $(y, s) \in \mathcal{D}^\circ$ je regulárna. [9]*

Dôkaz. Nech $x \in \mathcal{P}^\circ$, $(y, s) \in \mathcal{D}^\circ$ sú pevne zvolené. Jakobihho matica systému (1.1)-(1.3) v pevne zvolenom bode $x \in \mathcal{P}^\circ$, $(y, s) \in \mathcal{D}^\circ$ je matica

$$J(x, y, s) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{bmatrix}.$$

Dokážeme implikáciu $Jz = 0 \Rightarrow z = 0$, z ktorej jednoznačne vyplýva regularita matice J . Nech $u \in \mathbf{R}^n$, $v \in \mathbf{R}^m$, $w \in \mathbf{R}^n$ a nech $z = (u^T, v^T, w^T)^T$. Potom $Jz = 0$ práve vtedy, keď

$$Au = 0, \quad (2.1)$$

$$A^T v + w = 0, \quad (2.2)$$

$$Su + Xw = 0. \quad (2.3)$$

Je zrejmé, že matice X a S sú regulárne, a teda k nim existujú inverzné matice X^{-1} a S^{-1} . Z rovnice (2.3) po úprave dostaneme $w = -X^{-1}Su$. Dosadením $w = -X^{-1}Su$ do rovnice (2.2) dostaneme $u = S^{-1}XA^T v$. Dosadením $u = S^{-1}XA^T v$ do rovnice (2.1) dostaneme $AS^{-1}XA^T v = 0$. Keďže matica $S^{-1}X$ je kladne definitná a $h(A) = m$, tak matica $AS^{-1}XA^T$ je tiež kladne definitná, a teda je regulárna. Z toho vyplýva, že $AS^{-1}XA^T v = 0 \Leftrightarrow v = 0$, a preto $u = 0$ a $w = 0$. Tým sme dokázali implikáciu $Jz = 0 \Rightarrow z = 0$. \square

Lema 2.2. *Nech $\bar{x} \in \mathcal{P}$ a $(\bar{y}, \bar{s}) \in \mathcal{D}$. Potom pre všetky prípustné primárno-duálne dvojice $(x, s) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$ platí $x^T s = \bar{s}^T x + \bar{x}^T s - \bar{x}^T \bar{s}$. [28]*

Dôkaz. Z predpokladu prípustnosti vektora $\bar{x} \in \mathcal{P}$ a dvojice $(\bar{y}, \bar{s}) \in \mathcal{D}$ vyplýva, že $A\bar{x} = b$ a $A^T \bar{y} + \bar{s} = c$. Rovnako z prípustnosti ľubovoľnej primárno-duálnej dvojice $(x, s) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$ vyplýva, že $Ax = b$ a $A^T y + s = c$. Z uvedených vzťahov jednoducho odvodíme, že $A(x - \bar{x}) = 0$ a $A^T(\bar{y} - y) = s - \bar{s}$, a teda $(x - \bar{x})^T(s - \bar{s}) = 0$. Po roznásobení skalárneho súčinu na ľavej strane a upravením rovnice dostaneme požadovaný vzťah. \square

Veta 2.1 (Ohraničenosť úrovnových podmnožín $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$). *Nech platí (P1) a (P2). Potom pre ľubovoľné číslo $\gamma > 0$ množina všetkých prípustných primárno-duálnych dvojíc $(x, s) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$ spĺňajúcich $x^T s \leq \gamma$ je ohraničená. [28]*

Dôkaz. Predpoklad (P2) implikuje existenciu ostro prípustnej primárno-duálnej dvojice $(\bar{x}, \bar{s}) \in \mathcal{P}^\circ \times \mathcal{D}^\circ$. Použitím Lemy 2.2 dostaneme, že $\forall \gamma > 0$, $\forall (x, s) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$, $x^T s \leq \gamma$ platí $0 \leq x^T s = \bar{s}^T x + \bar{x}^T s - \bar{x}^T \bar{s} \leq \gamma$, resp.

$$\forall \gamma > 0, \forall (x, s) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}, x^T s \leq \gamma : 0 \leq \bar{s}^T x + \bar{x}^T s \leq \gamma + \bar{x}^T \bar{s}. \quad (2.4)$$

Keďže $x \geq 0$, $s \geq 0$ a $\bar{x} > 0$, $\bar{s} > 0$, tak $\bar{x}^T s \geq 0$ a $\bar{s}^T x \geq 0$, a preto z (2.4) vyplýva, že $\forall \gamma > 0$, $\forall (x, s) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$, $x^T s \leq \gamma$ platí

$$0 \leq \bar{x}^T s \leq \gamma + \bar{x}^T \bar{s}, \quad (2.5)$$

$$0 \leq \bar{s}^T x \leq \gamma + \bar{x}^T \bar{s}. \quad (2.6)$$

Všetky členy súčtov $\sum_{i=1}^n \bar{x}_i s_i = \bar{x}^T s$ a $\sum_{i=1}^n \bar{s}_i x_i = \bar{s}^T x$ sú nezáporné, a preto ohraňovania (2.5) a (2.6) platia aj jednotlivo pre každý člen súčtu. Teda $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{x}_i s_i &\leq \gamma + \bar{x}^T \bar{s}, & 0 \leq \bar{s}_i x_i &\leq \gamma + \bar{x}^T \bar{s}, \\ 0 \leq s_i &\leq \frac{\gamma + \bar{x}^T \bar{s}}{\bar{x}_i}, & 0 \leq x_i &\leq \frac{\gamma + \bar{x}^T \bar{s}}{\bar{s}_i}. \end{aligned}$$

Tým sme dokázali, že $\forall \gamma > 0$ množina $\mathcal{M} = \{(x, s) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D} \mid x^T s \leq \gamma\}$ je ohraňovaná v $x \geq 0$ a $s \geq 0$.

Ohraňenosť množiny \mathcal{M} v $y \in \mathbf{R}^m$ dokážeme sporom. Definujme množinu $\overline{\mathcal{M}} = \{y \in \mathbf{R}^m \mid \exists s \in \mathbf{R}^n : (y, s) \in \mathcal{M}\}$. Treba dokázať, že množina $\overline{\mathcal{M}}$ je ohraňovaná. Nech by množina $\overline{\mathcal{M}}$ bola neohraňovaná. Keďže množina $\overline{\mathcal{M}}$ je konvexná a zároveň by bola neohraňovaná, tak by obsahovala polpriamku. To znamená, že by platilo

$$\forall y_1 \in \overline{\mathcal{M}}, \exists y_2 \in \overline{\mathcal{M}}, y_1 \neq y_2 : y_\tau = y_1 + \tau(y_2 - y_1) \in \overline{\mathcal{M}}, \forall \tau \geq 0. \quad (2.7)$$

Ak by $y_\tau \in \overline{\mathcal{M}}$, potom by existovala trojica $(s_\tau, s_1, s_2) : A^T[y_1 + \tau(y_2 - y_1)] + s_\tau = c, A^T y_1 + s_1 = c, A^T y_2 + s_2 = c$. Z uvedených vzťahov jednoducho odvodíme, že by platilo

$$s_\tau = c - A^T[y_1 + \tau(y_2 - y_1)] = (c - A^T y_1) + \tau[(c - A^T y_2) - (c - A^T y_1)] = s_1 + \tau(s_2 - s_1).$$

Keďže platí (P1) a podľa (2.7) $y_1 \neq y_2$, tak $s_1 \neq s_2$, a preto $s_\tau = s_1 + \tau(s_2 - s_1)$ je polpriamka ležiaca v množine \mathcal{M} . Avšak to je spor so zistením, že množina \mathcal{M} je ohraňovaná v $s \geq 0$, a teda množina \mathcal{M} je ohraňovaná v $y \in \mathbf{R}^m$. \square

2.2 Ekvivalenty predpokladu existencie vnútorného bodu

V tejto časti uvedieme tvrdenia, ktoré formulujú vzťahy medzi množinou prípustných riešení, množinou optimálnych riešení a relatívnym vnútrom množiny prípustných riešení úloh (P) a (D). Z hľadiska metód vnútorného bodu sú nasledujúce tvrdenia významné hlavne preto, že v konečnom dôsledku formulujú ekvivalenty základných predpokladov (P1) a (P2).

Veta 2.2. *Nech množina \mathcal{P} je neprázdna. Potom, ak množina \mathcal{D}° je neprázdna, tak množina \mathcal{P}^* je neprázdna a ohraňovaná. [9]*

Dôkaz. Keďže $\mathcal{P} \neq \emptyset$ a $\mathcal{D}^\circ \neq \emptyset$, tak obe z dvojice úloh (P) a (D) sú prípustné, a preto podľa Vety 1.2 existuje optimálne riešenie $x^* \in \mathcal{P}^*$ úlohy (P). Označme λ optimálnu hodnotu účelovej funkcie úlohy (P). Množinu optimálnych riešení úlohy (P) tak môžeme definovať ako $\mathcal{P}^* = \{x \in \mathcal{P} \mid c^T x = \lambda\}$. Je zrejmé, že množinu \mathcal{P}^* môžeme definovať ekvivalentne ako $\mathcal{P}^* = \{x \in \mathcal{P} \mid c^T x \leq \lambda\}$. Predpoklad $\mathcal{D}^\circ \neq \emptyset$ implikuje existenciu vnútorného bodu $(y, s) \in \mathcal{D}^\circ$, ktorý spĺňa $A^T y + s = c$ a $s > 0$. Z toho vyplýva, že $\forall x \in \mathcal{P}^* : c^T x = (A^T y + s)^T x = y^T (Ax) + s^T x = y^T b + x^T s \leq \lambda$, a teda

$\forall x \in \mathcal{P}^* : x^T s \leq \lambda - b^T y$. Nakoniec môžeme množinu optimálnych riešení úlohy (P) definovať v tvare $\mathcal{P}^* = \{x \in \mathcal{P} \mid x^T s \leq \lambda - b^T y\}$, ktorá však podľa Vety 2.1 je ohraničená. \square

Veta 2.3. *Nech množina \mathcal{D} je neprázdna. Potom, ak množina \mathcal{P}° je neprázdna a platí (P1), tak množina \mathcal{D}^* je neprázdna a ohraničená. [9]*

Dôkaz. Predpoklady $\mathcal{D} \neq \emptyset$ a $\mathcal{P}^\circ \neq \emptyset$ na základe Vety 1.2 implikujú existenciu optimálneho riešenia $(y^*, s^*) \in \mathcal{D}^*$ úlohy (D). Nech λ označuje optimálnu hodnotu účelovej funkcie úlohy (D). Potom množinu optimálnych riešení úlohy (D) môžeme definovať ako $\mathcal{D}^* = \{(y, s) \in \mathcal{D} \mid b^T y = \lambda\}$, alebo ekvivalentne $\mathcal{D}^* = \{(y, s) \in \mathcal{D} \mid b^T y \geq \lambda\}$. Z predpokladu $\mathcal{P}^\circ \neq \emptyset$ vyplýva, že existuje vnútorný bod $x \in \mathcal{P}^\circ$ spĺňajúci $Ax = b$ a $x > 0$. Jednoducho odvodíme, že $\forall (y, s) \in \mathcal{D}^* : b^T y = (Ax)^T y = x^T (A^T y) = x^T (c - s) = x^T c - x^T s \geq \lambda$, a teda $\forall (y, s) \in \mathcal{D}^* : x^T s \leq c^T x - \lambda$. Preto množinu \mathcal{D}^* môžeme zapísať v tvare $\mathcal{D}^* = \{(y, s) \in \mathcal{D} \mid x^T s \leq c^T x - \lambda\}$, pričom podľa Vety 2.1 je táto množina ohraničená. \square

Veta 2.4. *Ak množina \mathcal{P}^* je neprázdna a ohraničená, potom množiny \mathcal{D}° a \mathcal{P} sú neprázdne. [9]*

Dôkaz. Z predpokladu $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$ zrejme vyplýva, že $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Keďže $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$, tak existuje optimálne riešenie úlohy (P), a preto podľa Vety 1.3 existuje aj optimálne riešenie $(y^*, s^*) \in \mathcal{D}^*$ úlohy (D). Primárne prípustný vektor $x \in \mathcal{P}$ je optimálnym riešením úlohy (P) $\Leftrightarrow x^T s^* = 0$, a preto $\mathcal{P}^* = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0, x^T s^* = 0\}$. Množina \mathcal{P}^* je neprázdna a ohraničená, a preto úloha

$$\max_x \{e^T x \mid Ax = b, x \geq 0, x^T s^* = 0\} \quad (2.8)$$

má optimálne riešenie. Keďže $x \geq 0$ a $s^* \geq 0$, tak úloha (2.8) je ekvivalentná úlohe

$$\max_x \{e^T x \mid Ax = b, x \geq 0, x^T s^* \leq 0\}. \quad (2.9)$$

Duálna úloha k úlohe (2.9) má tvar

$$\min_{y, \beta} \{b^T y \mid A^T y + \beta s^* \geq e, \beta \geq 0\}. \quad (2.10)$$

Z Vety 1.3 vyplýva, že duálna úloha (2.10) je prípustná. Teda existuje prípustné riešenie $(\bar{y}, \bar{\beta})$ úlohy (2.10), t.j. $A^T \bar{y} + \bar{\beta} s^* \geq e$ a $\bar{\beta} \geq 0$. Ak $\bar{\beta} = 0$, potom $A^T \bar{y} \geq e$, čo implikuje

$$\begin{aligned} A^T (y^* - \bar{y}) &= A^T y^* - A^T \bar{y} \leq c - e, \\ A^T (y^* - \bar{y}) + e &\leq c. \end{aligned}$$

Zrejme existuje vektor $\tilde{s} \geq 0 : A^T (y^* - \bar{y}) + (\tilde{s} + e) = c$. Z toho vyplýva, že dvojica $(y^* - \bar{y}, \tilde{s} + e)$ je duálne prípustným riešením pre úlohu (D), pričom $\tilde{s} + e > 0$, a preto $\mathcal{D}^\circ \neq \emptyset$. Ak $\bar{\beta} > 0$, potom dosadením $s^* = c - A^T y^*$ do vzťahu $A^T \bar{y} + \bar{\beta} s^* \geq e$ dostaneme

$$\begin{aligned} A^T \bar{y} + \bar{\beta} (c - A^T y^*) &\geq e, \\ A^T \left(y^* - \frac{\bar{y}}{\bar{\beta}} \right) + \frac{e}{\bar{\beta}} &\leq c. \end{aligned}$$

Zároveň existuje vektor $\hat{s} \geq 0 : A^T (y^* - \bar{y}/\bar{\beta}) + (\hat{s} + e/\bar{\beta}) = c$. To implikuje, že dvojica $(y^* - \bar{y}/\bar{\beta}, \hat{s} + e/\bar{\beta})$ je duálne prípustným riešením pre úlohu (D) . Navyše $\hat{s} + e/\bar{\beta} > 0$, a preto $\mathcal{D}^\circ \neq \emptyset$. \square

Veta 2.5. Ak množina \mathcal{D}^* je neprázdna a ohraničená, potom množiny \mathcal{P}° a \mathcal{D} sú neprázdne a platí $(P1)$. [9]

Dôkaz. Implikácia $\mathcal{D}^* \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{D} \neq \emptyset$ je zrejماً. Z predpokladu existencie optimálneho riešenia úlohy (D) podľa Vety 1.3 vyplýva, že úloha (P) má optimálne riešenie $x^* \in \mathcal{P}^*$. Duálne prípustná dvojica $(y, s) \in \mathcal{D}$ je optimálnym riešením úlohy $(D) \Leftrightarrow s^T x^* = 0$, a preto $\mathcal{D}^* = \{(y, s) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \mid A^T y + s = c, s \geq 0, s^T x^* = 0\}$. Keďže množina \mathcal{D}^* je neprázdna a ohraničená, tak úloha

$$\max_{y,s} \{e^T s \mid A^T y + s = c, s \geq 0, s^T x^* = 0\} \quad (2.11)$$

má optimálne riešenie. Zrejme úloha

$$\max_{y,s} \{e^T s \mid A^T y + s = c, s \geq 0, s^T x^* \leq 0\} \quad (2.12)$$

je ekvivalentná úlohe (2.11). Sformulujme duálnu úlohu k úlohe (2.12)

$$\min_{x,\nu} \{c^T x \mid Ax = 0, x + \nu x^* \geq e, \nu \geq 0\}, \quad (2.13)$$

ktorá podľa Vety 1.3 má prípustné riešenie $(\bar{x}, \bar{\nu})$, t.j. $A\bar{x} = 0, \bar{x} + \bar{\nu}x^* \geq e$ a $\bar{\nu} \geq 0$. Ak $\bar{\nu} = 0$, potom $\bar{x} + x^* \geq e > 0$ a $A(\bar{x} + x^*) = A\bar{x} + Ax^* = b$. Z toho vyplýva, že vektor $\bar{x} + x^*$ je ostro prípustným riešením úlohy (P) , a teda $\mathcal{P}^\circ \neq \emptyset$. V prípade, že $\bar{\nu} > 0$, platí

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}}{\bar{\nu}} + x^* &\geq \frac{e}{\bar{\nu}} > 0, \\ A \left(\frac{\bar{x}}{\bar{\nu}} + x^* \right) &= \frac{A\bar{x}}{\bar{\nu}} + Ax^* = b. \end{aligned}$$

To znamená, že vektor $\bar{x}/\bar{\nu} + x^*$ je ostro prípustným riešením úlohy (P) , a preto $\mathcal{P}^\circ \neq \emptyset$.

Nakoniec dokážeme, že z predpokladov tvrdenia vyplýva, že platí $(P1)$. Implikáciu dokážeme sporom. Nech množina \mathcal{D}^* je neprázdna a ohraničená a $(P1)$ neplatí, t.j. $h(A) < m$. Potom stĺpce matice A^T sú lineárne závislé, a teda $\exists \bar{u} \neq 0 : A^T \bar{u} = 0$. Predpoklad $\mathcal{D}^* \neq \emptyset$ implikuje, že pre dvojicu úloh (P) a (D) existujú optimálne riešenia $x \in \mathcal{P}^*$ a $(y, s) \in \mathcal{D}^*$, ktoré spĺňajú $Ax = b, x \geq 0, A^T y + s = c, s \geq 0$ a $x^T s = 0$. Zrejme platí $\forall \alpha \in \mathbf{R} : A^T (y + \alpha \bar{u}) + s = c$. Z toho vyplýva, že $\forall \alpha \in \mathbf{R} : (y + \alpha \bar{u}, s) \in \mathcal{D}$, pričom

$s = c - A^T(y + \alpha\bar{u})$. Roznásobením výrazu $x^T s$ dostaneme

$$x^T s = x^T [c - A^T(y + \alpha\bar{u})] = x^T c - x^T A^T y - x^T (A^T \alpha\bar{u}) = c^T x - (Ax)^T y = c^T x - b^T y = 0.$$

Z toho vyplýva, že $\forall \alpha \in \mathbf{R} : (y + \alpha\bar{u}, s) \in \mathcal{D}^*$. To znamená, že množina \mathcal{D}^* je neohraničená, a to je spor s pôvodným tvrdením. \square

Podstatným výsledkom predchádzajúcich tvrdení je nasledujúci dôsledok, ktorý uvádza ekvivalentné formulácie predpokladu existencie vnútorného bodu pre dvojicu úloh (P) a (D).

Dôsledok 2.1. *Nech množiny \mathcal{P} a \mathcal{D} sú neprázdne. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

- (i) množiny \mathcal{P}° a \mathcal{D}° sú neprázdne a platí (P1);
- (ii) množiny \mathcal{P}^* a \mathcal{D}^* sú neprázdne a ohraničené;
- (iii) množina \mathcal{P}° je neprázdna a množina \mathcal{P}^* je neprázdna a ohraničená a platí (P1);
- (iv) množina \mathcal{D}° je neprázdna a množina \mathcal{D}^* je neprázdna a ohraničená. [9]

Dôsledok 2.2. *Nech množiny \mathcal{P} a \mathcal{D} sú neprázdne. Potom množina \mathcal{D} je ohraničená práve vtedy, keď nulový priestor matice A obsahuje kladný vektor. [28]*

Dôkaz. Ak v účelovej funkcii úlohy (D) položíme $b = 0$, potom množina \mathcal{D} sa nezmení a zrejme $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$. Z predpokladu $\mathcal{D} \neq \emptyset$ podľa Dôsledku 2.1 vyplýva, že množina \mathcal{D} je ohraničená $\Leftrightarrow \mathcal{P}^\circ \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x > 0 : Ax = 0$. \square

Dôsledok 2.3. *Nech množiny \mathcal{P} a \mathcal{D} sú neprázdne. Potom množina \mathcal{P} je ohraničená práve vtedy, keď riadkový priestor matice A obsahuje kladný vektor. [28]*

Dôkaz. Ak v účelovej funkcii úlohy (P) položíme $c = 0$, potom množina \mathcal{P} sa nezmení a zrejme $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$. Z predpokladu $\mathcal{P} \neq \emptyset$ podľa Dôsledku 2.1 vyplýva, že množina \mathcal{P} je ohraničená $\Leftrightarrow \mathcal{D}^\circ \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists (y, s) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n : s > 0, A^T y + s = 0 \Leftrightarrow \exists \bar{y} \in \mathbf{R}^m : A^T \bar{y} > 0$. \square

Dôsledok 2.4. *Nech množiny \mathcal{P} a \mathcal{D} sú neprázdne. Potom aspoň jedna z množín \mathcal{P} a \mathcal{D} je neohraničená. [28]*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že obe z množín \mathcal{P} a \mathcal{D} sú ohraničené. Potom z Dôsledkov 2.3 a 2.4 vyplýva, že $\exists x > 0, y \in \mathbf{R}^m : Ax = 0, A^T y > 0$. Z toho dostaneme, že $0 = (Ax)^T y = x^T (A^T y) > 0$, a to je spor. \square

2.3 Optimálny rozklad

Základným východiskom tejto časti je komplementárna vlastnosť optimálnych riešení dvojice úloh (P) a (D). Preto pripomeňme definíciu komplementárnych a ostro komplementárnych vektorov.

Definícia 2.1. Dva nezáporné vektory $u, v \in \mathbf{R}_+^n$ nazývame komplementárne, ak $u^T v = 0$. Navyiac, ak $u + v > 0$, potom vektory u a v nazývame ostro komplementárne.

V predchádzajúcich častiach sme používali rôzne spôsoby zápisu množín optimálnych riešení \mathcal{P}^* a \mathcal{D}^* . V tejto podkapitole predpokladáme, že množiny \mathcal{P} a \mathcal{D} sú neprázdne, a teda aj množiny \mathcal{P}^* a \mathcal{D}^* sú neprázdne. Sformulujme doteraz používané zápisy množín \mathcal{P}^* a \mathcal{D}^* . Spoločnú optimálnu hodnotu účelových funkcií úloh (P) a (D) označme λ .

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^* &= \{x^* \in \mathcal{P} \mid c^T x^* \leq c^T x, \forall x \in \mathcal{P}\} \\ \mathcal{D}^* &= \{(y^*, s^*) \in \mathcal{D} \mid b^T y^* \geq b^T y, \forall (y, s) \in \mathcal{D}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^* &= \{x \in \mathcal{P} \mid c^T x = \lambda\} \\ \mathcal{D}^* &= \{(y, s) \in \mathcal{D} \mid b^T y = \lambda\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^* &= \{x \in \mathcal{P} \mid \exists (y, s) \in \mathcal{D} : x^T s = 0\} \\ \mathcal{D}^* &= \{(y, s) \in \mathcal{D} \mid \exists x \in \mathcal{P} : x^T s = 0\}\end{aligned} \tag{2.14}$$

Je zrejmé, že všetky uvedené zápisy sú ekvivalentné. Cieľom tejto časti je charakterizovať množiny optimálnych riešení \mathcal{P}^* a \mathcal{D}^* pomocou tzv. optimálneho rozkladu, čo nám umožní identifikovať relatívne vnútro týchto množín.

Definícia 2.2. Pre nezáporný vektor $u \in \mathbf{R}_+^n$ definujeme jeho nosič $\sigma(u)$ ako množinu tých indexov i , pre ktoré $u_i > 0$:

$$\sigma(u) = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid u_i > 0\}.$$

Podľa Definície 2.1 a Definície 2.2 je zrejmé, že vektory $u, v \in \mathbf{R}_+^n$ sú komplementárne práve vtedy, keď $\sigma(u) \cap \sigma(v) = \emptyset$; sú ostro komplementárne práve vtedy, keď $\sigma(u) \cup \sigma(v) = \{1, 2, \dots, n\}$. Z toho vyplýva, že dvojica $(x, s) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$ je ostro komplementárnym optimálnym riešením pre dvojicu úloh (P) a (D) práve vtedy, keď $\sigma(x) \cap \sigma(s) = \emptyset$ a $\sigma(x) \cup \sigma(s) = \{1, 2, \dots, n\}$. To znamená, že $\sigma(x)$ a $\sigma(s)$ tvorí rozklad indexovej množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

Definícia 2.3. Nech dvojica $(x, s) \in \mathcal{P}^* \times \mathcal{D}^*$ je ostro komplementárnym optimálnym riešením pre úlohy (P) a (D) . Potom dvojicu množín $B := \sigma(x)$ a $N := \sigma(s)$ nazývame optimálnym rozkladom pre dvojicu úloh (P) a (D) .

Veta 2.6. *Optimálny rozklad (B, N) je nezávislý od výberu ostro komplementárnej optimálnej dvojice. [9]*

Dôkaz. Uvažujme dve rôzne ostro komplementárne optimálne dvojice (x, s) a (\bar{x}, \bar{s}) . Vieme, že každá z dvojíc $\sigma(x), \sigma(s)$ a $\sigma(\bar{x}), \sigma(\bar{s})$ tvorí rozklad indexovej množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, a preto $\sigma(x) \cap \sigma(s) = \emptyset$, $\sigma(x) \cup \sigma(s) = \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma(\bar{x}) \cap \sigma(\bar{s}) = \emptyset$ a $\sigma(\bar{x}) \cup \sigma(\bar{s}) = \{1, 2, \dots, n\}$. Keďže $x^T \bar{s} = 0$ a $\bar{x}^T s = 0$, tak $\sigma(x) \cap \sigma(\bar{s}) = \emptyset$ a $\sigma(\bar{x}) \cap \sigma(s) = \emptyset$, a preto $\sigma(\bar{s}) \subseteq \sigma(s)$ a $\sigma(\bar{x}) \subseteq \sigma(x)$. Zároveň aj množiny $\sigma(\bar{x})$ a $\sigma(\bar{s})$ tvoria rozklad, a tak musí platiť $\sigma(x) = \sigma(\bar{x})$ a $\sigma(s) = \sigma(\bar{s})$. \square

V ďalšom kroku vysvetlíme preusporiadanie prvkov na základe optimálneho rozkladu (B, N) . Zložky vektorov $x \in \mathbf{R}^n$, $s \in \mathbf{R}^n$ a $c \in \mathbf{R}^n$ usporiadame do dvoch charakteristických blokov. Zároveň stĺpce matice $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ usporiadame tak, aby sa zachoval charakter pôvodných ohraňení vzhľadom na preusporiadné zložky ostatných vektorov.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} s_B \\ s_N \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} A_B & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \rightarrow A_B x_B + A_N x_N = b$$

$$A^T y + s = c \rightarrow \begin{bmatrix} A_B^T \\ A_N^T \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} s_B \\ s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} A_B^T y + s_B = c_B \\ A_N^T y + s_N = c_N \end{cases}$$

V tejto časti budeme naďalej uvažovať, že zložky vektorov $x \in \mathbf{R}^n$ a $s \in \mathbf{R}^n$ sú zoradené v súlade s optimálnym rozkladom (B, N) . Z predpokladu existencie prípustných riešení pre úlohy (P) a (D) vyplýva nasledujúci dôsledok.

Dôsledok 2.5. *Keďže existuje optimálne riešenie úlohy (P) také, že $x_B > 0$, tak pre všetky optimálne riešenia $(y, s) \in \mathcal{D}^*$ platí $s_B = 0$ a $s_N \geq 0$. Zároveň, keďže existuje optimálne riešenie úlohy (D) také, že $s_N > 0$, tak pre všetky optimálne riešenia $x \in \mathcal{P}^*$ platí $x_N = 0$ a $x_B \geq 0$. [9]*

Dôsledok 2.6. *Ak (B, N) je optimálny rozklad, potom*

$$\mathcal{P}^* = \{x \in \mathbf{R}^n \mid A_B x_B = b, x_B \geq 0, x_N = 0\},$$

$$\mathcal{D}^* = \{(y, s) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \mid A_B^T y = c_B, A_N^T y + s_N = c_N, s_B = 0, s_N \geq 0\}.$$

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva priamo z charakterizácie množín (2.14), resp. z nutných a postačujúcich podmienok optimality (1.1)-(1.3) a z existencie optimálneho riešenia $x_B > 0$, $x_N = 0$, $s_B = 0$, $s_N > 0$. \square

Na základe uvedených zistení teraz môžeme identifikovať relatívne vnútro množín optimálnych riešení \mathcal{P}^* a \mathcal{D}^* .

$$\text{relint } \mathcal{P}^* = \{x \in \mathcal{P}^* \mid x_B > 0\} \quad \text{relint } \mathcal{D}^* = \{(y, s) \in \mathcal{D}^* \mid s_N > 0\}$$

Uvažujme nasledujúci systém rovníc, ktorý v zmysle optimálneho rozkladu reprezentuje nutné a postačujúce podmienky optimality pre dvojicu úloh (P) a (D) :

$$A_B x_B + A_N x_N = b, \quad (2.15)$$

$$A_B^T y + s_B = c_B, \quad (2.16)$$

$$A_N^T y + s_N = c_N, \quad (2.17)$$

$$X_B s_B = 0, \quad (2.18)$$

$$X_N s_N = 0. \quad (2.19)$$

Skúmajme Jakobiho maticu systému (2.15)-(2.19) v pevne zvolenom ostro komplementárnom optimálnom riešení $x_B > 0$, $x_N = 0$, $s_B = 0$, $s_N > 0$. Cieľom je určiť nutné a postačujúce podmienky regularity Jakobiho matice a zároveň nájsť súvislosť týchto podmienok s jednoznačnosťou optimálnych riešení dvojice úloh (P) a (D).

$$J(x_B, x_N, s_B, s_N) = \begin{bmatrix} A_B & A_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_B^T & I & 0 \\ 0 & 0 & A_N^T & 0 & I \\ S_B & 0 & 0 & X_B & 0 \\ 0 & S_N & 0 & 0 & X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B & A_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_B^T & I & 0 \\ 0 & 0 & A_N^T & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & X_B & 0 \\ 0 & S_N & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pre Jakobiho maticu stanovíme podmienky tak, aby z rovnice $Jv = 0$ jednoznačne vyplývalo, že $v = 0$. Označme v_1, v_2, v_3, v_4 a v_5 vektory príslušných rozmerov a nech $v = (v_1^T, v_2^T, v_3^T, v_4^T, v_5^T)^T$. Potom $Jv = 0$ práve vtedy, keď

$$A_B v_1 + A_N v_2 = 0, \quad (2.20)$$

$$A_B^T v_3 + v_4 = 0, \quad (2.21)$$

$$A_N^T v_3 + v_5 = 0, \quad (2.22)$$

$$X_B v_4 = 0, \quad (2.23)$$

$$S_N v_5 = 0. \quad (2.24)$$

Je zrejmé, že matice X_B a S_N sú regulárne, a preto rovnice (2.23) a (2.24) majú jednoznačné riešenie $v_4 = 0$ a $v_5 = 0$. Dosadením $v_4 = 0$ a $v_5 = 0$ do rovníc (2.20) a (2.21) dostaneme $A_B v_1 = 0$ a $A_B^T v_3 = 0$. Chceme zabezpečiť, aby tieto rovnice mali jednoznačné riešenie $v_1 = 0$ a $v_3 = 0$. To je práve vtedy, keď stĺpce matice A_B sú lineárne nezávislé a stĺpce matice A_B^T sú lineárne nezávislé, pričom stĺpce matice A_B^T sú riadky matice A_B . Inými slovami, požadujeme, aby matica A_B mala plnú stĺpcovú aj riadkovú hodnotu. To je práve vtedy, keď predpoklad (P1) je splnený a A_B je štvorcová matica hodnosti m . Táto podmienka nám zaručí, že $v_1 = 0$ a $v_3 = 0$, a tak z rovnice (2.22) dostaneme $v_5 = 0$.

Dôsledok 2.7. *Jakobiho matica systému (2.15)-(2.19) v ľubovoľnom ostro komplementárnom optimálnom riešení $x_B > 0$, $x_N = 0$, $s_B = 0$, $s_N > 0$ je regulárna práve vtedy, keď platí (P1) a A_B je štvorcová matica hodnosti m .*

Dôsledok 2.8. Ak platí (P1) a A_B je štvorcová matica hodnosti m , potom optimálne riešenia úloh (P) a (D) sú jednoznačne definované.

Dôkaz. Z predpokladov tvrdenia vyplýva, že matica A_B je štvorcová a má plnú hodnotu. To znamená, že matica A_B je regulárna, a teda k nej existuje inverzná matica $(A_B)^{-1}$. Na základe systému rovníc, ktoré v Dôsledku 2.6 popisujú množiny \mathcal{P}^* a \mathcal{D}^* , dostávame jednoznačné riešenie pre x_B, y a s_N .

$$\begin{array}{lll}
 A_B x_B = b & A_B^T y = c_B & A_N^T y + s_N = c_N \\
 x_B = (A_B)^{-1} b & y = (A_B^T)^{-1} c_B & s_N = c_N - A_N^T y \\
 & & s_N = c_N - A_N^T (A_B^T)^{-1} c_B
 \end{array}$$

□

METÓDY VNÚTORNÉHO BODU

Pri metódach vnútorného bodu sa pohybujeme cez relatívne vnútro množiny prípustných riešení, ktoré je tvorené vnútornými bodmi. Preto, ak chceme riešiť úlohu matematického programovania metódami vnútorného bodu, je prirodzené a nevyhnutné predpokladať, že relatívne vnútro množiny prípustných riešení danej úlohy je neprázdne. Z toho dôvodu budeme v ďalších častiach tejto práce vždy vychádzať z predpokladov (P1) a (P2). V nasledujúcich častiach tejto kapitoly podrobne vysvetlíme princíp metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní, zadefinujeme centrálnu trajektóriu a analyzujeme konvergenčné vlastnosti centrálnej trajektórie.

3.1 Základná myšlienka

Základnú myšlienku metód vnútorného bodu popíšeme všeobecne podľa článku *Dvadsať rokov moderných metód vnútorného bodu* [8]. Uvažujme štandardnú úlohu konvexného programovania

$$(CP) \quad \min \{f(x) \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, 2, \dots, m\},$$

kde $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ a $-g_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ sú hladké konvexné funkcie. Teda úlohou je nájsť minimum konvexnej funkcie f na konvexnej množine prípustných riešení, ktorá je popísaná sústavou ohraničení $g_i(x) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Ako sme už v úvode kapitoly uviedli, ak chceme vysvetliť princíp metód vnútorného bodu na úlohe (CP), musíme predpokladať, že relatívne vnútro množiny prípustných riešení úlohy (CP) je neprázdne. Relatívnym vnútrom množiny prípustných riešení úlohy (CP) je množina

$$\mathcal{P}_{CP}^\circ = \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_i(x) > 0, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Teda vychádzame z predpokladu $\mathcal{P}_{CP}^\circ \neq \emptyset$ ³. K úlohe (CP) priradíme pomocnú úlohu

$$(CP_\mu) \quad \min_{x \in \mathcal{P}_{CP}^\circ} \left\{ f(x) + \mu \sum_{i=1}^m \Gamma[g_i(x)] \right\},$$

kde $\mu > 0$ je bariérový parameter a $\Gamma : \mathbf{R}_{++} \rightarrow \mathbf{R}$ je bariérová funkcia⁴ spĺňajúca

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \Gamma(\xi) = \infty, \quad \Gamma'(\xi) < 0, \quad \Gamma''(\xi) > 0.$$

³Tento predpoklad je známy pod pojmom Slaterova podmienka, resp. S-regularita.

⁴Príkladmi bariérovej funkcie sú napríklad $\Gamma(\xi) = -\ln(\xi)$ alebo $\Gamma(\xi) = -\xi^\kappa/\kappa$ pre $\kappa < 0$.

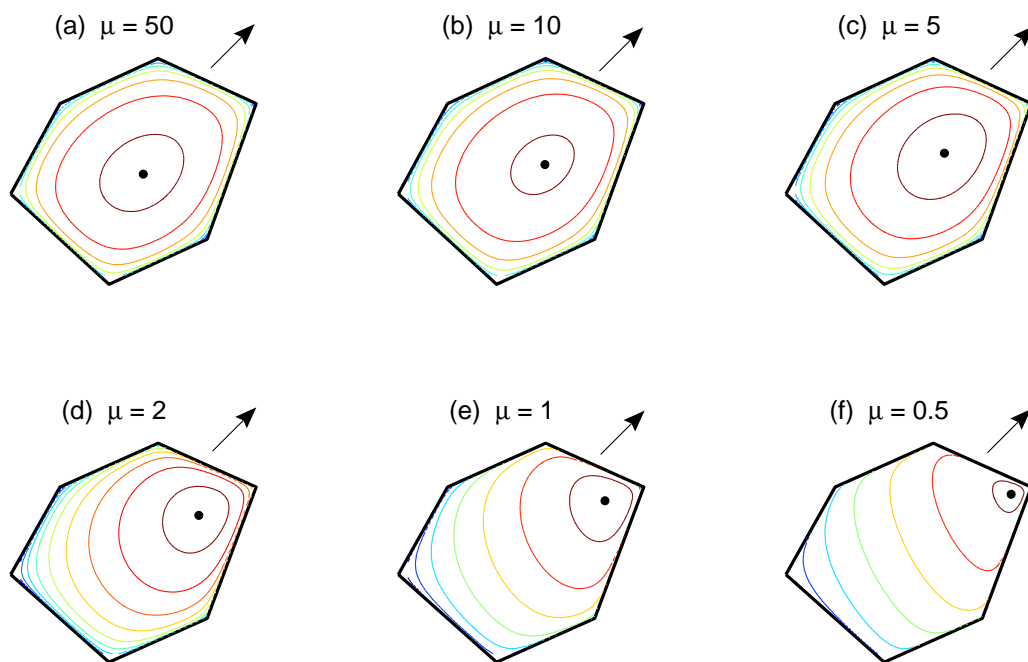
Pomocou bariérovej funkcie Γ sme v úlohe (CP_μ) skonštruovali novú účelovú funkciu, ktorú nazývame transformačnou bariérovou funkciou. Získavame tak celú triedu transformačných bariérových úloh (CP_μ) parametrizovaných parametrom $\mu > 0$. Vlastnosti bariérovej funkcie Γ zabezpečujú, že transformačná bariérová funkcia je konvexnou funkciou, a tým sa pre úlohu (CP_μ) zachováva charakter úlohy konvexného programovania. Zároveň bariérová vlastnosť spôsobuje, že hodnoty $\Gamma(\xi)$ neohraničene rastú pre $\xi \rightarrow 0^+$. Z toho vyplýva, že približovaním sa z vnútra množiny prípustných riešení úlohy (CP) k hranici $\partial\mathcal{P}_{CP}^\circ = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \exists i \in \{1, 2, \dots, m\} : g_i(x) = 0\}$ hodnoty transformačnej bariérovej funkcie tiež neohraničene rastú. To znamená, že ak transformačná bariérová funkcia má konečné infimum, potom toto infimum je minimom ležiacim v množine \mathcal{P}_{CP}° a na jeho nájdenie je už možné použiť metódy voľnej optimalizácie. Uvedený mechanizmus optimalizácie nás vždy udržuje v množine \mathcal{P}_{CP}° . Navyiac, bariérový parameter $\mu > 0$ kladie dôraz na bariérovú funkciu Γ . Hlavná myšlienka spočíva v znižovaní dôrazu na bariérovú funkciu, a to postupným znižovaním hodnoty bariérového parametra do nuly. Pritom očakávame, že príslušné minimá transformačných bariérových funkcií sa budú približovať k minimu pôvodnej účelovej funkcie úlohy (CP) .

Základnú myšlienku môžeme veľmi dobre ilustrovať na príklade dvojrozmernej úlohy lineárneho programovania. Množinou prípustných riešení bude mnohouholník, do ktorého postupne vykreslíme vrstevnice transformačnej účelovej funkcie pomocou logaritmickej bariérovej funkcie $\Gamma(\xi) = -\ln(\xi)$ pre rôzne hodnoty bariérového parametra $\mu > 0$. Táto ilustrácia je zobrazená na Obr. 3.1.

3.2 Logaritmická bariérová funkcia

Zatiaľ čo v klasických metódach vnútorného bodu sa používali rôzne bariérové funkcie, v moderných metódach sa zaužívanou stala záporne vzatá logaritmická funkcia. Prvýkrát ju v metódach vnútorného bodu použil Ragnar Frisch [5] v roku 1955. Trvalo niekoľko rokov, kým sa zistilo, že práve logaritmická bariéra je kvôli jej výborným analytickým vlastnostiam optimálnou voľbou v metódach vnútorného bodu v lineárnom programovaní. Najpodstatnejšou vlastnosťou logaritmickej bariérovej funkcie je, že k nej konjugovanou funkciou je opäť logaritmická bariérová funkcia. To znamená, že pri zachovaní primárno-duálnej symetrie môžeme logaritmickú bariéru aplikovať súčasne na primárnu aj duálnu úlohu. [8]

Na základe konštrukcie popísanej v predošlej časti a pomocou logaritmickej bariérovej funkcie $\Gamma(\xi) = -\ln(\xi)$ aplikujeme princíp metód vnútorného bodu na riešenie úloh (P) a (D) . Najskôr však sformulujeme niekoľko výsledkov z matematickej analýzy, ktoré budú dôležité pri dokazovaní tvrdení v ďalších častiach.



Obr. 3.1: Na obrázkoch sú vykreslené vrstevnice transformačnej účelovej funkcie pre šesť rôznych hodnôt bariérového parametra $\mu > 0$. Čiernym krúžkom sú vyznačené približné polohy optimálnych riešení transformačných bariérových úloh. Šípka vyznačuje smer optimalizácie. Vidíme, že zmenšovaním bariérového parametra μ sú vrstevnice rozložené menej rovnomerne a optimálne riešenie transformačnej bariérovej úlohy sa približuje k optimálnemu riešeniu pôvodnej úlohy. Príloha: vrstevnice.m.

Lema 3.1. *Nech množina $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{R}^n$ je konvexná a nech funkcia $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{R}$ je konvexná. Potom pre ľubovoľné číslo $\kappa \in \mathbf{R}$ podúrovňová množina $\mathcal{S}_\kappa^- = \{x \in \mathcal{S} \mid f(x) \leq \kappa\}$ je konvexná. [11]*

Dôkaz. Treba dokázať, že $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}_\kappa^-, \forall \tau \in \langle 0, 1 \rangle : x_1 + \tau(x_2 - x_1) \in \mathcal{S}_\kappa^-$. Keďže funkcia f je konvexná na množine \mathcal{S} a $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}_\kappa^- \subset \mathcal{S} : f(x_1) \leq \kappa, f(x_2) \leq \kappa$, tak

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}_\kappa^-, \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : f[\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1] \leq \lambda f(x_2) + (1 - \lambda)f(x_1) \leq \lambda\kappa + (1 - \lambda)\kappa = \kappa.$$

Dostávame, že $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}_\kappa^-, \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : f[x_1 + \lambda(x_2 - x_1)] \leq \kappa$. Z toho vyplýva, že $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}_\kappa^-, \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \in \mathcal{S}_\kappa^-$, a teda množina \mathcal{S}_κ^- je konvexná. \square

Lema 3.2. *Nech množina $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{R}^n$ je konvexná a nech funkcia $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{R}$ je konkávna. Potom pre ľubovoľné číslo $\kappa \in \mathbf{R}$ nadúrovňová množina $\mathcal{S}_\kappa^+ = \{x \in \mathcal{S} \mid g(x) \geq \kappa\}$ je konvexná.*

Dôkaz. Treba dokázať, že $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}_\kappa^+, \forall \tau \in \langle 0, 1 \rangle : x_1 + \tau(x_2 - x_1) \in \mathcal{S}_\kappa^+$. Keďže funkcia g je konkávna na množine \mathcal{S} a $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}_\kappa^+ \subset \mathcal{S} : g(x_1) \geq \kappa, g(x_2) \geq \kappa$, tak

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}_\kappa^+, \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : g[\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1] \geq \lambda g(x_2) + (1 - \lambda)g(x_1) \geq \lambda\kappa + (1 - \lambda)\kappa = \kappa.$$

Dostávame, že $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}_\kappa^+, \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : g[x_1 + \lambda(x_2 - x_1)] \geq \kappa$. Z toho vyplýva, že $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}_\kappa^+, \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle : x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \in \mathcal{S}_\kappa^+$, a teda množina \mathcal{S}_κ^+ je konvexná. \square

Veta 3.1 (O kompaktnej množine). *Nech množina \mathcal{S} je podmnožinou konečnorozmerného priestoru \mathbf{R}^n , $n < \infty$. Potom množina \mathcal{S} je kompaktná práve vtedy, keď množina \mathcal{S} je uzavretá a ohraničená. [18]*

Veta 3.2 (Weierstrass). *Ak funkcia f je spojitá na kompaktnej množine \mathcal{S} , potom na množine \mathcal{S} existuje minimum a maximum funkcie f . [17]*

3.2.1 Primárna logaritmická bariérová funkcia

Definujme primárnu logaritmickú bariérovú funkciu $f_\mu : \mathbf{R}_{++}^n \rightarrow \mathbf{R}$

$$f_\mu(x) = c^T x - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x_i).$$

K primárnej úlohe (P) priradíme transformačnú bariérovú úlohu

$$(P_\mu) \min_{x>0} \{f_\mu(x) \mid Ax = b\}.$$

Vypočítame gradient a Hessovu maticu funkcie f_μ v bode $x \in \mathbf{R}_{++}^n$:

$$\nabla f_\mu(x) = c - \mu x^{-1}, \quad \nabla^2 f_\mu(x) = \mu X^{-2}.$$

Je zrejme, že pre ľubovoľnú hodnotu bariérového parametra $\mu > 0$ je Hessova matica $\nabla^2 f_\mu(x)$ vo vnútorných bodoch $x \in \mathcal{P}^\circ$ kladne definitná, a preto funkcia f_μ je rýdzokonvexnou funkciou na množine \mathcal{P}° . Z toho vyplýva, že ak funkcia f_μ má stacionárny bod na svojom definičnom obore $D(f) = \mathcal{P}^\circ$, potom je jediný a funkcia f_μ v ňom dosahuje svoje minimum. Inými slovami, pre $\mu > 0$ úloha (P_μ) má najviac jedno optimálne riešenie. Čo by nastalo v prípade, ak by úloha (P_μ) nemala žiadne optimálne riešenie? Odpoveď dáva nasledujúce tvrdenie.

Veta 3.3. *Nech $\mu > 0$. Potom úloha (P_μ) má práve jedno optimálne riešenie. [9]*

Dôkaz. Podľa $(P2)$ $\exists x^\circ \in \mathcal{P}^\circ$. Definujme množinu $\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{P}^\circ \mid f_\mu(x) \leq f_\mu(x^\circ)\}$, ktorá podľa Lemy 3.1 je konvexná. Keďže $x^\circ \in \mathcal{M}$, tak $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Teraz stačí dokázať, že úloha $\min \{f_\mu(x) \mid x \in \mathcal{M}\}$ má optimálne riešenie. Pomocou Vety 3.1 najprv ukážeme, že množina \mathcal{M} je kompaktná.

Ohraničenosť množiny \mathcal{M} dokážeme sporom. Nech by množina \mathcal{M} bola neohraničená. Keďže množina \mathcal{M} je konvexná a zároveň by bola neohraničená, tak by obsahovala polpriamku. V matematickom kontexte to znamená, že by platilo

$$\forall x_1 \in \mathcal{M}, \exists x_2 \in \mathcal{M}, x_2 \neq x_1 : x_\tau = x_1 + \tau(x_2 - x_1) \in \mathcal{M}, \forall \tau \geq 0.$$

Zrejme $x_2 - x_1 \geq 0$, inak by od určitej hodnoty $\bar{\tau} \geq 0$ bola niektorá zložka vektora $x_{\bar{\tau}}$ záporná, a teda by $x_{\bar{\tau}} \notin \mathcal{M}$. Ak by $x_{\tau} \in \mathcal{M}$, potom by platilo $f_{\mu}(x_{\tau}) \leq f_{\mu}(x^{\circ}), \forall \tau \geq 0$. Zároveň platí, že

$$\begin{aligned} f_{\mu}(x_{\tau}) &= c^T x_{\tau} - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x_{\tau})_i = \\ &= c^T [x_1 + \tau(x_2 - x_1)] - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x_1 + \tau(x_2 - x_1))_i = \\ &= c^T x_1 + \tau \left[c^T (x_2 - x_1) - \mu \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_1 + \tau(x_2 - x_1))_i}{\tau} \right]. \end{aligned}$$

Podľa (P2) $\exists (y^{\circ}, s^{\circ}) \in \mathcal{D}^{\circ} : A^T y^{\circ} + s^{\circ} = c, s^{\circ} > 0$. Keďže $x_1 \in \mathcal{P}^{\circ}$ a $x_2 \in \mathcal{P}^{\circ}$, tak $Ax_1 = b$ a $Ax_2 = b$, a preto $A(x_2 - x_1) = 0$. Všetky zložky nenulového vektora $x_2 - x_1$ sú nezáporné, a preto $(s^{\circ})^T (x_2 - x_1) > 0$. Z uvedených zistení vyplýva, že

$$c^T (x_2 - x_1) = (A^T y^{\circ} + s^{\circ})^T (x_2 - x_1) = (y^{\circ})^T A(x_2 - x_1) + (s^{\circ})^T (x_2 - x_1) > 0.$$

Nakoniec dostaneme, že $\forall \mu > 0$ by platilo

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f_{\mu}(x_{\tau}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ c^T x_1 + \tau \left[\underbrace{c^T (x_2 - x_1)}_{>0} - \mu \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\ln(x_1 + \tau(x_2 - x_1))_i}{\tau}}_{\rightarrow 0} \right] \right\} = +\infty,$$

a to je spor s tvrdením $f_{\mu}(x_{\tau}) \leq f_{\mu}(x^{\circ}), \forall \tau \geq 0$. Tým sme dokázali, že množina \mathcal{M} je ohraničená.

Uzavretosť množiny \mathcal{M} dokážeme pomocou štandardnej definície uzavretej množiny. Uvažujme konvergentnú postupnosť bodov $x^{\kappa} \in \mathcal{M} \subset \mathbf{R}^n$ konvergujúcu k bodu $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$. Treba dokázať, že $\hat{x} \in \mathcal{M}$. Keďže $x^{\kappa} \in \mathcal{M}$, tak $Ax^{\kappa} = b, x^{\kappa} > 0$ a $f_{\mu}(x^{\kappa}) \leq f_{\mu}(x^{\circ}) < \infty$. Zrejme množina $\{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = b\}$ je uzavretá a funkcia f_{μ} je spojitá, a preto $A\hat{x} = b$ a $f_{\mu}(\hat{x}) \leq f_{\mu}(x^{\circ}) < \infty$. Nakoniec ukážeme, že $\hat{x} > 0$. Ak by $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : \hat{x}_i = 0$, potom $f_{\mu}(\hat{x}) = \infty$, a to je spor so zistením $f_{\mu}(\hat{x}) < \infty$. Ukázali sme, že $\hat{x} \in \mathcal{M}$, a teda sme dokázali, že množina \mathcal{M} je uzavretá.

Dokázali sme, že množina \mathcal{M} je ohraničená a uzavretá, a teda podľa Vety 3.1 je kompaktná. Keďže funkcia f_{μ} je spojitá na množine \mathcal{M} , tak podľa Vety 3.2 na množine \mathcal{M} existuje minimum funkcie f_{μ} . Tým sme dokázali, že úloha $\min \{f_{\mu}(x) \mid x \in \mathcal{M}\}$ má optimálne riešenie, a teda úloha (P_{μ}) má práve jedno optimálne riešenie. \square

3.2.2 Duálna logaritmická bariérová funkcia

Analogicky, ako v prípade primárnej úlohy (P), aj pri duálnej úlohe (D) definujeme duálnu logaritmickú bariérovú funkciu $g_\mu : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_{++}^n \rightarrow \mathbf{R}$

$$g_\mu(y, s) = b^T y + \mu \sum_{i=1}^n \ln(s_i).$$

K duálnej úlohe (D) priradíme transformačnú bariérovú úlohu

$$(D_\mu) \quad \max_{y \in \mathbf{R}^m, s > 0} \{g_\mu(y, s) \mid A^T y + s = c\}.$$

Vypočítame gradient a Hessovu maticu funkcie g_μ v bode $(y, s) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_{++}^n$:

$$\nabla g_\mu(y, s) = \begin{bmatrix} b \\ \mu S^{-1} \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 g_\mu(y, s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu S^{-2} \end{bmatrix}.$$

Pre ľubovoľnú kladnú hodnotu bariérového parametra je Hessova matica $\nabla^2 g_\mu(y, s)$ v bodoch $(y, s) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_{++}^n$ záporne semidefinitná, a teda funkcia g_μ je konkávna na množine $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_{++}^n$. Ukážeme, že funkcia g_μ je rýdzokonkávna funkciou na množine \mathcal{D}° . Keďže množina \mathcal{D}° je popísaná vzťahmi $s = c - A^T y$ a $s > 0$, tak na množine \mathcal{D}° môžeme funkciu g_μ definovať ekvivalentne funkciou $\bar{g}_\mu : \mathcal{D}^\circ \rightarrow \mathbf{R}$

$$\bar{g}_\mu(y) = b^T y + \mu \sum_{i=1}^n \ln(c - A^T y)_i.$$

Vypočítame gradient a Hessovu maticu funkcie \bar{g}_μ v bode $y \in \mathcal{D}^\circ$:

$$\nabla \bar{g}_\mu(y) = b - \mu A s^{-1}, \quad \nabla^2 \bar{g}_\mu(y) = -\mu A S^{-2} A^T.$$

Pre ľubovoľnú dvojicu $(y, s) \in \mathcal{D}^\circ$ matica S^{-2} je kladne definitná, a keďže vychádzame z predpokladu ($P1$), tak aj matica $A S^{-2} A^T$ je kladne definitná. Z toho vyplýva, že pre ľubovoľnú hodnotu bariérového parametra $\mu > 0$ je Hessova matica $\nabla^2 \bar{g}_\mu$ vo vnútorných bodoch $(y, s) \in \mathcal{D}^\circ$ záporne definitná. To znamená, že funkcia \bar{g}_μ je rýdzokonkávna funkciou na množine \mathcal{D}° , a teda aj funkcia g_μ je rýdzokonkávna funkciou na množine \mathcal{D}° . Toto zistenie implikuje, že ak funkcia g_μ má stacionárny bod na svojom definičnom obore $D(g) = \mathcal{D}^\circ$, potom je jediný a funkcia g_μ v ňom dosahuje svoje maximum. Inými slovami, pre $\mu > 0$ úloha (D_μ) má najviac jedno optimálne riešenie.

Veta 3.4. *Nech $\mu > 0$. Potom úloha (D_μ) má práve jedno optimálne riešenie. [9]*

Dôkaz. Podľa ($P2$) $\exists (y^\circ, s^\circ) \in \mathcal{D}^\circ$. Definujme množinu $\mathcal{M} = \{(y, s) \in \mathcal{D}^\circ \mid g_\mu(y, s) \geq g_\mu(y^\circ, s^\circ)\}$, ktorá podľa Lemy 3.2 je konvexná. Keďže $(y^\circ, s^\circ) \in \mathcal{M}$, tak $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Teraz stačí dokázať, že úloha $\max \{g_\mu(y, s) \mid (y, s) \in \mathcal{M}\}$ má optimálne riešenie. Pomocou Vety 3.1 najprv ukážeme, že množina \mathcal{M} je kompaktná.

Ohraničenosť množiny \mathcal{M} dokážeme sporom. Nech by množina \mathcal{M} bola neohraničená. Keďže množina \mathcal{M} je konvexná a zároveň by bola neohraničená, tak by obsahovala polpriamku. V matematickom kontexte to znamená, že by platilo

$$\begin{aligned} \forall (y_1, s_1) \in \mathcal{M}, \exists (y_2, s_2) \in \mathcal{M}, (y_1, s_1) \neq (y_2, s_2) : \\ (y_\tau, s_\tau) = (y_1, s_1) + \tau[(y_2, s_2) - (y_1, s_1)] \in \mathcal{M}, \forall \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Keďže platí (P1) a $(y_1, s_1) \neq (y_2, s_2)$, tak $y_1 \neq y_2$ a $s_1 \neq s_2$. Zrejme $s_2 - s_1 \geq 0$, inak by od určitej hodnoty $\bar{\tau} \geq 0$ bola niektorá zložka vektora $s_{\bar{\tau}}$ záporná, a teda by $(y_{\bar{\tau}}, s_{\bar{\tau}}) \notin \mathcal{M}$. Ak by $(y_\tau, s_\tau) \in \mathcal{M}$, potom by platilo $g_\mu(y_\tau, s_\tau) \geq g_\mu(y^\circ, s^\circ), \forall \tau \geq 0$. Zároveň platí, že

$$\begin{aligned} g_\mu(y_\tau, s_\tau) &= b^T y_\tau + \mu \sum_{i=1}^n \ln(s_\tau)_i = \\ &= b^T [y_1 + \tau(y_2 - y_1)] + \mu \sum_{i=1}^n \ln(s_1 + \tau(s_2 - s_1))_i = \\ &= b^T y_1 + \tau \left[b^T (y_2 - y_1) + \mu \sum_{i=1}^n \frac{\ln(s_1 + \tau(s_2 - s_1))_i}{\tau} \right]. \end{aligned}$$

Podľa (P2) $\exists x^\circ \in \mathcal{P}^\circ : Ax^\circ = b, x^\circ > 0$. Keďže $y_1 \in \mathcal{D}^\circ$ a $y_2 \in \mathcal{D}^\circ$, tak $A^T y_1 + s_1 = c$ a $A^T y_2 + s_2 = c$, a preto $A^T (y_2 - y_1) = -(s_2 - s_1)$. Všetky zložky nenulového vektora $s_2 - s_1$ sú nezáporné, a preto $(x^\circ)^T (s_2 - s_1) > 0$. Z uvedených zistení vyplýva, že

$$b^T (y_2 - y_1) = (Ax^\circ)^T (y_2 - y_1) = (x^\circ)^T A^T (y_2 - y_1) = -(x^\circ)^T (s_2 - s_1) < 0.$$

Nakoniec dostaneme, že $\forall \mu > 0$ by platilo

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} g_\mu(y_\tau, s_\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ b^T y_1 + \tau \left[\underbrace{b^T (y_2 - y_1)}_{<0} + \mu \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\ln(s_1 + \tau(s_2 - s_1))_i}{\tau}}_{\rightarrow 0} \right] \right\} = -\infty,$$

a to je spor s tvrdením $g_\mu(y_\tau, s_\tau) \geq g_\mu(y^\circ, s^\circ), \forall \tau \geq 0$. Tým sme dokázali, že množina \mathcal{M} je ohraničená.

Uzavretosť množiny \mathcal{M} dokážeme pomocou štandardnej definície uzavretej množiny. Uvažujme konvergentnú postupnosť bodov $(y^\kappa, s^\kappa) \in \mathcal{M} \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ konvergujúcu k bodu $(\hat{y}, \hat{s}) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$. Treba dokázať, že $(\hat{y}, \hat{s}) \in \mathcal{M}$. Keďže $(y^\kappa, s^\kappa) \in \mathcal{M}$, tak $A^T y^\kappa + s^\kappa = c, s^\kappa > 0$ a $g_\mu(y^\kappa, s^\kappa) \geq g_\mu(y^\circ, s^\circ) > -\infty$. Zrejme množina $\{(y, s) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \mid A^T y + s = c\}$ je uzavretá a funkcia g_μ je spojitá, a preto $A^T \hat{y} + \hat{s} = c$ a $g_\mu(\hat{y}, \hat{s}) \geq g_\mu(y^\circ, s^\circ) > -\infty$. Nakoniec ukážeme, že $\hat{s} > 0$. Ak by $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : \hat{s}_i = 0$, potom $g_\mu(\hat{y}, \hat{s}) = -\infty$, a to je spor so zistením $g_\mu(\hat{y}, \hat{s}) > -\infty$. Ukázali sme, že $(\hat{y}, \hat{s}) \in \mathcal{M}$, a teda sme dokázali, že množina \mathcal{M} je uzavretá.

Dokázali sme, že množina \mathcal{M} je ohraničená a uzavretá, a teda podľa Vety 3.1 je kompaktná. Keďže funkcia g_μ je spojitá na množine \mathcal{M} , tak podľa Vety 3.2 na množine \mathcal{M} existuje maximum funkcie g_μ . Tým sme dokázali, že úloha $\max \{g_\mu(y, s) \mid (y, s) \in \mathcal{M}\}$ má optimálne riešenie, a teda úloha (D_μ) má práve jedno optimálne riešenie. \square

3.2.3 Ilustrácia logaritmickej bariérovej funkcie

Princíp metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní ilustrujeme najprv na jednorozmernej úlohe lineárneho programovania. Na konkrétnom príklade ukážeme konštrukciu logaritmickej bariérovej funkcie a transformačnej bariérovej úlohy. Cieľom je graficky ilustrovať konvergenciu riešení transformačných bariérových úloh k optimálnemu riešeniu pôvodnej úlohy pre postupne klesajúcu hodnotu bariérového parametra.

Príklad. Uvažujme primárno-duálnu dvojicu úloh (P) a (D) , kde

$$A = (-1, -1, 1), \quad b = 1, \quad c = (0, -1, 3)^T :$$

$$(P) \min_x \{-x_2 + 3x_3 \mid -x_1 - x_2 + x_3 = 1, x \geq 0\},$$

$$(D) \max_y \{y \mid -y \leq 0, -y \leq -1, y \leq 3\}.$$

Je zrejmé, že množinou prípustných riešení úlohy (D) je interval $\langle 1, 3 \rangle$, a preto optimálnym riešením úlohy (D) je bod $y^* = 3$. Úlohu (D) prevedieme štandardným spôsobom do ekvivalentného tvaru

$$(D) \max_{y,s} \{y \mid -y + s_1 = 0, -y + s_2 = -1, y + s_3 = 3, s \geq 0\}.$$

Pre úlohu (D) definujeme množinu prípustných riešení a relatívne vnútro množiny prípustných riešení:

$$\mathcal{D} = \{(y, s) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \mid -y + s_1 = 0, -y + s_2 = -1, y + s_3 = 3, s \geq 0\},$$

$$\mathcal{D}^\circ = \{(y, s) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3 \mid -y + s_1 = 0, -y + s_2 = -1, y + s_3 = 3, s > 0\}.$$

Keďže dvojica $y = 2, s = (2, 1, 1)^T$ patrí do množiny \mathcal{D}° , tak množina \mathcal{D}° je neprázdna, a preto má zmysel riešiť úlohu (D) metódami vnútorného bodu. K úlohe (D) zostrojíme duálnu logaritmickú bariérovú funkciu $g_\mu : \mathcal{D}^\circ \rightarrow \mathbf{R}$

$$g_\mu(y, s) = y + \mu \sum_{i=1}^3 \ln(s_i)$$

a priradíme transformačnú bariérovú úlohu

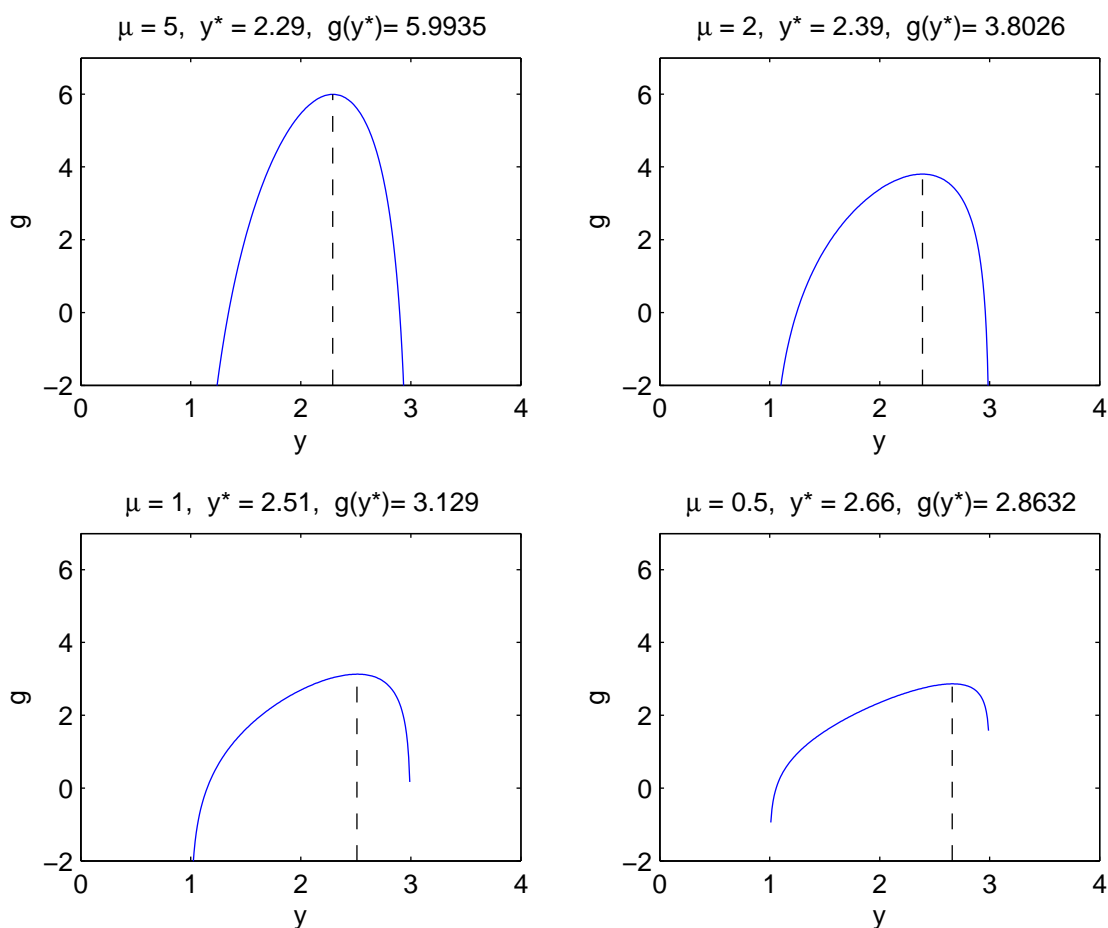
$$(D_\mu) \max_{y \in \mathbf{R}, s > 0} \{g_\mu(y, s) \mid -y + s_1 = 0, -y + s_2 = -1, y + s_3 = 3\}.$$

Keďže $s_1 = y$, $s_2 = y - 1$, $s_3 = 3 - y$ a $s > 0$, tak $y \in (1, 3)$, a teda funkciu g_μ a úlohu (D_μ) môžeme previesť do ekvivalentného tvaru

$$g_\mu(y) = y + \mu[\ln(y) + \ln(y - 1) + \ln(3 - y)], \quad y \in (1, 3),$$

$$(D_\mu) \max_{y \in \mathbb{R}} \{g_\mu(y) \mid y \in (1, 3)\}.$$

To znamená, že úlohou je nájsť maximum účelovej funkcie g_μ jednej premennej na otvorenom intervale $(1, 3)$ v závislosti od hodnoty bariérového parametra $\mu > 0$. Ako sme už uviedli, očakávame, že zmenšovaním dôrazu na bariérový parameter μ budú riešenia úloh (D_μ) konvergovať k optimálnemu riešeniu pôvodnej úlohy (D) . Jednorozmerná úloha nám zároveň umožňuje graficky znázorniť riešenia úloh (D_μ) pre rôzne hodnoty bariérového parametra $\mu > 0$.



Obr. 3.2: Na obrázkoch sú vykreslené grafy funkcií g_μ pre štyri rôzne hodnoty bariérového parametra $\mu > 0$. Všimnime si, že zmenšovaním bariérového parametra μ postupnosť optimálnych riešení úloh (D_μ) konverguje k optimálnemu riešeniu $y^* = 3$ pôvodnej úlohy (D) . Príloha: `jednorozmerna_uloha.m`.

3.3 Centrálna trajektória

V predchádzajúcej časti sme dokázali, že pre $\mu > 0$ každá z úloh (P_μ) a (D_μ) má práve jedno optimálne riešenie. V tejto podkapitole sformulujeme nutné a postačujúce podmienky optimality pre dvojicu úloh (P_μ) a (D_μ) s cieľom odvodiť systém rovníc, na základe ktorého zadefinujeme hlavný element metód vnútorného bodu, ktorým je centrálna trajektória.

Veta 3.5. *Nech $\mu > 0$. Potom vektor $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ je optimálnym riešením úlohy (P_μ) práve vtedy, keď existuje dvojica $(y, s) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ taká, že vektory \bar{x}, y, s spĺňajú $A\bar{x} = b, \bar{x} > 0, A^T y + s = c, s > 0$ a $\bar{X}s = \mu e$. [9]*

Dôkaz. K úlohe (P_μ) zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(x, y) = c^T x - \mu \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - y^T (Ax - b) \mid x > 0, y \in \mathbf{R}^m .$$

Úloha (P_μ) je úlohou na viazaný extrém, a preto nutné podmienky optimality môžeme sformulovať podľa Vety 7.2 v knihe [11]. Z nej vyplýva, že ak vektor $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ je optimálnym riešením úlohy (P_μ) , potom

$$\exists y \in \mathbf{R}^m : \nabla_x L(\bar{x}, y) = 0, \nabla_y L(\bar{x}, y) = 0. \quad (3.1)$$

Poznamenajme, že linearita ohraničení v úlohe (P_μ) implikuje splnenie podmienky Rg2 regularity. To znamená, že všetky prípustné riešenia úlohy (P_μ) sú Rg2 regulárne⁵. Nutné podmienky optimality (3.1) rozpíšeme a upravíme.

$$\begin{aligned} \nabla_x L = c - \mu \bar{x}^{-1} - A^T y &= 0 & \nabla_y L = A\bar{x} - b &= 0 \\ A^T y + \mu \bar{x}^{-1} &= c & A\bar{x} &= b \\ A^T y + s = c & & s = \mu \bar{x}^{-1}, s > 0 & \\ \bar{X}s &= \mu e & & \end{aligned}$$

Keďže úloha (P_μ) je úlohou konvexného programovania, tak nutné podmienky optimality (3.1) sú zároveň aj postačujúcimi podmienkami pre optimalitu. \square

Veta 3.6. *Nech $\mu > 0$. Potom dvojica $(\bar{y}, \bar{s}) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ je optimálnym riešením úlohy (D_μ) práve vtedy, keď existuje vektor $x \in \mathbf{R}^n$ taký, že vektory x, \bar{y}, \bar{s} spĺňajú $Ax = b, x > 0, A^T \bar{y} + \bar{s} = c, \bar{s} > 0$ a $X\bar{s} = \mu e$. [9]*

Dôkaz. K úlohe (D_μ) zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(y, s, x) = b^T y + \mu \sum_{i=1}^n \ln(s_i) - x^T (A^T y + s - c) \mid y \in \mathbf{R}^m, s > 0, x \in \mathbf{R}^n .$$

⁵Pozri knihu [11], str. 185.

Úloha (D_μ) je úlohou na viazaný extrém, a preto nutné podmienky optimality môžeme sformulovať podľa Vety 7.2 v knihe [11]. Z nej vyplýva, že ak dvojica $(\bar{y}, \bar{s}) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ je optimálnym riešením úlohy (D_μ) , potom

$$\exists x \in \mathbf{R}^n : \nabla_y L(\bar{y}, \bar{s}, x) = 0, \nabla_s L(\bar{y}, \bar{s}, x) = 0, \nabla_x L(\bar{y}, \bar{s}, x) = 0. \quad (3.2)$$

Poznamenajme, že linearita ohraničení v úlohe (D_μ) implikuje splnenie podmienky Rg2 regularity. To znamená, že všetky prípustné riešenia úlohy (D_μ) sú Rg2 regulárne ⁶. Nutné podmienky optimality (3.2) rozpíšeme a upravíme.

$$\begin{aligned} \nabla_y L = b - Ax = 0 & \quad \nabla_s L = \mu \bar{s}^{-1} - x = 0 & \quad \nabla_x L = -A^T \bar{y} - \bar{s} + c = 0 \\ Ax = b & \quad x = \mu \bar{s}^{-1}, x > 0 & \quad A^T \bar{y} + \bar{s} = c \\ & \quad X \bar{s} = \mu e \end{aligned}$$

V úlohe (D_μ) hľadáme maximum konkávnej funkcie g_μ na konvexnej množine \mathcal{D}° , a preto nutné podmienky optimality (3.2) sú zároveň aj postačujúcimi podmienkami pre optimalitu. \square

Z dokázaných tvrdení vyplýva, že nutné a postačujúce podmienky optimality pre dvojicu transformačných úloh (P_μ) a (D_μ) sú reprezentované tzv. μ -centrujúcim systémom

$$Ax = b, x > 0, \quad (3.3)$$

$$A^T y + s = c, s > 0, \quad (3.4)$$

$$Xs = \mu e. \quad (3.5)$$

Poznamenajme, že ostrú nerovnosť $x > 0$ v podmienke (3.3) môžeme nahradiť neostrou nerovnosťou $x \geq 0$, nakoľko z podmienky (3.5) implicitne vyplýva $x > 0$. Rovnako aj ostrú nerovnosť $s > 0$ v podmienke (3.4) môžeme nahradiť neostrou nerovnosťou $s \geq 0$. Takto upravené podmienky (3.3) a (3.4) reprezentujú podmienky prípustnosti pre dvojicu úloh (P) a (D) . Je zřejmé, že ak pre nejaké $\mu > 0$ má μ -centrujúci systém (3.3)-(3.5) riešenie, potom množiny \mathcal{P}° a \mathcal{D}° sú neprázdne. Zároveň platí aj opačná implikácia. Spojením tohto podstatného zistenia s predošlými tvrdeniami dostaneme nasledovný dôsledok.

Dôsledok 3.1. *Nech $\mu > 0$. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

- (i) množiny \mathcal{P}° a \mathcal{D}° sú neprázdne;
- (ii) každá z úloh (P_μ) a (D_μ) má práve jedno optimálne riešenie;
- (iii) μ -centrujúci systém (3.3)-(3.5) má práve jedno riešenie. [28]

Dôkaz. Jednotlivé ekvivalencie sú dokázané v dôkazoch predchádzajúcich tvrdení. Dokážeme, že μ -centrujúci systém (3.3)-(3.5) má jediné riešenie. Jednoznačnosť dokážeme sporom. Nech $(x_1, y_1, s_1) \in \mathbf{R}_{++}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_{++}^n$ a $(x_2, y_2, s_2) \in \mathbf{R}_{++}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_{++}^n$ sú dve rôzne riešenia systému (3.3)-(3.5). Označme $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ a $\Delta s = s_2 - s_1$.

⁶Pozri knihu [11], str. 185.

Zrejme platí

$$A\Delta x = 0, \quad (3.6)$$

$$A^T \Delta y + \Delta s = 0, \quad (3.7)$$

$$x_1 \cdot \Delta s + s_1 \cdot \Delta x + \Delta s \cdot \Delta x = 0. \quad (3.8)$$

Zo vzťahov (3.6) a (3.7) vyplýva, že $(\Delta x)^T \Delta s = 0$, resp. $e^T (\Delta x \cdot \Delta s) = 0$. Úpravou vzťahu (3.8) dostaneme, že $(x_1 + \Delta x) \cdot \Delta s + s_1 \cdot \Delta x = 0$. Keďže $x_1 + \Delta x = x_2 > 0$ a $s_1 > 0$, tak žiadne dve korešpondujúce zložky vektorov Δx a Δs nemajú rovnaké znamienka. Z toho vyplýva, že $\Delta x \cdot \Delta s \leq 0$. Spojením $e^T (\Delta x \cdot \Delta s) = 0$ a $\Delta x \cdot \Delta s \leq 0$ dostaneme, že $\Delta x \cdot \Delta s = 0$. Teda buď $(\Delta x)_i = 0$ alebo $(\Delta s)_i = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Avšak podľa vzťahu (3.8) $(\Delta x)_i = 0$ a $(\Delta s)_i = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. To znamená, že $x_1 = x_2$ a $s_1 = s_2$. Dosadením $\Delta s = 0$ do vzťahu (3.7) dostaneme, že $A^T (y_2 - y_1) = 0$. Keďže platí (P1), tak $A^T (y_2 - y_1) = 0 \Leftrightarrow y_2 - y_1 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$. Ukázali sme, že $(x_1, y_1, s_1) = (x_2, y_2, s_2)$, a to je spor s pôvodným predpokladom. Tým sme dokázali, že μ -centrujúci systém (3.3)-(3.5) má jednoznačné riešenie. \square

Vo všeobecnosti je μ -centrujúci systém (3.3)-(3.5) sústavou $2n + m$ rovníc o $2n + m + 1$ neznámych s ohraničeniami $x > 0$ a $s > 0$. Z toho dôvodu získame riešenie parametrizované bariérovým parametrom $\mu > 0$. V závislosti od hodnoty bariérového parametra $\mu > 0$ označme $x(\mu)$ optimálne riešenie úlohy (P_μ) , $(y(\mu), s(\mu))$ optimálne riešenie úlohy (D_μ) a $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ riešenie μ -centrujúceho systému (3.3)-(3.5).

Dôsledok 3.2. *Nech $\mu > 0$. Potom vektor $x(\mu)$ je optimálnym riešením úlohy (P_μ) a dvojica $(y(\mu), s(\mu))$ je optimálnym riešením úlohy (D_μ) práve vtedy, keď trojica $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ je riešením μ -centrujúceho systému (3.3)-(3.5).*

Dôsledok 3.2 hovorí o tom, že vyriešiť dvojicu transformačných úloh (P_μ) a (D_μ) znamená nájsť riešenie μ -centrujúceho systému (3.3)-(3.5) a naopak. Riešenie systému (3.3)-(3.5) nám teraz umožňuje zdefinovať kľúčový pojem metód vnútorného bodu, ktorým je centrálna trajektória.

Definícia 3.1. Množinu $\{(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) \mid \mu > 0\}$ nazývame centrálnou trajektóriou.

Inými slovami, centrálna trajektória je množina riešení μ -centrujúceho systému pre $\mu > 0$. Pod pojmom centrálna trajektória môžeme rozumieť zobrazenie, ktoré ku každej hodnote bariérového parametra $\mu > 0$ priradí práve jednu trojicu $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ z priestoru $\mathbf{R}_{++}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_{++}^n$, resp. $\mathcal{P}^\circ \times \mathcal{D}^\circ$. Pomocou vety o implicitnej funkcii sa dá ukázať, že centrálna trajektória je analytickou funkciou $\mu > 0$. Pre úlohy (P) a (D) môžeme jednotlivo definovať primárnu a duálnu centrálnu trajektóriu.

Definícia 3.2. Množinu $\{x(\mu) \mid \mu > 0\}$ nazývame primárnou centrálnou trajektóriou a množinu $\{(y(\mu), s(\mu)) \mid \mu > 0\}$ nazývame duálnou centrálnou trajektóriou.

Teda primárna centrálna trajektória je množina optimálnych riešení úloh (P_μ) a duálna centrálna trajektória je množina optimálnych riešení úloh (D_μ) . Primárna a duálna centrálna trajektória predstavujú zobrazenia z množiny kladných čísel do relatívneho vnútra množiny prípustných riešení úlohy (P) , resp. úlohy (D) .

Veta 3.7. *Pozdĺž centrálnej trajektórie hodnota účelovej funkcie úlohy (P) klesá a hodnota účelovej funkcie úlohy (D) rastie. [10]*

Dôkaz. Treba dokázať, že ak $0 < \mu_2 < \mu_1$, potom $c^T x(\mu_1) > c^T x(\mu_2)$ a $b^T y(\mu_1) < b^T y(\mu_2)$.

Pre jednoduchosť označme $x_1 := x(\mu_1)$ a $x_2 := x(\mu_2)$. Keďže $x_1 \in \mathcal{P}^\circ$ je jediným optimálnym riešením úlohy (P_{μ_1}) a $x_2 \in \mathcal{P}^\circ$ je jediným optimálnym riešením úlohy (P_{μ_2}) , tak je zrejmé, že platí $f_{\mu_1}(x_1) < f_{\mu_1}(x_2)$ a $f_{\mu_2}(x_2) < f_{\mu_2}(x_1)$. Po rozpísaní uvedených nerovnic dostaneme

$$c^T x_1 + \mu_1 \sum_{i=1}^n \ln(x_1)_i < c^T x_2 + \mu_1 \sum_{i=1}^n \ln(x_2)_i, \quad (3.9)$$

$$c^T x_2 + \mu_2 \sum_{i=1}^n \ln(x_2)_i < c^T x_1 + \mu_2 \sum_{i=1}^n \ln(x_1)_i. \quad (3.10)$$

Nerovnicu (3.9) prenasobíme paramterom $\mu_2 > 0$, nerovnicu (3.10) prenasobíme parametrom $\mu_1 > 0$ a obe nerovnice sčítame. Dostaneme $c^T x_1 \mu_2 + c^T x_2 \mu_1 < c^T x_2 \mu_2 + c^T x_1 \mu_1$, a po úprave $c^T x_1(\mu_2 - \mu_1) < c^T x_2(\mu_2 - \mu_1)$. Keďže $\mu_2 - \mu_1 < 0$, tak $c^T x_1 > c^T x_2$.

Označme $(y_1, s_1) := (y(\mu_1), s(\mu_1))$ a $(y_2, s_2) := (y(\mu_2), s(\mu_2))$. Dvojica $(y_1, s_1) \in \mathcal{D}^\circ$ je jediným optimálnym riešením úlohy (D_{μ_1}) a dvojica $(y_2, s_2) \in \mathcal{D}^\circ$ je jediným optimálnym riešením úlohy (D_{μ_2}) , a preto $g_{\mu_1}(y_1, s_1) > g_{\mu_1}(y_2, s_2)$ a $g_{\mu_2}(y_2, s_2) > g_{\mu_2}(y_1, s_1)$. Po rozpísaní nerovnic dostaneme

$$b^T y_1 - \mu_1 \sum_{i=1}^n \ln(s_1)_i > b^T y_2 - \mu_1 \sum_{i=1}^n \ln(s_2)_i, \quad (3.11)$$

$$b^T y_2 - \mu_2 \sum_{i=1}^n \ln(s_2)_i > b^T y_1 - \mu_2 \sum_{i=1}^n \ln(s_1)_i. \quad (3.12)$$

Prenásobením nerovnice (3.11) paramterom $\mu_2 > 0$, prenasobením nerovnice (3.12) parametrom $\mu_1 > 0$ a sčítaním oboch upravených nerovnic dostaneme $b^T y_1 \mu_2 + b^T y_2 \mu_1 > b^T y_2 \mu_2 + b^T y_1 \mu_1$. Po úprave dostaneme $b^T y_1(\mu_2 - \mu_1) > b^T y_2(\mu_2 - \mu_1)$. Keďže $\mu_2 - \mu_1 < 0$, tak $b^T y_1 < b^T y_2$. \square

Poznamenajme, že ak jedna z dvojice úloh (P) a (D) je neprípustná, potom predpoklad existencie vnútorného bodu nemôže byť splnený, a preto centrálna trajektória neexistuje. Avšak ani prípustnosť úloh (P) a (D) nie je postačujúcou podmienkou pre existenciu centrálnej trajektórie. Centrálna trajektória existuje práve vtedy, keď množiny \mathcal{P}° a \mathcal{D}° sú neprázdne. V takomto prípade, keď je predpoklad existencie vnútorného bodu

splnený, je možné vypočítať centrálnu trajektóriu, a to na základe μ -centrujúceho systému (3.3)-(3.5). [28]

3.3.1 Výpočet centrálnej trajektórie

Keďže μ -centrujúci systém (3.3)-(3.5) je nelineárny, tak vo všeobecnosti ho nie je možné vyriešiť explicitne. Podľa knihy [28] ukážeme, že μ -centrujúci systém (3.3)-(3.5) je možné preformulovať do ekvivalentného systému m polynomiálnych rovníc stupňa najviac n . Z (3.4) a (3.5) odvodíme, že

$$x = \mu (c - A^T y)^{-1}. \quad (3.13)$$

Dosadením odvodeného výrazu pre vektor x do (3.3) dostaneme

$$\mu A (c - A^T y)^{-1} = b. \quad (3.14)$$

Keďže zložky vektora $c - A^T y$ sú lineárne v $y_i, i = 1, 2, \dots, m$, tak pre násobením každej z m rovníc systému (3.14) súčinom n zložiek vektora $c - A^T y$ dostaneme m polynomiálnych rovníc stupňa najviac n v zložkách vektora $y \in \mathbf{R}^m$. Na konkrétnych príkladoch a pomocou konštrukcie μ -centrujúceho systému ilustrujeme výpočet centrálnej trajektórie s cieľom poukázať na jej konvergenčné vlastnosti.

Príklad. Uvažujme primárno-duálnu dvojicu úloh (P) a (D), kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = (1, 1, 1)^T, \quad b = (0, 1)^T :$$

$$(P) \min_x \{x_1 + x_2 + x_3 \mid x_1 - x_2 = 0, x_3 = 1, x \geq 0\},$$

$$(D) \max_y \{y_2 \mid y_1 \leq 1, -y_1 \leq 1, y_2 \leq 1\}.$$

Pre danú primárno-duálnu dvojicu úloh (P) a (D) zostavíme μ -centrujúci systém

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{bmatrix}.$$

Parametrizované riešenie μ -centrujúceho systému vypočítame pomocou odvodených vzťahov (3.13) a (3.14). Úpravou ľavej strany systému (3.14) dostaneme

$$\mu A (c - A^T y)^{-1} = \mu \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - y_1 \\ 1 + y_1 \\ 1 - y_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2\mu y_1}{1 - y_1^2} \\ \frac{\mu}{1 - y_2} \end{bmatrix}.$$

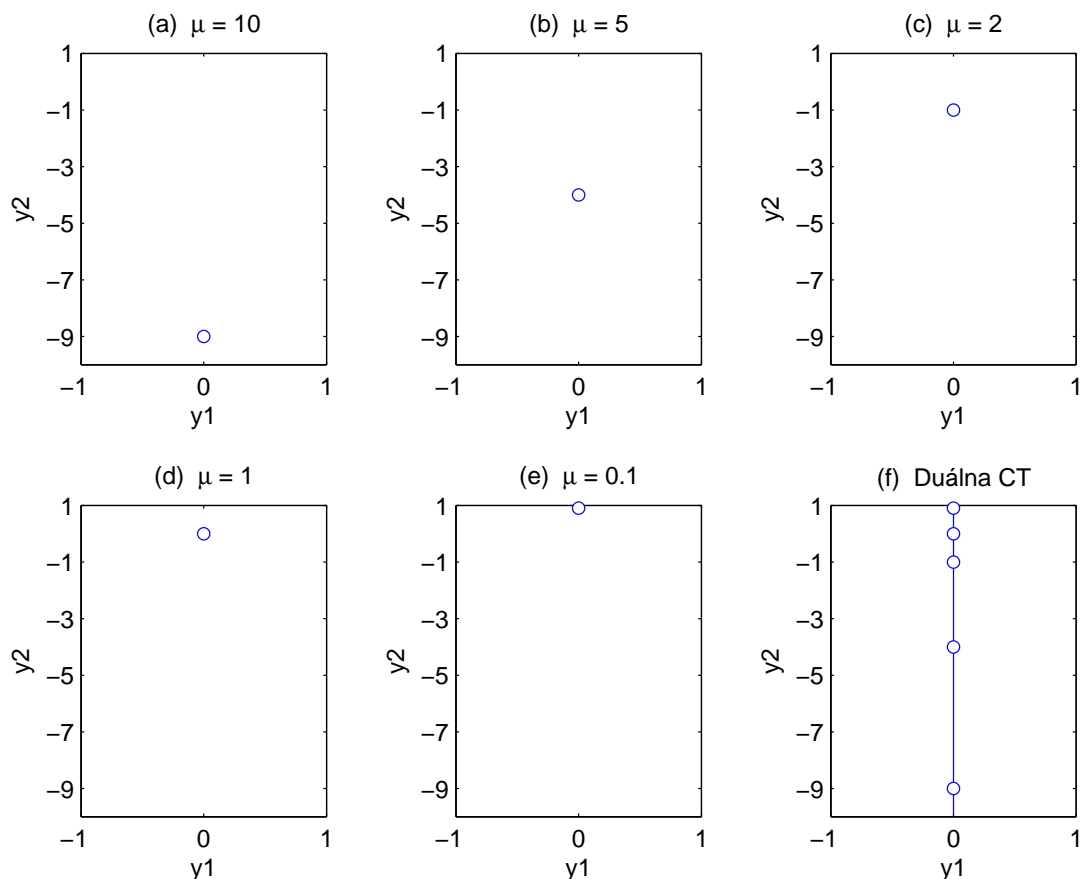
Keďže $\mu A (c - A^T y)^{-1} = b$ a $s = c - A^T y \geq 0$, tak

$$\begin{bmatrix} \frac{2\mu y_1}{1 - y_1^2} \\ \frac{\mu}{1 - y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 - y_1 \\ 1 + y_1 \\ 1 - y_2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.15)$$

Keďže $\mu > 0$, tak systém (3.15) má jednoznačné riešenie $y_1 = 0$, $y_2 = 1 - \mu$. Na základe rovníc $x = \mu (c - A^T y)^{-1}$ a $s = c - A^T y$ nakoniec dopočítame parametrizované riešenie μ -centrujúceho systému

$$x(\mu) = (\mu, \mu, 1)^T, \quad s(\mu) = (1, 1, \mu)^T, \quad y(\mu) = (0, 1 - \mu)^T.$$

Tým sme pre danú primárno-duálnu dvojicu úloh (P) a (D) našli parametrickú reprezentáciu centrálnej trajektórie $\{(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) \mid \mu > 0\}$. Dvojmerná duálna úloha (D) nám navyše umožňuje vykresliť duálnu centrálnu trajektóriu ako parametrizovanú krivku v priestore $y_1 \times y_2$. Táto ilustrácia je zobrazená na Obr. 3.3.



Obr. 3.3: Na obrázkoch (a)-(e) sú modrým krúžkom vyznačené polohy optimálnych riešení úloh (D_μ) pre rôzne hodnoty bariérového parametra $\mu > 0$. Na obrázku (f) je vykreslená duálna centrálna trajektória ako parametrizovaná krivka $y_1 = 0, y_2 = 1 - \mu, \mu > 0$. Príloha: ct_prikklad01.m.

V súvislosti s Obr. 3.3 poznamenajme, že množinou prípustných riešení úlohy (D) je množina $\mathcal{D} = \{(y_1, y_2)^T \mid -1 \leq y_1 \leq 1, y_2 \leq 1\}$ a množinou optimálnych riešení úlohy (D) je množina $\mathcal{D}^* = \{(y_1, 0)^T \mid -1 \leq y_1 \leq 1\}$. Všimnime si, že pre $\mu \rightarrow 0^+$ optimálne riešenie úlohy (D_μ) konverguje k optimálnemu riešeniu úlohy (D) , persnejšie do stredy množiny \mathcal{D}^* ⁷. V opačnom prípade, pre $\mu \rightarrow \infty$, optimálne riešenie úlohy (D_μ) konverguje do stredy množiny \mathcal{D} .

⁷Ide o tzv. analytický stred množiny optimálnych riešení. Tomuto pojmu sa podrobne venujeme v samostatnej časti práce.

Príklad. Uvažujme primárno-duálnu dvojicu úloh (P) a (D) , kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = (1, 1, 1)^T, \quad b = (b_1, b_2)^T :$$

$$(P) \min_x \{x_1 + x_2 + x_3 \mid x_1 - x_2 = b_1, x_3 = b_2, x \geq 0\},$$

$$(D) \max_y \{b_1 y_1 + b_2 y_2 \mid y_1 \leq 1, -y_1 \leq 1, y_2 \leq 1\}.$$

V závislosti od nešpecifikovaného vektora $b = (b_1, b_1)^T$, teda gradientu účelovej funkcie úlohy (D) , budeme analyzovať existenciu a konvergenčné vlastnosti centrálnej trajektórie. Parametrizované riešenie μ -centrujúceho systému vypočítame podľa odvodených vzťahov (3.13) a (3.14). Keďže $\mu A (c - A^T y)^{-1} = b$ a $s = c - A^T y \geq 0$, tak

$$\begin{bmatrix} \frac{2\mu y_1}{1-y_1^2} \\ \frac{\mu}{1-y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 - y_1 \\ 1 + y_1 \\ 1 - y_2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.16)$$

Ak $b_2 \leq 0$, potom systém (3.16) nemá riešenie, pretože $\mu > 0$ a $1 - y_2 \geq 0$. Ak $b_2 = 0$, potom $x_3 = 0$, a teda množina \mathcal{P}° by bola prázdna. Z toho vyplýva, že centrálna trajektória pre danú dvojicu úloh (P) a (D) existuje práve vtedy, keď $b_2 > 0$. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme, že $b_2 = 1$, a teda $y_2 = 1 - \mu$. Na základe ohraničení systému (3.16) je zrejmé, že hodnota b_1 môže byť nulová, záporná alebo kladná. Prípad $b_1 = 0$ je uvedený v predchádzajúcom príklade. Ak $b_1 = -1$, potom $y_1 = \mu - \sqrt{1 + \mu^2}$, a teda

$$x(\mu) = \left(\frac{1}{2} \left(-1 + \mu + \sqrt{1 + \mu^2} \right), \frac{1}{2} \left(1 - \mu + \sqrt{1 + \mu^2} \right), 1 \right)^T,$$

$$s(\mu) = \left(1 - \mu + \sqrt{1 + \mu^2}, 1 + \mu - \sqrt{1 + \mu^2}, \mu \right)^T,$$

$$y(\mu) = \left(\mu - \sqrt{1 + \mu^2}, 1 - \mu \right)^T.$$

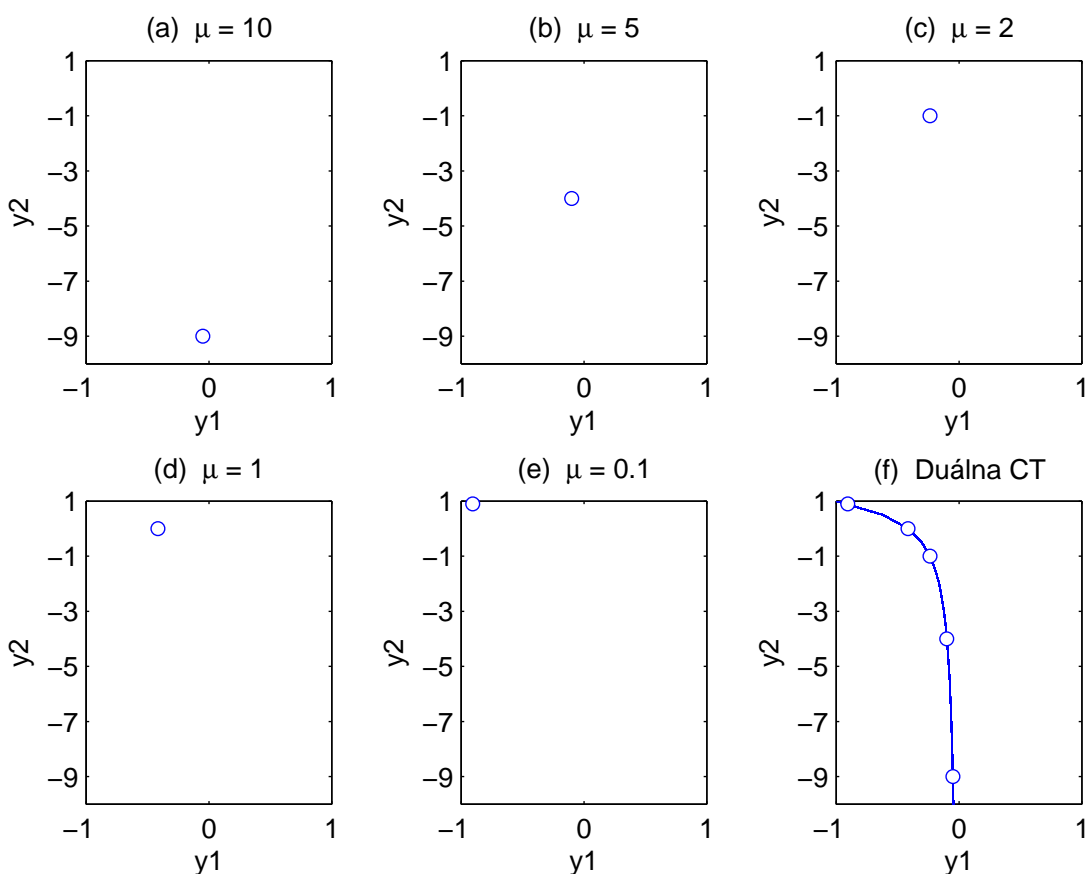
Ak $b_1 = 1$, potom $y_1 = -\mu + \sqrt{1 + \mu^2}$, a teda

$$x(\mu) = \left(\frac{1}{2} \left(1 + \mu + \sqrt{1 + \mu^2} \right), \frac{1}{2} \left(-1 + \mu + \sqrt{1 + \mu^2} \right), 1 \right)^T,$$

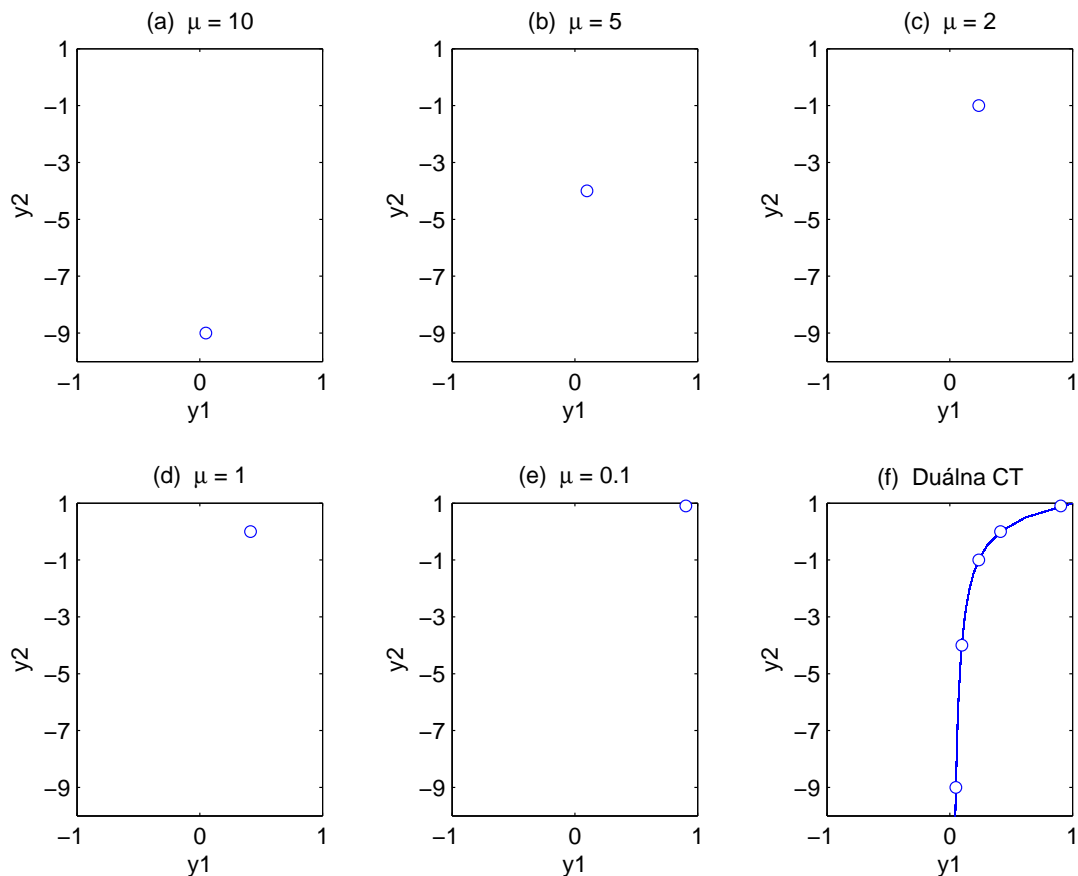
$$s(\mu) = \left(1 + \mu - \sqrt{1 + \mu^2}, 1 - \mu + \sqrt{1 + \mu^2}, \mu \right)^T,$$

$$y(\mu) = \left(-\mu + \sqrt{1 + \mu^2}, 1 - \mu \right)^T.$$

Pre $b = (1, -1)^T$ a $b = (1, 1)^T$ sme našli parametrickú reprezentáciu centrálnej trajektórie. Na Obr 3.4 a Obr 3.5 ilustrujeme priebeh duálnej centrálnej trajektórie pre oba prípady.



Obr. 3.4: Ak $b = (-1, 1)^T$, potom optimálnym riešením úlohy (D) je bod $y^* = (-1, 1)^T$. Na obrázkoch (a)-(e) sú modrým krúžkom vyznačené polohy optimálnych riešení úloh (D_μ) pre rôzne hodnoty bariérového parametra $\mu > 0$. Na obrázku (f) je vykreslená duálna centrálna trajektória, ktorá pre $\mu \rightarrow 0^+$ konverguje k optimálnemu riešeniu $y^* = (-1, 1)^T$ úlohy (D) . Príloha: ct_priklad02.m.



Obr. 3.5: Ak $b = (1, 1)^T$, potom optimálnym riešením úlohy (D) je bod $y^* = (1, 1)^T$. Na obrázkoch (a)-(e) sú modrým krúžkom vyznačené polohy optimálnych riešení úloh (D_μ) pre rôzne hodnoty bariérového parametra $\mu > 0$. Na obrázku (f) je vykreslená duálna centrálna trajektória, ktorá pre $\mu \rightarrow 0^+$ konverguje k optimálnemu riešeniu $y^* = (1, 1)^T$ úlohy (D) . Príloha: ct_príklad03.m.

Príklad. Uvažujme primárno-duálnu dvojicu úloh (P) a (D) , kde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = (1, 1, 1, 1)^T, \quad b = (b_1, b_2)^T :$$

$$(P) \min_x \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \mid -x_1 + x_2 = b_1, -x_3 + x_4 = b_2, x \geq 0\},$$

$$(D) \max_y \{b_1 y_1 + b_2 y_2 \mid -y_1 \leq 1, y_1 \leq 1, -y_2 \leq 1, y_2 \leq 1\}.$$

V tomto príklade vypočítame duálnu centrálnu trajektóriu v závislosti od nešpecifikovaného vektora $b = (b_1, b_2)^T$ a zároveň ju vykreslíme ako paramterizovanú krivku v dvojrozmernom priestore $y_1 \times y_2$. Pri výpočte duálnej centrálnej trajektórie opäť vychádzame zo vzťahu (3.14).

$$\mu A (c - A^T y)^{-1} = \mu \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + y_1 \\ 1 - y_1 \\ 1 + y_2 \\ 1 - y_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2\mu y_1}{1 - y_1^2} \\ \frac{2\mu y_2}{1 - y_2^2} \end{bmatrix}$$

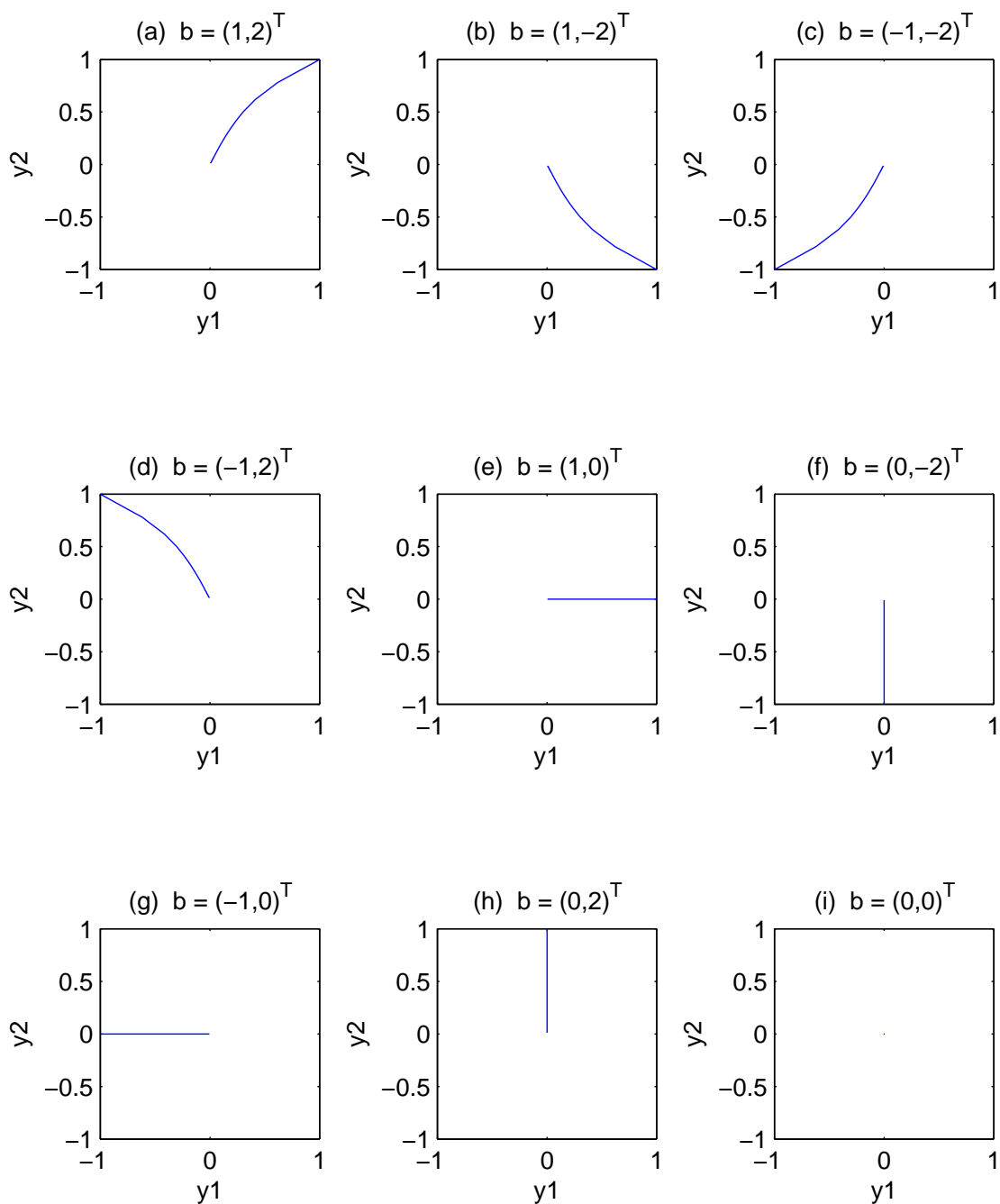
Keďže $\mu A (c - A^T y)^{-1} = b$ a $s = c - A^T y \geq 0$, tak

$$\begin{bmatrix} \frac{2\mu y_1}{1 - y_1^2} \\ \frac{2\mu y_2}{1 - y_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 + y_1 \\ 1 - y_1 \\ 1 + y_2 \\ 1 - y_2 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Je zrejme, že duálna centrálna trajektória pre daný príklad existuje bez akýchkoľvek obmedzení pre zložky vektora b . Tie môžu nadobúdať nulové, záporné alebo kladné hodnoty. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme, že $b_1 \in \{-1, 0, 1\}$ a $b_2 \in \{-2, 0, 2\}$. V závislosti od všetkých možných kombinácií (b_1, b_2) definujeme množinu \mathcal{D}^* a uvedieme parametrickú reprezentáciu duálnej centrálnej trajektórie $y(\mu)$.

Vektor $b = (b_1, b_2)^T$	Množina \mathcal{D}^*	Duálna centrálna trajektória $y(\mu)$
$b = (1, 2)^T$	$\mathcal{D}^* = (1, 1)^T$	$y(\mu) = \left(-\mu + \sqrt{1 + \mu^2}, \frac{1}{2} \left(-\mu + \sqrt{4 + \mu^2}\right)\right)^T$
$b = (1, -2)^T$	$\mathcal{D}^* = (1, -1)^T$	$y(\mu) = \left(-\mu + \sqrt{1 + \mu^2}, \frac{1}{2} \left(\mu - \sqrt{4 + \mu^2}\right)\right)^T$
$b = (-1, -2)^T$	$\mathcal{D}^* = (-1, -1)^T$	$y(\mu) = \left(\mu - \sqrt{1 + \mu^2}, \frac{1}{2} \left(\mu - \sqrt{4 + \mu^2}\right)\right)^T$
$b = (-1, 2)^T$	$\mathcal{D}^* = (-1, 1)^T$	$y(\mu) = \left(\mu - \sqrt{1 + \mu^2}, \frac{1}{2} \left(-\mu + \sqrt{4 + \mu^2}\right)\right)^T$
$b = (1, 0)^T$	$\mathcal{D}^* = \{(1, y_2)^T \mid -1 \leq y_2 \leq 1\}$	$y(\mu) = \left(-\mu + \sqrt{1 + \mu^2}, 0\right)^T$
$b = (0, -2)^T$	$\mathcal{D}^* = \{(y_1, -1)^T \mid -1 \leq y_1 \leq 1\}$	$y(\mu) = \left(0, \frac{1}{2} \left(\mu - \sqrt{4 + \mu^2}\right)\right)^T$
$b = (-1, 0)^T$	$\mathcal{D}^* = \{(-1, y_2)^T \mid -1 \leq y_2 \leq 1\}$	$y(\mu) = \left(\mu - \sqrt{1 + \mu^2}, 0\right)^T$
$b = (0, 2)^T$	$\mathcal{D}^* = \{(y_1, 1)^T \mid -1 \leq y_1 \leq 1\}$	$y(\mu) = \left(0, \frac{1}{2} \left(-\mu + \sqrt{4 + \mu^2}\right)\right)^T$
$b = (0, 0)^T$	$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$	$y(\mu) = (0, 0)^T$

Všimnime si, že množina \mathcal{D}^* sa mení v závislosti od vektora b , teda od gradientu účelovej funkcie úlohy (D). Kým v niektorých prípadoch je množinou optimálnych riešení úlohy (D) jediný bod, v iných je to úsečka alebo celá množina prípustných riešení úlohy (D). Z toho dôvodu môžeme očakávať aj rôzny priebeh duálnej centrálnej trajektórie v závislosti od vektora b . Táto skutočnosť je ilustrovaná na Obr. 3.6.



Obr. 3.6: Priebeh duálnej centrálnej trajektórie v závislosti od vektora $b = (b_1, b_2)^T$. Množinou \mathcal{D} je štvorec $\langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$ v priestore $y_1 \times y_2$. Na obrázkoch (a)-(d) duálna centrálna trajektória konverguje k optimálnemu riešeniu úlohy (D) , ktorým je jediný bod. Na obrázkoch (e)-(h) duálna centrálna trajektória konverguje do stredu množiny \mathcal{D}^* , ktorou je úsečka. Zaujímavý prípad nastáva na obrázku (i), kde duálnou centrálnou trajektóriou je bod $(0, 0)^T$ ležiaci v strede množiny \mathcal{D}^* . Vo všetkých prípadoch platí, že duálna centrálna trajektória vychádza zo stredu množiny \mathcal{D} , predzádza množinou \mathcal{D}° a konverguje pre $\mu \rightarrow 0^+$ do stredu množiny \mathcal{D}^* . Príloha: ct_priklad04.m.

3.3.2 Konvergencia centrálnej trajektórie

Na základe ilustrácií z predchádzajúcich príkladov sa domnievame, že duálna centrálna trajektória konverguje pre $\mu \rightarrow 0^+$ k optimálnemu riešeniu úlohy (D) . Zrejme táto domnienka by mohla platiť analogicky aj pre primárnu centrálnu trajektóriu, a teda všeobecne aj pre centrálnu trajektóriu. V tejto časti práce túto domnienku dokážeme. To znamená, že uvedieme a formálne dokážeme základné konvergenčné vlastnosti centrálnej trajektórie pre primárno-duálnu dvojicu úloh (P) a (D) . Ak nebude uvedené inak, tak pod konvergenciou, resp. limitným bodom centrálnej trajektórie budeme vždy rozumieť konvergenciu, resp. limitný bod centrálnej trajektórie pre $\mu \rightarrow 0^+$.

Veta 3.8. *Nech $\bar{\mu} > 0$. Potom centrálna trajektória $\mathcal{C} = \{(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) \mid 0 < \mu \leq \bar{\mu}\}$ je ohraničená. [9]*

Dôkaz. Nech $x^\circ \in \mathcal{P}^\circ$ a $(y^\circ, s^\circ) \in \mathcal{D}^\circ$ sú pevne zvolené a nech $(x^\circ)^T s^\circ = \gamma$. Potom podľa Lemy 2.2 $\forall \mu \in (0, \bar{\mu})$ platí $[x^\circ - x(\mu)]^T [s^\circ - s(\mu)] = 0$. Z toho vyplýva, že

$$\forall \mu \in (0, \bar{\mu}) : x(\mu)^T s^\circ + s(\mu)^T x^\circ = (x^\circ)^T s^\circ + x(\mu)^T s(\mu) = \gamma + n\mu \leq \gamma + n\bar{\mu}.$$

Keďže $\forall \kappa > 0$ množina $\mathcal{M} = \{(x, s) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D} \mid x^T s^\circ + s^T x^\circ \leq \kappa\}$ je ohraničená a $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$, tak centrálna trajektória \mathcal{C} je tiež ohraničená. \square

Dôsledok 3.3. *Centrálna trajektória má limitné body. [9]*

Poznamenajme, že bod $(x^*, y^*, s^*) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ je limitným bodom centrálnej trajektórie, ak existuje postupnosť $\{\mu_\kappa\}_{\kappa=1}^\infty$ kladných parametrov konvergujúca k nule $\mu_\kappa \rightarrow 0^+$, pre ktorú platí $(x(\mu_\kappa), y(\mu_\kappa), s(\mu_\kappa)) \rightarrow (x^*, y^*, s^*)$.

Veta 3.9. *Nech $(x^*, y^*, s^*) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ je limitným bodom centrálnej trajektórie. Potom (x^*, y^*, s^*) je riešením systému (1.1)-(1.3).*

Dôkaz. Nech $\{\mu_\kappa\}_{\kappa=1}^\infty$ je postupnosť kladných parametrov konvergujúca k nule $\mu_\kappa \rightarrow 0^+$, pre ktorú platí $x(\mu_\kappa) \rightarrow x^*$, $y(\mu_\kappa) \rightarrow y^*$ a $s(\mu_\kappa) \rightarrow s^*$. Vieme, že $\forall \mu_\kappa > 0$ trojica $(x(\mu_\kappa), y(\mu_\kappa), s(\mu_\kappa))$ je riešením μ_κ -centrujúceho systému (3.3)-(3.5). Teda $\forall \mu_\kappa > 0$ platí $Ax(\mu_\kappa) = 0$, $x(\mu_\kappa) > 0$, $A^T y(\mu_\kappa) + s(\mu_\kappa) = c$, $s(\mu_\kappa) > 0$ a $X(\mu_\kappa)s(\mu_\kappa) = \mu_\kappa e$. Zrejme množiny $\{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = b\}$ a $\{(y, s) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \mid A^T y + s = c\}$ sú uzavreté, a preto $Ax^* = b$, $A^T y^* + s^* = c$ a zároveň $X^* s^* = 0$. Zložky vektorov $x(\mu_\kappa) > 0$ a $s(\mu_\kappa) > 0$ môžu konvergovať k nezáporným hodnotám, a preto $x^* \geq 0$ a $s^* \geq 0$. Ukázali sme, že schematicky zapísané platí

$$\lim_{\mu_\kappa \rightarrow 0^+} \left\{ \begin{array}{l} Ax(\mu_\kappa) = b, x(\mu_\kappa) > 0 \\ A^T y(\mu_\kappa) + s(\mu_\kappa) = c, s(\mu_\kappa) > 0 \\ X(\mu_\kappa)s(\mu_\kappa) = \mu_\kappa e \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} Ax^* = b, x^* \geq 0 \\ A^T y^* + s^* = c, s^* \geq 0 \\ X^* s^* = 0 \end{array} \right\}.$$

Tým sme dokázali, že limitný bod (x^*, y^*, s^*) je riešením systému (1.1)-(1.3). \square

Cieľom je dokázať, že centrálna trajektória má jediný limitný bod, a teda že konverguje. Pre tento účel najprv sformulujeme a dokážeme pomocné tvrdenie.

Veta 3.10. *Nech $(x^*, y^*, s^*) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ je limitným bodom centrálnaj trajektórie. Potom dvojica (x^*, s^*) je ostro komplementárnym optimálnym riešením pre dvojicu úloh (P) a (D). [9]*

Dôkaz. Nech $\{\mu_\kappa\}_{\kappa=1}^\infty$ je postupnosť kladných parametrov konvergujúca k nule $\mu_\kappa \rightarrow 0^+$, pre ktorú platí $x(\mu_\kappa) \rightarrow x^*$ a $s(\mu_\kappa) \rightarrow s^*$. Dvojica (x^*, s^*) je podľa Vety 3.9 optimálnym riešením pre dvojicu úloh (P) a (D), a preto $(x^*)^T s^* = 0$. To znamená, že vektory x^* a s^* sú komplementárne, a teda $\sigma(x^*) \cap \sigma(s^*) = \emptyset$. Treba dokázať, že $\sigma(x^*) \cup \sigma(s^*) = \{1, 2, \dots, n\}$. Keďže $\forall \mu_\kappa > 0 : x(\mu_\kappa) \in \mathcal{P}, s(\mu_\kappa) \in \mathcal{D}$ a $x^* \in \mathcal{P}, s^* \in \mathcal{D}$, tak z Lemy 2.2 vyplýva, že platí

$$x^T(\mu_\kappa)s^* + s^T(\mu_\kappa)x^* = (x^*)^T s^* + x^T(\mu_\kappa)s(\mu_\kappa), \forall \mu_\kappa > 0. \quad (3.17)$$

Keďže $\forall \mu_\kappa > 0$ trojica $(x(\mu_\kappa), y(\mu_\kappa), s(\mu_\kappa))$ je riešením μ_κ -centrujúceho systému, tak $\forall \mu_\kappa > 0$ platí $x^T(\mu_\kappa)s(\mu_\kappa) = n\mu_\kappa$. Z toho vyplýva, že rovnicu (3.17) môžeme upraviť do tvaru

$$\sum_{i=1}^n x_i(\mu_\kappa)s_i^* + \sum_{i=1}^n s_i(\mu_\kappa)x_i^* = n\mu_\kappa, \forall \mu_\kappa > 0. \quad (3.18)$$

Je zrejmé, že niektoré zložky nezáporných vektorov $x^* \geq 0$ a $s^* \geq 0$ sú nulové. Preto v súčtoch na ľavej strane rovnice (3.18) je postačujúce uvažovať len tie sčítance, v ktorých sa vyskytujú kladné zložky vektorov x^* a s^* . To znamená, že stačí uvažovať len tie zložky vektorov x^* a s^* , ktorých indexy patria do množiny $\sigma(x^*)$, resp. do množiny $\sigma(s^*)$. Teda rovnicu (3.18) môžeme upraviť do tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \sigma(s^*)} x_i(\mu_\kappa)s_i^* + \sum_{i \in \sigma(x^*)} s_i(\mu_\kappa)x_i^* &= n\mu_\kappa, \forall \mu_\kappa > 0, \\ \sum_{i \in \sigma(s^*)} \frac{x_i(\mu_\kappa)s_i^*}{\mu_\kappa} + \sum_{i \in \sigma(x^*)} \frac{s_i(\mu_\kappa)x_i^*}{\mu_\kappa} &= n, \forall \mu_\kappa > 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Keďže $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : x_i(\mu_\kappa)s_i(\mu_\kappa) = \mu_\kappa$, tak $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : x_i(\mu_\kappa)/\mu_\kappa = 1/s_i(\mu_\kappa)$ a $s_i(\mu_\kappa)/\mu_\kappa = 1/x_i(\mu_\kappa)$. Úpravou rovnice (3.19) dostaneme

$$\sum_{i \in \sigma(s^*)} \frac{s_i^*}{s_i(\mu_\kappa)} + \sum_{i \in \sigma(x^*)} \frac{x_i^*}{x_i(\mu_\kappa)} = n, \forall \mu_\kappa > 0. \quad (3.20)$$

Limitným prechodom oboch strán rovnice (3.20) dostaneme $|\sigma(s^*)| + |\sigma(x^*)| = n$. Zároveň platí $\sigma(x^*) \cap \sigma(s^*) = \emptyset$, a preto $\sigma(x^*) \cup \sigma(s^*) = \{1, 2, \dots, n\}$. Tým sme dokázali, že dvojica (x^*, s^*) je ostro komplementárnym optimálnym riešením pre dvojicu úloh (P) a (D). \square

3.3.3 Analytický stred množiny optimálnych riešení

Bez ujmy na všeobecnosti analyzujeme konvergenciu primárnej centrálnej trajektórie. Z doteraz dokázaných konvergenčných vlastností vyplýva, že ak úloha (P) má práve jedno optimálne riešenie, potom každý limitný bod centrálnej trajektórie musí byť rovný tomuto riešeniu, a teda centrálna trajektória konverguje. Ak však primárna úloha (P) má viac optimálnych riešení, limitné body by sa mohli líšiť. Ukážeme, že tomu tak nie je, a že centrálna trajektória konverguje vždy k jedinému limitnému bodu, ktorým je tzv. analytický stred množiny optimálnych riešení. V tejto časti budeme uvažovať, že zložky vektorov $x \in \mathbf{R}^n$ a $s \in \mathbf{R}^n$ sú zoradené v súlade s optimálnym rozkladom (B, N) .

Definícia 3.3. Bod $x^\alpha \in \mathbf{R}^n$ je analytickým stredom množiny \mathcal{P}^* práve vtedy, keď $x_N^\alpha = 0$ a x_B^α je optimálnym riešením úlohy

$$\max_{x_B > 0} \left\{ \sum_{i \in B} \ln(x_B)_i \mid A_B x_B = b \right\}. \quad (3.21)$$

Ukážeme, že analytický stred množiny \mathcal{P}^* je dobre definovaný, teda že existuje a je jediný. Podľa Vety 3.10 existuje ostro komplementárne optimálne riešenie $x_B^* > 0$, $x_B^* \in \text{relint } \mathcal{P}^*$. Zrejme úloha

$$\max_{x_B > 0} \left\{ \sum_{i \in B} \ln(x_B)_i \mid A_B x_B = b, \sum_{i \in B} \ln(x_B)_i \geq \sum_{i \in B} \ln(x_B^*)_i \right\} \quad (3.22)$$

je ekvivalentná úlohe (3.21). Množinu prípustných riešení úlohy (3.22) označme \mathcal{M} . Keďže množina \mathcal{P}^* je ohraničená a $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}^*$, tak množina \mathcal{M} je tiež ohraničená. Množina \mathcal{M} je zároveň uzavretá⁸, a tak z Vety 3.1 vyplýva, že množina \mathcal{M} je kompaktná. Účelová funkcia $\sum_{i \in B} \ln(x_B)_i$ je spojitá na množine \mathcal{M} , a preto podľa Vety 3.2 existuje optimálne riešenie úlohy (3.22). Navyše, účelová funkcia $\sum_{i \in B} \ln(x_B)_i$ je rýdzokonkáva, a preto úloha (3.22) má najviac jedno optimálne riešenie. Z toho vyplýva, že úloha (3.22) má práve jedno optimálne riešenie, a teda analytický stred množiny \mathcal{P}^* jednoznačne existuje.

Definícia 3.4. Bod $(y^\alpha, s^\alpha) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ je analytickým stredom množiny \mathcal{D}^* práve vtedy, keď $s_B^\alpha = 0$ a s_N^α je optimálnym riešením úlohy

$$\max_{s_N > 0} \left\{ \sum_{i \in N} \ln(s_N)_i \mid A_N^T y + s_N = c_N, A_B^T y = c_B \right\}. \quad (3.23)$$

Analogicky je možné ukázať, že analytický stred množiny \mathcal{D}^* je tiež dobre definovaný, teda že jednoznačne existuje. Z Definície 3.3 a Definície 3.4 odvodíme nutné a postačujúce podmienky existencie analytického stredu množiny optimálnych riešení.

Veta 3.11. Bod $x^\alpha \in \mathbf{R}^n$ je analytickým stredom množiny \mathcal{P}^* práve vtedy, keď $x_N^\alpha = 0$, $x_B^\alpha > 0$, $A_B x_B^\alpha = b$ a existuje vektor $u \in \mathbf{R}^m$ taký, že $A_B^T u = (x_B^\alpha)^{-1}$. [9]

⁸Dôkaz tohto tvrdenia je rovnaký ako dôkaz uzavretosti množiny \mathcal{M} vo Vete 3.3.

Dôkaz. Stačí dokázať, že x_B^α je optimálnym riešením úlohy (3.21) práve vtedy, keď existuje vektor $u \in \mathbf{R}^m$ taký, že $A_B^T u = (x_B^\alpha)^{-1}$. K úlohe (3.21) zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(x_B, u) = \sum_{i \in B} \ln(x_B)_i - u^T (A_B x_B - b) \mid x_B > 0, u \in \mathbf{R}^m.$$

Úloha (3.21) je úlohou na viazaný extrém, a preto nutné podmienky optimality môžeme sformulovať podľa Vety 7.2 v knihe [11]. Z nej vyplýva, že ak x_B^α je optimálnym riešením úlohy (3.21), potom

$$\exists u \in \mathbf{R}^m : \nabla_{x_B} L(x_B^\alpha, u) = 0, \nabla_u L(x_B^\alpha, u) = 0. \quad (3.24)$$

Poznamenajme, že linearita ohraničení v úlohe (3.21) implikuje splnenie podmienky Rg2 regularity. To znamená, že všetky prípustné riešenia úlohy (3.21) sú Rg2 regulárne⁹. Nutné podmienky optimality (3.24) rozpíšeme a upravíme.

$$\begin{aligned} \nabla_{x_B} L = (x_B^\alpha)^{-1} - A_B^T u = 0 & & \nabla_u L = A_B x_B^\alpha - b = 0 \\ A_B^T u = (x_B^\alpha)^{-1} & & A_B x_B^\alpha = b \end{aligned}$$

V úlohe (3.21) hľadáme maximum konkávnej funkcie $\sum_{i \in B} \ln(x_B)_i$ na konvexnej množine prípustných riešení. Pre takúto úlohu sú nutné podmienky optimality (3.24) zároveň aj postačujúcimi podmienkami pre optimalitu. \square

Veta 3.12. Bod $(y^\alpha, s^\alpha) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ je analytickým stredom množiny \mathcal{D}^* práve vtedy, keď $s_B^\alpha = 0$, $s_N^\alpha > 0$, $A_B^T y^\alpha = c_B$, $A_N^T y^\alpha + s_N^\alpha = c_N$ a existuje vektor $v \in \mathbf{R}^{|B|}$ taký, že $A_B v = A_N (s_N^\alpha)^{-1}$. [9]

Dôkaz. Stačí dokázať, že s_N^α je optimálnym riešením úlohy (3.23) práve vtedy, keď existuje vektor $v \in \mathbf{R}^{|B|}$ taký, že $A_B v = A_N (s_N^\alpha)^{-1}$. K úlohe (3.23) zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(y, s_N, v, w) = \sum_{i \in N} \ln(s_N)_i - w^T (A_N^T y + s_N - c_N) + v^T (A_B^T y - c_B) \left| \begin{array}{l} s_N > 0 \\ v \in \mathbf{R}^{|B|} \\ w \in \mathbf{R}^{|N|} \end{array} \right.$$

Úloha (3.23) je úlohou na viazaný extrém, a preto nutné podmienky optimality môžeme sformulovať podľa Vety 7.2 v knihe [11]. Z nej vyplýva, že ak s_N^α je optimálnym riešením úlohy (3.23), potom

$$\begin{aligned} \exists v \in \mathbf{R}^{|B|}, w \in \mathbf{R}^{|N|} : \nabla_y L(y, s_N^\alpha, v, w) = 0, \\ \nabla_{s_N} L(y, s_N^\alpha, v, w) = 0, \nabla_v L(y, s_N^\alpha, v, w) = 0, \nabla_w L(y, s_N^\alpha, v, w) = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Poznamenajme, že linearita ohraničení v úlohe (3.23) implikuje splnenie podmienky Rg2 regularity. To znamená, že všetky prípustné riešenia úlohy (3.23) sú Rg2 regulárne⁸.

⁹Pozri knihu [11], str. 185.

Nutné podmienky optimality (3.25) rozpíšeme a upravíme.

$$\begin{aligned} \nabla_{s_N} L &= (s_N^\alpha)^{-1} - w = 0 & \nabla_y L &= -A_N w + A_B v = 0 \\ w &= (s_N^\alpha)^{-1} & A_B v &= A_N w \\ & & A_B v &= A_N (s_N^\alpha)^{-1} \\ \nabla_w L &= -A_N^T y - s_N^\alpha + c_N = 0 & \nabla_v L &= A_B^T y - c_B = 0 \\ A_N^T y + s_N^\alpha &= c_N & A_B^T y &= c_B \end{aligned}$$

Úloha (3.23) je úlohou maximalizácie konkávnej funkcie $\sum_{i \in N} \ln(s_N)_i$ na konvexnej množine prípustných riešení. Z tohto dôvodu sú nutné podmienky optimality (3.25) zároveň aj postačujúcimi podmienkami pre optimalitu. \square

Veta 3.13. *Nech $(x^*, y^*, s^*) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ je limitným bodom centrálnej trajektórie. Potom bod x^* je analytickým stredom množiny \mathcal{P}^* . [9]*

Dôkaz. Nech $\{\mu_\kappa\}_{\kappa=1}^\infty$ je postupnosť kladných parametrov konvergujúca k nule $\mu_\kappa \rightarrow 0^+$, pre ktorú platí $x(\mu_\kappa) \rightarrow x^*$, $y(\mu_\kappa) \rightarrow y^*$ a $s(\mu_\kappa) \rightarrow s^*$. Podľa Vety 3.10 zrejme platí $x_B^* > 0$, $x_N^* = 0$, $s_B^* = 0$ a $s_N^* > 0$. Treba dokázať, že bod x^* je analytickým stredom množiny \mathcal{P}^* . Z μ -centrujúceho systému využijeme nasledovné zťahy:

$$A_B^T y(\mu_\kappa) + s_B(\mu_\kappa) = c_B, \forall \mu_\kappa > 0, \quad (3.26)$$

$$A^T y^* + s_B^* = c_B, \quad (3.27)$$

$$X_B(\mu_\kappa) s_B(\mu_\kappa) = \mu_\kappa e_B, \forall \mu_\kappa > 0. \quad (3.28)$$

Keďže $s_B^* = 0$, tak rovnicu (3.27) môžeme upraviť do tvaru $A^T y^* = c_B$. Odčítaním rovnice $A^T y^* = c_B$ od rovnice (3.26) dostaneme

$$\begin{aligned} A_B^T [y(\mu_\kappa) - y^*] + s_B(\mu_\kappa) &= 0, \forall \mu_\kappa > 0, \\ A_B^T \left[\frac{y(\mu_\kappa) - y^*}{\mu_\kappa} \right] + \frac{s_B(\mu_\kappa)}{\mu_\kappa} &= 0, \forall \mu_\kappa > 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Z rovnice (3.28) odvodíme, že $\forall \mu_\kappa > 0$ platí $s_B(\mu_\kappa)/\mu_\kappa = [x_B(\mu_\kappa)]^{-1}$. Dosadením odvodeného výrazu do rovnice (3.29) dostaneme

$$A_B^T \left[\frac{y^* - y(\mu_\kappa)}{\mu_\kappa} \right] = [x_B(\mu_\kappa)]^{-1}, \forall \mu_\kappa > 0.$$

To znamená, že $\forall \mu_\kappa > 0 : [x_B(\mu_\kappa)]^{-1} \in \mathcal{R}(A_B)$. Zrejme množina $\mathcal{R}(A_B)$ je uzavretá, a preto pre $\mu_\kappa \rightarrow 0^+$ platí $(x_B^*)^{-1} \in \mathcal{R}(A_B)$. Tým sme ukázali, že $\exists u \in \mathbf{R}^m : A_B^T u = (x_B^*)^{-1}$, a tak z Vety 3.11 vyplýva, že bod x^* je analytickým stredom množiny \mathcal{P}^* . \square

Veta 3.14. *Nech $(x^*, y^*, s^*) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ je limitným bodom centrálnej trajektórie. Potom bod (y^*, s^*) je analytickým stredom množiny \mathcal{D}^* . [9]*

Dôkaz. Nech $\{\mu_\kappa\}_{\kappa=1}^\infty$ je postupnosť kladných parametrov konvergujúca k nule $\mu_\kappa \rightarrow 0^+$, pre ktorú platí $x(\mu_\kappa) \rightarrow x^*$, $y(\mu_\kappa) \rightarrow y^*$ a $s(\mu_\kappa) \rightarrow s^*$. Podľa Vety 3.10 zrejme platí $x_B^* > 0$, $x_N^* = 0$, $s_B^* = 0$ a $s_N^* > 0$. Treba dokázať, že bod (y^*, s^*) je analytickým stredom množiny \mathcal{D}^* . Z μ_κ -centrujúceho systému využijeme nasledovné z'ahy:

$$A_B x_B(\mu_\kappa) + A_N x_N(\mu_\kappa) = b, \forall \mu_\kappa > 0, \quad (3.30)$$

$$A_B x_B^* + A_N x_N^* = b, \quad (3.31)$$

$$X_N(\mu_\kappa) s_N(\mu_\kappa) = \mu_\kappa e_N, \forall \mu_\kappa > 0. \quad (3.32)$$

Keďže $x_N^* = 0$, tak rovnicu (3.31) môžeme upraviť do tvaru $A_B x_B^* = b$. Odčítaním rovnice $A_B x_B^* = b$ od rovnice (3.30) dostaneme

$$\begin{aligned} A_B [x_B(\mu_\kappa) - x_B^*] + A_N x_B(\mu_\kappa) &= 0, \forall \mu_\kappa > 0, \\ A_B \left[\frac{x_B(\mu_\kappa) - x_B^*}{\mu_\kappa} \right] + A_N \left[\frac{x_N(\mu_\kappa)}{\mu_\kappa} \right] &= 0, \forall \mu_\kappa > 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Z rovnice (3.32) odvodíme, že $\forall \mu_\kappa > 0$ platí $x_N(\mu_\kappa)/\mu_\kappa = (s_N)^{-1}$. Dosadením odvodeného výrazu do rovnice (3.33) dostaneme

$$A_B \left[\frac{x_B^* - x_B(\mu_\kappa)}{\mu_\kappa} \right] = A_N [s_N(\mu_\kappa)]^{-1}, \forall \mu_\kappa > 0.$$

To znamená, že $\forall \mu_\kappa > 0 : A_N [s_N(\mu_\kappa)]^{-1} \in \mathcal{R}(A_B^T)$. Zrejme množina $\mathcal{R}(A_B^T)$ je uzavretá, a preto pre $\mu_\kappa \rightarrow 0^+$ platí $A_N (s_N^*)^{-1} \in \mathcal{R}(A_B^T)$. Teda $\exists v \in \mathbf{R}^{|B|} : A_B v = A_N (s_N^*)^{-1}$, a tak z Vety 3.12 vyplýva, že bod (y^*, s^*) je analytickým stredom množiny \mathcal{D}^* . \square

Dokázali sme, že centrálna trajektória má limitné body a každý limitný bod centrálnej trajektórie je analytickým stredom množiny optimálnych riešení. Zároveň sme ukázali, že analytický stred množiny optimálnych riešení jednoznačne existuje. Z toho vyplýva, že centrálna trajektória konverguje a jej jediným limitným bodom je analytický stred množiny optimálnych riešení. Inými slovami, primárna centrálna trajektória konverguje k analytickému stredmu množiny \mathcal{P}^* a duálna centrálna trajektória konverguje k analytickému stredmu množiny \mathcal{D}^* .

Dôsledok 3.4. *Primárna centrálna trajektória konverguje k optimálnemu riešeniu úlohy (P) a duálna centrálna trajektória konverguje k optimálnemu riešeniu úlohy (D).*

Dôsledok 3.4 je kľúčovým výsledkom v teórii metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní. Dokazuje naše prvotné očakávanie, ktoré hovorilo o tom, že znižovaním dôrazu na bariérový parameter $\mu > 0$ optimálne riešenie $x(\mu)$ úlohy (P_μ) konverguje k optimálnemu riešeniu $x^* \in \mathcal{P}^*$ úlohy (P) a optimálne riešenie $(y(\mu), s(\mu))$ úlohy (D_μ) konverguje k optimálnemu riešeniu $(y^*, s^*) \in \mathcal{D}^*$ úlohy (D). V matematickom kontexte to znamená, že

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} x(\mu) = x^*, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0^+} (y(\mu), s(\mu)) = (y^*, s^*).$$

Časť II

Algoritmy a aplikácie metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní

ALGORITMY SLEDOVANIA CENTRÁLNEJ TRAJEKTÓRIE

Všeobecná podstata metód vnútorného bodu spočíva v postupnom riešení transformačných úloh (CP_μ) , pričom znižovaním bariérového parametra μ riešenia transformačných úloh konvergujú k optimálnemu riešeniu pôvodnej úlohy (CP) . Preto nevyhnutnou súčasťou metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní je riešenie transformačných úloh (P_μ) a (D_μ) . Dokázali sme, že ak základné predpoklady $(P1)$ a $(P2)$ sú splnené, potom každá z úloh (P_μ) a (D_μ) má práve jedno optimálne riešenie. Toto riešenie zrejme leží v relatívnom vnútri množiny prípustných riešení, a preto na jeho nájdenie môžeme použiť štandardné techniky voľnej optimalizácie. V priebehu vývoja metód vnútorného bodu vznikla určitá kategorizácia algoritmov a prístupov riešenia transformačných úloh. Najúspešnejšími sa stali primárno-duálne algoritmy sledovania centrálnej trajektórie. Ich spoločným charakteristickým znakom je princíp sledovania centrálnej trajektórie v jej špecifickom okolí. V tejto kapitole opíšeme klasické a moderné prístupy algoritmov metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní. Zároveň uvedieme všeobecnú schému algoritmu a predstavíme programovacie prostredie na riešenie úloh lineárneho programovania metódami vnútorného bodu.

4.1 Filozofia klasických prístupov

V období pred publikovaním Karmarkarovej práce [14] boli metódy vnútorného bodu analyzované najmä v rámci nelineárneho programovania [4]. V tomto období bola dokázaná iba konvergencia presných riešení transformačných úloh¹⁰, pričom technikami voľnej optimalizácie sa vždy získalo iba približné riešenie. Z toho dôvodu pretrvávala snaha nájsť čo najpresnejšie optimálne riešenie transformačných úloh. Navyše metódami vnútorného bodu sa riešili veľmi všeobecné úlohy, ktorých duálne vlastnosti boli príliš zložité alebo neboli známe. Preto bolo problémom zistiť odhad duálnej medzery, či odhad počtu iterácií potrebných na získanie dostatočne presného riešenia.

¹⁰Poznamenajme, že v skutočnosti bola dokázaná iba konvergencia optimálnych hodnôt účelových funkcií transformačných úloh.

4.2 Filozofia moderných prístupov

V nových prístupoch boli metódy vnútorného bodu aplikované najprv na úlohy lineárneho programovania (P) a (D), v ktorých sa využili jednoduché a symetrické duálne vzťahy. Pomocou nich bolo možné presne sledovať veľkosť duálnej medzery a zároveň riešiť transformačné úlohy (P_μ) a (D_μ) súčasne. Algoritmy, ktorých princíp spočíva v súčasnom riešení primárnej aj duálnej úlohy, sa nazývajú primárno-duálne algoritmy. Kým klasické prístupy využívali rôzne metódy voľnej optimalizácie na riešenie transformačných úloh, v moderných prístupoch sa zaužívanou stala Newtonova metóda. Presnejšie modifikovaná Newtonova metóda so skrátenou dĺžkou kroku, pri ktorej sa podarilo vymedziť určité okolie centrálnej trajektórie, v ktorom bola zaručená kvadratická konvergencia Newtonovej metódy. K tomu, aby jednotlivé iteračné body ležali vo vymedzenej oblasti konvergenencie, bolo nevyhnutné merať vzdialenosť daného iteračného bodu od centrálnej trajektórie. To znamená, že na vyriešenie pôvodného problému bolo postačujúce nájsť len približné riešenia transformačných úloh. Z toho dôvodu môžeme moderné prístupy interpretovať ako voľné sledovanie centrálnej trajektórie, kde centrálna trajektória slúži ako navigátor, ktorý určuje smer optimalizácie z relatívneho vnútra množiny prípustných riešení k optimálnemu riešeniu pôvodnej úlohy.

4.2.1 Newtonova metóda

Pre $\mu > 0$ definujme funkciu $F : \mathbf{R}_+^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}^{2n+m}$

$$F(x, y, s) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ Xs - \mu e \end{bmatrix}, \quad (x, s) \geq 0.$$

Nájsť optimálne riešenie transformačných úloh (P_μ) a (D_μ) zrejme znamená vyriešiť rovnicu $F(x, y, s) = 0, (x, s) \geq 0$. Na približné riešenie uvedenej rovnice použijeme modifikovanú Newtonovu metódu so skrátenou dĺžkou kroku. Použitím Taylorovho rozvoja funkcie F v okolí bodu $(x^\kappa, y^\kappa, s^\kappa)$ dostaneme

$$\begin{aligned} F(x, y, s) &\approx F(x^\kappa, y^\kappa, s^\kappa) + \nabla F(x^\kappa, y^\kappa, s^\kappa)(\Delta x, \Delta y, \Delta s)^T = 0, \\ \nabla F(x^\kappa, y^\kappa, s^\kappa)(\Delta x, \Delta y, \Delta s)^T &= -F(x^\kappa, y^\kappa, s^\kappa), \end{aligned} \quad (4.1)$$

kde ∇F je Jakobiho matica funkcie F a $\Delta x \in \mathbf{R}^n, \Delta y \in \mathbf{R}^m, \Delta s \in \mathbf{R}^n$ sú smerové vektory. Rozpísaním rovnice (4.1) dostaneme

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S^\kappa & 0 & X^\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Ax^\kappa - b \\ A^T y^\kappa + s^\kappa - c \\ X^\kappa s^\kappa - \mu e \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Všimnime si, že ak $(x^\kappa, y^\kappa, s^\kappa) \in \mathcal{P}^\circ \times \mathcal{D}^\circ$, potom systém (4.2) môžeme upraviť do tvaru

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S^\kappa & 0 & X^\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu e - X^\kappa s^\kappa \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Podľa Lemy 2.1 platí, že ak $(x, y, s) \in \mathcal{P}^\circ \times \mathcal{D}^\circ$, potom Jakobiho matica $\nabla F(x, y, s)$ je regulárna. To znamená, že ak $(x^\kappa, y^\kappa, s^\kappa) \in \mathcal{P}^\circ \times \mathcal{D}^\circ$, potom systém (4.3) má jednoznačné riešenie¹¹, konkrétne

$$\begin{aligned} \Delta x &= \mu(s^\kappa)^{-1} - x^\kappa + X^\kappa(S^\kappa)^{-1}A^T [AX^\kappa(S^\kappa)^{-1}A^T]^{-1} [b - \mu A(s^\kappa)^{-1}], \\ \Delta y &= [AX^\kappa(S^\kappa)^{-1}A^T]^{-1} [b - \mu A(s^\kappa)^{-1}], \\ \Delta s &= A^T [AX^\kappa(S^\kappa)^{-1}A^T]^{-1} [\mu A(s^\kappa)^{-1} - b]. \end{aligned}$$

Smerové vektory $\Delta x \in \mathbf{R}^n$, $\Delta y \in \mathbf{R}^m$, $\Delta s \in \mathbf{R}^n$ sa nazývajú primárno-duálne Newtonove smery. Ďalší iteračný bod Newtonovej metódy vypočítame podľa iteračnej schémy

$$(x^{\kappa+1}, y^{\kappa+1}, s^{\kappa+1}) = (x^\kappa, y^\kappa, s^\kappa) + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta s), \quad (4.4)$$

kde $\alpha \in (0, 1)$ označuje dĺžku kroku. Parameter α volíme v každej iterácii tak, aby boli splnené podmienky $x^\kappa + \alpha\Delta x > 0$, $s^\kappa + \alpha\Delta s > 0$. Ďalej ukážeme, že mechanizmus modifikovanej Newtonovej metódy zachováva ostrú prípustnosť. Predpokladajme, že pre pevné κ platí $(x^\kappa, y^\kappa, s^\kappa) \in \mathcal{P}^\circ \times \mathcal{D}^\circ$. Teda $Ax^\kappa = b$, $A^T y^\kappa + s^\kappa = c$, $x^\kappa > 0$ a $s^\kappa > 0$. Keďže trojica $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ je riešením systému (4.3), tak $A\Delta x = 0$ a $A^T \Delta y + \Delta s = 0$. Z toho vyplýva, že pre ďalší iteračný bod Newtonovej metódy platí

$$x^{\kappa+1} = x^\kappa + \alpha\Delta x > 0, \quad s^{\kappa+1} = s^\kappa + \alpha\Delta s > 0,$$

$$\begin{aligned} Ax^{\kappa+1} &= A(x^\kappa + \alpha\Delta x) = \underbrace{Ax^\kappa}_{=b} + \alpha \underbrace{A\Delta x}_{=0} = b, \\ A^T y^{\kappa+1} + s^{\kappa+1} &= A^T(y^\kappa + \alpha\Delta y) + s^\kappa + \alpha\Delta s = \underbrace{A^T y^\kappa + s^\kappa}_{=c} + \alpha \underbrace{(A^T \Delta y + \Delta s)}_{=0} = c. \end{aligned}$$

Tým sme ukázali, že ak $(x^\kappa, y^\kappa, s^\kappa) \in \mathcal{P}^\circ \times \mathcal{D}^\circ$, potom $(x^{\kappa+1}, y^{\kappa+1}, s^{\kappa+1}) \in \mathcal{P}^\circ \times \mathcal{D}^\circ$. To znamená, že ak nejaký iteračný bod Newtonovej metódy leží v množine $\mathcal{P}^\circ \times \mathcal{D}^\circ$, potom každý ďalší iteračný bod leží tiež v množine $\mathcal{P}^\circ \times \mathcal{D}^\circ$.

4.2.2 Všeobecná schéma primárno-duálneho algoritmu

Hlavným elementom zaužívaných primárno-duálnych algoritmov sú Newtonove smery, ktoré sú „hnacou silou“ pri voľnom sledovaní centrálnej trajektórie. V tejto časti opíšeme všeobecnú schému algoritmu, ktorá je základom pre primárno-duálne algoritmy.

¹¹Pozri knihu [28], str. 150, Veta II.42

Všeobecná schéma primárno-duálneho algoritmu

Vstup: matica $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m \leq n$, $h(A) = m$; vektor $c \in \mathbf{R}^n$; vektor $b \in \mathbf{R}^m$;

zvolíme štartovací bod $(x^0, y^0, s^0) \in \mathbf{R}_{++}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_{++}^n$;

tolerančná konštanta $\varepsilon > 0$ pre presnosť duálnej medzery;

tolerančná konštanta $\varepsilon_P > 0$ pre presnosť primárnej prípustnosti;

tolerančná konštanta $\varepsilon_D > 0$ pre presnosť duálnej prípustnosti;

nastavenie počítadla iterácií $\kappa = 0$.

Algoritmus: 1) **Zvolíme** bariérový parameter μ .

2) Zo systému (4.2) vypočítame Newtonove smery Δx , Δy , Δs .

3) **Zvolíme** dĺžku kroku $\alpha \in (0, 1)$ tak, aby $x^\kappa + \alpha \Delta x > 0$ a $s^\kappa + \alpha \Delta s > 0$.

4) Vypočítame $(x^{\kappa+1}, y^{\kappa+1}, s^{\kappa+1}) = (x^\kappa, y^\kappa, s^\kappa) + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$.

5) Ak $(x^{\kappa+1})^T s^{\kappa+1} < \varepsilon$ a $\|Ax^{\kappa+1} - b\|_2 < \varepsilon_P$ a $\|A^T y^{\kappa+1} + s^{\kappa+1} - c\|_2 < \varepsilon_D$, potom koniec.

6) Položíme $\kappa := \kappa + 1$ a prejdeme na 1).

Reálne algoritmy pracujú rozlične so spôsobom voľby štartovacieho bodu (x^0, y^0, s^0) , bariérového parametra μ a dĺžky kroku α . V nasledujúcej časti špecifikujeme, čo rozumieť pod voľbou parametrov pri vstupe a v jednotlivých krokoch algoritmu.

Voľba štartovacieho bodu: Podľa spôsobu voľby štartovacieho bodu (x^0, y^0, s^0) existujú **prípustné** a **neprípustné** algoritmy. Zatiaľ čo v prípustných algoritmoch volíme štartovací bod z množiny $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$, v neprípustných algoritmoch je štartovací bod neprípustným riešením. Avšak zdôraznime, že v každom algoritme volíme $x^0 > 0$, $s^0 > 0$ a zároveň požadujeme, aby bod (x^0, s^0) ležal v určitom, algoritmom špecifikovanom okolí centrálnej trajektórie. Takéto vymedzené okolie centrálnej trajektórie môže byť definované rôzne, napríklad

$$\mathcal{M}_\tau = \{(x, y, s) \in \mathbf{R}_{++}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_{++}^n \mid \|Xs - \mu e\|_2 \leq \tau \mu\},$$

$$\mathcal{N}_\beta = \{(x, y, s) \in \mathbf{R}_{++}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_{++}^n \mid \|u - u^{-1}\|_2 \leq \beta\}, \quad u_i = \sqrt{\frac{x_i s_i}{\mu}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kde $\tau \in (0, 1)$, $\beta > 0$ sú dané parametre. Z podmienok $x^0 > 0$, $s^0 > 0$ zrejme vyplýva, že štartovací bod prípustného algoritmu je ostro prípustným riešením pre dvojicu úloh (P) a (D). To znamená, že každý iteračný bod Newtonovej metódy v prípustnom algoritme leží v množine $\mathcal{P}^\circ \times \mathcal{D}^\circ$.

Voľba bariérového parametra: Existujú dva štandardné spôsoby voľby bariérového parametra μ . Pri **explicitnej voľbe** určíme počiatočnú hodnotu $\mu_0 > 0$ a novú hodnotu parametra μ zvolíme podľa schémy $\mu_{\kappa+1} = (1 - \theta)\mu_\kappa$, kde $\theta \in (0, 1)$ je konštantný parameter, ktorý určíme vo vstupe. Je zrejme, že pri explicitnej voľbe sa bariérový parameter μ znižuje. Pri **implicitnej voľbe** zvolíme novú hodnotu parametra μ podľa schémy $\mu_\kappa = \sigma(x^\kappa)^T s^\kappa / n$, kde $\sigma \in (0, 1)$ je konštantný, tzv. centrujúci parameter, ktorý určíme vo vstupe.

Lema 4.1. *Nech $\sigma \in \langle 0, 1 \rangle$. Potom, ak vo všeobecnej schéme primárno-duálneho algoritmu zvolíme $\mu = \sigma(x^\kappa)^T s^\kappa / n$, tak $(x^{\kappa+1})^T s^{\kappa+1} \leq (x^\kappa)^T s^\kappa$.*

Dôkaz. Smerové vektory $\Delta x \in \mathbf{R}^n$ a $\Delta s \in \mathbf{R}^n$ sú ortogonálne¹², a preto $(\Delta x)^T \Delta s = 0$. Využitím toho dostaneme

$$\begin{aligned}
 (x^{\kappa+1})^T s^{\kappa+1} &= (x^\kappa + \alpha \Delta x)^T (s^\kappa + \alpha \Delta s) = \\
 &= (x^\kappa)^T s^\kappa + \alpha (x^\kappa)^T \Delta s + \alpha (\Delta s)^T x^\kappa + \alpha^2 \underbrace{(\Delta x)^T \Delta s}_{=0} = \\
 &= (x^\kappa)^T s^\kappa + \alpha [(x^\kappa)^T \Delta s + (\Delta x)^T s^\kappa] = \\
 &= (x^\kappa)^T s^\kappa + \alpha [n\mu - (x^\kappa)^T s^\kappa] = \\
 &= (x^\kappa)^T s^\kappa + \alpha \left[n\sigma \frac{(x^\kappa)^T s^\kappa}{n} - (x^\kappa)^T s^\kappa \right] = \\
 &= (x^\kappa)^T s^\kappa + \underbrace{\alpha (x^\kappa)^T s^\kappa}_{>0} \underbrace{(\sigma - 1)}_{\leq 0} \leq (x^\kappa)^T s^\kappa.
 \end{aligned}$$

□

Dôsledok 4.1. *Ak $\sigma \in \langle 0, 1 \rangle$ a $\mu_\kappa = \sigma(x^\kappa)^T s^\kappa / n$, potom $\mu_{\kappa+1} \leq \mu_\kappa$.*

Dôkaz.

$$\mu_{\kappa+1} = \sigma \frac{(x^{\kappa+1})^T s^{\kappa+1}}{n} \leq \sigma \frac{(x^\kappa)^T s^\kappa}{n} = \mu_\kappa$$

□

Pri implicitnej voľbe parametra μ je dôležitá voľba centrujúceho parametra σ , ktorého účelom je zdokonaľiť priebeh voľného sledovania centrálnej trajektórie, a teda zlepšiť priebeh konvergencie. V dôkaze Lemy 4.1 sme odvodili, že

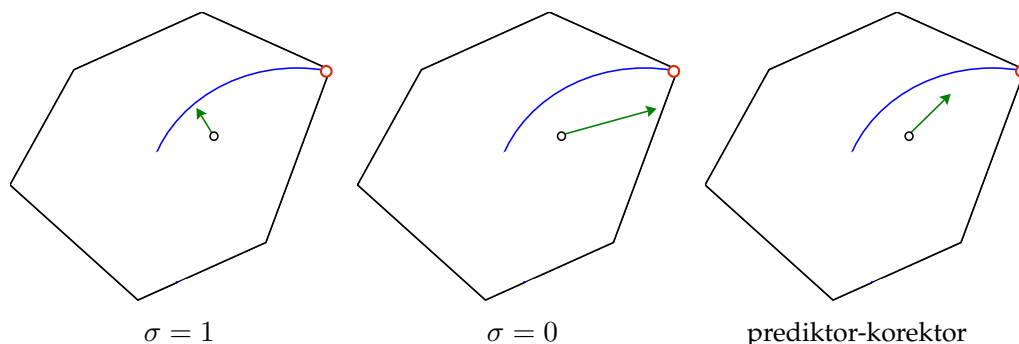
$$(x^{\kappa+1})^T s^{\kappa+1} = (x^\kappa)^T s^\kappa + \alpha (x^\kappa)^T s^\kappa (\sigma - 1).$$

To znamená, že výraz $(x^{\kappa+1})^T s^{\kappa+1}$ je rastúcou funkciou premennej $\sigma \in \langle 0, 1 \rangle$. Zatiaľ čo voľbou $\sigma = 1$ sa duálna medzera $(x^{\kappa+1})^T s^{\kappa+1}$ nezmení, voľbou $\sigma = 0$ duálna medzera $(x^{\kappa+1})^T s^{\kappa+1}$ poklesne najviac. Dôvodom toho je skutočnosť, že voľbou $\sigma = 1$ získame tzv. **centrujúci smer**, ktorý smeruje k centrálnej trajektórii, a pozdĺž ktorého sa duálna medzera nezmení. V opačnom prípade, voľbou $\sigma = 0$, získame tzv. **afinno-škálovací smer**, ktorý najrýchlejšie smeruje k hranici množiny prípustných riešení, a pozdĺž ktorého duálna medzera poklesne najviac. Tu sa naskytuje otázka, prečo hneď nezvoliť $\sigma = 0$. Ak by sme zvolili $\sigma = 0$, potom $\mu = 0$, čo znamená, že by sme riešili pôvodný neperturovaný systém (1.1)-(1.3). V tomto prípade by nás afinno-škálovací smer posunul k hranici množiny prípustných riešení, kde by sme stratili manévrovaciu schopnosť, čo by spôsobilo problém v približovaní sa k optimálnemu riešeniu. Určitý kompromis voľby centrujúceho parametra σ predstavujú tzv. **prediktor-korektor** algoritmy. Týmto pojmom označujeme algoritmy, v ktorých centrujúci parameter σ volíme striedavo¹³, čím

¹²Dôkaz tohto tvrdenia je uvedený v knihe [28], str. 152, Lema II.45.

¹³Striedavý spôsob voľby centrujúceho parametra σ je podrobne vysvetlený v knihe [33].

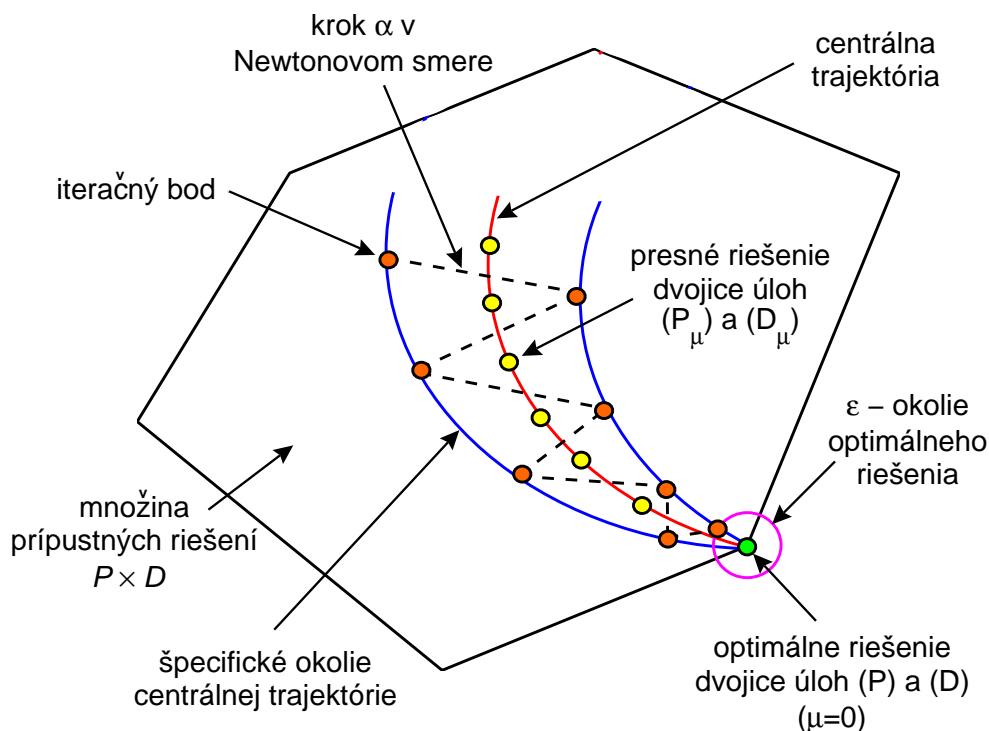
získame „prediktor krok“ ($\sigma = 0$) pozdĺž afinno-škálovacieho smeru a „korektor krok“ ($\sigma = 1$) pozdĺž centrujúceho smeru. To znamená, že princíp prediktor-korektor algoritmov spočíva vo vhodnej kombinácii afinno-škálovacieho smeru a centrujúceho smeru, a preto ich môžeme interpretovať schémou „zaškálovať \rightarrow centrovať“.



Obr. 4.1: Ilustrácia smerov v závislosti od voľby centrujúceho parametra σ . Mnohouholník predstavuje množinu $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$ a červený kružok označuje optimálne riešenie dvojice úloh (P) a (D). Modrá krivka predstavuje centrálnu trajektóriu. Na prvom obrázku je zobrazený centrujúci smer. Druhý obrázok znázorňuje afinno-škálovací smer. Posledný obrázok zobrazuje smer, ktorý získame vhodnou kombináciou centrujúceho smeru a afinno-škálovacieho smeru.

Zmena bariérového parametra: Existujú algoritmy, v ktorých parameter μ meníme buď v každej iterácii, alebo až po splnení určitého kritéria. Takýmto kritériom môže byť napríklad podmienka $\|(x^{\kappa+1})^T s^{\kappa+1} - n\mu\|_2 < \omega$, kde $\omega > 0$ je určená tolerančná konštanta. V algoritmoch, ktoré menia parameter μ v každej iterácii, je zvyčajne potrebné zabezpečiť, aby nový iteračný bod $(x^{\kappa+1}, s^{\kappa+1})$ ležal v špecifickom okolí centrálnej trajektórie. Túto požiadavku je možné zabezpečiť jednak pomocou voľby dĺžky kroku α a zároveň pomocou opatrnej, veľmi malej zmeny parametra μ . Uvedený postup je charakteristickým znakom tzv. algoritmov s **krátkym krokom**. V prípade algoritmov, ktoré menia parameter μ až po niekoľkých iteráciách, je možné meniť parameter μ razantnejšie. Dôvodom toho je skutočnosť, že niekoľkými ďalšími iteráciami pri nezmenenom parametri μ je možné zabezpečiť, aby výsledný iteračný bod ležal v požadovanom špecifickom okolí centrálnej trajektórie. Tento postup je typický pre tzv. algoritmy s **dlhým krokom**.

Voľba dĺžky kroku: Vo viacerých algoritmoch, najmä v tzv. dvojfázových, spravidla stačí zvoliť dĺžku kroku α tak, aby platilo $x^\kappa + \alpha\Delta x > 0$, $s^\kappa + \alpha\Delta s > 0$. Avšak v algoritmoch, v ktorých sa bariérový parameter μ mení v každej iterácii, treba voľbu dĺžky kroku α podriadiť podmienke, aby nový iteračný bod $(x^{\kappa+1}, s^{\kappa+1})$ pre nový bariérový parameter $\mu_{\kappa+1}$ ležal v špecifickom okolí centrálnej trajektórie.



Obr. 4.2: Ilustrácia primárno-duálneho algoritmu sledovania centrálnej trajektórie.

Poznamenajme, že v rámci primárno-duálnych algoritmov voľného sledovania centrálnej trajektórie sa najúspešnejšími stali prediktor-korektor algoritmy. Najznámejším a najspoľahlivejším z nich je Mehrotrov prediktor-korektor algoritmus [20], [22] a jeho rôzne variácie [35]. Podrobný popis moderných primárno-duálnych algoritmov metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní, ich kategorizácia a modifikácie sú uvedené v knihách [29], [33].

4.3 Softvér MATLAB

Vhodným a spoľahlivým programom na riešenie úloh matematického programovania je softvér Matlab. V rámci tohto programovacieho prostredia existuje niekoľko nástrojov na riešenie úloh lineárneho programovania metódami vnútorného bodu. Štandardnými nástrojmi sú funkcia „linprog“ [30] a programový balík LIPSOL [34].

4.3.1 Funkcia „linprog“

Funkcia „linprog“ [30] umožňuje riešiť všeobecné úlohy lineárneho programovania formulované v rôznych tvaroch. Zdôraznime, že predvoleným algoritmom funkcie „linprog“ je Mehrotrov prediktor-korektor algoritmus metód vnútorného bodu. Bez ujmy na všeobecnosti uvidíme schému funkcie „linprog“ na riešenie úlohy (P) metódami vnútorného bodu a zadefinujeme jej vstupné a výstupné parametre.

`[x, fval, exitflag, output, lambda]=linprog(c, [], [], A, b, zeros(n))`

Vstupné parametre		Výstupné parametre	
c	vektor koeficientov účelovej funkcie $c \in \mathbf{R}^n$	x	optimálne riešenie
A	matica ohraničení $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$	fval	hodnota účelovej funkcie v optimálnom riešení
b	vektor ohraničení $b \in \mathbf{R}^m$	exitflag	informácia o konvergencii
		output	informácie o priebehu optimalizácie
		lambda	hodnota Lagrangeových multiplikátorov v optimálnom riešení

Poznamenajme, že funkcia „linprog“ umožňuje riešiť úlohy lineárneho programovania aj simplexovou metódou alebo „active-set“ metódou. Podrobný návod voľby algoritmu a popis ďalších nastavení funkcie „linprog“ je prehľadne uvedený na internetovej stránke [30].

4.3.2 Programový balík LIPSOL

LIPSOL (Linear programming Interior-Point SOLvers) [34] je voľne dostupný programový balík na riešenie lineárnych úloh metódami vnútorného bodu. LIPSOL je navrhnutý na riešenie úloh relatívne veľkých rozmerov. Inštalácia a ovládanie programového balíka je jednoduché a „user friendly“. Lineárne programy sa ukladajú do samostatných textových súborov (.lpp) a na ich riešenie sa použije príkaz v prostredí Matlab. LIPSOL umožňuje načítať a riešiť úlohy v troch rôznych formátoch. LIPSOL využíva na riešenie úloh jednu z variácií Mehrotrovho prediktor-korektor algoritmu. Princíp tohto algoritmu spočíva vo vhodnej kombinácii „prediktor“ smeru a „korektor“ smeru. Označme $z^k = (x^k, y^k, s^k)^T$ a $\Delta z = (\Delta x, \Delta y, \Delta s)^T$. „Prediktor“ smer Δz_p je štandardným Newtonovým smerom, ktorý vypočítame zo systému

$$\nabla F(z^k) \Delta z_p = -F(z^k).$$

„Korektor“ smer Δz_c vypočítame zo systému

$$\nabla F(z^k) \Delta z_c = -[F(z^k + \Delta z_p) - \mu \bar{e}],$$

kde $\bar{e} \in \mathbf{R}^{2n+m}$ je vektor jednotiek a núl, pričom $\bar{e}_i = 0$ ak $i = 1, 2, \dots, n + m$, inak $\bar{e}_i = 1$. Nový iteračný bod z^{k+1} nakoniec vypočítame pomocou kombinácie smerov Δz_p a Δz_c

$$z^{k+1} = z^k + \alpha(\Delta z_p + \Delta z_c),$$

pričom dĺžku kroku $\alpha \in (0, 1)$ zvolíme štandardne tak, aby platilo $x^{k+1} > 0, s^{k+1} > 0$. Poznamenajme, že LIPSOL generuje podrobný výstup, a preto je vhodný na numerické experimenty. Podrobný návod ovládania balíka LIPSOL je uvedený v príručke [34].

METÓDY VNÚTORNÉHO BODU VO FINANCIÁCH

Vďaka výborným konvergenčným vlastnostiam sa moderné metódy vnútorného bodu rýchlo a úspešne aplikovali na riešenie úloh v praxi. V súčasnosti sú metódy vnútorného bodu štandardným a významným algoritmom na riešenie všeobecných úloh z rôznych oblastí. V poslednej kapitole tejto práce uvedieme príklady aplikácií metód vnútorného bodu v ekonomickej a finančnej oblasti. Zameriame sa na dva lineárne modely optimalizácie akciového portfólia a na konkrétnych príkladoch ilustrujeme využitie metód vnútorného bodu.

5.1 Aplikácie metód vnútorného bodu

V súčasnosti existuje mnoho článkov a prác, ktoré prezentujú výhody metód vnútorného bodu pri riešení úloh z ekonomickej a finančnej oblasti. Zaujímavým príkladom je problém nájdania rovnovážneho stavu v ekonomikách s neúplným trhom [2], kde štandardné numerické metódy riešenia sú technicky náročné, no metódy vnútorného bodu sú efektívnym algoritmom. Rýchlosť konvergenencie metód vnútorného bodu sa osvedčila aj pri viacetapovom riadení portfólia [7]. Ďalšími možnosťami efektívneho využitia metód vnútorného bodu je model oceňovania aktív [31] alebo problém nájdania či vylúčenia arbitráže na finančných trhoch [25].

5.2 Metódy vnútorného bodu v optimalizácii portfólia

Cieľom úlohy optimalizácie portfólia je rozložiť investičné prostriedky medzi n vybraných aktív tak, aby sa dosiahol maximálny zisk z investície, resp. aby sa minimalizovalo riziko plynúce z kolísavého vývoja cien aktív. Inými slovami, cieľom je nájsť optimálny vektor váh $w \in \mathbf{R}^n$, na základe ktorého sa každému z n aktív jednoznačne priradí optimálny podiel w_i z investičných prostriedkov. Štandardným modelom optimalizácie portfólia je známy Markowitzov model, ktorý vedie na úlohu kvadratického programovania. Tento model využíva prístup minimalizácie rizika pri stanovenom očakávanom výnose portfólia. Miera rizika je charakterizovaná pomocou symetrickej, kladne semidefinitnej kovariančnej matice. Ak kovariančná matica je kladne definitná, potom Markowitzov model vedie na úlohu kvadratického konvexného programovania, ktorú je možné riešiť metódami vnútorného bodu. Ukázalo sa, že metódy vnútorného bodu sú efektívnym algoritmom na riešenie kvadratických úloh optimalizácie portfólia veľkých rozmerov [13],

[23], [32]. Okrem uvedeného kvadratického modelu existujú aj lineárne úlohy optimalizácie portfólia, pri riešení ktorých sa metódy vnútorného bodu tiež úspešne ujali [19]. V nasledovných častiach tejto podkapitoly uvedieme dva alternatívne lineárne modely optimalizácie portfólia prezentované v článku [27].

5.2.1 MAXiMIN model

Označenie modelu je odvodené od jeho prístupu, ktorý spočíva v maximalizácii minimálneho výnosu portfólia. K formulácii tohto modelu je potrebné definovať novú premennú $\theta \in \mathbf{R}$, ktorá predstavuje minimálny výnos portfólia za každé obdobie. MAXiMIN model môžeme sformulovať v tvare úlohy lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \max_{w, \theta} \quad & \theta \\ \bar{r}^T w \quad & \geq \rho, \quad e^T w = 1, \\ (r^\tau)^T w - \theta \quad & \geq 0 \quad \forall \tau \in \mathcal{T} \subseteq \{1, 2, \dots, \chi\}, \\ w \leq u, \quad & w \geq 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde $w \in \mathbf{R}^n$ je vektor váh jednotlivých aktív, $\bar{r} \in \mathbf{R}^n$ je vektor priemerných výnosov jednotlivých aktív za obdobie $\langle 1, \chi \rangle$, $\rho \in \mathbf{R}$ je fixný očakávaný výnos portfólia, ktorý investor požaduje, $r^\tau \in \mathbf{R}^n$ je vektor výnosov jednotlivých aktív za obdobie $\tau \in \mathcal{T}$ a $u \in \mathbf{R}^n$ je vektor horných ohraničení váh. Inými slovami, v tomto modeli investor požaduje, aby minimálny výnos portfólia za každé obdobie $\tau \in \mathcal{T}$ bol maximálny možný. Poznamenajme, že množina \mathcal{T} je charakterizovaná individuálne podľa záujmu investora. Ohraničenie $e^T w = 1$ reprezentuje využitie všetkých investičných prostriedkov, ohraničenie $w \geq 0$ neprípúšťa krátke pozície a ohraničenie $w \leq u$ predstavuje maximálny podiel z investičných prostriedkov investovaný do jednotlivých aktív.

	Metódy vnútorného bodu			
	funkcia „linprog“		balík LIPSOL	
Optimálne riešenie	$w_1 = 0.0000$	$w_4 = 0.0000$	$w_1 = 0.0000$	$w_4 = 0.0000$
	$w_2 = 0.0000$	$w_5 = 0.5404$	$w_2 = 0.0000$	$w_5 = 0.5404$
	$w_3 = 0.4596$	$\theta = 0.0010$	$w_3 = 0.4596$	$\theta = 0.0010$
Hodnota účelovej funkcie	0.0010		0.0010	

Tabuľka 5.1: Riešenie úlohy (5.1) vypočítané metódami vnútorného bodu na základe historických mesačných výnosov piatich vybraných aktív so vstupnými parametrami $\rho = 0.03$, $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, 12\}$, $u_i = 0.75$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Historické mesačné výnosy piatich aktív počas jedného roka sú uvedené v prílohe v Tabuľke 5.4. Zdrojové kódy riešenia sú uvedené v prílohách MAXiMIN_linprog.m a MAXiMIN_LIPSOL.lpp.

5.2.2 MAD model

Označenie modelu je odvodené z anglického výrazu pre strednú absolútnu odchýlku (Mean Absolute Deviation). Tento model využíva prístup minimalizácie rizika pri stanovenom očakávanom výnose portfólia. Miera rizika je v tomto modeli reprezentovaná aritmetickým priemerom absolútnych vážených odchýliek

$$\frac{1}{\chi} \sum_{\tau=1}^{\chi} \left| (r^{\tau} - \bar{r})^T w \right|,$$

kde $w \in \mathbf{R}^n$ je vektor váh jednotlivých aktív, $r^{\tau} \in \mathbf{R}^n$ je vektor výnosov jednotlivých aktív za obdobie $\tau = 1, 2, \dots, \chi$ a $\bar{r} \in \mathbf{R}^n$ je vektor priemerných výnosov jednotlivých aktív za obdobie $\langle 1, \chi \rangle$. Uvedený výraz je nelineárny, a preto je nevyhnutné ho linearizovať. Pre tento účel definujeme pre každé obdobie novú premennú $p_{\tau} \in \mathbf{R}$

$$p_{\tau} = \left| (r^{\tau} - \bar{r})^T w \right|, \quad \tau = 1, 2, \dots, \chi.$$

Je zrejmé, že p_{τ} spĺňa nerovnice $p_{\tau} \geq (r^{\tau} - \bar{r})^T w$, $p_{\tau} \geq -(r^{\tau} - \bar{r})^T w$ pre $\tau = 1, 2, \dots, \chi$. Po potrebných úpravách môžeme MAD model sformulovať v tvare úlohy lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \min_{w,p} \quad & e^T p \\ & \bar{r}^T w \geq \rho, \quad e^T w = 1, \\ & p_{\tau} + (r^{\tau} - \bar{r})^T w \geq 0 \quad \forall \tau = 1, 2, \dots, \chi, \\ & p_{\tau} - (r^{\tau} - \bar{r})^T w \geq 0 \quad \forall \tau = 1, 2, \dots, \chi, \\ & w \leq u, \quad w \geq 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

kde $p \in \mathbf{R}^{\chi}$ je vektor neznámych so zložkami p_{τ} , $\rho \in \mathbf{R}$ je fixný očakávaný výnos portfólia, ktorý investor požaduje a $u \in \mathbf{R}^n$ je vektor horných ohraničení váh.

	Metódy vnútorného bodu	
	funkcia „linprog“	balík LIPSOL
Optimálne riešenie	$w_1 = 0.0000$ $w_4 = 0.0173$ $w_2 = 0.0205$ $w_5 = 0.5306$ $w_3 = 0.4316$	$w_1 = 0.0000$ $w_4 = 0.0173$ $w_2 = 0.0205$ $w_5 = 0.5306$ $w_3 = 0.4316$
Hodnota účelovej funkcie	0.1479	0.1479

Tabuľka 5.2: Riešenie úlohy (5.2) vypočítané metódami vnútorného bodu na základe historických mesačných výnosov piatich vybraných aktív so vstupnými parametrami $\rho = 0.03$, $u_i = 0.75$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Historické mesačné výnosy piatich aktív počas jedného roka sú uvedené v prílohe v Tabuľke 5.4. Príslušné odchýlky mesačných výnosov sú vypočítané v prílohe v Tabuľke 5.5. Zdrojové kódy riešenia sú uvedené v prílohách `MAD_linprog.m` a `MAD_LIPSOL.lpp`.

5.2.3 Výhoda metód vnútorného bodu

Uviedli sme dva lineárne modely za účelom prezentovať možnosti optimalizácie portfólia pomocou lineárnych úloh. Každý z uvedených modelov využíva iný prístup optimalizácie. Zatiaľ čo MAXiMIN model využíva prístup maximalizácie výnosu, MAD model využíva prístup minimalizácie rizika. Avšak v konečnom dôsledku hodnota účelovej funkcie oboch modelov závisí hlavne od zložiek vektora $w \in \mathbf{R}^n$. Uvažujme všeobecný zjednodušený lineárny model optimalizácie portfólia

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T w \\ A w \quad & = \quad b, \quad C w \leq d, \\ w \quad & \geq \quad 0, \quad w \leq u, \end{aligned}$$

kde $w \in \mathbf{R}^n$ je vektor váh jednotlivých aktív, $c^T w$ je funkcia charakterizujúca výnos portfólia, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbf{R}^{m \times p}$, $b \in \mathbf{R}^m$, $d \in \mathbf{R}^m$ sú ohraničujúce matice a vektory, ktoré vyplývajú zo štruktúry portfólia a $u \in \mathbf{R}^n$ je vektor horných ohraničení váh. Za účelom ilustrácie výhod metód vnútorného bodu uvažujme jednoduchý motivačný problém

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.35w_1 + 0.35w_2 + 0.65w_3 \\ w_1 + w_2 + w_3 \quad & = \quad 1, \\ -0.55w_1 + 0.7w_2 + 0.2w_3 \quad & \leq \quad 0.3, \\ 0.26w_1 + 0.22w_2 + 0.12w_3 \quad & \leq \quad 0.205, \\ 0.275w_1 - 0.1w_2 + 0.15w_3 \quad & \leq \quad 0.175, \\ 0.05w_1 + 0.05w_2 + 0.25w_3 \quad & \leq \quad 0.21, \\ w_1, w_2 \quad & \leq \quad 0.5, \\ w_1, w_2, w_3 \quad & \geq \quad 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Teda cieľom je optimálne zostaviť portfólio z troch aktív podľa stanovených podmienok, pričom krátke pozície sú neprípustné, do dvoch aktív môžeme investovať najviac polovicu z investičných prostriedkov a zároveň musíme využiť všetky prostriedky. Úlohu vyriešime simplexovou metódou a metódami vnútorného bodu.

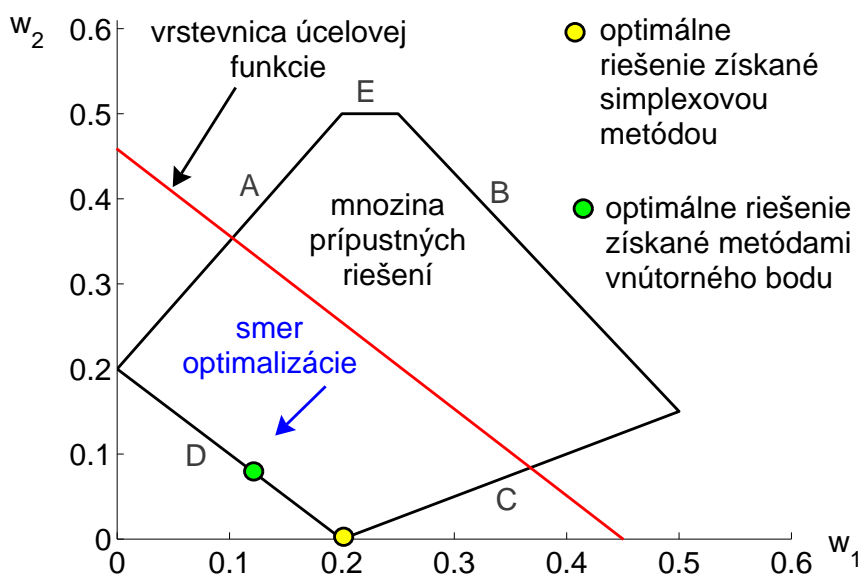
	Simplexová metóda	Metódy vnútorného bodu	
	funkcia „linprog“	funkcia „linprog“	balík LIPSOL
Optimálne riešenie	$w_1 = 0.2000$ $w_2 = 0.0000$ $w_3 = 0.8000$	$w_1 = 0.1203$ $w_2 = 0.0797$ $w_3 = 0.8000$	$w_1 = 0.1989$ $w_2 = 0.0011$ $w_3 = 0.8000$
Hodnota účelovej funkcie	0.5900	0.5900	0.5900

Tabuľka 5.3: Riešenie úlohy (5.3). Zdrojové kódy riešenia sú uvedené v prílohách `portfolio_linprog.m` a `portfolio_LIPSOL.lpp`.

Všimnime si, že optimálne riešenie úlohy (5.3) získané simplexovou metódou sa podstatne líši od riešenia získaného metódami vnútorného bodu pomocou funkcie „linprog“. Túto skutočnosť analyzujeme pomocou grafickej ilustrácie. Pre tento účel najprv prevedieme trojrozmernú úlohu (5.3) pomocou ohraničenia $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ do dvojrozmerného ekvivalentného tvaru

$$\begin{aligned}
 & \min && 0.3w_1 + 0.3w_2 \\
 & -0.75w_1 + 0.5w_2 & \leq & 0.1 \quad (A), \\
 & 0.14w_1 + 0.1w_2 & \leq & 0.085 \quad (B), \\
 & 0.125w_1 - 0.25w_2 & \leq & 0.025 \quad (C), \\
 & -0.2w_1 - 0.2w_2 & \leq & -0.04 \quad (D), \\
 & w_1, w_2 & \leq & 0.5 \quad (E), \\
 & w_1 + w_2 & \leq & 1, \\
 & w_1, w_2 & \geq & 0.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dvojrozmerná úloha (5.4) teraz umožňuje graficky ilustrovať množinu prípustných riešení a smer optimalizácie podľa gradientu účelovej funkcie.



Obr. 5.1: Grafické riešenie úlohy (5.4). Keďže gradient účelovej funkcie a gradient ohraničenia D sú lineárne závislé, tak vrstevnice účelovej funkcie sú rovnobežné so stenou D množiny prípustných riešení. Podľa smeru optimalizácie je zrejmé, že množinou optimálnych riešení úlohy (5.4) je stena D . Zatiaľ čo simplexovou metódou sme získali bázičné riešenie $(0.2, 0)^T$, metódami vnútorného bodu, pomocou funkcie „linprog“, sme získali riešenie $(0.1203, 0.0797)^T$ ležiace blízko geometrického stredu steny D .

V súvislosti s Obr. 5.1 poznamenajme, že simplexovou metódou získame vždy len bá-
zické riešenie $(0.2, 0)^T$ alebo $(0, 0.2)^T$, a to v závislosti od štartovacieho bodu danej me-
tódy. Avšak pomocou reálnych algoritmov metód vnútorného bodu môžeme získať rie-
šenie, ktoré nie je vrcholom množiny prípustných riešení, a ktoré leží „vo vnútri“ steny
 D . Síce podľa optimálnej hodnoty účelovej funkcie sú tieto riešenia rovnocenné, no v
zmysle optimalizácie portfólia sa zásadne líšia. Všimnime si, že riešenia $w = (0.2, 0, 0.8)^T$,
 $w = (0, 0.2, 0.8)^T$ úlohy (5.3) predstavujú rozloženie investičných prostriedkov len do
dvoch aktív. Na základe riešenia $w = (0.1203, 0.0797, 0.8)^T$ získaného metódami vnútor-
ného bodu sa investičné prostriedky rozdelia do všetkých troch aktív. To znamená, že
pri optimalizácii portfólia môžeme metódami vnútorného bodu získať viac diverzifiko-
vané riešenie, na základe ktorého sa investičné prostriedky rozložia do viacerých aktív,
čo predstavuje väčšiu diverzifikáciu rizika plynúceho zo stochastického vývoja cien ak-
tív. Poznamenajme, že ani diverzifikácia rizika rozložením investičných prostriedkov do
viacerých aktív nezaručuje vyšší výnos portfólia v budúcnosti. Avšak v zmysle racionál-
nych rozhodnutí a prirodzených uvážení metódy vnútorného bodu predstavujú určitú
výhodu. Z toho dôvodu môžeme riešenie získané metódami vnútorného bodu považo-
vať za určité postoptimalizačné úvahy vzhľadom na riešenia získané simplexovou me-
tódou.

Záver

V diplomovej práci sme sa zaoberali metódami vnútorného bodu v lineárnom programovaní a možnosťami ich využitia pri riešení úloh s finančnej oblasti. V prvej kapitole sme spracovali teoretické základy lineárneho programovania a zhrnuli sme hlavné výsledky z teórie duality. Bez ujmy na všeobecnosti sme vychádzali z primárno-duálnej dvojice lineárnych úloh (P) , (D) v štandardom tvare, pri ktorých sme využili jednoduché a symetrické duálne vzťahy. V druhej kapitole sme sa venovali vnútorným bodom množiny prípustných riešení a dvom základným predpokladom. Uviedli sme technický predpoklad $(P1)$ o hodnosti vstupnej matice a nevyhnutný predpoklad $(P2)$ o existencii vnútorného bodu. Pomocou duálnych vlastností sa nám podarilo odvodiť ekvivalenty predpokladu existencie vnútorného bodu [Dôsledok 2.1]. Tento výsledok je významný pri úlohách, v ktorých nie je zrejmé, či vnútorný bod existuje, alebo nie. Predpoklad existencie vnútorného bodu zároveň umožňuje popísať množiny prípustných riešení \mathcal{P} , \mathcal{D} a množiny optimálnych riešení \mathcal{P}^* , \mathcal{D}^* . V závere druhej kapitoly sme sa zaoberali optimálnym rozkladom, pomocou ktorého sme charakterizovali relatívne vnútro množiny optimálnych riešení. V úvode tretej kapitoly sme najprv opísali a ilustrovali základnú myšlienku metód vnútorného bodu na všeobecnej úlohe konvexného programovania. Ukázali sme, že svojou povahou sú metódy vnútorného bodu nelineárne. Ide o bariérové metódy, v ktorých minimalizujeme alebo maximalizujeme transformačnú bariérovú funkciu na množine ostro prípustných riešení pôvodnej úlohy. Transformačná bariérová funkcia je kombináciou pôvodnej účelovej funkcie a bariérovej funkcie so špecifickými vlastnosťami. Bariérová funkcia nadobúda na hranici množiny prípustných riešení nekonečne veľké hodnoty. To spôsobuje, že mechanizmus optimalizácie nás udržuje vo vnútri množiny prípustných riešení, zatiaľ čo algoritmus simplexovej metódy postupuje po hranici tejto množiny. Navyše bariérový parameter $\mu > 0$ kladie dôraz na bariérovú funkciu, a tým je možné regulovať jej intenzitu. Získavame tak celú triedu transformačných bariérových úloh parametrizovaných bariérovým parametrom μ . Princíp metód vnútorného bodu sme aplikovali na riešenie dvojice lineárnych úloh (P) , (D) . Pritom sme ako bariérovú funkciu použili logaritmickú funkciu, pri ktorej sa využívajú jej výborné analytické vlastnosti. Pre $\mu > 0$ sme zadefinovali primárnu a duálnu logaritmickú bariérovú funkciu a na základe nich sme skonštruovali dvojicu transformačných bariérových úloh (P_μ) , (D_μ) . Dokázali sme, že pre $\mu > 0$ má každá z úloh (P_μ) , (D_μ) práve jedno optimálne riešenie [Veta 3.3, Veta 3.4]. Zároveň sme dokázali, že nutné a postačujúce

podmienky optimality pre dvojicu transformačných úloh (P_μ) , (D_μ) môžeme reprezentovať pomocou μ -centrujúceho systému [Veta 3.5, Veta 3.6]. Tento výsledok nám umožnil zdefinovať ústredný pojem metód vnútorného bodu, ktorým je centrálna trajektória – množina riešení μ -centrujúceho systému, resp. množina optimálnych riešení dvojice transformačných úloh (P_μ) , (D_μ) pre $\mu > 0$. Na konkrétnych príkladoch sme ilustrovali výpočet centrálnej trajektórie, kde sme zároveň analyzovali jej existenciu, priebeh a konvergenčné vlastnosti. Pritom sme nadobudli tušenie, že znižovaním dôrazu na bariérový parameter μ centrálna trajektória konverguje k optimálnemu riešeniu pôvodnej dvojice úloh (P) , (D) . Túto domnienku sme formálne dokázali, a to vo viacerých krokoch. Najprv sme dokázali, že centrálna trajektória má limitné body [Dôsledok 3.3] a každý limitný bod je optimálnym riešením dvojice úloh (P) , (D) [Veta 3.9]. Ďalej sme zistili, že metódami vnútorného bodu môžeme získať ostro komplementárne optimálne riešenie [Veta 3.10], zatiaľ čo simplexová metóda dáva vždy bázičné riešenie. Nakoniec sme dokázali, že každý limitný bod centrálnej trajektórie je zároveň analytickým stredom množiny optimálnych riešení [Veta 3.13, Veta 3.14], pričom ten jednoznačne existuje. Na základe toho sme zistili, že centrálna trajektória konverguje a jej jediným limitným bodom je analytický stred množiny optimálnych riešení [Dôsledok 3.4]. Vo štvrtej kapitole sme sa zaoberali algoritmami metód vnútorného bodu na riešenie dvojice úloh (P) , (D) . V závislosti od prístupov sa vyvinulo niekoľko kategórii algoritmov metód vnútorného bodu. Najspoľahlivejšími a najúspešnejšími sa stali primárno-duálne algoritmy sledovania centrálnej trajektórie. Ukázali sme, že tieto algoritmy sú založené na modifikovanej Newtonovej metóde so skrátenou dĺžkou kroku. Newtonova metóda generuje približné riešenia transformačných úloh (P_μ) , (D_μ) v špecifickom okolí centrálnej trajektórie, ktoré konvergujú k optimálnemu riešeniu pôvodnej dvojice úloh (P) , (D) . V tejto časti sme opísali všeobecnú schému primárno-duálneho algoritmu a v závislosti od voľby parametrov sme uviedli jeho možné variácie. V závere štvrtej kapitoly sme predstavili nástroje softvéru Matlab na riešenie lineárnych úloh metódami vnútorného bodu. V rámci tohto programovacieho prostredia sme uviedli dva štandardné a spoľahlivé nástroje – funkciu „linprog“ a programový balík LIPSOL, pričom oba z nich vychádzajú zo známeho Mehrotrovho predikto-korektor algoritmu. V piatej kapitole sme uviedli možnosti využitia metód vnútorného bodu vo finančnom sektore. Príkladom je problém nájdenia ekvilibria v ekonomikách s neúplným trhom, viacetapové riadenie portfólia, model oceňovania aktív alebo problém nájdenia či vylúčenia arbitráže na finančných trhoch. Sformulovali sme dva lineárne modely optimalizácie portfólia, ktoré sme následne riešili na základe historických údajov pomocou reálnych algoritmov metód vnútorného bodu. Na jednoduchom motivačnom príklade sme ilustrovali výhody použitia metód vnútorného bodu v lineárnom modeli optimalizácie portfólia. Tu sme ukázali, že v niektorých úlohách je možné využiť ostro komplementárne optimálne riešenie, na základe ktorého môžeme zostaviť viac diverzifikované portfólio v porovnaní s portfóliom zostaveným na základe bázičného riešenia získaného simplexovou metódou.

V diplomovej práci sme splnili ciele uvedené v zadaní. Podrobne sme spracovali teóriu metód vnútorného bodu v lineárnom programovaní a uviedli sme možnosti a výhody ich použitia vo finančnom sektore. V práci sme sa zamerali na dôkladné vysvetlenia, pričom sme dbali na nadväznosť jednotlivých kapitol. V oboch častiach práce sme kládli dôraz na grafickú interpretáciu, o čom svedčí niekoľko zaujímavých ilustrácií. Poznamenajme, že v rámci štvrtej kapitoly sme algoritmy metód vnútorného bodu opísali len všeobecne. Z toho dôvodu by bolo vhodné rozšíriť túto kapitolu o ďalšie poznatky a doplniť ju o konkrétne algoritmy.

Vo všeobecnosti sú metódy vnútorného bodu rýchlym a efektívnym algoritmom na riešenie úloh veľkých rozmerov s riedkymi vstupnými maticami. Metódy vnútorného bodu v lineárnom programovaní do veľkej miery nahradili simplexovú metódu, ktorá stratila svoje postavenie. Síce metódy vnútorného bodu, ako ich navrhol Karmarkar, boli pôvodne navrhnuté na riešenie lineárnych úloh, no v súčasnosti je ich možné úspešne aplikovať aj na širokú triedu štruktúrovaných úloh konvexného programovania. Metódy vnútorného bodu vyvolali revolúciu v optimalizácii a ovplyvnili vývoj v matematickom programovaní. Umožnili spoľahlivo riešiť úlohy z rozličných oblastí a zároveň poskytli podnet pre ich rozvoj. Význam moderných metód vnútorného bodu spočíva v novej kategorizácii úloh podľa ich riešiteľnosti. Zatiaľ čo pred Karmarkarovou prácou sa úlohy matematického programovania kategorizovali podľa riešiteľnosti na lineárne a nelineárne, Karmarkarov algoritmus umožnil posunúť hranicu riešiteľnosti medzi štruktúrované konvexné a nekonvexné úlohy.

Zoznam použitej literatúry

- [1] DANTZIG, G. *Lineárne programovanie a jeho rozvoj*. Bratislava: SVTL, 1966.
- [2] ESTEBAN-BRAVO, M. *An interior-point algorithm for computing equilibria in economies with incomplete asset markets*. In *Journal of Economic Dynamics and Control* [online]. 2008, Vol. 32, No. 3 [cit. 2.4.2013], 677-694. Dostupné na internete: <http://www.sciencedirect.com/science/journal/01651889/32/3>. ISSN 0165-1889.
- [3] FARKAS, J. *Theorie der einfachen Ungleichungen*. In *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*. 1902, Vol. 1902, Iss. 124, 1-27. ISSN 0075-4102.
- [4] FIACCO, A., McCORMICK, G. *Nonlinear Programming: sequential unconstrained minimization techniques*. New York: John Wiley & Sons, 1968.
- [5] FRISCH, K. R. *The logarithmic potential method for solving linear programming problems*. Oslo: Memorandum, University Institute of Economics, 1955.
- [6] GRATTAN-GUINNESS, I. *Joseph Fourier's Anticipation of Linear Programming*. In *Journal of the Operational Research Society* [online]. 1970, Vol. 21, No. 3 [cit. 31.3.2013], 361-364. Dostupné na internete: <http://www.palgrave-journals.com/jors/journal/v21/n3/index.html>. ISSN 1476-9368.
- [7] HALADA, L., LUCKA, M., MELICHERČÍK, I. *Optimal Multistage Portfolio Management Using a Parallel Interior Point Method*. In *Algoritmy 2005: Proceedings of contributed papers and posters* [online]. 2005 [cit. 2.4.2013], 359-368. Dostupné na internete: http://www.iam.fmph.uniba.sk/amuc/_contributed/algo2005/.
- [8] HALICKÁ, M. *Dvadsať rokov moderných metód vnútorného bodu*. In *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* [online]. 2004, Vol. 49, Iss. 3 [cit. 31.3.2013], 244-257. Dostupné na internete: <http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/141233>.
- [9] HALICKÁ, M. *Metódy vnútorného bodu v lineárnom programovaní*. 2011. Poznámky k prednáškam.
- [10] HAMALA, M. *Nelineárne programovanie*. 2012. Poznámky k prednáškam.

- [11] HAMALA, M., TRNOVSKÁ, M. *Nelineárne programovanie, teória a algoritmy*. Bratislava: EPOS, 2013. ISBN 978-80-8057-986-9.
- [12] KANTOROVIČ, L. V. *Matematiceskije metody v organizacii i planirovanii proizvodstva*. Leningrad: Leningradskij Gosudarsvennyj Universitet, 1939.
- [13] KAPUSTA, T. *Optimalizácia portfólia* [Diplomová práca]. Bratislava: Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, 2001.
- [14] KARMARKAR, N. *A new polynomial-time algorithm for linear programming*. In *Combinatorica* [online]. 1984, Vol. 4, Iss. 4 [cit. 31.3.2013], 373-395. Dostupné na internete: <http://link.springer.com/article/10.1007/BF02579150> . ISSN 1439-6912.
- [15] KHACHIYAN, L. *A polynomial algorithm in linear programming*. In *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1979, Vol. 244, No. 5, 1093-1096. ISSN 0002-3264.
- [16] KLEE, V., MINTY, G. *How good is the simplex algorithm?* In SHISHA, O. *Inequalities III*. New York: Academic Press, 1972. 159-175.
- [17] KLUVÁNEK, I., MIŠÍK, L., ŠVEC, M. *Matematika I*. Druhé vydanie. Bratislava: SVTL, 1963.
- [18] KOLLÁR, M., KOSSACZKÁ, L., ŠEVČOVIČ, D. *Diferenciálny a integrálny počet funkcií viac premenných v príkladoch*. Tretie vydanie. Bratislava: Knižničné a edičné centrum FMFI UK, 2012. ISBN 978-80-89186-54-9. Dostupné na internete: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/difint> .
- [19] KORŠŇÁK, L. *Metódy vnútorného bodu v lineárnych úlohách optimalizácie dlhopisového portfólia* [Diplomová práca]. Bratislava: Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, 2003.
- [20] LUSTIG, I. J., MARSTEN, R. E., SHANNO, D. F. *On implementing Mehrotra's predictor-corrector interior point method for linear programming*. In *SIAM Journal on Optimization* [online]. 1992, Vol. 2, No. 3 [cit. 31.3.2013], 435-449. Dostupné na internete: <http://epubs.siam.org/toc/sjope8/2/3> . ISSN 1095-7189.
- [21] MANGASARIAN, O. L. *Nonlinear programing*. New York: McGraw-Hill, 1969.
- [22] MEHROTRA, S. *On the implementation of a primal-dual interior point method*. In *SIAM Journal on Optimization* [online]. 1992, Vol. 2, No. 4 [cit. 31.3.2013], 576-601. Dostupné na internete: <http://epubs.siam.org/toc/sjope8/2/4> . ISSN 1095-7189.
- [23] MEHROTRA, S., ÖZEVIN, M. G. *On the Implementation of Interior Point Decomposition Algorithms for Two-Stage Stochastic Conic Programs* [online]. 2005 [cit. 3.4.2013]. Dostupné na internete: http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2005/10/1237.html .

- [24] NESTEROV, Y. E., NEMIROVSKI, A. S. *Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [25] PINAR, M. Ç. *Minimum Risk Arbitrage with Risky Financial Contracts* [online]. 2001 [cit. 3.4.2013]. Dostupné na internete: http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2001/02/280.html.
- [26] PLESNÍK, J., DUPAČOVÁ, J., VLACH, M. *Lineárne programovanie*. Bratislava: ALFA, 1990. ISBN 80-05-00679-9.
- [27] PAPAHRISTODOULOU, Ch. *Optimal portfolios using Linear Programming models* [online]. 2002 [cit. 31.3.2013]. Dostupné na internete: http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2002/10/549.html.
- [28] ROOS, C., TERLAKY, T., VIAL, J-Ph. *Interior point methods for linear optimization*. New York: Springer, 2005. ISBN 978-0387-26379-3.
- [29] ROOS, C., TERLAKY, T., VIAL, J-Ph. *Theory and algorithms for linear optimization: an interior point approach*. New York: John Wiley & Sons, 1997. ISBN 978-0471-95676-1.
- [30] The MathWorks
<http://www.mathworks.com/help/optim/ug/linprog.html>
- [31] TICHATSCHKE, R., KAPLAN, A., VOETMANN, T., BÖHM, M. *Numerical treatment of an asset price model with non-stochastic uncertainty*. In *Top* [online]. 2002, Vol. 10, Iss. 1 [cit. 3.4.2013], 1–30, 32-36. Dostupné na internete: <http://link.springer.com/article/10.1007%2F02578932>, <http://link.springer.com/article/10.1007%2F02578934>. ISSN 1863-8279.
- [32] VÝŠKRABKA, M. *Metódy vnútorného bodu v kvadratických úlohách optimalizácie portfólia* [Diplomová práca]. Bratislava: Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, 2003.
- [33] WRIGHT, J. S. *Primal-Dual Interior-Point Methods*. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. ISBN 0-89871-328-X.
- [34] ZHANG, Y. *User's Guide to LIPSOL: Linear-programming Interior Point Solvers v0.4* [online]. 1998. [cit. 31.3.2013]. Dostupné na internete: <http://www.caam.rice.edu/~zhang/lipsol>.
- [35] ZHANG, Y., ZHANG, D. *On polynomiality of the Mehrotra-type predictor-corrector interior-point algorithms*. In *Mathematical Programming* [online]. 1995, Vol. 68, Iss. 1-3 [cit. 31.3.2013], 303-318. Dostupné na internete: <http://link.springer.com/article/10.1007%2F01585769>. ISSN 1436-4646.

Prílohy

vrstevnice.m Matlab 7.0.1 (R14)

```
m=2;
n=3;
clear scr
mu=[50, 10, 5, 2, 1, 0.5];
abc=['a','b','c','d','e','f'];
for i=1:m*n
    subplot(m,n,i)
    patch([1 3 5 6 4 2],[3 1 2 5 6 5],'w','LineWidth',1.5)
    axis([0.2 6.2 0.2 6.2])
    hold on
    f = @(y1,y2) 2*y1+y2+mu(i)*(log(y1-4+y2)+log(-0.5*y1+0.5+y2)+
        log(13-3*y1+y2)+log(8-0.5*y1-y2)+log(4+0.5*y1-y2)+
        log(1+2*y1-y2));
    ezcontour(f,80)
    axis([0.1 6.1 0.1 6.1])
    axis off
    title(['(' ,abc(i),' ) \mu = ',num2str(mu(i))'],'FontSize', 12);
end
```

jednorozmerna_uloha.m Matlab 7.0.1 (R14)

```
m=2;
n=2;
mu=[5; 2; 1; 0.5];
clear scr
for i=1:m*n
    subplot(m,n,i)
    y=(1:0.01:3);
    g=y+mu(i)*(log(y)+log(y-1)+log(3-y));
    plot(y,g)
    hold on
    gMax=g(find(g==max(g)));
    gArgMax=y(find(g==max(g)));
    gMaxVec(i)=gMax;
    gArgMaxVec(i)=gArgMax;
    plot([gArgMax gArgMax],[-2 gMax],'k--')
    hold on
    axis([0 4 -2 max(gMaxVec)+1])
```

```

    title( ['\mu = ', num2str(mu(i)), ',
           y* = ', num2str(gArgMaxVec(i)), ',
           g(y*) = ', num2str(gMaxVec(i))] );
    xlabel('y');
    ylabel('g');
end

```

ct_priklad01.m Matlab 7.0.1 (R14)

```

m=2;
n=3;
mu=[10; 5; 2; 1; 0.1];
abc=['a'; 'b'; 'c'; 'd'; 'e'; 'f'];
clear scr
for i=1:m*n-1
    subplot(m,n,i)
    y1=0;
    y2=1-mu(i);
    plot(y1,y2,'bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','w')
    hold on
    axis([-1 1 -10 1])
    title(['(', abc(i), ')    \mu = ', num2str(mu(i))]);
    xlabel('y1');
    ylabel('y2');
end
subplot(m,n,m*n)
plot([0 0], [-10 1], 'b-')
hold on
for i=1:length(mu)
    y1=0;
    y2=1-mu(i);
    plot(y1,y2,'bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','w')
    hold on
end
axis([-1 1 -10 1])
title(['(', abc(m*n), ')    Duálna CT']);
xlabel('y1');
ylabel('y2');

```

ct_priklad02.m Matlab 7.0.1 (R14)

```

m=2;
n=3;
mu=[10; 5; 2; 1; 0.1];
abc=['a'; 'b'; 'c'; 'd'; 'e'; 'f'];
clear scr
for i=1:m*n-1
    subplot(m,n,i)
    y1=mu(i)-sqrt(mu(i)^2+1);

```

```

    y2=1-mu(i);
    plot(y1,y2,'bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','w')
    hold on
    axis([-1 1 -10 1])
    title(['(',abc(i),') \mu = ',num2str(mu(i))]);
    xlabel('y1');
    ylabel('y2');
end
subplot(m,n,m*n)
par=100:-0.5:0;
for i=1:length(par)
    y1=par-sqrt(par.^2+1);
    y2=1-par;
    plot(y1,y2,'b-')
    hold on
end
for i=1:length(mu)
    y1=mu(i)-sqrt(mu(i)^2+1);
    y2=1-mu(i);
    plot(y1,y2,'bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','w')
    hold on
end
axis([-1 1 -10 1])
title(['(',abc(m*n),') Duálna CT']);
xlabel('y1');
ylabel('y2');

```

ct_priklad03.m Matlab 7.0.1 (R14)

```

m=2;
n=3;
mu=[10; 5; 2; 1; 0.1];
abc=['a'; 'b'; 'c'; 'd'; 'e'; 'f'];
clear scr
for i=1:m*n-1
    subplot(m,n,i)
    y1=-mu(i)+sqrt(mu(i)^2+1);
    y2=1-mu(i);
    plot(y1,y2,'bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','w')
    hold on
    axis([-1 1 -10 1])
    title(['(',abc(i),') \mu = ',num2str(mu(i))]);
    xlabel('y1');
    ylabel('y2');
end
subplot(m,n,m*n)
par=100:-0.5:0;
for i=1:length(par)
    y1=-par+sqrt(par.^2+1);
    y2=1-par;
    plot(y1,y2,'b-')
    hold on

```

```
end
for i=1:length(mu)
    y1=-mu(i)+sqrt(mu(i)^2+1);
    y2=1-mu(i);
    plot(y1,y2,'bo','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor','w')
    hold on
end
axis([-1 1 -10 1])
title(['(',abc(m*n),') Duálna CT']);
xlabel('y1');
ylabel('y2');
```

ct_priklad04.m Matlab 7.0.1 (R14)

```
m=3;
n=3;
B=[1, 2; 1, -2; -1, -2; -1, 2; 1, 0; 0, -2; -1, 0; 0, 2; 0, 0];
abc=['a';'b';'c';'d';'e';'f';'g';'h';'i'];
mu=100:-0.5:0;
clear scr
for i=1:m*n
    b=B(i,:);
    subplot(m,n,i)
    y1=sign(b(1))*(-mu+sqrt(mu.^2+1));
    y2=sign(b(2))*(1/2)*(-mu+sqrt(mu.^2+4));
    plot(y1,y2,'b-')
    hold on
    axis([-1 1 -1 1])
    title(['(',abc(i),')
           b = (',num2str(b(1)),',',',num2str(b(2)),',')^T' ]);
    xlabel('y1');
    ylabel('y2');
end
```

Mesiac	τ	r_1^T	r_2^T	r_3^T	r_4^T	r_5^T
Január	1	0.054	0.032	0.064	0.038	0.049
Február	2	0.045	0.055	0.056	0.062	0.067
Marec	3	-0.030	-0.036	0.048	-0.037	-0.039
Apríl	4	-0.018	0.052	0.007	0.050	0.051
Máj	5	0.043	0.047	0.053	0.065	0.049
Jún	6	0.047	0.034	0.036	-0.043	0.037
Júl	7	0.055	0.063	0.017	0.062	0.055
August	8	0.036	0.048	0.047	0.034	0.025
September	9	-0.039	0.025	-0.059	0.035	0.052
Október	10	-0.043	0.040	0.047	0.056	0.020
November	11	0.046	0.036	0.040	0.057	0.045
December	12	0.052	-0.017	0.032	0.025	0.040
Priemer	\bar{r}	0.0207	0.0316	0.0323	0.0337	0.0376

Tabuľka 5.4: Reálne historické mesačné výnosy piatich vybraných aktív zo Štokholmskej burzy za jeden rok. Zdroj: [27].

Mesiac	τ	$r_1^T - \bar{r}_1$	$r_2^T - \bar{r}_2$	$r_3^T - \bar{r}_3$	$r_4^T - \bar{r}_4$	$r_5^T - \bar{r}_5$
Január	1	0.0333	0.0004	0.0317	0.0043	0.0114
Február	2	0.0243	0.0234	0.0237	0.0283	0.0294
Marec	3	-0.0507	-0.0676	0.0157	-0.0707	-0.0766
Apríl	4	-0.0387	0.0204	-0.0253	0.0163	0.0134
Máj	5	0.0223	0.0154	0.0207	0.0313	0.0114
Jún	6	0.0263	0.0024	0.0037	-0.0767	-0.0006
Júl	7	0.0343	0.0314	-0.0153	0.0283	0.0174
August	8	0.0153	0.0164	0.0147	0.0003	-0.0126
September	9	-0.0597	-0.0066	-0.0913	0.0013	0.0144
Október	10	-0.0637	0.0084	0.0147	0.0223	-0.0176
November	11	0.0253	0.0044	0.0077	0.0233	0.0074
December	12	0.0313	-0.0486	-0.0003	-0.0087	0.0024

Tabuľka 5.5: Vypočítané odchýlky mesačných výnosov z Tabuľky 5.4.

MAXiMIN_linprog.m Matlab 7.0.1 (R14)

```

c = [0 0 0 0 0 -1];
C = [-0.0540  -0.0320  -0.0640  -0.0380  -0.0490  1;
     -0.0450  -0.0550  -0.0560  -0.0620  -0.0670  1;
       0.0300   0.0360  -0.0480   0.0370   0.0390  1;
       0.0180  -0.0520  -0.0070  -0.0500  -0.0510  1;
     -0.0430  -0.0470  -0.0530  -0.0650  -0.0490  1;
     -0.0470  -0.0340  -0.0360   0.0430  -0.0370  1;
     -0.0550  -0.0630  -0.0170  -0.0620  -0.0550  1;
     -0.0360  -0.0480  -0.0470  -0.0340  -0.0250  1;
       0.0390  -0.0250   0.0590  -0.0350  -0.0520  1;
       0.0430  -0.0400  -0.0470  -0.0560  -0.0200  1;
     -0.0460  -0.0360  -0.0400  -0.0570  -0.0450  1;
     -0.0520   0.0170  -0.0320  -0.0250  -0.0400  1;
     -0.0207  -0.0316  -0.0323  -0.0337  -0.0376  -0.03];
d = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
A = [1 1 1 1 1 0];
b=1;
u=[0.75; 0.75; 0.75; 0.75; 0.75; Inf];
l=[0; 0; 0; 0; 0; -Inf];
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(c,C,d,A,b,l,u)

```

MAXiMIN_LIPSOL.lpp LIPSOL v0.4

```

name: MAXiMIN_LIPSOL
objective:
  max z
constraints:
  1) 0.054w1 + 0.032w2 + 0.064w3 + 0.038w4 + 0.049w5 - z > 0
  2) 0.045w1 + 0.055w2 + 0.056w3 + 0.062w4 + 0.067w5 - z > 0
  3) -0.030w1 - 0.036w2 + 0.048w3 - 0.037w4 - 0.039w5 - z > 0
  4) -0.018w1 + 0.052w2 + 0.007w3 + 0.050w4 + 0.051w5 - z > 0
  5) 0.043w1 + 0.047w2 + 0.053w3 + 0.065w4 + 0.049w5 - z > 0
  6) 0.047w1 + 0.034w2 + 0.036w3 - 0.043w4 + 0.037w5 - z > 0
  7) 0.055w1 + 0.063w2 + 0.017w3 + 0.062w4 + 0.055w5 - z > 0
  8) 0.036w1 + 0.048w2 + 0.047w3 + 0.034w4 + 0.025w5 - z > 0
  9) -0.039w1 + 0.025w2 - 0.059w3 + 0.035w4 + 0.052w5 - z > 0
  10) -0.043w1 + 0.040w2 + 0.047w3 + 0.056w4 + 0.020w5 - z > 0
  11) 0.046w1 + 0.036w2 + 0.040w3 + 0.057w4 + 0.045w5 - z > 0
  12) 0.052w1 - 0.017w2 + 0.032w3 + 0.025w4 + 0.040w5 - z > 0
  13) 0.020w1 + 0.031w2 + 0.032w3 + 0.033w4 + 0.036w5 > 0.03
  14) w1 + w2 + w3 + w4 + w5 = 1
bounds:
  1) 0 < w1 < 0.75
  2) 0 < w2 < 0.75
  3) 0 < w3 < 0.75
  4) 0 < w4 < 0.75
  5) 0 < w5 < 0.75

```

MAD_linprog.m Matlab 7.0.1 (R14)

```

c = [0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
C = [
-0.0333 -0.0004 -0.0317 -0.0043 -0.0114 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
-0.0243 -0.0234 -0.0237 -0.0283 -0.0294 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0.0507 0.0676 -0.0157 0.0707 0.0766 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0.0387 -0.0204 0.0253 -0.0163 -0.0134 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0;
-0.0223 -0.0154 -0.0207 -0.0313 -0.0114 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0;
-0.0263 -0.0024 -0.0037 0.0767 0.0006 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0;
-0.0343 -0.0314 0.0153 -0.0283 -0.0174 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0;
-0.0153 -0.0164 -0.0147 -0.0003 0.0126 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0;
 0.0597 0.0065 0.0913 -0.0013 -0.0144 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0;
 0.0637 -0.0084 -0.0147 -0.0223 0.0176 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0;
-0.0253 -0.0044 -0.0077 -0.0233 -0.0074 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0;
-0.0313 0.0486 0.0003 0.0087 -0.0024 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1;
 0.0333 0.0004 0.0317 0.0043 0.0114 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0.0243 0.0234 0.0237 0.0283 0.0294 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
-0.0507 -0.0676 0.0157 -0.0707 -0.0766 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
-0.0387 0.0204 -0.0253 0.0163 0.0134 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0;
 0.0223 0.0154 0.0207 0.0313 0.0114 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0;
 0.0263 0.0024 0.0037 -0.0767 -0.0006 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0;
 0.0343 0.0314 -0.0153 0.0283 0.0174 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0;
 0.0153 0.0164 0.0147 0.0003 -0.0126 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0;
-0.0597 -0.0066 -0.0913 0.0013 0.0144 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0;
-0.0637 0.0084 0.0147 0.0223 -0.0176 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0;
 0.0253 0.0044 0.0077 0.0233 0.0074 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0;
 0.0313 -0.0486 -0.0003 -0.0087 0.0024 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1;
-0.0207 -0.0316 -0.0323 -0.0337 -0.0376 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
d = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;-0.03];
A = [1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
b=1;
u=[0.75;0.75;0.75;0.75;0.75;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;Inf;];
l=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0;];
[x,fval,exitflag,output,lambda]= linprog(c,C,d,A,b,l,u)

```

MAD_LIPSOL.lpp LIPSOL v0.4

name: MAD_LIPSOL

objective:

min p1 + p2 + p3 + p4 + p5 + p6 + p7 + p8 + p9 + p10 + p11 + p12

constraints:

- 1) 0.0333w1 + 0.0004w2 + 0.0317w3 + 0.0043w4 + 0.0114w5 + p1 > 0
- 2) 0.0243w1 + 0.0234w2 + 0.0237w3 + 0.0283w4 + 0.0294w5 + p2 > 0
- 3) -0.0507w1 - 0.0676w2 + 0.0157w3 - 0.0707w4 - 0.0766w5 + p3 > 0
- 4) -0.0387w1 + 0.0204w2 - 0.0253w3 + 0.0163w4 + 0.0134w5 + p4 > 0
- 5) 0.0223w1 + 0.0154w2 + 0.0207w3 + 0.0313w4 + 0.0114w5 + p5 > 0
- 6) 0.0263w1 + 0.0024w2 + 0.0037w3 - 0.0767w4 - 0.0006w5 + p6 > 0
- 7) 0.0343w1 + 0.0314w2 - 0.0153w3 + 0.0283w4 + 0.0174w5 + p7 > 0
- 8) 0.0153w1 + 0.0164w2 + 0.0147w3 + 0.0003w4 - 0.0126w5 + p8 > 0
- 9) -0.0597w1 - 0.0066w2 - 0.0913w3 + 0.0013w4 + 0.0144w5 + p9 > 0
- 10) -0.0637w1 + 0.0084w2 + 0.0147w3 + 0.0223w4 - 0.0176w5 + p10 > 0

-
- 11) $0.0253w_1 + 0.0044w_2 + 0.0077w_3 + 0.0233w_4 + 0.0074w_5 + p_{11} > 0$
 12) $0.0313w_1 - 0.0485w_2 - 0.0003w_3 - 0.0087w_4 + 0.0024w_5 + p_{12} > 0$
 13) $0.0333w_1 + 0.0004w_2 + 0.0317w_3 + 0.0043w_4 + 0.0114w_5 - p_1 < 0$
 14) $0.0243w_1 + 0.0234w_2 + 0.0237w_3 + 0.0283w_4 + 0.0294w_5 - p_2 < 0$
 15) $-0.0507w_1 - 0.0676w_2 + 0.0157w_3 - 0.0707w_4 - 0.0766w_5 - p_3 < 0$
 16) $-0.0387w_1 + 0.0204w_2 - 0.0253w_3 + 0.0163w_4 + 0.0134w_5 - p_4 < 0$
 17) $0.0223w_1 + 0.0154w_2 + 0.0207w_3 + 0.0313w_4 + 0.0114w_5 - p_5 < 0$
 18) $0.0263w_1 + 0.0024w_2 + 0.0037w_3 - 0.0767w_4 - 0.0006w_5 - p_6 < 0$
 19) $0.0343w_1 + 0.0314w_2 - 0.0153w_3 + 0.0283w_4 + 0.0174w_5 - p_7 < 0$
 20) $0.0153w_1 + 0.0164w_2 + 0.0147w_3 + 0.0003w_4 - 0.0126w_5 - p_8 < 0$
 21) $-0.0597w_1 - 0.0066w_2 - 0.0913w_3 + 0.0013w_4 + 0.0144w_5 - p_9 < 0$
 22) $-0.0637w_1 + 0.0084w_2 + 0.0147w_3 + 0.0223w_4 - 0.0176w_5 - p_{10} < 0$
 23) $0.0253w_1 + 0.0044w_2 + 0.0077w_3 + 0.0233w_4 + 0.0074w_5 - p_{11} < 0$
 24) $0.0313w_1 - 0.0486w_2 - 0.0003w_3 - 0.0087w_4 + 0.0024w_5 - p_{12} < 0$
 25) $0.0207w_1 + 0.0316w_2 + 0.0323w_3 + 0.0337w_4 + 0.0376w_5 > 0.03$
 26) $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 1$

bounds:

- 1) $0 < w_1 < 0.75$
 2) $0 < w_2 < 0.75$
 3) $0 < w_3 < 0.75$
 4) $0 < w_4 < 0.75$
 5) $0 < w_5 < 0.75$
-

portfolio_linprog.m Matlab 7.0.1 (R14)

```
c=[-0.35 -0.35 -0.65];
A=[-0.55 0.7 0.2; 0.26 0.22 0.12; 0.275 -0.1 0.15; 0.05 0.05 0.25];
b=[0.3; 0.205; 0.175; 0.21];
C=[1 1 1];
d=1;
l=[0; 0; 0];
u=[0.5; 0.5; +Inf];

% simplexova metoda
[x,fval,exitflag,output,lambda] =
linprog(c,A,b,C,d,l,u,[],optimset('LargeScale','off','Simplex','on'))

% metody vnutorneho bodu
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(c,A,b,C,d,l,u)
```

portfolio_LIPSOL.lpp LIPSOL v0.4

```
name: portfolio_LIPSOL
objective:
  max 0.35w1 + 0.35w2 + 0.65w3
constraints:
  1) -0.55w1 + 0.7w2 + 0.2w3 < 0.3
  2) 0.26w1 + 0.22w2 + 0.12w3 < 0.205
  3) 0.275w1 - 0.1w2 + 0.15w3 < 0.175
```

4) $0.05w_1 + 0.05w_2 + 0.25w_3 < 0.21$

5) $w_1 + w_2 + w_3 = 1$

bounds:

1) $0 < w_1 < 0.5$

2) $0 < w_2 < 0.5$

3) $0 < w_3$
