

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**

**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**

**FRAKTÁLNY BROWNOV POHYB VO FINANCIÁCH**

Diplomová práca

**2013**

**Bc. Boris Letko**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



## FRAKTÁLNY BROWNOV POHYB VO FINANCIÁCH

Diplomová práca

Evidenčné číslo: ffa7d2f4-6c27-4139-adfa-4ced6a0bd16a

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.

Bratislava 2013

Boris Letko



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Boris Letko  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Fraktálny Brownov pohyb vo financiách

**Cieľ:** Náplňou práce bude štúdium konceptu fraktálneho Brownovho pohybu, fraktálnej Ito formuly, atď, ich aplikácie do klasických Black-Scholesových vzorcov resp. iných oblastí financií. Je potrebná dobrá znalosť teórie prevdepodobnosti, stochastických procesov, matematickej analýzy.

**Vedúci:** Mgr. Soňa Kilianová, PhD.

**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

**Dátum zadania:** 25.01.2012

**Dátum schválenia:** 26.01.2012

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

## **Prehlásenie**

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne za pomoci konzultácií a uvedených bibliografických odkazov.

V Bratislave, apríl 2013

.....

Boris Letko

## **Podakovanie**

Ďakujem vedúcej svojej diplomovej práce Mgr. Soni Kilianovej, PhD. za aktívne vedenie pri vypracovávaní témy, za ochotu a snahu naučiť, mojej priateľke za obrovskú trpezlivosť a cenné rady a rodine za neustálu podporu.

# Abstrakt

LETKO, Boris: Fraktálny Brownov pohyb vo financiách

Diplomová práca - Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Vedúci: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.

Cieľom diplomovej práce je postaviť do kontextu na oceňovanie opcií v praxi používaný Black-Scholesov model s tzv. fraktálnym Black-Scholesovým modelom, ktorého základ tvorí fraktálny Brownov pohyb. Na zvládnutie tejto komparácie je potrebné po teoretickej stránke naštudovať koncept fraktálneho Brownovho pohybu. Na jednej strane potrebujeme definície a charakteristiky, medzi ktoré patria napríklad dlhodobá závislosť, samopodobnosť, či kľúčová vlastnosť zapríčiňujúca existenciu arbitráže - pre Hurstov index  $H \neq \frac{1}{2}$  nie je fraktálny Brownov pohyb semimartingal. Na druhej strane nás kvôli vzorcom na oceňovanie opcií budú zaujímať aj praktické aspekty. Medzi tieto zaraďujeme fraktálnu Itôvu lemu ako aj rôzne metódy slúžiace na odhadovanie Hurstovho indexu z dát. Pomocou spomenutých prostriedkov overíme, či model oceňovania opcií založený na fraktálnom Brownovom pohybe dáva v praxi kvalitatívne lepšie výsledky ako klasický Black-Scholesov model.

**Kľúčové slová:** fraktálny Brownov pohyb, Hurstov index, oceňovanie opcií

# Abstract

LETKO, Boris: Fractional Brownian motion in finance

Diploma thesis - Comenius University Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics, and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics.

Thesis Consultant: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.

The goal of this thesis is to discuss and compare the Black-Scholes model for option pricing used in practice with the so-called fractional Black-Scholes model, based on fractional Brownian motion. For the sake of this comparison, it is necessary to study the theoretical aspects of the fractional Brownian motion concept. On one hand, we need definition and basic properties, including long-range dependence, self-similarity or the key feature causing the existence of arbitrage - the fractional Brownian motion with  $H \neq \frac{1}{2}$  is not a semimartingale. On the other hand, we are interested in other aspects as well, due to formulas of option pricing: here we have in mind the fractional Itô lemma as well as various methods for estimation of the Hurst index. By the mentioned means we verify if the option pricing model based on fractional Brownian motion leads to qualitatively or quantitatively better results than the classical Black-Scholes model.

**Key words:** fractional Brownian motion, Hurst index, option pricing

# Obsah

Úvod	3
<b>1 Fraktálny Brownov pohyb</b>	<b>6</b>
1.1 Definícia a základné vlastnosti fraktálneho Brownovho pohybu . . .	6
1.2 Existencia fraktálneho Brownovho pohybu . . . . .	11
1.3 Charakteristiky fraktálneho Brownovho pohybu . . . . .	16
1.3.1 Dlhodobá závislosť . . . . .	16
1.3.2 Fraktálny Gaussov šum . . . . .	19
1.3.3 Samopodobnosť . . . . .	20
1.4 Fraktálny Brownov pohyb pre $H \neq \frac{1}{2}$ nie je semimartingal . . . .	22
1.5 Fraktálna Itōva lema . . . . .	26
1.6 Príklady arbitráže . . . . .	28
1.6.1 Motivačný príklad . . . . .	29
1.6.2 Reálny príklad . . . . .	29
<b>2 Spôsobý odhadovania Hurstovho indexu</b>	<b>32</b>
2.1 R/S analýza na odhad $H$ . . . . .	32
2.2 Iné metódy odhadovania Hurstovho indexu . . . . .	34
2.2.1 Absolute Value Method . . . . .	35
2.2.2 Variance Method . . . . .	36
2.2.3 Variance of Residuals Method . . . . .	36
2.2.4 Periodogram Method . . . . .	37
2.2.5 Abry-Veitch Method . . . . .	37
2.3 Odhady Hurstovho indexu pre vybrané akcie . . . . .	37
2.3.1 Výsledky RS analýzy . . . . .	38
2.3.2 Výsledky z iných metód . . . . .	42
<b>3 Fraktálny Brownov pohyb v praxi</b>	<b>45</b>
3.1 Cena call opcie z klasického Black-Scholesovho modelu . . . . .	46
3.2 Cena call opcie z fraktálneho Black-Scholesovho modelu . . . . .	47
3.3 Porovnanie na reálnych dátach . . . . .	50



3.3.1	Vstupné dáta . . . . .	50
3.3.2	Štruktúra spracovania výsledkov . . . . .	52
3.3.3	Analýza výsledkov . . . . .	56
	<b>Záver</b>	<b>59</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>61</b>
	<b>A Príloha</b>	<b>64</b>

# Úvod

Fascinujúci svet financií prechádza už pár rokov tvrdou očistou. Po tom, ako v mnohých krajinách počas uplynulých rokov skolaboval takmer celý finančný sektor, si veľa ľudí kladlo otázku, kde sa stala chyba. Odvšadiaľ sa hrnuli správy, že medzi hlavných vinníkov spôsobujúcich tento kolaps jednoznačne treba zaradiť finančné deriváty a hazardné obchodovanie s nimi. Tým, nakoľko bolo toto tvrdenie pravdivé, sa v našej práci zaoberať nebudeme. Vieme len povedať, že u väčšiny zainteresovaných a u všetkých nezainteresovaných ľudí od prevalenia krízy slovo derivát nevzbudzuje príliš vábne pocity a zostane celkom iste zviazané práve so spomínanou krízou.

Medzi deriváty sa zaraďujú aj opcie, ktorým sa v tomto texte venujeme. Konkrétne nás zaujíma ich oceňovanie. Keďže v súčasnosti sa prehodnocujú všetky doteraz zažitú mechanizmy pri práci s finančnými nástrojmi, aj my načrieme do zatiaľ nie príliš prebádanej oblasti. Nebude nás zaujímať oceňovanie tak ako ho navrhli už v roku 1973 vo svojom slávnom článku *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* Fisher Black a Myron Scholes, ale sústredíme sa na tzv. fraktálny Brownov pohyb. Tento pojem bol z finančného hľadiska prvýkrát skúmaný v práci *Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications*, ktorého autormi sú Benoit Mandelbrot a John van Ness.

Cieľom práce je štúdium konceptu fraktálneho Brownovho pohybu, či už po teoretickej, ale hlavne po praktickej stránke. Po teoretickej stránke sa zameriame na základné vlastnosti fraktálneho Brownovho pohybu. Spojivom medzi teoretickou a praktickou časťou bude odhadovanie Hurstovho indexu z dát, ktoré nás privedie k aplikácii fraktálneho Brownovho pohybu do oceňovania opcií. Postavíme do kontrastu na klasickom Brownovom pohybe založený Black-Scholesov model s fraktálnym Black-Scholesovým modelom s cieľom zistiť, či nový prístup v podobe fraktálneho Black-Scholesovho modelu môže v praxi nahradiť zaužívaný Black-Scholesov model.

Túto už podľa názvu náročne znejúcu tému som si vybral kvôli môjmu záujmu o finančnú matematiku. Vzbudila vo mne zvedavosť pri hľadaní odpovede na otázku, čo sa ukrýva za predpísaným učivom o stochastickom kalkule a teórii

oceňovania.

Štruktúra práce je rozdelená do troch kapitol s názvami - Fraktálny Brownov pohyb, Spôsoby odhadovania Hurstovho indexu a Fraktálny Brownov pohyb v praxi.

V úvodnej kapitole tejto práce sa budeme venovať definovaniu a základným vlastnostiam fraktálneho Brownovho pohybu, ktoré zhrnieme v tvrdení a následne dokážeme. Kvôli matematickej korektnosti dokážeme aj samotnú existenciu fraktálneho Brownovho pohybu, čím sa nám otvorí priestor k jeho dôležitým charakteristikám. Z charakteristík spomenieme dlhodobú závislosť, fraktálny Gaussov šum a samopodobnosť. Kľúčovú rolu pri budovaní stochastického kalkulu pri klasickom Brownovom pohybe tvorila Itôva lema. Pre naše potreby v tejto práci uvedieme jej fraktálnu verziu. Špeciálnu časť venujeme príkladom existencie arbitráže na finančných trhoch, ktorá vyplýva z ďalšej kľúčovej vlastnosti fraktálneho Brownovho pohybu, ktorou je fakt, že fraktálny Brownov pohyb pre Hurstov index  $H \neq \frac{1}{2}$  nie je semimartingal. Neopomenieme ani pozadie vzniku samotného pojmu fraktálny Brownov pohyb.

V druhej kapitole sa budeme venovať metódam slúžiacim na odhadovanie dôležitého ukazovateľa pri fraktálnom Brownovom pohybe - Hurstovho indexu. Uvedieme v tomto texte najpoužívanejšiu metódu - R/S analýzu. Túto relatívne jednoduchú štatistickú metódu použil pri svojich výpočtoch hydroológ Hurst. Pre porovnanie uvedieme aj iné existujúce metódy rovnako slúžiace na klasifikovanie dát pomocou odhadovania Hurstovho indexu. V závere tejto kapitoly na konkrétnych dátach odhadneme Hurstov index za rôzne obdobia a porovnáme výsledky dosiahnuté všetkými spomenutými metódami.

Záverečná kapitola našej práce bude patriť aplikovateľnosti fraktálneho Brownovho pohybu do praxe. Pre akcie vybraných spoločností budeme postupne oceňovať call opcie pomocou dvoch prístupov. V prvom, klasickom prístupe, sa cena akcie vyvíja podľa obyčajného Brownovho pohybu. Naopak, v druhom prístupe oceňovania budeme vychádzať z vývoja ceny akcie podľa fraktálneho Brownovho pohybu. Odvodenie stochastického kalkulu vedúce k oceňovacím vzorcom pre fraktálny Brownov pohyb možno nájsť v práci [11]. Oproti tomu v našej práci pri fraktálnom Brownovom pohybe využijeme odhady Hurstovho indexu získané

rôznymi metódami, ktoré sme zdefinovali a popisovali v druhej kapitole. Poukážeme tiež na reálnych dátach na rozdiely pri dvoch spomenutých prístupoch a takisto porovnáme výsledky oceňovania s trhovými cenami opcií pre nami zvolené spoločnosti.

Hlavným vlastným prínosom predkladanej práce je porovnanie efektívnosti šiestich metód slúžiacich na odhad Hurstovho indexu pre ceny akcií vybraných spoločností a porovnanie teoretických cien call opcií vypočítaných pomocou klasického ako aj fraktálneho Black-Scholesovho modelu. Cieľom tohto celého bolo preskúmať zmyslupnosť použitia fraktálneho Brownovho pohybu v praxi.

# 1 Fraktálny Brownov pohyb

Štatistickí zvyčajne na modelovanie prírodných úkazov (zrážky, hladiny riek) používajú jednoduchú náhodnú prechádzku alebo Brownov pohyb. Keď sa hydroológ Harold Edwin Hurst pokúšal navrhnúť optimálnu priehradu na Níle, modeloval úroveň hladiny riek pomocou Brownovho pohybu. Na svoje prekvapenie zistil, že hladina rieky nie je úplne náhodná. Namiesto nezávislých prírastkov procesu (typických pre Brownov pohyb), pozoroval medzi nimi koreláciu, ktorá naznačovala, že hladina rieky sa správa ako vychýlená náhodná prechádzka alebo fraktálny Brownov pohyb [27]. S fraktálnym Brownovým pohybom sa stretneme nielen pri prírodných javoch, ale aj pri modelovaní logaritmických výnosov akcie, empirickej volatility a iných turbulentných vplyvoch [1].

Z matematického hľadiska bol tento pojem zavedený Kolmogorovom [14] a študovaný v práci Mandelbrota a Van Nessá [17], kde bola vybudovaná stochastická integrálna reprezentácia v zmysle štandardného Brownovho pohybu [21].

Brownov pohyb môžeme chápať ako náhodnú prechádzku, kde každý nasledujúci krok je nezávislý od predchádzajúceho. Hovoríme o procese s nezávislými prírastkami a nulovou pamäťou <sup>1</sup>. Fraktálny Brownov pohyb predstavuje zovšeobecnenie uvedenej myšlienky. Predstaviť si ho možno ako vychýlenú náhodnú prechádzku. V tomto prípade teda už jednotlivé kroky nie sú nezávislé, naopak, každý krok závisí od všetkých predchádzajúcich [27]. Dostávame sa tak k definícii kľúčového pojmu.

## 1.1 Definícia a základné vlastnosti fraktálneho Brownovho pohybu

V tejto časti predstavíme najprv všeobecný Gaussov proces a následne uvedieme definíciu fraktálneho Brownovho pohybu ako špeciálneho prípadu Gaussovho procesu. Keďže tento nie je jediný, uvedieme na ilustráciu aj ďalšie príklady, ktoré sa od fraktálneho Brownovho pohybu líšia inou špecifikáciou kovariančnej funkcie.

---

<sup>1</sup>nulová pamäť znamená, že v každom časovom okamihu sa rozhodujeme úplne náhodne, bez ohľadu na to, ako sme sa do daného stavu dostali

Na záver sformulujeme a dokážeme základné vlastnosti fraktálneho Brownovho pohybu.

**Definícia 1.1** [16] *Gaussov proces*  $\{X_t\}_{t \in T}$ , kde  $T$  je indexová množina, je súbor reálnych náhodných premenných definovaných na rovnakom pravdepodobnostnom priestore takých, že pre každú podmnožinu  $F \subset T$  má náhodný vektor  $X_F := \{X_t\}_{t \in F}$  Gaussovo (normálne) rozdelenie. Ekvivalentne,  $\{X_t\}_{t \in T}$  je Gaussov proces, ak každá konečná lineárna kombinácia  $\sum_{t \in F} a_t X_t$ , kde  $a_t \in \mathbb{R}$ , je buď identicky rovná nule alebo má Gaussovo rozdelenie na  $\mathbb{R}$ .

Pri klasickom Gaussovom (normálnom) rozdelení vieme pomocou vektora stredných hodnôt a kovariančnej matice toto rozdelenie plne popísať. Podobne môžeme uvažovať aj o Gaussovom procese, ktorý je plne špecifikovaný strednohodnotovou a kovariančnou funkciou. Ak predpokladáme, že  $X(t)$  je Gaussov proces, tak strednohodnotovú funkciu môžeme formálne zapísať ako:

$$f(t) = E[X(t)]$$

a kovariančnú funkciu ako:

$$R(s, t) = \text{cov}\{X(s), X(t)\},$$

kde  $0 \leq s, t$ . Ak je strednohodnotová funkcia nulová, hovoríme o centrovanom Gaussovom procese [4], [16].

Ak špecifikujeme kovariančnú funkciu, dostávame nasledovné príklady Gaussových procesov s nulovou strednohodnotovou funkciou [16]:

- Wienerov proces  $\{W_t\}$ :  $R(s, t) = E(W_s, W_t) = \min(s, t)$ ;
- Ornstein-Uhlenbeckov proces  $\{Y_t\}$ :  $R(s, t) = E(Y_s, Y_t) = e^{-|t-s|}$ ;
- fraktálny Brownov pohyb  $\{B_t^H\}$ :

$$R(s, t) = E(B_s^H, B_t^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

**Definícia 1.2** [1] *Nech  $H$  je konštanta z intervalu  $(0, 1)$ . Fraktálny Brownov pohyb  $B_t^H$  pre všetky  $t \geq 0$  s Hurstovým indexom  $H$  je spojitý a centrovaný Gaussov proces s kovariančnou funkciou v tvare:*

$$R_H(t, s) = E[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (1)$$

Hurstov index v štatistike predstavuje mieru, ktorá rozčleňuje časové rady do troch kategórii. Pre  $H = \frac{1}{2}$  ide o náhodné procesy, ktorých prírastky nie sú korelované. Pre  $H \neq \frac{1}{2}$  ide takisto o náhodné procesy, avšak prírastky týchto procesov už vykazujú istú koreláciu, podľa ktorej rozoznávame dva typy procesov. Pre  $H < \frac{1}{2}$  ide o antiperzistentné procesy so záporne korelovanými prírastkami a pre  $H > \frac{1}{2}$  ide o perzistentné procesy s kladne korelovanými prírastkami. Väčšina ekonomických a finančných časových radov patrí do skupiny perzistentných procesov, t.j.  $H > \frac{1}{2}$  [23]. Z Definície 1.2 vyplývajú dôležité vlastnosti fraktálneho Brownovho pohybu, uvedené v nasledovnom tvrdení.

**Tvrdenie 1.1 Základné vlastnosti fraktálneho Brownovho pohybu [1]**

1.  $B_0^H = 0$  a  $E[B_t^H] = 0$  pre všetky  $t \geq 0$ .
2.  $B_t^H$  je Gaussov proces a  $E[(B_t^H)^2] = t^{2H}$ ,  $t \geq 0$  pre všetky  $H \in (0, 1)$ .
3.  $B_t^H$  má homogénne prírastky, t.j.  $B_{t+s}^H - B_s^H$  sa správa rovnako ako  $B_t^H$  pre  $s, t \geq 0$ .
4.  $B_t^H$  má spojité trajektórie.
5. Špeciálne pre  $H = \frac{1}{2}$  dostávame klasický Brownov pohyb.

**Dôkaz**

1. V tomto bode nejde o dôkaz v pravom slova zmysle, keďže uvedené vzťahy sú priamo definíciami. Totiž, skutočnosť, že  $B_0^H = 0$ , je len technický argument hovoriaci, že fraktálny Brownov pohyb vždy začína v počiatku súradnicového systému a vzťah  $E[B_t^H] = 0$  pre všetky  $t \geq 0$  nehovorí nič iné, než že strednohodnotová funkcia fraktálneho Brownovho pohybu je nulová. To však vyplýva priamo z Definície 1.2 - fraktálny Brownov pohyb je centrováný Gaussov proces, čo znamená, že má nulovú strednohodnotovú funkciu.
2. Ani v druhom bode Tvrdenia 1.1 niet čo dokazovať. Prvá časť tvrdenia je zrejmá - z Definície 1.2 priamo vyplýva, že fraktálny Brownov pohyb je centrováný Gaussov proces, čo je špecifická trieda Gaussovských procesov. Druhá časť tvrdenia hovorí, že variancia fraktálneho Brownovho pohybu je

mocninovou funkciou, t.j. platí, že  $E[(B_t^H)^2] = t^{2H}$ ,  $t \geq 0$  pre všetky  $H \in (0, 1)$ . Opäť len využijeme Definíciu 1.2, konkrétne vyčíslime kovariančnú funkciu (1) v bode  $t = s$ :

$$R_H(t, t) = E[B_t^H B_t^H] = E[(B_t^H)^2] = \frac{1}{2}(t^{2H} + t^{2H} - |t - t|^{2H}) = t^{2H}.$$

3. Potrebujeme ukázať, že proces má homogénne prírastky. To znamená, že sú rovnako rozdelené ako samotný proces a takisto majú rovnakú strednohodnotovú a kovariančnú funkciu. Vďaka tomu, že fraktálny Brownov pohyb je centrovany Gaussov proces vieme, že každá jeho zložka má normálne rozdelenie. Keď vezmeme dve konkrétne zložky,  $B_{t+s}^H$  a  $B_s^H$ , vytvoríme z nich dvojrozmerný vektor, o ktorom opäť na základe rovnakých úvah môžeme tvrdiť, že má dvojrozmerné normálne rozdelenie. Zaveďme nasledovné označenie:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{t+s}^H \\ B_s^H \end{pmatrix}, B_{t+s}^H \sim N(0, (t+s)^{2H}), B_s^H \sim N(0, s^{2H}).$$

Ak uvažujeme maticu  $B$ , ktorá má dvojrozmerné normálne rozdelenie, pričom stredná hodnota jednotlivých zložiek je  $\mu_1$ , resp.  $\mu_2$  a variancia  $\sigma_1^2$ , resp.  $\sigma_2^2$ , tak vieme vypočítať strednú hodnotu a varianciu súčiny  $a^T B$ , o ktorom vieme, že má tiež normálne rozdelenie. Výpočet prevedieme v dvoch krokoch. V prvom kroku počítajme strednú hodnotu súčiny  $a^T B$ :

$$E[a^T B] = E[B_{t+s} - B_s] = E[B_{t+s}] - E[B_s] = \mu_1 - \mu_2.$$

V druhom kroku počítajme varianciu súčiny  $a^T B$ :

$$\begin{aligned} \text{Var}[a^T B] &= \text{Var}[B_{t+s} - B_s] = E[(B_{t+s} - B_s)^2] - E^2[B_{t+s} - B_s] = \\ &= E[B_{t+s}^2 - 2B_{t+s}B_s + B_s^2] - E[B_{t+s} - B_s]E[B_{t+s} - B_s] = \\ &= E[B_{t+s}^2] - 2E[B_{t+s}B_s] + E[B_s^2] - E^2[B_{t+s} - B_s] = \\ &= \text{Var}[B_{t+s}] + E^2[B_{t+s}] - 2E[B_{t+s}B_s] + \text{Var}[B_s] + \\ &+ E^2[B_s] - E^2[B_{t+s}] + 2E[B_{t+s}]E[B_s] - E^2[B_s] = \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2(E[B_{t+s}]E[B_s] - E[B_{t+s}B_s]) = \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\text{cov}(B_{t+s}, B_s). \end{aligned}$$



Ukázali sme, že súčin  $a^T B$  má strednú hodnotu rovnú  $\mu_1 - \mu_2$  a varianciu rovnú  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2cov(B_{t+s}, B_s)$  a takisto sme uviedli argumenty vypovedajúce o normalite súčinu  $a^T B$ . Práve takto zadaný súčin predstavuje prírastky procesu  $B_t^H$  na intervale  $[s, t + s]$ . Teraz nám stačí jednoduchým výpočtom vyčísliť strednú hodnotu a varianciu daného súčinu:

$$\begin{aligned} E[a^T B] &= a^T E[B] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ Var[a^T B] &= a^T Var[B] a \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov(B_{t+s}^H, B_s^H) \\ cov(B_s^H, B_{t+s}^H) & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= t^{2H}, \end{aligned}$$

kde sme využili poznatky z bodu 2, že  $\sigma_1^2 = (t + s)^{2H}$ ,  $\sigma_2^2 = s^{2H}$  a tiež Definíciu 1.2. Dokázali sme, že prírastky  $B_{t+s}^H - B_s^H \sim N(0, t^{2H})$ .

4. Na dôkaz spojitosti trajektórií fraktálneho Brownovho pohybu potrebujeme dokázať nasledovnú Lemu 1.1

**Lema 1.1** [1] *Nech  $H \in (0, 1)$ . Pre fraktálny Brownov pohyb existuje verzia, ktorej trajektórie sú takmer isto Hölderovsky spojitú rádu ostro menšieho ako  $H$ .*

Pred samotným dôkazom ešte potrebujeme zdefinovať dva dôležité pojmy: Kolmogorovo kritérium a Hölderovskú spojitosť.

**Definícia 1.3** [1] *Proces  $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  má spojitú modifikáciu ak existujú konštanty  $\alpha \leq 1$ ,  $\beta > 0$  a  $k > 0$  také, že:*

$$E[|X(t) - X(s)|^\alpha] \geq k|t - s|^{1+\beta}$$

pre všetky  $s, t \in \mathbb{R}$ .

**Definícia 1.4** [1] *Funkcia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sa nazýva Hölderovsky spojitú rádu  $\alpha$ , ( $0 < \alpha \leq 1$ ), ak existuje konštantu  $M > 0$  taká, že:*

$$|f(t) - f(s)| \leq M|t - s|^\alpha$$

pre všetky  $s, t \in \mathbb{R}$ .

Ak uvažujeme ľubovoľné  $\alpha > 0$ , pre fraktálny Brownov pohyb  $B_t^H$  dostávame:

$$E[|B_t^H - B_s^H|^\alpha] = E[|B_1^H|^\alpha] |t - s|^{\alpha H}.$$

Podľa Definícií 1.3, 1.4 dostávame trajektórie fraktálneho Brownovho pohybu, ktoré sú takmer všade Hölderovsky spojité rádu ostro menšieho ako  $H$  [1]. Dokázali sme Lemu 1.1 a tým aj štvrtý bod Tvrdenia 1.1.

5. Pre parameter  $H = \frac{1}{2}$  musíme overiť, či ide naozaj o klasický Brownov pohyb. Stredná hodnota procesu sa nijak nezmení, je nulová. Varianciu vypočítame z Definície 1.2. Nech bez újmy na všeobecnosti pre časy  $t, s$  platí, že  $t < s$ . Potom dostávame:

$$E[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(t + s - |t - s|) = \frac{1}{2}(t + s + t - s) = t.$$

## 1.2 Existencia fraktálneho Brownovho pohybu

V tomto odseku kvôli matematickej korektnosti dokážeme existenciu fraktálneho Brownovho pohybu. Všetky ďalšie úvahy tak budú stáť na pevných základoch a budú mať zmysel.

Aby sme dokázali existenciu fraktálneho Brownovho pohybu zadaného v Definícii 1.2, je nutné overiť, či funkcia  $R_H(t, s)$  definovaná v (1) je naozaj kovariančnou funkciou. To znamená, že je nutné overiť, či je nezáporne definitná, t.j.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j R_H(t_i, t_j) \geq 0$$

pre ľubovoľnú postupnosť reálnych čísel  $a_i, i = 1, \dots, n$  a pre ľubovoľnú postupnosť  $t_i \geq 0$ . Nezáporná definitnosť vyplýva z integrálnej reprezentácie získanej Mandelbrotom a Van Nessom v práci [17], pričom v našom texte pracujeme s mierne modifikovanou verziou, ktorú navrhol Nualart v práci [21]:

$$B_t^H = \frac{1}{C_1(H)} \int_{\mathbb{R}} \{[(t-s)^+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-s)^+]^{H-\frac{1}{2}}\} dW_s, \quad (2)$$

kde  $W_s$  je klasický Brownov pohyb a

$$C_1(H) = \sqrt{\int_0^\infty [(1+s)^{H-\frac{1}{2}} - s^{H-\frac{1}{2}}]^2 ds} + \frac{1}{2H}.$$

V nasledujúcej časti sa pokúsime výpočtom v dvoch krokoch ukázať existenciu fraktálneho Brownovho pohybu podľa [21]. Ešte predtým však zoberme do úvahy podintegrálnu funkciu zo vzťahu (2), t.j. nech

$$f_t(s) = [(t-s)^+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-s)^+]^{H-\frac{1}{2}}, \quad s \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Zaujíma nás, či takto definovaná funkcia je kvadraticky integrovateľná. S využitím Poznámky 1.1 vieme, že musíme overiť, či platí vzťah  $\int_{\mathbb{R}} f_t(s)^2 ds < \infty$ .

Pre parameter  $H = \frac{1}{2}$  je situácia jednoduchá. Funkcia  $f_t(s)$  je pre tento parameter nulová, a tak je podmienka kvadratickej integrovateľnosti splnená (pretože integrál z ľubovoľnej nulovej funkcie je rovný nule, ktorá je vždy menšia ako nekonečno).

Pre parameter  $H \neq \frac{1}{2}$  Nualart vo svojej práci [21] uviedol, že spomínaná funkcia  $f_t(s)$  môže byť pre  $s \rightarrow \infty$  aproximovaná výrazom  $(-s)^{H-\frac{3}{2}}$ . Jednoduchým výpočtom sa dá overiť, že tento výraz je naozaj kvadraticky integrovateľný pre  $H \neq \frac{1}{2}$ :

$$\int_{\mathbb{R}} (-s)^{2H-3} ds = \frac{1}{2H-2} [(-s)^{2H-2}]_{-\infty}^{\infty} < \infty.$$

Ďalej pre  $t \geq 0$  definujme proces:

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} \{[(t-s)^+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-s)^+]^{H-\frac{1}{2}}\} dW_s,$$

kde  $W_s$  je klasický Brownov pohyb zabezpečujúci náhodnosť. Pomocou takto definovaného procesu môžeme vzťah (2) prepísať ako:

$$B_t^H = \frac{1}{C_1(H)} X_t.$$

Potrebuje ukázať, že proces definovaný vo vzťahu (2) je naozaj Gaussov proces s nulovou strednohodnotovou funkciou, t.j. platí, že variancia procesu je:

$$E[(B_t^H)^2] = t^{2H}$$

a variancia prírastkov procesu je:

$$E[(B_t^H - B_s^H)^2] = (t-s)^{2H}.$$

**Poznámka 1.1 [31]** *Nech  $X$  je náhodná premenná.  $X$  sa nazýva kvadraticky integrovateľná, ak platí, že:  $E[X^2] < \infty$  (t.j. ak  $X^2$  je integrovateľná).*

V samotnom výpočte si kvôli jednoduchosti vystačíme s počítaním variancie procesu, resp. variancie prírastkov procesu s  $X_t$ . Počítajme v prvom kroku:

$$E[X_t^2] = E \left[ \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left\{ [(t-s)^+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-s)^+]^{H-\frac{1}{2}} \right\} dW_s \right\}^2 \right] = \quad (3)$$

$$= E \left[ \int_{\mathbb{R}} \left\{ [(t-s)^+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-s)^+]^{H-\frac{1}{2}} \right\}^2 ds \right] = \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ [(t-s)^+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-s)^+]^{H-\frac{1}{2}} \right\}^2 ds = \\ &= t^{2H-1} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left[ \left(1 - \frac{s}{t}\right)^+ \right]^{H-\frac{1}{2}} - \left[ \left(-\frac{s}{t}\right)^+ \right]^{H-\frac{1}{2}} \right\}^2 ds = \left| \text{subst. } \frac{s}{t} = u \right| = \\ &= t^{2H} \int_{\mathbb{R}} \left\{ [(1-u)^+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-u)^+]^{H-\frac{1}{2}} \right\}^2 du = \quad (5) \end{aligned}$$

$$= t^{2H} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[ (1-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 du + \int_0^1 (1-u)^{2H-1} du \right\} = \quad (6)$$

$$= t^{2H} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[ (1-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 du + \frac{1}{2H} \right\} = \left| \text{subst. } -u = s \right|$$

$$= t^{2H} \left\{ \int_0^{\infty} \left[ (1+s)^{H-\frac{1}{2}} - s^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 ds + \frac{1}{2H} \right\} = t^{2H} C_1^2(H).$$

Keďže sme vzťah (2) upravili na tvar

$$B_t^H = \frac{1}{C_1(H)} X_t,$$

dokázali sme, že variancia takto definovaného procesu má správny tvar, t.j. platí

$$E[(B_t^H)^2] = \frac{1}{C_1(H)^2} E[(X_t)^2] = t^{2H}.$$

**Poznámka 1.2** *Pri prechode z kroku (3) do kroku (4) sme využili vzťah známy ako Itôva izometria, ktorý uvádzame vo Vete 1.1. Pri prechode z kroku (5) do kroku (6) sme využili definičnú vlastnosť funkcie  $x^+$  :*

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{ak } x > 0, \\ 0 & \text{ak } x \leq 0. \end{cases}$$

*Integrované funkcie, resp. jednotlivé sčítance sa podľa vyššie uvedenej vlastnosti správajú nasledovne:*

$$(1-u)^+ = \begin{cases} 1-u & \text{ak } u \in (-\infty, 1), \\ 0 & \text{ak } u \in [1, \infty), \end{cases}$$

$$(-u)^+ = \begin{cases} -u & \text{ak } u \in (-\infty, 0), \\ 0 & \text{ak } u \in [0, \infty). \end{cases}$$

V Tabuľke 1 je súhrn predpisov integrovaných funkcií na jednotlivých intervaloch. Z toho vidíme, že vzťah (5) vieme upraviť na vzťah (6). Interval  $(1, \infty)$  nás nezaujíma, pretože tam sú obe funkcie nulové. Pre úpravu je dôležitý už len interval  $[0, 1)$ , kde nenulová je len funkcia  $(1 - u)^+$ .

	$(-\infty, 0)$	$[0, 1)$	$[1, \infty)$
$(1 - u)^+$	$1 - u$	$1 - u$	0
$(-u)^+$	$-u$	0	0

Tabuľka 1: Predpisy funkcií na jednotlivých intervaloch

Za účelom uvedenia Itôvej izometrie vo Vete 1.1, ktorú sme využili pri prechode z kroku (3) do kroku (4), je potrebné zdefinovať pojmy z nasledovnej definície.

**Definícia 1.5 [18]** *Nech  $W_t(\omega)$  je Brownov pohyb na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Symbolom  $\Upsilon = \Upsilon(S, T)$ , kde  $S, T$  sú ľubovoľné časy, označme triedu funkcií  $f(t, \omega) : [S, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , takých, že:*

- funkcia  $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$  je  $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -merateľná, kde  $\mathcal{B}$  označuje borelovské množiny na  $[0, \infty)$
- stochastický proces  $f(t, \omega)$  je  $\mathcal{F}_t^W$ -adaptovaný
- $E \left[ \int_S^T f^2(t, \omega) dt \right] < \infty$ .

**Veta 1.1 [18] Itôva izometria** *Nech  $f(t, \omega) \in \Upsilon(S, T)$ . Potom platí:*

$$E \left[ \left( \int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) \right)^2 \right] = E \left( \int_S^T f^2(t, \omega) dt \right).$$

V druhom kroku potrebujeme dokázať, že platí  $E[(X_t - X_s)^2] = (t - s)^{2H}$ . Opäť kvôli jednoduchosti uvažujeme pritom nasledovné dva procesy:

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} \left\{ [(t - u)^+]^{H - \frac{1}{2}} - [(-u)^+]^{H - \frac{1}{2}} \right\} dW_u,$$

resp.

$$X_s = \int_{\mathbb{R}} \left\{ [(s-u)^+]^{H-\frac{1}{2}} - [(-u)^+]^{H-\frac{1}{2}} \right\} dW_u.$$

Potom rozdiel

$$X_t - X_s = \int_{\mathbb{R}} \left\{ [(t-u)^+]^{H-\frac{1}{2}} - [(s-u)^+]^{H-\frac{1}{2}} \right\} dW_s.$$

Rovnakým postupom ako v prvom prípade počítajme:

$$\begin{aligned} E[(X_t - X_s)^2] &= E \left[ \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left\{ [(t-u)^+]^{H-\frac{1}{2}} - [(s-u)^+]^{H-\frac{1}{2}} \right\} dW_u \right\}^2 \right] = \\ &= E \left[ \int_{\mathbb{R}} \left\{ [(t-u)^+]^{H-\frac{1}{2}} - [(s-u)^+]^{H-\frac{1}{2}} \right\}^2 du \right] = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ [(t-u)^+]^{H-\frac{1}{2}} - [(s-u)^+]^{H-\frac{1}{2}} \right\}^2 du = \\ &= (t-s)^{2H-1} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left[ \left( \frac{t-s+u}{t-s} - \frac{u}{t-s} \right)^+ \right]^{H-\frac{1}{2}} - \left[ \left( \frac{s}{t-s} - \frac{u}{t-s} \right)^+ \right]^{H-\frac{1}{2}} \right\}^2 du = \\ &= \left| \text{subst. } \frac{u}{t-s} = x \right| = \\ &= (t-s)^{2H-1} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{s}{t-s} - x \right)^+ \right]^{H-\frac{1}{2}} - \left[ \left( \frac{s}{t-s} - x \right)^+ \right]^{H-\frac{1}{2}} \right\}^2 dx = \\ &= \left| \text{subst. } x - \frac{s}{t-s} = y \right| = \\ &= (t-s)^{2H} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left[ (1-y)^+ \right]^{H-\frac{1}{2}} - [(-y)^+]^{H-\frac{1}{2}} \right\}^2 dy = \\ &= (t-s)^{2H} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[ (1-y)^{H-\frac{1}{2}} - (-y)^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 dy + \int_0^1 (1-y)^{2H-1} dy \right\} = \\ &= (t-s)^{2H} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[ (1-y)^{H-\frac{1}{2}} - (-y)^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 dy + \frac{1}{2H} \right\} = \\ &= \left| \text{subst. } -y = z \right| \\ &= (t-s)^{2H} \left\{ \int_0^{\infty} \left[ (1+z)^{H-\frac{1}{2}} - z^{H-\frac{1}{2}} \right]^2 dz + \frac{1}{2H} \right\} = \\ &= (t-s)^{2H} C_1^2(H) \end{aligned}$$

Opäť rovnakým spôsobom ako predtým upravujeme:

$$B_t^H - B_s^H = \frac{1}{C_1(H)} X_t - \frac{1}{C_1(H)} X_s.$$

Dokázali sme, že platí

$$E[(B_t^H - B_s^H)^2] = \frac{1}{C_1(H)^2} E[(X_t - X_s)^2] = (t - s)^{2H}.$$

Ukázali sme, že proces uvedený v Defínícii 1.2 je naozaj centrováný Gaussov proces s kovariančnou funkciou  $R_H(t, s)$ . Z uvedenej integrálnej reprezentácie vyplývajú podstatné vlastnosti kovariančnej funkcie pre samotnú existenciu fraktálneho Brownovho pohybu - je symetrická a nezáporne definitná [20].

**Poznámka 1.3** *Aj pri druhom kroku výpočtov, t.j. pri počítaní variancie prírastkov procesu, využívame obdobne ako v Poznámke 1.2 pri úpravách Itôvu izometriu a definičnú vlastnosť funkcie  $x^+$ .*

### 1.3 Charakteristiky fraktálneho Brownovho pohybu

V tejto kapitole bližšie popíšeme základné charakteristiky fraktálneho Brownovho pohybu, medzi ktoré patria dlhodobá závislosť, fraktálny Gaussov šum a samopodobnosť. Pre rôzne triedy Hurstovho indexu charakterizujeme prislúchajúce typy procesov a jednoduchým výpočtom ukážeme, ako ich získať. Takisto pre tieto triedy graficky znázorníme priebeh prírastkov, ktorý sa nazýva fraktálny Gaussov šum. Zdefinujeme samopodobnosť, ktorú pre lepšiu predstavu demonštrujeme na obrázkoch.

#### 1.3.1 Dlhodobá závislosť

Dlhodobá závislosť ako základná charakteristika fraktálneho Brownovho pohybu závisí od príslušnosti k triede Hurstovho indexu. V nasledujúcich riadkoch predstavíme rozličné typy dlhodobej závislosti podľa vzťahu k hodnote Hurstovho indexu.

Pre parameter  $H = \frac{1}{2}$  môžeme kovariančnú funkciu fraktálneho Brownovho pohybu (1) zapísať ako:

$$R_{\frac{1}{2}} = \min(s, t).$$

To znamená, že sme dostali predpis kovariančnej funkcie obyčajného Brownovho pohybu a ako sme uviedli vyššie, prírastky tohto procesu sú na disjunktných intervaloch nezávislé.

Pre parameter  $H \neq \frac{1}{2}$  už vlastnosť nezávislosti prírastkov strácame. Naopak, medzi prírastkami fraktálneho Brownovho pohybu pozorujeme koreláciu. Pozrime sa preto na koreláciu medzi dvomi prírastkami  $B_{t+h}^H - B_t^H$  a  $B_{s+h}^H - B_s^H$ , kde  $s, t$  sú časy, pre ktoré platí:  $s + h \leq t$  a  $t - s = nh$ , pričom  $n$  je počet dielikov o dĺžke  $h$ , t.j. uvažujeme navzájom disjunktné podintervaly intervalu  $[0, T]$ , ktorý je rozdelený ekvidištantne a  $T$  je ľubovoľná hodnota času. Nasledujúcim výpočtom demonštrujeme správanie sa prírastkov, ak sa rozdiely medzi dvomi po sebe idúcimi prírastkami blížia k nule. Budeme počítať koreláciu medzi dvomi prírastkami, ktorá sa vďaka ich nezávislosti redukuje na počítanie strednej hodnoty. Následne využijeme vzťah kovariančnej funkcie fraktálneho Brownovho pohybu definovaný v Definícii 1.2 a tiež vzťah medzi časmi a delením intervalu [20].

$$\begin{aligned}
\rho_H(n) &= \text{cov}[B_{t+h} - B_t, B_{s+h} - B_s] = \\
&= \text{cov}[B_{t+h}, B_{s+h}] - \text{cov}[B_t, B_{s+h}] - \text{cov}[B_{t+h}, B_s] + \text{cov}[B_t, B_s] \\
&= \frac{1}{2}[(t+h)^{2H} + (s+h)^{2H} - |t-s|^{2H}] - \\
&\quad - \frac{1}{2}[(s+h)^{2H} + t^{2H} - |t-s-h|^{2H}] - \\
&\quad - \frac{1}{2}[(t+h)^{2H} + s^{2H} - |t+h-s|^{2H}] + \\
&\quad + \frac{1}{2}[t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}] = \\
&= \frac{1}{2}[-2|nh|^{2H} + (h(n-1))^{2H} + (h(n+1))^{2H}] = \\
&= \frac{1}{2}h^{2H}[-2n^{2H} + (n-1)^{2H} + (n+1)^{2H}] \approx \\
&\approx h^{2H}H(2H-1)n^{2H-2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad [20].
\end{aligned}$$

Z predchádzajúcej úvahy vyplýva, že ak uvažujeme čoraz menšie časové úseky, korelácia medzi dvomi prírastkami ide do nuly. To znamená, že na dostatočne krátkom časovom úseku sa prírastky správajú nekorelované.

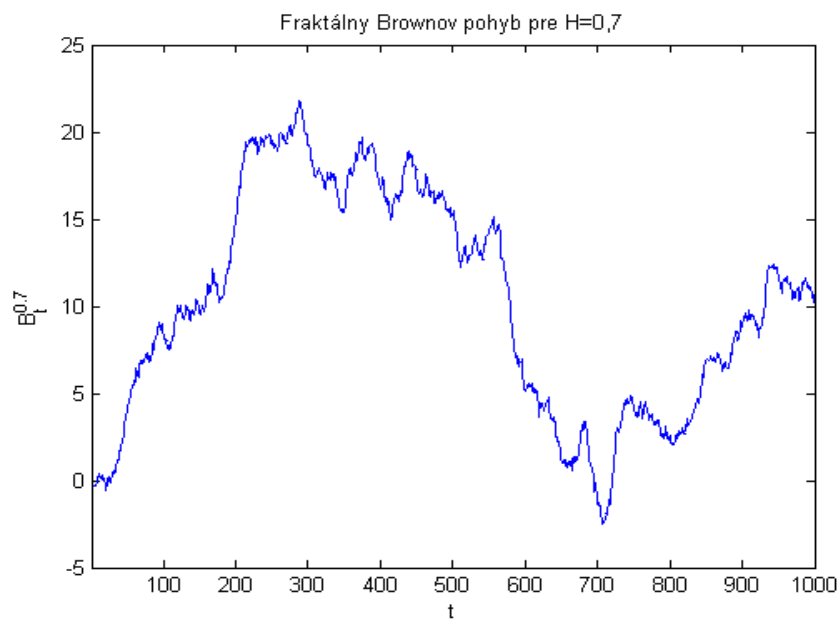
Situáciu pre Hurstov index  $H = \frac{1}{2}$  sme si už rozobrali. Vieme tiež, čo sa deje pri Hurstovom indexe, ktorý je rôzny od  $\frac{1}{2}$ . Bližšie špecifikujeme procesy prislúchajúce k triede Hurstovho indexu  $H > \frac{1}{2}$ , resp.  $H < \frac{1}{2}$ .

1.  $H > \frac{1}{2}, \rho_H(n) > 0$  [20]

Ide o proces s pozitívne korelovanými prírastkami, ktorý pre daný parameter  $H$  nazývame perzistentný [27]. Perzistentný proces má vlastnosť udržiavať



nastúpený vývoj procesu. To znamená, že smer vývoja nasledovnej hodnoty procesu je s väčšou pravdepodobnosťou rovnaký ako pri predošlej hodnote. Intenzita trendu narastá pre  $H$  blížiac sa k 1. Čiže ak sme v minulosti zaznamenali rastúci trend, tak aj v budúcnosti môžeme očakávať rastúci trend [23]. Ukážka perzistentého procesu je znázornená na Obrázku 1, ktorý vznikol použitím programu MatLab. Konkrétne sme použili v programe zabudovanú funkciu *wfbm*, ktorá slúži na generovanie fraktálneho Brownovho pohybu.



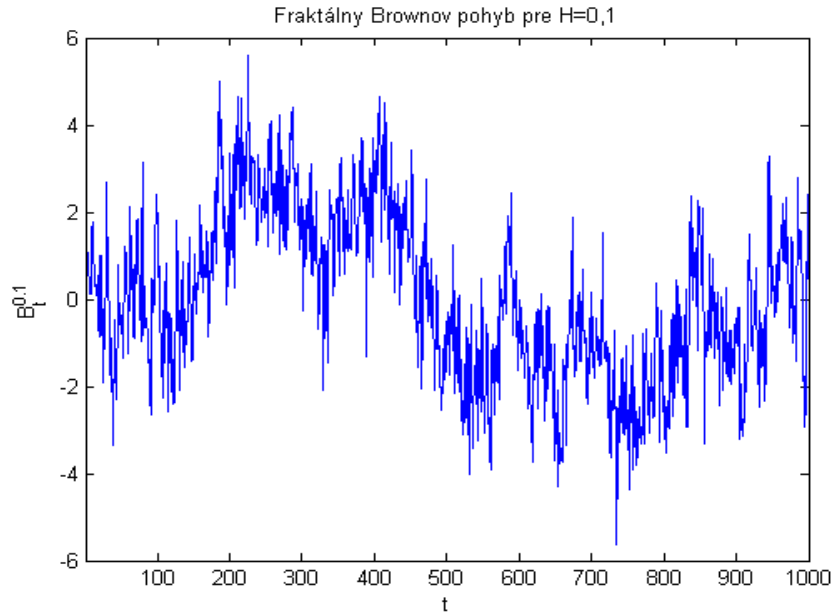
Obr. 1: Fraktálny Brownov pohyb s Hurstovým indexom  $H=0,7$ . Ide o perzistentný proces, resp. proces s pozitívne korelovanými prírastkami.

2.  $H < \frac{1}{2}, \rho_H(n) < 0$  [20]

Ide o proces s negatívne korelovanými prírastkami, ktorý pre daný parameter  $H$  nazývame antiperzistentný [27]. Antiperzistentné procesy sú tzv. mean-reverting procesy<sup>2</sup>. Graficky si túto charakteristiku môžeme predstaviť tak, že nárast hodnoty procesu je s väčšou pravdepodobnosťou nasledovaný poklesom hodnoty procesu a naopak. Intenzita “priťahovania“ narastá pre  $H$  blížiac sa k nule. Čiže ak sme zaznamenali v minulosti klesajúci trend, v budúcnosti môžeme očakávať trend rastúci [23]. Ukážka antiper-

<sup>2</sup>vlastnosť mean-reverting predstavuje priťahovanie k dlhodobej, limitnej hodnote [28]

zistentného procesu je znázornená na Obrázku 2, ktorý sme rovnako ako pri perzistentnom procese získali použitím funkcie *wfbm* v programe MatLab.



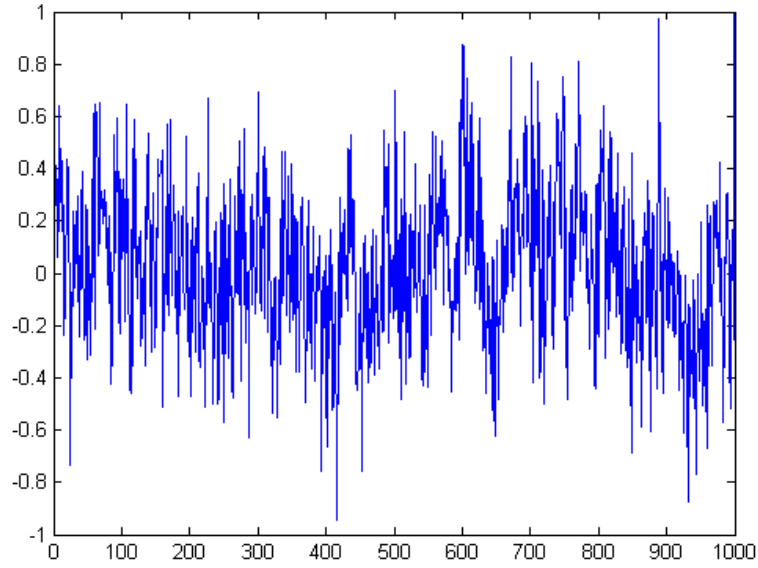
Obr. 2: Fraktálny Brownov pohyb s Hurstovým indexom  $H=0,1$ . Ide o antiperzistentný proces, resp. proces s negatívne korelovanými prírastkami.

Z predchádzajúceho odvodenia vidíme, že korelácia prírastkov vôbec nezávisí od času  $t$ , ale hlavne od Hurstovho indexu  $H$ . Kvôli perzistentnosti a antiperzistentnosti, ktoré súhrnne nazývame dlhodobá závislosť, sa nedá fraktálny Brownov pohyb rozdeliť na zložku obsahujúcu periodický trend a zložku obsahujúcu normálny náhodný šum podobne ako to bolo možné pri klasickom Brownovom pohybe. Dôsledkom toho je, že fraktálny Brownov pohyb je výpočtovo náročnejší pri simulovaní [20], [27].

### 1.3.2 Fraktálny Gaussov šum

Aj fraktálny Gaussov šum patrí medzi tie základné charakteristiky fraktálneho Brownovho pohybu, ktoré závisia od príslušnosti k triede Hurstovho indexu.

**Definícia 1.6** [8] *Nech  $B_t^H$  je fraktálny Brownov pohyb. Označme proces prírastkov fraktálneho Brownovho pohybu  $B_t^H$  ako  $X = \{X_t : t = 0, 1, \dots\}$ , pričom  $X_t = B_{t+1}^H - B_t^H$ . Takto definovaný proces nazývame fraktálny Gaussov šum.*



Obr. 3: Fraktálny Gaussov šum pre perzistentný proces s Hurstovým indexom  $H=0,7$ . Pozorovať môžeme periódy, v ktorých proces rastie a v ktorých klesá.

Využívajúc spolu s Definíciou 1.6 vlastnosti z Tvrdenia 1.1, môžeme tvrdiť, že každé  $X_t$  má normálne rozdelenie, keďže je vytvorené ako lineárna kombinácia fraktálneho Brownovho pohybu, ktorý je Gaussovým procesom [8]. Na Obrázkoch 3, 4 vidíme príklady fraktálneho Gaussovho šumu pre rovnaké parametre  $H$  ako na Obrázkoch 1, 2. Na Obrázku 3 sú pozorovateľné periódy, v ktorých proces rastie a v ktorých klesá. Na Obrázku 4 pozorujeme negatívnu koreláciu prírastkov, ktorá spôsobuje vyššiu variabilitu.

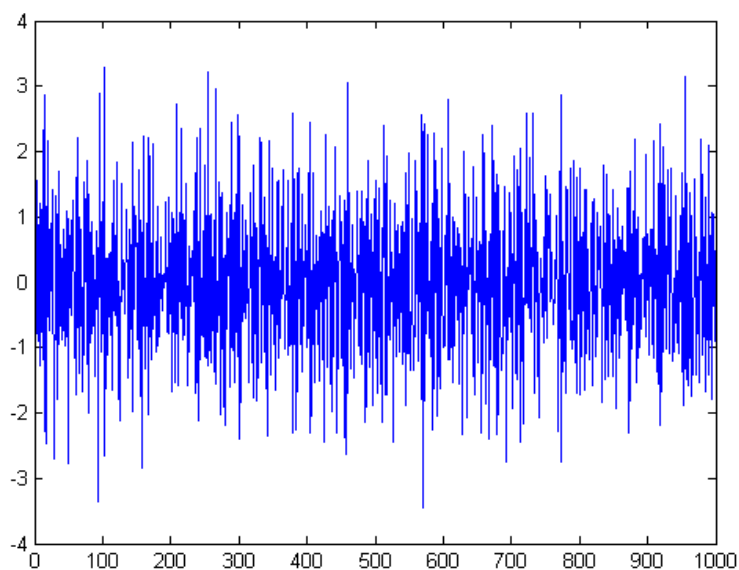
### 1.3.3 Samopodobnosť

**Definícia 1.7** [5] *Nech  $T = \{t; t \geq 0\}$ . Proces s reálnymi hodnotami  $\{X_t, t \in T\}$  sa nazýva samopodobný s indexom  $H > 0$ , ak pre každé  $a > 0$  je konečnorozmerné rozdelenie procesu  $\{X_{at}, t \in T\}$  identické s konečnorozmerným rozdelením procesu  $\{a^H X_t, t \in T\}$ . To znamená, že ak  $k \geq 1$ ,  $t_1, \dots, t_k \in T$  a ľubovoľné  $a > 0$ , platí:*

$$(X_{at_1}, \dots, X_{at_k}) \stackrel{d}{=} (a^H X_{t_1}, \dots, a^H X_{t_k}). \quad (7)$$

**Poznámka 1.4** [5] *Vzťah (7) definovaný v Definícii 1.7 môžeme vyjadriť ako:*

$$\{X_{at}, t \in T\} \stackrel{d}{=} \{a^H X_t, t \in T\}.$$

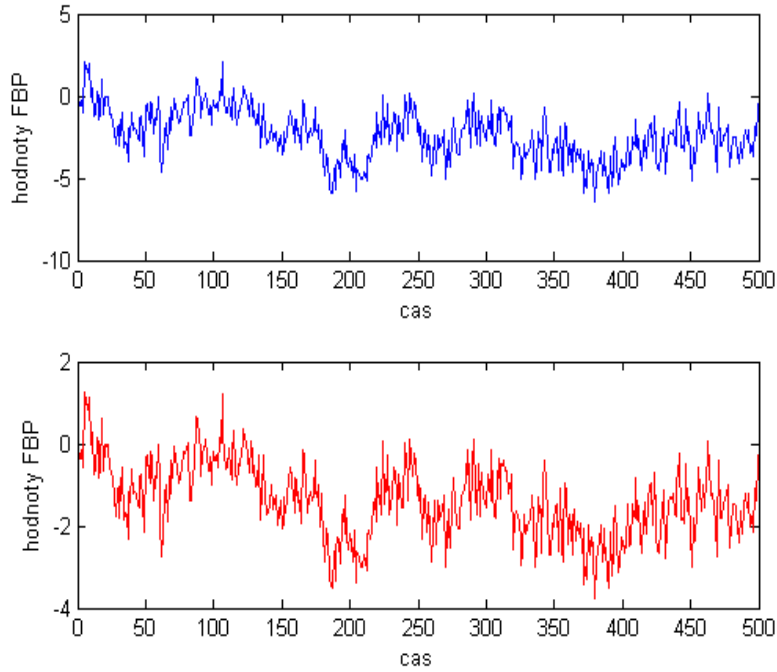


Obr. 4: Fraktálny Gaussov šum pre antiperzistentný proces s Hurstovým indexom  $H=0,1$ . Pozorovať môžeme negatívnu koreláciu prírastkov spôsobujúcu vyššiu variabilitu.

Pre fixné  $t \in T$  vzťah  $X_{at} \stackrel{d}{=} a^H X_t$  znamená, že náhodné premenné  $X_{at}$  a  $a^H X_t$  majú identické rozdelenia.

Kvôli lepšej názornosti sme v zmysle Definície 1.7 vykonali simulácie fraktálneho Brownovho pohybu. Podobne ako pri predošlých grafických ukázkach (priebeh fraktálneho Brownovho pohybu, fraktálny Gaussov šum) sme uvažovali Hurstov index 0,1 a 0,7. Časový interval sme zvolili  $[0, 500]$ . Na Obrázku 5 sú znázornené samopodobné procesy pre Hurstov index  $H = 0,1$ . Modrou farbou je znázornený vždy pôvodný fraktálny Brownov pohyb a červenou proces s rovnakou distribúciou, samopodobný proces. Na Obrázku 6 platia rovnaké pravidlá ako pri predošlom, akurát uvažujeme Hurstov index  $H = 0,7$ .

Na Obrázkoch 5, 6 môžeme pozorovať, že priebeh procesov má podobný charakter. Dostali sme rovnako sa správajúce procesy, o čom vypovedajú aj rovnaké štatistiky (stredná hodnota a variancia).



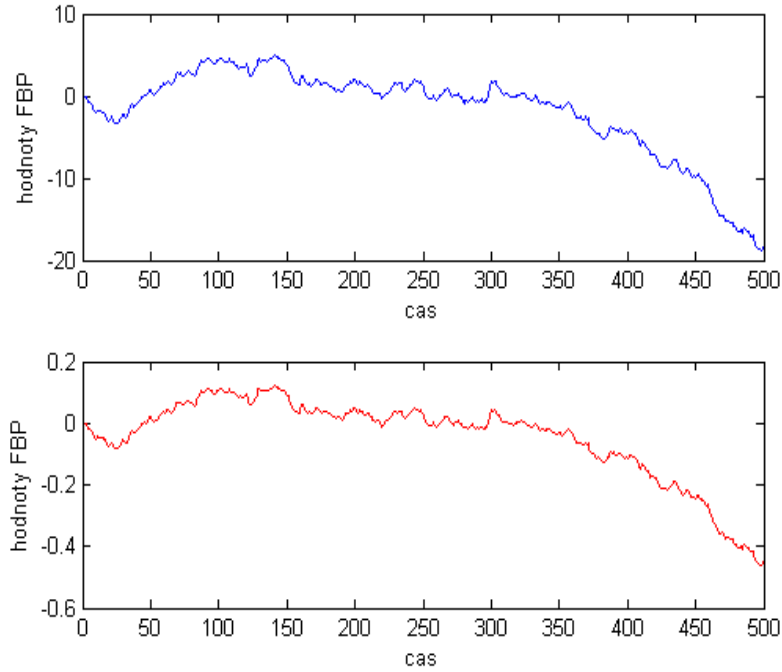
Obr. 5: Simulácie priebehu procesu  $B_{200t}^H$  (hore) a procesu  $200^H B_t^H$  (dole) pre  $H = 0,1$  a  $t \in [0, 500]$ .

#### 1.4 Fraktálny Brownov pohyb pre $H \neq \frac{1}{2}$ nie je semimartingal

V tejto podkapitole sa budeme venovať dôležitej charakteristike fraktálneho Brownovho pohybu. Uvedieme definície potrebné na porozumenie pojmu semimartingal. Tiež spravíme numerické výpočty variácie, ktoré potvrdia, že fraktálny Brownov pohyb pre  $H \neq \frac{1}{2}$  nemôže byť semimartingal.

**Definícia 1.8** [18] *Stochastický proces  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , kde  $\Omega$  je daná množina,  $\mathcal{F}$  je  $\sigma$ -algebra merateľných množín na  $\Omega$  a  $\mathbb{P}$  je pravdepodobnostná miera na  $\Omega$ , sa nazýva martingal vzhľadom k filtrácii  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  v miere  $\mathbb{P}$  ak:*

1. náhodná premenná  $X_t$  je  $M_t$ -merateľná pre  $\forall t \geq 0$ ,
2.  $E[|X_t|] < \infty \quad \forall t \geq 0$ ,
3.  $E[X_s | M_t] = X_t \quad \forall s \geq t$ .



Obr. 6: Simulácie priebehu procesu  $B_{200t}^H$  (hore) a procesu  $200^H B_t^H$  (dole) pre  $H = 0,7$  a  $t \in [0, 500]$ .

**Definícia 1.9** [26] *Zobrazenie  $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  sa nazýva  $\{\mathcal{F}_t\}$ –Markovovský čas, ak:*

$$\{T \leq t\} := \{\omega : T(\omega) \leq t\} \in \{\mathcal{F}_t\}$$

pre každé  $t \leq \infty$ .

**Definícia 1.10** [24] *Lokálny martingal vzhľadom k filtrácii  $\{\mathcal{F}_t\}$  je  $\{\mathcal{F}_t\}$ –adaptovaný stochastický proces  $X_t$ , pre ktorý existuje rastúca postupnosť  $\{\mathcal{F}_t\}$ –Markovovských časov  $\tau_t$  takých, že:*

1.  $\tau_k \rightarrow \infty$  takmer isto ak  $k \rightarrow \infty$
2.  $X_{t \wedge \tau_k}$  je  $\{\mathcal{F}_t\}$ –martingal pre všetky  $k$ .

**Definícia 1.11** [2] *Nech  $D = D[0, 1]$  je priestor reálnych funkcií  $x$  na  $[0, 1]$ , ktoré sú sprava spojité a majú limitu zľava. Funkciu nazývame càdlàg funkcia, ak:*

1. pre  $0 \leq t < 1 : x(t+) = \lim_{s \rightarrow t+} x(s)$  existuje a  $x(t+) = x(t)$
2. pre  $0 < t \leq 1 : x(t-) = \lim_{s \rightarrow t-} x(s)$  existuje.

**Definícia 1.12 [15]** *Semimartingal vzľadom k filtrácii  $\{\mathcal{F}_t\}$  je stochastický proces  $X : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , ktorý môže byť rozložený na:*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

kde  $M$  je lokálny martingal a  $A$  je càdlàg adaptovaný proces s ohraničenou variáciou.

**Definícia 1.13 [21]** *Nech  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  je stochastický proces so spojitými trajektóriami. Nech  $p > 0$  je pevne dané. Potom  $p$ -variáciu procesu  $X$  na intervale  $[0, T]$  definujeme ako nasledovnú limitu:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \left| X_{\frac{jT}{n}} - X_{\frac{(j-1)T}{n}} \right|^p.$$

**Poznámka 1.5 [21]** *Ak  $p$ -variácia existuje a je nenulová, tak pre ľubovoľné  $q > p$  je  $q$ -variácia nulová a pre ľubovoľné  $q < p$  je nekonečná.*

Napríklad kvadratická variácia (2-variácia) klasického Brownovho pohybu je rovná dĺžke intervalu  $T$ . Rogers vo svojej práci [25] dokázal, že fraktálny Brownov pohyb  $B_t^H$  má konečnú  $\frac{1}{H}$ -variáciu, ktorá sa rovná  $c_p T$ , kde  $c_p = \mathbb{E}(|B_1^H|^p)$ .

Podľa Definície 1.13 spočítame pre fraktálny Brownov pohyb  $\frac{1}{H}$ -variáciu pre rôzne voľby parametra  $n$  blížiaceho sa k nekonečnu s cieľom overiť, či je variácia naozaj konečná a rovnajúca sa  $c_p T$ , kde  $c_p = \mathbb{E}(|B_1^H|^p)$ . Zvoľme pevný časový interval  $[0, 100]$  a postupne Hurstove indexy 0,7, 0,2 a 0,5. Výsledky uvádzame v Tabuľkách 2-4 s rovnakou štruktúrou - v prvom stĺpci je parameter  $n$  blížiaci sa k nekonečnu, v druhom stĺpci je  $\frac{1}{H}$ -variácia pre konkrétnu voľbu  $H$ . Zvyšné stĺpce slúžia na overenie tvrdení z Poznámky 1.5.

V Tabuľke 2 sú výsledky pre  $H = 0,7$ . Vidíme, že  $\frac{1}{H}$ -variácia konverguje ku konečnému číslu. Skutočná hodnota, ktorej by sa mala rovnať je  $c_p T = 13,31$ . Kvadratická variácia konverguje k nule, čo je pre  $H > \frac{1}{2}$  správny výsledok vzhľadom k Poznámke 1.5. Ďalej sme si zvolili postupne  $q = 0,1$  a  $q = 3$ . Pre  $q < \frac{1}{H}$  (štvrtý stĺpec) dostávame nekonečnú variáciu a pre  $q > \frac{1}{H}$  (piaty stĺpec) dostávame nulovú variáciu, čím sme potvrdili tvrdenia z Poznámky 1.5.

n	$\frac{1}{H}$ -variácia	kvadratická	$q < \frac{1}{H}$	$q > \frac{1}{H}$
100	6,17	2,63	77,34	0,69
1000	10,80	2,24	693,92	0,17
10000	12,93	1,14	6001,01	0,02
100000	13,13	0,46	51097,18	0,00
1000000	13,20	0,19	435021,62	0,00
2000000	13,24	0,14	828972,31	0,00

Tabuľka 2: Variácie pre  $H = 0,7$ .

n	$\frac{1}{H}$ -variácia	kvadratická	$q < \frac{1}{H}$	$q > \frac{1}{H}$
100	6630,95	176,79	450,78	154241,13
1000	507,34	347,33	332,43	1235,45
10000	492,44	1417,95	854,08	432,44
100000	449,87	5471,41	2047,02	146,85
1000000	356,15	19880,02	4473,29	42,64
2000000	316,02	28724,41	5494,20	27,30

Tabuľka 3: Variácie pre  $H = 0,2$ .

V Tabuľke 3 sú výsledky pre  $H = 0,2$ . Opäť môžeme sledovať konvergenciu  $\frac{1}{H}$ -variácie ku konečnému číslu,  $c_p T = 311,10$ . Keďže teraz máme  $H < \frac{1}{2}$ , kvadratická variácia je nekonečná, ako sa uvádza aj v Poznámke 1.5. Pre  $q = 3$  a  $q = 7$  dostávame kvalitatívne rovnaké závery ako pre parameter  $H = 0,7$ .

V Tabuľke 4 sme zaznamenali výsledky pre  $H = 0,5$ , teda ide o klasický Brownov pohyb. Druhý a tretí stĺpec sa v tomto prípade zhodujú. Kvadratická variácia pre Brownov pohyb sa rovná dĺžke intervalu, v našom prípade 100, čo je v súlade s výsledkami v druhom, resp. v treťom stĺpci. Pre overenie Poznámky 1.5 sme zvolili  $q = 0,1$  a  $q = 3$ , pričom sme opäť dostali rovnaké závery ako pre predošlé prípady.



n	$\frac{1}{H}$ -variácia	kvadratická	$q < \frac{1}{H}$	$q > \frac{1}{H}$
100	105,55	105,55	89,21	172,32
1000	99,97	99,97	714,37	50,70
10000	97,88	97,88	5669,19	15,39
100000	100,44	100,44	45124,19	5,08
1000000	99,94	99,94	358528,78	1,59
2000000	99,92	99,92	668956,93	1,13

Tabuľka 4: Variácie pre  $H = 0,5$ .

**Poznámka 1.6** [21], [25] *Dôsledkom vyššie uvedených úvah je, že fraktálny Brownov pohyb s Hurstovým indexom  $H \neq \frac{1}{2}$  nie je semimartingal, pretože ak  $H < \frac{1}{2}$ , tak kvadratická variácia je nekonečná a ak  $H > \frac{1}{2}$ , tak kvadratická variácia je nulová a 1-variácia je nekonečná, takže uvedený rozklad z Definície 1.12 nie je možný. Keďže nie je semimartingal, nemôže existovať ekvivalentná martingalová miera. Vo všeobecnosti to znamená, že v takomto prípade musí nastať arbitráž. Príklady arbitráže uvidíme v Kapitole 1.6.*

## 1.5 Fraktálna Itôva lema

V tejto časti uvidíme vzťah známy ako Itôva lema pre fraktálny Brownov pohyb alebo zjednodušene povedané fraktálna Itôva lema. Odvodenie je podobné ako pri klasickej Itôvej leme, ktoré môžeme nájsť v Melicherčíkovej učebnici [18]. Do tohto textu samotné odvodenie nezahrnieme, čitateľ ho však môže nájsť napríklad v práci Shiryaeva [29].

Pre nás z hľadiska výpočtov bude dôležitejší výsledok - modifikovaná verzia známeho vzťahu, ktorá platí pre Hurstov index z intervalu  $(\frac{1}{2}, 1)$  :

$$dF(t, B_t^H) = \partial_1 F(t, B_t^H)dt + \partial_2 F(t, B_t^H)dB_t^H \quad (8)$$

Ďalej uvidíme všeobecné znenie fraktálnej Itôvej lemy vychádzajúce z tzv. Wickovho integrálu. Koncept Wickovho integrálu svojou náročnosťou presahuje rámec tohto textu, preto čitateľa zaujímajúceho sa o matematické detaily odkážeme

napríklad na práce [1], [22]. Poukážeme tiež na podobnosť s klasickou Itôvou lemmou.

Pre dve triedy Hurstovho indexu v nasledujúcich riadkoch uvedieme všeobecné znenie fraktálnej Itôvej lemy. Ešte pred samotným všeobecným znením fraktálnej Itôvej lemy pripomenieme Itôvu lemu pre klasický Brownov pohyb.

**Lema 1.2 [18] Itôva lema.** *Nech  $X_t(\omega)$  je Itôv proces*

$$dX_t(\omega) = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dW_t(\omega).$$

*Nech  $g(t, x) \in C^2([0, \infty] \times \mathbb{R})$ . Potom*

$$Y_t(\omega) = g(t, X_t(\omega))$$

*je tiež Itôv proces a platí:*

$$dY_t = \left[ \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)v^2 \right] dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t. \quad (9)$$

Pokračujúc v plánovanom, v prvom kroku uvedieme fraktálnu Itôvu lemu pre  $H > \frac{1}{2}$ . Majme stochastický proces  $X_t$ , ktorý môžeme v integrálnom tvare rozpisáť nasledovne:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s^H,$$

resp. zapísané v diferenciálnom tvare:

$$dX_t = u_t dt + v_t dB_t^H.$$

Uvažujme ďalej dostatočne hladkú funkciu  $f$ . Potom platí:

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)u_s ds + \int_0^t [f'(X_s)v_s] \diamond dB_s^H + \\ &+ H(2H-1) \int_0^t f''(X_s)v_s \left[ \int_0^s v_r(s-r)^{2H-2} dr \right] ds, \end{aligned} \quad (10)$$

kde symbol  $\diamond$  predstavuje Wickov súčin [10]. Vzťah (10) nazývame fraktálna Itôva lema pre Hurstov index  $H > \frac{1}{2}$ .

Pre konštantnú volatilitu, t.j.  $v(s) = v$ , môžeme vzťah (10) prepísať v diferenciálnom tvare:

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t)u_t dt + f'(X_t)v dB_t^H + \\ &+ H(2H-1)v^2 f''(X_t) \int_0^t (t-r)^{2H-2} dr dt = \\ &= [f'(X_t)u_t + Hv^2 t^{2H-1} f''(X_t)] dt + [f'(X_t)v] dB_t^H. \end{aligned} \quad (11)$$

Ak do vzťahu (11) dosadíme parameter  $H = \frac{1}{2}$  vidíme, že má podobnú štruktúru ako klasická Itōva lema zadefinovaná v Leme 1.2:

$$df(X_t) = \left[ f'(X_t)u_t + \frac{1}{2}v^2 f''(X_t) \right] dt + [f'(X_t)v] dB_t^{\frac{1}{2}}.$$

Vidíme, že členy stojace pri  $dt$  vo vzťahu (11) pre  $H = \frac{1}{2}$  sú totožné s členmi stojacimi pri  $dt$  v Itōvej leme.

V druhom kroku obdobne uvedieme fraktálnu Itōvu lemu, tentokrát pre parameter  $H < \frac{1}{2}$ . Majme opäť stochastický proces  $X_t$ , daný:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s^H,$$

resp. zapísané v diferenciálnom tvare:

$$dX_t = u_t dt + v_t dB_t^H$$

a dostatočne hladkú funkciu  $f$ . Potom platí:

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)u_s ds + \int_0^t [f'(X_s)v_s] \diamond dB_s^H + \\ &+ H v_0 \int_0^t f''(X_s)v_s s^{2H-1} ds + \\ &+ H \int_0^t f''(X_s)v_s \left[ \int_0^s v_r'(s-r)^{2H-1} dr \right] ds, \end{aligned} \quad (12)$$

kde symbol  $\diamond$  predstavuje Wickov súčin [10]. Vzťah (12) nazývame fraktálna Itōva lema pre Hurstov index  $H < \frac{1}{2}$ .

Uvažujme opäť kvôli jednoduchosti konštantnú volatilitu, t.j.  $v(s) = v$ . Pre tento prípad platí  $v'(s) = 0$ . Berúc do úvahy uvedenú skutočnosť, prepíšme vzťah (12) v diferenciálnom tvare:

$$df(X_t) = [f'(X_t)u_t + H v^2 t^{2H-1} f''(X_t)] dt + [f'(X_t)v] dB_t^H.$$

Vidíme, že posledný člen zo vzťahu (12) vďaka nulovej derivácii volatility vypadol a dostali sme rovnakú formulu ako pre  $H > \frac{1}{2}$ .

## 1.6 Príklady arbitráže

V nasledujúcej časti si na jednoduchom, motivačnom príklade objasníme dôležitý finančný pojem arbitráž. Na konkrétnom príklade ukážeme, že pri fraktálnom Brownovom pohybe arbitráž skutočne existuje.

Avšak, ako sa uvádza v práci [11], arbitráž pri fraktálnom Brownovom pohybe nemusí vždy existovať. Jej prítomnosť v modeli je ovplyvnená výberom integrálu, na ktorom je postavený stochastický kalkulus pre fraktálny Brownov pohyb. Pri voľbe tzv. pathwise integrálu arbitráž existuje, ako demonštrujeme na konkrétnom príklade. Ak však zvolíme tzv. Wickov (Wick-Itô-Skorochodov) integrál, arbitráž v modeli prítomná nebude, no stráca sa jednoduchá ekonomická interpretovateľnosť [1], [11].

### 1.6.1 Motivačný príklad

Prvý príklad arbitráže môžeme pokojne nazvať motivačným. Trochu netradične na tomto mieste totiž pod príkladom rozumieme vtip, avšak dobre vystihujúci samotnú podstatu arbitráže.

Na prechádzke je normálny, obyčajný človek a spolu s ním profesor financií. Ako tak kráčajú, zazrie normálny človek na zemi ležať 100 eurovú bankovku. Chystajúc sa ju zodvihnúť, zastaví normálneho človeka profesor financií slovami: "Nerobte to! Je absolútne vylúčené, aby 100 eurová bankovka ležala na zemi len tak bez povšimnutia. Ak by tak naozaj bolo, našiel by sa niekto, kto by ju zodvihol."

Z finančného hľadiska to znamená, že neexistuje príležitosť, ako z nulového počiatočného vkladu zarobiť (nájsť voľne ležiacu bankovku) [7].

### 1.6.2 Reálny príklad

Druhý príklad už vychádza z matematického modelovania finančných trhov [6]. Budeme uvažovať trh pozostávajúci z dvoch aktív. Prvým bude peňažný dlhopis a druhým akcia nevyplácajúca dividendy. Zaujímať nás budú ekonomické aktivity na časovom intervale  $[0, T]$  pre nejaké  $T \in (0, \infty)$ . Požičiavanie si ľubovoľného množstva peňazí ako aj predaj nakrátko (short-selling) sú povolené. Úroková miera je rovnaká pri požičiavaní aj pri požičiavaní si. Akcie môžeme vlastniť nielen celé kusy, ale pri obchodovaní s nimi (nákup, predaj) umožňujeme vlastniť aj zlomky kusov. Nezahrnieme transakčné náklady a akcie sa budú dať kupovať a predávať za rovnakú cenu.

Predpokladajme existenciu dvoch stochastických procesov na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Prvý,  $\{X_t\}_{t \in (0, T)}$ , reprezentuje pohyb peňazí na peňažnom dlhopise. Druhý,  $\{Y_t\}_{t \in (0, T)}$ , predstavuje vývoj ceny akcie. Fraktálny Black-Scholesov model môžeme potom zapísať takto:

$$X_t = e^{rt}, \quad t \in [0, T] \quad (13)$$

$$Y_t = Y_0 e^{(r+\nu)t + \sigma B_t^H}, \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

kde  $Y_0, \sigma$  sú kladné a  $r, \nu$  reálne konštanty. Využijúc modifikovanú fraktálnu Itôvu lemu (8), môžeme vzťahy 13 a 14 prepísať [6]:

$$dX_t = r e^{rt} dt = r X_t dt, \quad (15)$$

resp.

$$\begin{aligned} dY_t &= (r + \nu) Y_0 e^{(r+\nu)t + \sigma B_t^H} dt + \sigma Y_0 e^{(r+\nu)t + \sigma B_t^H} dB_t^H \\ &= Y_t ((r + \nu) dt + \sigma dB_t^H). \end{aligned} \quad (16)$$

Shiryaev vo svojej práci [29] ukázal, že pre  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$  existuje vo fraktálnom Black-Scholesovom modeli arbitráž.

Uvažujme nasledovné portfólio:

$$V_t^\vartheta = \vartheta_t^0 X_t + \vartheta_t^1 Y_t, \quad t \in (0, T) \quad (17)$$

a pre  $c > 0$  zvolíme konkrétne stratégie:

$$\vartheta_t^0 = c Y_0 (1 - e^{2\nu t + 2\sigma B_t^H})$$

$$\vartheta_t^1 = 2c (e^{\nu t + \sigma B_t^H} - 1).$$

Po dosadení stratégií do vzťahu (17) dostávame:

$$\begin{aligned} V_t^\vartheta &= c Y_0 e^{rt} (1 - e^{2\nu t + 2\sigma B_t^H}) + \\ &+ 2c Y_0 e^{(r+\nu)t + \sigma B_t^H} (e^{\nu t + \sigma B_t^H} - 1) = \\ &= c Y_0 e^{rt} (e^{\nu t + \sigma B_t^H} - 1)^2 = \\ &= c Y_0 e^{rt} f(B_t^H). \end{aligned} \quad (18)$$

Využijúc modifikovanú fraktálnu Itōvu lemu (8), dostávame:

$$\begin{aligned}
dV_t^\vartheta &= cY_0 e^{rt} [(r + 2\nu)e^{2\nu t + 2\sigma B_t^H} - 2(r + \nu)e^{\nu t + \sigma B_t^H} + r] dt + \\
&+ 2\sigma cY_0 e^{(r+\nu)t + \sigma B_t^H} (e^{\nu t + \sigma B_t^H} - 1) dB_t^H = \\
&= \vartheta_t^0 dX_t + \vartheta_t^1 dY_t.
\end{aligned} \tag{19}$$

Zo vzťahu (19) vyplýva, že portfólio zložené zo stratégií  $\vartheta_t^0, \vartheta_t^1$  je samofinancovateľné (viď Poznámka 1.7). Pri týchto stratégiách platí, že v čase  $t = 0$  máme  $V_0^\vartheta = 0$  a pre ľubovoľný iný čas  $t > 0$  platí  $V_t^\vartheta > 0$ . Z uvedených skutočností vyplýva, že v našom modeli existuje arbitráž [6], [29].

**Poznámka 1.7** [18] *Majme model*

$$V_t = \varphi_t S_t + \psi_t B_t,$$

kde  $V_t$  je ľubovoľná  $\mathcal{F}_t$ -merateľná náhodná premenná (napríklad opcia),  $B_t$  je peňažný dlhopis,  $S_t$  je stochastický proces reprezentujúci vývoj ceny akcie,  $\varphi_t$  počet akcií a  $\psi_t$  počet peňažných dlhopisov. Pod pojmom samofinancovateľnosť rozumieme vzťah

$$dV_t = \varphi_t dS_t + \psi_t dB_t,$$

ktorý hovorí o tom, že v čase  $t = 0$  začneme s nejakou hodnotou  $V_0$  a v ďalšom priebehu len upravujeme pomer dlhopisov a akcií bez akéhokoľvek ďalšieho vkladania, resp. odoberania prostriedkov.

## 2 Spôsohy odhadovania Hurstovho indexu

Ako sme už uviedli v predošlých častiach práce, Hurstov index slúži mimo iného na kategorizáciu časových radov. Vieme, že nadobúda hodnoty z otvoreného intervalu  $(0, 1)$ , pričom kľúčová je najmä hodnota  $H = \frac{1}{2}$ . Pri tejto hodnote hovoríme o klasickom Brownovom pohybe. Pre dva vzniknuté podintervaly z definičného oboru Hurstovho indexu,  $(0, \frac{1}{2})$ , resp.  $(\frac{1}{2}, 1)$ , dostávame diametrálne odlišne sa správajúce typy časových radov, resp. procesov. Vykazujú rozličné štatistické charakteristiky, ktoré sme popísali v predošlej kapitole.

Samozrejme, hodnota Hurstovho indexu nie je známa pri prvom pohľade na časový rad. Je preto nutné tento parameter z dát odhadovať. Existujú mnohé štatistické metódy vyvinuté obzvlášť na odhadovanie Hurstovho indexu. V druhej kapitole tejto práce popíšeme v praxi najčastejšie používané metódy slúžiacie na odhadovanie Hurstovho indexu. Kvôli relatívnej jednoduchosti bude v našej práci najviac zastúpená tzv.  $R/S$  analýza. Ako dôvod tohto výberu môžeme uviesť či už spomínanú jednoduchosť, ale aj skutočnosť, že túto metódu pri svojej práci na Níle použil hydroológ Hurst, ktorého meno nesie odhadovaný parameter.

Aby však nebola preferovaná len  $R/S$  analýza, zaradíme aj alternatívne metódy slúžiacie rovnakému účelu, t.j. odhadovaniu Hurstovho indexu z dát. Na rozdiel od  $R/S$  analýzy pri alternatívnych metódach vynecháme kompletne odvodenie, nakoľko nepatrí medzi ciele práce.

Záverečnú časť druhej kapitoly budú tvoriť konkrétne numerické odhady Hurstovho indexu pre ceny akcií vybraných spoločností. Odhady získané pomocou  $R/S$  analýzy budú rozdelené podľa rokov - za dlhšie časové obdobie (2008-2012) a za jednotlivé roky (2006-2012). Pre alternatívne metódy vynecháme odhady za jednotlivé roky, venovať sa budeme iba celému časovému obdobiu 2008 až 2012. Všetky výsledky odhadovania zúročíme neskôr v tretej kapitole pri oceňovaní opcií pomocou fraktálneho Brownovho pohybu.

### 2.1 $R/S$ analýza na odhad $H$

Prvou z metód, ktorú priblížime, je tzv.  $R/S$  analýza (z anglického výrazu *re-scaled analysis*) [23], [27]. Keďže táto metóda je pomerne jednoduchá, uvedieme

celé jej odvodenie. Toto vychádza len z počítania základných štatistických kvantít, akými sú napríklad priemer, či štandardná odchýlka.

Pôvod vzniku  $R/S$  analýzy ako matematickej metódy počítajúcej z dát štatisticky zaujímavý parameter sa pripisuje hydrológovi H. E. Hurstovi. Tento Brit pracoval na africkom kontinente, pričom jeho hlavným cieľom bolo navrhnúť optimálne rozloženie priehrad na Níle a pomôcť tak zefektívniť biedny systém zavlažovania či skladovania obrovských objemov vody. Hurst zozbieral veľké množstvo dát, ktoré tvorila úroveň hladiny rieky Níl. Počítal z nich spomenuté štatistické kvantily s cieľom odhadnúť parameter (neskôr po ňom pomenovaný), ktorý by dokázal tieto dáta klasifikovať a odlíšiť ich tak od dovedy uznávanej a ucelenej predstavy, že prírastky úrovne hladiny rieky sú nezávislé, t.j. správajú sa ako klasický Brownov pohyb. K tomuto činu ho nabádala hlavne pozorovaná skutočnosť, ktorá poukazovala na istú koreláciu medzi prírastkami [27].

Na tomto mieste môžeme byť svedkami toho, ako ľahko sa pri práci s reálnym cieľom (stavba priehrad) dá sklznúť do objavenia abstraktného matematického aparátu ( $R/S$  analýza).

Na odvodenie  $R/S$  analýzy nám stačí uvažovať časový rad  $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ . Samotný výpočet preškálovaného rozsahu spočíva v nasledovných jednoduchých krokoch [23]:

1. vypočítať priemer  $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
2. vypočítať rad  $Y$  očistený od priemeru:  $Y_t = X_t - m, t = 1, \dots, n$
3. vypočítať rad kumulatívnych odchýlok  $Z$ :  $Z_t = \sum_{i=1}^t Y_i, t = 1, \dots, n$
4. vypočítať rad  $R$ :  $R_t = \max(Z_1, \dots, Z_t) - \min(Z_1, \dots, Z_t), t = 1, \dots, n$
5. vypočítať rad štandardných odchýlok  $S$ :  $S_t = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (X_i - u)^2}, t = 1, \dots, n$ , kde  $u$  predstavuje strednú hodnotu radu  $X_1, \dots, X_t$
6. vypočítať rad preškálovaných rozsahov  $\left(\frac{R}{S}\right)_t = \frac{R_t}{S_t}, t = 1, \dots, n$ .

V skratke načrtnime výpočet, resp. zopár iterácií pre  $n = 1024$ . To znamená, že na začiatku výpočtu máme časový rad  $X = X_1, \dots, X_{1024}$  reprezentujúci zafixované ceny ľubovoľnej akcie. Dĺžka zvoleného časového radu zodpovedá zhruba



štvorročnej vzorke. Pre tento časový rad vypočítajme prvý preškálovaný rozsah, ktorý označme  $RS_1$ . V ďalšom kroku rozdelíme časový rad na dva bloky o totožnej dĺžke, t.j. v našom prípade dostávame dva časové rady o dĺžke 512. Pre každý rad zvlášť spočítame preškálovaný rozsah, pričom výsledný  $RS_2$  vznikne ako aritmetický priemer dvoch pôvodne zrátaných. Ďalšie iterácie sú už intuitívne zrejmé - naďalej volíme bloky polovičnej dĺžky z predchádzajúcich a počítame prislúchajúce preškálované rozsahy a následne ich aritmetické priemery [12].

Strategický prínos Hursta je, že objavil závislosť pre preškálovaný rozsah, tzn. že platí vzťah:

$$\left(\frac{R}{S}\right)_t = ct^H,$$

kde  $c$  je vhodná konštanta. Z čisto matematických dôvodov môžeme tento vzťah zlogaritmovať, t.j. po úprave vyzerá nasledovne:

$$\log_2 \left(\frac{R}{S}\right)_t = H \log_2 t + \log_2 c. \quad (20)$$

Ak zvolíme logaritmus pri základe 2, vidíme opodstatnenosť voľby veľkosti časového radu 1024 ( $=2^{10}$ ) a následného delenia na polovice. Dostávame vektor  $(10, \dots, 3)$ , ktorý tvorí súradnice na x-ovej osi. Vzťah (20) vypovedá o závislosti medzi časom  $t$  a preškálovaným rozsahom  $RS$ , ale v logaritmickej mierke. Ak tento vzťah pomocou regresie zakreslíme do grafu, tak sklon výslednej regresnej priamky predstavuje hľadaný odhad Hurstovho indexu  $H$  [9], [23].

Ak zvolíme za vstupné dáta denné zatváracie ceny akcií, rýchlo zistíme, že to nie je vhodný spôsob na odhadovanie Hurstovho indexu. Hodnota Hurstovho indexu totiž vykazuje veľmi silný trend, je takmer rovná jednotke. Vysvetlenie môžeme hľadať pri autokorelačnej funkcii. Tento nedostatok sa dá odstrániť použitím logaritmov denných výnosov [12].

## 2.2 Iné metódy odhadovania Hurstovho indexu

Ako sme avizovali v úvode druhej kapitoly, okrem preferovanej  $R/S$  analýzy uvedieme aj alternatívne metódy slúžiace na odhadovanie Hurstovho indexu. Vybrali sme na porovnanie päť metód, ktorých názvy aj kvôli lepšej orientácii v literatúre uvádzame v originálnom znení. Sú to metódy - Absolute Value Method (AVM),

Variance Method (VAR), Variance of Residuals Method (VRM), Periodogram Method (PER) a Abry-Veitch Method (ABV). V zátvorkách sú uvedené skratky pre jednotlivé metódy. Tieto v ďalšom texte využívame napríklad v Tabuľke 7, kde uvádzame výsledky odhadov Hurstovho indexu získané práve použitím spomenutých metód. Skratky taktiež uvidíme v záverečnej časti práce, kde budú figurovať v obrázkoch znázorňujúcich výsledky z oceňovania opcií s využitím fraktálneho Brownovho pohybu. Keďže sme si zvolili v tomto texte za hlavnú metódu  $R/S$  analýzu, pre nás alternatívne metódy nebudeme celé odvádzať. Pokúsime sa len v skratke vysvetliť ich podstatu.

Majme daný časový rad  $X_i$  dĺžky  $N$  a definujme agregovaný rad:

$$X^{(m)}(k) := \frac{1}{m} \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} X_i, k = 1, 2, \dots, \frac{N}{m} \quad (21)$$

S výnimkou poslednej metódy budú všetky ostatné vychádzať či už z pôvodného alebo agregovaného radu definovaného vzťahom (21).

### 2.2.1 Absolute Value Method

Prvou z alternatívnych metód, ktorú v tejto časti popíšeme, bude *Absolute Value Method* [30]. Ako už z názvu vyplýva, za základnou ideou bude nejakým spôsobom ukryté počítanie absolútnej hodnoty.

Na začiatku uvažujme agregovaný rad definovaný podľa vzťahu (21). Získali sme ho rozdelením pôvodného časového radu  $X_i$  na bloky veľkosti  $m$ , pričom sme hodnoty v každom bloku spriemerovali. Ďalej uvažujme rad prvých absolútnych momentov takto zadaných radov:

$$AM^{(m)} = \frac{1}{\frac{N}{m}} \sum_{k=1}^{\frac{N}{m}} |X^{(m)} - \bar{X}|,$$

kde  $\bar{X}$  je priemer celého radu.

Aby sme získali odhad hodnoty Hurstovho indexu, do grafu zobrazíme logaritmy po sebe idúcich hodnôt  $m$  voči logaritmom absolútnych prvých momentov agregovaného radu. Sklon výslednej priamky odhadnutý metódou najmenších štvorcov je  $H - 1$  [30]. Z tohto vzťahu už ľahko dostaneme hodnotu odhadnutého Hurstovho indexu.

## 2.2.2 Variance Method

Druhou metódou, pri ktorej načrtujeme spôsob odhadovania Hurstovho indexu, bude *Variance Method* [13], [30]. Opäť z názvu môžeme intuitívne vycítiť, o čo v metóde pôjde.

Do veľkej miery je táto metóda podobná metóde *Absolute Value Method*, preto rovnako ako pri predošlej metóde uvažujeme agregovaný rad definovaný vzťahom (21). Počítanie radu prvých absolútnych momentov nahradíme v tomto prípade počítaním radu, ktorý bude pozostávať z výberových variancií definovaných nasledovne:

$$\widehat{Var} X^{(m)} = \frac{1}{\frac{N}{m}} \sum_{k=1}^{\frac{N}{m}} (X^{(m)} - \bar{X})^2,$$

kde  $\bar{X}$  je priemer celého radu.

Postup pri získaní odhadu Hurstovho indexu je totožný s predošlou metódou, t.j. do grafu zobrazíme logaritmy po sebe idúcich hodnôt  $m$  voči logaritmom výberových variancií. Využijúc metódu najmenších štvorcov dostaneme odhad sklonu výslednej priamky. Tento je rovný  $2H - 2$ .

## 2.2.3 Variance of Residuals Method

Tretou alternatívnou metódou v poradí slúžiacou na odhad Hurstovho indexu je *Variance of Residuals Method* [30].

Úvod pri výpočte sa nebude líšiť od predchádzajúcich popísaných metód. Budeme preto uvažovať pôvodný časový rad  $X_i$ , ktorý rozdelíme do blokov veľkosti  $m$ . V rámci každého bloku vypočítame rad parciálnych súm:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^t X_i.$$

Pre všetky bloky, resp. pre všetky rady parciálnych súm odhadneme metódou najmenších štvorcov priamku v tvare  $a + bt$ . Následne, ako hovorí názov metódy, je potrebné vypočítať varianciu rezíduí pre každý blok:

$$\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m (Y(t) - a - bt)^2.$$

Takýmto spôsobom získame  $\frac{N}{m}$  odhadov (blokov je práve uvedený počet), pre ktoré v rámci každého bloku zrátame mediány.

Pre získanie hodnoty Hurstovho indexu potrebujeme ešte do grafu znázorniť logaritmy mediánov voči logaritmom  $m$ . Ako obvykle, markantný bude pre nás sklon priamky odhadnutej metódou najmenších štvorcov. V prípade použitia *Variance of Residuals Method* je sklon priamky rovný  $2H$ .

#### 2.2.4 Periodogram Method

Predposledná z metód, ktoré sme do práce zaradili pod názvom alternatívne, nesie názov *Periodogram Method* [30]. Narozdiel od prvých troch metód, kde sa už z názvu dalo o metóde niečo dozvedieť, pri metóde *Periodogram Method* už táto situácia neplatí.

Pod pojmom periodogram si môžeme predstaviť proces definovaný nasledovne:

$$I(\nu) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{j=1}^N X(j)e^{ij\nu} \right|^2,$$

kde  $\nu$  je frekvencia,  $N$  je dĺžka pôvodného časového radu  $X$  a  $i$  je imaginárna jednotka.

Odhad hodnoty Hurstovho indexu získame, ak zobrazíme do grafu logaritmy frekvencií voči logaritmom periodogramu. Sklon odhadnutej priamky je  $1 - 2H$  [30]. Jednoduchou úpravou z tohto vzťahu dostaneme Hurstov index  $H$ .

#### 2.2.5 Abry-Veitch Method

Záverečnou metódou slúžiacou na odhad Hurstovho indexu, ktorou sa budeme v práci zaoberať, nesie názov po svojich autoroch, *Abry-Veitch Method*.

Avšak pri tejto metóde vynecháme aj akékoľvek stručné vysvetlenie podstaty. Jej obsahom sú totiž tzv. wavelety, ktorých vysvetlenie presahuje rámec tohto textu. Čitateľa v prípade záujmu odkazujeme na prácu [13]. Nebudeme sa tejto metóde preto venovať a uspokojíme sa len s fungujúcou metódou, ktorej výstupom sú odhady Hurstovho indexu.

### 2.3 Odhady Hurstovho indexu pre vybrané akcie

Podkapitolu s názvom *Odhady Hurstovho indexu pre vybrané akcie* rozdelíme na dve rovnocenné časti. V prvej z nich uvedieme výsledky z odhadovania Hurstovho

indexu s využitím  $RS$  analýzy. Ešte pred samotnými výsledkami však popíšeme výber akcií a spôsob, akým sme ich delili do jednotlivých skupín. V druhej časti na rovnakých dátach zopakujeme odhad Hurstovho indexu, avšak pre alternatívne metódy popísané v predošlej podkapitole.

### 2.3.1 Výsledky $RS$ analýzy

Na odhadnutie Hurstovho indexu  $H$  pomocou  $RS$  analýzy ako aj pomocou alternatívnych metód sme vybrali akcie šestnástich spoločností. Hlavným zdrojom dát sa stala veľmi populárna stránka na získanie finančných informácií: [www.finance.yahoo.com](http://www.finance.yahoo.com).

Výber nebol úplne náhodný - zaradili sme sem akcie známych, veľkých a stabilných spoločností (Google, IBM), ale aj akcie hlavne v Európe menej známych spoločností (Vale, Stratasys). Zároveň sme dbali aj na skutočnosť, aby spoločnosti pochádzali z rôznych sfér podnikania. Takto môžeme medzi vybranými spoločnosťami nájsť zástupcov rôznych odvetví priemyslu (potravinársky - Coca Cola, ťažiarstvo - Vale, Alcoa), IT biznisu (Microsoft, Apple, Google) ako aj bankového sektoru (AIG, Zions Bancorporation). Pre každú spoločnosť sme odhadli

skupina	charakteristiky	zastúpenie
1	$E > 0,09; Var > 0,3191$	TOL, SSYS, ZION, AIG
2	$E > 0,09; Var < 0,3191$	DIS, WMT, AAPL
3	$E < 0,09; Var > 0,3078$	VALE, AMZN, KO, AA
4	$E < 0,09; Var < 0,3078$	RDSA, IBM, NKE, GOOG, MSFT

Tabuľka 5: Rozdelenie spoločností do skupín podľa príslušnosti k priemernému výnosu a volatilite

osem rôznych parametrov  $H$ . Prvý odhad  $H$  bol založený na časovom rozmedzí štyroch rokov, konkrétne od roku 2008 do roku 2012. Zvyšných sedem hodnôt predstavovalo odhady  $H$  podľa jednotlivých rokov počnúc rokom 2006 a končiac súčasnosťou (2012).

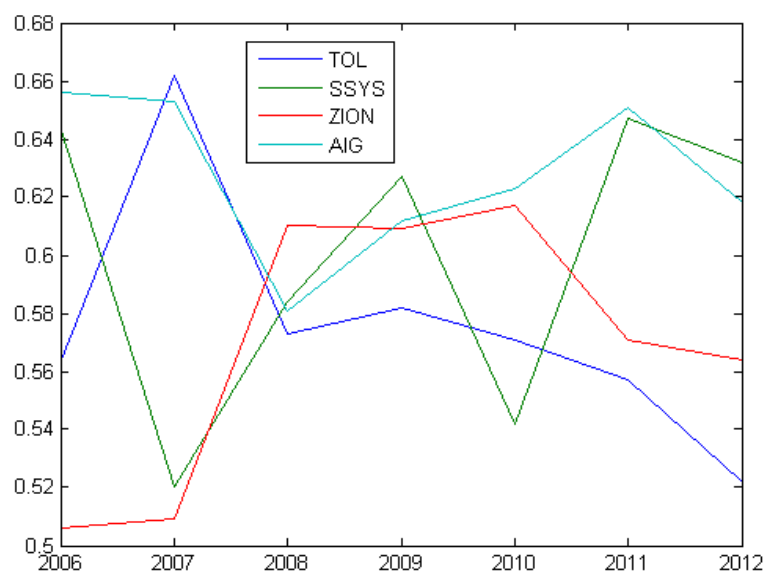
Spolu s odhadnutým  $H$  sme pre každú spoločnosť spočítali historickú volatilitu

a príslušný výnos na vzorke denných zatváracích cien za posledný rok. Na základe týchto faktorov sme spoločnosti roztriedili do štyroch skupín. Najskôr sme spoločnosti rozdelili do dvoch podskupín, pričom rozdeľovacím kritériom bol vzťah k priemernému výnosu, ktorý vyšiel 0,09. Následne sme v každej podskupine spočítali priemernú volatilitu (podskupina s nadpriemerným výnosom: 0,3191 a podskupina s podpriemerným výnosom: 0,3078) a podľa rovnakého kľúča ako v predošlom sme získali štyri skupiny. Pre porovnanie odhadov Hurstovho in-

sk.	firma	$H_{2008-2012}$	volatilita	výnos	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
1	TOL	0,545	0,3734	0,29	0,563	0,662	0,573	0,582	0,571	0,557	0,522
	SSYS	0,576	0,5760	0,42	0,644	0,520	0,584	0,627	0,542	0,647	0,632
	ZION	0,591	0,3336	0,13	0,506	0,509	0,610	0,609	0,617	0,571	0,564
	AIG	0,602	0,3387	0,19	0,656	0,653	0,581	0,612	0,623	0,651	0,618
2	AAPL	0,564	0,2665	0,18	0,621	0,626	0,642	0,640	0,564	0,611	0,523
	WMT	0,564	0,1589	0,11	0,570	0,634	0,510	0,510	0,457	0,666	0,576
	DIS	0,572	0,2103	0,17	0,547	0,598	0,693	0,668	0,618	0,625	0,483
3	VALE	0,506	0,3521	-0,08	0,681	0,484	0,630	0,584	0,620	0,646	0,638
	KO	0,539	0,7100	-0,15	0,587	0,663	0,663	0,645	0,522	0,640	0,632
	AMZN	0,543	0,3349	0,06	0,648	0,592	0,591	0,545	0,564	0,650	0,555
	AA	0,573	0,3387	-0,05	0,649	0,555	0,672	0,606	0,604	0,612	0,580
4	IBM	0,516	0,1786	0,04	0,584	0,629	0,537	0,566	0,589	0,723	0,517
	RDSA	0,525	0,2011	0,01	0,713	0,537	0,601	0,708	0,643	0,666	0,622
	NKE	0,529	0,2281	0,02	0,625	0,559	0,592	0,648	0,629	0,599	0,550
	MSFT	0,573	0,2089	0,06	0,575	0,601	0,543	0,568	0,613	0,666	0,539
	GOOG	0,579	0,2376	0,08	0,656	0,637	0,568	0,629	0,620	0,676	0,592
5	GSCI	0,556	0,1541	0,05	0,620	0,525	0,567	0,627	0,623	0,644	0,543
	IXIC	0,560	0,1747	0,05	0,604	0,517	0,599	0,616	0,631	0,645	0,572

Tabuľka 6: Odhad Hurstovho indexu pomocou RS analýzy pre vybrané spoločnosti za obdobie 2008-2012 ako aj pre roky 2006 až 2012.

dexu pre zatváracie ceny akcií vybraných spoločností uvádzame aj piatu skupinu. Táto skupina je reprezentovaná dvomi akciovými indexami. Konkrétne sme zvolili najznámejšie americké akciové indexy - S&P 500 (Standard & Poor's 500) a NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automated Quotations). Tieto môžeme v ďalšom nájsť aj pod burzovým označením GSCI, resp. IXIC. Pre odhady Hurstovho indexu zo zvolených indexov nebudeme v záverečnej časti práce počítat ceny call opcií. Slúžia vyslovene len na porovnanie odhadov Hurstovho indexu s vybranými spoločnosťami.

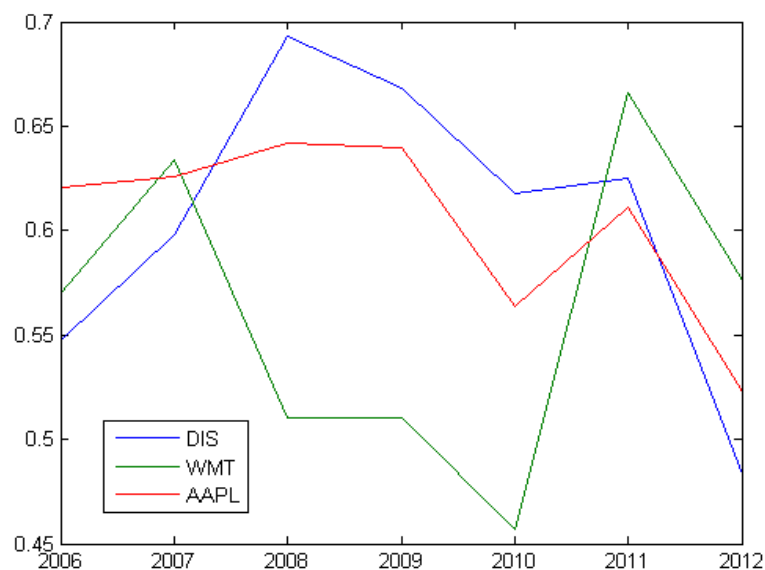


Obr. 7: Hurstov index odhadnutý pomocou  $RS$  analýzy za jednotlivé roky pre firmy z prvej skupiny.

V Tabuľke 5 sme zhrnuli predošlé úvahy o princípe delenia spoločností a vidíme, že prvú skupinu tvoria spoločnosti s nadpriemerným výnosom a volatilitou - Toll Brothers (TOL), Stratasys (SSYS), Zions Bancorporation (ZION), AIG. Do druhej skupiny patria spoločnosti s nadpriemerným výnosom a podpriemernou volatilitou - Walt Disney (DIS), Walmart (WMT), Apple (AAPL). V tretej skupine sú spoločnosti s podpriemerným výnosom a nadpriemernou volatilitou - Vale, Amazon (AMZN), Coca Cola (KO), Alcoa (AA). Štvrtú skupinu tvoria spoločnosti s podpriemerným výnosom i volatilitou - Royal Dutch Shell (RDSA), IBM, Nike (NKE), Google (GOOG), Microsoft (MSFT). V zátvorkách sme uviedli skratky, pod akými sú spoločnosti kótované na burze. Akciové indexy tvoriace piatu skupinu v Tabuľke 5 neuvádzame, hoci pre ne sme takisto spočítali historické volatilitu a príslušné výnosy. Nevstupujú však do výpočtov, na základe ktorých sme rozdeľovali spoločnosti do skupín.

Výsledky dosiahnuté samotným odhadovaním Hurstovho indexu pomocou  $RS$  analýzy uvádzame v Tabuľke 6. Ako môžeme vidieť z Tabuľky 6, všetky  $H$  odhadnuté za obdobie 2008-2012 (tretí stĺpec) presiahli hodnotu 0,5, predstavujúcu klasický Brownov pohyb. Najbližšie k nej má spoločnosť Vale. V jednom prípade

(AIG) sa hodnota  $H$  vyšplhala až nad 0,6. To znamená, že všetky ceny akcií môžeme považovať za perzistentné procesy s vlastnosťami a charakteristikami, ktoré sme uviedli v Kapitole 1.3.1. Zároveň sú tieto výsledky v súlade s očakávaním, že väčšina ekonomických a finančných časových radov patrí medzi perzistentné procesy [23]. V odhadoch  $H$  za jednotlivé roky rovnako pozorujeme, že s výnim-



Obr. 8: Hurstov index odhadnutý pomocou  $RS$  analýzy za jednotlivé roky pre firmy z druhej skupiny.

kou troch prípadov (Vale 2007, Walmart 2010, Walt Disney 2012) všetky hodnoty presiahli hranicu 0,5. V niekoľkých prípadoch (IBM 2011, RDSA 2006) môžeme vidieť aj prekročenie hodnoty 0,7. Tieto výsledky sú graficky znázornené na Obrázkoch 7 - 10. Môžeme na nich pozorovať vývoj hodnoty Hurstovho indexu v čase za jednotlivé roky pre dané spoločnosti.

Ak by sme hľadali medzi odhadmi  $H$  za jednotlivé roky maximálne, resp. minimálne hodnoty, dospeli by sme k pozorovaniu, že až pri šiestich spoločnostiach vyšli najvyššie hodnoty  $H$  za rok 2011 a naopak najnižšie hodnoty  $H$  vyšli rovnako pri šiestich spoločnostiach za rok 2012. Pri pohľade na Tabuľku 6 môžeme ďalej pozorovať, že pre všetky skupiny platí, že väčšina odhadov parametra  $H$  pre jednotlivé roky je väčšia ako odhad  $H$  pre celé obdobie 2008-2012. Najvýraznejšie túto skutočnosť pozorujeme v tretej a štvrtej skupine, t.j. v skupinách





Obr. 9: Hurstov index odhadnutý pomocou  $RS$  analýzy za jednotlivé roky pre firmy z tretej skupiny.

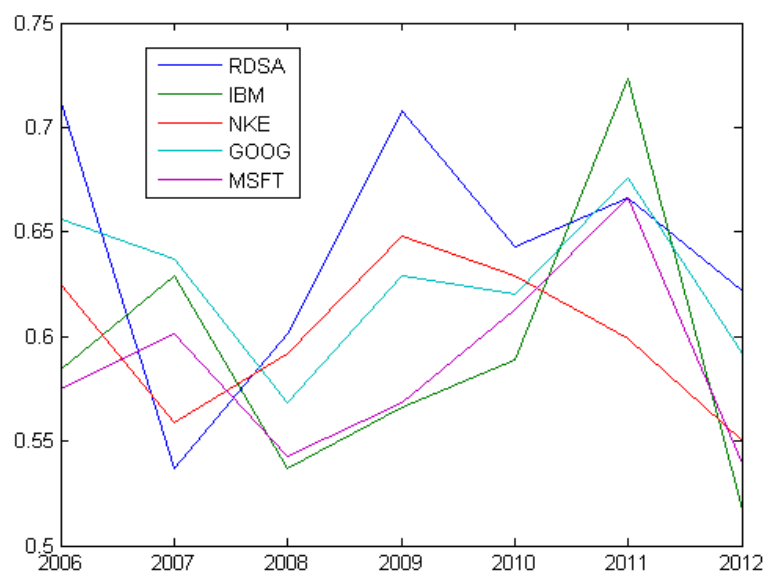
s podpriemerným výnosom. Naopak, striedavo väčšie a menšie hodnoty odhadov za jednotlivé roky než za celé obdobie pozorujeme v prvej skupine, t.j. v skupine s nadpriemerným výnosom i volatilitou.

Naším cieľom bolo zistiť, či existuje závislosť medzi hodnotami Hurstovho indexu a parametrami, ktoré sme získali z dát - výnos a historická volatilita. Súvis medzi samotnými hodnotami  $H$  odhadnutými za jednotlivé roky a výnosom, prípadne volatilitou, sa nedá pozorovať. Zdá sa, že výnos a volatilita nijako neovplyvňujú odhad hodnoty Hurstovho indexu. Podobne môžeme hovoriť aj o vzťahu uvedených charakteristík s hodnotami  $H$  odhadnutými za obdobie 2008-2012.

Hodnoty Hurstovho indexu pre akciové indexy výrazne nevybočujú spomedzi hodnôt, ktoré sme dostali pre vybrané spoločnosti.

### 2.3.2 Výsledky z iných metód

Pri odhadovaní Hurstovho indexu pomocou alternatívnych metód sme rovnako ako pri  $RS$  analýze využívali akcie šestnástich spoločností. Avšak vypustili sme odhady pre jednotlivé roky a venovali sa len odhadovaniu za celé časové obdobie 2008 – 2012, nakoľko práve hodnoty získané z tohto obdobia hrajú podstatnú



Obr. 10: Hurstov index odhadnutý pomocou  $RS$  analýzy za jednotlivé roky pre firmy zo štvrtej skupiny.

úlohu v záverečnej časti práce pri oceňovaní call opcií s využitím fraktálneho Brownovho pohybu.

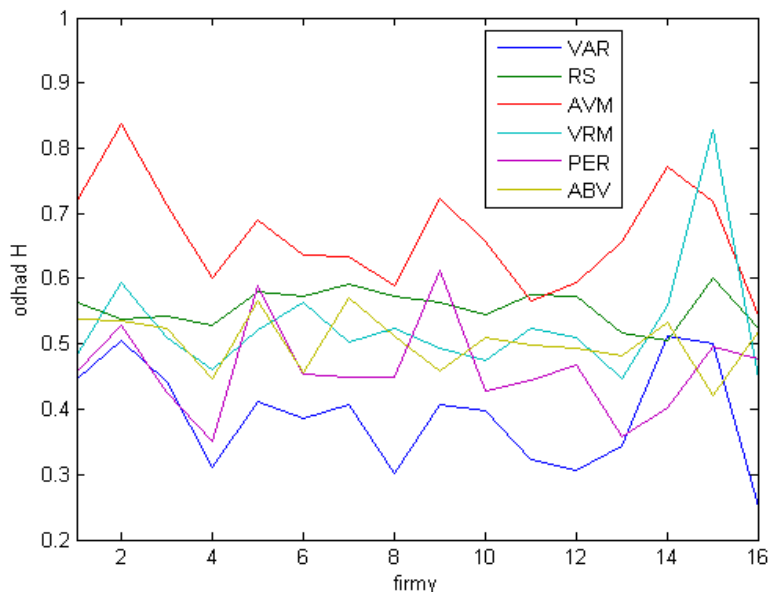
Výsledky odhadovania Hurstovho indexu alternatívnymi metódami uvádzame v Tabuľke 7. Kvôli lepšej predstavivosti a jednoduchšej orientácii medzi veľkým množstvom čísel, sú výsledky z odhadovania alternatívnymi metódami uvádzané nielen v Tabuľke 7, ale aj spoločne s odhadmi získanými z  $RS$  analýzy za obdobie 2008 – 2012 na Obrázku 11. Pri pohľade na Tabuľku 7 ako aj na Obrázok 11 môžeme pozorovať, že najvyššie hodnoty Hurstovho indexu boli dosiahnuté pri použití metódy *Absolute Value Method* (konkrétne v 15 zo 16 prípadov). Naopak najnižšie hodnoty Hurstovho indexu boli dosiahnuté pri použití metódy *Variance Method* (konkrétne v 13 zo 16 prípadov). Z Obrázku 11 tiež vidíme, že najkonzistentnejší odhad (v zmysle nízkeho rozptylu naprieč spoločnosťami) sme získali použitím  $RS$  analýzy. Naopak najväčšie kolísanie pozorujeme pri metóde *Absolute Value Method*, resp. *Periodogram Method*.

	VAR	AVM	VRM	PER	ABV
AAPL	0,445	0,719	0,482	0,458	0,537
KO	0,506	0,838	0,594	0,529	0,535
AMZN	0,443	0,713	0,510	0,426	0,524
NKE	0,310	0,601	0,460	0,350	0,447
GOOG	0,411	0,689	0,522	0,589	0,565
AA	0,387	0,637	0,564	0,454	0,457
ZION	0,407	0,633	0,504	0,450	0,570
DIS	0,302	0,590	0,523	0,450	0,512
WMT	0,406	0,722	0,493	0,612	0,458
TOL	0,397	0,658	0,474	0,427	0,511
SSYS	0,322	0,566	0,525	0,444	0,498
MSFT	0,306	0,594	0,509	0,467	0,494
IBM	0,343	0,657	0,447	0,359	0,481
VALE	0,512	0,773	0,558	0,403	0,553
AIG	0,501	0,719	0,827	0,497	0,420
RDSA	0,250	0,543	0,447	0,477	0,520

Tabuľka 7: Odhad Hurstovho indexu pomocou alternatívnych metód pre vybrané spoločnosti za obdobie 2008-2012.

### 3 Fraktálny Brownov pohyb v praxi

Cieľom záverečnej kapitoly našej práce je pretaviť naštudovanú teóriu okolo fraktálneho Brownovho pohybu do praxe. To znamená, využiť spoločne s teoretickými poznatkami nadobudnuté odhady Hurstovho indexu pri oceňovaní call opcií. Postavíme do kontrastu dva prístupy oceňovania európskej call opcie. Prvým



Obr. 11: Hurstov index odhadnutý alternatívnymi metódami pre všetky spoločnosti

bude tradičný Black-Scholesov model, ktorý vychádza z obyčajného Brownovho pohybu. Druhým a pre nás dôležitejším a zaujímavejším bude fraktálny Black-Scholesov model vychádzajúci z nosného pojmu našej práce, z fraktálneho Brownovho pohybu.

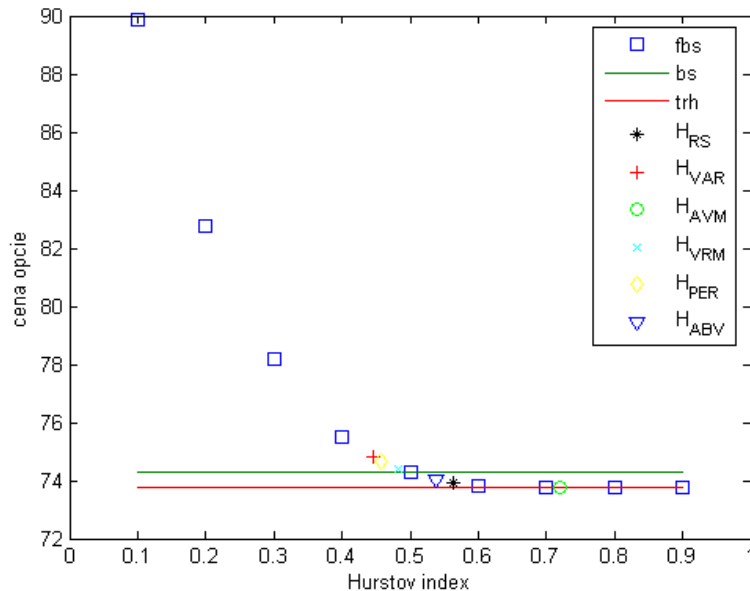
Najskôr uvedieme vzorce pre oceňovanie pre oba spomenuté prístupy, aby sme v poslednej časti práce na reálnych dátach skúmali prípadné rozdielnosti. Skúmaním rozdielov medzi Black-Scholesom a fraktálnym Black-Scholesom naplníme cieľ práce. Zisťujeme ním totiž, či má zmysel zaviesť pomerne zložitý koncept fraktálneho Brownovho pohybu, alebo si vystačíme s doteraz zaužívaným Black-Scholesovým modelom.

**Definícia 3.1** [3] *Call opcia je kontrakt, ktorý dáva jej držiteľovi právo kúpiť ak-*

ciu v určenom expiračnom čase za vopred dohodnutú cenu (strike price). Európska opcia môže byť uplatnená len v čase expirácie.

### 3.1 Cena call opcie z klasického Black-Scholesovho modelu

V prvej podkapitole tretej časti sa vrátíme k prelomovému objavu Blacka a Scholes. Vynecháme však všetky predpoklady a aj samotné odvodenie modelu. Zaujímať nás bude predovšetkým oceňovacia formula v prípade, že cena podkladového aktíva (v našom prípade pôjde o akciu) sleduje v čase klasický geometrický Brownov pohyb. Uvažujme cenu akcie vyvíjajúcu sa stochasticky podľa nasledovného



Obr. 12: Ceny opcie na akciu firmy Apple získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou

vzťahu:

$$S_t = S_0 e^{(\mu t + \sigma W_t)}, \quad (22)$$

kde  $S_0$  je cena akcie na začiatku celého procesu (v čase  $t = 0$ ),  $\mu$  predstavuje strednú hodnotu výnosov akcie,  $\sigma$  je volatilita a  $W_t$  je klasický Brownov pohyb (resp. fraktálny Brownov pohyb pre  $H = \frac{1}{2}$ ). Vzťah (22) zvykne bývať označovaný za Black-Scholesov model vývoja ceny akcie.

Za odvođením ceny európskej call opcie z Black-Scholesovho modelu sa skrýva náročný matematický aparát známy ako stochastický kalkulus. Pre nás v danom okamihu nie je odvođenje podstatné, preto prejdeme priamo k výsledkom.

Uvažujme európsku call opciu, ktorú chceme oceniť, maturujúcu v čase  $T$ , pričom jej expiračná cena je  $K$ . Z Black-Scholesovho modelu dostávame cenu call opcie  $V$  rovnú:

$$V_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (23)$$

kde

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + r(T-t) \pm \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (24)$$

a  $N(\cdot)$  je kumulatívna distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia,  $r$  je bezriziková úroková miera [18].

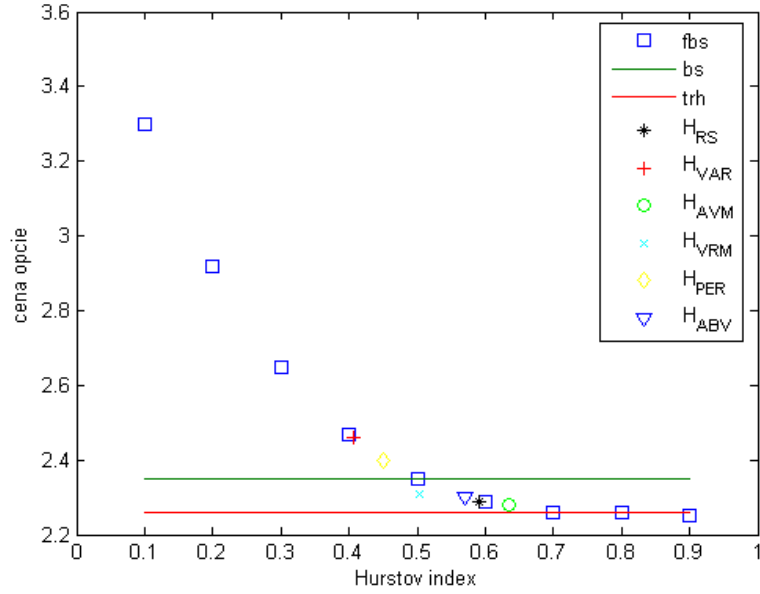
### 3.2 Cena call opcie z fraktálneho Black-Scholesovho modelu

Hoci Black-Scholesov model vyvolal v čase svojho vzniku naozaj veľký ohlas v oblasti oceňovania finančných nástrojov, vzhľadom na značné množstvo v reálnom svete často nesplniteľných predpokladov, začali sa vymýšľať alternatívne prístupy k oceňovaniu. Jedným z nich je model využívajúci vývoj ceny podkladového aktíva (opäť v našom prípade pôjde o akciu) podľa fraktálneho Brownovho pohybu a práve týmto modelom sa budeme zaoberať. Uvažujme cenu akcie vyvíjajúcu sa stochasticky podľa nasledovného vzťahu:

$$S_t = S_0 e^{(\mu t + \sigma B_t^H - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H})}, \quad (25)$$

kde  $B_t^H$  je fraktálny Brownov pohyb s Hurstovým indexom  $H$  a zvyšné parametre majú rovnakú interpretáciu ako v predošlom prípade. Vzťah (25) sa zvykne v literatúre označovať ako fraktálny Black-Scholesov model [21].

Vzťah (22) pre klasický Black-Scholesov model a vzťah (25) pre fraktálny Black-Scholesov model sa na prvý pohľad veľmi nelíšia. Avšak oproti klasickému Black-Scholesovmu modelu stojí pri volatilitate vo fraktálnom Black-Scholesovom modeli zovšeobecnený, fraktálny Brownov pohyb a navyše aj člen zachytávajúci



Obr. 13: Ceny opcie na akciu firmy Zions Bancorporation získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou

prostredníctvom Hurstovho indexu dlhodobú závislosť. Práve tieto členy navyše dávajú kvantitatívne iný výsledok pri odvodzovaní oceňovacej formuly.

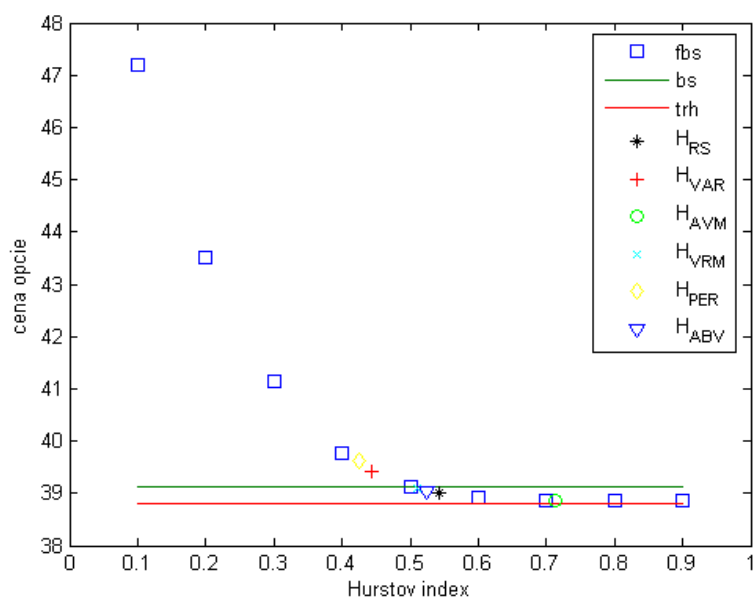
Opäť ako pri predošlom prípade sa nebudeme venovať samotnému odvodeniu vzťahov na oceňovanie call opcie. Uvažujme preto len call opciu s totožnými parametrami ako v časti o klasickom Black-Scholesovom modeli. Potom jej cena  $V$  v čase  $t$  sa rovná [21]:

$$V_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (26)$$

kde

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + r(T-t) \pm \frac{1}{2} \sigma^2 (T^{2H} - t^{2H})}{\sigma \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}. \quad (27)$$

Na tomto mieste je nutné dodať, že vzťah (25), ale najmä vzťah (27) platí pre  $H \in (0, 1)$ . Dôvod je ten, že vychádzajú z tzv. Wickovho integrálu, ktorý vo všeobecnosti platí pre akékoľvek  $H \in (0, 1)$ . Bližšie o Wickovom (niekde nazývanom aj Wick-Itô-Skorohodovom) integrále sa môže čitateľ dozvedieť v prácach [1], [22]. Použitie Wickovho integrálu odstraňuje z takto nastaveného modelu nežiaducu arbitráž. Avšak cenou za bezarbitrážny model je strata ekonomickej interpretovateľnosti [1], [19].

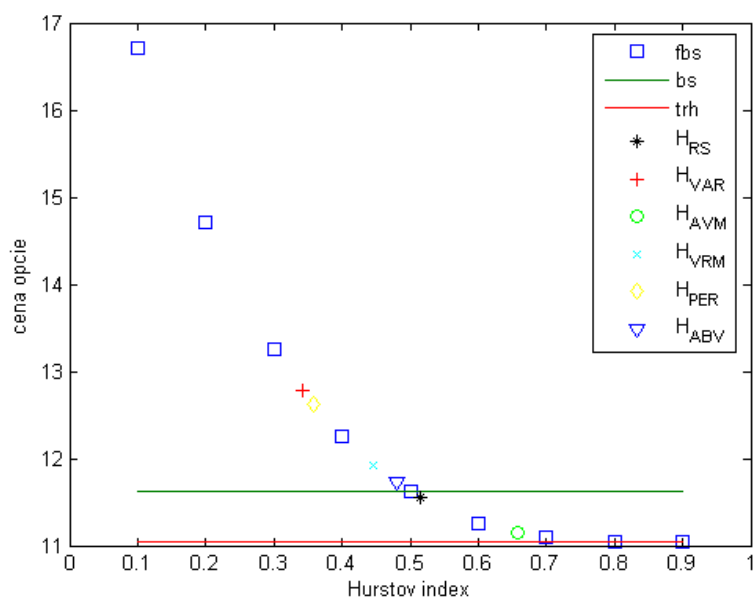


Obr. 14: Ceny opcie na akciu firmy Amazon získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou

Samotná Black-Scholesova formula je v oboch prístupoch rovnaká, ako môžeme vidieť zo vzťahov (23), (26). Rozdiel však pozorujeme v argumente kumulatívnej distribučnej funkcie štandardného normálneho rozdelenia. Na prvý pohľad môžeme rozdiel prehliadnuť, keďže minimálne vizuálne vyzerajú vzťahy (24), (27) veľmi podobne. Vo vzťahu (27) pre fraktálny Black-Scholesov model opäť do hry vstupuje Hurstov index. Kým vo vzťahu (24) môžeme výraz  $T - t$  interpretovať ako čas do expirácie, vo vzťahu (27) už kvôli Hurstovmu indexu takúto interpretáciu použiť nemožno. Ďalej zo vzťahov (26), (27) pozorujeme, že cena európskej call opcie z fraktálneho Black-Scholesovho modelu už nezávisí len na rozdieli  $T - t$ . Dôvodom je, že fraktálny Brownov pohyb nemá na rozdiel od klasického Brownovho pohybu nulovú pamäť. Cena opcie v čase  $t \in [0, T]$  závisí nielen na cene akcie  $S_t$ , ale tiež na vývoji ceny tejto akcie na intervale  $[0, t]$ . Vplyv tohto vývoja je obsiahnutý v Hurstovom indexe  $H$ .

Pre lepšiu názornosť uvažujme nasledovnú situáciu: majme usporiadané časy  $t_1 \leq t_2 \leq t \leq T$  a dve opcie s rovnakou maturitou v čase  $T$ , ale s rozdielnymi časmi ich vypísania - prvá v čase  $t_1$  a druhá v čase  $t_2$ . V klasickom Black-Scholesovom modeli sú ceny takto zadefinovaných opcií v čase  $t$  totožné. Vo fraktálnom Black-





Obr. 15: Ceny opcie na akciu firmy IBM získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou

Scholesovom modeli sa však líšia vďaka dlhodobej závislosti, keďže cena prvej opcie je okrem iného ovplyvnená aj vývojom ceny akcie na intervale  $[t_1, t_2]$  [19].

### 3.3 Porovnanie na reálnych dátach

Poslednú časť práce tematicky rozdelíme do troch celkov. V prvom pripomenieme spoločnosti, ktoré reprezentujú vstupné dáta. Tiež špecifikujeme vstupné parametre do modelu. Druhá časť bude patriť priblíženiu štruktúry spracovania výsledkov. V nej popíšeme formu, v akej budeme prezentovať výsledky. Tretiu, myšlienково záverečnú časť zasvätime analýze výsledkov oceňovania. Sústredíme sa na porovnanie Black-Scholesovho a fraktálneho Black-Scholesovho modelu ako aj na rozdiely medzi cenami opcií získané pre rôznymi spôsobmi odhadnutý Hurstov index.

#### 3.3.1 Vstupné dáta

Na začiatku tretej kapitoly sme naznačovali, že záver bude patriť porovnaniu dvoch prístupov k oceňovaniu call opcií. Popísali sme spôsob, akým prebehol výber spoločností a tiež na základe akých ukazovateľov a kritérií sme ich rozdelili

1.skupina	parametre	TOL	SSYS	ZION	AIG
vstup	S	32,19	69,57	20,18	32,67
	K	28	55	18	28
trh	bid	4,4	14,3	2,23	4,6
	ask	4,6	15,3	2,29	4,7
	priemer	4,5	14,8	2,26	4,65
fbs ceny	H=0.1	6,04	19,56	3,3	6,13
	H=0.2	5,39	17,68	2,92	5,57
	H=0.3	4,93	16,38	2,65	5,2
	H=0.4	4,63	15,55	2,47	4,97
	H=0.5	4,44	15,09	2,35	4,85
	H=0.6	4,35	14,88	2,29	4,8
	H=0.7	4,32	14,81	2,26	4,79
	H=0.8	4,31	14,8	2,26	4,79
	H=0.9	4,31	14,8	2,25	4,79
	VAR	4,63	16,16	2,46	4,85
	RS	4,39	<b>14,91</b>	2,29	4,8
	AVM	4,33	14,93	<b>2,28</b>	<b>4,79</b>
	VRM	<b>4,48</b>	15,02	2,31	<b>4,79</b>
	PER	4,57	15,31	2,4	4,85
ABV	4,43	15,09	2,3	4,94	
BS cena		4,44	15,09	2,35	4,85

Tabuľka 8: Ceny opcií pre spoločnosti z prvej skupiny.

do štyroch skupín. Na pripomenutie uvádzame abecedný menoslov spoločností, ktorých akcie tvoria vstupné dáta na oceňovanie opcií - AIG, Alcoa, Amazon, Apple, Coca Cola, Google, IBM, Microsoft, Nike, Royal Dutch Shell, Stratasys, Toll Brothers, Vale, Walmart, Walt Disney a Zions Bancorporation.

Pre oceňovanie opcií sú dôležité charakteristiky či už samotnej opcie alebo akcie, na ktorú je opcia vypísaná. Tieto charakteristiky tvoria vstupné parametre

do modelu. Patria medzi ne:

- cena akcie  $S$ ,
- expiračná cena  $K$ ,
- bezriziková úroková miera  $r$ ,
- čas do expirácie v rokoch  $\tau$ ,
- volatilita  $\sigma$ .

Všetky parametre až na volatilitu sú buď nami zvolené alebo prevzaté z trhu z už spomínanej stránky [www.finance.yahoo.com](http://www.finance.yahoo.com). Volatilitu potrebujeme odhadnúť. Na jej odhad sme použili zatváracie ceny vybraných akcií za posledný rok. Volatilita odhadnutá takýmto spôsobom sa nazýva historická. V tomto texte sa budeme venovať oceňovaniu európskych call opcií expirujúcich o jeden mesiac. To znamená, že pri všetkých výpočtoch bude mať vstupný parameter  $\tau$  hodnotu  $\frac{1}{12}$ . Takisto rovnaký pre všetky výpočty bude aj parameter  $r$  predstavujúci bezrizikovú úrokovú mieru. Jeho hodnotu sme nastavili na 0,05, pričom táto hodnota reprezentuje výnos z amerických dlhopisov získaný zo stránky [www.bonds.yahoo.com](http://www.bonds.yahoo.com).

V prípade fraktálneho Black-Scholesovho modelu sme opäť oceňovali call opcie expirujúce o jeden mesiac pri bezrizikovej úrokovej miere  $r = 0,05$ . K vstupným parametrom pribudol ešte Hurstov index  $H$ , ktorý sme odhadli z dát študovanými metódami, ale aj ľubovoľne zvolili v škále od 0,1 po 0,9 s krokom 0,1.

### 3.3.2 Štruktúra spracovania výsledkov

Výsledky oceňovania európskych call opcií expirujúcich o jeden mesiac sú prehľadne spracované v Tabuľkách 8 - 11. Poradie tabuliek je definované rozdelením spoločností do skupín podľa príslušnosti k priemernému výnosu a k historickej volatilitě, ktoré sme špecifikovali v Tabuľke 5. Štruktúra tabuliek s výsledkami oceňovania je pre všetky štyri skupiny rovnaká.

V prvých dvoch riadkoch sú obsiahnuté dva vstupné parametre - zatváracia cena akcie  $S$  a expiračná cena  $K$ , pre ktoré sú vyčíslené všetky experimenty. Ďalšie riadky predstavujú dáta získané z trhu - postupne sú to *bid* (cena pri predaji),

2.skupina	parametre	DIS	WMT	AAPL
vstup	S	48,68	68,89	651,7
	K	45	65	490
trh	bid	3,7	3,95	72,9
	ask	3,8	4,05	74,6
	priemer	3,75	4	73,75
fbs ceny	H=0.1	5,37	5,79	89,85
	H=0.2	4,8	5,17	82,75
	H=0.3	4,4	4,74	78,16
	H=0.4	4,14	4,45	75,52
	H=0.5	3,98	4,28	74,27
	H=0.6	3,9	4,2	73,83
	H=0.7	3,87	4,17	73,75
	H=0.8	3,87	4,16	73,74
	H=0.9	3,07	4,16	73,74
	VAR	4,39	4,44	74,82
	RS	3,92	4,22	73,93
	AVM	<b>3,91</b>	<b>4,21</b>	<b>73,74</b>
	VRM	3,96	4,26	74,42
	PER	4,05	4,36	74,66
	ABV	3,97	4,27	74,05
BS cena		3,98	4,28	74,27

Tabuľka 9: Ceny opcií pre spoločnosti z druhej skupiny.

*ask* (cena pri kúpe) a *priemer* (cena získaná spriemerovaním predošlých dvoch cien, t.j. bid a ask).

Zvyšnú časť Tabuliek 8 - 11 predstavujú samotné výsledky získané oceňovaním. Posledný riadok je venovaný cene, ktorú sme dostali použitím klasického Black-Scholesovho modelu. Všetky predošlé zodpovedajú cenám, ktoré sme dostali použitím fraktálneho Black-Scholesovho modelu. Aj tieto sú pomyselne roz-

3.skupina	parametre	AA	AMZN	KO	VALE
vstup	S	8,27	238,03	37,39	17,24
	K	8	200	30	15
trh	bid	0,38	38,55	6,6	2,29
	ask	0,4	39,05	7,5	2,34
	priemer	0,39	38,8	7,05	2,32
fbs ceny	H=0.1	0,96	47,19	11,67	3,14
	H=0.2	0,79	43,51	10,25	2,82
	H=0.3	0,66	41,13	9,2	2,59
	H=0.4	0,55	39,77	8,47	2,45
	H=0.5	0,47	39,13	7,99	2,36
	H=0.6	0,42	38,91	7,71	2,32
	H=0.7	0,37	38,87	7,57	2,31
	H=0.8	0,34	38,86	7,53	2,3
	H=0.9	0,32	38,86	7,52	2,3
	VAR	0,57	39,42	7,97	2,35
	RS	0,43	39	7,86	2,36
	AVM	<b>0,4</b>	<b>38,87</b>	<b>7,52</b>	2,3
	VRM	0,43	39,09	7,72	<b>2,33</b>
	PER	0,51	39,63	7,89	2,44
ABV	0,51	39,05	7,87	2,34	
BS cena		0,47	39,13	7,99	2,36

Tabuľka 10: Ceny opcií pre spoločnosti z tretej skupiny.

delené na dve polovice. Prvú časť (9 riadkov vo všetkých tabuľkách) predstavujú ceny opcií z fraktálneho Black-Scholesovho modelu, pričom sme využili jednoduché nastavenie hodnôt Hurstovho indexu popísané vyššie, t.j. v rozpätí od 0,1 po 0,9. Pre  $H = 0,5$  dostávame rovnakú cenu call opcie ako pri klasickom Black-Scholesovom modeli. Táto časť má informatívny charakter, keďže pre vstupné

dáta sme využili náhodnú hodnotu Hurstovho indexu. Relevantnejšiu výpovednú

4.skupina	parametre	IBM	MSFT	NKE	RDSA	GOOG
vstup	S	190,29	26,95	95,6	66,19	665,87
	K	180	25	90	65	590
trh	bid	10,95	2,06	6,25	1,65	76,2
	ask	11,15	2,07	6,4	2	78,8
	priemer	11,05	2,07	6,33	1,83	77,5
fbs ceny	H=0.1	16,71	2,91	9,98	4,86	95,54
	H=0.2	14,71	2,59	6,65	3,98	87,97
	H=0.3	13,25	2,36	7,67	3,29	83,06
	H=0.4	12,26	2,21	6,97	2,76	80,24
	H=0.5	11,62	2,12	6,5	2,36	78,9
	H=0.6	11,26	2,08	6,21	2,05	78,43
	H=0.7	11,10	2,06	6,06	1,83	78,33
	H=0.8	11,05	2,05	5,99	1,67	78,32
	H=0.9	11,04	2,05	5,98	1,57	78,32
	VAR	12,78	2,35	7,59	3,61	80,03
	RS	11,55	2,09	<b>6,4</b>	2,27	78,49
	AVM	<b>11,15</b>	<b>2,08</b>	6,21	<b>2,22</b>	<b>78,34</b>
	VRM	11,92	2,12	6,67	2,56	78,74
	PER	12,62	2,15	7,29	2,44	78,46
	ABV	11,72	2,13	6,73	2,29	78,53
BS cena		11,62	2,12	6,5	2,36	78,9

Tabuľka 11: Ceny opcií pre spoločnosti zo štvrtej skupiny.

hodnotu má pre našu prácu až druhá časť (6 riadkov vo všetkých tabuľkách) cien opcií získaných použitím fraktálneho Black-Scholesovho modelu. V nej sme hodnoty Hurstovho indexu odhadli priamo z konkrétnych dát využívajúc alternatívne metódy popísané v druhej kapitole a na základe týchto hodnôt sme vypočítali ceny opcií. Tučným písmom sú zvýraznené ceny opcií vypočítané pomocou frak-

tálneho Brownovho pohybu pre  $H$  odhadnuté alternatívnymi metódami, ktoré sú najbližšie k priemernej trhovej cene.

Ceny opcií získané oboma spôsobmi kvôli lepšej predstavivosti sú pre prvú skupinu znázornené v Prílohe A na Obrázkoch 16 až 18, pričom priamo v texte uvádzame ako reprezentatívnu vzorku pre túto skupinu na Obrázku 13 spoločnosť Zions Bancorporation. Pre druhú skupinu sú ceny opcií znázornené v Prílohe A na Obrázkoch 19 až 20 a priamo v texte uvádzame ako reprezentatívnu vzorku pre túto skupinu na Obrázku 12 spoločnosť Apple. Pre tretiu skupinu sú ceny opcií znázornené v Prílohe A na Obrázkoch 21 až 23 a priamo v texte uvádzame ako reprezentatívnu vzorku na Obrázku 14 spoločnosť Amazon. Podobne pre štvrtú skupinu sú ceny opcií znázornené v Prílohe A na Obrázkoch 24 až 27 a priamo v texte uvádzame ako reprezentatívnu vzorku pre túto skupinu na Obrázku 15 spoločnosť IBM.

Štruktúra všetkých obrázkov je opäť rovnaká a jednoduchá, pričom ju popíšeme v nasledujúcich riadkoch. Na vodorovnej osi je znázornená hodnota Hurstovho indexu a na zvislej osi cena opcie. Trhová cena opcie je zastúpená červenou priamkou a Black-Scholesovská cena zase priamkou zelenou. Ceny opcií z fraktálneho Black-Scholesovho modelu pre Hurstov index získaný naivnou metódou (ľubovoľne zvolená hodnota od 0,1 po 0,9) sú reprezentované modrými štvorcami. Zvyšné ceny z fraktálneho Black-Scholesovho modelu pre Hurstov index nadobudnutý z alternatívnych metód sú na Obrázkoch 13-27 rôznymi symbolmi - od hviezdičky pre  $H$  z  $RS$  analýzy až po trojuholník z metódy *Abry-Veitch Method*. Všetky tieto špecifické symboly sú obsiahnuté v každej legende.

### 3.3.3 Analýza výsledkov

Jedným z hlavných cieľov práce bolo overiť možnosť, či fraktálny Brownov pohyb môže pri oceňovaní zmysluplne nahradiť v praxi zaužívaný Brownov pohyb (resp. modely založené na Brownovom či fraktálnom Brownovom pohybe). V praxi to znamená overiť, či ceny opcií získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu sú k trhovej cene bližšie ako ceny opcií získané z Black-Scholesovho modelu.

Ďalší z uhlov pohľadu je skúmať v rámci fraktálneho Black-Scholesovho modelu blízkosť cien k trhovým cenám. To znamená, že nás zaujíma, pre ktorú

hodnotu Hurstovho indexu je cena opcie získaná z fraktálneho Black-Scholesovho modelu k trhovej cene najbližšie. Skúmaním tohto problému dostaneme aj odpoveď na otázku, ktorá z alternatívnych metód slúžiacich na odhadovanie Hurstovho indexu je najpresnejšia.

V skutočnosti však spomínané problémy poukazujú na rovnakú otázku, ktorú môžeme sformulovať nasledovne - je fraktálny Brownov pohyb v praxi kvalitatívne lepší ako Brownov pohyb?

Na Obrázkoch 13 až 27 si môžeme na prvý pohľad všimnúť, že ceny opcií pre  $H > \frac{1}{2}$  sú k trhovej cene bližšie než ceny pre  $H < \frac{1}{2}$ . Tento fakt je v súlade s teóriou, ktorá hovorí, že finančné dáta majú Hurstov index obvykle väčší než  $\frac{1}{2}$ . Ceny akcií teda predstavujú perzistentný proces.

Pre takmer všetky spoločnosti môžeme tvrdiť, že cena pre  $H$  vypočítaná pomocou RS analýzy je k trhovej cene bližšia ako cena z Black-Scholesovho modelu. Výnimku tvoria spoločnosti Toll Brothers a IBM na Obrázku 13, resp. 23, kde je cena pre  $H$  odhadnuté pomocou RS analýzy vzdialenejšia od trhovej ceny ako Black-Scholesova cena. Tento výsledok ukazuje, že má zmysel používať fraktálny Brownov pohyb, keďže dostávame ceny opcií bližšie k trhovej cene ako pri klasickom Black-Scholesovom modeli.

Dôležité je si uvedomiť, že oceňovacie vzorce z fraktálneho Black-Scholesovho modelu platia pre všetky  $H \in (0, 1)$ . A hoci, ako sme spomínali v predchádzajúcich častiach práce, takto postavený fraktálny Black-Scholesov model nemá relevantnú ekonomickú interpretáciu, ceny získané jeho používaním dávajú lepšie (k trhovej cene bližšie) ceny ako klasický Black-Scholesov model.

Ešte lepšou z hľadiska blízkosti k trhovej cene sa javí metóda *Absolute Value Method*. V drivej väčšine prípadov (12 zo 16) sú ceny opcií vypočítané pomocou fraktálneho Brownovho pohybu s využitím  $H$  odhadnutého metódou *Absolute Value Method* bližšie k trhu než zvyšné metódy, ako dosvedčujú Tabuľky 8-11.

**Poznámka 3.1** *Všetky ceny opcií sme získali pre bezrizikovú úrokovú mieru  $r = 0,05$ . Voľba bezrizikovej úrokovej miery je dôležitá z dvoch dôvodov. Prvým je, že bezriziková úroková miera ako vstupný parameter do oceňovacích vzorcov ovplyvňuje samotnú hodnotu oceňovaného aktíva. Druhým je, že pri fraktálnom*



*Black-Scholesovom modeli môže ovplyvniť závery ohľadom úspešnosti metód slúžiacich na odhad Hurstovho indexu. Napríklad ak zvolíme  $r = 0,01$ , tak metóda Absolute Value Method sa už nebude javiť taká dominantná (čo sa týka presnosti výsledkov oceňovania), ako pri voľbe  $r = 0,05$ . Avšak pre relevantnosť výsledkov je dôležité pre výpočet používať skutočnú bezrizikovú úrokovú mieru, ktorá je v tomto prípade určená jednomesačnými americkými dlhopismi na úrovni  $r = 0,05$ .*

## Záver

Cieľom našej práce bolo overiť, či použitím fraktálneho Brownovho pohybu v praxi v podobe fraktálneho Black-Scholesovho modelu na oceňovanie opcií možno nahradiť zaužívaný Black-Scholesov model vychádzajúci z klasického exponenciálneho Brownovho pohybu. Na naplnenie tohto stanoveného cieľa sme zvolili primeranú štruktúru práce.

V prvej kapitole sme sa venovali základným vlastnostiam a charakteristikám fraktálneho Brownovho pohybu, ktoré boli potrebné na jeho pochopenie. Na konkrétnom príklade sme tiež ukázali existenciu arbitráže.

V druhej kapitole sme po teoretickej stránke priblížili metódy slúžiace na odhadovanie Hurstovho indexu z dát, ktorý slúžil ako vstupný parameter do fraktálneho Black-Scholesovho modelu.

V záverečnej kapitole sme zúročili nadobudnuté poznatky a získané odhady Hurstovho indexu a na reálnych dátach sme ocenili opcie s využitím klasického ako aj fraktálneho Black-Scholesovho modelu.

Pred samotným oceňovaním opcií sme z dát odhadovali Hurstov index. Použili sme šesť rôznych metód a zaujímalo nás časové obdobie 2008 – 2012 ako aj jednotlivé roky počnúc rokom 2006 a končiac rokom 2012. Pre tieto hodnoty sme skúmali súvis s trhovými ukazovateľmi, akými sú výnos a historická volatilita. Nepodarilo sa nám však preukázať žiadnu spojitosť medzi uvedenými charakteristikami.

Najdôležitejšou úlohou bolo skúmať, ktorá z cien opcií (Black-Scholesovská alebo fraktálna Black-Scholesovská) je bližšia k trhovej cene opcie. Pre prvotné porovnanie sme za vstupný parameter do fraktálneho Black-Scholesovho modelu zvolili Hurstov index získaný pomocou *RS* analýzy za obdobie 2008 – 2012. S výnimkou dvoch prípadov (spoločnosti IBM a Toll Brothers) sme dostali presnejšie (k trhovej cene bližšie) výsledky použitím fraktálneho Brownovho modelu.

Treba zdôrazniť, že lepšie výsledky sme dostali použitím fraktálneho Black-Scholesovho modelu aj napriek tomu, že takto koncipovaný model je v literatúre kritizovaný za absenciu zmysluplnej ekonomickej interpretácie.

Kvalitatívne lepšie výsledky sme dosiahli aj pri použití Hurstovho indexu zís-

kaného metódou *Absolute Value Method*. Až pre 12 spoločností z celkového počtu 16 bola cena opcií vypočítaná pomocou fraktálneho Black-Scholesovho modelu k trhovej cene bližšie ako cena získaná z klasického Black-Scholesovho modelu.

Pri voľbe správnej metódy na odhad Hurstovho indexu musíme byť obozretní, nakoľko pre rôzne metódy nemusíme dostať lepšie výsledky ako pri použití klasického Black-Scholesovho modelu.

V konečnom dôsledku dávala alternatívna metóda *Absolute Value Method* lepšie odhady Hurstovho indexu ako nami preferovaná *RS* analýza. Táto skutočnosť však nič nemení na fakte, že výsledky získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu boli k trhovej cene bližšie ako výsledky získané z klasického Black-Scholesovho modelu. To znamená, že používanie fraktálneho Brownovho pohybu v praxi má zmysel, keďže svojimi (oproti Brownovmu pohybu) pridanými vlastnosťami lepšie popisuje realitu na finančných trhoch.

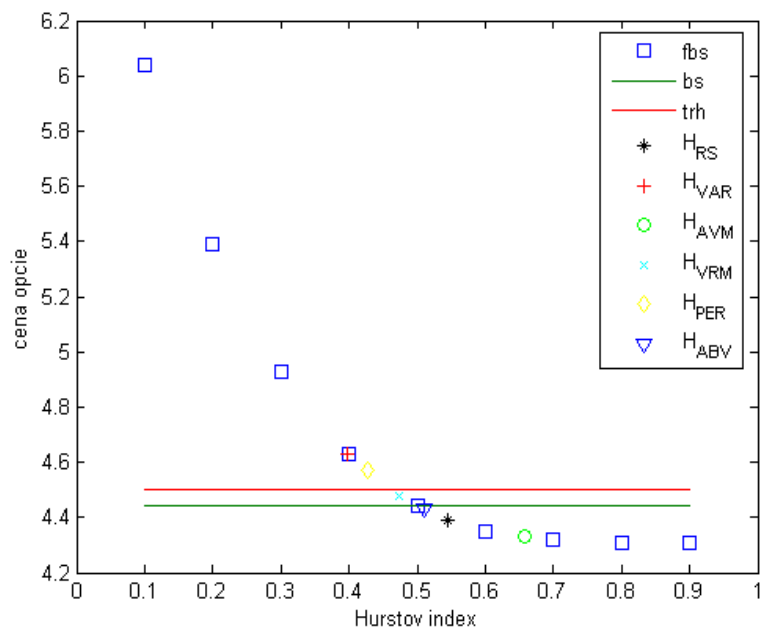
## Literatúra

- [1] BIAGINI, F. et al.: *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*. Springer, 2008. ISBN 978-1-85233-996-8.
- [2] BILLINGSLEY, P.: *Convergence of Probability Measures*. Second Edition, John Wiley & Sons, 1999. ISBN 978-0-471-19745-4.
- [3] BLACK, F., SCHOLES, M.: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3, 637-654, 1973.
- [4] BUNEA, F. et al: *Adaptive Inference for the Mean of a Gaussian Process in Functional Data*. Journal of the Royal Statistic Society, Vol. 73, No. 4, 531-558, 2011.
- [5] COUTIN, L., CARMONA, P.: *Fractional Brownian Motion and Markov Property*. Electronic Communications in Probability, Vol. 3, No. 4, 95-107, 1998.
- [6] CHERIDITO, P.: *Arbitrage in fractional Brownian motion models*. Finance and Stochastics, Vol. 7, No. 4, 533-553, 2003.
- [7] DELBAEN, F., SCHACHERMAYER, W.: *The Mathematics of Arbitrage*. Springer, 2005. ISBN 978-3-540-21992-7.
- [8] DIEKER, T.: *Simulation of fractional Brownian motion*. Diploma Thesis, University of Amsterdam, 2004.
- [9] EDMONDS, A.N.: *Time series prediction using supervised learning and tools from chaos theory*. Dissertation Thesis, University of Luton, 1996.
- [10] ELLIOTT, R.J.: *Itô Formulas for Fractional Brownian Motions*. University of Calgary
- [11] HU, Y., ØKSENDAL, B.: *Fractional white noise calculus and applications to finance*. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol. 6, No. 1, 1-32, 2003.
- [12] KAPLAN, I.: *Estimating the Hurst Exponent*. Dostupné na internete: [http : //www.bearcave.com/misl/misl\\_tech/wavelets/hurst/](http://www.bearcave.com/misl/misl_tech/wavelets/hurst/).

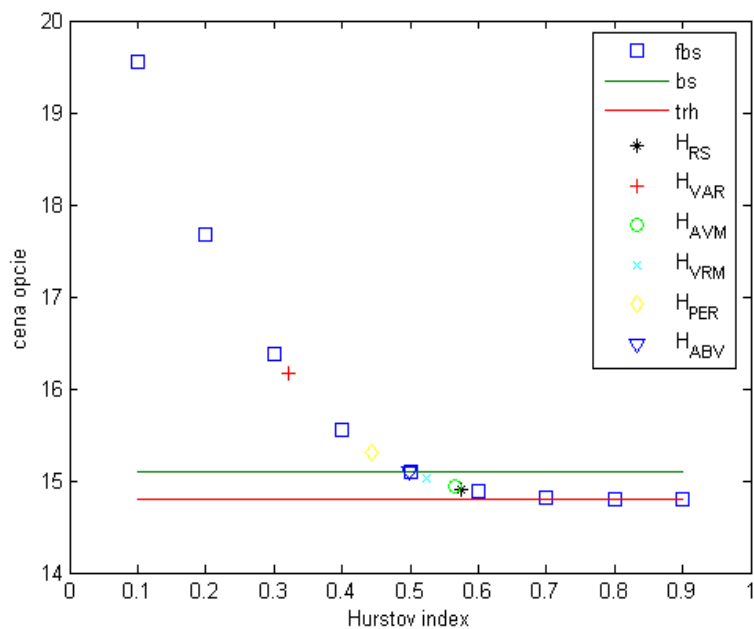
- [13] KARAGIANNIS, T., FALOUTSOS, M.: *SELFIS: A Tool for Self-Similarity and Long-Range Dependence Analysis*. First Workshop on Fractals and Self-Similarity in Data Mining: Issues and Approaches, Edmonton, 2002.
- [14] KOLMOGOROV, A. N.: *Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum*. C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS 26, 115-118, 1940.
- [15] KRZYWDA, M.: *Fractional Brownian Motion and Applications to Financial Modelling*. Diploma Thesis, Jagellonian University, Krakow, 2011.
- [16] LALLEY, S.P.: *Gaussian Processes; Kolmogorov-Chentsov Theorem*. Lecture Notes. University of Chicago. 2011.
- [17] MANDELBROT, B. B., VAN NESS, J. W.: *Fractional Brownian motion, fractional noises and applications*. Siam Review. Vol. 10, No. 4, 422-437, 1968.
- [18] MELICHERČÍK, I. et al.: *Kapitoly z finančnej matematiky*. Epos, 2005. ISBN 80-8057-651-3.
- [19] NECULA, C.: *Option Pricing in a Fractional Brownian Motion Environment*. Mathematical Reports, Vol. 6, No. 3, 2004.
- [20] NUALART, D.: *Stochastic Integration with Respect to Fractional Brownian Motion and Applications*. Contemporary Mathematics. Vol. 336, 3-39, 2003. ISBN 978-0-8218-3466-4.
- [21] NUALART, D.: *Fractional Brownian motion: stochastic calculus and applications*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Madrid. 2006.
- [22] NUALART, D., TAQQU, M.S.: *Wick-Itô formula for Gaussian processes*. Stochastic Analysis and Applications. Vol. 24, No. 3, 599-614, 2006.
- [23] QIAN, B., RASHEED, K.: *Hurst exponent and financial market predictability*. IASTED Conference of Financial Engineering and Applications, 203-209, 2004.

- [24] REVUZ, D., YOR, M.: *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Third Edition, Springer, 1999. ISBN 3-540-64325-7.
- [25] ROGERS, L. C. G.: *Arbitrage with fractional Brownian motion*. Mathematical Finance, Vol. 7, 95-105, 1997.
- [26] ROGERS, L. C. G., WILLIAMS, D.: *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Volume 1, Foundations*. Second Edition. Cambridge University Press, 2000. ISBN 0-521-77594-9.
- [27] SARKAR, S.: *Fractional Brownian Motion: Long range dependency, Markov property, Simulation strategy-A review*. Stochastic Process Course. 2008.
- [28] ŠEVČOVIČ, D., STEHLÍKOVÁ, B., MIKULA, K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. Nakladateľstvo STU, 2009. ISBN 978-80-227-3014-3.
- [29] SHIRYAEV, A. N.: *On Arbitrage and Replication for Fractal Models*. MaPhySto, Department of Mathematical Sciences, University of Aarhus, 1998.
- [30] TAQQU, M.S., TEVEROVSKY, V.: On Estimating the Intensity of Long-Range Dependence in Finite and Infinite Variance Time Series. In ADLER, R.J. et al. *A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications*. Boston: Birkhäuser. 1998, 177-217.
- [31] ZITKOVIC, G.: *Introduction to Stochastic Processes - Lecture Notes*. 2010.

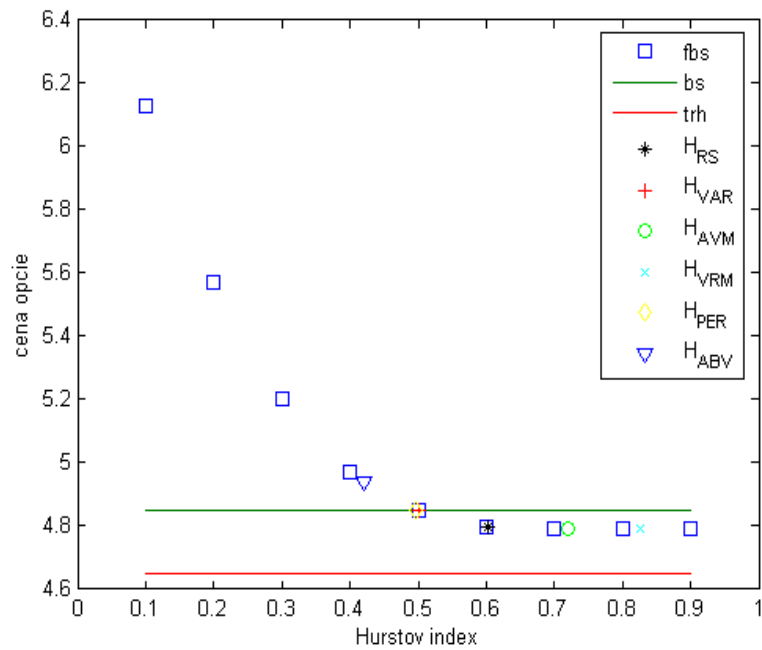
## A Príloha



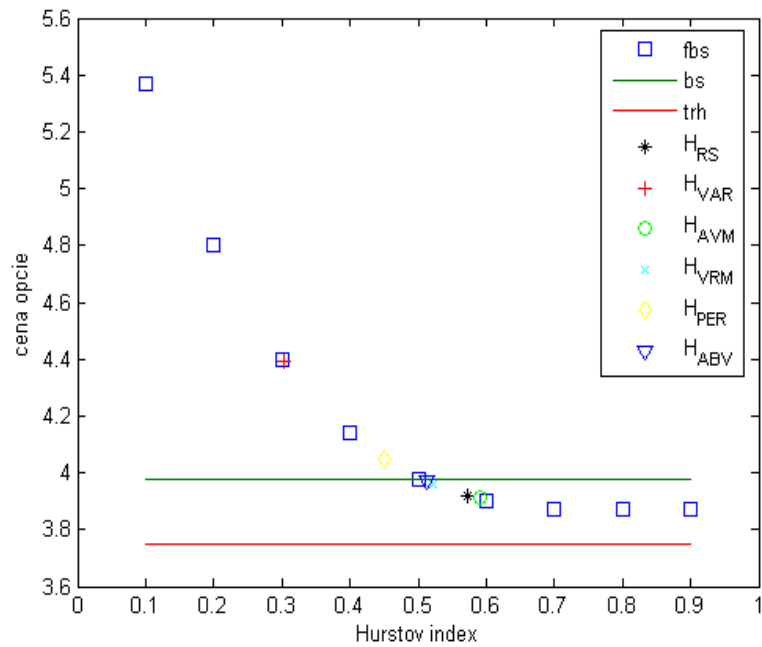
Obr. 16: Ceny opcie na akciu firmy Toll Brothers získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou



Obr. 17: Ceny opcie na akciu firmy Stratasys získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou

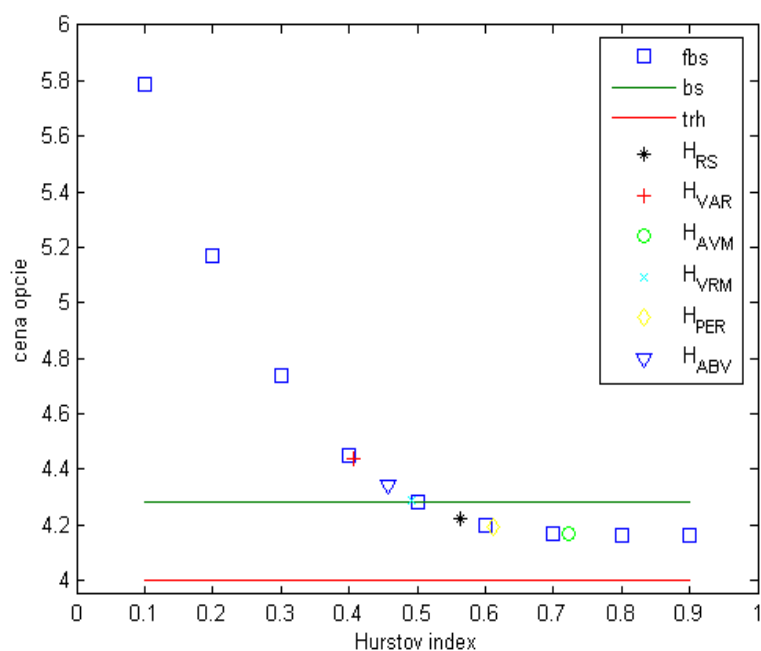


Obr. 18: Ceny opcie na akciu firmy AIG získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou

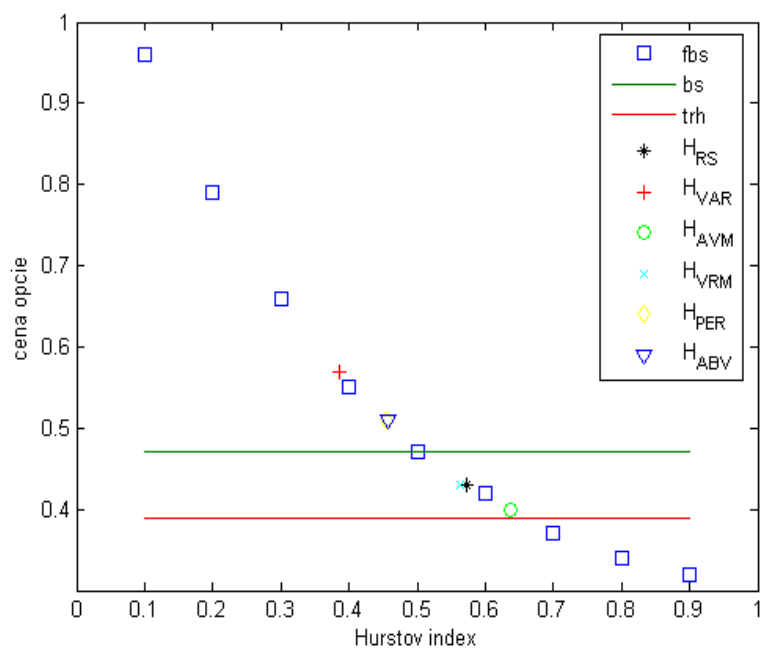


Obr. 19: Ceny opcie na akciu firmy Walt Disney získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou

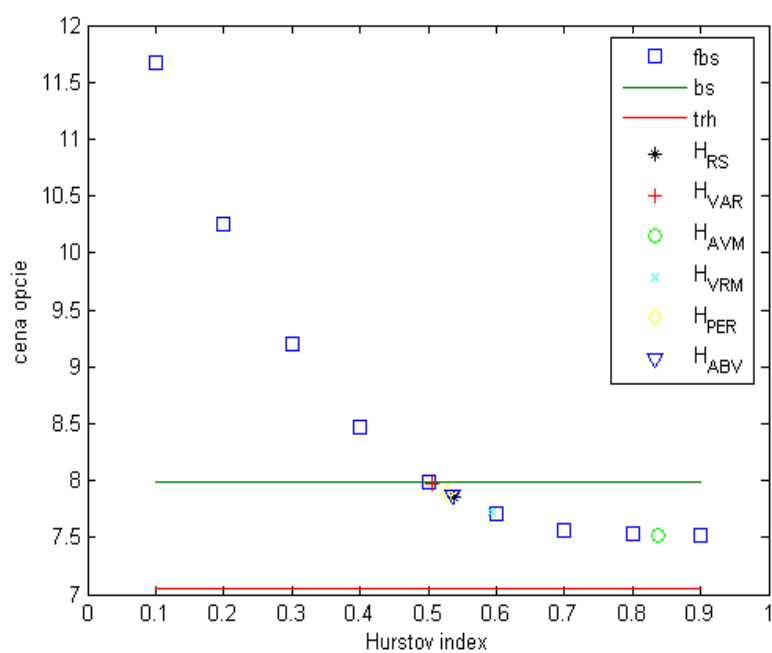




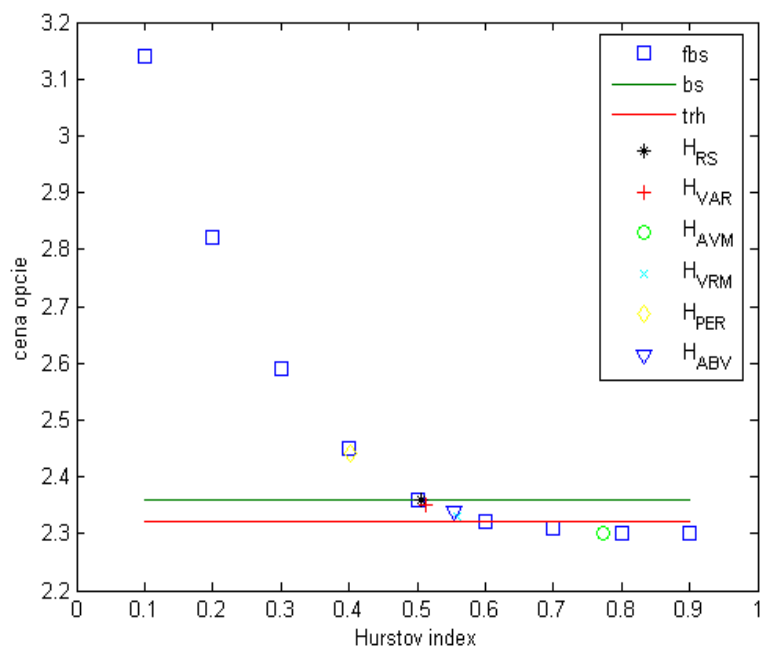
Obr. 20: Ceny opcie na akciu firmy Walmart získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou



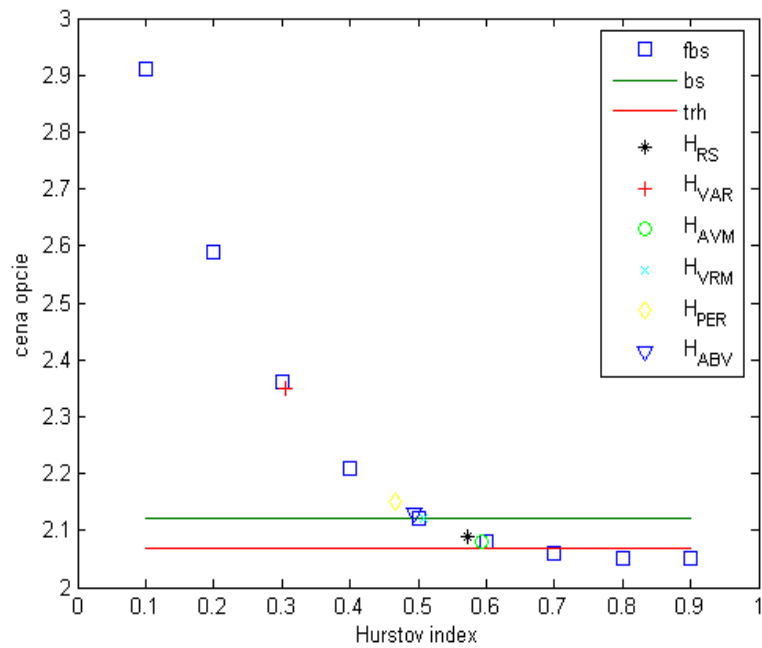
Obr. 21: Ceny opcie na akciu firmy Alcoa získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou



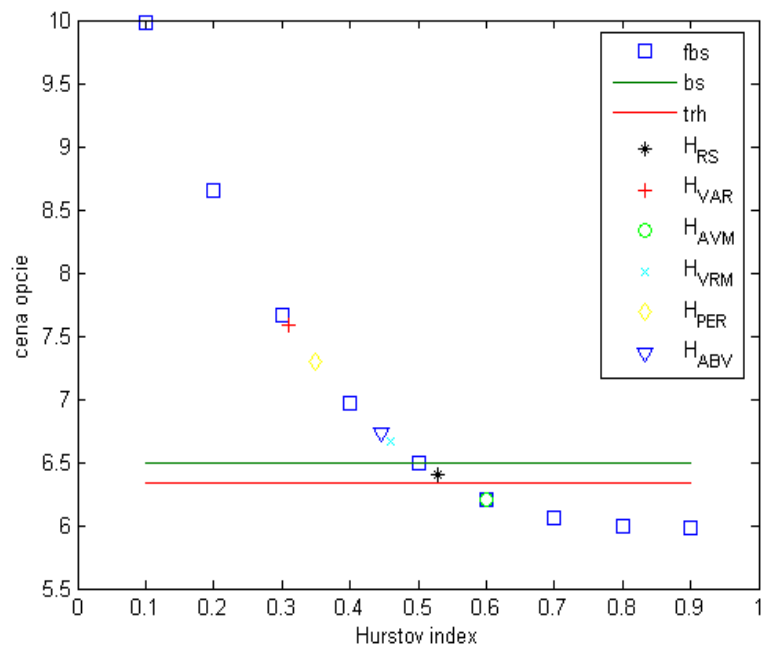
Obr. 22: Ceny opcie na akciu firmy Coca Cola získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou



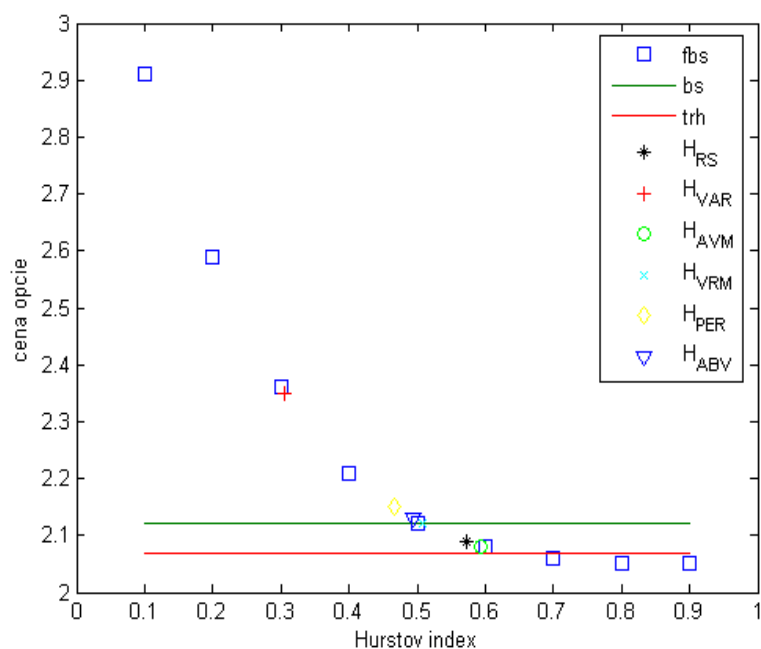
Obr. 23: Ceny opcie na akciu firmy Vale získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou



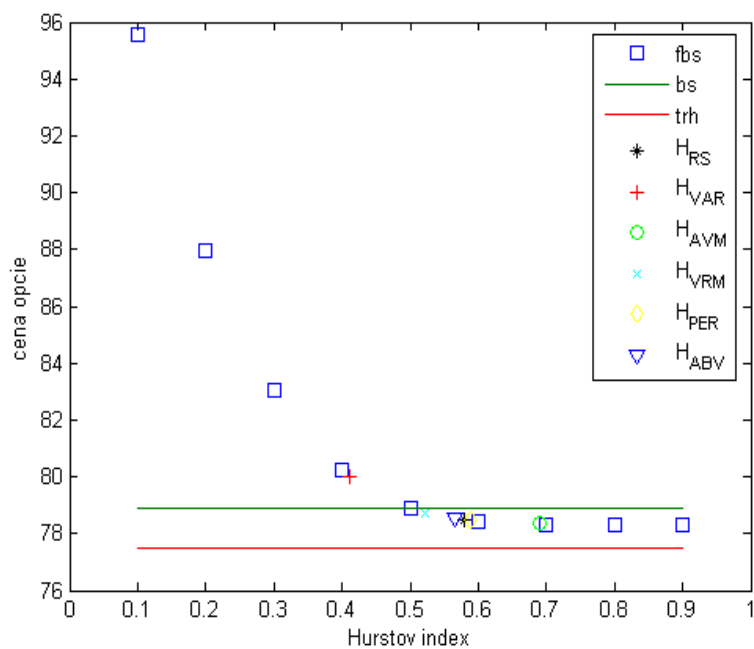
Obr. 24: Ceny opcie na akciu firmy Microsoft získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou



Obr. 25: Ceny opcie na akciu firmy Nike získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou



Obr. 26: Ceny opcie na akciu firmy Microsoft získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou



Obr. 27: Ceny opcie na akciu firmy Google získané z fraktálneho Black-Scholesovho modelu v porovnaní s trhovou a Black-Scholesovou cenou