UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

HTM dlhopisy v dlhopisovom portfóliu

Diplomová práca

Bratislava 2013

Tomáš Malik

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

HTM dlhopisy v dlhopisovom portfóliu

Diplomová práca

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce: Doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2013

Tomáš Malik

98614659

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Bc. Tomáš Malik
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor:	9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	diplomová
Jazyk záverečnej práce:	slovenský

Názov: HTM dlhopisy v dlhopisovom portfóliu

Cieľ: Dlhopisy s dlhšou maturitou predstavujú pre portfólio riziko značného pohybu cien v krátkom časovom období. Na druhej strane poskytujú vyššie výnosy. Jedným zo spôsobov ako sa vyhnúť spomínanej nevýhode je označiť dlhopis ako HTM (held-to-maturity). Takýto dlhopis nie je oceňovaný trhovo, ale počiatočným výnosom do splatnosti. Nevýhodou však je, že HTM dlhopis nie je možné predať. Práca sa bude zaoberať problémom optimálneho množstva a skladby HTM dlhopisov v portfóliu.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum zadania: 25.01.2012

Dátum schválenia: 26.01.2012

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry a ďalších zdrojov.

Bratislava 23.04.2013 ....

Tomáš Malik

Poďakovanie

Týmto by som chcel poďakovať Doc. Mgr. Melicherčíkovi, PhD za odbornú pomoc, cenné rady, konzultácie a trpezlivosť pri vypracovávaní diplomovej práce.

Abstrakt

MALIK, Tomáš: *HTM dlhopisy v dlhopisovom portfóliu* [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a Štatistiky; Školiteľ:Doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD. , Bratislava, 2013, 50 s.

V diplomovej práce predstavíme stručne dôchodkový systém na Slovensku, predovšetkým druhý pilier. Predstavíme aj základný model pre tvorbu dlhopisového portfólia založený na myšlienke cash-flow párovania. Do modelu zavádzame maximalizáciu konečnej hodnoty, ako aj dva spôsoby oceňovania dlhopisov (trhové ocenenie a metódu umorovanej hodnoty) po vzore legislatívnych úprav druhého piliera. Ďalej predstavujeme ohraničenia, ktoré majú zamedziť prepad hodnoty portfólia v prípade alternatívneho vývoja úrokových mier a taktiež ohraničenia obmedzujúcu maximálnu expozíciu voči jednotlivým ako aj HTM dlhopisom. Následne predstavujeme dve verzie modelu so strednou hodnotou. Na záver pridávame do modelu možnosť predaja AFS dlhopisov.

Kľúčové slová: dlhopis, výnos do splatnosti, trhové ocenenie, metóda umorovanej hodnoty, HTM, AFS, CF párovanie, dlhopisové portfólio, dôchodkový systém, druhý pilier.

Abstract

MALIK, Tomáš: *HTM bonds in bond portfolio* [diploma thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of mathematics, physics and informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava, 2013, 50 p.

The diploma thesis briefly describes pension system in Slovakia, especially the second pillar. We introduce a basic model for bond portfolio optimization based on cash-flow matching. We change the model so that we maximize the terminal value of the portfolio. We also add the possibility to value bonds with two different valuation methods - market valuation and amortized cost method. Amotized cost method is added due to the legislative changes of the second pillar. Later, we present constraints to prevent a decsrease in portfolio value in case the interest rates move. Constraints limiting the maximum HTM portion of the protfolio are added, too. Afterwards we present two versions of the model where mean value of the portfolio is maximized. Finally, we add the possibility of selling AFS bonds.

Key words: bond, yield to maturity, market value, amortized cost method, HTM, AFS, CF matching, bond portfolio, pension system, second pillar.

Obsah

Úvod

Na Slovensku dochádzalo v priebehu posledných rokoch k významným legislatívnym zmenám v dôchodkovom systéme. Zmeny sa týkali predovšetkým druhého sporiaceho piliera. V roku 2011 došlo k významným zmenám v ponúkaných fondoch, ako aj ich vlastnostiach.

Diplomová práca sa zaoberá tvorbou dlhopisového portfólia, ekvivalentom garantovaného dlhopisového dôchodkového fondu, ktorý zo zákona ponúkajú dôchodkové správcovské spoločnosti - DSS. Cieľom práce je zahrnúť vlastnosti garantovaného dlhopisového fondu do modelu, ktorý riadi dlhopisové portfólio.

Prínosom práce je zakomponovanie dvoch typov oceňovania dlhopisov, trhového a metódou umorovanej hodnoty, do modelov založených na cash-flow párovaní. Zaujíma nás zloženie dlhopisového portfólia, množstvo nakúpených AFS a HTM dlhopisov, v závislosti od očakávanej časovej štruktúry úrokových mier. Taktiež nás zaujíma zmena tohoto zloženia v prípade alternatívneho vývoja úrokových mier, ako aj závislosť zloženia od výšky transakčných nákladov.

V prvej časť diplomovej práce sú stručne zhrnuté základné informácie a vlastnosti dlhopisov. Uvádzajú sa možnosti ich oceňovania a citlivosť na rôzne parametre.

Následne v druhej kapitole je predstavený dôchodkový systém na Slovensku a jeho tri piliere. Podrobnejšie je predstavený druhý pilier a jeho predstavitelia - DSS. Vysvetľujú sa legislatívne úpravy podnikania, ako aj možnosti investovania sporiteľov do rôznych fondov. Ďalej sa vysvetľujú parametre garantovaného dlhopisového fondu, jeho legislatívne úpravy a povolené spôsoby oceňovania - trhový spôsob a metóda umorovanej hodnoty. V závere druhej kapitoly sú vymenované odplaty, na ktoré má DSS nárok, ako aj podmienky pre ich vznik.

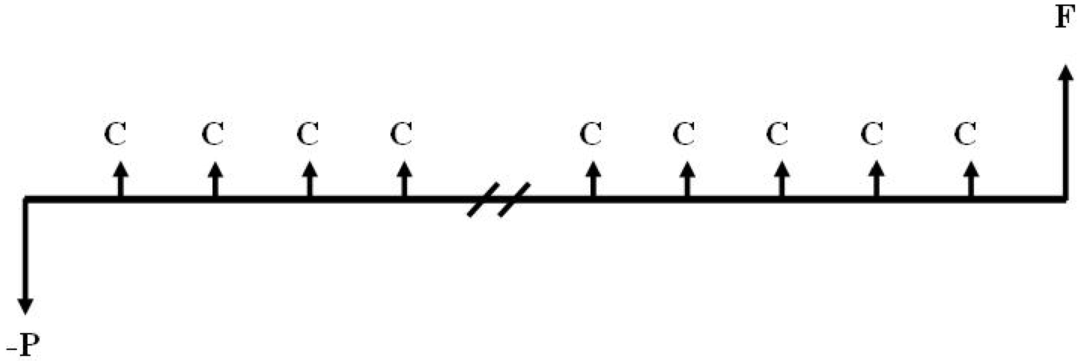
V tretej kapitole sa predstavuje základná myšlienka tvorby dlhopisového portfólia pomocou metódy cash-flow párovania, ktorej sa venujú autori Nielsen a Zenios v prácach [2, 3, 4]. Uvádzajú sa dva prístupy k tvorbe dlhopisového portfólia, minimalizačný a maximalizačný, pričom sa uvádzajú ich výhody aj nevýhody.

V štvrtej a piatej kapitole sa ďalej rozvíja maximalizačná úloha. Do úlohy je pridaná možnosť vlastniť dlhopisy v čase T. Po vzore legislatívnych úprav je do modelu pridaná možnosť oceňovať dlhopisy dvoma prístupmi - trhovým a metódou umorovanej hodnoty. Vznikajú tak dve kategórie dlhopisov - AFS a HTM. Zároveň sú do modelu pridané rôzne ohraničenia a podmienky na minimálnu hodnotu portfólia v čase v prípade, ak nastane iný ako očakávaný vývoj časovej štruktúry úrokových mier. Taktiež sú pridané ohraničenia na maximálnu expozíciu voči HTM dlhopisom, ako aj maximálne podiely jednotlivých dlhopisov na hodnote portfólia.

V poslednej šiestej kapitole sa uvádzajú rozšírenia modelu. Uvádzajú sa dve verzie úlohy, kde sa maximalizuje stredná hodnota portfólia. Následne sa dosiahnuté výsledky porovnávajú. Na záver je do modelu pridaná aj možnosť predaja dlhopisov, pričom sa uvádzajú a porovnávajú výstupy s rôznymi transakčnými nákladmi.

1 Dlhopisy

Dlhopis je cenný papier, pri ktorom sa dlžník zaväzuje zaplatiť v stanovenom čase istinu (nominálnu hodnotu dlhopisu) a zároveň v pravidelných, vopred dohodnutých, intervaloch vyplácať kupón. Kupujúci má teda na začiatku výdavok vo forme ceny, ktorú za dlhopis zaplatí, a následne má príjmy vo forme kupónov a istiny. Cash-flow môžeme schematicky znázorniť nasledovne, kde P predstavuje cenu dlhopisu, C jeho kupón a F istinu [1].



1.1 Oceňovanie dlhopisov

Pri oceňovaní dlhopisov si musíme uvedomiť, že platby prichádzajú v rôznom čase a teda významnú úlohu tu hrá časová hodnota peňazí. Jedno euro dnes a jedno euro o 10 rokov nemajú rovnakú hodnotu. Pre správne porovnanie treba ich hodnotu vyjadriť v rovnakom čase. Takisto aj CF plynúci z dlhopisu treba oddiskontovať do rovnakého času, aby sme mohli určiť správnu hodnotu dlhopisu. Uvažujme zatiaľ pre zjednodušenie, že kupóny sú vyplácané práve raz ročne [1].

$$P = \sum_{i=1}^{T} \frac{C}{(1+r_i)^i} + \frac{F}{(1+r_T)^T} \tag{1}$$

Pre určenie hodnoty dlhopisu sme použili diskrétne úročenie. V prípade, že máme M peňazí na začiatku, tak po t rokoch a pri úroku r_d sa náš obnos zmení na $M(1+r_d)^t$. Limitným prechodom z diskrétneho úročenia môžeme prejsť na úročenie spojité. Pre oddiskontovanie jednotlivých platieb môžeme teda okrem diskrétneho úročenia, použitého hore, využiť aj spojité úročenie. V prípade spojitého úročenia sa náš obnos peňazí zmení na $Me^{r_s t}$. Súčasnú hodnotu peňažného toku vyjadríme pomocou spojitého úročenia nasledovne:

$$P = \sum_{i=1}^{T} Ce^{-r(t)t} + Fe^{-r(T)T} \tag{2}$$

Pre správne oddiskontovanie jednotlivých platieb treba použiť správnu úrokovú mieru. Tá vyplýva z momentálnej časovej štruktúry úrokových mier.

1.2 Výnos do splatnosti

Pre ľahšie porovnávanie rôznych dlhopisov s rôznymi dobami splatnosti, kupónmi a istinou sa uvádza ich dôležitý parameter - výnos do splatnosti (yield to maturity - YTM). Výnos do splatnosti je miera výnosu dlhopisu počas jeho životnosti. Ten je definovaný v prípade diskrétneho úročenia nasledovne:

$$P = \sum_{i=1}^{T} \frac{C}{(1 + r_{YTM})^i} + \frac{F}{(1 + r_{YTM})^T} \tag{3}$$

a v prípade spojitého úročenia

$$P = \sum_{i=1}^{T} Ce^{-r_{YTM}t} + Fe^{-r_{YTM}T} \tag{4}$$

r_{YTM} je vnútorná miera návratnosti (internal rate of return - IRR) pre dlhopisový CF. Vďaka tomuto úroku môžeme ľahšie porovnávať povedzme vnútornú výnosnosť dvoch dlhopisov, s rovnakou maturitou, ale rôznymi kupónmi.

V prípade, že výnos do splatnosti bude rovnaký ako kupón (v percentuálnom vyjadrení oproti nominálu), bude sa cena dlhopisu rovnať jeho nominálnej hodnote. Takéto dlhopisy voláme Par dlhopisy.
Ak bude výnos do splatnosti väčší ako kupón, hodnota dlhopisu bude menšia ako jeho nominál - v anglickej terminológii sa s takéto dlhopisy "sell at a discount" - predávajú so "zľavou".
Naopak, ak je výnos do splatnosti menší ako kupón, dlhopisy sa predávajú s "prirážkou" - "sell at a premium"[16].

1.3 Durácia

Okrem výnosu dlhopisu je nemenej dôležitým parametrom aj doba splatnosti. Avšak podobne ako veľkosť kupónu ešte nehovorí o výnosnosti dlhopisu, ani doba splatnosti nepopisuje presne ako rýchlo sa majiteľ dlhopisu dostane ku svojím peniazom.

Predstavme si dva dlhopisy s rovnakou dobou splatnosti, ale ktoré sa líšia výškou kupónu. Je zrejmé, že dlhopis s vyšším kupónom nám poskytne investované peniaze skôr. Veličina, ktorá popisuje priemernú lehotu splatnosti dlhopisu sa volá durácia. Okrem toho, že durácia zohľadňuje časovú hodnotu peňazí pri splácaní, dá sa pomocou nej vyjadriť aj miera citlivosti dlhopisu na pohyb úrokových mier [1].

1.3.1 Fisher-Weilova durácia

Majme spojito úročené aktívum, ktoré nám poskytuje postupné platby X_{t_i}. Hodnota tohto peňažného toku v čase 0 je potom

$$PV = \sum_{i=1}^{N} X_{t_i} e^{-r_{t_i} t_i} \tag{5}$$

Následne môžeme definovať Fisher-Weilovu duráciu D_{FW}

$$D_{FW} = \frac{1}{PV} \sum_{i=1}^{N} t_i X_{t_i} e^{-r_{t_i} t_i} \tag{6}$$

V predchádzajúcom vzťahu môžeme vyjadriť váhy jednotlivých platieb nasledovne: $w_i = \frac{1}{PV} X_{t_i} e^{-r^{t_i} t_i}$ pričom platí $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$. Váhy vyjadrujú aký pomer tvoria jednotlivé platby odúročené do času 0 oproti cene daného aktíva. Fisher-Weilova durácia sa dá vyjadriť nasledovným spôsobom

$$D_{FW} = \sum_{i=1}^{N} w_i t_i \tag{7}$$

Môžeme vidieť, že durácia predstavuje vážený priemer časov jednotlivých platieb - priemernú dobu splatnosti daného dlhopisu.
Keďže sa D_{FW} počíta v rovnakých časových jednotkách ako t_i, môžeme vyjadriť nasledovnú nerovnosť $t_1 \leq D_{FW} \leq t_n$. V prípade, že sa jedná o bezkupónový dlhopis, tak platí $D_{FW} = T$, nakoľko máme iba jednu platbu, nominál dlhopisu, v čase T.

Pre ukážku vzťahu durácie dlhopisu a jeho citlivosti na posun úrokových mier uvažujme paralelný posun úrokovej krivky o λ. Hodnota peňažného toku v čase 0 bude

$$PV(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} X_{t_i} e^{-(r_{t_i}+\lambda) t_i} \tag{8}$$

Derivovním podľa λ dostávame rovnicu vyjadrujúcu vzťah zmeny úrokovej miery pomocou durácie

$$\left.\frac{dPV(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = -\sum_{i=1}^{N} t_i X_{t_i} e^{-r^{t_i} t_i} = -PVD_{FW} \tag{9}$$

V prípade aproximácie $\frac{dPV}{d\lambda} \sim \frac{\Delta PV}{\Delta\lambda}$ a po prenásobení $\Delta\lambda$ dostávame

$$\Delta PV \sim -PV.D_{FW}.\Delta\lambda \tag{10}$$

V prípade, že za λ dosadíme malý (deriváciu iba aproximujeme) paralelný posun úrokovej miery, dostávame približnú zmenu hodnoty peňažného toku v čase 0.
Ak úroková miera rastie, hodnota dlhopisu klesá a naopak. Pri raste úrokových mier predpokladáme, že máme príležitosť lepšie investovať aj iným spôsobom a teda dlhopis pre nás už nie je tak zaujímavý ako predtým. To sa prejaví na poklese jeho ceny.

Okrem dlhopisov, môžeme duráciu zisťovať aj pre celé dlhopisové portfólia. Namiesto prichádzajúcich platieb X_{t_i} jedného dlhopisu, môže X_{t_i} predstavovať súhrnné platby z celého portfólia. Durácia portfólia má rovnaký význam ako v prípade jedného dlhopisu, akurát popisuje priemernú dobu splatnosti celého portfólia. Taktiež vieme vyjadriť aj citlivosť celého portfólia na zmenu úrokovej miery naraz.

1.3.2 Kvázimodifikovaná durácia

Obdobný postup ako pri spojitom úročení môžeme použiť v prípade diskrétneho úročenia. Predpokladajme teda úročenie m-krát ročne. Pre súčasnú hodnotu CF máme

$$PV = \sum_{i=1}^{N} X_i \left(1 + \frac{r_i}{m}\right)^{-i} \tag{11}$$

Nech sa úroková miera r_i posunie o λ. Hodnota peňažného toku bude potom

$$PV(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} X_i \left(1 + \frac{r_i + \lambda}{m}\right)^{-i} \tag{12}$$

Rovnicu zderivujeme podľa λ, aby sme vedeli vyjadriť citlivosť na zmenu úrokovej miery

$$\left.\frac{dPV(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = -\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{i}{m}\right) X_i \left(1 + \frac{r_i}{m}\right)^{-i-1} \tag{13}$$

Rovnicu vydelíme $-PV(0)$ a kvázimodifikovaná durácia D je definovaná nasledovne

$$D_Q \equiv -\frac{1}{PV(0)}\frac{dPV(0)}{d\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{m}\right) X_i \left(1+\frac{r_i}{m}\right)^{-i-1}}{\sum_{i=1}^{N} X_i \left(1+\frac{r_i}{m}\right)^{-i}} \tag{14}$$

Podobne, ako v spojitom prípade pri Fisher-weilovej durácii, môžeme definovať váhy w_i. Kvôli derivácii polynómu nám v rovnici XY pribudol člen $\left(1+\frac{r_i}{m}\right)^{-1}$ a suma váh teda nedáva 1 ako pri spojitom prípade

$$w_i = \frac{1}{PV} X_i \left(1+\frac{r_i}{m}\right)^{-i-1} \tag{15}$$

Zmenu hodnoty peňažného toku môžeme vyjadriť rovnako ako v spojitom prípade

$$\Delta PV \sim -PV.D_Q.\delta\lambda \tag{16}$$

1.3.3 Macaulayová durácia

V praxi sa často využíva aj Macaulayová durácia, ktorá je obdobou kvázimodifikovanej durácie. Namiesto jednotlivých úrokov r_i pracujeme ale s výnosom do splatnosti r_{YTM}. Majme súčasnú hodnotu peňažného toku definovanú pomocou výnosu do splatnosti

$$PV = \sum_{i=1}^{N} X_i \left(1+\frac{r_{YTM}}{m}\right)^{-i} \tag{17}$$

Macaulayovú duráciu potom definujeme ako

$$D = \frac{1}{PV}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{m}\right) X_i \left(1+\frac{r_{YTM}}{m}\right)^{-i-1} \tag{18}$$

V prípade, že chceme odvodiť vzťah medzi paralelným posunom úrokovej mieri o λ, musíme využiť modifikovanú Macaulayovú duráciu, ktorá sa líši od tej klasickej iba členom $\frac{1}{1+\frac{\lambda}{m}}$

$$D_M = \frac{D}{1+\frac{\lambda}{m}} \tag{19}$$

A vzťah pre citlivosť na zmenu úrokovej miery je potom

$$\Delta PV \sim -PV.D_M.\delta\lambda \tag{20}$$

2 DSS

Slovenský dôchodkový systém má od 1.januára 2005 tri piliere. Dôchodky pochádzajúce z prvého piliera, dôchodkové poistenie, vypláca Sociálna poisťovňa. Druhý pilier, starobné dôchodkové sporenie, zabezpečujú súkromné dôchodkové správcovské spoločnosti - DSS. Tretí pilier predstavuje doplnkové dôchodkové sporenie, zabezpečované doplnkovými dôchodcovskými spoločnosťami - DDS [5].

2.1 Dôchodkový systém na Slovensku

I. pilier sa označuje aj ako priebežný systém a je úzko previazaný s ekonomickou aktivitou občanov ako aj s ich príjmom. Priebežným sa nazýva kvôli systému, kde vyzbierané poistné slúži na vyplácanie dávok pre poberateľov. Vďaka zásluhovosti je v systéme veľká prepojenosť medzi výškou poskytovaných dávok a zaplateného poistného - zjednodušene povedané, čím väčšie poistenie poistenec platí, tým má nárok na väčšie dávky [5].

Osoba sa môže nachádzať iba v prvom pilieri, avšak pri zapojení sa do druhého piliera, takzvaného kapitalizačného, je daná osoba automaticky zúčastnená aj v prvom pilieri - nachádzať sa samostatne v druhom pilieri nie je možné. Kým v prvom pilieri sa odvádza poistné, 18% z vymeriavacieho základu, do sociálnej poisťovne, v prípade druhého piliera sa toto poistné delí, aktuálne 14% ku 4%, medzi sociálnu poisťovňu a DSS.
Druhý pilier je príspevkovo definovaný - výška budúceho dôchodku závisí od výšky príspevkov, dĺžky sporenia, zhodnotenia úspor a v neposlednom rade aj od spôsobu poberania dôchodku [5, 6].

Napriek tomu, že doplnkové dôchodkové poistenie je označované ako tretí pilier, bolo založené skôr ako druhý pilier - v júli 1996. Tretí pilier je dobrovoľný, pričom jeho cieľom bolo primárne zabezpečiť doplnkový príjem počas poberania dôchodku pre osoby, ktorých vykonávaná práca je zaradená do 3 a 4 rizikovej kategórie[1]. V súčasnosti je ale atraktívny aj pre iných účastníkov a to vďaka možným príspevkom zamestnávateľa.

[1]Riziková práca je práca, pri ktorej je zvýšené nebezpečenstvo vzniku choroby z povolania, profesionálnej otravy alebo iného poškodenia zdravia v súvislosti s prácou. Je to práca zaradená do tretej a štvrtej kategórie. O zaradení práce do tretej a štvrtej kategórie rozhoduje regionálny úrad verejného zdravotníctva na základe návrhu zamestnávateľa alebo z vlastného podnetu[14].

Pre toho je časť príspevkov odpočítateľnou položkou zo základu dane [5, 7, 12].

Osoba po dosiahnutí dôchodkového veku môže poberať dôchodok z troch zdrojov:

- dôchodok zo sociálnej poisťovne - I. pilier
- dôchodok z DSS (z nasporených prostriedkov) - II. pilier
- doplnkový dôchodok z DDS (z nasporených prostriedkov) - III. pilier

2.2 Vývoj II. piliera

Medzi hlavné motívy zavedenia II. piliera na Slovensku bol demografický vývoj. Na Slovensku, podobne ako ja v iných vyspelých krajinách, dochádza k starnutiu populácie - dochádza k poklesu pôrodnosti a predlžovaniu očakávanej dĺžky života. To spôsobuje problém pri zabezpečovaní dôchodkov - kým v roku 2012 pripadalo na jedného dôchodcu 5,2 ekonomicky aktívnych ľudí (vek 18 - 64 rokov), v roku 2060 to bude iba 1,6 [13]. Aj keď zároveň rastie produktivita práce, v budúcnosti sa otvára otázka, či bude schopná Sociálna poisťovňa zabezpečovať dôchodky v rovnakej podobe ako teraz. Zavedením druhého piliera dochádza v súčasnosti k veľkým výpadkom v príjmoch Sociálnej poisťovni (kvôli odvodom, ktoré idú DSS), avšak v budúcnosti, keď bude menej pracujúcich je otázne či Sociálnou poisťovňou vyzbierané peniaze budú stačiť na priebežne vyplácanie dôchodkov. II pilier zavádza možnosť sporenia si na účtoch DSS vo forme dôchodkových fondov a tak umožní odľahčenie I. piliera v budúcnosti - dôchodky budú vyplácané z nasporených prostriedkov [5, 6].

Druhý pilier vznikol 1. januára 2005 schválením zákona č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení. Od vtedy bol tento zákon niekoľkokrát novelizovaný a fungovanie druhého piliera sa značne zmenilo. Pri schválení zákona bol stanovený podiel vyzbieraných odvodov 9% : 9% pre Sociálnu poisťovňu a DSS. Prvými zmenami, ktorými zákon o starobnom dôchodkovom sporení prešiel, bolo upravenie odplát pre DSS za správu a zhodnotenie investícií (zákon č. 677/2006 Z. z).

Zákonom č. 555/2007 Z. z. došlo k úprave fungovania DSS - bližšie sa definovalo riadenie rizík, dedenie úspor, ale v neposlednom rade sa otvoril druhý pilier pre vstup a výstup. Obdobne, zákonom č. 434/2008 Z. z, sa druhý pilier opätovne otvoril pre vstup a výstup klientov. Odplata DSS sa menila aj zákonom č. 137/2009 Z. z.

Veľké zmeny do fungovania DSS zaviedol zákon č. 334/2011 Z. z - došlo k zmene názvov jednotlivých fondov spravovaných DSS:

- z konzervatívneho d.f. vzniká dlhopisový d.f.
- z vyváženého d.f. vzniká zmiešaný d.f.
- z rastového d.f. vzniká akciový d.f.
- možnosť vytvorenia indexového d.f., ktorý kopíruje vývoj vybraného finančného indexu.

Zákonom sa rovnako upravuje aj odplata DSS za spravovanie a zhodnocovanie úspor. Okrem odplát sa menia aj garancie DSS pre zhodnotenie prostriedkov klientov - garancie zostávajú iba v dlhopisovom fonde. Zároveň došlo aj k zmenám vo fungovaní dôchodkových fondov - menia sa obmedzenia pre zloženie jednotlivých fondov.
K zmene v odplatách došlo aj zákonom č. 546/2011 Z. z, ktorý zaviedol opätovne odplatu za zhodnotenie dlhopisového dôchodkového fondu.

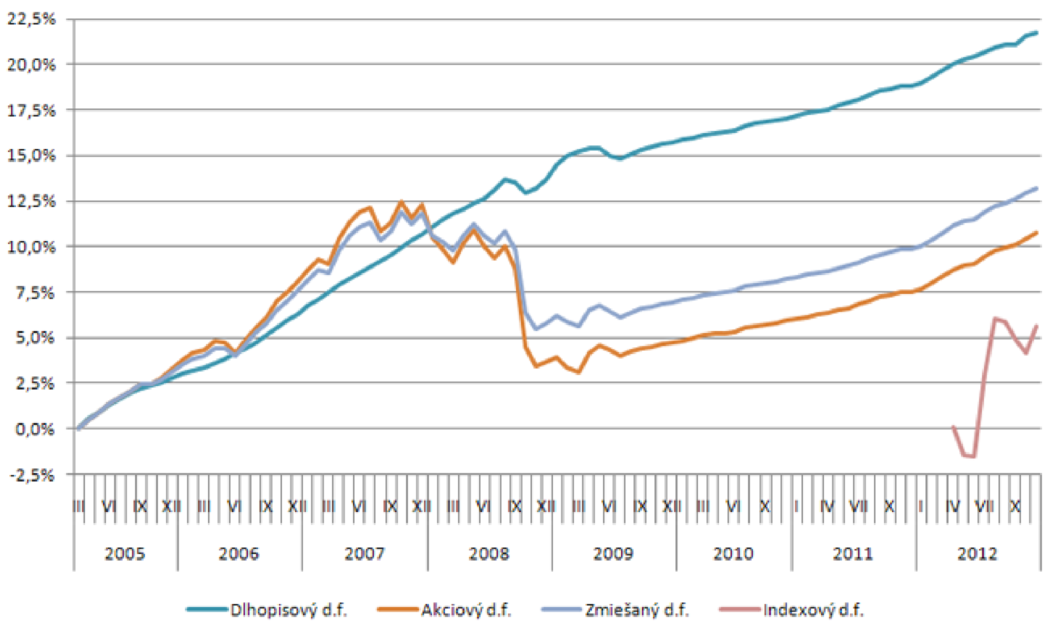
K najväčšej zmene z dôvodu uzdravovania verejných financií došlo v roku 2012 zákonom č. 252/2012 Z. z.. Príspevky do II piliera sa znížili z 9% na 4%. Táto hodnota má platiť do roku 2016. Od roku 2017 sa príspevky do druhého piliera budú zvyšovať o 0,25% ročne až na 6% v roku 2024.
Zároveň sa zavádza možnosť dobrovoľných príspevkov, ktoré sú daňovo zvýhodnené do výšky 2% čiastkového základu dane - toto daňové zvýhodnenie platí do roku 2016.
Zákon okrem iného otvoril II. pilier pre vstup aj výstup medzi septembrom 2012 a januárom 2013.
Od januára 2013 nemajú DSS povinnosť ponúkať 4 dôchodkové fondy (dlhopisový, zmiešaný, akciový a indexový), ale len 2 - dlhopisový garantovaný dôchodkový fond a akciový negarantovaný dôchodkový fond. Okrem týchto dvoch fondov môžu DSS vytvárať aj ďalšie fondy, ktoré sa budú líšiť svojimi investičnými stratégiami [5, 11].

V Tab. 1 môžeme vidieť stav fondov k 5.4.2013 a na Obr. 1 celkové nominálne zhodnotenie dôchodkových fondov všetkých DSS k decembru 2012. V súčasnosti je na účtoch DSS viac ako 5,3 miliardy eur.

	Dlhopisové fondy	Zmiešané fondy	Akciové fondy	Indexové fondy
AEGON	75 489 387 €	109 752 937 €	347 285 084€	1 834 816 €
Allianz-Slovenská DSS	202 429 941 €	481 583 572 €	1 052 642 396 €	4 170 034 €
AXA	209 826 433 €	287 981 895 €	907 891 353 €	8 750 014 €
DSS Poštovej banky	51 113 952 €	70 277 600 €	173 682 943 €	807 697 €
ING	62 557 423€	158 410 950 €	361 258 829 €	3 693 489 €
VÚB Generali	148 694 168 €	246 468 539 €	400 757 156 €	3 022 987 €
Celkom	750 111 307 €	1 354 475 495 €	3 243 517 764 €	22 279 039 €
Podiel	14,0%	25,2%	60,4%	0,4%

Tabuľka 1: Stav fondov k 5.4.2013

Zdroj: http://www.employment.gov.sk/statistiky.html



Obr. 1: Zhodnotenie jednotlivých dôchodkových fondov k 31.12.2012.

Zdroj: http://www.employment.gov.sk/statistiky.html

2.3 Fungovanie DSS

Fungovanie DSS upravuje zákon č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov.

"Dôchodková správcovská spoločnosť je akciová spoločnosť so sídlom na území Slovenskej republiky, ktorej predmetom činnosti je vytváranie a správa dôchodkových fondov na vykonávania starobného dôchodkového sporenia podľa tohto zákona, a to na základe povolenia na vznik a činnosť dôchodkovej správcovskej spoločnosti udeleného Národnou bankou Slovenska podľa tohto zákona. "[11]

Správa dôchodkových fondov predstavuje:

- riadenie investícií- zhodnocovanie majetku v jednotlivých dôchodkových fondoch
- administrácia - vedenie účtu, účtovníctva, uzatváranie zmlúv, riadenie rizík atď.
- propagácia a reklama jednotlivých dôchodkových fondov,
- výber dobrovoľných príspevkov

Aj keď podľa § 72 Dôchodková správcovská spoločnosť povinne vytvára a spravuje

- jeden dlhopisový garantovaný dôchodkový fond a
- jeden akciový negarantovaný dôchodkový fond

V súčasnosti všetky DSS vytvárajú fondy 4 (dlhopisový, akciový, zmiešaný a indexový) - pozostatok zákona č. 334/2011 Z. z..

Minimálna doba sporenia je v súčasnosti 15 rokov. Investovať je možné do dvoch fondov súčasne, pričom jeden z nich musí byť dlhopisový garantovaný dôchodkový fond [11].

2.4 Dlhopisový garantovaný dôchodkový fond

Zloženie dlhopisového fondu je upravené § 86 zákona č. 43/2004 Z. z.

- Majetok v dlhopisovom dôchodkovom fonde môžu tvoriť len dlhopisové a peňažné investície a obchody určené na obmedzenie devízového a úrokového rizika.
- Majetok v dlhopisovom dôchodkovom fonde, ktorý nie je zabezpečený voči devízovému riziku, môže tvoriť najviac 5% čistej hodnoty majetku v dlhopisovom dôchodkovom fonde.

Nemenej dôležitým aspektom sú garancie - ako už napovedá názov dôchodkového fondu. V prípade, že poklesne hodnota dôchodkovej jednotky za sledované obdobie, 10 rokov, je DSS povinná doplniť garantovaný dlhopisový dôchodkový fond z vlastného majetku.

Zákon č. 334/2011 Z. z. upravil taktiež oceňovanie majetku v dlhopisovom fonde. Oceňovanie upravuje § 88b

- V dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde sa hodnota majetku určuje metódou reálnej hodnoty alebo metódou umorovanej hodnoty. V inom ako dlhopisovom garantovanom dôchodkovom fonde sa hodnota majetku určuje metódou reálnej hodnoty.
- Dôchodková správcovská spoločnosť je povinná rozhodnúť o metóde, ktorou bude určovať hodnotu finančného nástroja podľa odseku 2 v čase jeho nadobudnutia do dôchodkového fondu, a toto rozhodnutie je pre ňu záväzné a nemenné.
- Dôchodková správcovská spoločnosť nesmie predať finančný nástroj, ktorého hodnota sa určuje metódou umorovanej hodnoty;

2.4.1 Metóda reálnej hodnoty

Metóda reálnej hodnoty, ktorá sa využíva pri ohodnocovaní dlhopisov, je štandardný diskrétny prístup pri oceňovaní dlhopisov uvedený v prvej kapitole. Dlhopisy, ktoré oceňujeme trhovo, môžeme označiť anglickou terminológiou pomocou termínu AFS - availible for sale - možné predať [9].

Takto ocenené dlhopisy sú citlivé na pohyb úrokovej miery (čím má dlhopis dlhšiu dobu splatnosti, tým je viac citlivý na zmenu úrokovej miery). Ich výhodou je ale fakt, že nie sú žiadne obmedzenia, ktoré by určovali, ako dlho ich musíme vlastniť - môžeme ich v ľubovoľnom čase predať.

2.4.2 Metóda umorovanej hodnoty

Pri oceňovaní metódou umorovanej hodnoty sa využíva efektívna úroková miera. Tá sa zistí pri prvotnom zaúčtovaní peňažných tokov. Následne, pri neskoršom ohodnocovaní sa využíva na oddiskontovanie práve táto efektívna úroková miera. Finančné aktívum nesmieme predať, musíme ho vlastniť až do jeho maturity [8, 9, 11].

Toľko k právnickej a účtovníckej terminológii. Pri metóde umorovanej hodnoty sa pri kúpe finančného aktíva zistí výnos do splatnosti - YTM. Následne sa využíva pri oddiskontovaní a oceňovaní aj v neskorších časoch.

V anglickej terminológii sa takéto finančné aktíva označujú termínom - HTM - held to maturity - držané do splatnosti. HTM aktíva sa oceňujú práve výnosom do splatnosti -YTM. Výhodou tohoto oceňovania je imunita aktíva na zmeny úrokovej miery - výnos do splatnosti zistený pri kúpe sa nemení.

To je výhoda pri dlhopisoch, keď úroková miera narastá - vtedy pri trhovom ocenení klesá hodnota dlhopisov, avšak pri HTM dlhopisoch sa nemení.
Nevýhodou je to pri opačnom prípade, keď úrokové miery klesajú - vtedy, na rozdiel od trhového ocenenia, u HTM dlhopisov nenarastie ich hodnota.
Ďalšou veľkou nevýhodou HTM dlhopisov je problém s ich likviditou. Keďže dlhopisy musí vlastník držať až do ich splatnosti, vlastníctvo týchto dlhopisov značne znižuje likviditu ich držiteľa.

Cieľom zavedenia oceňovania pomocou metódy umorovanej hodnoty bolo umožniť nákup dlhopisov s dlhšou dobou splatnosti - s väčšou duráciou a teda aj s väčšou citlivosťou na zmenu úrokovej miery [10].

2.5 Odmena DSS

Zo zákona má DSS nárok na odmeňovanie za nasledovné činnosti [11]

a) odplatu za správu dôchodkového fondu
b) odplatu za vedenie osobného dôchodkového účtu
c) odplatu za zhodnotenie majetku v dôchodkovom fonde

Odplata za správu dôchodkového fondu predstavuje v súčasnosti najviac 0,3% z priemernej ročnej predbežnej čistej hodnoty majetku v dôchodkovom fonde. Odplata za správu dôchodkového účtu v sebe nezahŕňa poplatky obchodníkovi s cennými papiermi, depozitárovi cenných papierov, poplatky za vedenie bežných účtov a podobne - tie sú uhrádzané priamo z majetku dôchodkového fondu.

Odplata za vedenie osobného dôchodkového účtu sa platí z príspevkov pripísaných na účet sporiteľa. Aktuálne nesmie presiahnuť 1% zo sumy týchto príspevkov.

Odplata za zhodnotenie majetku v dôchodkovom fonde sa počíta podľa presne daného vzorca uvedeného v zákone (21). Odplata sa počíta na dennej báze.

$$Odplata_t = K * NV_t * \left(\frac{DJ_t}{\max\limits_{i \in \langle t-3\times 365, t)} DJ_i} - 1 \right) \tag{21}$$

K predstavuje koeficient najviac 0,1. NV_t je predbežná čistá hodnota majetku v dôchodkovom fonde v deň t . DJ_t je aktuálna hodnota dôchodkovej jednotky[2] a $\max\limits_{i \in \langle t-3\times 365, t)} DJ_i$ predstavuje maximálnu hodnotu dôchodkovej jednotky za posledné tri roky. V prípade, ak je výsledná hodnota záporná, DSS nemá právo na odplatu. DSS má teda nárok na odplatu, ak hodnota dôchodkovej jednotky prekoná svoje trojročné maximum.

Okrem odplát, na ktoré má DSS zo zákona nárok, garantuje DSS hodnotu dlhopisového fondu. V prípade, že počas porovnávacieho obdobia (10 rokov) hodnota klesne, DSS musí tento prepad vykryť z vlastných prostriedkov [5], [11].

Odplatu za správu DF a za vedenie osobného dôchodkového účtu ovplyvňuje predovšetkým bonita klientov - koľko ich DSS má, a akými čiastkami prispievajú. Naopak, výšku odplaty za zhodnotenie si DSS ovplyvňuje vlastným investovaním. Čím lepšie investuje, tým má nárok na väčšiu odplatu. Zároveň spôsob určovania tejto odplaty motivuje DSS zabezpečovať trvalý rast hodnoty fondov.

[2]Dôchodková jednotka predstavuje podiel na majetku v dôchodkovom fonde[8].

3 Cash-flow párovanie

Predstavme si, že nás zaujíma zloženie dlhopisového dôchodkového fondu. Máme finančné prostriedky od klientov, ktorým zároveň musíme vyplácať aj dôchodky. Naším cieľom je investovať tak, aby sme maximálne zhodnotili zverené finančné prostriedky a zároveň plnili naše záväzky voči klientom. V anglickej literatúre sa pre tento typ modelov, kde treba plniť záväzky, používa pojem CF matching - CF párovanie [2, 3, 4].

3.1 Model pre Cash-flow párovanie

Majme základný model pre tvorbu dlhopisového portfólia. Máme dopredu dané finančné záväzky L_t, dôchodky, ktoré musíme plniť a vyplácať. Cieľom je s čo najmenšou počiatočnou investíciou tieto záväzky splniť. Potrebujeme zostaviť dlhopisové portfólio tak, aby vyplácané kupóny a istina pokryli záväzky v každom čase. Dlhopisy nakúpime za cenu P_{0i} a držíme ich až do ich maturity - nie je možný predaj. Dlhopis nám vypláca F_{ti} (kupóny a istinu). Tieto peňažné prostriedky nám musia stačiť na pokrytie plánovaných záväzkov L_t a za zostatok môžeme dokúpiť ďalšie dlhopisy za cenu P_{ti}. Výstupom modelu sú váhy dlhopisov x a najlacnejšia minimálna investícia m_0 s ktorou sme schopní pokryť naše záväzky L_t. V modeli sa nepripúšťa krátka pozícia.

$$
\begin{aligned}
&Min\ m_0 \\
&\qquad m_0 \geq \sum_{i \in U} P_{0i} x_i \qquad t = 0 \\
&\sum_{i \in U} F_{ti} x_i \geq L_t + \sum_{i \in U} P_{ti} x_i \qquad t \in (0, T\rangle \\
&\qquad x \geq 0
\end{aligned}
\tag{22}
$$

3.2 Požičiavanie a reinvestovanie

Pri investovaní sa môže stať, že investor "narazí"na dlhopis so zaujímavým výnosom, ale nemá dostatok peňazí na jeho kúpenie. V tom prípade, si môže požičať čiastku b_t za úrok β. V opačnom prípade, ak sú investície do dlhopisov v danom čase nezaujímavé, môže si investor preniesť peniaze s_t do ďalšieho obdobia s úrokom ρ - ekvivalent bankového účtu. Ak je potrebné si peniaze požičať alebo uschovať v banke na viac ako jeden rok, problém sa rieši každoročným opakovaním bankovej operácie. Tento model sa v anglickej literatúre vyskytuje pod pojmom Portfolio dedication. Dedication znamená po anglicky venovanie, chce sa tým zdôrazniť, že finančné prostriedky, ktoré portfólio priebežne vypláca sú používané na splatenie záväzkov.

$$
\begin{aligned}
&Min\ m_0 \\
&m_0 \geq \sum_{i \in U} P_{0i} x_i \qquad t = 0 \\
\sum_{i \in U} F_{ti} x_i + (1+\rho) s_{t-1} + b_t &\geq L_t + s_t + (1+\beta) b_{t-1} + \sum_{i \in U} P_{ti} x_i \qquad t \in (0, T\rangle \\
&x, s, b \geq 0
\end{aligned} \tag{23}
$$

3.3 Maximalizácia

Na daný problém sa môžeme pozrieť aj opačným spôsobom. Namiesto minimalizácie počiatočného kapitálu, ktorý má stačiť na pokrytie všetkých plánovaných záväzkov, môžeme predpokladať, že máme fixnú čiastku M na začiatku investovania. S týmito peniazmi, ktoré máme k dispozícii, musíme rovnako ako v minimalizačnej úlohe plniť všetky plánované záväzky L_t. S tým rozdielom, že sa snažíme maximalizovať peňažný zostatok na konci sledovaného obdobia - v čase T. Tak ako aj v predchádzajúcej úlohe, na konci nám môžu zostať iba peniaze. Keďže nemôžeme predávať dlhopisy ktoré vlastníme, musia všetky dlhopisy zmaturovať.

$$
\begin{aligned}
&Max\ s_T \\
&M = \sum_{i \in U} P_{0i} x_i + s_0 \qquad t = 0 \\
\sum_{i \in U} F_{ti} x_i + (1+\rho) s_{t-1} + b_t &\geq L_t + s_t + (1+\beta) b_{t-1} + \sum_{i \in U} P_{ti} x_i \qquad t \in (0, T\rangle \\
&x, s, b \geq 0
\end{aligned} \tag{24}
$$

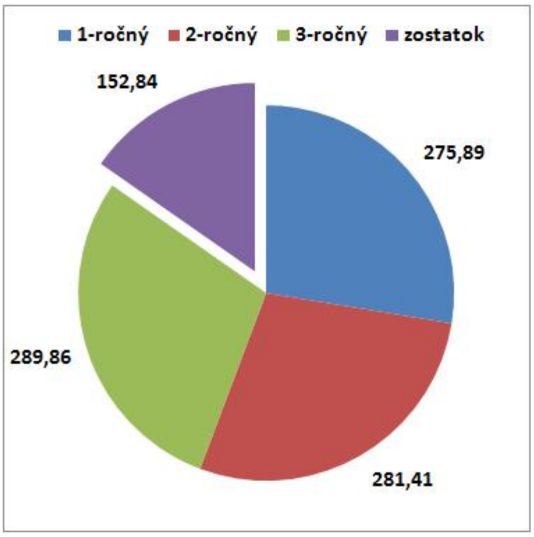
3.4 Porovnanie minimalizačnej a maximalizačnej úlohy

Porovnajme minimalizačnú a maximalizačnú úlohu na príklade. Požičiavanie a reinvestovanie neuvažujme. Investujeme na tri roky, pričom každý rok požadujeme mať k dispozícii čiastku $L_t = 300,\ t = 1, 2, 3$. Na investovanie máme k dispozícii tri dlhopisy s parametrami v Tab. 2. Náš počiatočný kapitál na investovanie je $M = 1000$.

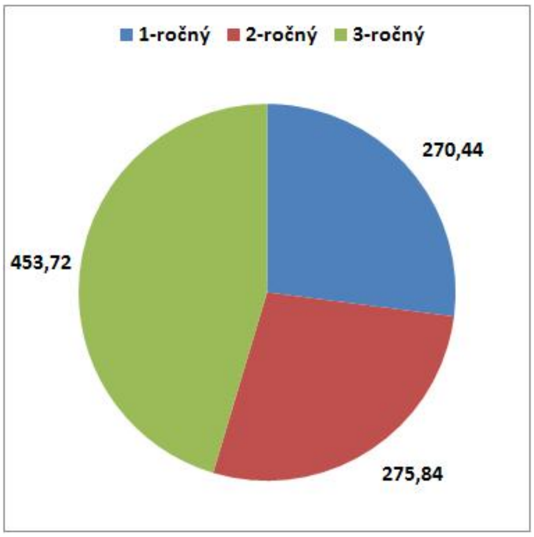
V oboch prípadoch kúpime všetky dlhopisy na začiatku. úlohy sa líšia množstvom peňazí, ktoré investujeme do jednotlivých dlhopisov. V prípade minimalizačnej úlohy vidíme na Obr. 2 rozdelenie nášho počiatočného kapitálu medzi tri dlhopisy. Vieme zostaviť portfólio, ktoré pokryje plánované tri záväzky L_t, už za $m_0 = 847,16$. Zostatok $152,84$ z nášho počiatočného kapitálu môžeme investovať ináč (do výnosnejších aktív),

	Cena	Kupón	Nominál
1-ročný dlhopis	100	2	100
2-ročný dlhopis	100	3	100
3-ročný dlhopis	100	3,5	100

Tabuľka 2: Parametre dlhopisov.



Obr. 2: Minimalizačná úloha - počiatočné rozdelenie kapitálu



Obr. 3: Maximalizačná úloha - počiatočné rozdelenie kapitálu

alebo spotrebovať.
Ak sa rozhodneme využiť maximalizačnú úlohu, všetky naše prostriedky $M = 1000$ investujeme do dlhopisov podľa Obr. 3. Na konci investovania, po priebežnom splatení záväzkov, nám zostane $169,60$ - maximalizujeme všetky prostriedky, ktoré máme k dispozícii pomocou investície do dlhopisov.

Minimalizačná úloha má využitie, ak potrebujeme z nášho majetku vyčleniť čiastku, s ktorou plánujeme pokryť našu budúcu spotrebu. Pomocou tejto úlohy za tieto prostriedky nakúpime dlhopisy tak, že príjmy z portfólia nám budú slúžiť na pokrývanie našich záväzkov. Zmena úrokových mier a cien dlhopisov nás neovplyvňuje, pretože dlhopisy držíme až do ich maturity. Zostatok z nášho počiatočného kapitálu môžeme buď okamžite spotrebovať, alebo ho môžeme výnosnejšie investovať. Pri investícii zostatku môžeme požadovať väčší výnos (pri väčšom riziku), nakoľko už máme naše plánované záväzky zaistené pomocou dlhopisového portfólia.

V prípade maximalizačnej úlohy maximalizujeme náš cely počiatočný kapitál, pričom stále musíme plniť naše záväzky. Ak je náš počiatočný kapitál väčší ako m_0 (z minimalizačnej úlohy (23) - predstavuje minimálne množstvo finančných prostriedkov pomocou ktorých už vieme splniť L_t), tak na konci investovania, v čase T, po zaplatení a splnení všetkých záväzkov L_t, nám zostanú prebytočné finančné prostriedky. Výhodou maximalizačnej úlohy je fakt, že na rozdiel od minimalizačnej, dáva zmysel aj v prípade, ak nemáme žiadne záväzky, ktoré treba počas doby investovania plniť. Má teda omnoho širšie uplatnenie.

4 Maximalizačná úloha

Ďalej budeme pracovať už iba s maximalizačnou úlohou. Tá na rozdiel od minimalizačnej dáva zmysel aj v prípade, že máme nulové záväzky. Zároveň je to aj bežnejší spôsob investovania - obvyklejšie je maximalizovať konečnú hodnotu, ako minimalizovať počiatočnú.

4.1 Zjednodušenie modelu

Úlohu sme aj zjednodušili - vynechali sme požičiavanie, čo pri veľkých investoroch nie je nutne zlý predpoklad. V prípade reinvestovania v banke sa dajú odložené alebo prebytočné peniaze preniesť do ďalšieho obdobia pomocou investície do 1-ročného dlhopisu. Výsledný model potom vyzerá nasledovne

$$
\begin{aligned}
Max \ & \sum_{i \in U} F_{Ti} x_i \\
M &= \sum_{i \in U} P_{0i} x_i \qquad t = 0 \\
\sum_{i \in U} F_{ti} x_i &\geq \sum_{i \in U} P_{ti} x_i \qquad t \in (0, T) \\
x &\geq 0
\end{aligned}
\tag{25}
$$

4.2 Hodnota portfólia v čase T

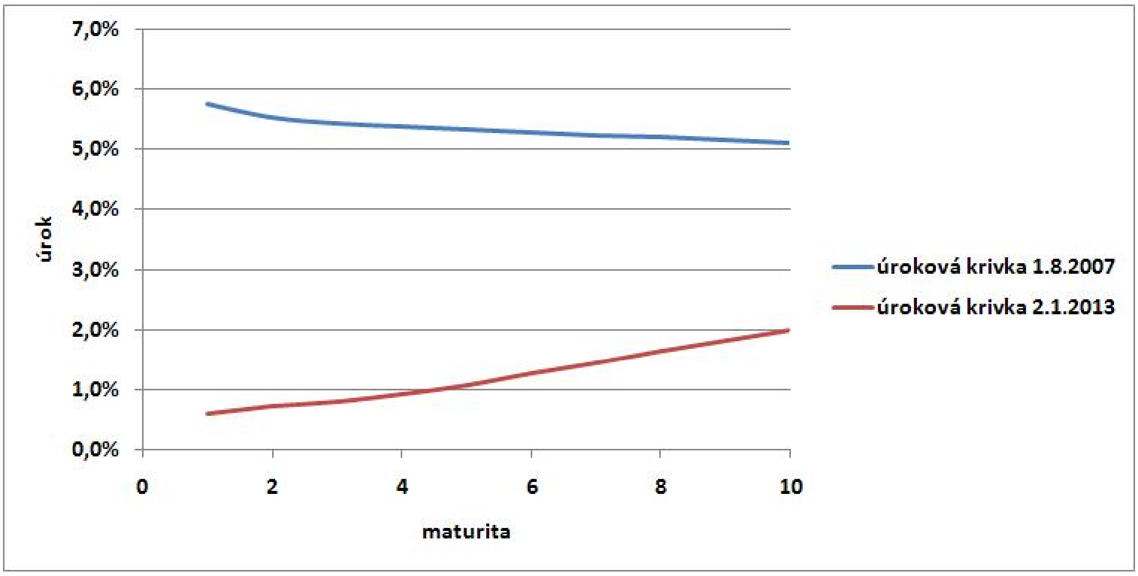
Jednou z hlavných nevýhod doterajšieho modelu (25) bol fakt, že sme maximalizovali peniaze, ktoré máme na konci sledovaného obdobia. To vylučovalo vlastníctvo akýchkoľvek dlhopisov v čase T - nepriamo sme požadovali, aby všetky dlhopisy zmaturovali do času T.

Pre zreálnenie modelu nemaximalizujeme peniaze, ktoré máme na konci, ale hodnotu portfólia. Pribúda nám teda očakávaná úroková krivka ψ_T, pomocou ktorej oceníme dlhopis v čase T a dostaneme hodnotu dlhopisu Z_{Ti}.

Zavedením očakávaných úrokových kriviek ψ_t môžeme zároveň pridať aj podmienku na priebežnú hodnotu portfólia. Požadujeme, aby hodnota portfólia $\sum_{i \in U} Z_{ti} x_i$ neklesla pod nami želanú hodnotu M_t. Napriek tomu, že dlhopisy stále nepredávame, dôvodom pre dané ohraničenie môže byť napríklad nutnosť doplnenia strát garantovaného fondu vedeného DSS, v prípade ak je jeho hodnota príliš nízka v momente porovnávania hodnoty.

$$
\begin{aligned}
Max \sum_{i \in U} Z_{Ti} x_i & \\
M = \sum_{i \in U} P_{0i} x_i & \qquad t = 0 \\
\sum_{i \in U} F_{ti} x_i \geq \sum_{i \in U} P_{ti} x_i & \qquad t \in (0, T\rangle \\
\sum_{i \in U} Z_{ti} x_i \geq M_t & \qquad t \in (0, T\rangle \\
x \geq 0 &
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Pri modelovaní výstupov predpokladáme, že každý rok sú k dispozícii 4 dlhopisy 1-ročný, 2-ročný, 5-ročný a 10-ročný. Dlhopisy majú nominálnu hodnotu 100 a 2% kupón. Ich cena je určená aktuálne použitou úrokovou krivkou. Pre modelovanie výstupov sa použili dve úrokové krivky banky Bank of England na Obr. 4. Náš vstupný kapitál je 1000 a priebežne kontrolujeme hodnotu portfólia, aby neklesla pod našu investíciu, teda $M_t = 1000\ \forall t$.

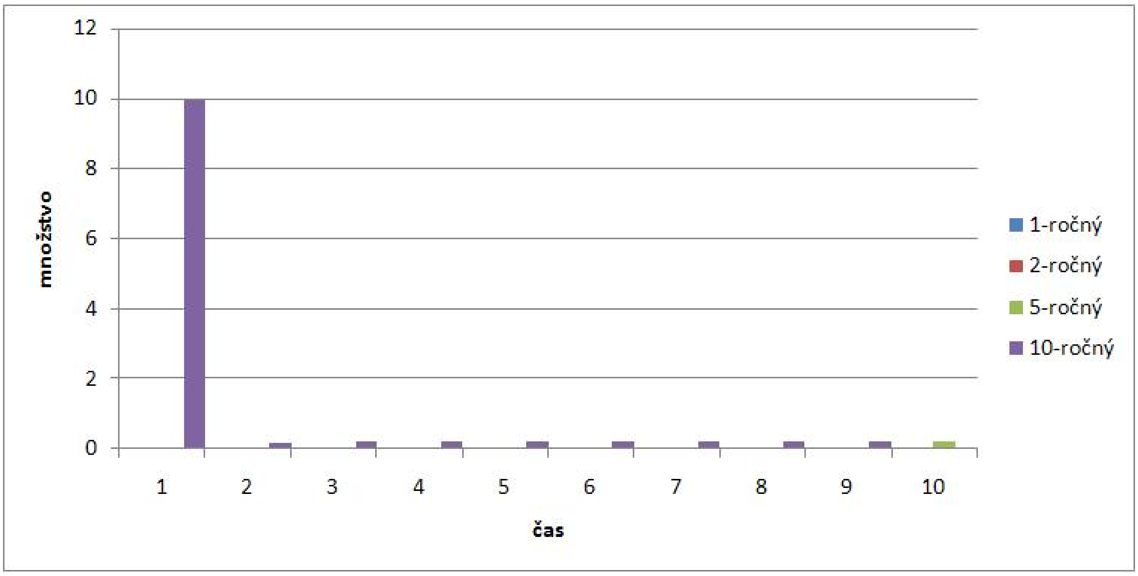


Obr. 4: Používané úrokové krivky.
Zdroj: http://www.bankofengland.co.uk/statistics/Pages/yieldcurve/archive.aspx

V prvom prípade máme najjednoduchší scenár. Investujeme na 10 rokov hodnotu 1000. Používame pritom rastúcu úrokovú krivku bank of England z dňa 2.1.2013 o ktorej predpokladáme, že sa nebude meniť - zostane 10 rokov rovnaká. $M_t = 1000$

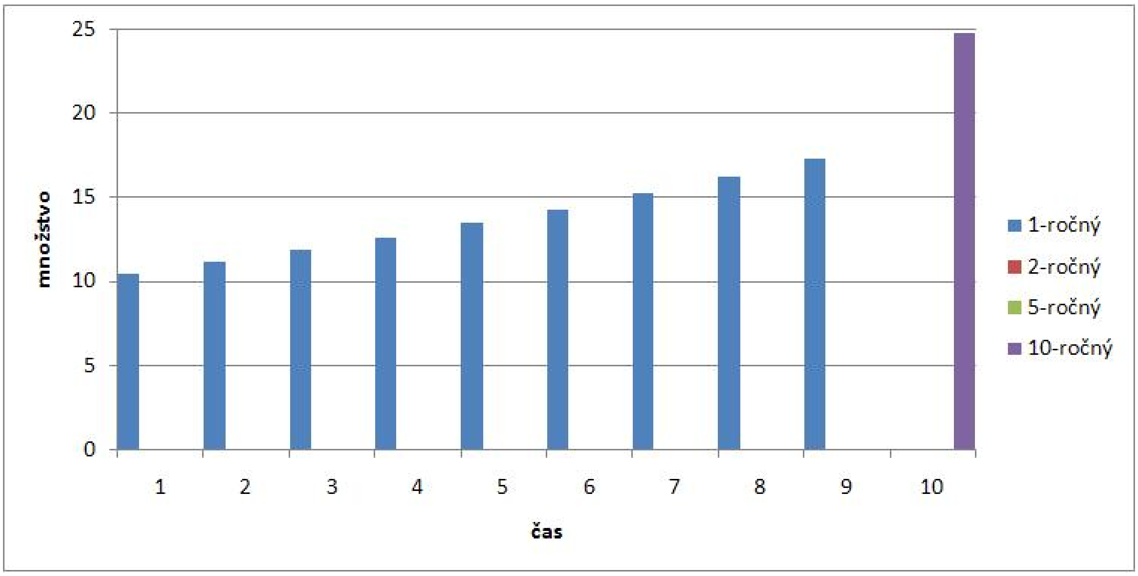
počas celej doby investovania. Výsledné zloženie portfólia (Obr. 5) je očakávané - nakupujeme 10-ročné dlhopisy, nakoľko majú pri rastúcej úrokovej krivke najvyšší výnos do splatnosti. Dlhé dlhopisy sú v tomto prípade pre nás najzaujímavejším investičným cieľom a preto v prvom roku kúpime za všetky naše prostriedky 10-ročné dlhopisy a za vyplatené kupóny postupne dokupujeme ďalšie.

V poslednom roku na výbere kupovaných dlhopisov nezáleží. Všetky dlhopisy sú rovnako trhovo ocenené a ďalší vývoj portfólia nás nezaujíma. Dlhopisy ponúkané v posledný rok sú si teda rovnocenné.



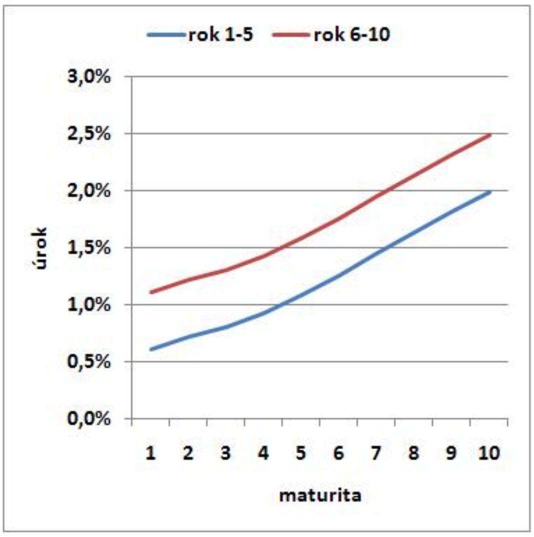
Obr. 5: Zloženie portfólia pri rastúcej úrokovej krivke.

Na Obr. 6 máme obdobné vstupné parametre, akurát využívame nie tak častý typ časovej štruktúry úrokovej miery a to klesajúcu úrokovú krivku zo dňa 1.8.2007. V takom prípade má najvyšší YTM 1-ročný dlhopis a preto každoročne dokupujem práve tento typ dlhopisu.

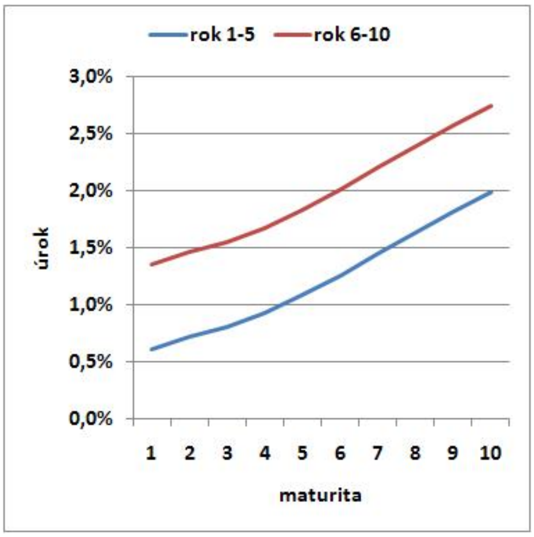


Obr. 6: Zloženie portfólia pri klesajúcej úrokovej krivke.

Na predchádzajúcich výstupoch (Obr. 5 a Obr. 6), sme si mohli všimnúť relatívne jednoduché zloženie portfólia - kupovali sme vždy dlhopisy s najvyšším výnosom do splatnosti. To bolo spôsobené veľmi nerealistickými predpokladmi o nemennosti tvaru úrokovej krivky. Predpokladajme teraz, že máme rovnakú rastúcu úrokovú krivku ako v predchádzajúcom prípade, s tým rozdielom, že očakávame jej paralelný posun hore po 5 rokoch. Na Obr. 7 a Obr. 8 vidíme tvar úrokových kriviek pre jednotlivé roky.

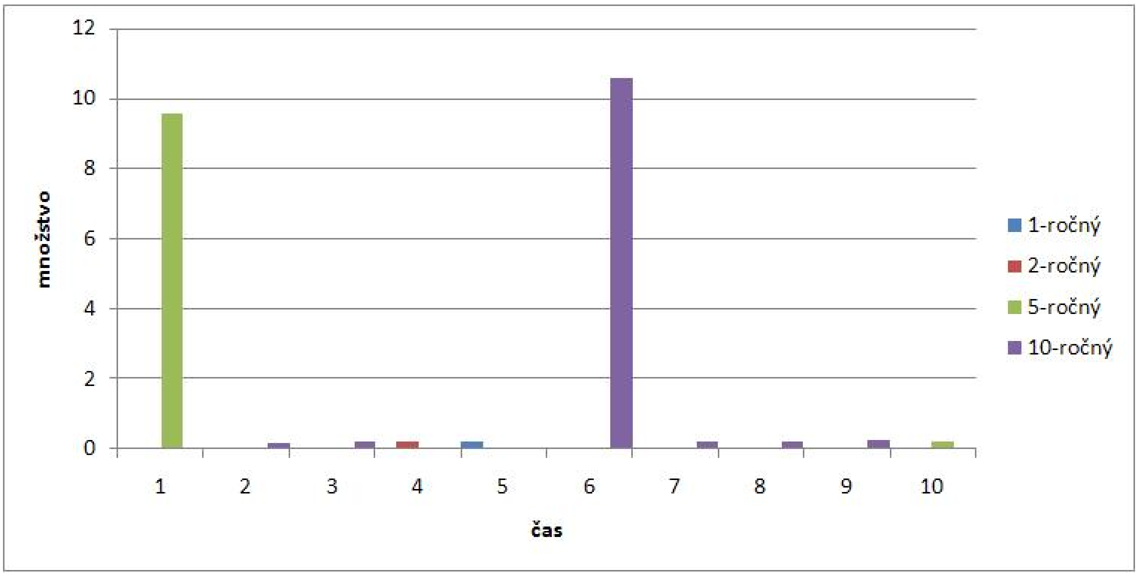


Obr. 7: Vývoj úrokových kriviek - po 5 rokoch dôjde k paralelnému posunu úrokov o 0,5 %



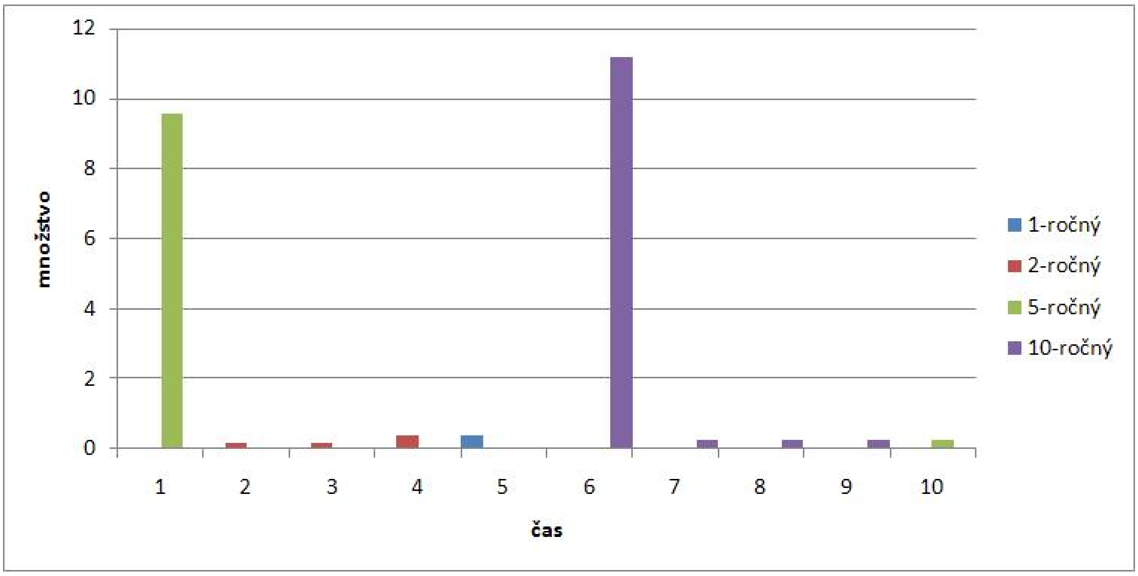
Obr. 8: Vývoj úrokových kriviek - po 5 rokoch dôjde k paralelnému posunu úrokov o 0,75 %

Vstupné parametre majme naďalej rovnaké ako v prvých modeloch, rozdiel je iba v použitom očakávanom vývoji úrokovej krivky - Obr. 7. Keďže očakávame, že úroková krivka stúpne o 0,5% hore, očakávame taktiež aj to, že dlhopisy budú lacnejšie (so stúpajúcim úrokom klesá hodnota dlhopisu). Nie je teda rozumné investovať všetky peniaze do 10-ročných dlhopisov, aj keď majú najväčší YTM. Nakoľko stále nie je možné dlhopisy predávať, prišli by sme o príležitosť nakúpiť lacnejšie dlhopisy po náraste úrokových mier. Pre maximalizáciu portfólia, Obr. 9 , sa oplatí kúpiť 5-ročný dlhopis v čase 1. Ten nám splatí aj svoju istinu v čase 6 a umožní nám nakúpiť lacnejšie (z dôvodu posunu úrokovej krivky hore) 10-ročné dlhopisy.



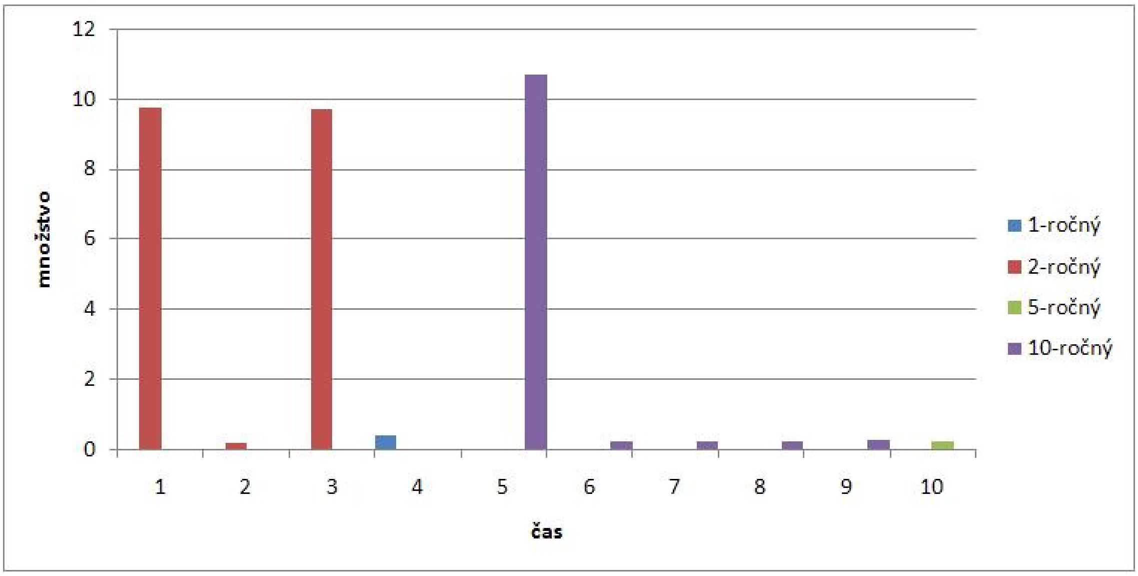
Obr. 9: Zloženie portfólia v prípade posunu úrokových kriviek o 0,5% po 5 rokoch.

Na Obr. 9 vidíme, že 0,5% nárast úrokových mier nie je stále dosť atraktívny, aby sme aj s kupónmi z 5-ročného dlhopisu "čakali"na nárast úrokovej krivky.
Paralelný posun o 0,75% (Obr. 8) už ale spôsobí, že aj za kupóny z 5-ročného dlhopisu kupujeme kratšie dlhopisy, ktoré stihnú zmaturovať do do času 6, kedy nastáva posun úrokových mier - Obr. 10 .



Obr. 10: Zloženie portfólia v prípade posunu úrokových kriviek o 0,75% po 5 rokoch.

Ak by paralelný posun úrokových kriviek o 0,5% nastal po 4 rokoch namiesto 5, tak by sme pri zostavovaní portfólia museli v čase 1 uprednostniť 2-ročný dlhopis, nakoľko 5-ročný by maturoval až rok po znížení cien dlhopisov - Obr. 11.



Obr. 11: Zloženie portfólia v prípade posunu úrokových kriviek o 0,5% už po 4 rokoch.

5 HTM a AFS dlhopisy

Doteraz sme nevyužili možnosť dlhopisy oceňovať dvoma spôsobmi - jednak trhovým prístupom a jednak metódou umorovanej hodnoty. Pri trhovom spôsobe využívame aktuálnu úrokovú mieru ψ_t. Pri metóde umorovanej hodnoty využívame výnos do splatnosti, ktorý má dlhopis pri kúpe.
Dlhopisy oceňované metódou umorovanej hodnoty musíme držať až do ich maturity. Ako sme už spomenuli, takéto dlhopisy sa v anglickej terminológii označujú HTM - v ďalších modeloch budú mať premenné viažuce sa k týmto dlhopisom horný index H. Premenné k dlhopisom, ktoré oceňujeme trhovým spôsobom, budú mať horný index A z anglického AFS - availible for sale (možné predať).

5.1 Model s HTM a AFS dlhopismi

V modeli naďalej maximalizujeme konečnú hodnotu portfólia pri počiatočnej investícii M.
Používanie dvoch typoch oceňovaní dlhopisov sa prejaví na zvýšenom počte premenných. Dlhopisy kupujeme za cenu P_{ti}. Avšak pri kúpe sa musíme rozhodnúť, do ktorej kategórie daný dlhopis zaradíme - akým spôsobom budeme ďalej dlhopis oceňovať. Ak sa raz rozhodneme dlhopis oceňovať trhovo, nemôžeme ho neskôr preradiť do kategórie HTM a naopak. Nevylučujeme ale možnosť kúpiť 2 tie isté dlhopisy a každý oceňovať iným spôsobom. Premennými x^H označujeme množstvo kúpených dlhopisov, ktoré budeme oceňovať pomocou YTM a premennými x^A označíme dlhopisy, ktoré oceňujeme trhovo.
Model je totožný s (26), avšak rozdiel je v tom, že musíme rozlišovať HTM a AFS dlhopisy. Zavedenie dvoch typov oceňovania nám vytvára dve portfólia - jedno tvorené HTM a druhé AFS dlhopismi.

$$
\begin{aligned}
Max \; & \sum_{i\in U} Z^H_{Ti}x^H_i + \sum_{i\in U} Z^A_{Ti}x^A_i \\
& M = \sum_{i\in U} P^H_{0i}x^H_i + \sum_{i\in U} P^A_{0i}x^A_i \qquad t=0 \\
& \sum_{i\in U} F^H_{ti}x^H_i + \sum_{i\in U} F^A_{ti}x^A_i \geq \sum_{i\in U} P^H_{ti}x^H_i + \sum_{i\in U} P^A_{ti}x^A_i \qquad t\in(0,T\rangle \\
& \sum_{i\in U} Z^H_{ti}x^H_i + \sum_{i\in U} Z^A_{ti}x^A_i \geq M_t \qquad t\in(0,T\rangle \\
& x \geq 0
\end{aligned}
\tag{27}
$$

5.2 Alternatívne scenáre vývoja úrokovej krivky

V modeli predpokladáme, že presne poznáme vývoj úrokových kriviek. Od ich vývoja závisia ceny dlhopisov ako aj ich hodnota. Nech použijeme akýkoľvek externý model na zostavenie modelu časovej štruktúry úrokových mier, nemôžeme predpokladať, že bude presne popisovať budúcnosť.

V prípade, že sme DSS, tak sme odmeňovaní podľa vývoja hodnoty portfólia a v prípade jeho poklesu pod istú úroveň musíme k porovnávacím dňom dorovnať straty z našich vlastných zdrojov. Ak úroková miera neočakávane klesá, hodnota AFS dlhopisov rastie, zatiaľ čo hodnota HTM dlhopisov zostáva nezmenená. V takom prípade je výhodné mať v portfóliu AFS dlhopisy, keďže aj hodnota spravovaného portfólia narastá. Ak ale úrokové miery neočakávane narastú, hodnota našich AFS dlhopisov poklesne (HTM dlhopisy si držia svoju hodnotu - sú oceňované svojím výnosom do splatnosti) a poklesne teda aj hodnota celého nášho portfólia. Pokles hodnoty spravovaného portfólia, ktorý môže nastať, môže prinútiť DSS dorovnať straty z vlastných prostriedkov. Pre obmedzenie danej hrozby môžeme do modelu pridať ďalšie ohraničenia, ktoré budú mať za úlohu zabrániť neočakávaným prepadom hodnoty portfólia.

Do modelu môžeme pridať alternatívne scenáre vývoja úrokových mier. V prípade, ak nastane niektorý z týchto scenárov, chceme mať istotu, že hodnota portfólia neklesne po istú hranicu. Pre každý scenár s máme úrokovú krivku ρ_{st}. S rozdielnou úrokovou krivkou máme aj inú hodnotu portfólia, od ktorej môžeme požadovať aby bola väčšia ako M_{st}. Portfólio naďalej optimalizujeme podľa nášho očakávaného vývoja úrokových mier ψ_t , ale máme istotu, že ak nastane jeden zo scenárov, hodnota portfólia nám neklesne pod neželanú hodnotu.

$$
\begin{aligned}
Max \ & \sum_{i\in U} Z^H_{Ti} x^H_i + \sum_{i\in U} Z^A_{Ti} x^A_i \\
& M = \sum_{i\in U} P^H_{0i} x^H_i + \sum_{i\in U} P^A_{0i} x^A_i \qquad t = 0 \\
& \sum_{i\in U} F^H_{ti} x^H_i + \sum_{i\in U} F^A_{ti} x^A_i \geq \sum_{i\in U} P^H_{ti} x^H_i + \sum_{i\in U} P^A_{ti} x^A_i \qquad t \in \langle 1, T\rangle \\
& \sum_{i\in U} Z^H_{ti} x^H_i + \sum_{i\in U} Z^A_{ti} x^A_i \geq M_t \qquad t \in \langle 1, T\rangle \\
& \text{Pre všetky scenáre } s \in S \\
& \sum_{i\in U} Z^H_{sti} x^H_i + \sum_{i\in U} Z^A_{sti} x^A_i \geq M_{st} \qquad t \in \langle 1, T\rangle \\
& x \geq 0
\end{aligned}
\tag{28}
$$

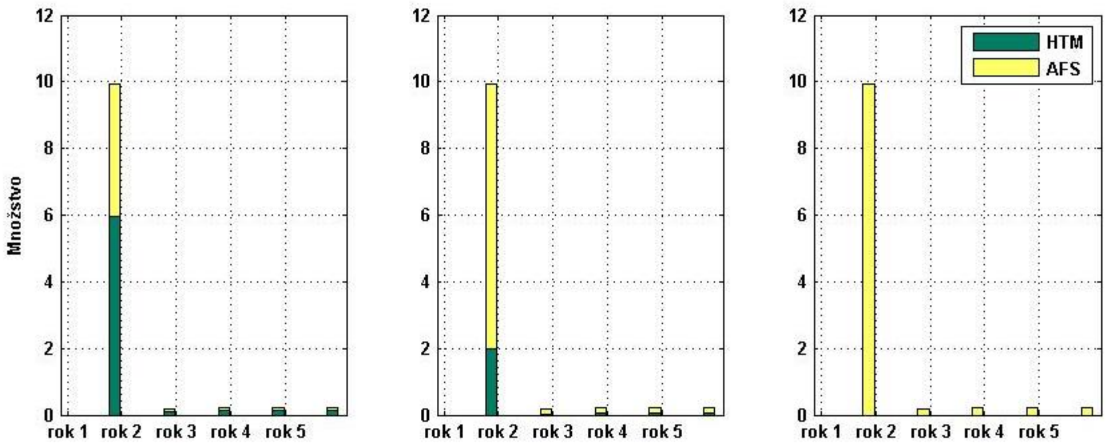
Vo finančných inštitúciach sa na zamedzenie nechceného a neočakávaného prepadu hodnoty portfólia používa napríklad VaR (Value at Risk). Zároveň sa ale využívajú aj oveľa jednoduchšie spôsoby. Portfólio sa testuje alternatívnymi scenármi vývoja úrokových mier. Tieto scenáre majú za úlohu otestovať vývoj hodnoty portfólia pri všetkých možných vývojoch úrokovej krivky. To je ale v praxi nemožné, tak sa zostavili scenáre, o ktorých sa predpokladá, že pokrývajú všetky najbežnejšie neočakávané zmeny úrokovej krivky. Jeden z nich je napríklad NY-7 (New York 7) alebo NY-8 [3].
NY-7

- ψ konštantná po 10 rokov
- ψ rovnomerne rastie o 5% počas 10 rokov
- ψ rovnomerne rastie o 5% počas 5 rokov a následne rovnomerne klesá o 5% počas 5 rokov
- ψ skokovo narastie o 3% a zostane na danej úrovni
- ψ rovnomerne klesá o 5% počas 10 rokov
- ψ rovnomerne klesá o 5% počas 5 rokov a následne rovnomerne rastie o 5% počas 5 rokov
- ψ skokovo klesne o 3% a zostane na danej úrovni

5.3 Úloha na minimalizáciu podielu HTM dlhopisov v portfóliu

Zásadným problémom predchádzajúceho modelu (28) bol fakt, že ho spĺňala celá množina portfólií, ktoré sa líšili iba podielom HTM a AFS dlhopisov. Na Obr. 12 môžeme vidieť niekoľko optimálnych riešení z (28), ktoré majú rovnakú konečnú hodnotu, ale líšia sa podielom HTM dlhopisov.

Finančné inštitúcie neradi vlastnia HTM dlhopisy, a to aj napriek tomu, že pri ná-



Obr. 12: Rôzny podiel HTM dlhopisov v portfóliu.

raste úrokových mier nestrácajú na hodnote. Hlavným problémom je ich nízka likvidita - okrem špecifických situácií ich tieto inštitúcie nemôžu predať. Okrem nízkej likvidity je ďalšia ich nevýhoda spôsobená práve oceňovaním pomocou YTM - pri poklese úrokových mier sa ich hodnota nezvýši. Pri tvorbe a spravovaní portfólia je snaha o čo najmenší podiel HTM dlhopisov na celkovom portfóliu.

Keďže predchádzajúci model nám dával len jedno riešenie z celej množiny riešení, naším cieľom je vybrať práve to, ktoré obsahuje najmenšiu hodnotu HTM dlhopisov. To dosiahneme zavedením druhej úlohy, ktorá túto hodnotu minimalizuje. Z úlohy (28) využijeme hodnotu portfólia v čase T , Max_{uloha1} - táto hodnota bola maximalizovaná a je spoločná pre všetky riešenia z množiny riešení.

V druhej úlohe následne minimalizujeme hodnotu HTM dlhopisov v portfóliu, $\sum_{t=0}^{T}\sum_{i\in U} Z_{ti}^{H} x_i^{H}$, ale za predpokladu, že sa finálna hodnota portfólia Max_{uloha1} nezmení. Priebežný vývoj portfólia musí aj naďalej spĺňať minimálne hodnoty M_t a M_{st}
.

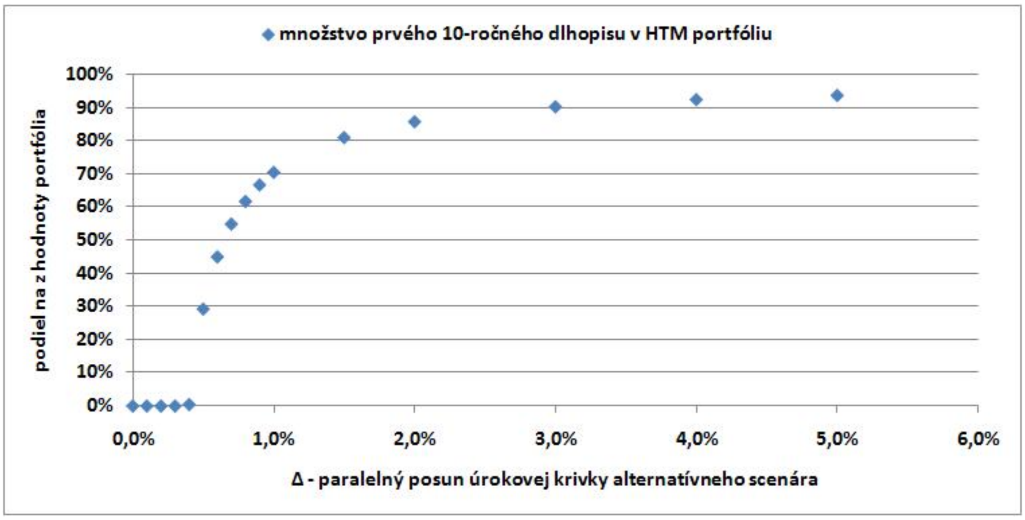
Minimalizácia hodnoty HTM dlhopisov v portfóliu - Max_{uloha1} pochádza z (28).

$$
\begin{aligned}
&Min \sum_{t=0}^{T} \sum_{i \in U} Z_{ti}^{H} x_i^{H} \\
&M = \sum_{i \in U} P_{0i}^{H} x_i^{H} + \sum_{i \in U} P_{0i}^{A} x_i^{A} \qquad t = 0 \\
&\sum_{i \in U} F_{ti}^{H} x_i^{H} + \sum_{i \in U} F_{ti}^{A} x_i^{A} \geq \sum_{i \in U} P_{ti}^{H} x_i^{H} + \sum_{i \in U} P_{ti}^{A} x_i^{A} \qquad t \in \langle 1, T) \\
&\sum_{i \in U} Z_{Ti}^{H} x_i^{H} + \sum_{i \in U} Z_{Ti}^{A} x_i^{A} \geq Max_{uloha1} \\
&\sum_{i \in U} Z_{ti}^{H} x_i^{H} + \sum_{i \in U} Z_{ti}^{A} x_i^{A} \geq M_t \qquad t \in \langle 1, T \rangle \\
&\text{Pre všetky scenáre } s \in S \\
&\sum_{i \in U} Z_{sti}^{H} x_i^{H} + \sum_{i \in U} Z_{sti}^{A} x_i^{A} \geq M_{st} \qquad t \in \langle 1, T \rangle \\
&x \geq 0
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Investor svojou averziou k riziku a ochotou znášať riziko prepadu hodnoty portfólia nastavuje a ovplyvňuje hodnoty M_{st} a ρ_{st} .

Pozrime sa na vplyv alternatívnej úrokovej krivky ρ_{st} na podiel HTM dlhopisov v portfóliu. Využívame stále rovnakú úrokovú krivku Bank of England z dňa 2.1.2013 - Obr. 4. Predpokladajme, že táto krivka bude počas 10 rokov nášho investovania rovnaká.
Majme jeden alternatívny scenár s úrokovou krivkou ρ_{1t}. Chceme zabezpečiť, aby hodnota nášho portfólia pri neočakávanom náraste ρ_{1t} bola stále aspoň na úrovni našej počiatočnej investície $M = 1000$. Neočakávaným nárastom myslíme paralelný posun úrokovej krivky ψ_t hore o Δ. Úroková miera alternatívneho scenára ρ_{1t} bude teda rovná $\rho_{1t} = \psi_t + \Delta$. Na Obr. 13 máme možnosť vidieť závislosť podielu HTM dlhopisov od paralelného posunu Δ. Pre jednoduché grafické znázornenie zobrazujeme len podiel dlhopisov kúpených v roku 1 - z Obr. 5 vidíme, že pri rastúcej úrokovej krivke tvoria väčšinu hodnoty portfólia. Na Obr. 13 môžeme vidieť, že so stúpajúcimi úrokmi alternatívneho scenára narastá aj hodnota HTM dlhopisov v portfóliu - zamedzuje sa tým prepad hodnoty portfólia.

Do modelu môžeme pridať ďalšie ohraničenie pre HTM dlhopisy. Na Obr. 13 môžeme vidieť, že HTM dlhopisy tvorili v niektorých prípadoch viac než 90% hodnoty



Obr. 13: Vývoj podielu HTM dlhopisov pri raste úrokovej krivky alternatívneho scenára.

portfólia. S takým podielom by prípadný investor asi ťažko súhlasil, nakoľko by mu zostalo menej ako 10% prostriedkov na riadenie hodnoty a vývoja portfólia, keďže HTM dlhopisy nie je možné predať. Pridávame teda ohraničenie na maximálny podiel HTM dlhopisov v portfóliu. Podiel HTM dlhopisov nemôže presiahnuť α časť z celej hodnoty portfólia v ľubovoľnom čase.

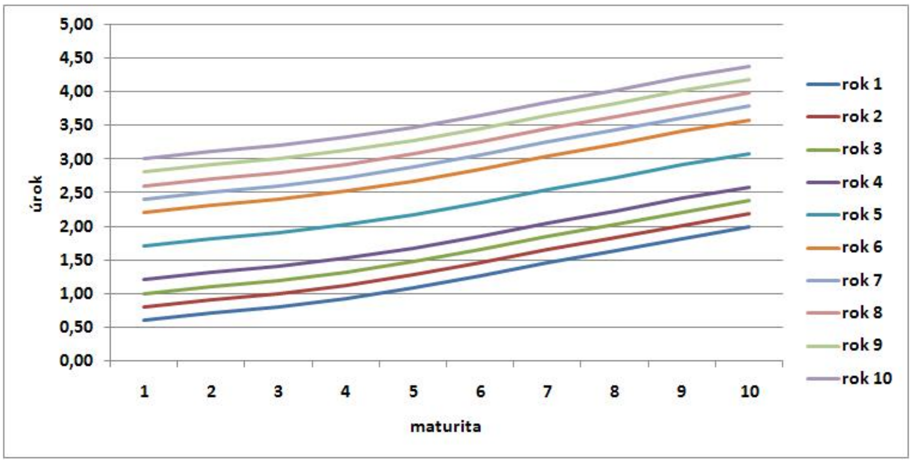
$$\sum_{i\in U} Z_{ti}^H x_i^H \leq \alpha \left(\sum_{i\in U} Z_{ti}^H x_i^H + \sum_{i\in U} Z_{ti}^A x_i^A \right) \qquad \forall t \qquad \alpha \in \langle 0,1 \rangle \tag{30}$$

Rovnako by pre investora bolo asi neprijateľné investovať všetky svoje prostriedky do jedného aktíva - každý investor sa snaží diverzifikovať svoje portfólio. Vo všeobecnosti sa dlhopisy štátov považujú za bezpečnú investíciu, ale vývoj v Európe v poslednom období značne naštrbil dôveru investorov. Označme β maximálny podiel jedného dlhopisu na celkovej hodnote portfólia.

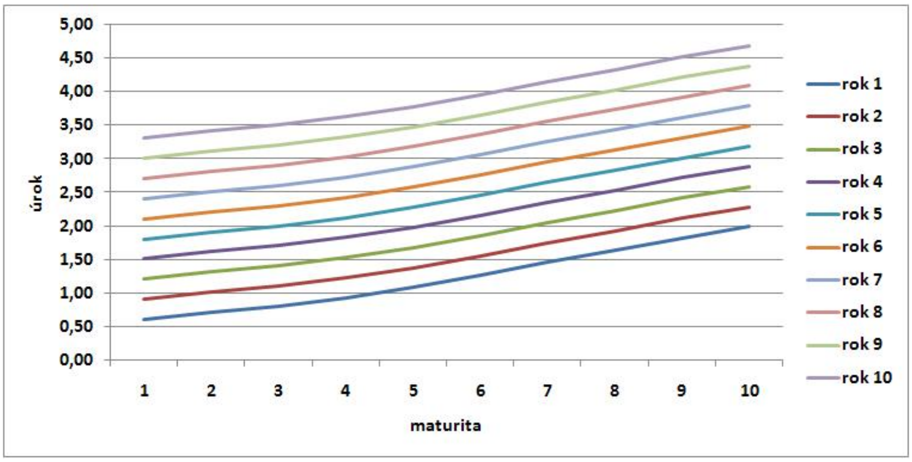
$$Z_{ti}^H x_i^H + Z_{ti}^A x_i^A \leq \beta \left(\sum_{i\in U} Z_{ti}^H x_i^H + \sum_{i\in U} Z_{ti}^A x_i^A \right) \qquad \forall t,\ \forall i \qquad \beta \in \langle 0,1 \rangle \tag{31}$$

Nech je maximálny podiel HTM dlhopisov v portfóliu 30% $\forall\ t$. Zároveň, nech žiaden dlhopis netvorí viac ako 50% z hodnoty portfólia v ľubovoľnom čase. Od portfólia požadujeme, aby jeho počiatočná hodnota M rástla aspoň 1% ročne - $M_{t-1} \times 1,01 = M_t$ a $M_{st-1} \times 1,01 = M_{st}$. Na Obr. 14 vidíme očakávaný vývoj úrokových mier. Prvé tri roky dochádza k paralelnému posunu o $0,2\%$, ďalšie dva roky o $0,5\%$ s zvyšné 4 roky opäť o $0,2\%$.

Majme dve alternatívne scenáre s úrokovými krivkami na Obr. 15 a Obr. 16. V prvom alternatívnom scenári, Obr. 15, rastú úrokové krivky o $0,3\%$ ročne. V druhom scenári, Obr. 16, rastú úroky prvé štyri roky o $0,2\%$ a ďalších päť rokov o $0,5\%$.



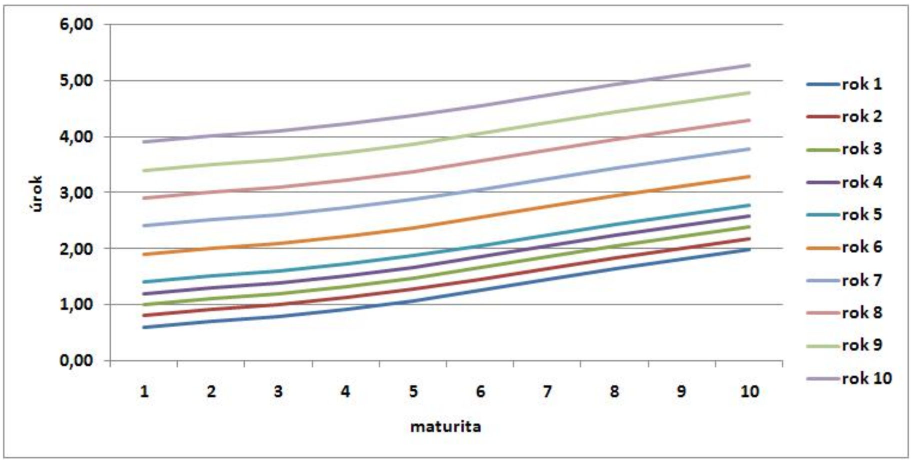
Obr. 14: Použité úrokové krivky.



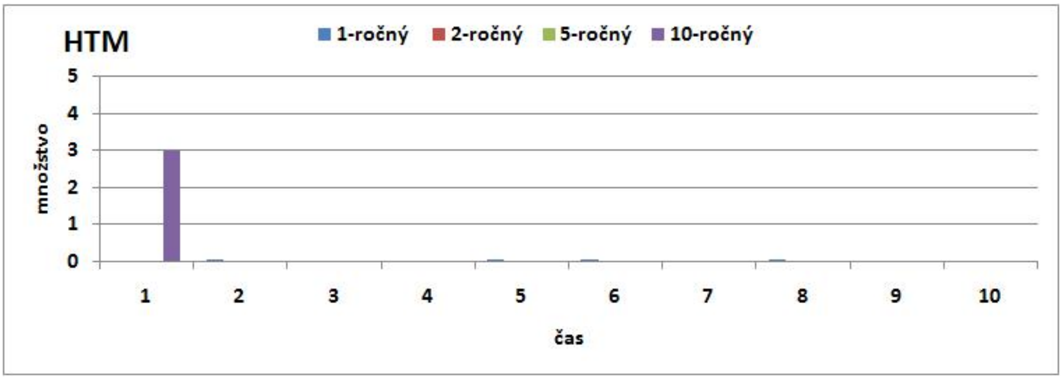
Obr. 15: Alternatívny scenár 1.

Keďže maximálny podiel HTM dlhopisov je ohraničený na 30% a úrokové krivky v očakávanom scenári (Obr. 14) rastú (hodnota dlhopisov pri trhovom ocenení klesá), ako HTM označíme dlhé dlhopisy - Obr. 17. Tie majú najväčšiu duráciu a ich hodnota je najcitlivejšia na nárast úrokov.

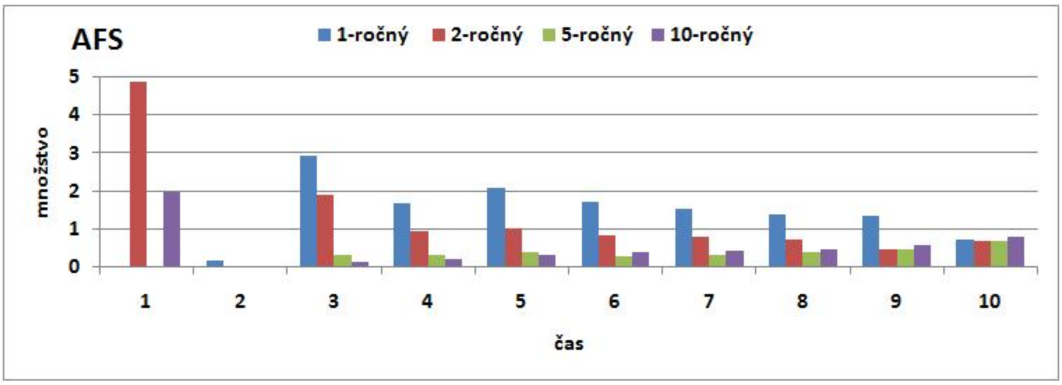
Zbytok dlhopisov napriek narastajúcim úrokovým krivkám už nemôžeme nakúpiť ako HTM. Nakupujeme teda dlhopisy s menšou duráciou, ktoré pri trhovom ohodnotení pri rastúcich úrokoch nestrácajú na hodnote tak, ako tie s väčšou duráciou - Obr. 18.



Obr. 16: Alternatívny scenár 2.



Obr. 17: Zloženie portfólia - HTM dlhopisy.



Obr. 18: Zloženie portfólia - AFS dlhopisy.

6 Rozšírenia modelu

Doterajšie modely neobsahovali niektoré vlastnosti, ktoré sa od reálneho spravovania dlhopisového portfólia vyžadujú - napríklad predaj, alebo transakčné náklady. Naviac doteraz vo všetkých modeloch prebiehalo rozhodnutie na začiatku. V prípade, že by sme mali novšie informácie o vývoji trhu, nevedeli by sme ich zužitkovať, nakoľko rozhodnutie o zložení portfólia už prebehlo. V nasledujúcej kapitole sa budeme snažiť tieto nedostatky odstrániť.

6.1 Úloha pre strednú hodnotu

V situácii, aká panuje na finančných trhoch teraz, je veľmi náročné určiť, podľa ktorého úrokového scenára sa riadiť, prípadne ako zareagovať na zmeny. Riešením pre zostavovanie portfólia môže byť maximalizovanie strednej hodnoty portfólia cez rôzne scenáre. V predchádzajúcich modeloch sme maximalizovali hodnotu portfólia cez jeden očakávaný vývoj úrokovej miery a snažili sme sa poistiť proti prepadu hodnoty, ak by sa budúcnosť vyvíjala ináč.

Majme množinu scenárov S a k nim prislúchajúce pravdepodobnosti nastatia p_s . Maximalizujeme hodnotu portfólia cez všetky scenáre a ich pravdepodobnosti. Keďže vrámci každého scenára mám odlišnú časovú štruktúru úrokových mier, tak aj dlhopisy majú v každom scenári odlišnú cenu a hodnotu. Vo všetkých scenároch je cena v čase 0 totožná.

Štandardná úloha pre strednú hodnotu

$$Max \sum_{s\in S} p_s \left(\sum_{i\in U} Z^H_{sTi} x^H_{si} + \sum_{i\in U} Z^A_{sTi} x^A_{si} \right) \qquad \sum p_s = 1 \qquad \forall s \in S$$

Pre všetky scenáre $s \in S$

$$\begin{aligned} M = \sum_{i\in U} P^H_{0i} x^H_i + \sum_{i\in U} P^A_{0i} x^A_i \qquad & t = 0 \\ \sum_{i\in U} F^H_{ti} x^H_{si} + \sum_{i\in U} F^A_{ti} x^A_{si} \geq \sum_{i\in U} P^H_{sti} x^H_{si} + \sum_{i\in U} P^A_{sti} x^A_{si} \qquad & t \in \langle 1, T\rangle \\ \sum_{i\in U} Z^H_{sti} x^H_{si} + \sum_{i\in U} Z^A_{sti} x^A_{si} \geq M_{st} \qquad & t \in \langle 1, T\rangle \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Minimalizácia podielu HTM

$$Min \sum_{t=0}^{T} \sum_{s \in S} p_s \left(\sum_{i \in U} Z^H_{sTi} x^H_{si} \right) \qquad \sum p_s = 1 \qquad \forall s \in S$$

Pre všetky scenáre $s \in S$

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i \in U} P^H_{0i} x^H_i + \sum_{i \in U} P^A_{0i} x^A_i \qquad t = 0 \\ \sum_{i \in U} F^H_{ti} x^H_{si} + \sum_{i \in U} F^A_{ti} x^A_{si} &\geq \sum_{i \in U} P^H_{sti} x^H_{si} + \sum_{i \in U} P^A_{sti} x^A_{si} \qquad t \in \langle 1, T \rangle \\ \sum_{s \in S} p_s \left(\sum_{i \in U} Z^H_{sTi} x^H_{si} + \sum_{i \in U} Z^A_{sTi} x^A_{si} \right) &\geq Max_{uloha1} \\ \sum_{i \in U} Z^H_{sti} x^H_{si} + \sum_{i \in U} Z^A_{sti} x^A_{si} &\geq M_{st} \qquad t \in \langle 1, T \rangle \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{33}$$

Porovnajme hodnoty portfólia, ktoré sme dostali z (32) a (33). Zloženie portfólia je pri prvom nákupe pre všetky scenáre totožné. V nasledujúcom čase ale už vieme, ktorý scenár nastal, a vieme optimalizovať zloženie portfólia podľa zrealizovaného scenára.

Pre otestovanie modelu sme využili už vyššie použité scenáre. Scenár 1 predstavoval postupný nárast rastúcej úrokovej krivky , Obr. 14, a Scenár 2 predstavovala konštantná rastúca úroková krivka z Obr. 4. Zloženie portfólia pre jednotlivé scenáre pri rôznych pravdepodobnostiach nastatia je na Obr. 19. Vidíme, že zloženie je v prvom roku totožné pre oba scenáre. Následne, keď prvý rok ubehol, už vieme, ktorý scenár nastal a vieme portfólio optimalizovať podľa tohto scenára - preto sa ďalšie zloženie už líši.

Úloha pre strednú hodnotu sa dá naformulovať aj iným spôsobom Rovnako ako v predchádzajúcom prípade (32) a (33) majme množinu scenárov S a k nim prislúchajúce pravdepodobnosti nastatia p_s . Taktiež rovnako maximalizujeme strednú hodnotu portfólia cez všetky scenáre a ich pravdepodobnosti.
Na rozdiel od predchádzajúcej úlohy nebudeme maximalizovať zloženie každého scenárového portfólia samostatne (s tým, že pri prvom nákupe je zloženie všetkých portfólií rovnaké). Namiesto s váh portfólia x_{si} budeme pracovať so zložením jedného portfólia x_i ale s upravenými cenami. Cenu dlhopisu pre model určíme vážením pravdepobnosťami

nastatia jednotlivých scenárov $P_{ti} = \sum_{s\in S} p_s P_{sti}$ pričom platí $\sum p_s = 1 \qquad \forall s \in S$.

Alternatívna úloha pre strednú hodnotu

$$Max \sum_{s\in S} p_s \left(\sum_{i\in U} Z^H_{sTi} x^H_i + \sum_{i\in U} Z^A_{sTi} x^A_i \right) \qquad \sum p_s = 1 \qquad \forall s \in S$$

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i\in U} P^H_{0i} x^H_i + \sum_{i\in U} P^A_{0i} x^A_i & t &= 0 \\ \sum_{i\in U} F^H_{ti} x^H_i + \sum_{i\in U} F^A_{ti} x^A_i &\geq \sum_{i\in U} P^H_{ti} x^H_i + \sum_{i\in U} P^A_{ti} x^A_i & t &\in \langle 1, T\rangle \\ P_{ti} &= \sum_{s\in S} p_s P_{sti} \qquad t \in \langle 1, T\rangle \end{aligned} \tag{34}$$

Pre všetky scenáre $s \in S$

$$\sum_{i\in U} Z^H_{sti} x^H_i + \sum_{i\in U} Z^A_{sti} x^A_i \geq M_{st} \qquad t \in \langle 1, T\rangle$$

$$x \geq 0$$

Minimalizácia podielu HTM

$$Min \sum_{t=0}^{T} \sum_{s\in S} p_s \left(\sum_{i\in U} Z^H_{sTi} x^H_i \right) \qquad \sum p_s = 1 \qquad \forall s \in S$$

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i\in U} P^H_{0i} x^H_i + \sum_{i\in U} P^A_{0i} x^A_i & t &= 0 \\ \sum_{i\in U} F^H_{ti} x^H_i + \sum_{i\in U} F^A_{ti} x^A_i &\geq \sum_{i\in U} P^H_{ti} x^H_i + \sum_{i\in U} P^A_{ti} x^A_i & t &\in \langle 1, T\rangle \\ P_{ti} &= \sum_{s\in S} p_s P_{sti} \qquad t \in \langle 1, T\rangle \\ \sum_{s\in S} p_s \left(\sum_{i\in U} Z^H_{sTi} x^H_i + \sum_{i\in U} Z^A_{sTi} x^A_i \right) &\geq Max_{uloha1} \end{aligned} \tag{35}$$

Pre všetky scenáre $s \in S$

$$\sum_{i\in U} Z^H_{sti} x^H_i + \sum_{i\in U} Z^A_{sti} x^A_i \geq M_{st} \qquad t \in \langle 1, T\rangle$$

$$x \geq 0$$

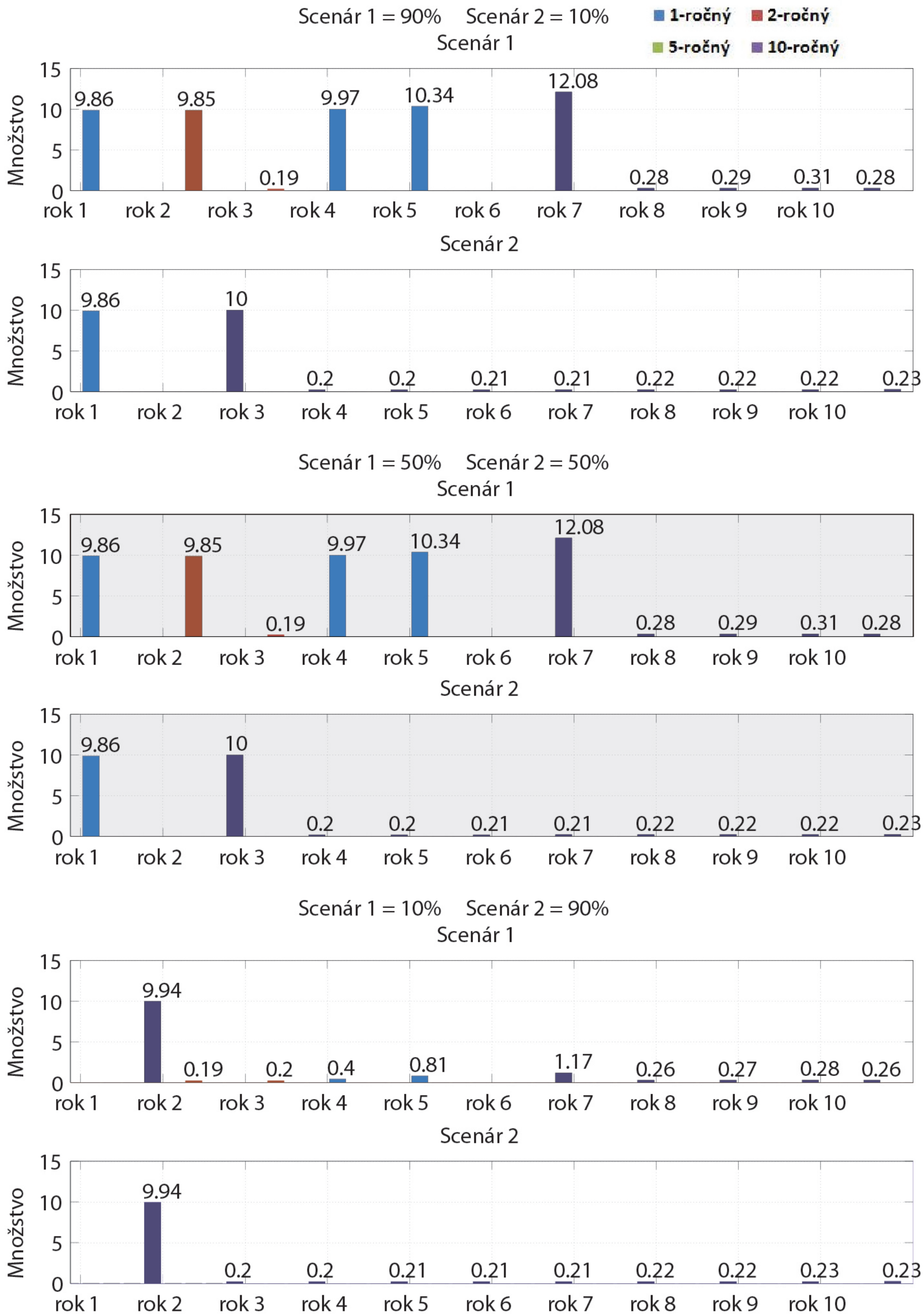
Výstup pre alternatívny model strednej hodnoty (34) a (35) vidíme na Obr. 20.

Rovnako ako v štandardnom modeli pre strednú hodnotu (32) a (33) je zloženie v prvom roku totožné. Môžeme vidieť rozdielnu skladbu portfólia oproti Obr. 19.

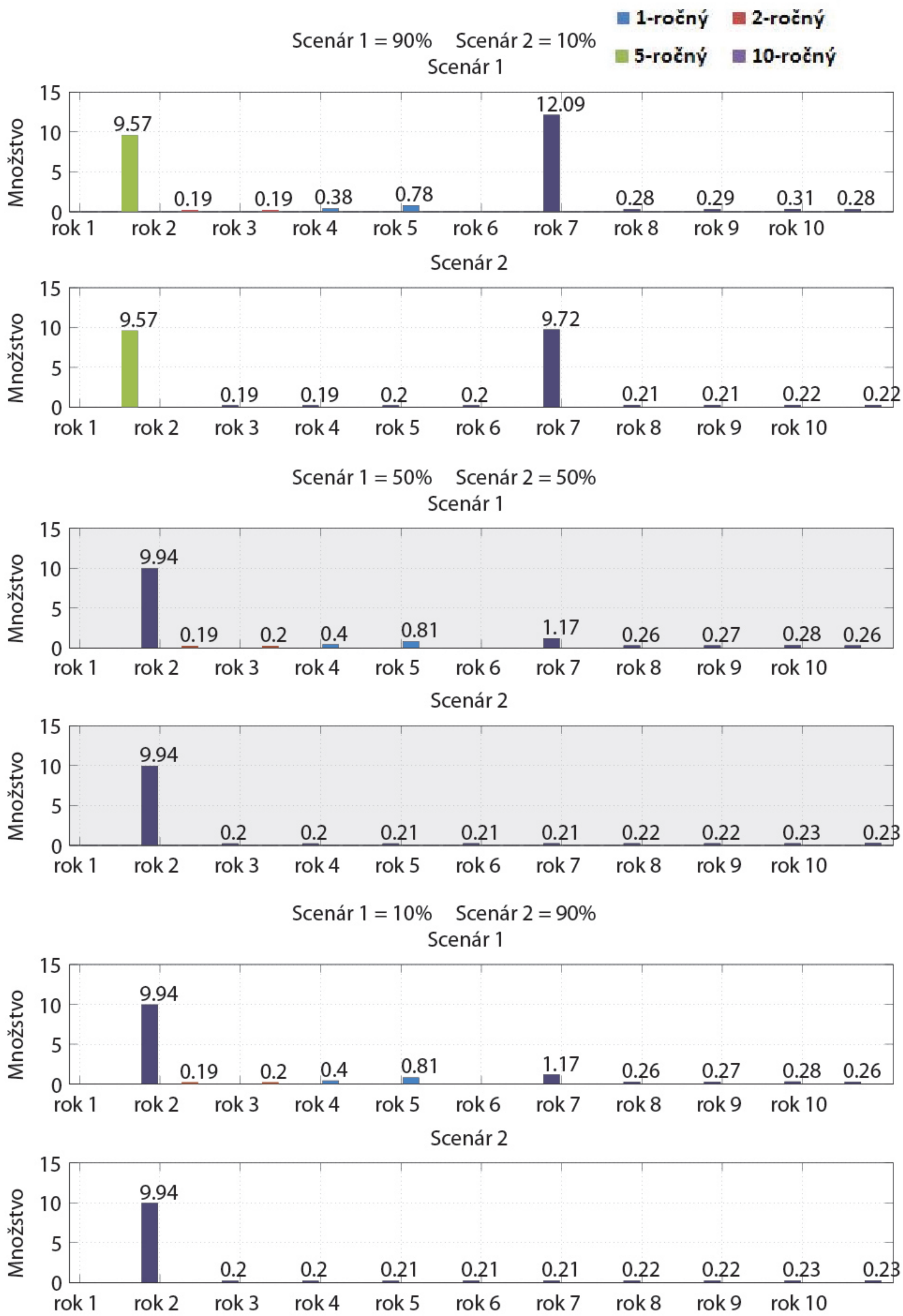
Tak ako zloženie portfólia nás môže zaujímať maximálna hodnota portfólia v závislosti od váh p_s a použitého modelu. V oboch modeloch máme na začiatku niekoľko scenárov, pričom nevieme, ktorý z nich nastane. Zloženie portfólia je preto v momente prvého nákupu totožné pre všetky scenáre. Následne, ale už vieme, ktorý scenár nastal, a vieme optimalizovať hodnotu portfólia podľa aktuálne platného scenára.

Obr. 21 zobrazuje hodnotu portfólia v prípade, ak nastane scenár 1, v závislosti od použitého modelu. Na x-ovej osi je pravdepodobnosť nastatia scenára, ktorý bol použitý v oboch modeloch o strednej hodnote. Obr. 22 zobrazuje rovnako hodnotu portfólia, ale v prípade ak nastane scenár 2.

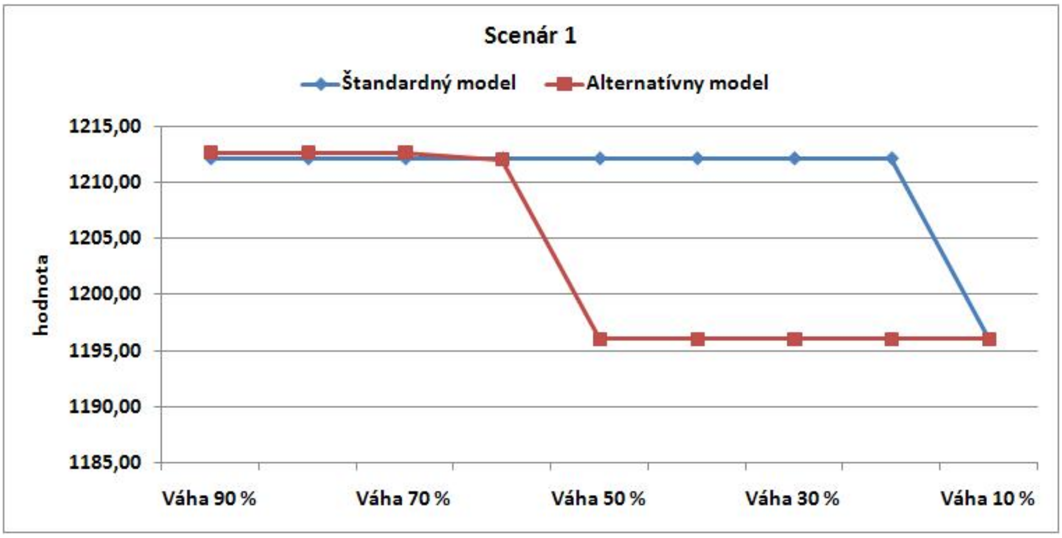
Na Obr. 21 a Obr. 22 vidíme, že alternatívny model pre strednú hodnotu (34) a (35) dáva lepšie výsledky v prípade, ak má nejaký scenár vyššiu pravdepodobnosť nastatia p_s a naozaj nastane. Naopak, zo štandardného modelu pre strednú hodnotu (32) a (33) dostaneme lepšie výsledky, keď scenár nastane a pritom p_s je menšia. Na y-ovej osi je množstvo (kusy) jednotlivých dlhopisov, ktoré sme kúpili. Nad jednotlivými stĺpcami je táto hodnota vyčíslená.



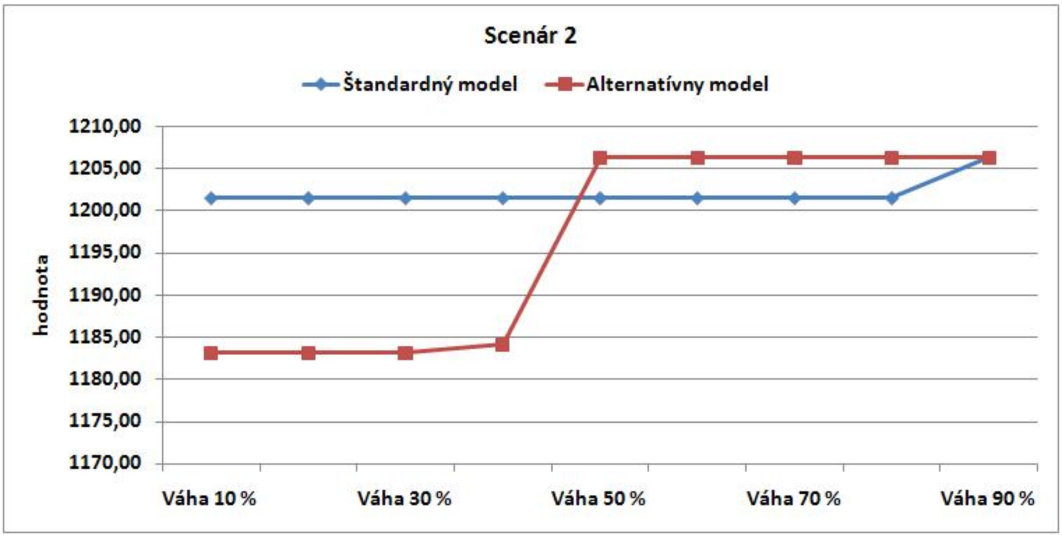
Obr. 19: Zloženie portfólia v závisloti od scenára a pravdepodobnosti nastatia - model (32) a (33)



Obr. 20: Zloženie portfólia v závisloti od scenára a pravdepodobnosti nastatia - model (34) a (35)



Obr. 21: Hodnota portfólia v prípade, ak nastane scenár 1 - na x-ovej osi je pravdepodobnosť nastatia scenára 1 z modelu o strednej hodnote.



Obr. 22: Hodnota portfólia v prípade, ak nastane scenár 2 - na x-ovej osi je pravdepodobnosť nastatia scenára 2 z modelu o strednej hodnote.

6.2 Predaj AFS dlhopisov v portfóliu

Označme premennou x zloženie portfólia pred predajom a premennou y zloženie portfólia po predaji. Predaj nastáva v čase τ. Naďalej platí, že nemôžeme ísť do krátkej pozície $x_i \geq 0$ *pre* $t \in \langle 0, \tau \rangle$ a $y_i \geq 0$ *pre* $\forall t$. Pribudnú ale ďalšie ohraničenia týkajúce sa predaja - HTM dlhopisy nie je možné predávať $x_i^H = y_i^H \; pre \; t \in \langle 0, \tau \rangle$. Taktiež, nemôžeme predať viac AFS dlhopisov ako máme, ale nemôže sa nám ani zvýšiť počet tých, ktoré sme už v predchádzajúcom čase kúpili $x_i^A \geq y_j^A \; pre \; t \in \langle 0, \tau \rangle$.

Rozmer úlohy (36) sa teda výrazne zväčšil oproti (28), jednak čo sa týka premenných, ale aj ohraničení. Zavádzame aj transakčné náklady c za každý predaný kus (všetky dlhopisy majú rovnaký nominál) $c(x - y)$. Následne v (37) opäť minimalizujeme hodnotu HTM dlhopisov v portfóliu.

Maximalizovanie končenej hodnoty portfólia po pridaní možnosti predaja

$$Max \; \sum_{i \in U} Z_{Ti}^H y_i^H + \sum_{i \in U} Z_{Ti}^A y_i^A$$

$$M = \sum_{i \in U} P_{0i}^H x_i^H + \sum_{i \in U} P_{0i}^A x_i^A \qquad t = 0$$

$$\sum_{i \in U} F_{ti}^H x_i^H + \sum_{i \in U} F_{ti}^A x_i^A \geq \sum_{i \in U} P_{ti}^H x_i^H + \sum_{i \in U} P_{ti}^A x_i^A \qquad t \in \langle 1, \tau \rangle$$

$$\sum_{i \in U} Z_{ti}^H x_i^H + \sum_{i \in U} Z_{ti}^A x_i^A \geq M_t \qquad t \in \langle 1, \tau \rangle$$

$$\sum_{i \in U} Z_{\tau i}^H x_i^H + \sum_{i \in U} Z_{\tau i}^A x_i^A = \sum_{i \in U} Z_{\tau i}^H y_i^H + \sum_{i \in U} Z_{\tau i}^A y_i^A + c(x - y)$$

$$\sum_{i \in U} F_{ti}^H y_i^H + \sum_{i \in U} F_{ti}^A y_i^A \geq \sum_{i \in U} P_{ti}^H y_i^H + \sum_{i \in U} P_{ti}^A y_i^A \qquad t \in \langle \tau + 1, T \rangle$$

$$\sum_{i \in U} Z_{ti}^H y_i^H + \sum_{i \in U} Z_{ti}^A y_i^A \geq M_t \qquad t \in \langle \tau + 1, T \rangle$$

Pre všetky scenáre $s \in S$

$$\sum_{i \in U} Z_{sti}^{H} x_i^H + \sum_{i \in U} Z_{sti}^{A} x_i^A \geq M_{st} \qquad t \in \langle 1, \tau \rangle$$
$$\sum_{i \in U} Z_{sti}^{H} y_i^H + \sum_{i \in U} Z_{sti}^{A} y_i^A \geq M_{st} \qquad t \in \langle \tau + 1, T \rangle$$

$i \in U$, ktore su aktivne medzi $t \in \langle 0, \tau \rangle$

$$x_i \geq 0$$
$$x_i^H = y_i^H$$
$$x_i^A \geq y_j^A$$

pre$t \in \langle 0, T \rangle$

$$y \geq 0 \tag{36}$$

Minimalizácia podielu HTM

$$Min \sum_{t=0}^{\tau} \sum_{i \in U} Z_{ti}^{H} x_i^H + \sum_{t=0}^{T} \sum_{i \in U} Z_{ti}^{A} y_i^H$$

$$M = \sum_{i \in U} P_{0i}^{H} x_i^H + \sum_{i \in U} P_{0i}^{A} x_i^A \qquad t = 0$$

$$\sum_{i \in U} F_{ti}^{H} x_i^H + \sum_{i \in U} F_{ti}^{A} x_i^A \geq \sum_{i \in U} P_{ti}^{H} x_i^H + \sum_{i \in U} P_{ti}^{A} x_i^A \qquad t \in \langle 1, \tau \rangle$$
$$\sum_{i \in U} Z_{ti}^{H} x_i^H + \sum_{i \in U} Z_{ti}^{A} x_i^A \geq M_t \qquad t \in \langle 1, \tau \rangle$$

$$\sum_{i \in U} Z_{\tau i}^{H} x_i^H + \sum_{i \in U} Z_{\tau i}^{A} x_i^A = \sum_{i \in U} Z_{\tau i}^{H} y_i^H + \sum_{i \in U} Z_{\tau i}^{A} y_i^A + c(x - y)$$

$$\sum_{i \in U} F_{ti}^{H} y_i^H + \sum_{i \in U} F_{ti}^{A} y_i^A \geq \sum_{i \in U} P_{ti}^{H} y_i^H + \sum_{i \in U} P_{ti}^{A} y_i^A \qquad t \in \langle \tau + 1, T \rangle$$
$$\sum_{i \in U} Z_{Ti}^{H} y_i^H + \sum_{i \in U} Z_{Ti}^{A} y_i^A \geq Max_{uloha1}$$
$$\sum_{i \in U} Z_{ti}^{H} y_i^H + \sum_{i \in U} Z_{ti}^{A} y_i^A \geq M_t \qquad t \in \langle \tau + 1, T \rangle$$

Pre všetky scenáre $s \in S$

$$\sum_{i \in U} Z_{sti}^H x_i^H + \sum_{i \in U} Z_{sti}^A x_i^A \geq M_{st} \qquad t \in \langle 1, \tau \rangle$$

$$\sum_{i \in U} Z_{sti}^H y_i^H + \sum_{i \in U} Z_{sti}^A y_i^A \geq M_{st} \qquad t \in \langle \tau + 1, T \rangle$$

$i \in U$, ktore su aktivne medzi $t \in \langle 0, \tau \rangle$

$$x_i \geq 0$$

$$x_i^H = y_i^H$$

$$x_i^A \geq y_j^A$$

pre $t \in \langle 0, T \rangle$

$$y \geq 0 \tag{37}$$

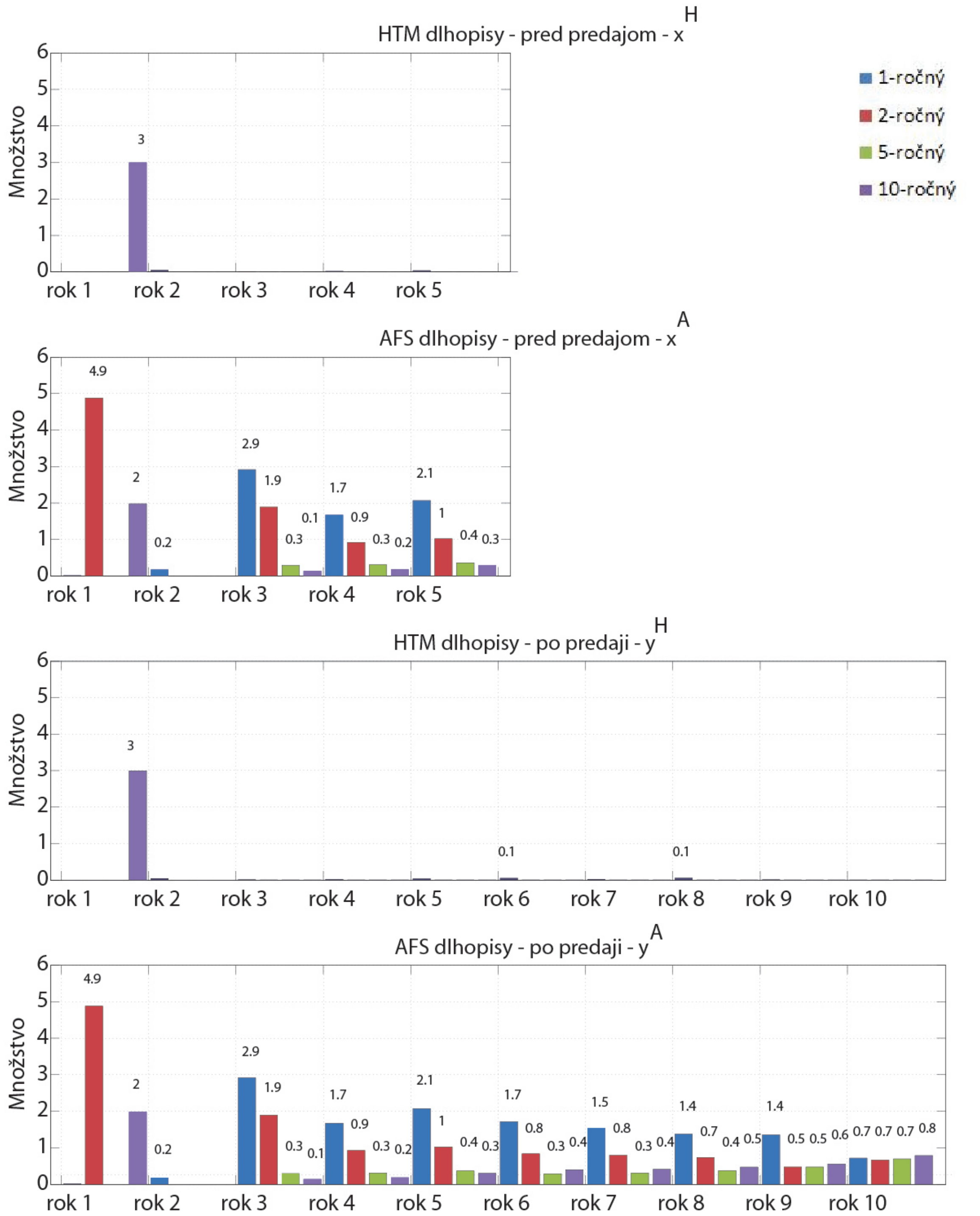
Využime opäť očakávaný vývoj úrokovej krivky z Obr. 14 a alternatívne scenáre Obr. 15 a Obr. 16. Následne nás zaujíma zloženie HTM a AFS portfólia pred a po predaji v závislosti od rôznych transakčných nákladov - Obr. 23 a Obr. 24. Rovnako využime ohraničenia (30) a (31). Maximálna expozícia voči HTM dlhopisov je 30% z hodnoty portfólia a maximálny podiel jedného dlhopisu na celkovej hodnote je 50%. Od M_t a M_{st} požadujeme aby rovnako rástli o 1% ročne z počiatočnej investície $M = 1000$.

V prípade veľkých transakčných nákladov, 10% z nominálu, nedochádza k žiadnemu predaju. Straty spôsobené transakčnými nákladmi sú príliš veľké na to, aby ich výhodnejší nákup dlhopisov za predané prostriedky, vyrovnal. K žiadnemu predaju preto nedôjde, čomu sa prispôsobí aj zloženie portfólia. Model (36) a (37) sa správa ako pred zavedením možnosti predaja (28) a (29). Výstup Obr. 23 je preto totožný s Obr. 17 a Obr. 18. Hodnota portfólia v roku 10 je v prípade, ak k žiadnemu predaju nedôjde $1150,7$

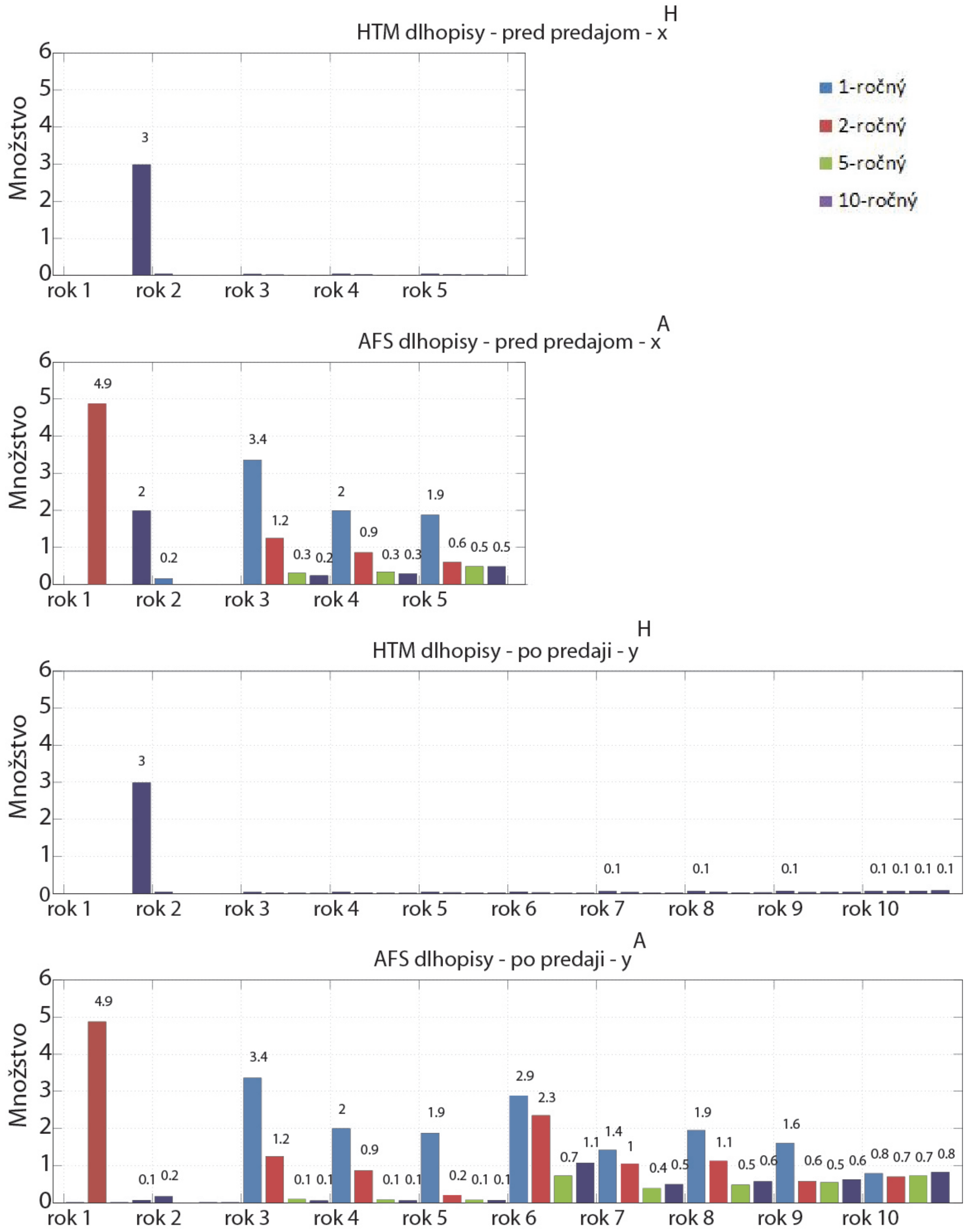
Ak ale transakčné náklady poklesnú, predaj sa stane, napriek transakčným nákladom, rentabilný - Obr. 24. Pri transakčných nákladoch 2% vidíme odlišné zloženie portfólia oproti prípadu, keď k predaju nedošlo. Vidíme taktiež, že došlo k predaju dlhých AFS dlhopisov kúpených predovšetkým v roku 1. Za prostriedky z predaja sú v roku 6 dokúpené ďalšie dlhopisy. Konečná hodnota portfólia sa vďaka možnosti predaja zvýšila na $1195,5$.

V prípade, ak transakčné náklady znížime pod 2%, hodnota portfólia sa už výraznejšie nezmení, rovnako ako aj jeho zloženie pred a po predaji. Je to spôsobené ohraničením, kde jeden dlhopis môže tvoriť najviac 50% z hodnoty portfólia. Toto ohraničenie neumožňuje nakúpiť väčšie množstvá dlhopisov po predaji a teda ďalšie znižovanie transakčných nákladov už nespôsobí výraznejší rast hodnoty portfólia.

Reálne transakčné náklady sa pohybujú okolo $1-5\%$ z nominálu [15]. Pri uvedených vstupných parametroch je rentabilné predávať dlhopisy kým sa transakčné náklady nepriblížia k hodnotám okolo $4,95\%$ z nominálnu.



Obr. 23: Zloženie portfólia pred a po predaji - transakčné náklady 10% z nominálu dlhopisov.



Obr. 24: Zloženie portfólia pred a po predaji - transakčné náklady 2% z nominálu dlhopisov.

Záver

V diplomovej práci sme sa venovali tvorbe a riadeniu dlhopisového portfólia . Vychádzali sme z prác [2, 3, 4], odkiaľ aj pochádzal základný model predstavený v tretej kapitole.

V prvej kapitole sme predstavili teoretické základy oceňovania dlhopisov a ich citlivosť na zmenu úrokovej miery - duráciu. Druhá kapitola sa zaoberala dôchodkovým systémom na Slovensku. Vysvetlili sme dva možné prístupy pri oceňovaní dlhopisov v dôchodkových fondoch vedenými DSS. Jednalo sa o trhový prístup a metódu umorovanej hodnoty, ktorá oceňuje dlhopisy pomocou ich počiatočného výnosu do splatnosti. V závere druhej kapitoly sme popísali odplaty, na ktoré majú DSS nárok.

Modely cash-flow párovania z článku [2] sme predstavili v tretej kapitole. Maximalizačný prístup mal oproti minimalizačnému širšie použitie, nakoľko nevyžadoval výpočty so záväzkami. Ďalej sme pracovali už iba s maximalizačným prístupom.

V štvrtej kapitole sme odstránili nedostatok modelu, kde model nepripúšťal vlastníctvo dlhopisov na konci investovania. Zaviedli sme preto maximalizovanie očakávanej hodnoty portfólia. Piata kapitola zavádza dva druhy oceňovania dlhopisov, ktoré sú povolené v zákone č. 43/2004 Z. z.. V modeli preto začali vystupovať dve kategórie dlhopisov - v závislosti od oceňovacieho prístupu - AFS a HTM dlhopisy. V piatej kapitole sme taktiež zaviedli ohraničenia, ktoré mali zamedziť prepadu hodnoty portfólia, v prípade ak by nastal neočakávaný vývoj úrokovej krivky. Do modelu sa pridala aj druhá minimalizačná úloha, ktorá mala za cieľ minimalizovať hodnotu HTM dlhopisov. Výstupy modelu potvrdili očakávania, kde dlhé dlhopisy boli nakúpené ako HTM (nakoľko sú citlivejšie na pohyb úrokovej miery) a kratšie dlhopisy boli kúpené ako AFS a oceňované trhovým prístupom.

Šiesta kapitola zavádzala dve rozšírenia modelu. Najprv sme uviedli dva prístupy k modelu so strednou hodnotou, kde pri maximalizácii očakávanej hodnoty sme brali do úvahy rôzne scenáre (s rôznym očakávaným vývojom úrokovej miery) a ich pravdepodobnosti nastatia. Keďže model dokázal optimalizovať zloženie portfólia v prípade rôznych scenárov, má širšie využite v súčasnom turbulentnom finančnom svete. Na konci šiestej kapitoly sme do modelu pridali možnosť predaja AFS dlhopisov. V prípade vysokých transakčných nákladov nedochádzalo k žiadnym predajom - model sa správal ako pred zavedením možnosti predaja. Ak sa však transakčné náklady znížili pod 5% z nominálu dlhopisov, k predaju dochádzalo, čo malo za následok vyššiu konečnú hodnotu portfólia.

Prínosom diplomovej práce bolo vytvorenie modelu pre tvorbu dlhopisového portfólia, v ktorom je možné dlhopisy oceňovať ako aj trhovým spôsobom, tak aj metódou umorovanej hodnoty. Do budúcnosti by sa model dal rozšíriť na viacstupňový stochastický model pomocou dynamického programovania. Priestor je taktiež v zavedení úžitkovej funkcie, ktorá by bližšie popisovala systém odplát DSS.

Literatúra

[1] I. Melicherčík, L. Olšarová, V. Úradníček, *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, (2005).

[2] S. S. Nielsen, *Lecture Notes: Mathematical Modeling and Optimization with Application in Finance*, http://www.gams.com/docs/contributed/financial/fin_notes.pdf, (1997).

[3] S. A. Zenios, *Practical Financial Optimization: Decision Making for Financial Engineers*, Blackwell Publishing, (2008).

[4] S. S. Nielsen, S. A. Zenios, *A library of financial optimization models*, Blackwell Publishing, (2005).

[5] *Dôchodkový systém*, http://www.employment.gov.sk/dochodkovy-system.html.

[6] *Asociácia dôchodkových správcovských spoločností*, http://www.adss.sk/.

[7] *Asociácia doplnkových dôchodcovských spoločností*, http://www.adds.sk/.

[8] *Národná Banka Slovenska*, http://www.nbs.sk/sk/dohlad-nad-financnym-trhom/dohlad-nad-dochodkovym-sporenim/legislativa.

[9] *Opatrenie Národnej banky Slovenska z 12. júna 2012 o metódach a postupoch určenia hodnoty majetku v dôchodkovom fonde a doplnkovom dôchodkovom fonde*, Zbierka zákonov č. 180/2012.

[10] *Opatrenie Ministerstva financií Slovenskej republiky z decembra 2012 č. MF/23778/2012-74*, http://www.finance.gov.sk/Default.aspx?CatID=5735.

[11] *Zákon č. 43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení v znení neskorších predpisov a o zmene a doplnení niektorých zákonov.*

[12] *Doplnkové dôchodkové poistenie na Slovensku*, http://www.euroekonom.sk /download2/ekonomika-sr/Doplnkove-dochodkove-poistenie-na-Slovensku.pdf.

[13] *Prognóza obyvateľov SR 2012-2060 stredný variant*, http://www.infostat.sk/vdc/pdf/prognoza_ 2060/prognoza _ stredny.zip.

[14] *Rizikové práce*, www.ruvzzvolen.sk/doc/rizikove_prace.rtf.

[15] *Broker markups - A bond investor's worst enemy*, http://www.forbes.com/2009/02/26/munis-spreads-markups-personal-finance_investing_ideas_bond_brokers.html.

[16] *Bond Yield-to-Maturity*, http://www.moneychimp.com/articles/finworks/fmbondytm.htm.