

**Stabilita laminárnych kvapalných jetov**

**DIPLOMOVÁ PRÁCA**

Lukáš Papranec

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY**

1114 – Aplikovaná matematika

Vedúci diplomovej práce:  
doc. Mgr. Peter Guba, PhD.

Kód práce:  
BA6FB76B-994A-4891-ADE8-3034EFA1E433

BRATISLAVA 2013



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Lukáš Papranec  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Stabilita laminárnych kvapalných jetov

**Cieľ:** Cieľom diplomovej práce bude teoretické štúdium interakcie dvoch laminárnych kvapalných jetov v stratifikovanom prostredí. Práca si bude vyžadovať aplikáciu asymptotických metód pre redukciu Navierových-Stokesových rovníc v limite malých Reynoldsových čísel a krátkych vlnových dĺžok porúch.

**Vedúci:** doc. RNDr. Peter Guba, PhD.

**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

**Dátum zadania:** 25.01.2012

**Dátum schválenia:** 26.01.2012

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

*Papranec*

študent

*Daniel Ševčovič*

vedúci práce

---

## STABILITA LAMINÁRNÝCH KVAPALNÝCH JETOV

Lukáš Papranec  
e-mail: lukas.papranec@gmail.com

doc. Mgr. Peter Guba, PhD.  
e-mail: peter.guba@fmph.uniba.sk

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
Univerzita Komenského v Bratislave  
Mlynská dolina, 846 48 Bratislava  
Slovenská republika

# Abstrakt

Práca sa zaoberá teoretickým štúdiom stability planárneho viskózneho prúdu v stratifikovanom prostredí. Prvá kapitola je venovaná odvodeniu riadiaceho komplexného diferenciálneho systému Orr-Sommerfeldovho typu na konečnej oblasti. Odvodenie vychádza zo základných pohybových rovníc pre Newtonovské kvapaliny za predpokladov, ktoré umožňujú linearizáciu riadiacich rovníc. Druhá kapitola pojednáva o známych asymptotických výsledkoch na polonekonečnej oblasti pre limitne malé hodnoty Reynoldsových čísel a dlhých vlnových dĺžok porúch. Významnú časť kapitoly venujeme odvodeniu asymptotických foriem riešení pre problém na konečnej oblasti. V poslednej kapitole sa venujeme zostaveniu diskrétnej formy problému a následnému aproximatívne riešeniu použitím Čebyševovej pseudospektrálnej metódy. Numerické riešenia sú analyzované z hľadiska presnosti prostredníctvom porovnania s asymptotickými formami riešení v špeciálnych limitných prípadoch.

**Kľúčové slová:** lineárna teória stability • analýza normálnych módov • komplexný vlastnohodnotový problém Orr-Sommerfeldovho typu • asymptotické metódy • Čebyševova pseudospektrálna metóda

Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s využitím svojich poznatkov a s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave, 11. apríla 2013

Lukáš Papranec

Na tomto mieste by som chcel vyjadriť úprimné poďakovanie svojmu vedúcemu diplomovej práce doc. Mgr. Petrovi Gubovi, PhD. za absolútnu ochotu a pomoc, ktorú vynaložil pri vedení tejto práce.

Ďalej by som chcel poďakovať svojim rodičom Vierke a Igorovi, a starým rodičom za trpezlivosť i podporu pri štúdiu. Túto prácu venujem nebohej babke Anastázii, ktorej komplikovaná životná cesta neumožnila rozvíjať talent v matematike a fyzike.

V neposlednom rade by som chcel vyjadriť vďaka svojim priateľom, ktorí mi spríjemňovali štúdium svojou prítomnosťou. Ďakujem.

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>Zoznam použitých symbolov</b>	<b>3</b>
<b>Ciele diplomovej práce</b>	<b>4</b>
<b>1 Formulácia stabilitného problému</b>	<b>5</b>
1.1 Základný stav . . . . .	5
1.1.1 Pohybové rovnice pre Newtonovské kvapaliny . . . . .	7
1.1.2 Implementácia základného stavu do riadiacích rovníc . . . . .	8
1.1.3 Okrajové podmienky a podmienky na rozhraní . . . . .	10
1.1.4 Aplikácia okrajových podmienok . . . . .	13
1.1.5 Bezrozmerná formulácia . . . . .	17
1.2 Perturovaný stav . . . . .	19
1.2.1 Nelineárny systém . . . . .	19
1.2.2 Linearizácia systému a okrajových podmienok . . . . .	22
1.2.3 Prevod do pohybujúcej sa súradnicovej sústavy . . . . .	25
1.2.4 Prepis problému pomocou prúdovej funkcie . . . . .	28
1.2.5 Analýza normálnych módov . . . . .	30
<b>2 Prehľad asymptotických výsledkov</b>	<b>33</b>
2.1 Asymptotické výsledky pre Stokesovu limitu . . . . .	33
2.2 Asymptotické výsledky pre dlhé vlnové dĺžky porúch . . . . .	36
2.3 Asymptotika pre Stokesovu limitu na konečnej oblasti . . . . .	37
2.3.1 Prúdočiary rýchlostného poľa porušeného stavu . . . . .	41
2.3.2 Porovnanie asymptotických výsledkov pre $A < \infty$ a $A \rightarrow \infty$ v Stokesovej limite . . . . .	42
2.4 Dodatok ku kapitole . . . . .	45
<b>3 Numerická realizácia</b>	<b>47</b>
3.1 Nerovnomerné distribúcie interpolačných uzlov . . . . .	47
3.1.1 Chyba interpolácie a konvergencia . . . . .	50
3.1.2 Modifikácia Čebyševovských distribúcií . . . . .	51
3.2 Čebyševove diferenčné matice . . . . .	54
3.2.1 Vlastnosti Čebyševovej metódy . . . . .	57
3.3 Numerické riešenie vlastnohodnotového problému . . . . .	57
3.3.1 Okrajové podmienky pre symetrické perturbácie . . . . .	58

---

3.3.2	Okrajové podmienky pre antisymetrické perturbácie . . . . .	60
3.3.3	Numerická implementácia . . . . .	61
3.3.4	Porovnanie numerických a asymptotických výsledkov . . . . .	67
3.4	Rozbor metódy . . . . .	71
3.5	Dodatok ku kapitole . . . . .	74
	<b>Záver</b>	<b>86</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>87</b>
	<b>Zdrojové kódy systému MATLAB</b>	<b>88</b>



# Úvod

Počiatky teórie hydrodynamickej stability siahajú do obdobia 19. storočia a priamo súvisia s vtedajším pokrokom v hydrodynamike. Táto oblasť výskumu je aj v súčasnosti považovaná za jednu z najdôležitejších kapitol dynamiky tekutín. Teória stability sa principiálne zaoberá zodpovedaním otázky, prečo a za akých podmienok dochádza k prechodu laminárneho prúdenia k turbulencii. Samostatnou úlohou pri objavovaní mechanizmov nestability je práve určenie laminárneho prúdenia – základného stavu. Stabilita základného stavu potom priamo súvisí s charakterom porúch vnesených do tohto systému. Porušený stav, ktorý vznikne superpozíciou základného stavu a príslušnej poruchy, musí v záujme konzistencie a správnosti riešenia spĺňať riadiace rovnice pre pohyb tekutiny. Z tohto vyplýva, že porucha vnesená do systému nemôže byť ľubovoľná a jej časovo–priestorový charakter je plne definovaný rovnicami odvodenými z pohybových rovníc. Podľa typu uvažovaných počiatočných porúch rozlišujeme lineárnu a nelineárnu teóriu stability. Lineárna teória pojednáva o limitne malých poruchách, ktoré umožňujú linearizáciu nelineárneho problému, vyplývajúceho z advektívnych členov v pohybových rovniciach. Nelineárna teória pripúšťa rádovo väčšie poruchy a zaoberá sa teda globálnou otázkou stability.

Významným podielom sa o rozvoj tejto teórie zaslúžili Kelvin a Helmholtz v 80-tych rokoch 19. storočia. Ich popis špeciálneho typu nestability bol rigorózne popísaný a odvodený z Eulerových rovníc pre ideálne kvapaliny. Paralelne sa však objavovali aj hypotézy o pôvode a mechanizme nestabilit, ktoré neboli dovtedy rigorózne spracované. Na ich teoretické práce nadviazal Rayleigh v rokoch 1879 – 1880 svojimi príspevkami k neviskózne teórii stability paralelných prúdení. Významným medzníkom v počiatkoch tejto teórie bol objav Rayleighovho stabilitného kritéria pre ideálne kvapaliny. Začiatkom 20. storočia sa objavili prvé práce zohľadňujúce typickú vlastnosť kvapalín – viskozitu. Kým predchádzajúce práce vychádzali z Eulerových rovníc, viskózna teória vychádza z Navier–Stokesových rovníc. Rôzne prístupy k formuláciám stabilitných problémov viedli k rôznym prístupom k ich riešeniu. V tejto práci analyzujeme problém metódou normálnych módov. Táto metóda bola známa už predtým pri analýze stability časticových systémov. Aplikácie v mechanike tekutín si našla práve vďaka Kelvinovi a Rayleighmu, ktorí ju použili na teoretický dôkaz prítomnosti nestabilit v nimi formulovaných systémoch.

Táto práca je rozdelená do troch hlavných kapitol. Každá z nich však využíva výsledky odvodené v predchádzajúcich a bezprostredne tak na seba nadväzujú. V prvej kapitole sa venujeme hlbšiemu teoretickému pochopeniu stabilitného problému. Podstatnú časť tejto kapitoly tvorí odvodenie explicitného tvaru základného stavu. Práve základný stav vplýva na riešenia systému nezanedbateľnou mierou. Oblasť, na ktorú sa toto riešenie vzťahuje, pozostáva z parametricky odlišných regiónov. Diferencie v

charakteristických veličinách ako napríklad viskozita a hustota, vnášajú do prostredia stratifikáciu. Prirodzenou súčasťou riešenia je teda aj poloha rozhrania, ktoré uvažované oblasti, vyplnené kvapalinou, oddeľuje. V súlade s lineárnou teóriou, následne odvádzame systém radiacích rovníc pre porušený stav. Porucha vo všeobecnosti definuje nelineárny stabilitný problém. Prijímame preto predpoklad o poruchách v norme infinitezimálnych. Tento predpoklad umožní previesť linearizáciu radiacích rovníc a následnú analýzu prostredníctvom normálnych módov. Rozhranie kvapalín v porušenom stave nie je planárne a vykazuje kinematické vlastnosti. Z tohto dôvodu je nutné previesť linearizáciu aj vzhľadom na uvažované oblasti. V závere kapitoly sa venujeme bezrozmernej formulácii prostredníctvom grupy bezrozmerných pomerových parametrov. Vzhľadom na skutočnosť, že sa zaoberáme situáciou v parametricky rozličných oblastiach, budú zohrávať podstatnú úlohu pri určovaní stability práve pomerové veličiny ako napríklad viskozitný a hustotný kontrast.

Druhá kapitola pojednáva o známych asymptotických výsledkoch, uverejnených v predchádzajúcich prácach. Asymptotická teória poskytuje alternatívny prístup k riešeniu v špeciálnych limitných prípadoch. Podľa dominancie jednotlivých členov asymptotického rozvoja nám tento prístup umožňuje analyzovať hlavné príčiny vzniku nestability. Prvú časť kapitoly venujeme analýze limitne malých Reynoldsových čísel a odvodeniu explicitnej formy riešenia v dominantom nultom ráde pre konečnú oblasť. Pri odvádzaní využívame regulárnu asymptotickú teóriu. Výsledky úlohy na konečnej oblasti sú následne porovnané v asymptotickom priblížení s riešeniami problému na polonekonečnej oblasti. V druhej časti sa zaoberáme analýzou stability vzhľadom na periodické poruchy dlhých vlnových dĺžok. Tento prípad je z hľadiska perturbačnej analýzy singulárny a je nutné k problému pristupovať na rôznej úrovni reškálovania. Potvrdzujúcim výsledkom v tejto asymptotickej limite je dominantný vplyv viskozity na otázku stability. Tento jav je v súlade s predchádzajúcimi analýzami a bol teoreticky študovaný vo viacerých prácach, napr. [Yih, 1967], [Joseph a kol., 1987].

V poslednej kapitole sa podrobne zaoberáme Čebyševovou pseudospektrálnou metódou na riešenie zovšeobecného vlastnohodnotového problému. Čebyševova metóda je veľmi efektívna pre hľadanie spektier a príslušného systému vlastných funkcií. V závislosti od diskretizácie umožňuje nahliadnúť na globálnu štruktúru spektra vlastnohodnotového problému, čím sa významne odlišuje od relaxačných metód, napr. metódy streľby. Nevýhodou tejto numerickej procedúry je však fenomén falošných vlastných čísel, ktoré sa objavujú pri riešení. Tieto vlastné čísla a príslušné vlastné podpriestory nevychádzajú z fyzikálnej podstaty úlohy a neovplyvňujú tak mechanizmus stability základného stavu. Pri jednoduchších vlastnohodnotových problémoch možno využiť eliminačné procedúry pre očistenie spektra od falošných vlastných čísel popísané napr. v literatúre [Huang a Sloan, 1994], [Orszag, 1971] a [Dongarra a kol., 1996]. Predmetná úloha tejto práce je však rozsiahly komplexný vlastnohodnotový problém a podstatná časť tejto kapitoly je venovaná práve analytickým a heuristickým metódam hľadania príslušného spektra. Analytický prístup umožňuje redukciu rádu systému, čo významne eliminuje vysoký počet falošných vlastných hodnôt. Následná heuristická korekcia vychádza z porovnania v špeciálnych limitách so známymi výsledkami.

# Zoznam použitých symbolov

Označenie	Názov
$\psi _a$	funkčná hodnota $\psi(a)$
$\psi _a^b$	rozdiel funkčných hodnôt $\psi(b) - \psi(a)$
$\psi _+^+$	podmienka spojitosti $\psi$ na rozhraní
$D\psi$	derivácia d/dz skalárnej funkcie $\psi$
$D\mathbf{u}/Dt$	materiálová derivácia vektorového poľa $\mathbf{u}$
$\nabla\psi$	gradient skalárnej funkcie
$\nabla^2\psi$	Laplaceov operátor aplikovaný na skalárnu funkciu
$\nabla^4\psi$	biharmonický operátor aplikovaný na skalárnu funkciu
$\nabla \cdot \mathbf{u}$	divergencia vektorového poľa $\mathbf{u}$
$\nabla \times \mathbf{u}$	rotácia vektorového poľa $\mathbf{u}$
$\mathbf{E}_N$	štvorcová jednotková matica s rozmerom $N \times N$
$\mathbf{B}_{N,M}$	všeobecná matica s rozmermi $N \times M$
$[\mathbf{B}]_{k,j}$	$kj$ prvok matice $\mathbf{B}$ (skalár)
$[\mathbf{B}]_{:,k}$	$k$ -ty stĺpec matice $\mathbf{B}$ (stĺpcový vektor)
$[\mathbf{B}]_{k,:}$	$k$ -ty riadok matice $\mathbf{B}$ (riadkový vektor)
$\text{Ai}(x)$	Airyho funkcia

Označenie	Veličina	Rozmer
$u_i$	rýchlosť	$\text{m s}^{-1}$
$\rho$	hustota	$\text{kg m}^{-3}$
$\mu$	viskozita	$\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-1}$
$\nu$	kinematická viskozita	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$p$	hydrodynamický tlak	Pa
$\tau$	šmykové napätie	Pa
$\sigma_{ij}$	normálové napätie	Pa
$\gamma$	povrchové napätie	$\text{kg s}^{-2}$

# Ciele diplomovej práce

Táto diplomová práca má dva nasledovné ciele

1. Prostredníctvom Čebyševovej pseudospektrálnej metódy analyzovať a numericky vypočítať spektrum vlastnohodnotového problému, ktorý bol sformulovaný v [Guba a Revallo, 2012].
2. Zistené numerické výsledky porovnať v špeciálnych limitných prípadoch s asymptotickými formami riešení z [Guba a Revallo, 2012].

# Kapitola 1

## Formulácia stabilitného problému

Záujem o skúmanie mechanizmov stability pre paralelné planárne toky vychádza najmä z potrieb priemyselnej praxe. Ako príklad môže slúžiť polymérová depozícia alebo extrúzia materiálov. Otázkou stability jednoduchého Poiseuilleho tečenia sa autori zaoberajú napríklad v literatúre [Drazin, 2004]. V tejto kapitole sa zaoberáme odvodením riadiacich rovníc pre vyšetovanie stability Poiseuilleho zloženého toku. Prvou prácou, ktorá rozoberala viskozitnú stratifikáciu bola [Yih, 1967]. Autor tu uvažuje situáciu paralelného tečenia na naklonenej rovine. Dôležitý výsledok v aproximácii pre dlhé vlnové dĺžky porúch ukázal, že základný stav podlieha nestabilite pre všetky Reynoldsove čísla. Práca [Renardy, 1987] poukazuje aj na hustotnú stratifikáciu so zohľadnením efektu povrchového napätia na rozhraní tokov. V tejto práci je problém stability planárneho prúdu analyzovaný jednak z hľadiska viskozitného ako aj hustotného rozvrstvenia prostredia.

### 1.1 Základný stav

Lineárna stabilitná teória sa zaoberá otázkou stability *základného toku* alebo základného stavu. V tejto časti sa preto budeme venovať odvodeniu explicitnej formy základného toku. V prípade viskóznej teórie nemožno uvažovať ľubovoľný strižný základný tok a tento budeme preto konštruovať ako vnútorne konzistentné riešenie príslušných riadiacich rovníc. Vďaka takto skonštruovanému riešeniu, bude možno korektne interpretovať výsledky, ktoré nám lineárna teória ponúka. Budeme uvažovať netriviálny viskózny ustálený tok, ktorý plne spĺňa riadiace Navier–Stokesove rovnice a príslušné okrajové podmienky. Voľba iného toku by porušila podmienku konzistencie, pričom by mohlo dôjsť k vyvodu nesprávnych záverov.

V prípade neviskózneho tečenia ideálnej kvapaliny je z matematického hľadiska určenie základného stavu jednoduchšou úlohou. Táto skutočnosť je primárne daná efektom viskozity na štruktúru toku v hraničných vrstvách. Vplyv hraničných vrstiev sa objavuje pri štúdiu viskóznych tečení, kedy dochádza k netriviálnym zmenám rýchlostných gradientov v relatívne úzkych oblastiach pri pevnej hranici. Keďže pre ideálnu kvapalinu je viskozita nulová  $\mu = 0$ , silové pôsobenie medzi kvapalnými elementami prebieha len v normálovom smere. Neprítomnosť deviačných napätí v ideálnej kvapaline spôsobuje neprítomnosť zmien rýchlostných gradientov v oblastiach pevnej hranice. V našej práci sa preto budeme zaoberať len viskóznym prípadom  $\mu \neq 0$ .

Základným stavom budeme v nasledovnom rozumieť dvojicu  $(\mathbf{U}, P)$ , kde  $\mathbf{U}$  je rýchlostné vektorové pole a  $P$  je tlakové skalárne pole. Situáciu budeme uvažovať v dvojrozmernej kartézskej geometrii  $(r, z)$ , kde  $-A < r < A$  a  $-\infty < z < \infty$ . Dvojrozmerný prípad však budeme považovať za projekciu situácie v trojrozmernej geometrii. Toto rozmerové zjednodušenie má opodstatnenie vďaka obsiahnutej symetrii. Premenná  $r$  vyjadruje vzdialenosť od centra jetu (v cylindrickom systéme má význam súradnice – polomeru). Podrobnejšie informácie o rozmerovej redukcii problému možno nájsť v článku [Joseph a kol., 1987], prípadne v literatúre [Drazin, 2004].

Profil  $\mathbf{U}$  budeme hľadať ako planárny paralelný strižný tok v premennej  $r$ . Ďalej predpokladáme, že tok je v základnom stave ustálený. Tečenie však bude prebiehať v dvoch parametricky odlišných oblastiach. Budeme definovať vnútornú a vonkajšiu oblasť nasledovne v tomto poradí

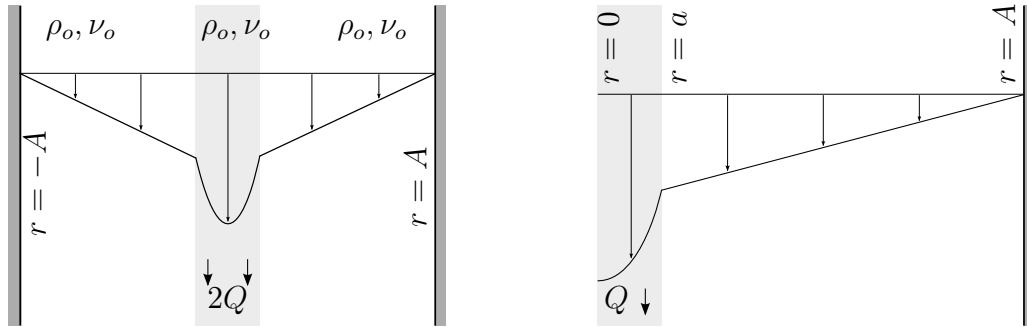
$$\Omega_i := (-a, a), \quad \Omega_i \cup \Omega_o := (-A, A). \quad (1.1)$$

Stratifikáciu prostredia spôsobuje prítomnosť dvoch nemiešateľných kvapalín. Pre rozlíšenie charakteristík jednotlivých vrstiev budeme definovať dve parametrické grupy zvlášť pre obe oblasti. Grupy budú tvoriť veličiny ako napríklad hustota  $\rho_i, \rho_o$ , viskozita  $\mu_i, \mu_o$  a analogicky indexujeme aj ostatné záujmové veličiny. Rovnako budeme rozlišovať aj rýchlostné a tlakové polia. Pre rýchlostné pole máme explicitne

$$\mathbf{U}(r) := U(r)\hat{\mathbf{e}}_z, \quad U(r) = \begin{cases} U_i(r), & r \in \Omega_i, \\ U_o(r), & r \in \Omega_o. \end{cases} \quad (1.2)$$

Tok je v tomto prípade nezávislý od priestorovej premennej  $z$ . Z matematického hľadiska práve táto skutočnosť spôsobuje translačnú invarianciu formy rýchlostného profilu pozdĺž osi  $z$ . Z fyzikálneho hľadiska možno túto vlastnosť vysvetľuje práve netriviálny konštantný tlakový gradient. V dynamike prúdenia majú práve gradienty tlakového poľa významný vplyv na štruktúru rýchlostného profilu. Z pohľadu analýzy stability uvedeného toku im budeme preto venovať nemalú pozornosť. Náčrt základného rýchlostného profilu možno nájsť na obrázku 1.1.3.

Prítomnosť dvoch nemiešateľných kvapalín implikuje existenciu rozhrania medzi



Obr. 1.1: **Základný stav.** Náčrt základného rýchlostného profilu (vľavo). Symetria základného stavu umožňuje formuláciu stabilného problému na polovičnej oblasti (vpravo).

nimi. Rozhranie medzi kvapalinami je v stacionárnom režime planárne a umiestnené v pozícii  $r = a$ . Dourčenie polohy rozhrania budeme vykonávať s využitím asymptotickej

teórie, za predpokladu, že  $a/A \ll 1$ . V neustálenom prúde vykazujú rozhranie kinematické vlastnosti, ktoré závisia na jeho krivosti a povrchovom napätí uvažovaných nemiešateľných tokov.

### 1.1.1 Pohybové rovnice pre Newtonovské kvapaliny

Pri ďalšej analýze problému, budeme vychádzať z pohybových rovníc pre všeobecnú kvapalinu. Pokiaľ prijmem zjednodušujúci predpoklad o tom, že kvapalina je kontinuum, môžeme využiť výsledky mechaniky kontinua. Presnejšie, budeme vychádzať z Cauchyho pohybových rovníc pre všeobecnú kvapalinu v sumačnej konvencii<sup>1</sup>

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, \quad \text{na } \Omega \times (0, \infty), \quad (1.3)$$

kde  $u_i$  je  $i$ -ty komponent vektora rýchlosti v bode  $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$  a čase  $t > 0$ . Veličina  $\sigma_{ij}$  je tenzor 2. rádu a charakterizuje vnútorné napätové sily v kvapaline. Ostatné objemové sily pôsobiace v kvapaline sú zahrnuté v komponentoch  $g_i$ . Tento vektor má rozmer zrýchlenia a obvykle sa jedná tiažové zrýchlenie, vyjadrené v príslušnej báze. Operátor na pravej strane budeme definovať

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

a reprezentuje materiálovú deriváciu. V prípade aplikácie tohto operátora na rýchlostné pole dostávame zrýchlenie objemových elementov pozdĺž prúdočiar. Uvedená rovnica (1.3) je teda vyjadrením rovnováhy silového pôsobenia a vychádza zo zákona zachovania hybnosti. Povrchové sily vznikajú v dôsledku vzájomnej interakcie objemových elementov. Tieto sily sú pri tečení vyvolané hydrodynamickým tlakom  $p$  a deviačným napätím. Objemové sily pôsobia nezávisle na všetky kvapalné elementy v hlavnom objeme. Možno medzi ne zahrnúť napr. tiažovú, elektrostatickú alebo elektromagnetickú silu. My však budeme uvažovať len tiažovú silu.

Pre Newtonovské kvapaliny je tenzor napätia v tvare

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + D_{ij},$$

kde  $p$  je hydrodynamický tlak a  $D_{ij}$  je tenzor deformácie, prípadne tenzor deviačných napätí. Tento tenzor je charakteristický práve pre viskózne tečenia, explicitne ho možno zapísať v tvare  $D_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij}$ , kde  $\epsilon_{ij}$  je tenzor rýchlosti deformácie. Pre ideálnu kvapalinu platí  $\mu = 0$ , čo spôsobuje neprítomnosť tenzora  $D_{ij}$  vo forme  $\sigma_{ij}$ . V špeciálnom prípade viskózneho tečenia môže nastať aj situácia, že  $\epsilon_{ij} = 0$  a tenzor deformácie je taktiež nulový. To však neznamená, že ide o prúde ideálnej kvapaliny, keďže ide o dve kvantitatívne odlišné homogenity.

Tenzor  $\epsilon_{ij}$  má explicitnú formu<sup>2</sup>

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

<sup>1</sup>Sumácia prebieha cez index  $j$ .

<sup>2</sup>Všetky uvedené vzťahy uvádzame len vo výslednej forme a ich podrobnejšie zdôvodnenie možno nájsť napríklad v literatúre [Acheson, 2005].

z ktorej možno pozorovať symetriu  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ . Kým diagonálne zložky vyjadrujú rýchlosť zmeny objemu kvapalných elementov, tak mimodiagonálne prvky popisujú zmenu strižných napätí. Tenzor napätia je potom pre Newtonovskú kvapalinu v tvare

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.4)$$

V zmysle rovnice (1.3) počítajme divergenciu tenzora

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right).$$

Posledný zo sčítancov obsahuje divergenciu rýchlostného poľa  $u_i$ . Keďže sa ďalej budeme zaoberať len nestlačiteľnými Newtonovskými kvapalinami, rovnicu možno zjednodušiť do tvaru

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad (1.5)$$

čo vyplýva zo zákona zachovania hmoty. V diferenciálnom tvare ho možno vyjadriť rovnicou kontinuity

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad \text{na } \Omega \times (0, \infty).$$

Za predpokladu  $\rho = \text{const.}$  sa táto rovnica zapisuje v tvare  $\partial u_j / \partial x_j = 0$ . Nazýva aj *podmienka nestlačiteľnosti*. V tomto tvare nedefinuje explicitnú závislosť na  $t$ , musí však byť splnená pre všetky  $t > 0$ . Dosadením do rovnice (1.3) dostaneme pohybovú rovnicu

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \rho g_i, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1.7)$$

Tento systém spolu s príslušnými okrajovými podmienkami definuje nelineárny problém. Podmienka nestlačiteľnosti charakterizuje  $\mathbf{u} = u_j \hat{\mathbf{e}}_j$  ako solenoidálne vektorové pole. V prípade stlačiteľného objemu by nebolo možné uvažovať redukciu (1.5) a následnú formu rovníc (1.6).

### 1.1.2 Implementácia základného stavu do riadiacich rovníc

Základný tok bude v stabilitej analýze reprezentovať pozadový tok, ktorý bude následne perturbovaný. Keďže tento bude mať netriviálny vplyv na otázky spojené so stabilitou, budeme požadovať, aby sa jednalo o vnútorne konzistentné riešenie Navier–Stokesových rovníc. Ďalej budeme uvažovať len redukciu rovníc na dvojrozmernú geometriu  $(r, z) := \mathbf{r}$ . Vektor objemových síl  $\rho g_i$  bude zohľadňovať iba vertikálne gravitačné pôsobenie v zápornom smere  $z$ , to znamená  $g_1 = 0$  a  $g_2 = -g$ . Tieto predpoklady vyplývajú najmä z rotačnej symetrie a vhodnej voľby ortogonálnej bázy  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2)$ .

Doteraz sme sa zaoberali len štruktúrou rýchlostného poľa. Toto pole je však vyvolané pôsobením síl v kvapaline, ktoré v rovniciach (1.6) formulujeme prostredníctvom



gradientu modifikovaného tlaku. Po preskupení členov máme

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_{\text{mod}} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad (1.8)$$

kde

$$(p)_{\text{mod}} := \rho g_j x_j - p.$$

Podstatnou súčasťou riešenia je teda modifikovaný tlak, respektíve hydrodynamický tlak pre základný stav  $P = P(\mathbf{r})$ . Neskôr ukážeme priamo zo štruktúry rovníc, že tlak nie je závislý na premennej  $r$ .

Dosadením (1.2) do Navier–Stokesových rovníc dostávame pre materiálovú deriváciu

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{i,o}(r) = 0, \quad U_{i,o}(r) \frac{\partial}{\partial z} U_{i,o}(r) \hat{\mathbf{e}}_z = 0.$$

Prvá rovnosť vyplýva zo stacionarity toku. Homogenita nelineárneho advektívneho člena vyplýva zo samotnej konštrukcie  $\mathbf{U}$  ako paralelného strižného toku. Rýchlosť teda zostáva konštantná pozdĺž prúdočiar, ktoré sú v tomto prípade vertikálne paralelné priamky. Neprítomnosť advektívneho člena výrazne zjednoduší ďalší postup, keďže tento je jedinou nelinearitou v Navier–Stokesových rovniciach.

Z rovníc (1.6) potom dostávame

$$0 = -\frac{\partial}{\partial r} P(\mathbf{r}), \quad (1.9)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial z} P(\mathbf{r}) - \rho g + \mu U''(r). \quad (1.10)$$

Všimnime si, že rovnica kontinuity (1.7) je bezpodmienečne splnená a neukladá tak dodatočné požiadavky na tok. Z rovnice (1.9) vyplýva, že hydrodynamický tlak  $P$  je konštantný v premennej  $r$ , predefinujeme teda jednorozmernú závislosť  $P := P(z)$ . Ďalej definujme modifikovaný tlak v zmysle (1.8)

$$(P)_{\text{mod}} = P + P_S.$$

Z interpretačného hľadiska sa jedná o potenciálovú veličinu, pričom  $P_S(z) = \rho g z$  je hydrostatický tlak. V kvapaline je vyvolaný práve pôsobením tiažovým zrýchlením. Agregát  $(P)_{\text{mod}}$  v sebe obsahuje informáciu o celkovom silovom pôsobení v uvažovanom toku. Touto modifikáciou teda dostávame separovaný tvar

$$\left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{\text{mod}} = \mu U''.$$

Keďže táto rovnica dáva do súvisu dve kvantily vo vzájomne nezávislých premenných, je nutné, aby  $\hat{P}$  bolo nanajvyš rádu  $z$ . Z toho vyplýva požiadavka, aby bol tok akcelerovaný konštantným gradientom modifikovaného tlaku. Príjmime preto nasledovný predpoklad, ktorý je prirodzený pre všetky toky Poisseulleho typu

$$\left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{\text{mod}} = \rho K. \quad (1.11)$$

V záujme rozmerovej rovnováhy musí byť  $[K] = \text{ms}^{-2}$ . Konštanta  $K$  má teda rozmer zrýchlenia a je mierou gradientu modifikovaného tlaku. V rozlíšení oblastí  $K_{i,o}$  nejde o nezávislé veličiny. Vzhľadom na zviazanosť fyzikálnych kvantít na rozhraní kvapalín, vyplynie táto závislosť z podmienok na rozhraní. Spolu teda dostávame lineárne diferenciálne rovnice 2. rádu

$$\nu_i U_i''(r) = K_i, \quad r \in \Omega_i, \quad (1.12)$$

$$\nu_o U_o''(r) = K_o, \quad r \in \Omega_o, \quad (1.13)$$

ktorých všeobecným riešením je

$$U_i(r; C_1^i, C_2^i) = \frac{K_i}{2\nu_i}(r^2 - a^2) + C_1^i(r - a) + C_2^i, \quad (1.14)$$

$$U_o(r; C_1^o, C_2^o) = \frac{K_o}{2\nu_o}(r^2 - A^2) + C_1^o(r - A) + C_2^o. \quad (1.15)$$

Tento tvar riešení s posunutím o konštantu  $a$  resp.  $A$  bude užitočný pri aplikácii okrajových podmienok a dourčenie neznámych koeficientov  $C_1^i, C_1^o, C_2^i$  a  $C_2^o$ .

**Poznámka 1.1.1.** Predpoklad (1.11), ktorý sme prijali je taktiež diferenciálnou rovnicou. Popisuje však štruktúru tlakového poľa  $(P)_{\text{mod}}$ . Integráciou príslušných rovníc máme pre hydrodynamický tlak nasledovné identity

$$P_o(z) = -\rho_o g \left(1 - \frac{K_o}{g}\right) z + C_o, \quad (1.16)$$

$$P_i(z) = -\rho_i g \left(1 - \frac{K_i}{g}\right) z + C_i, \quad (1.17)$$

kde  $C_{i,o}$  sú integračné konštanty. Bezrozmerná veličina  $1 - K_o/g$  a  $1 - K_i/g$  udáva mieru modifikácie hydrostatického tlaku. Napríklad v prípade  $K_0 = 0$  sa hydrodynamické a hydrostatické pôsobenie vo vonkajšej oblasti nachádzajú v rovnováhe  $P_o(z) = -\rho_o g z$ .

### 1.1.3 Okrajové podmienky a podmienky na rozhraní

Rýchlostný profil základného toku bol schematicky odvodený ako po častiach parabolický. Ďalšiu informáciu o jeho tvare však odvodíme až z upresňujúcich podmienok. Rozhodujúci predpoklad pre ďalšie výpočty však bude vnútorne obsiahnutá symetria.

Všimnime si, že rovnice (1.12) a (1.13) sú invariantné vzhľadom na lineárnu transformáciu  $r \mapsto -r$ . Tieto rovnice popisujú tok v hlavnom objeme, preto možno očakávať, že tento tok bude symetrický  $U_{i,o}(r) = U_{i,o}(-r)$ . Podmienka, ktorá zabezpečí symetriu riešenia je

$$U_i'|_0 = 0. \quad (1.18)$$

Ekvivalentne však možno postupovať aj nájdením explicitného riešenia a ukázaním, že toto spĺňa podmienku symetrie okolo stredu  $r = 0$ . Ďalej preto budeme uvažovať len oblasti  $(0, a)$  a  $(a, A)$ .

Dôležitou podmienkou je podmienka nulového sklzu na pevnej hranici. Táto hovorí o tom, že kvapalné elementy sa pohybujú spolu s pevnou prekážkou. V našom prípade je však pevná prekážka statická na  $r = \pm A$ , preto požadujeme

$$U_o|_{A^-} = 0. \quad (1.19)$$

Treba si však uvedomiť, že podmienka  $U_o|_{-A^+} = 0$  je zo symetrie automaticky splnená. Úlohu sme obmedzili na polovičnú oblasť, pričom pevná hranica je na  $r = A$ , rozhranie  $r = a$  a os symetrie na  $r = 0$ .

V súvislosti s rozhraním budeme uvažovať tri podmienky súvisiace so spojitostou rýchlostného poľa, normálového a šmykového napätia. Prvú z nich vyjadríme jednoducho

$$U_i|_{a^-} = U_o|_{a^+}.$$

Pri analýze napätového stavu budeme vychádzať z tenzora napätia. Ako bolo spomenuté v predchádzajúcej časti, tento tenzor možno explicitne vyjadriť vo forme (1.4). V našom prípade však rozlišujeme tok vo vnútornej a vonkajšej oblasti. Z tohto dôvodu budeme preto uvažovať separátne tenzory v maticovom tvare

$$-P(z)\mathbf{E} + \mu [\nabla\mathbf{U} + (\nabla\mathbf{U})^T] = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_i, & r \in (0, a) \\ \boldsymbol{\sigma}_o, & r \in (a, A) \end{cases}.$$

Dosadením (1.2) a rozlíšením tlakových veličín  $P_{i,o}$  dostávame

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \begin{bmatrix} -P_i & \mu_i U_i' \\ \mu_i U_i' & -P_i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_o = \begin{bmatrix} -P_o & \mu_o U_o' \\ \mu_o U_o' & -P_o \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Tieto tenzory popisujú napätový stav vo všeobecnosti v ľubovoľnom bode toku. Jeho forma sa zachováva pre všetky  $t > 0$ , keďže ide o ustálený tok. Naším záujmom budú však napätia na rozhraní kvapalín. V zmysle orientácie znázornenej na obrázku 1.1.3 uvažujeme kvapalnú elementu postupujúcu v smere vertikálnych prúdočiar. Určujúcimi vektormi sú teda dotykový a normálový vektor v tomto poradí

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{e}}_z, \quad \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (1.21)$$

Kvôli interpretácii nasledovných výpočtov je nutné, aby tieto vektory boli normalizované. Keďže v tomto prípade sa jedná o jednotkovú bázu, dodatočná normalizácia nie je potrebná.

Vektor napätí možno vo všeobecnosti vyjadriť zo vzťahu

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

kde  $\hat{\mathbf{n}}$  je normálový vektor k príslušnej orientovanej hrane skúmaného kvapalného elementu a  $\boldsymbol{\sigma}$  je tenzor napätia skúmaného toku. Rozkladom tohto napätia v tangenciálnom a normálovom smere možno odvodiť formy pre napätia v príslušných smeroch. Hodnota normálového napätia je teda  $\sigma_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})$ , analogicky šmykové (tangenciálne) napätie je  $\tau = \hat{\mathbf{t}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})$ . Špeciálne pre voľbu (1.20) a (1.21) dostávame

$$\begin{aligned} \tau_i(z) &= -P_i(z), & \sigma_{n,i}(r) &= \mu_i U_i'(r), \\ \tau_o(z) &= -P_o(z), & \sigma_{n,o}(r) &= \mu_o U_o'(r). \end{aligned}$$

Z týchto foriem možno taktiež pozorovať separáciu v premenných  $r, z$ . Kým normálové napätie efektívne závisí len na premennej  $z$ , šmykové napätie závisí len na  $r$ . Teraz už možno jednoducho zapísať podmienky spojitosti

$$P_i|_{a^-} = P_o|_{a^+}, \quad (1.22)$$

$$\mu_i U_i'|_{a^-} = \mu_o U_o'|_{a^+}. \quad (1.23)$$

Podmienka spojitosti normálového tlaku (1.22) je špecifická, keďže  $P_{i,o}$  nadobúda konštantné hodnoty vzhľadom na  $r$ . Splnenie tejto podmienky na rozhraní  $r = a$  bude teda globálne znamenať splnenie podmienky vo všetkých prípustných bodoch  $r$ . Akýkoľvek nenulový gradient v smere  $r$  by v rovnakom smere vyvolal netriviálne prúdenie. Podstata strižného toku to však vylučuje.

**Poznámka 1.1.2.** Spojitosť šmykového a normálového napätia vo všeobecnosti zaručuje spojitost' napätia v ľubovoľnom smere. Keďže tieto dva smery sú ortogonálne a teda lineárne nezávislé, možno ľubovoľný normovaný smer  $\mathbf{s}$  zapísať v tvare ich lineárnej kombinácie  $\mathbf{s} = w_1 \hat{\mathbf{t}} + w_2 \hat{\mathbf{n}}$ . Potom máme hodnotu napätia v tomto smere

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\tau}_i &= w_1 (\hat{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) + w_2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) \\ &= w_1 (\hat{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\tau}_o) + w_2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau}_o) = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\tau}_o, \end{aligned}$$

čo je priamy dôkaz spojitosti. Pre úplnosť ešte dodajme, že vzťah  $w_1^2 + w_2^2 = 1$  je nutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby  $\mathbf{s}$  bol normovaný smer.

Posledné dve uvažované podmienky budú integrálne podmienky. Na dourčenie polohy voľnej hranice  $a$  budeme uvažovať predpísaný konštantný objemový tok v oblasti jetu  $(0, a)$

$$\int_0^a U_i(r) dr = Q. \quad (1.24)$$

V rozmerovej škále ide o vyjadrenie objemového toku za jednotku času  $[Q] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ . Druhá integrálna podmienka bude špecifikovať pomer modifikovaných gradientov  $K_i$  a  $K_o$ . Definujeme

$$k := \frac{K_o}{K_i}.$$

Keďže ide o pomer rozmerovo ekvivalentných veličín,  $k$  je bezrozmerné. Budeme uvažovať dve alternatívy

1. Predpokladajme, že systém sa v oblasti  $(a, A)$  nachádza v stave hydrostatického ekvilibria. To ekvivalentne znamená, že hydrodynamické sily vyvážia hydrostatické, a teda platí

$$(P_o)_{\text{mod}} = 0.$$

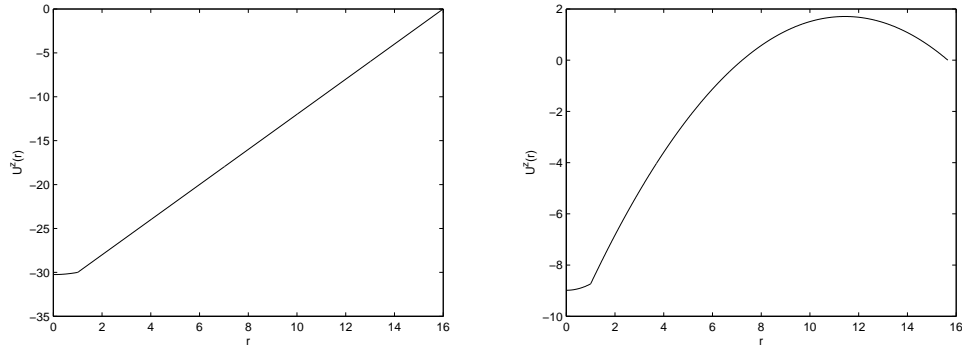
Tento prístup plne determinuje  $k = 0$  za predpokladu  $K_i = O(1)$ . Skutočne, pokiaľ  $K_o = 0$ , potom dostávame rovnováhu

$$P_o = -\rho g z.$$

2. Druhý prístup budeme interpretovať ako globálny zákon zachovania hmoty. Jeho integrálna reprezentácia je

$$2 \left[ \int_0^a U_i(r) dr + \int_a^A U_o(r) dr \right] = 0. \quad (1.25)$$

Z tejto formy možno pozorovať, že prvý výraz je ekvivalentný podmienke (1.24) a je identicky rovný  $Q$ . Dôsledkom tohto prístupu bude prirodzene existencia spätného toku a tlakové rozloženie vo vnútornej a vonkajšej oblasti nebude vo všeobecnosti hydrostatické.



Obr. 1.2: **Náčrt základného profilu.** Prípád hydrostatického ekvilibria s  $k = 0$  vľavo. Vpravo je príklad pre  $k \neq 0$  s prítomnosťou reverzného toku.

Sumarizovaním všetkých rovníc a podmienok dostávame nasledujúci systém pre základný tok

$$\begin{aligned}\nu_i U_i''(r) &= K_i, & r \in (0, a), \\ \nu_o U_o''(r) &= K_o, & r \in (a, A),\end{aligned}$$

spolu s okrajovými podmienkami

$$U_i'|_0 = U_o|_{A^-} = 0,$$

podmienkami na rozhraní

$$\begin{aligned}U_i|_{a^-} - U_o|_{a^+} &= 0, \\ P_i|_{a^-} - P_o|_{a^+} &= 0, \\ \mu_i U_i'|_{a^-} - \mu_o U_o'|_{a^+} &= 0,\end{aligned}$$

a integrálnymi podmienkami

$$\begin{aligned}\int_0^a U_i(r) dr &= Q, \\ Q + \int_a^A U_o(r) dr &= 0, \quad \text{alebo} \quad K_o = 0.\end{aligned}$$

Všeobecné riešenia pre diferenciálne rovnice sme už determinovali v parabolickom tvare. Počet podmienok je z pohľadu neznámych parametrov dostačujúci na úplne dourčenie základného toku.

#### 1.1.4 Aplikácia okrajových podmienok

Z podmienky symetrie (1.18) vyplýva  $C_1^i = 0$ . Všimnime si, že táto sa vzťahuje iba na vnútorný objem a nedeterminuje ostatné koeficienty vo vonkajšom objeme. Aplikáciou tejto podmienky sa anulujú lineárny člen vo forme (1.14).

Koeficient  $C_2^o = 0$ , ktorý sa vzťahuje na vonkajší objem determinuje podmienka

nulového sklzu (1.19). Narozdiel od vnútra, tu zostáva lineárny člen zachovaný. Zatiaľ teda máme

$$U_i(r; C_2^i) = \frac{K_i}{2\nu_i}(r^2 - a^2) + C_2^i, \quad (1.26)$$

$$U_o(r; C_1^o) = \frac{K_o}{2\nu_o}(r^2 - A^2) + C_1^o(r - A). \quad (1.27)$$

Všetky podmienky na hraniciach oblastí sme už vyčerpali, ďalej teda budeme uvažovať podmienky na rozhraní kvapalín. Spojitosť rýchlostného poľa a šmykového napätia determinuje systém algebraických rovníc

$$\begin{aligned} C_2^i &= \frac{K_o}{2\nu_o}(a^2 - A^2) + C_1^o(a - A), \\ \rho_i K_i a &= \rho_o \nu_o \left( \frac{K_o}{\nu_o} a + C_1^o \right). \end{aligned}$$

V rovnici (1.23) vystupuje viskozita  $\mu$ , využili sme však prepis pomocou kinematickej viskozity  $\nu = \mu/\rho$ . Riešením tohto lineárneho systému dostaneme formy

$$\begin{aligned} C_2^i &= \frac{K_o}{2\nu_o}(a^2 - A^2) + \left( \frac{\rho_i \nu_i}{\rho_o \nu_o} \frac{K_i}{\nu_i} - \frac{K_o}{\nu_o} \right) a(a - A), \\ C_1^o &= \left( \frac{\rho_i \nu_i}{\rho_o \nu_o} \frac{K_i}{\nu_i} - \frac{K_o}{\nu_o} \right) a. \end{aligned}$$

Teraz využijeme predpoklad o spojitosti normálového tlaku. Uvažujme fixované  $z \in (-\infty, \infty)$ . Z explicitných lineárnych foriem (1.17), (1.16) dostávame

$$\left[ \rho_i \left( 1 - \frac{K_i}{g} \right) - \rho_o \left( 1 - \frac{K_o}{g} \right) \right] gz = C_i - C_o.$$

Vzhľadom na nezávislosť voľby  $z$  musia byť splnené nutne dve podmienky

$$\rho_i \left( 1 - \frac{K_i}{g} \right) = \rho_o \left( 1 - \frac{K_o}{g} \right), \quad (1.28)$$

$$C_i = C_o =: C. \quad (1.29)$$

**Poznámka 1.1.3.** Pre lepší náhľad do rovníc budeme v nasledovnom definovať novú parametrickú grupu. Vyhne sa tak nadmernej indexácii a zabezpečíme tým kompaktnú formu. Definujme teda

$$\sigma := \frac{K_i a}{\nu_o}, \quad k := \frac{K_o}{K_i}, \quad m := \frac{\rho_o}{\rho_i}, \quad \beta := \frac{\nu_o}{\nu_i}. \quad (1.30)$$

Veličina  $\sigma$  je narozdiel od ďalších dvoch rozmerná. Má rozmer  $s^{-1}$  a ide o prevrátenú hodnotu časovej škály. Veličina  $m$  je materiálový parameter a vyjadruje hustotný kontrast. Výhodou týchto veličín je, že udávajú pomerové závislosti. Z hľadiska stability analýzy budú mať práve relatívne miery väčšiu výpovednú hodnotu ako absolútne miery. Prostredníctvom takto definovaných parametrov môžeme prepísať (1.28) do jednoduchého tvaru

$$K_i(1 - mk) = g',$$

kde  $g' = (1 - m)g$  je redukované tiažové zrýchlenie. Pri návrate k pôvodným parametrom  $k = K_o/K_i$  môžeme z tejto rovnosti pozorovať fyzikálne prepojenie modifikovaných tlakových gradientov  $K_{i,o}$ , ktoré vzniká z potreby spojitosti normálového napätia.

Podobne možno prepísať (1.14) a (1.15) do tvaru

$$U_i(r) = -\sigma a \left\{ \left( \frac{1}{m} - k \right) \left( \frac{A}{a} - 1 \right) + \frac{k}{2} \left[ \left( \frac{A}{a} \right)^2 - 1 \right] + \frac{\beta}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \right\} \quad (1.31)$$

$$U_o(r) = -\sigma a \left\{ \left( \frac{1}{m} - k \right) \left( \frac{A}{a} - \frac{r}{a} \right) + \frac{k}{2} \left[ \left( \frac{A}{a} \right)^2 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \right\}. \quad (1.32)$$

Môžeme pozorovať, že celý výraz má bezrozmernú formu až na prefaktor  $\sigma a$ , ktorý v sebe nesie celú informáciu o rozmere rýchlosti  $\text{ms}^{-1}$ .

Applikáciou podmienky (1.25) a integrovaním príslušných kvadratických foriem v (1.31) a (1.32) dostávame algebraickú rovnicu pre parameter  $k$

$$\begin{aligned} & -2\sigma a^2 \left[ \left( \frac{1}{m} - k \right) \left( \frac{A}{a} - 1 \right) + \frac{k}{2} \left[ \left( \frac{A}{a} \right)^2 - 1 \right] + \frac{\beta}{3} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{m} - k \right) \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{A}{a} \right)^2 + 1 \right] - \frac{A}{a} \right\} + \frac{k}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left[ 2 \left( \frac{A}{a} \right)^3 + 1 \right] - \left( \frac{A}{a} \right)^2 \right\} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Uvedená rovnica je lineárna v  $k$ , nevyžaduje preto aproximatívne riešenie. Vyskytuje sa v nej však aj neznáma poloha voľnej hranice  $a$ , respektíve  $A/a$ . Na jej dourčenie sme skonštruovali podmienku (1.24), z ktorej explicitne dostávame

$$\left( \frac{1}{m} - k \right) \left( \frac{A}{a} - 1 \right) + \frac{k}{2} \left[ \left( \frac{A}{a} \right)^2 - 1 \right] + \frac{\beta}{3} = -\frac{Q}{\sigma a^2}. \quad (1.34)$$

Túto rovnicu budeme riešiť asymptoticky, nakoľko explicitné riešenia nám neposkytnú informáciu o jemnej štruktúre riešenia. Z náhľadu na rovnicu však nie je zrejmé, ktorý z parametrov je vhodným extrémálnym parametrom. Globálne možno uvažovať asymptotické formy pre  $A/a \gg 1$  a nájst príslušné lubrikované formy. Pre ďalšiu analýzu budeme túto rovnicu uvažovať vo forme konzistentnej s apriori predpokladom  $A/a \gg 1$ . Keďže parameter  $\sigma$  implicitne obsahuje závislosť na pozícií rozhrania  $a$ , je nutný prepis pravej strany rovnice (1.34) do tvaru

$$\frac{-Q}{\sigma a^2} = \frac{-Q\nu_o(1 - mk)}{A^3 g'} \left( \frac{A}{a} \right)^3,$$

kde  $g' = (1 - m)g$  je modifikované gravitačné zrýchlenie. Predefinujme  $A/a := 1/\xi$ , dostávame tak kubickú rovnicu

$$\left( \frac{1}{m} - k \right) \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) + \frac{k}{2} \left( \frac{1}{\xi^2} - 1 \right) + \frac{\beta}{3} = -\frac{Q\nu_o(1 - mk)}{A^3 g(1 - m)} \frac{1}{\xi^3}. \quad (1.35)$$

Je dobré si uvedomiť, že táto rovnica má bezrozmernú formu a úvahy pre  $\xi \ll 1$  nevedú k rozmerovým sporom.

**Alternatíva 1.** Prvým prípadom, ktorým sa budeme pri riešení zaoberať je  $k = 0$ , t.j. uvažujeme hydrostatickú rovnováhu s  $K_o = 0$ . V tomto prípade sa rovnica (1.35) redukuje na

$$\frac{1}{m} \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) + \frac{\beta}{3} = - \frac{Q\nu_o}{A^3 g(1-m)} \frac{1}{\xi^3}. \quad (1.36)$$

Bližším pohľadom na štruktúru tejto rovnice možno vyvodit'  $Q < 0$ . Toto je očakávané aj z náčrtu 1.1.3 a orientácie toku v zápornom smere  $z$ . Z predpokladu  $\xi \ll 1$  je ľavá strana rovnosti nezáporná. Bližšiu informáciu o parametri  $m$  zatiaľ neuvádzame. V prípade, že hustota jetu je vyššia ako hustota okolitého prostredia, tak  $m < 1$ . Potom už zrejme  $Q < 0$ . Otázke spojenjej s voľbou  $m < 1$  sa budeme bližšie venovať v alternatívnom náhľade na záver.

Uvažujme  $\beta = O(1)$ , rovnako  $Q\nu_o/(A^3 g(1-m)) = O(1)$ . Vo vedúcom ráde  $O(\xi^{-3})$  máme

$$0 = \frac{-Q\nu_o}{A^3 g(1-m)} \frac{1}{\xi^3}.$$

Rovnica v tomto ráde nie je postačujúca a nedourčí  $\xi$ . Zvýšime preto rád presnosti do  $O(\xi^{-1})$ , dostávame

$$\frac{1}{m\xi} \sim \frac{-Q\nu_o}{A^3 g(1-m)} \frac{1}{\xi^3} \quad \longrightarrow \quad \xi \sim \left[ \frac{-Q\nu_o m}{A^3 g(1-m)} \right]^{1/2}. \quad (1.37)$$

Lubrikovaná forma riešenia vznikla z predpokladu  $\xi \ll 1$ , ktorý bude splnený po nastavení parametrickej sady tak, že  $-Q\nu_o/A^3 g \ll 1/m - 1$ .

**Poznámka 1.1.4.** Na problém môžeme nahliadnúť aj cez parameter  $m$ . Pokiaľ  $m \ll 1$  budeme považovať za extrémálny parameter  $\epsilon := m$ , dostávame

$$\left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) (1 - \epsilon) + \frac{\beta}{3} \epsilon (1 - \epsilon) = - \frac{Q\nu_o}{A^3 g} \frac{\epsilon}{\xi^3}.$$

Limita  $\epsilon \rightarrow 0$  je singulárna a pre ďalšie riešenie je nutné reškálovanie  $1/\xi = \delta(\epsilon)/\zeta$  spolu s analýzou dominantnej rovnováhy. V tomto prípade budeme uvažovať reškálovanie  $\delta(\epsilon) := \epsilon^{-1/2}$ , ktorý určuje dominantnú rovnováhu

$$\frac{1}{\zeta} = - \frac{Q\nu_o}{A^3 g} \frac{1}{\zeta^3} + O(\epsilon^{1/2}).$$

Z tejto dostávame spätnou transformáciou

$$\xi \sim \left[ \frac{-Q\nu_o m}{A^3 g} \right]^{1/2},$$

čo je zrejme aproximácia vzťahu (1.37) pre  $m \ll 1$ , keďže  $m/(1-m) = m + O(m^2)$ . Analogicky možno uvažovať aj ďalšie varianty parametrov, o ktorých apriórne predpokladáme, že sú extrémálnymi. Je však nutné spätné dourčenie celej parametrickej sady, aby bol tento predpoklad konzistentný s riešenými rovnicami.



**Alternatíva 2.** Ďalšou možnosťou je využitie lineárnej rovnice (1.33) pre  $k$ . Rovnako ako v predchádzajúcom prípade, aj tu budeme využívať predpoklad  $A/a \gg 1$ , respektíve  $a/A \ll 1$ . Táto rovnica nám v ráde  $O((A/a)^3)$  nedourčí pozíciu  $k$ , preto zvýšime rád asymptotickej aproximácie do  $(A/a)^2$ ,

$$\left(\frac{1}{m} - k\right) \frac{1}{2} \left(\frac{A}{a}\right)^2 + \frac{k}{3} \left(\frac{A}{a}\right)^3 + O\left(\frac{A}{a}\right)^1 = 0.$$

Budeme teda uvažovať túto dominantnú rovnováhu, ktorá poskytuje aproximáciu

$$k \approx -\frac{\frac{3}{2m} \left(\frac{a}{A}\right)}{1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{A}\right)} = -\frac{3}{2m} \left(\frac{a}{A}\right) + O\left(\frac{a}{A}\right)^2. \quad (1.38)$$

Táto aproximácia však obsahuje neznámu pozíciu  $a/A$ , ktorú dopočítame dosadením do (1.34)

$$\frac{a}{A} \sim 2 \left[ \frac{-Q\nu_o}{A^3 g} \frac{m}{1-m} \right]^{1/2}. \quad (1.39)$$

Môžeme pozorovať, že táto hodnota sa od stavu hydrostatickej rovnováhy líši iba v číselnom prefaktore.

### 1.1.5 Bezrozmerná formulácia

Ďalej sa budeme zaoberať problémom len v bezrozmernej škále. Potreba tejto transformácie problému vychádza najmä z numerického prístupu, ktorý realizujeme v poslednej kapitole. Prevod do bezrozmernej formy možno ekvivalentne realizovať už pri odvádzaní riadiacich rovníc. V našej práci sme sa však sústredili na výklad fyzikálnej podstaty rovníc v ich rozmernej forme. Pri ostatnej analýze riešení však vzniká potreba bezrozmernej transformácie

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\rightarrow a\mathbf{r}, & U_{i,o} &\rightarrow \sigma a U_{i,o}, \\ t &\rightarrow \sigma^{-1}t, & A &\rightarrow aA. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Veličiny na pravých stranách sú bezrozmerné, pričom ľavé strany sú rozmerné. Informáciu o príslušnom fyzikálnom rozmere nesie práve prefaktor bezrozmerných veličín. Všetky výsledky zistené v predchádzajúcom texte budeme formulovať v bezrozmernej forme. Pri úvahách nemožno opomenúť aj transformácie oblastí

$$(0, a) \rightarrow (0, 1), \quad (a, A) \rightarrow (1, A).$$

Všimnime si, že neznáme rozhranie  $a$  sa podarilo efektívne zafixovať na pozíciu  $r = 1$  bez obmedzenia na vonkajšej hranici  $A$  (v skutočnosti  $A/a$ ).

Riešenia (1.41), (1.42) majú v bezrozmernej forme nasledovný tvar

$$U_i(r) = U_a + \tilde{U}_i(r) = U_a - \frac{\beta}{2} (1 - r^2), \quad (1.41)$$

$$U_o(r) = U_a + \tilde{U}_o(r) = U_a + \left(\frac{1}{m} - k\right) (r - 1) + \frac{k}{2} (r^2 - 1), \quad (1.42)$$

kde  $U_a$  je rýchlosť na rozhraní  $U_a = U(1^\pm)$ . Explicitne platí

$$U_a = \left( \frac{1}{m} - k \right) (1 - A) + \frac{k}{2} (1 - A^2).$$

V asymptotickej teórii, prevedenej v práci [Guba a Revallo, 2012], autor analyzuje problém v prípade  $A \rightarrow \infty$ . Z tohto dôvodu bol potrebný prepis rovníc do pohybujúcej sa súradnicovej sústavy s charakteristickou rýchlosťou  $U_a$  v smere  $z$ . Po transformácii je upravená rýchlosť na rozhraní nulová a eliminuje sa zároveň aj závislosť rýchlostného profilu na parametri  $A$ .

Pri výbere fyzikálneho prefaktora pri tlaku  $P$  možno ekvivalentne voliť  $\rho_i \nu_i \sigma$ , my však budeme uvažovať charakteristiky vonkajšieho toku. Odvozené rovnice pre tlakové pole však v tvare (1.16) a (1.17) neposkytujú informáciu o rozmerovej škále. Rozmerový prefaktor teda nie je determinovaný explicitne. Definujme referenčnú hodnotu  $P_R = P_i(z_R; C)$  a podobne  $P_o = P_o(z_R; C)$ . Potom možno zrejme uvedené rovnosti zapísať v tvare

$$\begin{aligned} P_o(z) &= P_R - \rho_o g \left( 1 - \frac{K_o}{g} \right) (z - z_R), & 1 < r < A, \\ P_i(z) &= P_R - \rho_i g \left( 1 - \frac{K_i}{g} \right) (z - z_R), & 0 < r < 1, \end{aligned}$$

čo vyplýva aj z väzby medzi gradientmi  $K_i$  a  $K_o$ . Príslušnú rozmerovú škálu zviditeľníme z Navier-Stokesových rovníc. Uvažujme vnútornú oblasť, kde platí rovnica

$$\nu_i \frac{d^2 U_i(r)}{dr^2} = g + \frac{1}{\rho_i} \frac{dP_i(z)}{dz}, \quad (r, z) \in (0, a) \times \mathbb{R}.$$

Aby bola zabezpečená rozmerová identita, musí platiť

$$\nu_i \frac{[U_i] U_i}{a^2 r^2} = \frac{[P_i] P_i}{\rho_i a z},$$

kde  $z, r, U_i$  a  $P_i$  sú už bezrozmerné. Škálu  $[U_i]$  budeme voliť  $\sigma a$ . Potom úpravou dostaneme  $[P_i] = \rho_i \nu_i \sigma$ . Podobne možno postupovať aj pre vonkajšiu oblasť a dostaneme  $[P_o] = \rho_o \nu_o \sigma$ . Ako však bolo uvedené, v našej práci sa budeme ďalej zaoberať globálnym škálovaním tlaku  $[P] = \rho_o \nu_o \sigma$ . Rovnaké škálovanie budeme používať aj pre tenzor napätí.

## 1.2 Perturbovaný stav

V predchádzajúcej časti sme sa zaoberali odvodením explicitných foriem pre základný stav  $U_{i,o}, P_{i,o}$  a asymptoticky sme dourčili pozíciu rozhrania  $a$ . Po prevedení do bezrozmerných foriem sme efektívne zafixovali  $a = 1$ . Cieľom nasledovnej časti je odvodiť nelineárne riadiace rovnice pre vývoj perturbácie. Perturbáciou chápeme poruchu, vnesenú do stacionárneho základného stavu. Významnú úlohu pri vyšetrowaní stability bude teda mať časová štruktúra poruchového systému. Tá bude determinovať, či je základný stav stabilný, neutrálne stabilný alebo nestabilný. Rôzne prístupy a definície stability základného toku možno nájsť v [Acheson, 2005]. Všeobecne však budeme stabilným tokom rozumieť taký základný tok, ktorého ľubovoľná počiatočná malá porucha, v zmysle príslušnej normy, nenarastá. Táto môže buď zanikať v čase alebo jej norma zostane v prípustných medziach. Výber vhodnej normy, ktorá determinuje veľkosť poruchy, má veľký význam najmä pri štúdiu asymptotickej stability s časovo závislou normou.

V tejto práci sa zaoberáme výlučne štúdiom lineárnej stability, preto je nutné nelineárny problém linearizovať. Eliminácia nelineárnych foriem bude možná za predpokladu, že do základného stavu uvedieme limitne malú poruchu  $\epsilon \mathbf{u}$ , pre  $\epsilon \ll 1$ . Z experimentálneho hľadiska má zmysel zaoberať sa "malou" počiatočnou poruchou. Práve tieto teoreticky limitne malé poruchy majú reálny ekvivalent v nedokonalosti konštrukcie fyzikálneho experimentu. Teória vychádza z aproximatívneho predpokladu o kontinuu, pričom realita je v tomto smere nedokonalá.

Analýzu linearizovaného systému prevedieme metódou normálnych módov, t.j. rozkladu poruchy na módy s exponenciálnou časovou štruktúrou  $\sim e^{-i\alpha ct}$ , kde  $\alpha$  je vlnové číslo,  $c = \omega + i\sigma$ . Veličina  $\omega$  je fázová rýchlosť a  $\sigma$  je miera rastu. Práve miera rastu bude determinovať stabilitu systému. Pokiaľ  $\sigma < 0$ , tak porucha má zanikajúci trend. V hraničnom prípade  $\sigma = 0$  nie je prítomná časová štruktúra a systém je v stave neutrálnej stability. Nárast poruchy je v prípade  $\sigma > 0$ .

### 1.2.1 Nelineárny systém

Uvažujme základný stav  $\mathbf{U}_{i,o} = \mathbf{U}_{i,o}(r)$  a  $P_{i,o} = P_{i,o}(z)$ . Pozíciu rozhrania medzi kvapalinami označme  $r = h(z, t)$ , pričom jeho neporuchová hodnota je 1. Kinematické vlastnosti rozhrania vyústia do geometrickej nelinearity problému na časovo závislých oblastiach  $0 < r < h(z, t)$  a  $h(z, t) < r < A$ . Definujme teraz perturbovaný stav

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_{i,o}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{U}_{i,o}(r) + \epsilon \mathbf{u}_{i,o}(\mathbf{r}, t), \\ \tilde{p}_{i,o}(\mathbf{r}, t) &= P_{i,o}(z) + \epsilon p_{i,o}(\mathbf{r}, t), \\ \tilde{h}(z, t) &= 1 + \epsilon h(z, t),\end{aligned}\quad 0 < \epsilon \ll 1. \tag{1.43}$$

Všimnime si, že porucha je štruktúra, ktorá do systému vnáša plnú priestorovú a časovú závislosť, kým základný stav je v tomto smere obmedzený. Práve z tohto dôvodu sa v probléme bez aproximácií vyskytujú nelineárne formy priamo v riadiacich rovniciach. Tieto skutočnosti teda uvádzajú dvojakú nelineárnu štruktúru nášho stabilitného problému. Poznamenajme ešte, že všetky uvedené veličiny sú bezrozmerné. Aby bolo tieto možné implementovať, odvodíme bezrozmernú formu riadiacich rovníc a okrajových podmienok.

I keď porušený stav (1.43) definujeme ako superpozíciu dvoch veličín, samotná porucha nespĺňa Navier-Stokesove rovnice, keďže tieto rovnice nie sú lineárne. Tieto rovnice globálne splňa porušený stav  $\tilde{\mathbf{u}}_{i,o}, \tilde{p}_{i,o}$ . S využitím škálovacích výrazov (1.40) dostávame všeobecne z Navier-Stokesovych rovníc (1.6)

$$\sigma a \frac{D\tilde{\mathbf{u}}_i}{Dt} = -\frac{\rho_o \nu_o}{a \rho_i} \nabla \tilde{p}_i + \frac{\nu_i}{a} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}_i + K_i \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i = 0, \quad 0 < r < \tilde{h}(z, t),$$

$$\sigma a \frac{D\tilde{\mathbf{u}}_o}{Dt} = -\frac{\nu_o}{a} \nabla \tilde{p}_o + \frac{\nu_o}{a} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}_o + K_i \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_o = 0, \quad \tilde{h}(z, t) < r < A.$$

Definujme Reynoldsove číslo  $R := \sigma a^2 / \nu_o$  a s využitím  $m = \rho_o / \rho_i$  dostávame

$$R \frac{D\tilde{\mathbf{u}}_i}{Dt} = -m \nabla \tilde{p}_i + \frac{1}{\beta} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}_i + \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i = 0, \quad 0 < r < \tilde{h}(z, t), \quad (1.44)$$

$$R \frac{D\tilde{\mathbf{u}}_o}{Dt} = -\nabla \tilde{p}_o + \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}_o + \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_o = 0, \quad \tilde{h}(z, t) < r < A. \quad (1.45)$$

Gravitačné zrýchlenie sme preškálovali  $g \rightarrow K_i g$ , keďže v predchádzajúcom texte sme predpokladali  $K_i = O(1)$ . Škálovanie vzhľadom na  $K_o$  by nemalo racionálnu oporu v prípade hydrostatickej rovnováhy  $K_o = 0$ .

Reynoldsove číslo vyjadruje pomer zotrvačných síl vzhľadom k viskozite. Za charakteristickú dĺžkovú škálu volíme  $a$  a charakteristickú rýchlosť  $\sigma a$ . Charakteristickú rýchlosť možno vyjadriť explicitne cez gradient modifikovaného tlaku pôsobiaci vo vnútornej oblasti  $\sigma a = K_i a^2 / \nu_o$ .

V prípade okrajových podmienok, ich štruktúra sa zachová aj po preškálovaní. Pozrime sa preto bližšie na tenzor napätí, z ktorého odvodíme podstatnú časť podmienok na rozhraní. Komponenty tenzora napätia majú rozmer tlaku, preto použijeme rovnaké škálovanie ako v prípade tlaku, t.j.  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{i,o} \rightarrow \rho_o \nu_o \sigma \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{i,o}$ . Pre vnútornú oblasť tak dostávame bezrozmerný tenzor

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i = \begin{bmatrix} -\tilde{p}_i & 0 \\ 0 & -\tilde{p}_i \end{bmatrix} + \frac{1}{m\beta} \begin{bmatrix} 2\partial\tilde{u}_i^r/\partial r & \partial\tilde{u}_i^r/\partial z + \partial\tilde{u}_i^z/\partial r \\ \partial\tilde{u}_i^r/\partial z + \partial\tilde{u}_i^z/\partial r & 2\partial\tilde{u}_i^z/\partial z \end{bmatrix}, \quad (1.46)$$

kde  $\tilde{u}_i^r, \tilde{u}_i^z$  tvoria jednotlivé komponenty vektora  $\tilde{\mathbf{u}}_i$ . Súčasne sme využili definíciu  $\mu_i = \rho_i \nu_i$ . Analogicky máme tenzor pre vonkajšiu oblasť

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_o = \begin{bmatrix} -\tilde{p}_o & 0 \\ 0 & -\tilde{p}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\partial\tilde{u}_o^r/\partial r & \partial\tilde{u}_o^r/\partial z + \partial\tilde{u}_o^z/\partial r \\ \partial\tilde{u}_o^r/\partial z + \partial\tilde{u}_o^z/\partial r & 2\partial\tilde{u}_o^z/\partial z \end{bmatrix}. \quad (1.47)$$

**Spojitosť rýchlosti.** Spojitosť rýchlosti  $\tilde{\mathbf{u}}_{i,o}$  budeme požadovať na rozhraní  $r = \tilde{h}(z, t)$  v normálovom i tangenciálnom smere. Ekvivalentne však môžeme uvažovať inú ortogonálnu bázu, vzhľadom na ktorú zabezpečíme spojitosť. Efektívne zvolíme štandardnú  $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_z$ . Dôkaz tejto ekvivalencie je rovnaký ako v prípade úvahy o spojitosti napätí v poznámke 1.1.2. Podmienka spojitosti je teda nasledovná

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot (\tilde{\mathbf{u}}_i|_{\tilde{h}^-} - \tilde{\mathbf{u}}_o|_{\tilde{h}^+}) = 0, \quad \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\tilde{\mathbf{u}}_i|_{\tilde{h}^-} - \tilde{\mathbf{u}}_o|_{\tilde{h}^+}) = 0. \quad (1.48)$$

**Kinematická podmienka.** Táto podmienka vychádza z úvahy, že všetky kvapalné elementy, ktoré sa nachádzajú na rozhraní  $r = \tilde{h}(z, t)$ , na tomto rozhraní aj zotrávajú.

Pokiaľ definujeme bezrozmernú<sup>3</sup> veličinu  $F(\mathbf{r}, t) := r - \tilde{h}(z, t)$ , tak pre každý element nachádzajúci sa na voľnej hranici je  $F$  konštantné  $F(\mathbf{r}, t) = 0$ . Odtiaľ teda zrejme

$$\frac{D}{Dt}F(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}F(\mathbf{r}, t) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)F(\mathbf{r}, t) = 0, \quad r = \tilde{h}(z, t).$$

Dosadením  $F = F(\mathbf{r}, t)$  dostávame

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{h}(z, t) + \tilde{u}^z(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial z}\tilde{h}(z, t) = \tilde{u}^r(\mathbf{r}, t). \quad (1.49)$$

Pre rýchlosť nepoužívame indexáciu  $i, o$ , keďže v tomto prípade je jedno, či použijeme dvojicu  $u_i^r, u_i^z$  alebo  $u_o^r, u_o^z$ . Táto ekvivalencia vyplýva zo spojitosti rýchlosti na rozhraní (1.48).

Alternatívny prístup k odvodeniu kinematickej podmienky v tvare (1.49) je cez náhľad na jednotlivé rýchlostné komponenty. Uvažujme kvapalnú element  $(r(t), z(t))$  na voľnej hranici. Potom musí zrejme platiť

$$r(t) = \tilde{h}(z(t), t), \quad t > 0.$$

Aby tento na hranici zotrval pre ľubovoľné  $t$ , musí sa lokálne pohybovať rýchlosťou  $\tilde{u}^r, \tilde{u}^z$ . Rýchlosť v smere  $r$  je teda  $\tilde{u}^r = \dot{r}(t)$ , pričom deriváciu  $\dot{r}$  možno zapísať v tvare

$$\dot{r}(t) = \frac{\partial}{\partial z}\tilde{h}(z(t), t)\dot{z}(t) + \frac{\partial}{\partial t}\tilde{h}(z(t), t).$$

Rovnako rýchlosť v smere  $z$  musí byť  $\tilde{u}^z$ , máme teda  $\dot{z}(t) = \tilde{u}^z$ . Kombináciou týchto výsledkov dostávame rovnakú formu kinematickej podmienky ako (1.49).

**Spojitosť napätí.** V prípade základného toku sme uvažovali spojitost' šmykového i normálového napätia na rozhraní. Týmto sme zabezpečili, že nedochádza k skokovitým zmenám v tlaku. V prípade zakriveného rozhrania však môže k takým zmenám dochádzať v dôsledku povrchového napätia. Označme  $\gamma$  povrchové napätie, potom platí

$$\tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i = \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o + \gamma\tilde{\kappa},$$

pre normálové napätie a

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i = \hat{\mathbf{t}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o,$$

pre šmykové napätie. Symbolom  $\tilde{\kappa}$  budeme označovať krivosť - divergenciu normálového vektora  $\tilde{\kappa} := \nabla \cdot \tilde{\mathbf{n}}$ . V prípade uvažujeme jednotkový normálový vektor k porušenému rozhraniu. Tento možno pomocou zobrazenia  $h$  vyjadriť v tvare

$$\tilde{\mathbf{n}} = \|\mathbf{n}\|_2^{-1} \left( \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z \right).$$

Táto forma vychádza z geometrického náhľadu, pričom dodatočná normalizácia faktorom  $\|\mathbf{n}\|_2^{-1}$  je nutná, nakoľko v definícii krivosti operujeme s jednotkovým vektorom. Počítajme divergenciu

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{n}} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \|\mathbf{n}\|_2^{-1} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z}(z, t) \right] = -\|\mathbf{n}\|_2^{-3} \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial z^2}(z, t). \quad (1.50)$$

<sup>3</sup>Rozmerná veličina  $F$  má mieru  $a$ , t.j. uvažujeme preškálovanie  $F \rightarrow aF$ .

Derivácia vzhľadom na premennú  $r$  nie je prítomná z dôvodu, že norma normálového vektora nie je funkciou v tejto premennej. Dostávame tak pre normálové napätie

$$\tilde{\mathbf{n}} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_o - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_i) = \gamma \|\mathbf{n}\|_2^{-3} \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial z^2}(z, t),$$

kde  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{i,o} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{i,o} \cdot \tilde{\mathbf{n}}$ . Veličina  $\gamma$  je rozmerná, definujme teda predchádzajúcu rovnosť v bezrozmernej forme pomocou

$$\Gamma := \frac{\gamma}{a\rho_o\nu_o\sigma},$$

nasledovne

$$\tilde{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Delta} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = \Gamma \tilde{\kappa}, \quad (1.51)$$

kde sme zaviedli označenie  $\boldsymbol{\Delta} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_o - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i$ . Pri analýze stability základného stavu budeme skúmať aj vplyv povrchového napätia. Asymptotická teória v [Guba a Revallo, 2012] pre nekonečnú oblasť  $A \rightarrow \infty$  dokazuje stabilizačný efekt povrchového napätia pre limitne malé hodnoty Reynoldsovo čísla. V prípade dlhých vlnových dĺžok porúch sa tento efekt zoslabuje. Podrobnejšiu analýzu uvedieme v nasledovnej kapitole.

### 1.2.2 Linearizácia systému a okrajových podmienok

V nasledovnom budeme uvažovať porušený stav v tvare (1.43). Pomocou týchto zápisov možno riadiace rovnice zapísať v tvare

$$R \frac{D}{Dt} (\mathbf{U}_i + \epsilon \mathbf{u}_i) = -m \nabla (P_i + \epsilon p_i) + \frac{1}{\beta} \nabla^2 (\mathbf{U}_i + \epsilon \mathbf{u}_i) + \mathbf{g}, \quad 0 < r < \tilde{h}(z, t), \quad (1.52)$$

$$R \frac{D}{Dt} (\mathbf{U}_o + \epsilon \mathbf{u}_o) = -\nabla (P_o + \epsilon p_o) + \nabla^2 (\mathbf{U}_o + \epsilon \mathbf{u}_o) + \mathbf{g}, \quad \tilde{h}(z, t) < r < A. \quad (1.53)$$

Materiálová derivácia nezachováva linearitu a platí

$$\frac{D}{Dt} (\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{U} + \epsilon \mathbf{u}) + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \epsilon [(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}] + O(\epsilon^2).$$

Rovnice (1.52) a (1.53) možno prepísať v rozlíšení jednotlivých rádov  $\epsilon^0$ ,  $\epsilon^1$  a  $\epsilon^2$ . Treba si uvedomiť, že členy zodpovedajúce nultému rádu prislúchajú základnému stavu. Keďže základný stav bol konštruovaný tak, aby spĺňal Navier-Stokesove rovnice, členy nultého rádu sa anulujú. Členy rádu  $\epsilon^2$  zanedbáme, vzhľadom na voľbu malého parametra  $\epsilon \ll 1$  a záujem eliminovať nelineárne advektívne formy. Dostávame tak riadiace rovnice pre vývoj poruchy

$$R \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{U}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{U}_i \right] = -m \nabla p_i + \frac{1}{\beta} \nabla^2 \mathbf{u}_i, \quad 0 < r < 1, \quad (1.54)$$

$$R \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_o}{\partial t} + (\mathbf{U}_o \cdot \nabla) \mathbf{u}_o + (\mathbf{u}_o \cdot \nabla) \mathbf{U}_o \right] = -\nabla p_o + \nabla^2 \mathbf{u}_o, \quad 1 < r < A. \quad (1.55)$$

K úplnosti treba ešte uvážiť podmienku nestlačiteľnosti, ktorá je po linearizácii jednoducho  $\nabla \cdot \mathbf{u}_{i,o} = 0$ . Oblasti riešenia sú už pevné intervaly - vnútorná oblasť  $(0, 1)$  a vonkajšia  $(1, A)$ . Všimnime si, že v rovniciach sa explicitne nevyskytuje vektor tiažového zrýchlenia. Gravitačné efekty sa však vyskytujú v rovniciach implicitne prostredníctvom základného stavu.

Na podobnej báze budeme upravovať aj okrajové podmienky. Uvažujme najprv podmienky na rozhraní. Linearizácia v tomto prípade bude prebiehať v dvoch etapách súčasne, keďže tieto podmienky sa vzťahujú na nelineárnu pozíciu  $\tilde{h}$ . Tenzory (1.46) a (1.47) zapíšeme v tvare

$$\tilde{\sigma}_{i,o}(\mathbf{r}, t) = \sigma_{i,o}(\mathbf{r}) + \epsilon \Sigma_{i,o}(\mathbf{r}, t).$$

Uvažujme iba tenzor pre vonkajšiu oblasť, nakoľko tenzor vo vnútornej oblasti možno odvodiť úplne analogicky. Pre jednotlivé zložky v rozlíšení asymptotických rádov máme

$$\begin{aligned} (\tilde{\sigma}_{11})_o &= -\tilde{p}_o(\mathbf{r}, t) + 2\frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_o^r(\mathbf{r}, t) = -P_o(z) + \epsilon \left[ -p_o(\mathbf{r}, t) + 2\frac{\partial}{\partial r}u_o^r(\mathbf{r}, t) \right], \\ (\tilde{\sigma}_{12})_o &= (\tilde{\sigma}_{21})_o = \frac{\partial}{\partial r}\tilde{u}_o^z(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial z}\tilde{u}_o^r(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial r}U_o(r) + \epsilon \left[ \frac{\partial}{\partial r}u_o^z(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial z}u_o^r(\mathbf{r}, t) \right], \\ (\tilde{\sigma}_{22})_o &= -\tilde{p}_o(\mathbf{r}, t) + 2\frac{\partial}{\partial z}\tilde{u}_o^z(\mathbf{r}, t) = -P_o(z) + \epsilon \left[ -p_o(\mathbf{r}, t) + 2\frac{\partial}{\partial z}u_o^z(\mathbf{r}, t) \right]. \end{aligned}$$

Z pohľadu podmienok na rozhraní nás bude zaujímať tento tenzor iba lokálne v okolí  $r = \tilde{h}$ . Keďže  $\tilde{h}(z, t) := 1 + \epsilon h(z, t)$  dostávame z Taylorovej vety

$$\begin{aligned} p_o(\mathbf{r}, t) &= p_o(\mathbf{r}, t)|_{r=1^+} + \frac{\partial}{\partial r}p_o(\mathbf{r}, t)\Big|_{r=1^+} (\epsilon h) + O(\epsilon h)^2, \\ u_o^{r,z}(\mathbf{r}, t) &= u_o^{r,z}(\mathbf{r}, t)|_{r=1^+} + \frac{\partial}{\partial r}u_o^{r,z}(\mathbf{r}, t)\Big|_{r=1^+} (\epsilon h) + O(\epsilon h)^2, \\ U_o(r) &= U_o(r)|_{r=1^+} + U_o'(r)|_{r=1^+} (\epsilon h) + O(\epsilon h)^2, \end{aligned}$$

Dosadením týchto výrazov do jednotlivých zložiek pre tenzor  $\tilde{\sigma}_o$  máme v  $r = 1^+$

$$\tilde{\sigma}_o|_{r=1^+} = \epsilon^0 \begin{bmatrix} -P_o & U_o' \\ U_o' & -P_o \end{bmatrix} + \epsilon^1 \begin{bmatrix} -p_o + 2\partial_r u_o^r & U_o'' h + \partial_z u_o^r + \partial_r u_o^z \\ U_o'' h + \partial_z u_o^r + \partial_r u_o^z & -p_o + 2\partial_z u_o^z \end{bmatrix}.$$

Analogicky možno odvodiť formu pre vnútornú oblasť v  $r = 1^-$

$$\tilde{\sigma}_i|_{r=1^-} = \epsilon^0 \begin{bmatrix} -P_i & U_i'/m\beta \\ U_i'/m\beta & -P_i \end{bmatrix} + \epsilon^1 \begin{bmatrix} -p_i + 2\partial_r u_i^r/m\beta & (U_i'' h + \partial_z u_i^r + \partial_r u_i^z)/m\beta \\ (U_i'' h + \partial_z u_i^r + \partial_r u_i^z)/m\beta & -p_i + 2\partial_z u_i^z/m\beta \end{bmatrix}.$$

Podľa rovnice (1.51) máme po rozpise do jednotlivých rádov

$$(\hat{\mathbf{n}} + \epsilon \mathbf{n} + O(\epsilon^2)) \cdot (\Delta \sigma + \epsilon \Delta \Sigma) \cdot (\hat{\mathbf{n}} + \epsilon \mathbf{n} + O(\epsilon^2)) = \Gamma(\hat{\kappa} + \epsilon \kappa + O(\epsilon^2)) \quad (1.56)$$

$$\epsilon^0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \Delta \sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} + \epsilon^1 (2\hat{\mathbf{n}} \cdot \Delta \sigma \cdot \mathbf{n} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \Delta \Sigma \cdot \hat{\mathbf{n}}) + O(\epsilon^2) = \epsilon^0 \Gamma \hat{\kappa} + \epsilon^1 \Gamma \kappa + O(\epsilon^2) \quad (1.57)$$

kde  $\Delta \Sigma$  označuje podobne ako  $\Delta \sigma$  rozdiel  $\Sigma_o - \Sigma_i$ . Podotýkame, že pri úpravách sme využili symetriu tenzora  $\Delta \sigma$ . Ďalej budeme potrebovať rozvoje normálového vektora a krivosti k dourčeni  $\mathbf{n}$  a  $\kappa$ . Z odvodenej formy pre krivosť (1.50) a Taylorovej vety máme

$$\tilde{\kappa}(h; \epsilon) := \frac{-\epsilon}{\left[1 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} h(z, t)\right)^2\right]^{3/2}} \frac{\partial}{\partial z} h(z, t) = -\epsilon^1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} h(z, t) + O(\epsilon^2).$$

Všimnime si, že v nultom ráde  $\epsilon^0$  je  $\hat{\kappa} = 0$ , čo je očakávané, keďže tento rád zodpovedá základnému stavu. Rozhranie je planárne a jeho krivosť je tým pádom nulová. Analogicky postupujeme aj pre normálový vektor

$$\tilde{\mathbf{n}}(h; \epsilon) := \frac{1}{\left[1 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} h(z, t)\right)^2\right]^{1/2}} \left(\hat{\mathbf{e}}_r - \epsilon \frac{\partial h}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z\right) = \epsilon^0 \hat{\mathbf{e}}_r - \epsilon^1 \frac{\partial h}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z + O(\epsilon^2).$$

Dostávame tak linearizovaný tvar podmienky spojitosti normálového napätia pre perturbovaný stav

$$2\hat{\mathbf{n}} \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \Delta \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \Gamma \kappa,$$

alebo explicitne

$$2 \left( U_o''|_{1+} - \frac{1}{m\beta} U_i''|_{1-} \right) \frac{\partial h}{\partial z} + (p_o|_{1+} - p_i|_{1-}) - 2 \left( \left. \frac{\partial u_o^r}{\partial r} \right|_{1+} - \frac{1}{m\beta} \left. \frac{\partial u_i^r}{\partial r} \right|_{1-} \right) = \Gamma \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}.$$

V prípade šmykového napätia, budeme postupovať analogicky, pričom využijeme rozvoj tangenciálneho vektora  $\tilde{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}} + \epsilon^1 \mathbf{t} + O(\epsilon^2)$  nasledovne

$$\tilde{\mathbf{t}}(h; \epsilon) := \frac{1}{\left[1 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} h(z, t)\right)^2\right]^{1/2}} \left( \epsilon \frac{\partial h}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_r + \hat{\mathbf{e}}_z \right) = \epsilon^0 \hat{\mathbf{e}}_z + \epsilon^1 \frac{\partial h}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_r + O(\epsilon^2).$$

Použijeme podobný rozklad ako pri (1.56) a dostávame tak linearizovanú podmienku pre šmykové napätie

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \hat{\mathbf{t}} \cdot \Delta \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{t} \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0,$$

explicitne

$$\left( U_o''|_{1+} - \frac{1}{m\beta} U_i''|_{1-} \right) h + \left( \left. \frac{\partial u_o^z}{\partial r} \right|_{1+} - \frac{1}{m\beta} \left. \frac{\partial u_i^z}{\partial r} \right|_{1-} \right) + \left( \left. \frac{\partial u_o^r}{\partial z} \right|_{1+} - \frac{1}{m\beta} \left. \frac{\partial u_i^r}{\partial z} \right|_{1-} \right) = 0.$$

Kinematická podmienka (1.49) odvodená z materiálovej derivácie je taktiež nelineárna. V termínoch rádov  $\epsilon$  platí<sup>4</sup>

$$\tilde{u}^z(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{h}(z, t) = \epsilon^1 U(r) \frac{\partial}{\partial z} h(z, t) + O(\epsilon^2), \quad \text{pre } r = \tilde{h}.$$

Na okolí  $r = 1$  možno  $U$  rozvinúť nasledovne  $U(\tilde{h}) = U|_1 + U'|_1(\epsilon h) + O(\epsilon^2)$ . Pre zachovanie lineárneho rádu stačí teda uvažovať aproximáciu pre  $U$  len do nultého rádu  $U(\tilde{h}) = U|_1 + O(\epsilon)$ . Dosadením do kinematickej podmienky dostávame

$$\frac{\partial}{\partial t} h(z, t) + U(r) \frac{\partial}{\partial z} h(z, t) = u^r(\mathbf{r}, t), \quad \text{pre } r = 1, \quad \begin{array}{l} t > 0, \\ z \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Posledná podmienka týkajúca sa rozhrania kvapalín je podmienka spojitosti rýchlostného poľa. Rozvojom (1.48) dostávame

$$(\tilde{\mathbf{u}}_i|_{\tilde{h}-} - \tilde{\mathbf{u}}_o|_{\tilde{h}+}) = \epsilon^1 \{ (u_i^r|_{1-} - u_i^r|_{1+}) \hat{\mathbf{e}}_r + [(U_i' h + u_i^z)|_{1-} - (U_o' h + u_i^z)|_{1+}] \hat{\mathbf{e}}_r \} + O(\epsilon^2).$$

<sup>4</sup>V niektorých prípadoch nerozlišujeme oblasti indexáciou, čo vyplýva zo spojitosti rýchlosti na rozhraní:  $u_i^{r,z}|_{1-} = u_o^{r,z}|_{1+} = u^{r,z}|_1$  a podobne pre základný stav.



Spojitosť musí byť splnená v oboch ortogonálnych smeroch

$$(U'_i h + u_i^z)|_{1-} = (U'_i h + u_i^z)|_{1+} \quad (1.58)$$

$$u_i^r|_{1-} = u_i^r|_{1+} \quad (1.59)$$

Ostatné podmienky sa netýkajú rozhrania, ale pevnej hranice a osi symetrie. Na pevnej hranici  $A$  požadujeme nulový sklz  $0 = \tilde{\mathbf{u}}_o|_{r=A}$ . To nastáva, ak  $0 = \mathbf{u}_o|_{r=A}$ , keďže základný tok vo vonkajšej oblasti túto podmienku už spĺňa.

Úvaha o symetrii základného toku viedla k redukcii riešenia na polovičnej oblasti. Z tohto dôvodu má zmysel uvažovať symetrické a antisymetrické riešenia perturbovaného problému samostatne. Ľubovoľnú perturbáciu  $\mathbf{u}$  možno rozložiť na symetrickú a antisymetrickú časť

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{S}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{A}(\mathbf{r}, t),$$

kde

$$\mathcal{S}(r, z, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{u}(r, z, t) + \mathbf{u}(-r, z, t)],$$

$$\mathcal{A}(r, z, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{u}(r, z, t) - \mathbf{u}(-r, z, t)].$$

Prípád symetrickej poruchy budeme nazývať varikóznym, naopak antisymetrické poruchy označujeme ako meandrujúce poruchy. Príslušné podmienky vzhľadom na os symetrie sú

$$u_i^r = \frac{\partial u_i^r}{\partial r} = 0, \quad \text{pre } r = 0,$$

pre varikóznym a

$$\frac{\partial u_i^r}{\partial r} = \frac{\partial^2 u_i^r}{\partial r^2} = 0, \quad \text{pre } r = 0,$$

pre meandrujúci prípad. Štruktúra poruchy bude mať nemalý vplyv na otázky spojené so stabilitou základného stavu. Ďalšiu analýzu budeme preto uvažovať pre každý typ poruchy samostatne.

### 1.2.3 Prevod do pohybujúcej sa súradnicovej sústavy

Základný tok tak, ako bol odvodený v prvej časti, závisí od polohy pevnej hranice  $\pm A$ . Aby bolo možné previesť asymptotickú analýzu v prípade  $A \rightarrow \infty$ , je nutné efektívne eliminovať túto závislosť z rovníc. V práci [Guba a Revallo, 2012] sa uvažuje prevod do pohybujúcej sa súradnicovej sústavy prostredníctvom Galileovskej transformácie

$$\begin{aligned} r &= r', \\ z &= z' - U_a t', \\ t &= t'. \end{aligned}$$

kde  $(r', z'; t')$  sú pôvodné premenné a  $(r, z; t)$  sú premenné v pohybujúcej sa sústave. Kvapalné elementy na rozhraní kvapalín sa pohybujú rýchlosťou  $U_a$  v zápornom smere  $z'$ , keďže v uvažovanom systéme  $U_a < 0$ . Po prevode do nových premenných bude rýchlosť kvapalných elementov na rozhraní nulová, pričom pohyb v jednotlivých oblastiach prebieha v opačných smeroch. Ako uvidíme, tento prístup eliminuje závislosť

na parametri  $A$  v základnom stave. Pri prepise rovníc využijeme transformačné vzťahy medzi parciálnymi deriváciami

$$\frac{\partial}{\partial r'} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - U_a \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Identita medzi priestorovými deriváciami zaručuje rovnosť gradientov  $\nabla' \equiv \nabla$ . Počítajme teda derivácie podľa (1.54) a (1.55)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_{i,o}}{\partial t'} &= \frac{\partial \mathbf{u}_{i,o}}{\partial t} - U_a \frac{\partial \mathbf{u}_{i,o}}{\partial z} \\ (\mathbf{U}_{i,o} \cdot \nabla') \mathbf{u}_{i,o} &= U_{i,o} \frac{\partial \mathbf{u}_{i,o}}{\partial z'} = (\tilde{U}_{i,o} + U_a) \frac{\partial \mathbf{u}_{i,o}}{\partial z} = (\tilde{\mathbf{U}}_{i,o} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{i,o} + U_a \frac{\partial \mathbf{u}_{i,o}}{\partial z} \\ (\mathbf{u}_{i,o} \cdot \nabla') \mathbf{U}_{i,o} &= u_{i,o}^r \frac{\partial \mathbf{U}_{i,o}}{\partial r'} + u_{i,o}^z \frac{\partial \mathbf{U}_{i,o}}{\partial z'} = u_{i,o}^r \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{i,o}}{\partial r} + u_{i,o}^z \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{i,o}}{\partial z} = (\mathbf{u}_{i,o} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{U}}_{i,o}, \end{aligned}$$

a po dosadení do rovníc

$$\begin{aligned} R \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{U}}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{U}}_i \right] &= -m \nabla p_i + \frac{1}{\beta} \nabla^2 \mathbf{u}_i, \quad 0 < r < 1, \\ R \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_o}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{U}}_o \cdot \nabla) \mathbf{u}_o + (\mathbf{u}_o \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{U}}_o \right] &= -\nabla p_o + \nabla^2 \mathbf{u}_o, \quad 1 < r < A. \end{aligned}$$

Štruktúra okrajových podmienok zostane po prevode do nových premenných identická, keďže obsahujú informácie o priestorových zmenách v  $r'$ ,  $z'$ . K jedinej zmene dochádza pri kinematickej podmienke, obsahujúcej časovú zmenu v  $t'$ . Pre túto platí

$$\frac{\partial}{\partial t} h(z, t) = u^r(\mathbf{r}, t), \quad \text{pre } r = 1.$$

Túto významnú redukciu kinematickej podmienky zabezpečuje skutočnosť, že  $\tilde{U}|_1 = 0$ . Linearizovaný stabilitný problém teda možno súhrnne zapísať v tvare

$$R \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{U}}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{U}}_i \right] = -m \nabla p_i + \frac{1}{\beta} \nabla^2 \mathbf{u}_i, \quad (1.60)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (1.61)$$

$$R \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_o}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{U}}_o \cdot \nabla) \mathbf{u}_o + (\mathbf{u}_o \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{U}}_o \right] = -\nabla p_o + \nabla^2 \mathbf{u}_o, \quad (1.62)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_o = 0, \quad 1 < r < A, \quad (1.63)$$

spolu s príslušnými okrajovými podmienkami a podmienkami na rozhraní

$$u_o^r|_A = u_o^z|_A = 0, \quad (1.64)$$

$$u_o^r|_{1+} = u_i^r|_{1-}, \quad (1.65)$$

$$\tilde{U}'_o|_{1+h} + u_o^z|_{1+} = \tilde{U}'_i|_{1-h} + u_i^z|_{1-}, \quad (1.66)$$

$$2\tilde{U}''_o|_{1+} \frac{\partial h}{\partial z} + p_o|_{1+} - 2 \frac{\partial u_o^r}{\partial r} \Big|_{1+} = \Gamma \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{2}{m\beta} \tilde{U}''_i|_{1-} \frac{\partial h}{\partial z} + p_i|_{1-} - \frac{2}{m\beta} \frac{\partial u_i^r}{\partial r} \Big|_{1-}, \quad (1.67)$$

$$U''_o|_{1+h} + \frac{\partial u_o^z}{\partial r} \Big|_{1+} + \frac{\partial u_o^r}{\partial z} \Big|_{1+} = \frac{1}{m\beta} U''_i|_{1-h} + \frac{1}{m\beta} \frac{\partial u_i^z}{\partial r} \Big|_{1-} + \frac{1}{m\beta} \frac{\partial u_i^r}{\partial z} \Big|_{1-}, \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u^r \quad (1.69)$$

$$u_i^r = \frac{\partial u_i^r}{\partial r} = 0, \text{ (symetria),} \quad \frac{\partial u_i^r}{\partial r} = \frac{\partial^2 u_i^r}{\partial r^2} = 0, \text{ (antisymetria).} \quad (1.70)$$

Táto formulácia je všeobecná a doteraz sme nevyužili presnú formu pre základný profil  $\tilde{U}_{i,o}$ . Jeho explicitnú formu možno využiť najmä pri podmienkach na rozhraní kvapalín, kde prebieha limitný proces  $r \rightarrow 1^\pm$ . Zo vzťahu (1.41) a (1.42) vieme priamo vypočítať  $\tilde{U}'_i = \beta$ ,  $\tilde{U}'_o = 1/m$  a podobne pre druhé derivácie  $\tilde{U}''_i = \beta$ ,  $\tilde{U}''_o = 0$ . Dosadením týchto foriem do podmienky (1.67) sa táto zjednoduší

$$p_o|_{1+} - 2 \frac{\partial u_o^r}{\partial r} \Big|_{1+} = \Gamma \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + p_i|_{1-} - \frac{2}{m\beta} \frac{\partial u_i^r}{\partial r} \Big|_{1-}.$$

Nasledovná úprava tejto podmienky bude nevyhnutná kvôli prepisu problému pomocou prúdovej funkcie. V podmienke sa vyskytuje explicitne tlakový člen  $p_{i,o}$ . Budeme teda uvažovať jej  $z$ -gradient

$$\frac{\partial p_o}{\partial z} \Big|_{1+} - 2 \frac{\partial^2 u_o^r}{\partial r \partial z} \Big|_{1+} = \Gamma \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} + \frac{\partial p_i}{\partial z} \Big|_{1-} - \frac{2}{m\beta} \frac{\partial^2 u_i^r}{\partial r \partial z} \Big|_{1-}. \quad (1.71)$$

Derivovanie podmienky v premennej  $z$  je korektný krok, keďže táto má platiť na rozhraní pre každé  $-\infty < z < \infty$  a každé  $t > 0$ . Príslušný tlakový gradient možno teraz porovnať s gradientom, ktorý obsahuje  $z$ -komponent Navier-Stokesových rovníc (1.60). Treba si však uvedomiť, že porovnanie vykonávame na rozhraní  $r = 1$ , teda príslušný komponent je tvaru

$$\frac{R}{m} \left( \frac{\partial u_i^z}{\partial t} + \tilde{U}_i \frac{\partial u_i^z}{\partial z} + u_i^r \tilde{U}'_i \right) = -\frac{\partial p_i}{\partial z} + \frac{1}{m\beta} \nabla^2 u_i^z, \quad \text{na } r = 1^-, \quad (1.72)$$

$$R \left( \frac{\partial u_o^z}{\partial t} + \tilde{U}_o \frac{\partial u_o^z}{\partial z} + u_o^r \tilde{U}'_o \right) = -\frac{\partial p_o}{\partial z} + \nabla^2 u_o^z, \quad \text{na } r = 1^+. \quad (1.73)$$

Tieto rovnice môžeme následne odčítať, dostaneme

$$\begin{aligned} R \left[ \left( \frac{\partial u_o^z}{\partial t} \Big|_{1+} - \frac{1}{m} \frac{\partial u_i^z}{\partial t} \Big|_{1-} \right) + \left( u_o^r \tilde{U}'_o \Big|_{1+} - \frac{1}{m} u_i^r \tilde{U}'_i \Big|_{1-} \right) \right] = \\ = - \left( \frac{\partial p_o}{\partial z} \Big|_{1+} - \frac{\partial p_i}{\partial z} \Big|_{1-} \right) + \left( \nabla^2 u_o^z \Big|_{1+} - \frac{1}{m\beta} \nabla^2 u_i^z \Big|_{1-} \right). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Analýzujeme teraz členy, ktoré tento výraz obsahuje. Deriváciou podmienky (1.66) podľa premennej  $t$  dostávame

$$\left. \frac{\partial u_i^z}{\partial t} \right|_{1-} = \left. \frac{\partial u_o^z}{\partial t} \right|_{1+} + \left( \left. \tilde{U}'_o \right|_{1+} \frac{\partial h}{\partial t} - \left. \tilde{U}'_i \right|_{1-} \frac{\partial h}{\partial t} \right), \quad -\infty < z < \infty, t > 0.$$

Dosadením tohto výrazu do (1.74) dostaneme pre časové derivácie

$$\left. \frac{\partial u_o^z}{\partial t} \right|_{1+} - \frac{1}{m} \left. \frac{\partial u_i^z}{\partial t} \right|_{1-} = \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \left. \frac{\partial u_o^z}{\partial t} \right|_{1+} - \frac{1}{m} u_o^r \left( \left. \tilde{U}'_o \right|_{1+} - \left. \tilde{U}'_i \right|_{1-} \right),$$

kde sme využili kinematickú podmienku (1.69) a kontinuitu (1.65). V druhom sčítanci na ľavej strane využijeme rovnako kontinuitu  $r$ -komponentu  $u^r$  a spolu dostávame

$$\begin{aligned} R \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \left( \left. \frac{\partial u_o^z}{\partial t} \right|_{1+} + u_o^r \left. \tilde{U}'_o \right|_{1+} \right) &= \\ &= - \left( \left. \frac{\partial p_o}{\partial z} \right|_{1+} - \left. \frac{\partial p_i}{\partial z} \right|_{1-} \right) + \left( \nabla^2 u_o^z \Big|_{1+} - \frac{1}{m\beta} \nabla^2 u_i^z \Big|_{1-} \right). \end{aligned} \quad (1.75)$$

Teraz nahradíme tlakový diferenciál ekvivalentnou formou v (1.71) a dostávame finálny tvar podmienky

$$\begin{aligned} - \left( \nabla^2 u_o^z \Big|_{1+} - \frac{1}{m\beta} \nabla^2 u_i^z \Big|_{1-} \right) + \left( 2 \left. \frac{\partial^2 u_o^r}{\partial r \partial z} \right|_{1+} - \frac{2}{m\beta} \left. \frac{\partial^2 u_i^r}{\partial r \partial z} \right|_{1-} \right) &= \\ &= -\Gamma \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} - R \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \left( \left. \frac{\partial u_o^z}{\partial t} \right|_{1+} + u_o^r \left. \tilde{U}'_o \right|_{1+} \right) \end{aligned} \quad (1.76)$$

Táto podmienka na rozhraní tokov nahrádza podmienku (1.67).

#### 1.2.4 Prepis problému pomocou prúdovej funkcie

Riadiace rovnice pre vývoj poruchy tvoria lineárny parabolický systém parciálnych diferenciálnych rovníc pre neznáme rýchlostné a tlakové polia porušeného stavu. V nasledovnom sa zameriame na redukcii systému na jednu parciálnu diferenciálnu rovnicu pre prúdovú funkciu  $\hat{\psi} = \hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ . Pri odvádzaní teórie sme sa z praktických dôvodov zamerali na dvojrozmerný tok. V ďalšom postupe sa budeme na situáciu pozerat' v trojrozmernom priestore, avšak s homogénnou treťou priestorovou komponentou, t.j.  $\mathbf{u} = u^r \hat{\mathbf{e}}_r + u^z \hat{\mathbf{e}}_z + 0 \hat{\mathbf{e}}_3$ . Prúdovú funkciu potom definujeme pomocou operátora rotácie

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \quad (1.77)$$

kde  $\hat{\psi} := \hat{\psi} \hat{\mathbf{e}}_3$ . Prúdová funkcia v takto definovanom zmysle je konštantná pozdĺž prúdočiar rýchlostného poľa a príslušné vrstevnice majú tangenciálny smer k vektorovému poľu  $\mathbf{u}$ . To vyplýva triviálne z homogenity advektívnej formy  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \hat{\psi} = 0$  po dosadení výrazu (1.77).

Prúdovú funkciu možno ekvivalentne definovať pomocou konceptu vírovosti nasledovne

$$\nabla^2 \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = -\omega(\mathbf{r}, t), \quad (1.78)$$

kde  $\omega$  je treťou komponentou vektora vírovosti  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_3$ . Túto identitu však možno odvodiť aj priamo počítaním vírovosti rýchlostného poľa

$$\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\psi}}) = \nabla(\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\psi}}) - \nabla^2 \hat{\boldsymbol{\psi}} = -\nabla^2 \hat{\boldsymbol{\psi}}.$$

Redukciu budeme realizovať aplikovaním operátora rotácie na systém riadiacich PDR. Keďže porucha  $\mathbf{u}$  je dvojrozmerná veličina, komponenty  $r, z$  sa po tejto operácii anulujú. Jediná nenulová bude práve tretia komponenta. Opäť sa budeme venovať len poruchám vo vnútornej oblasti, pretože druhý prípad sa odvodí identicky. Definujme teda

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\psi}}_i(\mathbf{r}, t), & \mathbf{r} \in (0, 1) \times \mathbb{R}, \\ \hat{\boldsymbol{\psi}}_o(\mathbf{r}, t), & \mathbf{r} \in (1, A) \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.79)$$

a aplikujme operátor  $\nabla \times$  na rovnicu (1.60), pre časovú deriváciu platí

$$\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega}_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\boldsymbol{\psi}}_i(\mathbf{r}, t).$$

Zvyšné členy na ľavej strane rovnice (1.60) spočítame explicitne

$$\begin{aligned} \nabla \times [(\tilde{\mathbf{U}}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i] &= \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \tilde{U}_i \frac{\partial u_i^z}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{U}_i \frac{\partial u_i^r}{\partial z} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}_3, \\ \nabla \times [(\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{U}}_i] &= \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( u_i^r \tilde{U}_i \right) \right] \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned}$$

Príslušné výrazy pre  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_i$  dostaneme ich priamym dosadením za komponenty  $u_i^r$  a  $u_i^z$  v zmysle definície  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ . Na pravej strane rovnice (1.60) vystupuje gradient tlaku, ktorý sa po aplikovaní operátora rotácie anuluje a pre Laplaceov člen jednoducho odvodíme  $\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}_i) = \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}_i) = -\nabla^4 \hat{\boldsymbol{\psi}}_i$ . I keď sme všetky výrazy odvádzali vo vektorovej forme, jedinou nenulovou komponentou je 3. zložka, keďže  $\hat{\boldsymbol{\psi}} = \hat{\psi} \hat{\mathbf{e}}_3$ .

Všimnime si, že podmienka nestlačiteľnosti je po dosadení prúdovej funkcie automaticky splnená a nie je ju potrebné ďalej uvažovať. Analogické úpravy vykonáme aj pri okrajových podmienkach. Pre jednoduchosť ich tu nebudeme odvádzat'. Formuláciu v termínoch prúdovej funkcie (1.79) získame v nasledovnom tvare

$$\begin{aligned} R \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\psi} - \tilde{U}_i \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial z^3} - \tilde{U}_i \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial r^2 \partial z} + \tilde{U}_i'' \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \right] &= -\frac{1}{\beta} \nabla^4 \hat{\psi}, & 0 < r < 1, \\ R \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\psi} - \tilde{U}_o \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial z^3} - \tilde{U}_o \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial r^2 \partial z} + \tilde{U}_o'' \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \right] &= -\nabla^4 \hat{\psi}, & 1 < r < A, \end{aligned}$$

spolu s podmienkami

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \right|_{-}^{+} &= 0, \\
\tilde{U}' h - \left. \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \right|_{-}^{+} &= 0, \\
\rho \nu \nabla^2 \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \right) \Big|_{-}^{+} + 2 \rho \nu \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial r \partial z^2} \Big|_{-}^{+} &= -\Gamma \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} - R \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \right) + \tilde{U}' \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \right] \Big|_{-}^{+}, \\
\rho \nu \left( \tilde{U}'' h - \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial z^2} \right) \Big|_{-}^{+} &= 0, \\
\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z}, \quad r = 1, \\
\left. \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \right|_A &= 0, \quad \left. \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \right|_A = 0,
\end{aligned}$$

Veličiny  $\nu$  a  $\rho$  sú bezrozmerné a definujeme ich nasledovne

$$\nu = \begin{cases} 1, & r > 1 \\ 1/\beta, & r < 1 \end{cases} \quad \rho = \begin{cases} 1, & r > 1 \\ 1/m, & r < 1 \end{cases} \quad (1.80)$$

Podmienky symetrie v prípade varikózných porúch sú  $\partial \hat{\psi} / \partial z = 0$ ,  $\partial^2 \hat{\psi} / \partial r^2 = 0$ . V meandrujúcom prípade máme  $\partial^2 \hat{\psi} / \partial r \partial z = 0$ ,  $\partial^3 \hat{\psi} / \partial r^3 = 0$ . Tieto podmienky musia byť splnené na osi symetrie  $r = 0$ .

### 1.2.5 Analýza normálnych módov

Analýza normálnych módov vychádza z predpokladu o linearite riešeného systému. Poruchy, ktoré sú riešeniami riadiacich rovníc možno separátne rozložiť na súčet módov, z ktorých každý rieši tieto rovnice samostatne. V prípade rovníc, ktoré determinujú problém stability planárneho jet-u, metóda normálnych módov vedie na vlastnohodnotový problém. Vlastným číslom je  $c = \omega + i\sigma$ , kde  $\omega$  je fázová rýchlosť poruchy a  $\sigma$  je jej miera rastu. Vlastnou funkciou bude amplitúda poruchy. Módy budeme teda uvažovať v tvare

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \psi(r) e^{i\alpha(z-ct)} + \text{c.c.} \quad (1.81)$$

Z fyzikálnej podstaty požadujeme, aby príslušná prúdová funkcia poruchy bola reálnym zobrazením. Pri riešení sa však budeme zaoberať komplexným vlastnohodnotovým problémom, pričom poruchu späťne reprodukuje prúdovou funkciou

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = 2\text{Re} [\psi(r) e^{i\alpha(z-ct)}].$$

Na problém však možno nahliadnuť cez komplexnú a jej komplexne združenú časť samostatne, keďže ide o lineárny systém. V oboch prípadoch, priamym výpočtom dostávame, že informáciu o časovej štruktúre poruchy obsahuje práve imaginárna časť

vlastného čísla  $\hat{\psi} \sim e^{\alpha\sigma t}$  pre  $t \rightarrow \infty$ . Podľa definície prúdovej funkcie, pre rýchlostné pole poruchy platí

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 2\text{Re} \left[ e^{i\alpha(z-ct)} \left( i\alpha\psi\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\partial}{\partial r}\psi\hat{\mathbf{e}}_z \right) \right]$$

Z tohto zápisu je zrejmé, že rýchlostné pole možno taktiež zapísať v tvare

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{u}}(r)e^{i\alpha(z-ct)}.$$

Exponenciálny prefaktor s mierou rastu  $\sigma$  teda udáva rovnaký trend aj pre rýchlostné pole. Pokiaľ  $\sigma < 0$ , tak príslušný mód poruchy v čase upadá  $\psi \rightarrow 0$ , rovnako zaniká aj samotná porucha generovaná týmto módom  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$ . V tomto prípade sa jedná o *stabilný mód*. V opačnom prípade, mód prislúchajúci hodnote  $\sigma > 0$  nazývame *nestabilný mód*. Hraničná situácia nastáva pre  $\sigma = 0$ , kde riešenia neobsahujú časovú štruktúru. Tento prípad vedie k neutrálnej stabilite.

K správneému určeniu globálnej stability, však treba poznať celú štruktúru spektra a analyzovať prítomnosť vlastných čísel  $c$  s kladnou imaginárnou časťou  $\sigma$ . Ak sa v spektre problému nachádza hodnota s kladnou imaginárnou časťou, základný stav podlieha nestabilite voči malým poruchám.

Uvažujme teda ansatz

$$\{\hat{\psi}, h\} = \{\psi, \eta\}e^{i\alpha(z-ct)} + \text{c.c.}$$

Vzhľadom na podobnosť týchto foriem dostávame, že derivovanie v premennej  $z$  má nasledovné vlastnosti

$$\frac{\partial^j}{\partial z^j} = (i\alpha)^j \text{id}, \quad (1.82)$$

pričom v premennej  $r$  sa parciálna derivácia transformuje na obyčajnú vzťahom

$$\frac{\partial^j \hat{\psi}}{\partial r^j} = e^{i\alpha(z-ct)} \frac{d^j \psi}{dr^j} + \text{c.c.},$$

Potreba zavedenia riešení v uvedenom tvare vychádza z metódy separácie. Prefaktory parciálnych derivácií v radiaciach rovniciach sú závislé len od premennej  $r$ . Z tohto dôvodu má porucha exponenciálnu štruktúru v premennej  $z$ . Explicitným výpočtom a využitím (1.82) radiaci systém Orr-Sommerfeldovho typu v tvare

$$\nu \left( \frac{d^2}{dr^2} - \alpha^2 \right)^2 \psi = i\alpha R \left[ (\tilde{U} - c) \left( \frac{d^2}{dr^2} - \alpha^2 \right) \psi - \tilde{U}''\psi \right], \quad (1.83)$$

$$\psi|_0 = 0, \quad \left. \frac{d^2\psi}{dr^2} \right|_0 = 0, \quad \text{pre symetrické poruchy} \quad (1.84)$$

$$\left. \frac{d\psi}{dr} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{d^3\psi}{dr^3} \right|_0 = 0, \quad \text{pre antisymetrické poruchy} \quad (1.85)$$

$$\psi|_A = 0, \quad \left. \frac{d\psi}{dr} \right|_A = 0, \quad (1.86)$$

$$\psi|_{-}^{\pm} = 0, \quad (1.87)$$

$$\tilde{U}'\eta - \frac{d\psi}{dr}\Big|_{-}^{\pm} = 0, \quad (1.88)$$

$$\rho\nu \left( \frac{d^2}{dr^2} - 3\alpha^2 \right) \frac{d\psi}{dr}\Big|_{-}^{\pm} = i\alpha^3 R\eta - i\alpha R \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \left( c \frac{d\psi}{dr} + \tilde{U}'\psi \right)\Big|_{+} \quad (1.89)$$

$$\rho\nu \left[ \tilde{U}''\eta - \left( \frac{d^2}{dr^2} + \alpha^2 \right) \psi \right]\Big|_{-}^{\pm} = 0 \quad (1.90)$$

$$-c\eta = \psi, \quad \text{pre } r = 1^{\pm} \quad (1.91)$$

kde

$$\psi(r) = \begin{cases} \psi_i(r), & \text{pre } 0 < r < 1, \\ \psi_o(r), & \text{pre } 1 < r < A. \end{cases}$$

Veličiny  $\rho$  a  $\nu$  sú určené definíciou (1.80). Posledná podmienka (1.91) umožňuje substituovať výraz  $\eta = -\psi|_{1^{\pm}}/c$ . Vďaka tejto substitúcii dostávame vlastnohodnotový problém len pre amplitúdu  $\psi$  a vlastné číslo v tvare

$$\mathcal{F}(\alpha, c, R)\psi = 0. \quad (1.92)$$

z ktorého možno odvodiť disperzný vzťah  $\mathcal{F}(\alpha, c, R) = 0$ . Vlnové číslo  $\alpha$  možno taktiež považovať za vlastné číslo namiesto  $c$ . V tomto prípade ide o *priestorovú* analýzu stability. Vzhľadom na štruktúru Orr-Sommerfeldovho systému však budeme uvažovať fixáciu parametrov  $\alpha, R$  a disperzný vzťah budeme uvažovať pre vlastné číslo  $c$  s určujúcou mierou rastu  $\sigma$ . Tento prístup sa nazýva *časová* analýza stability.

**Poznámka 1.2.1.** Niektorí autori uvažujú riešenia v tvare  $\sim e^{i(\tilde{\alpha}z - \tilde{c}t)}$ . Potom však v zmysle konvencie tejto práce bude  $\tilde{c} = \alpha c$  a  $\tilde{\alpha} = \alpha$ .



# Kapitola 2

## Prehľad asymptotických výsledkov

Asymptotická teória je jedným z alternatívnych prístupov k riešeniu rôznych problémov. Cieľom našej práce je analyzovať stabilitný problém z numerického hľadiska a v limitných prípadoch porovnať asymptotické a numerické výsledky. Porovnanie budeme vykonávať s asymptotickými formami riešení v práci [Guba a Revallo, 2012]. V tejto práci autori analyzujú problém planárneho kvapalného jetu pre dva limitné procesy. V prvom rozoberajú režim pre limitne malé hodnoty Reynoldsovho čísla pri fixovanom vlnovom čísle  $\alpha = O(1)$ . V druhom analyzujú problém z pohľadu limitne malého vlnového čísla  $\alpha$  pri fixovanom Reynoldsovom čísle  $R = O(1)$ . Riešenie úlohy bolo prevedené na polonekonečnej oblasti  $A \rightarrow \infty$  za nasledovných predpokladov

- hustota oboch kvapalín je rovnaká  $\rho_i = \rho_o$
- vonkajší tok sa nachádza v hydrostatickom ekvilibriu,  $K_o = 0$

Autor v Stokesovom režime venoval pozornosť prípadu  $\alpha \ll 1$ . Na základe tejto úvahy o vlnovom čísle budeme pozorovať rozdiely v nekomutujúcich limitných procesoch  $R \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$  a  $\alpha \rightarrow 0, R \rightarrow 0$ . Cieľom tejto časti je poskytnúť prehľad o štruktúre stabilitných diagramov v rozlíšení  $\alpha$  a  $R$  na základe známych výsledkov. Keďže asymptotická teória pokrýva len oblasti limit  $\alpha \rightarrow 0$  a  $R \rightarrow 0$ , úplnú informáciu o polohe nestabilných regiónov získame z numerického riešenia v poslednej kapitole.

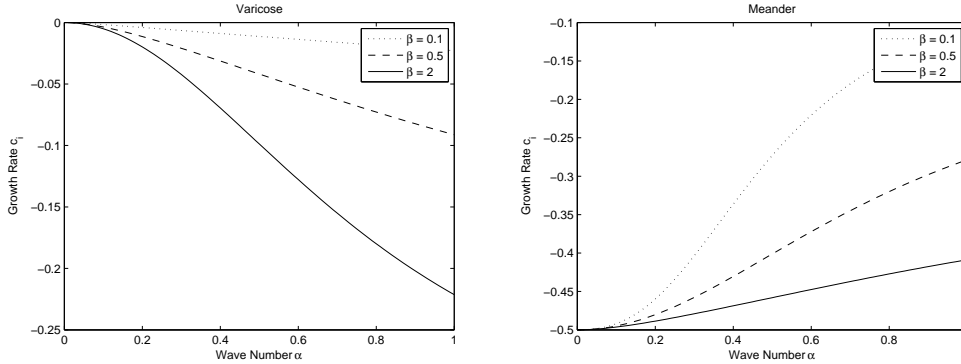
V prípade dlhých vlnových dĺžok porúch je podobný problém analyzovaný v článku [Joseph a kol., 1987]. V tomto sa autor zameriava na asymptotickú analýzu stability toku, riadeného konštantným tlakovým gradientom. Hlavným výsledkom je pozorovanie vplyvu viskozitného kontrastu na stabilitu základného toku. Tok s vlastnosťou  $\beta < 1$  je stabilný pre všetky vlnové dĺžky, kým v prípade  $\beta > 1$  sa jedná o nestabilný tok. Rovnaký výsledok bol odvodený aj v práci [Guba a Revallo, 2012].

### 2.1 Asymptotické výsledky pre Stokesovu limitu

V prípade Stokesovho režimu  $R \rightarrow 0$  boli v práci [Guba a Revallo, 2012] aplikované výsledky regulárnej asymptotickej teórie, keďže ide o regulárnu limitu a nedochádza k degenerácii rádu problému. Z hľadiska analýzy ide o jednoduchší prípad, keďže nie je nutné reškálovanie vzhľadom na extrémálny parameter  $R$ . Budeme teda uvažovať

regulárny asymptotický rozvoj<sup>1</sup> pre vlastné číslo  $\hat{c} = \omega + i\sigma$  s maximálnou mierou rastu. Platí teda

$$\sigma := \text{Im}(\hat{c}) = \max_{c \in \Lambda} \{\text{Im}(c)\}.$$



Obr. 2.1: **Maximálna miera rastu poruchy.** Rýchlosť rastu poruchy v ráde  $O(R^0)$  podľa vlnového čísla. V závislosti od viskózneho pomeru  $\beta$  pre symetrický prípad (vľavo) a antisymetrický (vpravo). Parameter  $\Gamma$  je fixovaný na hodnote 1.

kde  $\Lambda$  je vlastnohodnotové spektrum problému, odvodeného v predchádzajúcej kapitole. Na diagramoch 2.1 je možné pozorovať vplyv zmeny viskozitného kontrastu na maximálnu rýchlosť rastu v nulťom ráde  $\sigma_0$ . Parameter  $\beta$  bol definovaný ako podiel  $\nu_o/\nu_i$ , čo znamená, že v prípade  $\beta < 1$  uvažujeme vnútornú kvapalinu s vyššou viskozitou, než je viskozita okolitej kvapaliny. Pre fixované vlnové číslo poruchy  $\alpha = O(1)$  má pomer  $\beta$  mierny stabilizujúci efekt, keďže

$$\beta_1 < \beta_2 : \quad \sigma_0(\alpha; \beta_1, \Gamma) > \sigma_0(\alpha; \beta_2, \Gamma).$$

Toto pozorovanie je prítomné v oboch typoch symetrii porúch. V nulťom ráde  $R^0$  nemožno pozorovať kritickú hodnotu vlnového čísla, pri ktorej prechádza základný stav zo stabilného do nestabilného režimu. Asymptotický rozvoj  $\sigma$  do rádu  $R^0$  je pre symetrické poruchy explicitne

$$\sigma_0(\alpha; \beta, \Gamma) = \frac{-\frac{1}{2}\Gamma[S^2 + (CS - \alpha)\beta]}{C^2 + S^2 + (CS - \alpha)\beta + (CS + \alpha)/\beta}, \quad (2.1)$$

a pre antisymetrické

$$\sigma_0(\alpha; \beta, \Gamma) = \frac{-\frac{1}{2}\Gamma[C^2 + (CS + \alpha)\beta]}{C^2 + S^2 + (CS + \alpha)\beta + (CS - \alpha)/\beta}, \quad (2.2)$$

kde  $C := \cosh(\alpha)$  a  $S := \sinh(\alpha)$ . Pre  $\alpha > 0$  platí  $CS - \alpha > 0$  a teda celá imaginárna časť v nulťom ráde je záporná. V oboch prípadoch je však prítomný parameter  $\Gamma$  odrážajúci efekty povrchového napätia. Tento sa vyskytuje v imaginárnej časti so záporným znakom a má teda stabilizačný charakter. V prípade voľby malého vlnového čísla  $\alpha \ll 1$  symetrickej poruchy sa tento stabilizačný efekt zoslabuje, keďže

$$\sigma_0(\alpha; \Gamma) \sim -\frac{1}{2}\Gamma\alpha^2, \quad \text{pre } \alpha \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

<sup>1</sup> $\hat{c} = c_0R^0 + c_1R^1 + O(R^2) = (\omega_0 + i\sigma_0)R^0 + (\omega_1 + i\sigma_1)R^1 + O(R^2)$ .

Pri antisymetrickej poruche nie tento efekt prítomný, keďže

$$\sigma_0(\alpha; \Gamma) \sim -\frac{1}{2}\Gamma, \quad \text{pre } \alpha \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Vplyv povrchového napätia  $\Gamma$  na rýchlosť rastu poruchy je znázornený na diagrame 2.2. Táto analýza sa však vzťahuje na hraničný prípad  $R = 0$ . Ďalej sa teda budeme zaoberať otázkou, či sú prítomné kritické hodnoty vlnového čísla, pri ktorých dochádza k nestabilite vplyvom nenulového  $R$  v ráde  $R^1$ . Príjmime zjednodušujúci predpoklad  $\alpha \ll 1$ . V antisymetrickom prípade je člen zodpovedajúci  $R^1$  nulový a neudáva novú informáciu o štruktúre spektra. Naopak v symetrickom prípade je

$$\sigma_1(\alpha) = \frac{3}{16\alpha^3} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right), \quad \text{pre } \alpha \rightarrow 0.$$

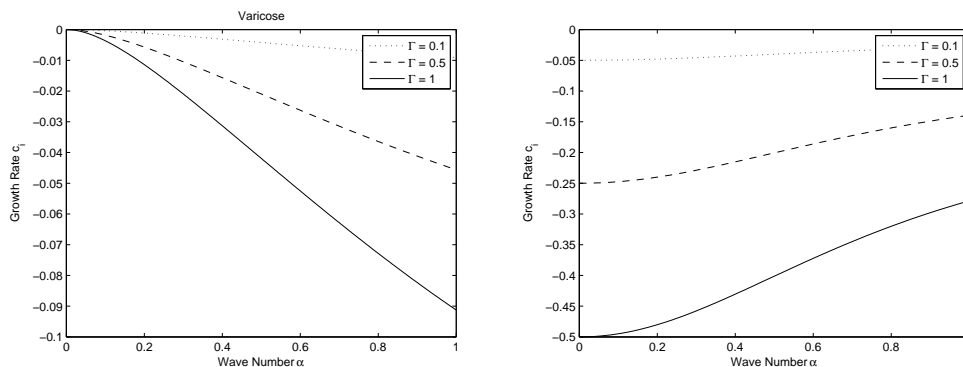
Za predpokladu  $R \ll \alpha^3 \ll 1$  možno odvodiť, kedy základný stav prechádza do nestabilného režimu v symetrických poruchách. Ako vidno z (2.3), efekty povrchového napätia  $\Gamma$  majú vplyv na štruktúru stabilitného diagramu aj v oblasti  $\alpha \ll 1$ , kým vplyvy viskozity pri dlhých vlnách v Stokesovej limite zanikajú. Na obrázkoch 2.4 sú zachytené asymptotické krivky neutrálnej stability. Tieto sme konštruovali na základe kritéria

$$\sigma_0(\alpha; \Gamma) + R^1\sigma_1(\alpha) = 0, \quad R \rightarrow 0.$$

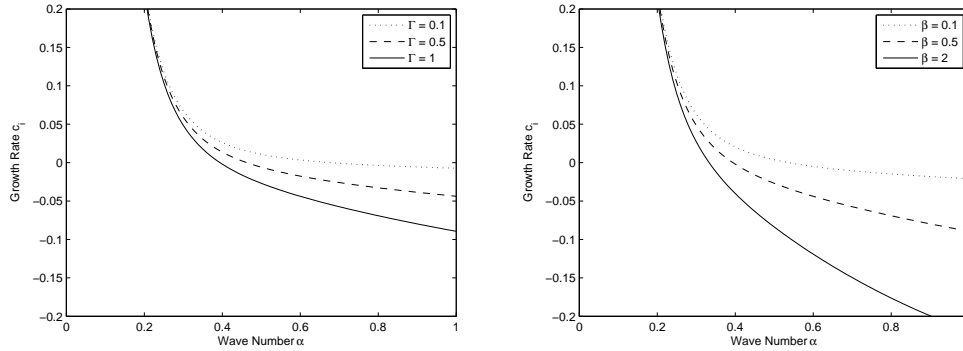
odkiaľ máme rovnicu krivky explicitne

$$R(\alpha; \Gamma) = -\frac{\sigma_0(\alpha; \Gamma)}{\sigma_1(\alpha)} = \frac{8}{3}\Gamma\alpha^5.$$

Člen  $\sigma_1$  nemá parametrickú závislosť na  $\Gamma$  a teda krivka  $R = R(\alpha; \Gamma)$  sa vzhľadom na  $\Gamma$  správa kvantitatívne rovnako, ako  $\sigma_0 = \sigma_0(\alpha, \Gamma)$ . Vplyvom zväčšovania hodnoty  $\Gamma$  teda dochádza k zmenšovaniu oblasti nestability.



Obr. 2.2: **Maximálna miera rastu poruchy.** Rýchlosť rastu poruchy v ráde  $O(R^0)$  podľa vlnového čísla. V závislosti od povrchového napätia  $\Gamma$  pre symetrický prípad (vľavo) a antisymetrický (vpravo). Parameter  $\beta$  je fixovaný na hodnote  $1/2$ .



Obr. 2.3: **Stabilizačný efekt parametrov  $\beta$  a  $\Gamma$ .** Stabilizačný efekt povrchového napätia (vľavo) a viskozitného kontrastu (vpravo) na rýchlosť rastu poruchy do rádu  $O(R^1)$  v symetrickom prípade. Pri fixovanom vlnovom čísle  $\alpha$  nárast parametra  $\Gamma$  resp.  $\beta$  spôsobuje znižovanie rýchlosti rastu  $\sigma$ .

## 2.2 Asymptotické výsledky pre dlhé vlnové dĺžky porúch

Prípady limity  $\alpha \rightarrow 0$  pri  $R = O(1)$  bol intenzívne skúmaný vo viacerých článkoch. V článku [Yih, 1967] sa autor zaoberá otázkou stability vplyvom zmeny viskozitného kontrastu. Uvažovaný je Couette-Poiseuilleov dvojvrstvý tok medzi dvoma pevnými hranicami s rozličnou viskozitou. Hlavným výsledkom je zistenie, že bez ohľadu na Reynoldsove číslo, tento tok podlieha nestabilite. Článok [Joseph a kol., 1987] sa zaoberá podobným problémom stability vrstveného Poiseuilleho toku. Autor analyzuje problém z pohľadu symetrie a antisymetrie uvažovanej poruchy. Tok, ktorý pozostáva z vnútorného toku, s väčšou viskozitou a vonkajšieho s menšou viskozitou, sa ukázal byť stabilný vzhľadom na dlhé vlny. Naopak tok, ktorého vnútro je menej viskózne, podlieha nestabilite. K rovnakým výsledkom viedla aj analýza [Guba a Revallo, 2012]. Autor tu pristupuje k problému metódou singulárnych rozvojov na rôznej úrovni reškálovania. Zhrnutie možno nájsť v nasledovnej tabuľke

Mód	Asymptotická limita	Miera rastu	Záver
varikózný	$\alpha \rightarrow 0$	$\sigma \sim (\alpha R)^{-1/3}$	nestabilný
meandrujúci	$\alpha \rightarrow 0$	$\sigma \sim (\alpha R)^{-1/3}$	stabilný
varikózný	$\alpha \rightarrow 0$	—	—
meandrujúci	$\alpha \rightarrow 0$	$\sigma \sim \alpha^{-1}(1 - \beta)$	stabilný pre $\beta < 1$

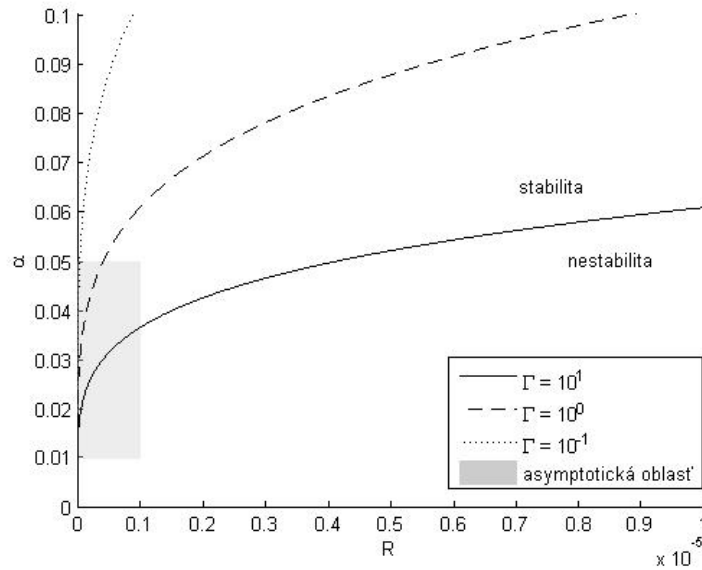
V prípade reškálovania  $c \sim \alpha^{-1}$  neexistujú riešenia v symetrickom prípade. Naopak v prípade  $c \sim \alpha^{-1/3}$  autor odvodil asymptotické formy v nultom ráde

$$\sigma_0 = \text{Im} \left( \frac{e^{5\pi i/6} z}{\sqrt[3]{\alpha R}} \right), \quad (2.5)$$

kde hodnota  $z$  závisí od typu porúch. V symetrických  $z$  rieši rovnicu

$$z \text{Ai}(z) + \int_0^z \text{Ai}(\zeta) d\zeta = \frac{1}{3}.$$

Táto rovnica má práve jeden kladný koreň ( $z \doteq 0.75788$ ). V meandrujúcom prípade  $z$  rieši rovnicu  $\text{Ai}'(z) = 0$ . Všetky korene  $\text{Ai}'$  sú však záporné, preto sú všetky meandrujúce módy stabilné.



Obr. 2.4: Asymptotická aproximácia stabilitného diagramu pre symetrické poruchy v  $R \rightarrow 0, \alpha \ll 1$ . Oblasť, ktorá podlieha asymptotickej limite je vyznačená.

## 2.3 Asymptotika pre Stokesovu limitu na konečnej oblasti

V tejto časti sa budeme zaoberať odvođením asymptotických foriem riešení pre regulárnu Stokesovu limitu v prípade konečnej oblasti  $A < \infty$ . Keďže asymptotická teória v [Guba a Revallo, 2012] bola vybudovaná pre polonekonečnú oblasť v poradí  $A \rightarrow \infty$  a  $R \rightarrow 0$ , niektoré výsledky numerických experimentov ňou nemožno popísať. Táto skutočnosť má súvis s nekomutujúcimi limitnými procesmi. Pri numerickom riešení sa uvažuje  $R \rightarrow 0$  a následne  $A \rightarrow \infty$ . Táto časť bude slúžiť pre porovnanie a kontrolu správnosti numerického riešenia. Vzhľadom na rozsiahlosť výpočtov a zameranie práce, singulárnou limitou  $\alpha \rightarrow 0$  sa nebudeme zaoberať a budeme ju reprodukovat' len numericky.

Uvažujme teda  $A < \infty$  a  $R \rightarrow 0$ , pričom  $\alpha = O(1)$ . Týmto spôsobom nie je vlnové číslo bližšie určené a budeme ho považovať za fixovaný parameter.

Uvažujme symetrické poruchy<sup>2</sup>. Keďže predmetom je vlastnohodnotový problém, je potrebné určiť dvojicu  $(c, \psi)$ , vlastné číslo  $c = \omega + i\sigma$  a amplitúdu  $\psi = \psi(r)$ . Amplitúda je vo všeobecnosti taktiež komplexná. Formálne sa jedná o jednu vlastnú funkciu  $\psi$ , avšak implicitne je potreba určiť separátne riešenia, vo vnútornej i vonkajšej oblasti. Označme teda vnútorné riešenie  $\psi_i$  a vonkajšie  $\psi_o$ . Definujme regulárne perturbačné rozvoje

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + R\psi_1 + O(R^2), \\ c &= c_0 + Rc_1 + O(R^2).\end{aligned}$$

Tieto rozvoje konštruujeme vzhľadom na extrémálny parameter  $R \rightarrow 0$ . Člen v každom ráde definuje nezávislý problém, ku ktorému budeme pristupovať individuálne. Veľmi

<sup>2</sup>Druhý prípad rozoberieme v poznámke na konci tejto časti.

dôležitú informáciu nám poskytne dominantný nultý rád. V tomto ráde sa zameriame na určenie  $(\psi_i)_0, (\psi_o)_0$  a  $c_0$ .

Riadiaca Orr-Sommerfeldova rovnica explicitne obsahuje extrémálny parameter  $R$  na pravej strane. V zjednodušenej forme

$$\nu(D^2 - \alpha^2)^2\psi(r) = i\alpha RL\psi(r), \quad (2.6)$$

Operátor  $L$  na pravej strane rovnice v limite  $R \rightarrow 0$  stratí na význame. Regularita rozvoja zaručuje, že rád pravej strany bude minimálne  $O(R^1)$ . Z ďalších úvah o  $\psi_0$  ju teda možno vylúčiť. Po preskupení členov podľa rádu môžeme rovnosť (2.6) zapísať nasledovne

$$(D^2 - \alpha^2)^2\psi_0(r) = O(R^1), \quad \psi_0(r) = \begin{cases} (\psi_i)_0(r), & 0 < r < 1, \\ (\psi_o)_0(r), & 1 < r < A. \end{cases} \quad (2.7)$$

Poznamenanajme, že závislosť na vlastnom čísle  $c$  v rovnici (2.7) v nultom ráde nevyskytuje, je však zahrnutá v podmienkach na rozhraní  $r = 1$ . Štruktúra rovnice (2.7) si zachováva dva vedúce diferenciálne rády, a teda reškálovanie nie je potrebné. V nultom ráde sa teda budeme zaoberať úlohou

$$(D^2 - \alpha^2)^2(\psi_i)_0 = 0, \quad r < 1, \quad (2.8)$$

$$(D^2 - \alpha^2)^2(\psi_o)_0 = 0, \quad r > 1, \quad (2.9)$$

$$(\psi_i)_0|_0 = D(\psi_i)_0|_0 = 0, \quad (2.10)$$

$$(\psi_o)_0|_A = D(\psi_o)_0|_A = 0, \quad (2.11)$$

$$(\psi_i)_0|_{1-} = (\psi_o)_0|_{1+}, \quad (2.12)$$

$$c_0(D(\psi_o)_0|_{1+} - D(\psi_i)_0|_{1-}) = -(1 - \beta)(\psi_i)_0|_{1+}, \quad (2.13)$$

$$c_0 \left[ D^2(\psi_o)_0 + \alpha^2(\psi_o)_0 - \frac{1}{\beta} (D^2(\psi_i)_0 + \alpha^2(\psi_i)_0) \right] = (\psi_i)_0, \quad (2.14)$$

$$c_0 \left[ (D^3(\psi_o)_0 - 3\alpha^2 D(\psi_o)_0) - \frac{1}{\beta} (D^3(\psi_i)_0 - 3\alpha^2 D(\psi_i)_0) \right] = -i\Gamma\alpha^3(\psi_i)_0. \quad (2.15)$$

Podmienky na rozhraní sme zjednodušili voľbou parametrov  $m = 1$  a  $k = 0$ . Táto voľba vychádza z predpokladov 1. a 2. v úvode kapitoly. Potreba tohto zjednodušenia vychádza najmä z technických dôvodov. Voľba  $m = 1$  znamená prítomnosť tokov s rovnakou hustotou. Člen rádu  $O(R^1)$  sa v poslednej podmienke (2.15) touto voľbou anuljuje a nebudeme ho ďalej uvažovať. Ďalej si možno všimnúť, že v podmienkach sa vyskytuje len nultý člen rozvoja  $c$ . Tento rozvoj je však taktiež regulárny a nemá zmysel v tomto momente uvažovať vyššie rády.

Charakteristický polynóm rovníc (2.8) a (2.9) je

$$(\lambda^2 - \alpha^2)^2 = 0.$$

Tento má dva dvojnásobné korene  $\lambda = \pm\alpha$ . Pre  $\psi^i, \psi^o$  to indikuje podobnosť riešení vo forme exponenciál

$$\begin{aligned} (\psi_i)_0(r) &= K_1^i e^{\alpha r} + K_2^i e^{-\alpha r} + K_3^i r e^{\alpha r} + K_4^i r e^{-\alpha r}, \\ (\psi_o)_0(r) &= K_1^o e^{\alpha r} + K_2^o e^{-\alpha r} + K_3^o r e^{\alpha r} + K_4^o r e^{-\alpha r}. \end{aligned}$$

Jediným rozdielom budú určujúce koeficienty. Neznámych, ako aj okrajových podmienok je osem. Zvyškovou neznámou je vlastné číslo  $c_0$ . Najmä vďaka voľbe  $m = 1$  zostáva linearita vlastnohodnotového problému zachovaná. V opačnom prípade, by nebola závislosť na vlastnom čísle lineárna. Avšak vhodnou kombináciou podmienok na rozhraní možno docieľiť lineárnu závislosť. Túto úpravu rozoberáme pri numerickej implementácii, kde sme pojali problém všeobecne bez obmedzení na parametrickú sadu.

Jednoduchým derivovaním týchto foriem možno určiť, že z podmienok (2.10) vyplýva  $K_1^i = -K_2^i$  a  $K_3^i = K_4^i$ . Funkciu  $(\psi_i)_0$  je potom možné zapísať ako kombináciu hyperbolických funkcií

$$(\psi_i)_0(r) = 2K_1^i \sinh(\alpha r) + 2K_3^i r \cosh(\alpha r).$$

Z okrajovej podmienky (2.11) dostaneme rovnice

$$K_1^o e^{\alpha A} + K_2^o e^{-\alpha A} + K_3^o A e^{\alpha A} + K_4^o A e^{-\alpha A} = 0, \quad (2.16)$$

$$\alpha K_1^o e^{\alpha A} - \alpha K_2^o e^{-\alpha A} + e^{\alpha A}(1 + \alpha A)K_3^o + e^{-\alpha A}(1 - \alpha A)K_4^o = 0. \quad (2.17)$$

Zvyšné podmienky sú komplikovanejšie. Vzhľadom na ich rozsah uvedieme len výsledné tvary rovníc pre koeficienty, ktoré z nich možno odvodiť. Budeme pritom používať nasledovné skrátene označenia  $S := \sinh(\alpha)$ ,  $C = \cosh(\alpha)$ . Očakávane, rovnice pre koeficienty možno zapísať v maticovom tvare

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{K} = c_0 \mathbf{B}_0 \mathbf{K}. \quad (2.18)$$

Dolným indexom len zvýrazňujeme fakt, že sa jedná o nultý rád. Obe matice  $\mathbf{A}_0$  aj  $\mathbf{B}_0$  majú rozmer  $6 \times 6$ . Prvé dva riadky tvoria rovnice (2.16), (2.17), zvyšné štyri tvoria podmienky na rozhraní. Vektor  $\mathbf{K}$  pozostáva zo zložiek

$$\mathbf{K} = [K_1^i \quad K_3^i \quad K_1^o \quad K_2^o \quad K_3^o \quad K_4^o]^T,$$

a príslušné matice majú tvar

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{\alpha A} & e^{-\alpha A} & A e^{\alpha A} & A e^{-\alpha A} \\ 0 & 0 & \alpha e^{\alpha A} & -\alpha e^{-\alpha A} & (1 + \alpha A)e^{\alpha A} & (1 - \alpha A)e^{-\alpha A} \\ 2S & 2C & -e^{\alpha} & -e^{-\alpha} & -e^{\alpha} & -e^{-\alpha} \\ 2(\beta - 1)S & 2(\beta - 1)C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\Gamma S & -i\Gamma C & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\alpha C & -2(C + \alpha S) & \alpha e^{\alpha} & -\alpha e^{-\alpha} & (1 + \alpha)e^{\alpha} & (1 - \alpha)e^{-\alpha} \\ -\frac{2\alpha^2 S}{\beta} & -\frac{2\alpha}{\beta}(S + \alpha C) & \alpha^2 e^{\alpha} & \alpha^2 e^{-\alpha} & \alpha(\alpha + 1)e^{\alpha} & \alpha(\alpha - 1)e^{-\alpha} \\ \frac{2C}{\beta} & \frac{2S}{\beta} & -e^{\alpha} & e^{-\alpha} & -e^{\alpha} & e^{-\alpha} \end{bmatrix}.$$

Všimnime si, že matica  $\mathbf{B}$  je singulárna. Je to práve z dôvodu, že homogénne podmienky (2.11) a (2.12) nedefinujú závislosť na vlastnom čísle. Tieto sú zdrojom falošných vlastných hodnôt, ktoré nevychádzajú z fyzikálnej podstaty problému.

**Poznámka 2.3.1.** Predchádzajúci prístup predpokladal symetrické perturbácie. V prípade antisymetrie, zostane štruktúra úlohy zachovaná. Namiesto podmienky (2.10) však budeme uvažovať

$$D(\psi_i)_0|_0 = D^3(\psi_i)_0|_0 = 0.$$

Z praktického hľadiska to znamená, že sa zmení vzťah medzi koeficientami  $K_{1,2,3,4}^i$  nasledovne  $K_1^i = K_2^i$  a  $K_3^i = -K_4^i$ . Funkcia  $\psi_0^i$  bude mať potom tvar

$$(\psi_i)_0(r) = 2K_1^i \cosh(\alpha r) + 2K_3^i r \sinh(\alpha r).$$

V tomto momente však treba podotknúť, že pre prehľadnosť koeficienty v symetrii, resp. antisymetrii označujeme rovnako. V skutočnosti však ide o rôzne kvantily, vzniknuté z riešenia dvoch rôznych problémov.

Štruktúra matíc sa po zohľadnení tejto podmienky zmení na

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{\alpha A} & e^{-\alpha A} & Ae^{\alpha A} & Ae^{-\alpha A} \\ 0 & 0 & \alpha e^{\alpha A} & -\alpha e^{-\alpha A} & (1 + \alpha A)e^{\alpha A} & (1 - \alpha A)e^{-\alpha A} \\ 2C & 2S & -e^\alpha & -e^{-\alpha} & -e^\alpha & -e^{-\alpha} \\ 2(\beta - 1)C & 2(\beta - 1)S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\Gamma C & -i\Gamma S & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\alpha S & -2(S + \alpha C) & \alpha e^\alpha & -\alpha e^{-\alpha} & (1 + \alpha)e^\alpha & (1 - \alpha)e^{-\alpha} \\ -\frac{2\alpha^2 C}{\beta} & -\frac{2\alpha}{\beta}(C + \alpha S) & \alpha^2 e^\alpha & \alpha^2 e^{-\alpha} & \alpha(\alpha + 1)e^\alpha & \alpha(\alpha - 1)e^{-\alpha} \\ \frac{2S}{\beta} & \frac{2C}{\beta} & -e^\alpha & e^{-\alpha} & -e^\alpha & e^{-\alpha} \end{bmatrix}.$$

Na riešenie uvedených vlastnohodnotových problémov sme využili systém *Mathematica*, ktorý explicitne vyjadril hľadané vlastné číslo. Vzhľadom na jeho rozsah uvedieme len lubrikovanú formu pre  $\alpha \ll 1$  podobne, ako bolo odvodené v [Guba a Revallo, 2012]. Pre maximálnu mieru rastu v symetrických poruchách platí

$$\sigma_0(\alpha; \beta, \Gamma) = -\frac{(A - 1)^3(3A - 3 + 4\beta)}{12(A^3 - 1 + \beta)}\Gamma\alpha^3 + O(\alpha^4), \quad \text{pre } \alpha \rightarrow 0,$$

a v antisymetrických

$$\sigma_0(\alpha; \beta, \Gamma) = -\frac{(A - 1)^3(A - 1 + 4\beta)}{12(A - 1 + \beta)}\Gamma\alpha^3 + O(\alpha^4), \quad \text{pre } \alpha \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

Z týchto výrazov môžeme pozorovať rozdiel v rádoch  $\alpha$  oproti formám (2.3) a (2.4). Okrem rozdielu v rádoch možno pozorovať aj priamu závislosť na viskozite cez parameter  $\beta$ . V prípade voľby dostatočne veľkého  $A \gg 1$  možno uvažovať aproximáciu pre symetrické resp. antisymetrické poruchy

$$\sigma_0 \sim -\frac{A}{4}\Gamma\alpha^3, \quad \text{resp.} \quad \sigma_0 \sim -\frac{A^3}{12}\Gamma\alpha^3, \quad \text{pre } \alpha \ll 1 \ll A.$$



Porovnaním týchto aproximácií s (2.3) a (2.4) možno vidieť, že rádový rozdiel v  $\alpha$  kompenzuje voľba  $A \sim 2/\alpha$ . Voľba parametra  $A$  na tejto škále pre  $\alpha \ll 1$  v ráde  $O(R^0)$  prináša výsledky porovnateľné s teóriou [Guba a Revallo, 2012].

Spektrum vlastnohodnotového problému určeného maticami  $\mathbf{A}_0$  a  $\mathbf{B}_0$  však obsahuje aj vlastné čísla, ktoré nevychádzajú z podstaty fyzikálneho problému a súvisia so singularitou matice  $\mathbf{B}_0$ . Tieto vlastné čísla teda nebudeme uvažovať ako riešenia príslušnej úlohy.

Na obrázkoch 2.5 a 2.6 možno pozorovať vlastnosti prúdovej funkcie a izočiar amplitúdy rýchlostného poľa pre parametrickú sadu  $\alpha = 10^{-1}, 10^0$  a  $A = 10^1, \beta = 1/2, \Gamma = 1$ . Prúdové funkcie sú normované a vykresľované na plnej dĺžkovej škále  $r \in (0, A)$ . Normalizácia

$$\psi(r) \mapsto \frac{\psi(r)}{\|\psi\|_\infty},$$

nám umožňuje lepšie skúmať kvantitatívne zmeny v priebehu vlastných funkcií pri analýze senzitivity. V prípade izočiar rýchlostného poľa je oblasť v smere  $z$  nekonečná. Vzhľadom na periodickú štruktúru riešenia  $\hat{\psi} \sim e^{i\alpha(z-ct)}$  sa budeme zameriavať na vykreslenie jednej vlnovej dĺžky

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Na obrázku 2.5 sa zaoberáme prípadom, kedy  $\alpha = 10^{-1}$ . Vlnová dĺžka poruchy je dlhá v porovnaní s druhým prípadom na obrázku 2.6, kde  $\alpha = 1$ . Možno si však všimnúť vplyv veľkých vlnových čísel  $\alpha$  na štruktúru izočiar. V okolí rozhrania kvapalín dochádza k fázovému posunutiu, ktorý vyvoláva netriviálna imaginárna zložka riešenia pre amplitúdu  $\psi$ . V asymptotickej analýze [Guba a Revallo, 2012] nie je fázový posun na rozhraní kvapalín prítomný. Tento efekt je teda charakteristický pre problém na konečnej oblasti.

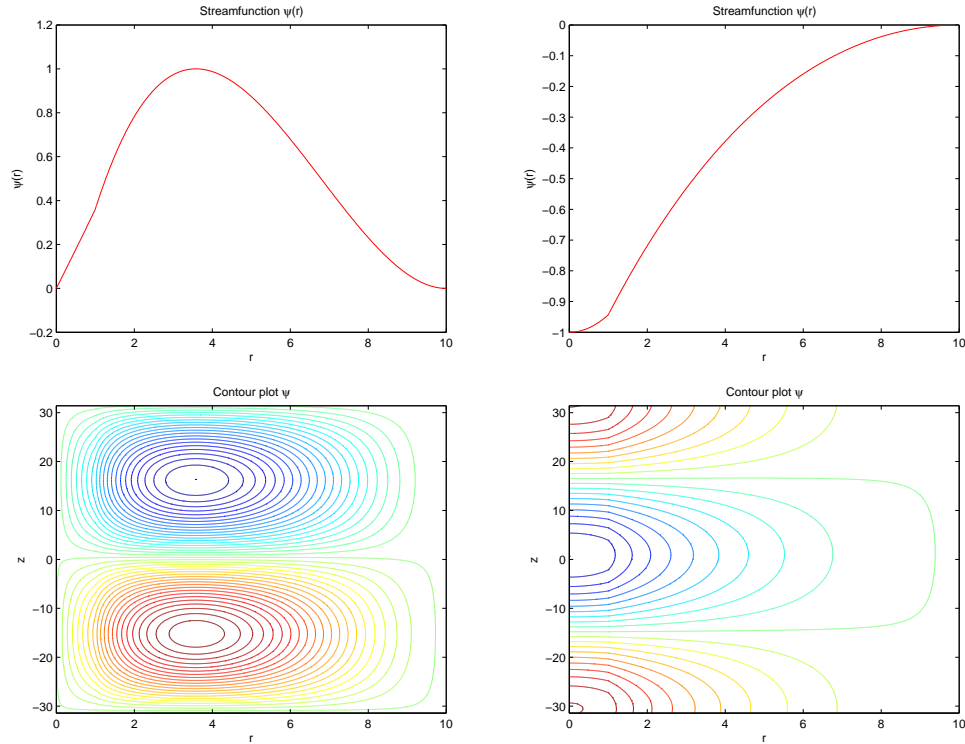
### 2.3.1 Prúdočiary rýchlostného poľa porušeného stavu

Pozorovaný systém pozostáva zo základného a porušeného stavu  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$ . Rýchlostné pole poruchy  $\mathbf{u}$  reprezentujeme prúdovou funkciou  $\hat{\psi}$ . Porušený stav možno taktiež reprezentovať prúdovou funkciou, pričom ide o prúdovú funkciu poruchy upravenú o základný stav. Nech  $\Psi$  je prúdová funkcia základného stavu. Túto možno zrejme zapísať v tvare

$$\Psi(r, z) = - \int_{r_0}^r \tilde{U}(s) ds = \begin{cases} \frac{1}{2}\beta r \left(1 - \frac{1}{3}r^2\right) + K_1, & 0 < r < 1, \\ r \left(1 - \frac{1}{2}r\right) + K_2, & 1 < r < A, \end{cases}$$

kde  $K_1, K_2$  sú koeficienty, vzniknuté pri integrácii základného rýchlostného profilu. Prúdovú funkciu  $\psi_P$  porušeného stavu možno z linearít vyjadriť v tvare  $\psi_P = \Psi + \hat{\psi}$ . Koeficienty  $K_1, K_2$  vo forme  $\Psi$  dourčíme z požiadavky spojitosti prúdočiar na rozhraní kvapalín, teda  $\psi_P|_{1+} = \psi_P|_{1-}$ . Potom zrejme

$$K_2 - K_1 = \frac{\beta}{3} - \frac{1}{2}.$$



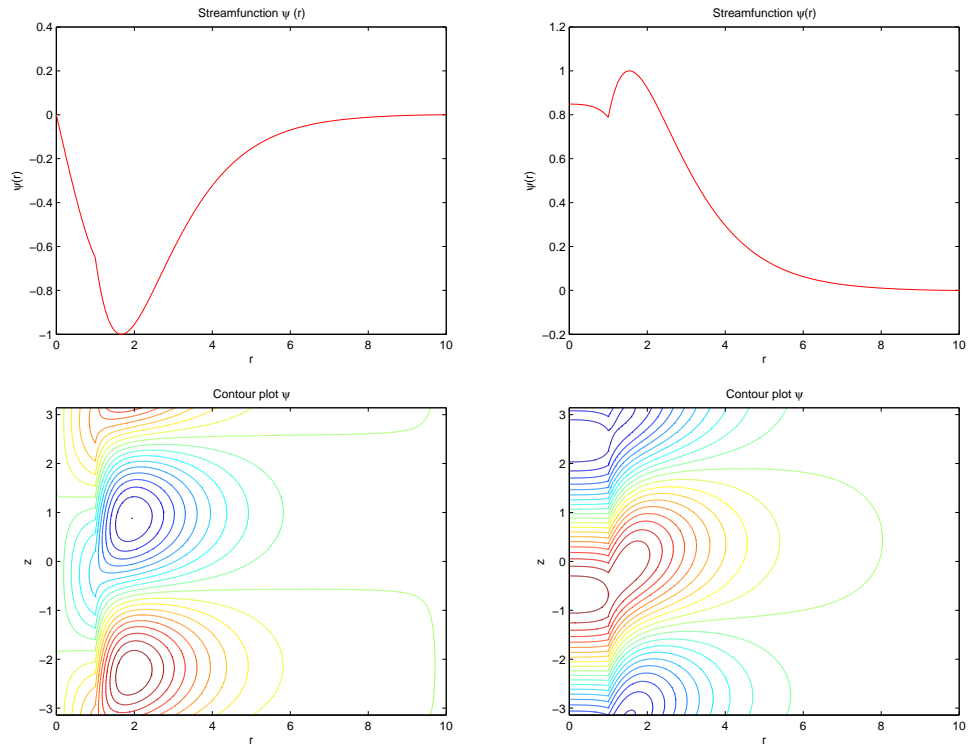
Obr. 2.5: Prúdová funkcia pre symetrické poruchy (hore vľavo), pre antisymetrické poruchy (hore vpravo). Izočiar rýchlostného poľa pre symetrické poruchy (dole vľavo), pre antisymetrické poruchy (dole vpravo) pre parametre  $\alpha = 10^{-1}$ ,  $A = 10^1$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\Gamma = 1$ .

Bez újmy na všeobecnosti môžeme voliť  $K_1 = 0$  a dostávame tak podmienku pre  $K_2$ . Časový vývoj prúdočiar možno nájsť na obrázkoch 2.9 a 2.10 v dodatku. Ako sme ukázali, v nultom ráde je determinovaná stabilita a dochádza k exponenciálnemu poklesu normy porúch. Rýchlosť tohto poklesu je určená veľkosťou  $\sigma_0$ . Najmä pre dlhé vlnové dĺžky je  $|\sigma_0| \ll 1$ , čo implikuje dlhší charakteristický čas potrebný k zániku poruchy.

### 2.3.2 Porovnanie asymptotických výsledkov pre $A < \infty$ a $A \rightarrow \infty$ v Stokesovej limite

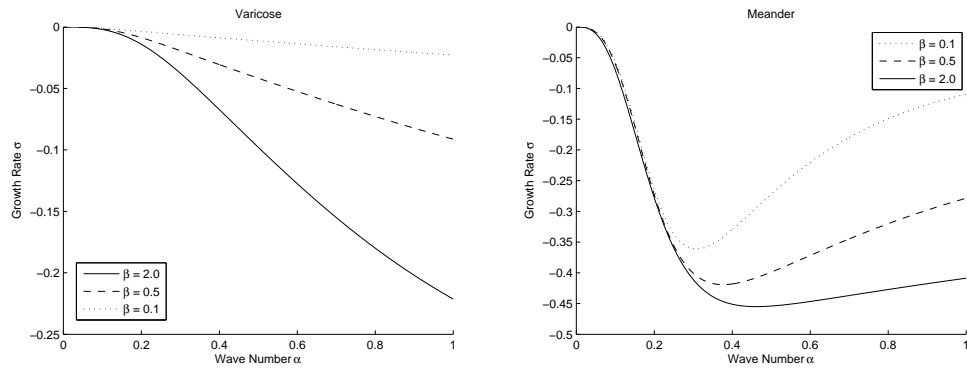
Fázový posun prítomný v dominantných asymptotických formách izočiar rýchlostného poľa nezodpovedá riešeniam v prípade  $A \rightarrow \infty$ . Má teda zmysel zaoberať sa otázkou porovnania týchto dvoch prístupov v prípade regulárnej Stokesovej limity  $R \rightarrow 0$ ,  $\alpha = O(1)$ .

Explicitné formy pre dominantný člen  $\sigma_0$  v režime  $A < \infty$  uvádzame iba pre  $1 \ll A$ . Vo všeobecnosti však budeme pracovať s numerickými riešeniami vlastnohodnotových problémov (2.18) pre danú parametrickú sadu. Explicitné formy (2.1) a (2.2) pre  $A \rightarrow \infty$  poukázali na stabilizačný efekt parametrov  $\beta$  a  $\Gamma$  pri zväčšovaní ich hodnoty. Táto vlastnosť je pozorovateľná aj v režime  $A < \infty$ , viď obrázky 2.7 a 2.8. Pozorovateľná zmena nastáva v štruktúre antisymetrických porúch, kde pre  $\alpha \rightarrow 0$  je  $\sigma_0 \rightarrow 0$ , kým na polonekonečnej oblasti konvergovala hodnota  $\sigma_0$  k hodnote  $1/2$ . Toto

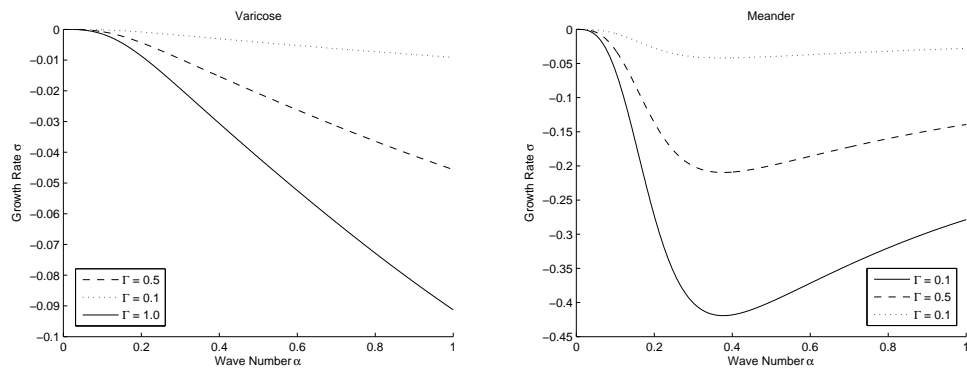


Obr. 2.6: Prúdová funkcia pre symetrické poruchy (hore vľavo), pre antisymetrické poruchy (hore vpravo). Izočiary rýchlostného poľa pre symetrické poruchy (dole vľavo), pre antisymetrické poruchy (dole vpravo) pre parametre  $\alpha = 1$ ,  $A = 10^1$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\Gamma = 1$ .

je priamo pozorovateľné aj z odvodených asymptotických foriem (2.4) a (2.19). Pre odvodenú škálu  $A \sim 2/\alpha$  a  $\alpha \ll 1$  sa však výsledky oboch prístupov zhodujú. Možno teda prirodzene očakávať, že voľba veľkého parametra  $A$  má za následok prítomnosť významného gradientu  $\partial\sigma_0/\partial\alpha$  v oblasti  $\alpha < 1/A$ . V prípade symetrických porúch je diferencia riešení na konečnej a nekonečnej oblasti zanedbateľná.

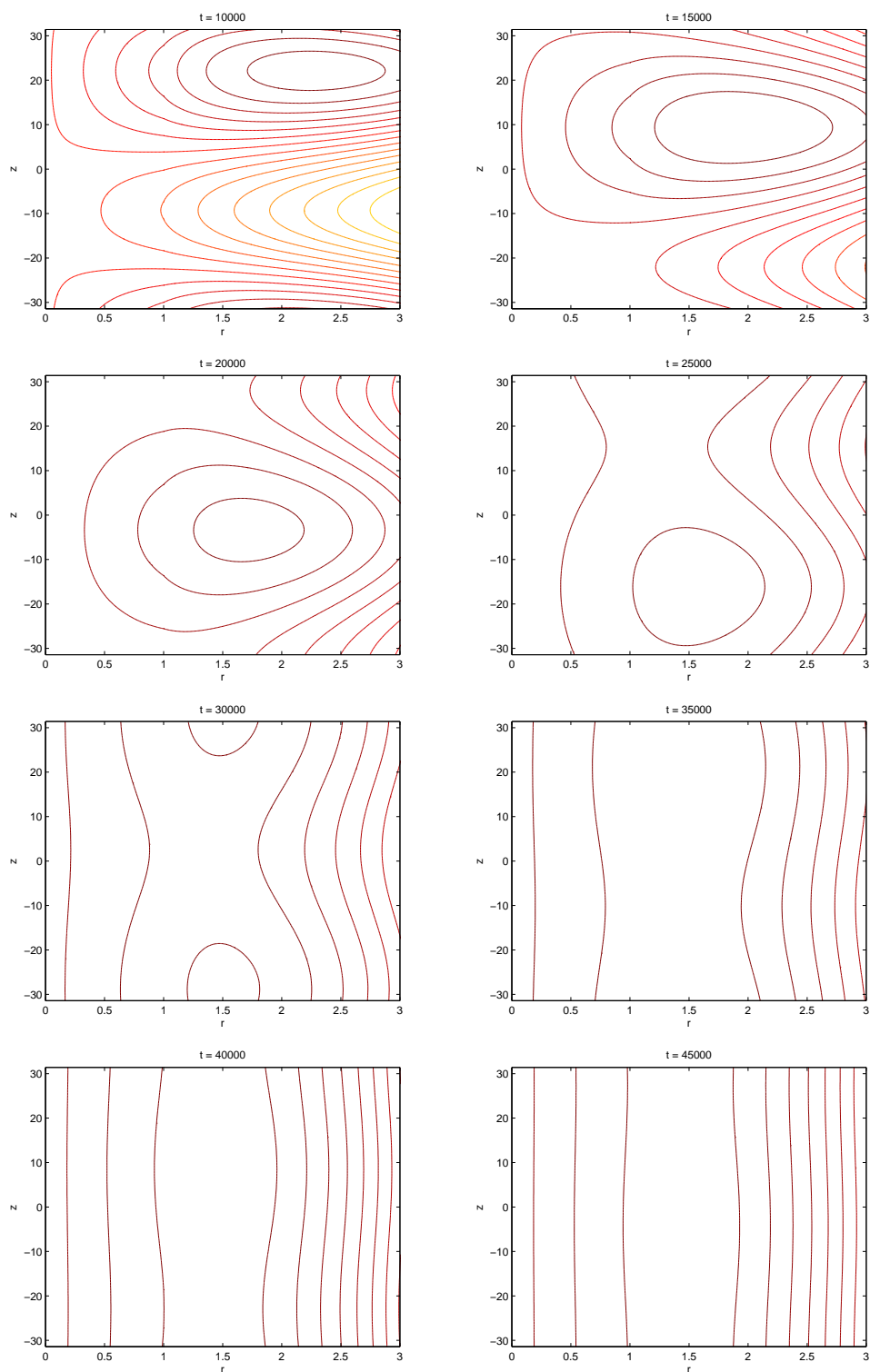


Obr. 2.7: Rýchlosť rastu poruchy v ráde  $O(R^0)$  vs. vlnové číslo. V závislosti od viskózneho pomeru  $\beta$  pre symetrický prípad (vľavo) a antisymetrický (vpravo). Parameter  $\Gamma = 1$  a  $A = 10^1$ .

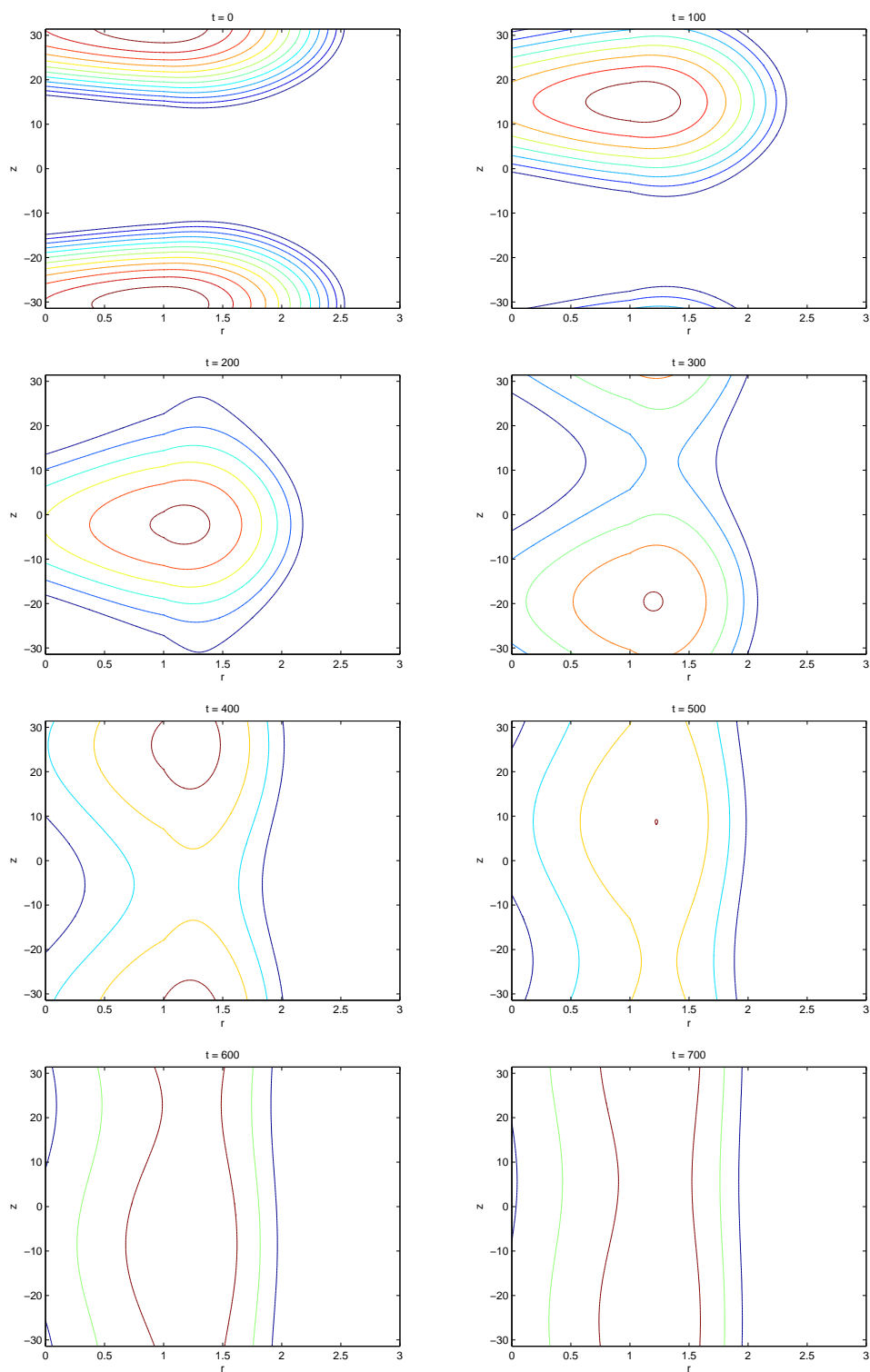


Obr. 2.8: Rýchlosť rastu poruchy v ráde  $O(R^0)$  vs. vlnové číslo. V závislosti od povrchového napätia  $\Gamma$  pre symetrický prípad (vľavo) a antisymetrický (vpravo). Parameter  $\beta = 1/2$  a  $A = 10^1$ .

## 2.4 Dodatok ku kapitole



Obr. 2.9: Časový vývoj prúdočiar porušeného stavu v nultom ráde (varikózne poruchy,  $\alpha = 10^{-1}$ ,  $A = 10^1$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\Gamma = 1$ )



Obr. 2.10: Časový vývoj prúdočiar porušeného stavu v nultom ráde (meandrujúce poruchy,  $\alpha = 10^{-1}$ ,  $A = 10^1$ ,  $\beta = 1/2$ ,  $\Gamma = 1$ )

# Kapitola 3

## Numerická realizácia

V tejto kapitole sa budeme podrobnejšie zaoberať Čebyševovou pseudospektrálnou metódou, ktorú využijeme pri samotnom numerickom riešení stabilitného problému.

Spektrálne a pseudospektrálne metódy nachádzajú svoje široké uplatnenie najmä pri numerickom riešení parciálnych diferenciálnych rovníc [Trefethen, 2000]. Tieto metódy ponúkajú alternatívu ku konečno-diferenčným schémam. Jadro metódy konečných diferencií často využíva polynómy nízkeho rádu pre výpočet aproximácie riešenia príslušného problému. Veľkou výhodou pseudospektrálnej metódy je využitie polynómov vyšších rádov, čo vedie k značnému zníženiu chyby aproximácie pri zachovaní diskretizácie. Práve táto vlastnosť charakterizuje spektrálne metódy ako globálne metódy, kde hodnota derivácie závisí od štruktúry hodnôt na celej mriežke a nie len v okolí uvažovaného bodu. Na druhej strane však treba uvážiť negatíva spojené so zvýšenou presnosťou metódy. Je to najmä väčšia výpočtová náročnosť a zlá podmienenosť vo vyšších rádoch. Pokiaľ pri metóde konečných diferencií uvažujeme riedke matice, v prípade Čebyševovej metódy pracujeme s plnými maticami. Explicitné formy prvkov týchto matíc determinujú vysoké čísla podmienenosti, čo vedie k zlej podmienenosti úlohy najmä pri problémoch vyšších rádov.

Nami uvažovaný vlastnohodnotový problém vychádza z mechaniky tekutín a pseudospektrálnu metódu využijeme na hľadanie vlastného čísla a prislúchajúcej vlastnej funkcie - amplitúdy poruchy. Komplexita a zložitosť tejto úlohy vedie k existencii falošných vlastných čísel, ktoré nevychádzajú z fyzikálnej podstaty problému. Ich prítomnosť bola predmetom intenzívneho skúmania najmä pre veľké hodnoty Reynoldsovho čísla - [Huang a Sloan, 1994], [Orszag, 1971], [Dongarra a kol., 1996]. Najvýznamnejšie chyby aproximácie vznikajú práve kvôli zlej podmienenosti systémov vyššieho rádu. V našej práci preto využijeme techniku zníženia rádu popísanú v článku [Dongarra a kol., 1996].

### 3.1 Nerovnomerné distribúcie interpolačných uzlov

Klasickou úlohou interpolácie polynómom je nájsť polynóm taký, ktorý nadobúda v predpísaných uzloch predpísané hodnoty. Vo všeobecnosti budeme uvažovať set bodov<sup>1</sup>  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Každému takému bodu  $x_j$  prislúcha jedna hodnota  $u_j$ , spolu teda

---

<sup>1</sup>Je dôležité poznamenať, že  $x_j$  sú navzájom rôzne, t.j.  $x_i \neq x_j$  pre  $i \neq j$ . Ďalej budeme predpokladať, že tvoria monotónnu postupnosť  $x_0 < x_1 < \dots$  alebo  $x_0 > x_1 > \dots$ .

vytvárajú postupnosť dvojíc  $(x_j, u_j)$ .

Predpísanú postupnosť  $u_j$  možno považovať za funkčné hodnoty neznámej funkcie  $u$  v príslušných uzloch  $x_j$ , t.j.  $u(x_j) = u_j$ . V tomto zmysle ponúka interpolácia polynómom aproximatívny tvar funkcie  $u$  na intervale  $[x_0, x_n]$ . Podrobný rozbor chýb interpolácie umožní určiť kvalitu aproximácie. Ako ukážeme neskôr, tak kvalita interpolácie je silne závislá na voľbe distribúcie interpolačných uzlov.

Interpolačný polynóm možno vo všeobecnosti zapísať v tvare

$$p_N(x) = \sum_{j=0}^n u_j \ell_j(x), \quad \text{kde} \quad \ell_j(x) = \frac{1}{a_j} \prod_{i \neq j} (x - x_i), \quad a_j = \prod_{i \neq j} (x_j - x_i), \quad (3.1)$$

kde  $a_j$  je normalizačná konštanta definovaná tak, aby platilo  $\ell_j(x_k) = \delta_{jk}$ . Polynómy  $\ell_j$  sa nazývajú aj *kardinálne polynómy*.

Interpolácia polynómom je fundamentálnou zložkou Čebyševovej pseudospektrálnej metódy na riešenie diferenciálnych rovníc. Jedným zo základných problémov, s ktorými sa interpolácia potýka je jej presnosť. Na tejto presnosti sa významnou časťou podieľa distribúcia interpolačných uzlov. Práve riešenie diferenciálnych problémov nám ponúka voľnosť vo voľbe tejto distribúcie. Možnou voľbou je rovnomerná distribúcia

$$x_j = x_0 + jh, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (3.2)$$

Táto je síce prirodzená, avšak z pohľadu presnosti interpolácie, v niektorých prípadoch, veľmi zlá. Známy príklad *Rungeho fenoménu* poukazuje na fakt, že rovnomerné delenie je v niektorých prípadoch neprípustná voľba. Chyba interpolácie v tomto prípade rastie exponenciálne s narastajúcim počtom interpolačných uzlov. V nasledujúcej časti poukážeme na dôležitosť zhlukových distribúcií, ktorých významným reprezentantom sú *Gauss-Lobattove* prípadne *Čebyševove* uzly

$$x_j := \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right). \quad (3.3)$$

Distribúcia Čebyševových uzlov nie je zďaleka jediná výhodná. Jej voľba závisí od riešenia konkrétneho problému a jeho komplexity. Konkrétne v prípade Rungeho fenoménu sú ideálnou voľbou Čebyševove uzly, avšak existuje aj mnoho iných efektívnych volieb. Každú sadu interpolačných uzlov však charakterizuje hustota. Čebyševove uzly sú asymptoticky ( $n \rightarrow \infty$ ) charakterizované hustotou

$$\varrho(x) := \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \quad (3.4)$$

Ukázalo sa, že pre elimináciu Rungeho fenoménu je potrebné voliť sady uzlov tak, aby si asymptoticky zachovali práve hustotu  $\varrho$ . V nasledovnej úvahe odôvodníme túto hustotu a intuitívne vysvetlíme, čo budeme vo všeobecnosti rozumieť distribučnou hustotou  $\mu$ .

Uvažujme rovnomerné delenie (3.2) intervalu  $(-1, 1)$  a skúmame približný počet uzlov, ktoré sa nachádzajú v parciálnom intervale  $I_h(x) := (x, x+h)$  kde  $h > 0$ . Predpokladajme, že každý uzol  $x_j$  sa dá explicitne vyjadriť pomocou  $x_j = \varphi(j)$ , kde  $\varphi$  je  $C^1$  difeomorfné zobrazenie. Budeme uvažovať  $\varphi$  rastúce, avšak možno uvažovať aj



klesajúce, toto však nespôsobuje ujmu na všeobecnosti. Pokiaľ má  $x_j$  patriť do intervalu  $I_h(x)$ , potom nutne

$$j \in (\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(x+h)). \quad (3.5)$$

Počet uzlov<sup>2</sup> na intervale  $I_h(x)$  je potom zrejme rozdielom krajných hodnôt intervalu (3.5). Podľa Lagrangeovej hodnoty o strednej hodnote možno tento rozdiel ekvivalentne vyjadriť ako

$$P(x; h) := \frac{d}{dx} \varphi^{-1}(x) \Big|_{x=\xi} h = n \left( \frac{1}{n} \frac{d}{dx} \varphi^{-1}(x) \Big|_{x=\xi} \right) h = n\mu(\xi)h, \quad (3.6)$$

kde  $\xi \in I_h(x)$  a  $\mu$  je bodová hustota. Je prirodzené interpretovať výraz v zátvorke ako hustotu<sup>3</sup>, nakoľko násobením dĺžkou intervalu  $h$  dostávame približný počet uzlov patriacich do  $I_h(x)$ . Pokiaľ budeme uvažovať limitný prechod  $h \rightarrow 0^+$ , dostaneme upravenú bodovú hustotu o konštantu  $n$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(x; h) := n\mu(x). \quad (3.7)$$

Spôsob, akým sme bodovú hustotu definovali, je značne abstraktný avšak my mu budeme pripisovať väčšiu praktickú, než teoretickú hodnotu. Oblasti, v ktorých hustota nadobúda najnižšie hodnoty, budú oblasti s nízkou koncentráciou interpolačných uzlov a naopak. Z definície (3.4) možno vidieť, že maximálne hodnoty sú nadobúdané na pravom okolí  $-1$  a na ľavom okolí  $+1$ , čo sú práve oblasti s vysokou koncentráciou Čebyševových uzlov.

Všimnime si, že rovnica (3.6) nám ponúka akúsi formu konštitučného zákona medzi hustotou distribúcie a  $\varphi$ . Platí teda

$$\frac{1}{n} \frac{d}{dx} \varphi^{-1}(x) = \mu(x), \quad \varphi^{-1}(x_0) = 0. \quad (3.8)$$

Uvedená rovnosť je diferenciálna rovnica a okrajová podmienka hovorí, že nultý uzol je bod  $x_0$ . Ostatné uzly dopočítame ako  $x_j = \varphi(j)$ . Integrovaním tejto rovnice cez celý interval  $(x_0, x_n)$  dostaneme  $1 = \int_{x_0}^{x_n} \mu(x) dx = (\varphi^{-1}(x_n) - \varphi^{-1}(x_0))/n$ , z čoho priamo vyplýva, že  $\varphi(n) = x_n$ . Diferenciálna rovnica je teda korektná v zmysle definície zobrazenia  $\varphi$ .

Špeciálne pre prípad Čebyševových uzlov pre nájdenie explicitnej formy  $\varphi$  riešime diferenciálnu rovnicu

$$\frac{1}{n} \frac{d}{dx} \varphi^{-1}(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}, \quad \varphi^{-1}(-1) = 0, \quad (3.9)$$

ktorej integráciou dostaneme explicitne

$$x_j = \cos \left[ \left( 1 - \frac{j}{n} \right) \pi \right]. \quad (3.10)$$

Všimnime si, že pokiaľ by sme zmenili okrajovú podmienku  $\varphi^{-1}(1) = 0$ , t.j. za nultý uzol volíme  $x_0 = 1$ , tak dostaneme formu (3.3), ide však len o zmenu monotónie postupnosti interpolačných uzlov.

<sup>2</sup>Počtom uzlov  $P(x; h)$  náležiacich do intervalu  $I_h(x)$  nebudeme rozumieť prirodzené číslo, ale mieru intervalu (3.5).

<sup>3</sup>Od funkcie hustoty  $\mu$  požadujeme, aby  $\int_{-1}^1 \mu(x) dx = 1$ .

### 3.1.1 Chyba interpolácie a konvergencia

Spektrálne metódy sú známe svojou presnosťou aj pri riešení diferenciálnych problémov vyšších rádov. Pri odvodzovaní Čebyševovej pseudospektrálnej metódy budeme vychádzať práve z interpolácie. Tieto metódy sú tiež charakterizované ako globálne, keďže hodnota derivácie v bode priamo závisí na celej interpolačnej sade, nie len v okolí príslušného bodu. Tu možno pozorovať rozdiel medzi pseudospektrálnymi metódami a konečnými diferenciálmi. Práve vďaka tejto vlastnosti možno dosahovať rádovo vyššie presnosti narozdiel od konečnodiferenčných schém. Menšou nevýhodou je iba vyššia výpočtová náročnosť, vzhľadom na štruktúru riešeného systému.

Chyba interpolácie je veličina, ktorá silne závisí na vlastnostiach interpolovanej funkcie a interpolačnej sade. Nech  $x_0, x_1, \dots, x_n, x \in [-1, 1]$  a  $I$  je minimálny interval, pre ktorý  $x_0, x_1, \dots, x_n, x \in I$ . Nech  $u \in C^{n+1}(I)$ . Potom existuje  $\xi \in I$  tak, že

$$E_n(x) := u(x) - p_n(x) = \frac{u^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j), \quad (3.11)$$

kde  $p_n$  je interpolačný polynóm  $p_n(x_j) = u(x_j)$ . Podľa [Babušíková, 1999] možno odhadnúť maximálnu chybu interpolácie

$$|E_n(x)| \leq \frac{\|u^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n |x - x_j|. \quad (3.12)$$

Absolútna odchýlka (3.12) vypovedá o presnosti interpolácie. Vhodnou voľbou distribúcie interpolačných uzlov  $x_j$  možno minimalizovať maximálnu absolútnu odchýlku

$$\|E_n\|_\infty := \max_{x \in [-1, 1]} |E_n(x)|. \quad (3.13)$$

Konštantný prefaktor vystupujúci v (3.12) nemá vplyv na minimalizáciu, preto ho budeme v nasledovnom zamlčovať. Dá sa ukázať, že voľbou Čebyševových interpolačných bodov je  $\|E_n\|_\infty$  minimálne. Za predpokladu, že derivácia  $u^{(n+1)}$  je ohraničená, tak je zároveň zaručená rýchla konvergencia  $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ .

Uvažujme teda polynóm, ktorý je predmetom minimalizácie

$$p(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j), \quad z_j, z \in \mathbb{C}, \quad (3.14)$$

pričom píšeme vo všeobecnosti komplexné premenné. Aplikovaním logaritmickej transformácie dostaneme

$$|p(z)| = \exp \left( \sum_{j=1}^n \ln |z - z_j| \right). \quad (3.15)$$

Definujme potenciál

$$\phi_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln |z - z_j|, \quad (3.16)$$

$\phi_N$  je súčtom harmonických funkcií, je teda sama harmonická a teda vyhovuje Laplaceovej rovnici na  $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ . Z fyzikálneho hľadiska možno  $\phi_N$  interpretovať ako *potenciál*

bodového náboja v  $\{z_j\}$ .

Zreprodukovaním posledných rovností dostávame  $|p(z)| = e^{n\phi_n(z)}$ . Tento vzťah dáva do súvisu normu (veľkosť) polynómu a nami definovaný potenciál  $\phi_n$ . Potenciál možno ďalej rozšíriť do tvaru

$$\phi_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \ln |z - x_j|(x_j - x_{j-1}), \quad (3.17)$$

ktorý možno interpretovať ako integrálny súčet. Zámena premenných  $z_j \mapsto x_j$  je nevyhnutná k odlišeniu integračnej premennej. Hodnota  $(x_j - x_{j-1})^{-1}$  udáva približný počet uzlov  $x_j$  v intervale jednotkovej dĺžky. Samotný podiel  $(x_j - x_{j-1})^{-1}/n$  je diskretným priblížením hustoty  $\varrho$  v bode  $x_j$ , čo vyplýva z nasledovnej aproximácie podľa (3.6)

$$\varrho(x) := \frac{1}{n} \frac{d\varphi^{-1}}{dx} \approx \frac{1}{n} \cdot \frac{j - (j-1)}{x_j - x_{j-1}} = \frac{1}{n(x_j - x_{j-1})}. \quad (3.18)$$

Pripomíname, že  $x_j = \varphi(j)$ . Limitne pre  $n \rightarrow \infty$  máme

$$\phi_n(z) \rightarrow \phi(z) = \int_{-1}^1 \varrho(x) \ln |z - x| dx. \quad (3.19)$$

Podarilo sa nám teda odvodiť asymptotickú aproximáciu  $|p(x)| \sim e^{n\phi(z)}$ , pričom rôznym hustotám distribúcií uzlov zodpovedajú vo všeobecnosti rôzne potenciály. Špeciálne pre hustotu  $\varrho$  definovanú v (3.4) platí

$$n\phi(z) = \frac{n}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln |z - x|}{\sqrt{1 - x^2}} dx = n \ln \left( \frac{|z - \sqrt{z^2 - 1}|}{2} \right). \quad (3.20)$$

Uvažujme  $z \in (-1, 1) \in \mathbb{R}$ , potom jednoduchou algebrou dostaneme

$$\phi(z) = -\ln 2.$$

Potenciál pre Čebyševovskú distribúciu teda asymptoticky dosahuje konštantnú hodnotu. Pre normu polynómu potom máme odhad  $|p(x)| \sim 2^{-n}$ . Cieľom tejto časti nie je poskytnúť rigoróznú teóriu, avšak podať náhľad o konvergencii spektrálnych metód. S vhodne zvolenou interpolačnou sadou možno teda dosahovať pomerne rýchlu geometrickú konvergenciu.

### 3.1.2 Modifikácia Čebyševovských distribúcií

Doteraz sme sa zaoberali výlučne Čebyševovskými distribúciami na oblasti  $(-1, 1)$ . Z praktického hľadiska však ide o veľmi obmedzujúcu požiadavku, definovať problémy práve na tejto oblasti. V praxi sa vyskytuje veľké množstvo problémov, ktoré nie sú kompatibilné s takto vybudovanou teóriou. Preto vzniká potreba dodatočných transformácií, súvisiacich so zmenou súradníc.

Veľa diferenciálnych problémov je definovaných na konečných, avšak nie Čebyševovských oblastiach. Tento problém možno jednoducho vyriešiť zavedením lineárneho zobrazenia medzi súradnicami. Prepisom úlohy do nových súradníc dostávame formulu *pridruženú úlohu*. Spätnou transformáciou dostaneme riešenie pôvodnej úlohy.

Väčšie komplikácie, môžu nastať pri riešení komplexnejších úloh. V týchto prípadoch, je lineárna transformácia nedostačujúca. Problémy pri riešení však môžu nastať aj v prípade, že problém je už definovaný na Čebyševovskej oblasti. Riedka koncentrácia Čebyševových uzlov v centre oblasti je možným zdrojom komplikácií, najmä z hľadiska konvergencie. V praxi sa jedná najmä o diferenciálne úlohy s významnými hodnotami gradientov vo vnútre oblasti riešenia. Vzniká teda otázka, či je možné modifikovať pôvodnú Čebyševovskú diskretizáciu na inú, avšak pri zachovaní spektrálnej presnosti numerického riešenia. Toto je možné formuláciou novej *pridruženej úlohy*, ktorá bude riešená Čebyševovou pseudospektrálnou metódou, pričom na pozadí je riešená pôvodná úloha s predvolenou diskretizáciou.

Predpokladajme, že je daná oblasť  $\Gamma = (-1, 1)$ . Úlohou je previesť ju na rovnakú oblasť  $\lambda(\Gamma) = (-1, 1)$  zobrazením  $\lambda$ , pričom sa zmení distribúcia vnútorných hodnôt. Pokiaľ teda budú hodnoty  $z_j$  rozmiestnené v oblasti  $\Gamma$  s hustotou  $\mu$ , tak v oblasti  $\lambda(\Gamma)$  budú hodnoty  $x_j = \lambda(z_j)$  rozmiestnené s hustotou  $\varrho$ . Za cieľovú hustotu budeme považovať Čebyševovskú hustotu (3.4).

Zdanlivo sa môže jednať o zbytočnú operáciu, keďže ide o prevod oblasti na topologicky tú istú oblasť. Podstatnou zmenou je však zmena vnútornej štruktúry. Táto transformácia potom umožňuje napríklad riešiť diferenciálne úlohy na sieti s rovnomerným delením so spektrálnou presnosťou. Postup riešenia je nasledovný

1. definujeme sieť  $z_j$  s rovnomerným delením na oblasti  $(-1, 1)$
2. transformáciou  $\lambda$  prevedieme  $z_j$  na Čebyševovu sieť  $x_j$  na oblasti  $\lambda(-1, 1)$
3. nájdeme riešenie príslušnej úlohy pseudospektrálnou metódou  $v_j \approx v(x_j)$
4. spätnou transformáciou zistíme hodnoty na rovnomernej sieti  $u_j \approx v(\lambda(z_j))$

Úlohou je teda nájsť transformačný vzťah<sup>4</sup>

$$z := \lambda^{-1}(x), \quad (3.21)$$

tak, že body  $z_j = \lambda^{-1}(x_j)$ , odvodené od Čebyševovských  $x_j$ , majú predpísanú distribučnú hustotu  $\mu = \mu(z)$ . Ďalej budeme predpokladať, že táto hustota je daná. Pripomíname, že hustotu Čebyševovských uzlov označujeme  $\varrho = \varrho(x)$ .

Uvažujme interval  $I_h(z) := (z, z + h)$ . Potom platí  $z_j \in I_h$  práve vtedy, keď  $x_j \in \lambda(I_h)$ . Keďže  $x_j$  je Čebyševovský uzol, tak približný počet uzlov  $P(z; h)$ , ktoré patria do intervalu  $\lambda(I_h)$  je

$$P(z; h) = \frac{n}{\pi} (\cos^{-1}(\lambda(z)) - \cos^{-1}(\lambda(z + h))).$$

Toto možno dvojitým použitím Lagrangeovej vety o strednej hodnote zapísať v tvare

$$P(z; h) = \frac{n}{\pi} \frac{\lambda(z + h) - \lambda(z)}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{n}{\pi \sqrt{1 - \xi^2}} \left. \frac{d\lambda}{dz} \right|_{z=\eta} h,$$

kde  $\xi$  leží medzi  $\lambda(z)$  a  $\lambda(z + h)$ ,  $\eta$  leží medzi  $z$  a  $z + h$ . Limitným prechodom  $h \rightarrow 0^+$  dostaneme hustotu  $\mu$

$$\mu(z) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} P(z; h) = \frac{n\lambda'}{\pi \sqrt{1 - [\lambda(z)]^2}}. \quad (3.22)$$

<sup>4</sup>Požiadavky, ktoré kladieme na zobrazenie  $\lambda$  sú uvedené na konci tejto časti v poznámke **Vlastnosti riešení**.

Všimnime si, že dosadením  $\mu = \mu(z)$  dostaneme diferenciálnu rovnicu pre transformáciu  $\lambda$ . Ide o obyčajnú diferenciálnu rovnicu 1. rádu, preto je nutné dodať okrajovú podmienku pre jednoznačné riešenie. Vo všeobecnosti budeme zadávať podmienku  $\lambda(-1) = -1$ . Uvedená ODR je už v separovanom tvare a možno ju riešiť klasickou metódou integrácie. Prepíšme ju do tvaru

$$\mu(z) = \varrho(\lambda(z))\lambda'(z), \quad z \in (-1, 1), \quad \lambda(-1) = -1, \quad (3.23)$$

z ktorého vidno vzťah, medzi hustotami  $\mu$ ,  $\varrho$  a zobrazením  $\lambda$ . Integráciou tejto rovnice dostaneme

$$\int_{-1}^z \mu(\zeta)d\zeta = \int_{-1}^{\lambda(z)} \varrho(u)du = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos(\lambda(z)). \quad (3.24)$$

Odvodenie vzťahu (3.23) spočívalo v špeciálnej voľbe hustoty  $\varrho$ . Rovnica je však omnoho všeobecnejšia a nájsť transformačný vzťah  $\lambda$  je možné aj v prípade inej hustoty. V našej práci to však nemá praktický význam, nakoľko nemožno použiť Čebyševovskú metódu pri cieľovej neČebyševovskej distribúcii.

**Poznámka 3.1.1.** Často je vhodné riešiť dobre definovanú úlohu s rovnomerným delením. Vtedy vychádzame z predpokladu, že hustota rovnomernej distribúcie je  $\mu(z) = 1/2$ . Dosadením do vzťahu (3.24) ľahko zistíme transformačný vzťah

$$\lambda(z) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-z)\right) =: x.$$

Tento výsledok je nepochybne očakávaný. V rovnomernom delení možno vyjadriť jednotlivé uzly vzťahom  $z_j = -1 + \frac{2j}{n}$ , pre  $1 \leq j \leq n$ . Potom

$$x_j = -\cos\left(\frac{j\pi}{n}\right),$$

čo je iná ekvivalentná definícia Čebyševovských uzlov.

**Vlastnosti riešení.** Pozrime sa bližšie na vlastnosti zobrazenia  $\lambda$ , ktoré je riešením (3.23). Intuitívne je zrejmé, že  $\lambda$  nemôže byť ľubovoľné. Dôležitou vlastnosťou je bijektivnosť a rastúcosť. Pomocou geometrického náhľadu, zobrazenie  $\lambda$  iba premiestni uzly  $z_j$  na pozície Čebyševovských  $x_j$ . Nemení ich poradie a teda monotónia zostáva zachovaná, čo odôvodňuje podmienku rastúcosť. Z rovnice (3.23) priamo vyplýva, že  $\lambda' > 0$ , za predpokladu, že hustoty sú kladné  $\varrho, \mu > 0$ . To, že hustoty nemôžu byť záporné vyplýva priamo z ich interpretácie.

Bijektivnosť je taktiež dôležitá vlastnosť, pričom  $\lambda : (-1, 1) \mapsto (-1, 1)$ . Treba si však uvedomiť, že požadujeme  $\lambda(\pm 1) = \pm 1$ , i keď okrajová podmienka je jediná  $\lambda(-1) = -1$ . To, že platí  $\lambda(1) = 1$  overíme jednoducho integráciou rovnice (3.23) cez oblasť  $(-1, 1)$ , potom

$$\underbrace{\int_{-1}^1 \mu(z)dz}_{=1} = \int_{\lambda(-1)}^{\lambda(1)} \varrho(u)du = \int_{-1}^{\lambda(1)} \varrho(u)du. \quad (3.25)$$

Keďže  $\varrho$  je kladnou normovanou funkciou hustoty, hodnota integrálu bude rovná 1, len ak  $\lambda(1) = 1$ . Tieto vlastnosti (monotónia, pevné body  $\pm 1$ ) zaručujú bijektivnosť zobrazenia  $\lambda$ .

### 3.2 Čebyševove diferenčné matice

V tejto časti odvodíme všeobecný tvar Čebyševovej matice. Uvažujme set  $n + 1$  Čebyševových interpolačných uzlov

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (3.26)$$

pričom  $x_0 = 1$  a  $x_n = -1$ . Ku každému bodu  $x_j$  prislúcha práve jedna hodnota  $u_j$ , a teda spolu vytvárajú postupnosť dvojíc  $(x_j, u_j)$ . Tieto budeme v nasledovnom interpolovať polynómom  $p_n$  stupňa nanaajvyš  $n$ , keďže interpolačných uzlov je práve  $n + 1$ .

Naším cieľom je nájsť tvar derivácie polynómu  $p_n$ , ktorý je tvorený súčtom kardinálnych polynómov  $\ell_j$ . Tieto budeme v nasledovnom zapisovať s využitím Čebyševových polynómov. Ako sa ukáže neskôr, tento prepis značne zjednoduší výpočty vzhľadom na špeciálnu voľbu uzlov (3.26).

Uvažujme všeobecnú situáciu, nech  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sú jednoduchými koreňmi polynómu  $\eta_{n+1}$ , t.j. platí  $\eta_{n+1}(x_j) = 0$ . Podľa Taylorovho rozvoja tohto polynómu so stredom  $x_j$  platí

$$\eta_{n+1}(x) = \eta_{n+1}(x_j) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\eta_{n+1}^{(k)}(x_j)}{k!} (x - x_j)^k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\eta_{n+1}^{(k)}(x_j)}{k!} (x - x_j)^k. \quad (3.27)$$

Platnosť poslednej rovnosti je zrejmá, nakoľko  $x_j$  je koreňom  $\eta_{n+1}$ . Odtiaľ jednoduchou úpravou vyvodíme

$$\frac{\eta_{n+1}(x)}{\eta_{n+1}'(x_j)(x - x_j)} = 1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\eta_{n+1}^{(k)}(x_j)}{k! \eta_{n+1}'(x_j)} (x - x_j)^{k-1}. \quad (3.28)$$

Táto úprava je možná, keďže  $\eta_{n+1}(x_j) \neq 0$  z predpokladu o koreňoch  $x_j$ . Pre  $x = x_i \neq x_j$  je výraz na ľavej strane identicky rovný nule, pretože  $x_i$  je koreňom  $\eta_{n+1}$ . Pre  $x = x_j$  je súčet na pravej strane identicky rovný nule. Keďže súčet je nulový, tak výraz na ľavej strane je v  $x = x_j$  rovný 1.

Zhrnutím predchádzajúcich výsledkov sme vyvodili, že výraz (3.28) má vlastnosti kardinálneho polynómu. V nasledovnom teda budeme používať formu

$$\ell_j(x) = \frac{\eta_{n+1}(x)}{\eta_{n+1}'(x_j)(x - x_j)}. \quad (3.29)$$

Z teórie je známe, že uzly  $x_1, \dots, x_{n-1}$  sú koreňmi Čebyševových polynómov 2. typu, t.j. platí  $U_{n-1}(x_j) = 0$ . Okrem toho, potrebujeme ešte zohľadniť krajné body  $x_0 = 1$  a  $x_n = -1$ . Definujeme preto nový polynóm  $\tilde{U}(x) = (1 - x^2)U_{n-1}(x)$ . Koreňmi tohto polynómu sú už zrejme všetky Čebyševove uzly  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Pomocou vzťahu (3.29) dostávame

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n u_j \ell_j(x) = \sum_{j=0}^n \frac{u_j \tilde{U}(x)}{(x - x_j) \tilde{U}'(x_j)}. \quad (3.30)$$

Pre deriváciu  $\tilde{U}'(x_j)$  platí  $\tilde{U}'(x_j) = -2x_j U_{n-1}(x_j) + (1-x_j^2)U'_{n-1}(x_j) = (1-x_j^2)U'_{n-1}(x_j)$ . Tento výsledok sa dá ďalej zjednodušiť použitím vzťahov<sup>5</sup> medzi Čebyševovými polynómami 1. a 2. rádu na tvar  $\tilde{U}'(x_j) = -nT_n(x_j) = n(-1)^{1+j}$ . Všimnime si, že uvedenú rovnosť môžeme použiť len v prípade, že  $x \neq \pm 1$ . Keďže  $x = \pm 1$  nie sú koreňmi  $U_{n-1}$ , potom  $U_{n-1}(\pm 1) \neq 0$ . Potom máme  $\tilde{U}'(\pm 1) = \mp 2U_{n-1}(\pm 1)$ . So zohľadnením  $U_{n-1}(+1) = n$  a  $U_{n-1}(-1) = (-1)^{n-1}n$  tak dostávame

$$\tilde{U}'(x_j) = \begin{cases} (-1)^{1+j}n, & j = 1, 2, \dots, n-1 \\ -2n, & j = 0 \\ 2(-1)^{1+n}n, & j = n \end{cases} \quad (3.31)$$

Vzťah (3.31) možno zapísať kompaktne v tvare

$$\tilde{U}'(x_j) = (-1)^{1+j}\gamma_j n, \quad \text{kde} \quad \gamma_j = \begin{cases} 1, & j = 1, 2, \dots, n-1 \\ 2, & j = 0, n \end{cases}. \quad (3.32)$$

Podľa predchádzajúcich rovností možno pokračovať v úpravách výrazu (3.30)

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^{1+j} \frac{u_j(1-x^2)U_{n-1}(x)}{(x-x_j)\gamma_j n} = \sum_{j=0}^n (-1)^{1+j} \frac{u_j(1-x^2)T'_n(x)}{\gamma_j(x-x_j)n^2}. \quad (3.33)$$

Tento tvar interpolačného polynómu už nebudeme ďalej upravovať a budeme z neho vychádzať pri výpočte derivácie. Ako vidno, príslušné kardinálne polynómy  $\ell_j$  sú vyjadrené pomocou Čebyševovho polynómu 1. typu  $T_n$ . Toto vyjadrenie realizujeme, aby bolo možné využiť už odvodené vzťahy vyplývajúce z teórie  $T_n$  polynómov.

V nasledovných krokoch sa budeme zaoberať vyčíslením prvej derivácie polynómu (3.33) v uzloch (3.26). Počítajme teda deriváciu všeobecne pre  $x \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} p'_n(x) &= \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{1+j}u_j}{\gamma_j n^2} \left[ \frac{(1-x^2)T''_n(x)}{x-x_j} - \frac{[2x(x-x_j) + (1-x^2)]T'_n(x)}{(x-x_j)^2} \right] \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j u_j \frac{[xT'_n(x) + n^2 T_n(x)](x-x_j) + (1-x^2)T'_n(x)}{\gamma_j n^2 (x-x_j)^2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Posledná úprava využíva, že  $T_n$  je riešením diferenciálnej rovnice  $(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2 T_n(x) = 0$ . Špeciálne pre uzol  $x = x_k$  dostávame  $w_k := p'_n(x_k)$

$$w_k = v_k [\mathbf{D}_n^{(1)}]_{k,k} + \sum_{j \neq k} u_j \underbrace{\frac{(-1)^{k+j}}{\gamma_j(x_k-x_j)}}_{:= [\mathbf{D}_n^{(1)}]_{k,j}} = [\mathbf{D}_n^{(1)}]_{k,:} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.35)$$

V súčte pre prípad  $j = k$  nastáva singularita a preto treba tento riešiť zvlášť. Všimnime si, že deriváciu  $w_k$  možno zapísať ako skalárny súčin, kde  $[\mathbf{D}_n^{(1)}]_{k,:}$  je  $k$ -ty riadok

<sup>5</sup>Platia nasledovné identity

$$U'_{n-1}(x) = \frac{nT_n(x) - xU_{n-1}(x)}{x^2 - 1}, \quad T'_n(x) = nU_{n-1}(x)$$

Čebyševovej matice  $\mathbf{D}_n^{(1)}$ . Dolný index určuje rozmer matice a horný index zvyrazňuje rád derivácie.

Hľadanie prvku  $D_{kk}$  treba rozlíšiť na tri prípady  $[\mathbf{D}_n^{(1)}]_{0,0}$ ,  $[\mathbf{D}_n^{(1)}]_{k,k}$  a  $[\mathbf{D}_n^{(1)}]_{n,n}$ . Prípady  $[\mathbf{D}_n^{(1)}]_{0,0}$  vedie na výpočet limity

$$[\mathbf{D}_n^{(1)}]_{0,0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{n^2 T_n(x) - T_n'(x)}{2n^2(x-1)} = \frac{1+2n^2}{6},$$

ktorej správnosť môžeme overiť l'Hospitalovým pravidlom a využitím vzťahov o  $T_n$  z predchádzajúceho odseku. Analogicky výpočtom limity pre prípad  $[\mathbf{D}_n^{(1)}]_{n,n}$  možno zistiť  $[\mathbf{D}_n^{(1)}]_{n,n} = -[\mathbf{D}_n^{(1)}]_{0,0}$ . Ďalšie prvky  $[\mathbf{D}_n^{(1)}]_{k,j}$  možno odvodiť elementárnou algebrou zo vzťahu (3.34). Všeobecne teda platí

$$\begin{cases} [\mathbf{D}_n^{(1)}]_{j,j} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, & j = 1, \dots, n-1, \\ [\mathbf{D}_n^{(1)}]_{k,j} = \frac{\gamma_k (-1)^{k+j}}{\gamma_j (x_k - x_j)}, & k \neq j, \\ [\mathbf{D}_n^{(1)}]_{0,0} = \frac{1+2n^2}{6}, & [\mathbf{D}_n^{(1)}]_{n,n} = -\frac{1+2n^2}{6}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Všimnime si, že krajné koeficienty  $D_{00}$  a  $D_{nn}$  rastú kvadraticky s  $n$ . Koeficienty  $[\mathbf{D}_n^{(1)}]_{k,j}$  možno odhadnúť nasledovne

$$\left| [\mathbf{D}_n^{(1)}]_{k,j} \right| \leq 2 \left| \frac{1}{x_k - x_j} \right| \leq \frac{2}{|x_0 - x_1|} = \frac{2}{|1 - \cos(\pi/n)|}.$$

Pre výraz  $1 - \cos(\pi/n)$  platí odhad

$$1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) > \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 - \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^4.$$

Táto nerovnosť vyplýva z analýzy zvyšku Taylorovho rozvoja funkcie  $1 - \cos(\xi)$  na okolí  $\xi = 0$ . S využitím tejto nerovnosti dostávame asymptoticky pre  $n \rightarrow \infty$

$$\left| [\mathbf{D}_n^{(1)}]_{k,j} \right| < \frac{2}{\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 - \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{n}\right)^4} \sim \frac{4n^2}{\pi^2}.$$

Z tejto formy vidíme, že aj vnútorné koeficienty možno ohraničiť s kvadratickou mierou rastu  $O(n^2)$ .

Analogicky postupujeme aj pri analýze diagonálnych prvkov

$$\left| [\mathbf{D}_n^{(1)}]_{j,j} \right| = \frac{|x_j|}{2(1-x_j^2)} = \frac{\left| \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right) \right|}{2 \sin^2\left(\frac{j\pi}{n}\right)} \leq \frac{\left| \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right|}{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} < \frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Podobne ako v predchádzajúcom prípade odhadneme hodnotu menovateľa, tentokrát však použijeme odhad

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) > \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{n}\right)^4,$$

potom

$$\left| [\mathbf{D}_n^{(1)}]_{j,j} \right| < \frac{1}{2 \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{n}\right)^4} \sim \frac{n^2}{2\pi^2}.$$

Mieru rastu diagonálnych prvkov možno taktiež ohraničiť kvadraticky i keď je zhruba osemnásobne nižšia ako pri vnútorných mimodiagonálnych prvkoch. Pre všetky prvky je však rast kvadratický v  $n$ . Pri uvažovaní matíc vyššieho rádu sa táto miera znásobuje.



### 3.2.1 Vlastnosti Čebyševovej metódy

Čebyševova metóda má široké aplikácie v stacionárnych, ako aj v časovo závislých problémoch. Presnosť numerického riešenia sa dosahuje už pri nízkych hodnotách  $n$ , t.j. pri riedkej diskretizácii. Významné uplatnenie dosahuje pri riešení stabilitných problémov, kde je nutné pozorovať globálnu štruktúru spektra príslušného vlastnohodnotového problému. Pri týchto úlohách sa však často rieši diferenciálny problém rádu obvykle vyššieho než 2. Odvodené matice (3.36) metódy sú však zle podmienené najmä vo vyšších uvažovaných rádoch. Číslo podmienenosti pre  $\mathbf{D}_n^{(2)}$  je rádovo  $n^4$ . Zjemňovanie diskretizácie tak môže viesť k neuspokojivým výsledkom. K predídaniu problémom bol navrhnutý postup v článku [Orszag, 1980]. Spočíva v konštrukcii vhodného maticového prefaktora, ktorý znižuje hodnotu čísla podmienenosti. V našej práci budeme analyzovať vplyv zmeny distribúcie interpolačnej sady na konvergenciu. V predmetnom stabilitnom probléme tejto práce sa nám podarí znížiť diferenciálny rád systému, čo nám umožňuje riešiť lepšie podmienený systém.

## 3.3 Numerické riešenie vlastnohodnotového problému

Pôvodný model tak, ako bol skonštruovaný v prvej kapitole uvažoval separátne riešenia  $\psi_i$  a  $\psi_o$  vo vnútornej, a vonkajšej oblasti. Z dôvodu prehľadnosti zápisov a indexácie budeme uvažovať nasledovnú zmenu notácie

$$\psi_i(r) = \tilde{\psi}(r), \quad r \in (0, 1),$$

$$\psi_o(r) = \tilde{\phi}(r), \quad r \in (1, A).$$

Pôvodný systém rovníc možno teda prostredníctvom novej notácie zapísať v tvare

$$\beta^{-1}(D^2 - \alpha^2)^2 \tilde{\psi} = i\alpha R[(\tilde{U} - c)(D^2 - \alpha^2)\tilde{\psi} - \beta\tilde{\psi}], \quad r \in (0, 1), \quad (3.37)$$

$$(D^2 - \alpha^2)^2 \tilde{\phi} = i\alpha R[(\tilde{U} - c)(D^2 - \alpha^2)\tilde{\phi} - k\tilde{\phi}], \quad r \in (1, A), \quad (3.38)$$

spolu s príslušnými hraničnými podmienkami a podmienkami na rozhraní medzi dvoma kvapalinami. Pri prepise sme využili tvar základného rýchlostného profilu  $\tilde{U}$ , ktorý je nanajvyš parabolický a jeho druhé derivácie sú preto konštantné vzhľadom na jedinú premennú  $r$ , t.j.

$$\tilde{U}'' = \beta, \quad r \in (0, 1), \quad \tilde{U}'' = k, \quad r \in (1, A). \quad (3.39)$$

Rovnice budeme riešiť separátne Čebyševovou metódou. Keďže táto metóda bola vybudovaná vzhľadom na oblasť  $(-1, 1)$ , je nutné zaviesť zobrazenia, ktoré prevádzajú oblasti  $(0, 1)$  a  $(1, A)$  na interval  $(-1, 1)$ . Zavedme teda nové premenné  $r_i, r_o \in (-1, 1)$  a funkcie  $\tilde{\psi}(r) = \psi(r_i)$  a  $\tilde{\phi}(r) = \phi(r_o)$ , kde medzi jednotlivými premennými platia prevodné vzťahy

$$r_i(r) = 2r - 1, \quad r_o(r) = 2\gamma(r - 1) - 1, \quad \gamma := \frac{1}{A - 1}. \quad (3.40)$$

Škálovací faktor  $\gamma$  obsahuje informáciu o polohe pevnej hranice a škáluje len vonkajšie riešenie. Rovnice (3.37) a (3.38) sa podľa pravidla o derivovaní zloženej funkcie

modifikujú na

$$\beta^{-1}(4D^2 - \alpha^2)^2\psi = i\alpha R [(U - c)(4D^2 - \alpha^2)\psi - \beta\psi], \quad (3.41)$$

$$(4\gamma^2 D^2 - \alpha^2)^2 \phi = i\alpha R [(U - c)(4\gamma^2 D^2 - \alpha^2)\phi - k\phi]. \quad (3.42)$$

Všimnime si, že rovnaké prevodné vzťahy musia platiť aj pre  $\tilde{U}$ . Preto sme definovali  $U(r_i) := \tilde{U}(r)$  pre  $r \in (0, 1)$  a  $U(r_o) := \tilde{U}(r)$  pre  $r \in (1, A)$ .

Pre zjednodušenie a lepší náhľad na štruktúru systému definujeme operátory  $D_1^2 := 4D^2 - \alpha^2$  a  $D_2^2 := 4\gamma^2 D^2 - \alpha^2$ . Tieto operátory zohľadňujú použité transformácie a oba sú rádu 2. Dostaneme tak kompaktný zápis

$$\begin{aligned} \beta^{-1}D_1^4\psi &= i\alpha R [(U - c)D_1^2\psi - \beta\psi], \\ D_2^4\phi &= i\alpha R [(U - c)D_2^2\phi - k\phi], \end{aligned} \quad (3.43)$$

kde oblasťou riešenia je už Čebyševovská oblasť  $(-1, 1)$  pre obe rovnice. I keď ide o identické oblasti, vnútorne sa jedná o riešenie dvoch rôznych úloh, preto budeme ku každej oblasti pristupovať zvlášť.

**Poznámka 3.3.1.** Je potrebné uvedomiť si, že pôvodne bolo rozhranie na  $r = 1$ . Po prevedení operácií uvedených vyššie sa podľa rovnakých pravidiel transformujú aj príslušné limity, ktoré definujú problém v okolí rozhrania. Limita  $r \rightarrow 1^+$  zodpovedá limite  $r_o \rightarrow -1$ , podobne limita  $r \rightarrow 1^-$  je  $r_i \rightarrow 1$ . Tieto výsledky využijeme ďalej pri reformulácii okrajových podmienok.

Ďalej definujeme pomocné zobrazenia  $F := D_1^2\psi$ ,  $G := D_2^2\phi$ , ktoré nám umožnia znížiť rád diferenciálnych rovníc v systéme. Ak prepíšeme systém (3.43) pomocou takto zvolených funkcií, dostaneme

$$(\beta^{-1}D_1^2 - i\alpha RU)F + i\alpha\beta R\psi = -i\alpha cRF, \quad (3.44)$$

$$(D_2^2 - i\alpha RU)G + i\alpha kR\phi = -i\alpha cRG, \quad (3.45)$$

$$D_1^2\psi - F = 0, \quad (3.46)$$

$$D_2^2\phi - G = 0. \quad (3.47)$$

Z pôvodného systému dvoch rovníc 4. rádu sme dostali systém štyroch rovníc 2. rádu. V zmysle Čebyševovej metódy by riešenie systému rovníc 4. rádu znamenalo nižšiu časovú náročnosť, avšak značné numerické chyby vzhľadom na podmienenosť Čebyševovej matice. Toto je primárna motivácia pre implementáciu Čebyševovej metódy na systém rovníc dvojnásobného počtu, avšak nižšieho rádu.

### 3.3.1 Okrajové podmienky pre symetrické perturbácie

K úplnej reformulácii modelu v nových premenných je potrebné ešte zohľadniť tvar okrajových podmienok. Celkový počet podmienok je v oboch prípadoch (symetrické i antisymetrické perturbácie) osem, keďže ide o systém štyroch rovníc 2. rádu.

Podmienky zohľadňujúce symetriu v prípade symetrických perturbácií mali v pôvodnej formulácii tvar

$$\psi|_0 = D^2\psi|_0 = 0, \quad (3.48)$$

$$\psi|_A = D\psi|_A = 0, \quad (3.49)$$

$$\psi|_{1-}^{1+} = 0, \quad (3.50)$$

$$D\psi + \frac{\psi}{c}\tilde{U}' \Big|_{1-}^{1+} = 0, \quad (3.51)$$

$$\rho\nu(D^2 + \alpha^2)\psi + \rho\nu\frac{\psi}{c}\tilde{U}'' \Big|_{1-}^{1+} = 0, \quad (3.52)$$

$$\rho\nu(D^2 - 3\alpha^2)D\psi \Big|_{1-}^{1+} = -\frac{i\Gamma\alpha^3\psi}{c} - i\alpha R \left( cD\psi + \tilde{U}'\psi \right) \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \Big|_{1+}. \quad (3.53)$$

Po aplikácii rovnakých transformácií ako sme použili pre rovnice (3.37) a (3.38) dostaneme vyjadrenie pomocou<sup>6</sup>  $\psi, \phi$ . Všetky uvedené podmienky sa však vzťahujú len na tieto dve funkcie. V systéme však uvažujeme pomocné funkcie  $F, G$ , ktoré je potrebné do okrajových podmienok zahrnúť taktiež. Na prvý pohľad nemusí byť jasné, prečo nie je dostačujúci tvar podmienok bez foriem obsahujúcich  $F, G$ . Táto potreba vychádza predovšetkým z dôvodov numerickej stability riešení. Pri numerických simuláciách sa ukázalo, že použitie okrajových podmienok ako boli zadané vedie k neuspokojivým výsledkom. Ide najmä o vysokú citlivosť spektra na vstupný diskretizačný parameter  $n$ . Nakoľko ide o netriviálny problém, zodpovedať otázku stability nie je jednoduché najmä pokiaľ metóda neposkytuje konvergentné riešenia.

Nie všetky podmienky je možné preformulovať. Je prirodzené postupovať podobne ako pri redukcii rádu rovníc t.j. znižovať aj rád podmienok<sup>7</sup>. Keďže okrajové podmienky charakterizujú riešenie na hranici oblasti, pri numerickom riešení je preto potrebné implementovať okrajové prvky Čebyševskej matice. Tieto nadobúdajú extrémne hodnoty v porovnaní s ostatnými<sup>8</sup>, čo prispieva k zlej podmienenosti systému. Zamerali sme sa hlavne na (3.48), (3.52), (3.53), ktoré obsahujú derivácie vyššieho rádu. Z definície môžeme priamo vyčísliť  $F|_{-1} = 4D^2\psi|_{-1} - \alpha^2\psi|_{-1} = 0$ . Okrajovú podmienku  $D^2\psi|_{-1} = 0$  je možné teda nahradiť podmienkou  $F|_{-1} = 0$ , vzhľadom na väzby medzi  $\psi$  a  $F$  v definovanom zmysle.

Okrajovú podmienku (3.49) na vonkajšej oblasti ponecháme v pôvodnom tvare, iba ju prepíšeme pomocou  $\phi$  t.j.  $\phi|_1 = D\phi|_1 = 0$ .

Podobne postupujeme aj v prípade podmienok na rozhraní, kde rozlišujeme limitné procesy tak, ako bolo popísané v poznámke 3.3.1. Podmienka (3.53) v sebe však obsahuje nelineárnu závislosť na vlastnom čísle  $c$ . Túto nelinearitu je potreba odstrániť, nakoľko numerická metóda si vyžaduje k riešeniu lineárnu vlastnohodnotovú úlohu. Využijeme pri tom tvar podmienky (3.51). Túto možno v kombinácii s podmienkou

<sup>6</sup>Je potrebné rozlišovať  $\psi$  definované v pôvodnej formulácii a dvojicu  $(\psi, \phi)$  definovanú pre numerickú implementáciu.

<sup>7</sup>Rádom podmienky budeme rozumieť rád najvyššej derivácie, ktorá je obsiahnutá v okrajovej podmienke.

<sup>8</sup>Možné vidieť z explicitných vyjadrení prvkov Čebyševovej matice.

kontinuity (3.50) zapísať v tvare

$$\phi|_{-1} = \frac{c}{1/m - \beta} (2D\psi|_1 - 2\gamma D\phi|_{-1}). \quad (3.54)$$

Pozrime sa bližšie na podmienku (3.53). Pri úprave ľavej strany využijeme rovnosť operátorov  $(D^2 - 3\alpha^2)D \equiv D(D^2 - 3\alpha^2)$ . Po úprave teda

$$\frac{4\alpha^2}{m\beta} D\psi \Big|_1 - 4\gamma\alpha^2 D\phi|_{-1} - \frac{2}{m\beta} DF \Big|_1 + 2\gamma DG|_{-1}. \quad (3.55)$$

Pravú stranu upravíme s využitím (3.54) do tvaru, ktorý je lineárny vo vlastnom čísle  $c$

$$\frac{2i\gamma\Gamma\alpha^3}{1/m - \beta} D\phi|_{-1} - \frac{2i\Gamma\alpha^3}{1/m - \beta} D\psi|_1 - 2i\alpha c R\gamma \left(1 - \frac{1}{m}\right) D\phi|_{-1} - \frac{i\alpha R}{m} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \phi|_{-1}.$$

Na záver, podmienku upravíme do tvaru, kde na pravej strane osamostatníme výraz obsahujúci vlastné číslo  $c$

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\alpha^2}{m\beta} + \frac{2i\Gamma\alpha^3}{1/m - \beta}\right) D\psi \Big|_1 - \left(4\gamma\alpha^2 + \frac{2i\gamma\Gamma\alpha^3}{1/m - \beta}\right) D\phi \Big|_{-1} - \frac{2}{m\beta} DF \Big|_1 + 2\gamma DG|_{-1} + \\ + \frac{i\alpha R}{m} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \phi \Big|_{-1} = -2i\alpha c R\gamma \left(1 - \frac{1}{m}\right) D\phi|_{-1} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Podmienky spolu

$$\psi|_{-1} = F|_{-1} = 0 \quad (3.57)$$

$$\phi|_1 = D\phi|_1 = 0 \quad (3.58)$$

$$\psi|_1 - \phi|_{-1} = 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{1}{m}\phi|_{-1} - \beta\psi|_1 = c(2D\psi|_1 - 2\gamma D\phi|_{-1}) \quad (3.60)$$

$$m\beta k\phi|_{-1} - \beta\psi|_1 = c(2\alpha^2\psi|_1 - 2m\alpha^2\beta\phi|_{-1} + F|_1 - m\beta G|_{-1}) \quad (3.61)$$

spolu s podmienkou (3.56), ktorú už znova neuvádzame. Môžeme si všimnúť, že najvyšší rád podmienky je 1. Zníženie rádu celého systému o polovicu vedie k stabilným numerickým výsledkom narozdiel od pôvodnej formulácie.

### 3.3.2 Okrajové podmienky pre antisymetrické perturbácie

V meandrujúcom prípade zostávajú v platnosti podmienky (3.49)-(3.53). Postup ich transformácie je rovnaký ako v prípade varikózných perturbácií a nebudeme ho preto znova uvádzať. Rozdiel je iba v podmienke (3.48), kde požadujeme

$$D\psi|_0 = D^3\psi|_0 = 0. \quad (3.62)$$

Homogenita  $D\psi|_0 = 0$  je 1. rádu, po prepise dostaneme podmienku  $2D\psi|_{-1} = 0$ , ktorú splníme ako  $D\psi|_{-1} = 0$ .

Podmienka  $D^3\psi|_0 = 0$  je však až 3. rádu a v numerickej procedúre môže predstavovať komplikáciu. Keďže derivácia je lineárny operátor, môžeme použiť nasledovnú úpravu

$$D^3\psi = D(D^2\psi) = D(D^2 - \alpha^2)\psi + \alpha^2 D\psi.$$

Po prevode na Čebyševovskú oblasť dostaneme podmienku

$$0 = 8D^3\psi|_{-1} = 2D(4D^2 - \alpha^2)\psi|_{-1} + 2\alpha^2 D\psi|_{-1},$$

kde  $(4D^2 - \alpha^2)\psi =: F$ . Potom zrejme  $DF|_{-1} + \alpha^2 D\psi|_{-1} = 0$ . Pokiaľ však  $D\psi|_{-1} = 0$  bude splnené, tak stačí požadovať  $DF|_{-1} = 0$ . Netreba teda uvažovať homogenitu celého súčtu.

$$D\psi|_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D\psi|_{-1} = 0, \quad (3.63)$$

$$D^3\psi|_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D\psi|_{-1} = 0 \wedge DF|_{-1} = 0. \quad (3.64)$$

Duplicitnú podmienku  $D\psi|_{-1} = 0$  stačí uvažovať len raz pri (3.63). Ostatnú (3.64) splníme ako  $DF|_{-1} = 0$ .

### 3.3.3 Numerická implementácia

Prevedené transformácie z predchádzajúcej časti umožňujú riešiť vlastnohodnotový problém Čebyševovou metódou. Všetky rovnice a podmienky si zachovávajú linearitu, čo umožňuje prepis do maticového tvaru. Riešiť budeme štyri separátne rovnice i keď teoreticky by stačilo riešiť dva systémy. Problém si však z numerickeho hľadiska implicitne vyžaduje riešenie štyroch systémov ako je uvedené v (3.44)-(3.47).

Všetky štyri diferenciálne rovnice sa riešia na rovnakej oblasti  $(-1, 1)$ , avšak (3.44), (3.46) v premennej  $r_i$  a (3.45), (3.47) v premennej  $r_o$ . Z toho dôvodu budeme rozlišovať počet interpolačných uzlov pre každú premennú zvlášť. Rovnice pre  $\psi, F$  budeme diskretizovať v  $N + 1$  interpolačných uzloch  $r_{i0}, r_{i1}, \dots, r_{iN}$ , pričom  $\phi, G$  v  $M + 1$  uzloch  $r_{o0}, r_{o1}, \dots, r_{oM}$ . Výstupom, resp. riešením budeme chápať vlastné číslo  $c$ , vo všeobecnosti komplexné a vlastný vektor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \Psi := (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N)^T, \\ \Phi := (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_M)^T, \\ \mathbf{F} := (F_0, F_1, \dots, F_N)^T, \\ \mathbf{G} := (G_0, G_1, \dots, G_M)^T. \end{cases} \quad (3.65)$$

**Poznámka 3.3.2.** Pri zápisoch si však treba uvedomiť, že napr.  $\psi_0$  je aproximáciou funkčnej hodnoty  $\psi(1)$  a nie  $\psi(-1)$ . Aproximáciou hodnoty  $\psi(-1)$  je naopak posledná zložka  $\psi_N$ . Toto je dané opačnou orientáciou pri definovaní Čebyševových uzlov t.j. postupujeme od  $+1$  do  $-1$ .

Pri prepise problému do maticového tvaru využijeme teóriu Čebyševových matíc popísanú na začiatku kapitoly. Diskrétny operátor prvého rádu budeme zapisovať zjednodušene  $\mathbf{D}_N^{(1)} = \mathbf{D}_N$ , pri vyšších rádoch budeme uvažovať mocniny operátora prvého rádu  $\mathbf{D}_N^{(k)} = \mathbf{D}_N^k$ . Definujme nasledovné matice

$$\mathbf{D}_1 := 4\mathbf{D}_N^2 - \alpha^2 \mathbf{E}_{N+1}, \quad \mathbf{D}_2 := 4\gamma^2 \mathbf{D}_M^2 - \alpha^2 \mathbf{E}_{M+1}. \quad (3.66)$$

Tieto matice sú diskretnou formou diferenciálnych operátorov  $D_1, D_2$  tak, ako boli definované. Matice  $\mathbf{E}_*$  reprezentujú diskretný operátor identity, kde dolný index označuje rozmer matice. Pre úplnosť ešte definujeme

$$\mathbf{U}_i := \text{diag} \{U(r_{i0}), U(r_{i1}), \dots, U(r_{iN})\} \quad (3.67)$$

$$\mathbf{U}_o := \text{diag} \{U(r_{o0}), U(r_{o1}), \dots, U(r_{oM})\} \quad (3.68)$$

Prostredníctvom takto definovanej notácie možno ľavú stranu rovníc (3.44)-(3.47) zapísať v diskretnom tvare

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} i\alpha\beta R\mathbf{E}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1,M+1} & \beta^{-1}\mathbf{D}_1 - i\alpha R\mathbf{U}_i & \mathbf{0}_{N+1,M+1} \\ \mathbf{0}_{M+1,N+1} & i\alpha k R\mathbf{E}_{M+1} & \mathbf{0}_{M+1,N+1} & \mathbf{D}_2 - i\alpha R\mathbf{U}_o \\ \mathbf{D}_1 & \mathbf{0}_{N+1,M+1} & -\mathbf{E}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1,M+1} \\ \mathbf{0}_{M+1,N+1} & \mathbf{D}_2 & \mathbf{0}_{M+1,N+1} & -\mathbf{E}_{M+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix},$$

a podobne pravú stranu s vlastným číslom  $c$

$$c\mathbf{N} \cdot \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1,M+1} & -i\alpha R\mathbf{E}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1,M+1} \\ \mathbf{0}_{M+1,N+1} & \mathbf{0}_{M+1} & \mathbf{0}_{M+1,N+1} & -i\alpha R\mathbf{E}_{M+1} \\ \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1,M+1} & \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{0}_{N+1,M+1} \\ \mathbf{0}_{M+1,N+1} & \mathbf{0}_{M+1} & \mathbf{0}_{M+1,N+1} & \mathbf{0}_{M+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}.$$

Štruktúra matíc  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{N}$  je jednoduchá bloková. Celkový rozmer oboch je  $(2M+2N+4)^2$ , pričom štruktúra jednotlivých blokov je obdĺžniková a štvorcová. V týchto maticiach ešte nie sú zahrnuté okrajové podmienky, ktoré úplne definujú úlohu. Tieto zahrnieme do nami určených riadkov.

Ďalej budeme rozlišovať homogénne podmienky na funkčné hodnoty a ostatné. Homogenity, napríklad  $\psi|_{-1} = 0$  resp.  $F|_{-1} = 0$  splníme výmazom príslušného riadku a stĺpca pre  $\psi_N$  resp.  $F_N$ . Výmazom týchto riadkov zároveň znížime rozmer matice. Vo varikóznom prípade existujú 3 homogénne podmienky, ktoré znížia rozmer matíc o 3. Vzhľadom na voľbu  $M, N \approx 2^7$  má táto skutočnosť na výpočtový výkon zanedbateľný vplyv. Bližšie informácie o tejto metóde možno nájsť v literatúre [Trefethen, 2000].

Ostatné podmienky je potrebné splniť priamo zahrnutím do matíc  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{N}$ . Ide zväčša o rovnice obsahujúce vlastnohodnotovú závislosť prípadne o zmiešané podmienky. Konkrétne v našom probléme ide o (3.58)-(3.61) a (3.56).

### 3.3.3.1 Odvodenie diskretných foriem okrajových podmienok

Cieľom nasledovného je upraviť spomenuté ostatné podmienky do diskretizovaného tvaru a implementovať ich do odvodených blokových matíc. Ako prvými sa budeme zaoberať varikóznymi perturbáciami. Meandrujúci prípad je analogický a rozdiely uvádzame v poznámke na konci tejto časti.

Podmienka (3.58)  $D\phi|_1 = 0$  má diskretnú analógiu v 1. riadku rovnice  $\mathbf{D}_M\Phi = \mathbf{0}$ , čo budeme označovať  $[\mathbf{D}_M]_{1,:}\Phi = 0$ . Príslušná riadková reprezentácia je

$$[\mathbf{0}_{1 \times N+1} \quad [\mathbf{D}_M]_{1,:} \quad \mathbf{0}_{1 \times N+1} \quad \mathbf{0}_{1 \times M+1}] \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.69)$$

Riadky, do ktorých podmienky zapíšeme, zhrnieme na záver. Ďalšiu podmienku (3.59) splníme ako  $\psi_0 - \phi_M = 0$  a má vektorovú reprezentáciu

$$[1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{resp.} \quad (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{M+N+2})^T \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.70)$$

kde  $-1$  je na pozícii  $M + N + 2$ . Druhý zápis prostredníctvom bázy jednotkových vektorov  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2(N+M+2)}$  je prehľadnejší a budeme ho využívať aj v ďalších zápisoch. Zvyšné podmienky nebudeme odvádzať, uvádzame len výslednú riadkovú formu. Podmienka (3.60)

$$\left(-\beta \mathbf{e}_1 + \frac{1}{m} \mathbf{e}_{N+M+2}\right)^T \cdot \mathbf{u} = c \left[ 2[\mathbf{D}_N]_{1,:} \quad -2\gamma[\mathbf{D}_M]_{M+1,:} \quad \mathbf{0}_{1 \times N+1} \quad \mathbf{0}_{1 \times M+1} \right] \cdot \mathbf{u}. \quad (3.71)$$

Podmienka (3.61)

$$\beta (m k \mathbf{e}_{N+M+2} - \mathbf{e}_1)^T \cdot \mathbf{u} = c (2\alpha^2 \mathbf{e}_1 - 2m\alpha^2 \beta \mathbf{e}_{N+M+2} + \mathbf{e}_{N+M+3} - m\beta \mathbf{e}_{2N+2M+4})^T \cdot \mathbf{u} \quad (3.72)$$

Vzhľadom na rozsah poslednej podmienky (3.56) ju tu nebudeme uvádzať. Nájsť ju možno v zhrnutí - tabuľka 3.1.

Všetky rovnice, tak ako sú uvedené v tabuľke 3.1, implementujeme do matíc  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ . Riadky, v ktorých budeme spĺňať okrajové podmienky budú vždy - prvý a posledný riadok každého bloku. Schematicky pôjde o nasledovnú operáciu  $\mathbf{M} \mapsto \tilde{\mathbf{M}}$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/2} \\ \mathbf{i}\alpha\beta R\mathbf{E}_{N-1,N+1} \\ \text{OP(3.57)/1} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/2} \\ \mathbf{0}_{N-1,M+1} \\ \text{OP(3.57)/1} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/2} \\ \beta^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_1 - \mathbf{i}\alpha R\tilde{\mathbf{U}}_i \\ \text{OP(3.57)/1} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/2} \\ \mathbf{0}_{N-1,M+1} \\ \text{OP(3.57)/1} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/1} \\ \mathbf{0}_{M-1,N+1} \\ \text{OP(3.59)} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/1} \\ \mathbf{i}\alpha k R\mathbf{E}_{M-1,M+1} \\ \text{OP(3.59)} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/1} \\ \mathbf{0}_{M-1,N+1} \\ \text{OP(3.59)} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/1} \\ \tilde{\mathbf{D}}_2 - \mathbf{i}\alpha R\tilde{\mathbf{U}}_o \\ \text{OP(3.59)} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{OP(3.60)} \\ \tilde{\mathbf{D}}_1 \\ \text{OP(3.57)/2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.60)} \\ \mathbf{0}_{N-1,M+1} \\ \text{OP(3.57)/2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.60)} \\ -\mathbf{E}_{N-1,N+1} \\ \text{OP(3.57)/2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.60)} \\ \mathbf{0}_{N-1,M+1} \\ \text{OP(3.57)/2} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{OP(3.61)} \\ \mathbf{0}_{M-1,N+1} \\ \text{OP(3.56)} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.61)} \\ \tilde{\mathbf{D}}_2 \\ \text{OP(3.56)} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.61)} \\ \mathbf{0}_{M-1,N+1} \\ \text{OP(3.56)} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.61)} \\ -\mathbf{E}_{M-1,M+1} \\ \text{OP(3.56)} \end{array} \end{bmatrix}.$$

Rovnako postupujeme pre  $\mathbf{N} \mapsto \tilde{\mathbf{N}}$

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/2} \\ \mathbf{0}_{N-1,N+1} \\ \text{OP(3.57)/1} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/2} \\ \mathbf{0}_{N-1,M+1} \\ \text{OP(3.57)/1} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/2} \\ -\mathbf{i}\alpha R\mathbf{E}_{N-1,N+1} \\ \text{OP(3.57)/1} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/2} \\ \mathbf{0}_{N-1,M+1} \\ \text{OP(3.57)/1} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/1} \\ \mathbf{0}_{M-1,N+1} \\ \text{OP(3.59)} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/1} \\ \mathbf{0}_{M-1,M+1} \\ \text{OP(3.59)} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/1} \\ \mathbf{0}_{M-1,N+1} \\ \text{OP(3.59)} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.58)/1} \\ -\mathbf{i}\alpha R\mathbf{E}_{M-1,M+1} \\ \text{OP(3.59)} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{OP(3.60)} \\ \mathbf{0}_{N-1,N+1} \\ \text{OP(3.57)/2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.60)} \\ \mathbf{0}_{N-1,M+1} \\ \text{OP(3.57)/2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.60)} \\ \mathbf{0}_{N-1,N+1} \\ \text{OP(3.57)/2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.60)} \\ \mathbf{0}_{N-1,M+1} \\ \text{OP(3.57)/2} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{OP(3.61)} \\ \mathbf{0}_{M-1,N+1} \\ \text{OP(3.56)} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.61)} \\ \mathbf{0}_{M-1,M+1} \\ \text{OP(3.56)} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.61)} \\ \mathbf{0}_{M-1,N+1} \\ \text{OP(3.56)} \end{array} & \begin{array}{c} \text{OP(3.61)} \\ \mathbf{0}_{M-1,M+1} \\ \text{OP(3.56)} \end{array} \end{bmatrix}.$$

Blokové matice  $\tilde{\mathbf{D}}_{1,2}$  resp.  $\tilde{\mathbf{U}}_{i,o}$  predstavujú zúženie pôvodných operátorov  $\mathbf{D}_{1,2}$  resp.  $\mathbf{U}_{i,o}$ . Z konštrukcie je zrejmé, že zúžené operátory neobsahujú prvý a posledný riadok

pôvodných operátorov, ktoré boli nahradené.

Medzi podmienkami sa vyskytujú aj homogénne  $(3.57)_1, (3.57)_2$  a  $(3.58)_1$ . Kvôli prehľadnosti, ich uvádzame explicitne ako súčasť  $\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\mathbf{N}}$ . Ako však bolo spomenuté, homogenity tohto typu možno splniť výmazom príslušného riadka a stĺpca. Pre splnenie podmienky  $(3.57)_1$  vymažeme riadok a stĺpec číslo  $N + 1$ . Pre splnenie zvyšných dvoch odstránime riadky a stĺpce číslo  $N + 2$  a  $2N + M + 3$ . Štruktúra matíc sa zachová štvorcová s rozmerom  $(2M + 2N + 1)^2$ . Operáciu znižovania rozmeru matíc vykonávame vždy ako finálny krok aj v numerickej implementácii, aby nedošlo k chybám pri prepise a dimenzionálnym rozporom.

**Poznámka 3.3.3.** (k meandrujúcim perturbáciám) V meandrujúcom prípade dochádza k zmene v podmienke symetrie (3.64). Keďže nejde o homogénne podmienky vo funkčných hodnotách, nemožno ich splniť implicitne znížením rozmeru systému, ale explicitnou formou. Rozmer systému bude narozdiel od varikózneho prípadu o 2 väčší, čiže  $(2M + 2N + 3)^2$ . Príslušné diskkrétne formy sú

$$\begin{aligned} & [[\mathbf{D}_N]_{N+1,:} \quad \mathbf{0}_{1 \times M+1} \quad \mathbf{0}_{1 \times N+1} \quad \mathbf{0}_{1 \times M+1}] \cdot \mathbf{u} = 0, \\ & [\mathbf{0}_{1 \times N+1} \quad \mathbf{0}_{1 \times M+1} \quad [\mathbf{D}_N]_{N+1,:} \quad \mathbf{0}_{1 \times M+1}] \cdot \mathbf{u} = 0, \end{aligned}$$

Prvá z rovníc nahradí riadok  $N + 1$  riešeného systému, druhá nahradí riadok  $2N + M + 3$ .



Číslo	Diskrétna riadková forma
(3.58)	$\left[ \mathbf{0}_{1 \times N+1} \mid [\mathbf{D}_M]_{1,:} \mid \mathbf{0}_{1 \times N+1} \mid \mathbf{0}_{1 \times M+1} \right] \cdot \mathbf{u} = 0$
(3.59)	$(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{M+N+2})^T \cdot \mathbf{u} = 0$
(3.60)	$(-\beta \mathbf{e}_1 + \frac{1}{m} \mathbf{e}_{N+M+2})^T \cdot \mathbf{u} = c \left[ 2[\mathbf{D}_N]_{1,:} \mid -2\gamma[\mathbf{D}_M]_{M+1,:} \mid \mathbf{0}_{1 \times N+1} \mid \mathbf{0}_{1 \times M+1} \right] \cdot \mathbf{u}$
(3.61)	$(-\beta \mathbf{e}_1 + m\beta \mathbf{e}_{N+M+2})^T \cdot \mathbf{u} = c \left( 2\alpha^2 \mathbf{e}_1 - 2m\alpha^2 \beta \mathbf{e}_{N+M+2} + \mathbf{e}_{N+M+3} - m\beta \mathbf{e}_{2N+2M+4} \right)^T \cdot \mathbf{u}$
(3.56)	$\left\{ \left[ \left( \frac{4c^2}{m\beta} + \frac{2i\Gamma\alpha^3}{m} \right) [\mathbf{D}_N]_{1,:} \mid - \left( 4\gamma\alpha^2 + \frac{2i\gamma\Gamma\alpha^3}{m} \right) [\mathbf{D}_M]_{M+1,:} \mid - \frac{2}{m\beta} [\mathbf{D}_N]_{1,:} \mid + 2\gamma [\mathbf{D}_M]_{M+1,:} \right] + \right. \\ \left. + \frac{i\alpha R}{m} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \mathbf{e}_{N+M+2}^T \right\} \cdot \mathbf{u} = -2i\alpha c \left[ \mathbf{0}_{1 \times N+1} \mid R\gamma \left( 1 - \frac{1}{m} \right) [\mathbf{D}_M]_{M+1,:} \mid \mathbf{0}_{1 \times N+1} \mid \mathbf{0}_{1 \times M+1} \right]$

Tabuľka 3.1: Zhrnutie diskrétnych riadkových foriem okrajových podmienok pre symetrické perturbácie.

Číslo	Diskrétna riadková forma
(3.64)	$\left[ \begin{array}{c c} [\mathbf{D}_N]_{N+1,:} & \mathbf{0}_{1 \times M+1} \\ \hline \mathbf{0}_{1 \times N+1} & \mathbf{0}_{1 \times M+1} \end{array} \right] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$
(3.64)	$\left[ \begin{array}{c c} \mathbf{0}_{1 \times N+1} & \mathbf{0}_{1 \times M+1} \\ \hline [\mathbf{D}_N]_{N+1,:} & \mathbf{0}_{1 \times M+1} \end{array} \right] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$
(3.58)	$\left[ \begin{array}{c c} \mathbf{0}_{1 \times N+1} & [\mathbf{D}_M]_{1,:} \\ \hline [\mathbf{D}_M]_{1,:} & \mathbf{0}_{1 \times M+1} \end{array} \right] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$
(3.59)	$(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{M+N+2})^T \cdot \mathbf{u} = 0$
(3.60)	$(-\beta \mathbf{e}_1 + \frac{1}{m} \mathbf{e}_{N+M+2})^T \cdot \mathbf{u} = c \left[ \begin{array}{c c} 2[\mathbf{D}_N]_{1,:} & \\ \hline -2\gamma[\mathbf{D}_M]_{M+1,:} & \mathbf{0}_{1 \times N+1} \end{array} \right] \cdot \mathbf{u}$
(3.61)	$(-\beta \mathbf{e}_1 + m\beta k \mathbf{e}_{N+M+2})^T \cdot \mathbf{u} = c (2\alpha^2 \mathbf{e}_1 - 2m\alpha^2 \beta \mathbf{e}_{N+M+2} + \mathbf{e}_{N+M+3} - m\beta \mathbf{e}_{2N+2M+4})^T \cdot \mathbf{u}$
(3.56)	$\left\{ \left[ \begin{array}{c c} \left( \frac{4\alpha^2}{m\beta} + \frac{2i\Gamma\alpha^3}{m} \right) [\mathbf{D}_N]_{1,:} & \\ \hline - \left( 4\gamma\alpha^2 + \frac{2i\Gamma\alpha^3}{m} \right) [\mathbf{D}_M]_{M+1,:} & \left[ \begin{array}{c c} -\frac{2}{m\beta} [\mathbf{D}_N]_{1,:} & \\ \hline +2\gamma[\mathbf{D}_M]_{M+1,:} & \end{array} \right] + \frac{i\alpha R}{m} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) \mathbf{e}_{N+M+2}^T \end{array} \right\} \cdot \mathbf{u} = -2i\alpha c \left[ \begin{array}{c c} \mathbf{0}_{1 \times N+1} & \\ \hline R\gamma \left( 1 - \frac{1}{m} \right) [\mathbf{D}_M]_{M+1,:} & \mathbf{0}_{1 \times M+1} \end{array} \right]$

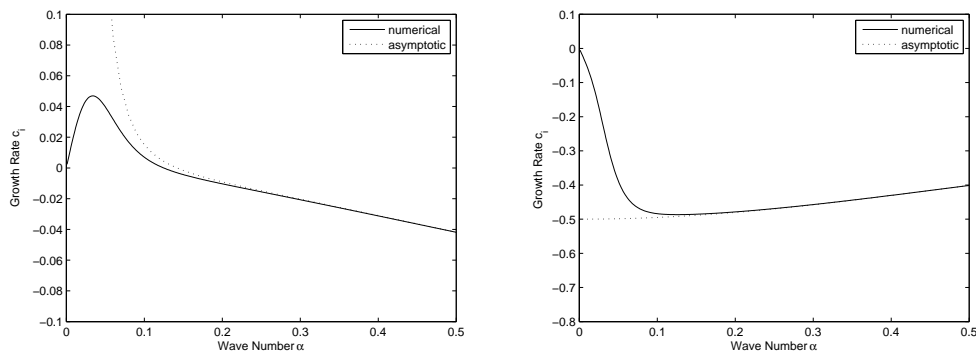
Tabuľka 3.2: Zhrnutie diskrétnych riadkových foriem okrajových podmienok pre antisymetrické perturbácie.

### 3.3.4 Porovnanie numerických a asymptotických výsledkov

Riešenie úlohy sme vykonali v systéme Matlab za pomoci implementovaných algoritmov. Na určenie vlastných čísel a prislúchajúcich vlastných vektorov sme použili funkciu `eig` súčasne s metódou `'qz'`, ktorá využíva QZ algoritmus.

V prvej časti sa zameriame na reprodukciu a porovnanie s asymptotickými riešeniami [Guba a Revallo, 2012]. V druhej časti budeme analyzovať problém bez reštrikcií na parametrickú grupu  $(m, k)$ . Istú mieru obmedzenia však kladieme na parameter  $k$ , ktorý je vzájomne previazaný s hodnotou  $A$  prostredníctvom vzťahov (1.38) a (1.39) odvodených v prvej kapitole.

**Stokesova limita.** Významný vplyv na štruktúru výsledkov má predpoklad  $A < \infty$ , na základe ktorého sme konštruovali stabilitné rovnice. Porovnanie s prípadom  $A \rightarrow \infty$ , v ktorom bola prevedená asymptotická analýza, teda bude vychádzať z aproximácie  $1 \ll A < \infty$ . Numerické riešenie však vnútorne obsahuje informáciu o konečnosti  $A$ . Ako aproximáciu nekonečna budeme voliť hodnotu  $A \leq 10^3$ . V ojedinelých prípadoch vyššia hodnota spôsobovala singularitu v riešení. V prípade regulárnej Stokesovej limity možno významný rozdiel v štruktúre pozorovať na diagramoch 3.1. Tieto zachytávajú závislosť maximálnej miery rastu poruchy v závislosti od vlnového čísla. Asymptotické riešenia sú znázornené do rádu  $O(R^1)$  pre  $R = 10^{-4}$ . V oblasti  $\alpha \ll 1$  dochádza k rozkolu riešení. Toto má však dvojaký charakter. V prípade antisymetrických porúch dochádza k rozdielu v dôsledku konečnosti  $A$  tak, ako bolo uvedené na konci predchádzajúcej kapitoly. Avšak v prípade symetrických porúch, rozdiel v riešení spôsobuje predpoklad  $\alpha = O(1)$ . Asymptotické riešenie tu nepokrýva dvojný limitný proces  $(\alpha, R) \rightarrow (0, 0)$ . Mimo tejto okrajovej oblasti je však zhoda riešení veľmi dobrá. Z hľadiska stability však nedochádza k rozporu. Oblasť nestability vzniká pri symet-

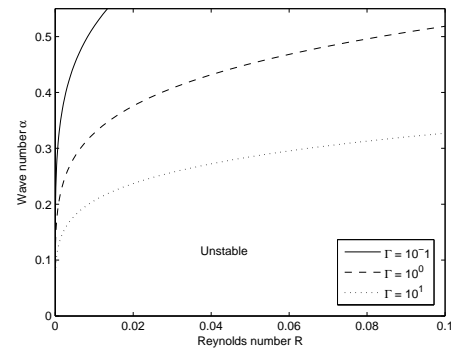


Obr. 3.1: **Maximálna miera rastu poruchy.** Porovnanie riešení v prípade symetrických porúch (vľavo) a antisymetrických porúch (vpravo) pre parametre  $\beta = 1/2, \Gamma = 1$

rických poruchách pri  $\alpha \ll 1$  rovnako v numerickom ako aj v asymptotickom prístupe. Antisymetrické poruchy nemajú destabilizačný efekt, keďže maximálna miera rastu je do prvého rádu záporná. Možno teda očakávať, že štruktúra stabilitných diagramov sa pre oba prístupy zachová. Oblasť nestability možno pozorovať na diagrame 3.3. Krivka neutrálnej stability, definovaná rovnicou

$$R(\alpha; \Gamma) = \frac{8}{3} \Gamma \alpha^5,$$

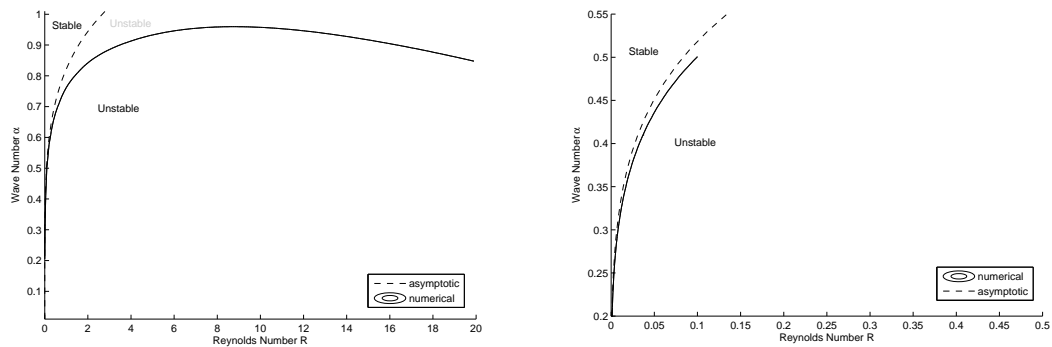
ktorá zodpovedá asymptotickej oblasti  $R \rightarrow 0$  a  $\alpha \ll 1$ , vykazuje parametrickú závislosť len na  $\Gamma$ . Zvyšné parametre v limite  $R \rightarrow 0$  uvažovaného systému strácajú na význame. V časti venovanej rozboru asymptotických výsledkov bol spomenutý stabilizačný efekt povrchového napätia. Tento efekt spôsobuje zmenšovanie oblasti nestability v stabilitnom diagrame. Tieto vplyvy možno pozorovať na 3.2, kde sú znázornené tri krivky neutrálnej stability pre  $\Gamma = 10^{-1}$ ,  $10^0$  a  $10^1$ . So zvyšovaním hodnoty povrchového napätia sa oblasť nestability zmenšuje. Tento trend je potvrdený rovnako v asymptotickom, ako aj v numerickom prístupe. Maximálne miery rastu možno pozorovať na obrázkoch 3.5. Rovnako v symetrickom ako aj v antisymetrickom prípade porúch je parametrom povrchového napätia významne ovplyvnená aj fázová rýchlosť, teda reálna časť vlastného čísla. V prípade polonekonečnej oblasti táto závislosť nie je v nultom ráde prítomná.



Obr. 3.2: Vplyvy povrchového napätia na štruktúru stabilitného diagramu v asymptotickej oblasti  $R \rightarrow 0$  a  $\alpha \ll 1$  v symetrických poruchách.

Pre vlnové čísla nad úrovňou kritickej hranice  $\alpha_{cr.} = (3R/8\Gamma)^{1/5}$  je systém stabilný. Pre ľubovoľne malú voľbu Reynoldsovho čísla teda existuje také vlnové číslo  $\alpha$ , že ich kombinácia zabezpečí základný stav stabilný. Iná situácia nastáva pri antisymetrických poruchách, kde v tejto asymptotickej oblasti nie je krivka neutrálnej stability prítomná. Základný stav je teda stabilný pre všetky prípustné dvojice  $(\alpha, R)$ .

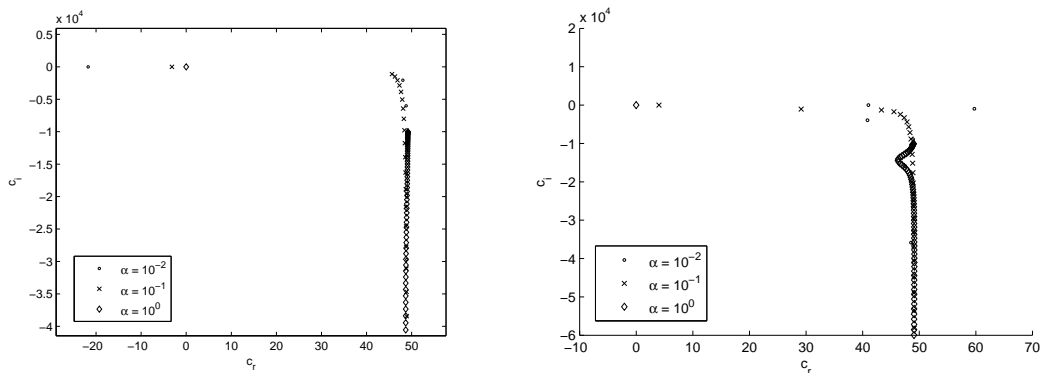
Typickú štruktúru spektra možno pozorovať na obrázku 3.4. Situácia je znázor-



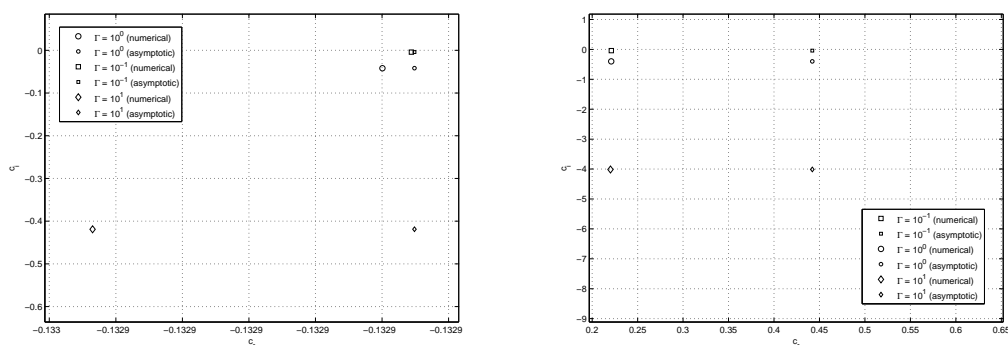
Obr. 3.3: **Krivky neutrálnej stability.** Porovnanie v asymptotickej oblasti  $R \rightarrow 0$ ,  $\alpha \ll 1$  pre symetrické poruchy.

nená pre  $R = 10^{-4}$  a pre vlnové čísla  $\alpha = 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0$ . Tu možno pozorovať vyššiu citlivosť vlastných čísel s imaginárnou časťou blízko 0.

**Dlhé vlnové dĺžky porúch.** Podľa asymptotických výsledkov z druhej kapitoly sa prípad symetrických porúch v nultom ráde ukazuje ako bezpodmienečne nestabilný. Maximálna miera rastu poruchy má hyperbolický charakter v  $\alpha$  aj v  $R$ . Pre lepšie pozorovanie kvality numerického riešenia budeme analyzovať výsledky v logaritmickej



Obr. 3.4: **Typické spektrum.** Porovnanie štruktúry spektier v závislosti od vlnového čísla  $\alpha$  pre symetrické poruchy (vľavo) a antisymetrické poruchy (vpravo).



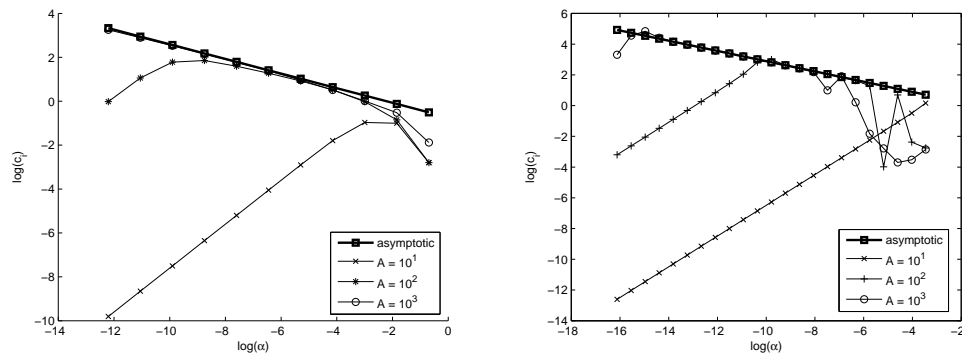
Obr. 3.5: **Maximálna miera rastu.** Porovnanie maximálnych mier rastu zistných asymptoticky a numericky v závislosti od povrchového napätia  $\Gamma$  pre symetrické poruchy (vľavo) a antisymetrické poruchy (vpravo).

škále. Pre  $\alpha \rightarrow 0$  a  $R = O(1)$  platí

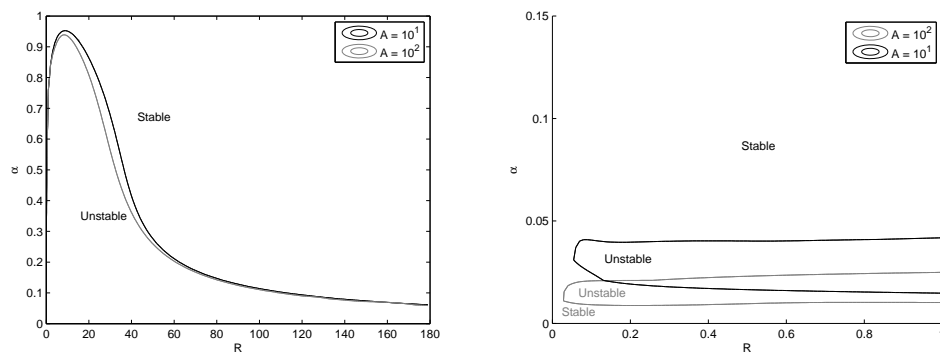
$$\log(\sigma_0) = C - \frac{1}{3} \log(\alpha R), \quad (3.73)$$

kde  $C \doteq -0.97038$ . Prítomnosť hyperbolickej závislosti v obidvoch parametroch  $\alpha$  aj  $R$  vyplýva z nutnosti reškálovania singulárnej úlohy. Na obrázku 3.6 možno pozorovať konvergenciu numerických riešení k asymptotickému riešeniu  $A \rightarrow \infty$ . V logaritmickej škále má asymptotické riešenie lineárnu formu. V oblasti  $\alpha \ll 1$  si možno všimnúť pomerne rýchlu konvergenciu. V prípade voľby malého parametra  $A \leq 10^2$  dochádza k rozkolu riešení v asymptotickej oblasti, čo je primárne dané vplyvom konečnosti  $A$ .

V antisymetrických poruchách je situácia podobná. Pre tento prípad porúch je však základný stav stabilný pre všetky dvojice  $\alpha$  a  $R$  v uvažovanej asymptotickej oblasti. To znamená, že  $\sigma_0 < 0$ . V logaritmickej škále teda uvažujeme logaritmus absolútnej hodnoty  $\log|\sigma_0|$ . Konštanta  $C$  zo vzťahu (3.73) je teraz približne  $C \doteq -0,67453$ . Riešenia pre tento prípad sú znázornené na obrázku 3.6. So zvyšujúcou sa hodnotou  $A$  možno pozorovať zľú aproximáciu pre väčšie hodnoty  $\alpha$ . Toto úzko súvisí s podmienenosťou riešeného systému pre rádovo vysoké hodnoty  $A$ . Naopak v oblasti  $\alpha \ll 1$  dochádza



Obr. 3.6: Konvergencia numerického riešenia maximálnej miery rastu pre symetrické (vľavo) a anti-symetrické poruchy (vpravo) k asymptotickému  $A \rightarrow \infty$ .



Obr. 3.7: **Stabilitné diagramy.** Oblasti nestability ohraničené krivkou neutrálnej stability pre symetrické (vľavo) a antisymetrické poruchy (vpravo).

očakávané z zlepšovaniu aproximácie.

Na obrázku 3.7 sú znázornené krivky neutrálnej stability globálne bez obmedzení na Reynoldsove a vlnové čísla pre  $A = 10^1$  a  $A = 10^2$ . Nestabilné oblasti sú ohraničené príslušnými krivkami. V prípade symetrických porúch dochádza ku konvergencii nestabilnej oblasti vzhľadom na parameter  $A$ . Pre  $A \gg 1$  a  $R \ll 1$  možno pozorovať zhodu s diagramom 3.3. Pre  $\alpha \ll 1$  a  $R = O(1)$  asymptotická teória podľa vzťahu (2.5) predpovedá jeden nestabilný mód. Nestabilná oblasť sa teda ťahne podĺž celej osi  $0 < R < \infty$ . V prípade antisymetrických porúch dochádza so zväčšovaním  $A$  k postupnému zániku oblasti nestability. To je v zhode s asymptotickými formami riešení.

### 3.4 Rozbor metódy

Cieľom tejto časti je porovnať aplikovanú pseudospektrálnu Čebyševovu metódu s jej modifikáciou na ne-Čebyševovských sieťach. Zaviest' transformáciu pôvodnej Čebyševovskej distribúcie má význam v odôvodnených prípadoch, keď pôvodná metóda neposkytuje dostatočne presné riešenia. Jedná sa najmä o diferenciálne úlohy s významnými hodnotami gradientov vo vnútri oblasti. Keďže Čebyševovská distribúcia koncentruje interpolačné uzly na okrajoch oblasti, nemusí byť táto voľba z hľadiska numerického riešenia vždy výhodná.

Modifikáciu budeme uvažovať vo forme transformačného vŕahu

$$r_{i,o} = \lambda^{-1}(z_{i,o}) = \frac{z_{i,o}}{2 - z_{i,o}^2}, \quad (3.74)$$

kde  $z$  má Čebyševovskú distribúciu. Distribúciu v premennej  $r$ , určenú hustotou  $\mu$ , možno zistiť v zmysle (3.23) riešením úlohy

$$\begin{cases} \mu(r_{i,o}) &= \varrho(\lambda(r_{i,o}))\lambda'(r_{i,o}), & -1 < r_{i,o} < 1, \\ \lambda(-1) &= -1. \end{cases}$$

Pre praktické účely je však postačujúca samotná transformácia  $\lambda$ . Prítomnosť novej premennej vyžaduje definíciu odvodených veličín, definujme preto  $\psi(r_{i,o}) := \tilde{\psi}(z_{i,o})$  a podobne pre  $\phi$ ,  $F$  a  $G$ . Problém teda uvažujeme na oblasti s východiskovou distribúciou  $\mu$ , pričom transformácia  $\lambda$  umožňuje prevod na Čebyševovskú distribúciu a následné riešenie Čebyševovskou metódou. V nasledovných výpočtoch budeme využívať derivácie zobrazenia  $\lambda$ , ktoré možno vyjadriť práve pomocou známeho inverzného zobrazenia  $\lambda^{-1}$  nasledovne

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{1}{(\lambda^{-1})'}, \\ \lambda'' &= -\frac{(\lambda^{-1})''}{[(\lambda^{-1})']^3}, \end{aligned}$$

čo priamo vyplýva z vety o derivovaní inverznej funkcie. Pre prvú deriváciu funkcie  $\psi$  potom dostávame

$$D_{r_i}\psi(r_i) = \lambda' D_{z_i}\tilde{\psi}(z_i) = \frac{(2 - z_i^2)^2}{2 + z_i^2} D_{z_i}\tilde{\psi}(z_i),$$

pre druhú deriváciu podobne

$$\begin{aligned} D_{r_i}^2\psi(r_i) &= \lambda'' D_{z_i}\tilde{\psi}(z_i) + (\lambda')^2 D_{z_i}^2\tilde{\psi}(z_i) \\ &= -(12z_i + 2z_i^3) \left(\frac{2 - z_i^2}{2 + z_i^2}\right)^3 D_{z_i}\tilde{\psi}(z_i) + \frac{(2 - z_i^2)^4}{(2 + z_i^2)^2} D_{z_i}^2\tilde{\psi}(z_i). \end{aligned}$$

Keďže stabilitnú úlohu sme redukovali na problém 2. diferenciálneho rádu, nemá zmysel uvažovať vyššie derivácie. Príslušné riadiace rovnice (3.44)-(3.47) sa transformujú

podľa uvedených vzťahov. Homogénne okrajové podmienky zostanú voči zmene súradníc invariantné. Táto skutočnosť vyplýva z vlastnosti transformácie  $\lambda(\pm 1) = \pm 1$ . Pre symetrické perturbácie máme podmienku symetrie (3.57)

$$\tilde{\psi}|_{-1} = \tilde{F}|_{-1} = 0$$

V antisymetrických poruchách podmienka (3.64) obsahuje derivácie 1. rádu, čo však nie je komplikáciou keďže

$$\begin{aligned} 0 &= D_{r_i} \psi|_{-1} = (1/3) D_{z_i} \tilde{\psi}|_{-1}, \\ 0 &= D_{r_i} F|_{-1} = (1/3) D_{z_i} \tilde{F}|_{-1}. \end{aligned}$$

Konštantný prefaktor však nemení štruktúru homogénnej podmienky a možno ho opomenúť. Iná situácia nastáva pri podmienkach spojitosti, ktoré obsahujú derivácie na rozhraní. V ich prípade je potrebné uvažovať aj konštantné prefaktory a využiť ich plnú formu.

Po transformácii do premennej  $z$  s Čebyšovskou distribúciou, možno použiť diskkrétne známe operátory  $\mathbf{D}_l^{(k)}$  rádu  $k$ , dimenzie  $l$ , kde  $k = 1, 2$ . Diskrétne forma operátora prvého rádu v premenných  $z_i$  má nasledovný tvar

$$\text{diag} \left\{ \frac{(2 - (z_i)_j^2)^2}{2 + (z_i)_j^2}; \quad 1 \leq j \leq N \right\} \cdot \mathbf{D}_N$$

Podobne pre premennú  $z_o$ , kde zmena nastane v dimenzii  $\mathbf{D}_M$ . Pre operátor druhého rádu máme v premennej  $z_i$

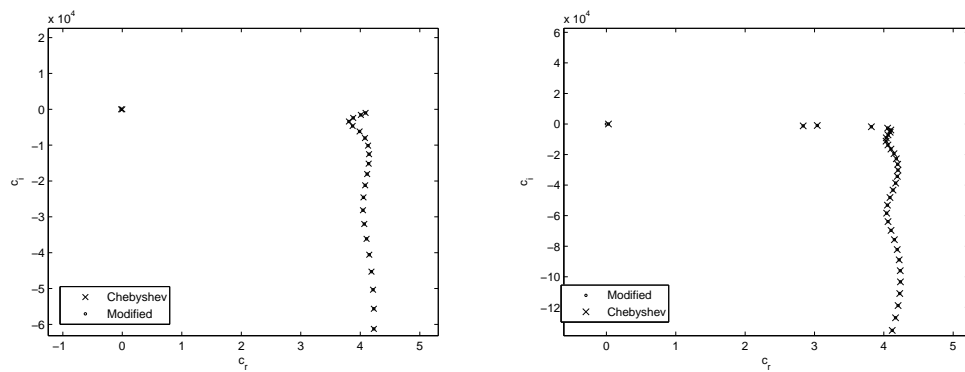
$$\text{diag} \left\{ -(12(z_i)_j + 2(z_i)_j^3) \left( \frac{2 - (z_i)_j^2}{2 + (z_i)_j^2} \right)^3 \right\} \cdot \mathbf{D}_N + \text{diag} \left\{ \frac{(2 - (z_i)_j^2)^4}{(2 + (z_i)_j^2)^2}; \quad 1 \leq j \leq N \right\} \cdot \mathbf{D}_N^2$$

Vo všeobecnosti možno týmto postupom odvodiť tvar diagonálnych maticových prefaktorov pre ľubovoľný transformačný vzťah  $\lambda^{-1}$ . Porovnanie výsledkov uskutočníme však len pre (3.74). Na obrázku 3.8 sú porovnané spektrá pre prípad  $R = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $m = 1$ ,  $k = 0$ ,  $\Gamma = 0$ . K významnej zmene nedochádza, obe distribúcie ponúkajú identické výsledky. Na amplitúdach porúch (obr. 3.9) možno taktiež pozorovať len minimálne rozdiely. Z numerického hľadiska možno považovať uvedené prístupy za rovnako kvalitné.

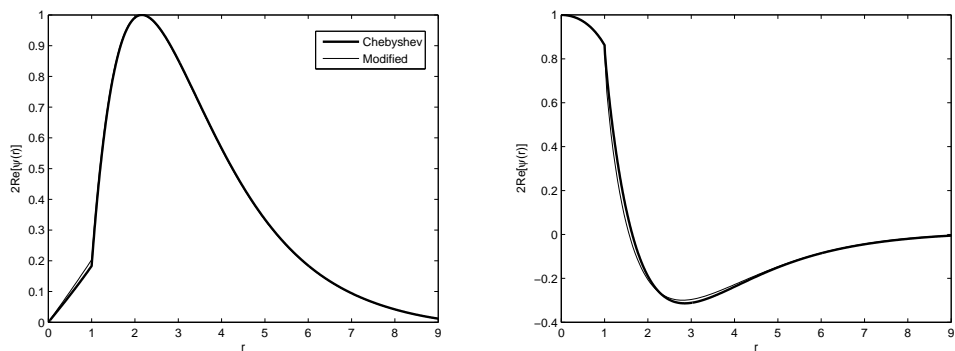
Vlastné číslo	v modifikovanej distribúcii	v Čebyšovskej distribúcii
5.	+3,80944000048 - 3412,2380869717i	+3,80944157456 - 3412,2380886997i
4.	+3,88016407683 - 2391,4772603891i	+3,88016297144 - 2391,4772590121i
3.	+4,01062812743 - 1580,8141080359i	+4,01062875415 - 1580,8141087891i
2.	+4,08813413721 - 1017,5896071106i	+4,08813391985 - 1017,5896068846i
1.	-0,01853810887 - 0,0727053571i	-0,01853811046 - 0,0727053564i

Tabuľka 3.3: **Symetrické poruchy.** Porovnanie prvých 10 vlastných čísel s najväčšou imaginárnou časťou podľa distribúcie.





Obr. 3.8: **Porovnanie prístupov.** Porovnanie štruktúry spektra vzhľadom na distribúciu interpolačných uzlov. Pre symetrické poruchy vľavo a pre antisymetrické poruchy vpravo.

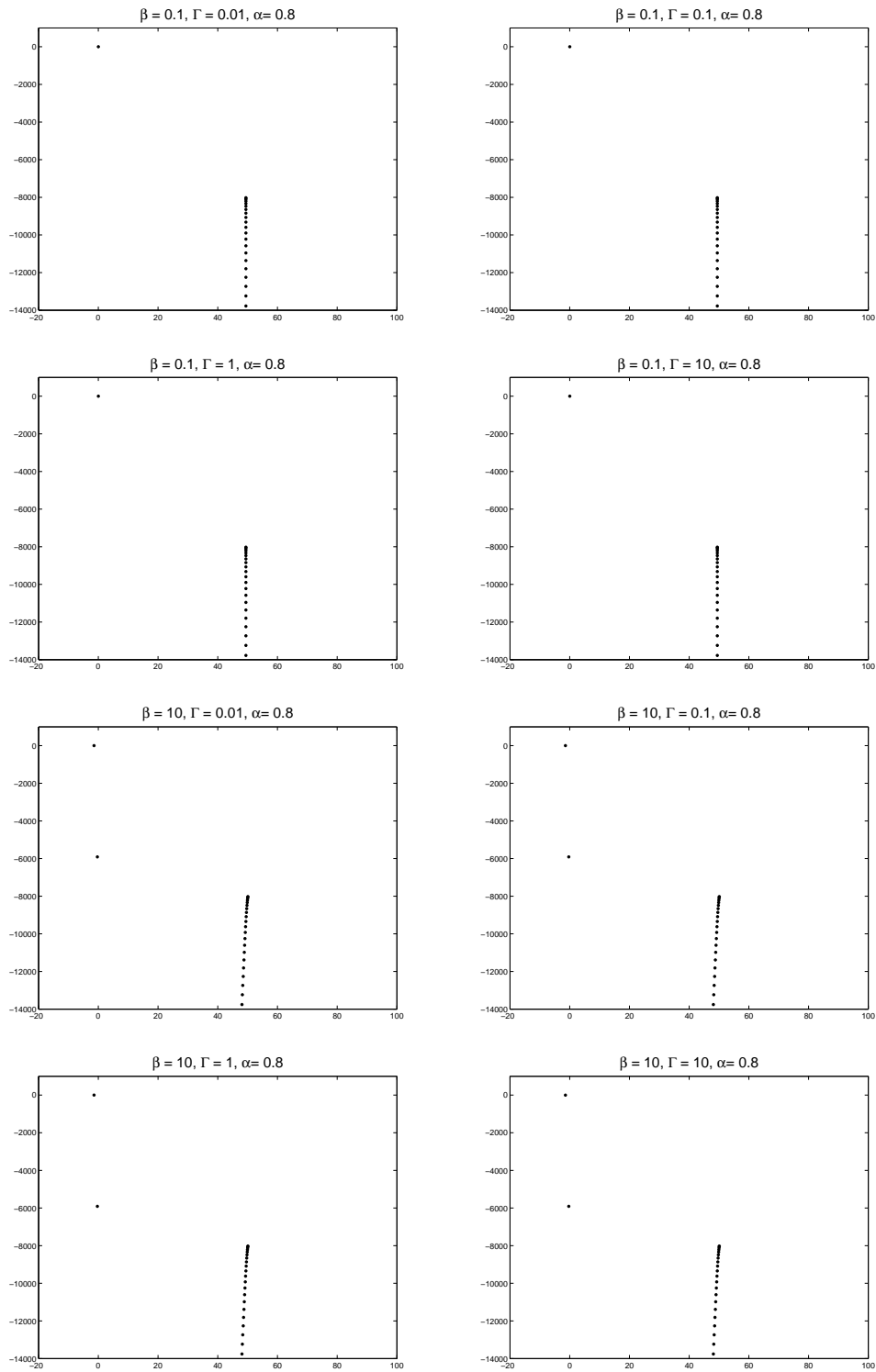


Obr. 3.9: **Porovnanie prístupov.** Porovnanie štruktúry amplitúd porúch vzhľadom na distribúciu interpolačných uzlov. Pre symetrické poruchy vľavo a pre antisymetrické poruchy vpravo.

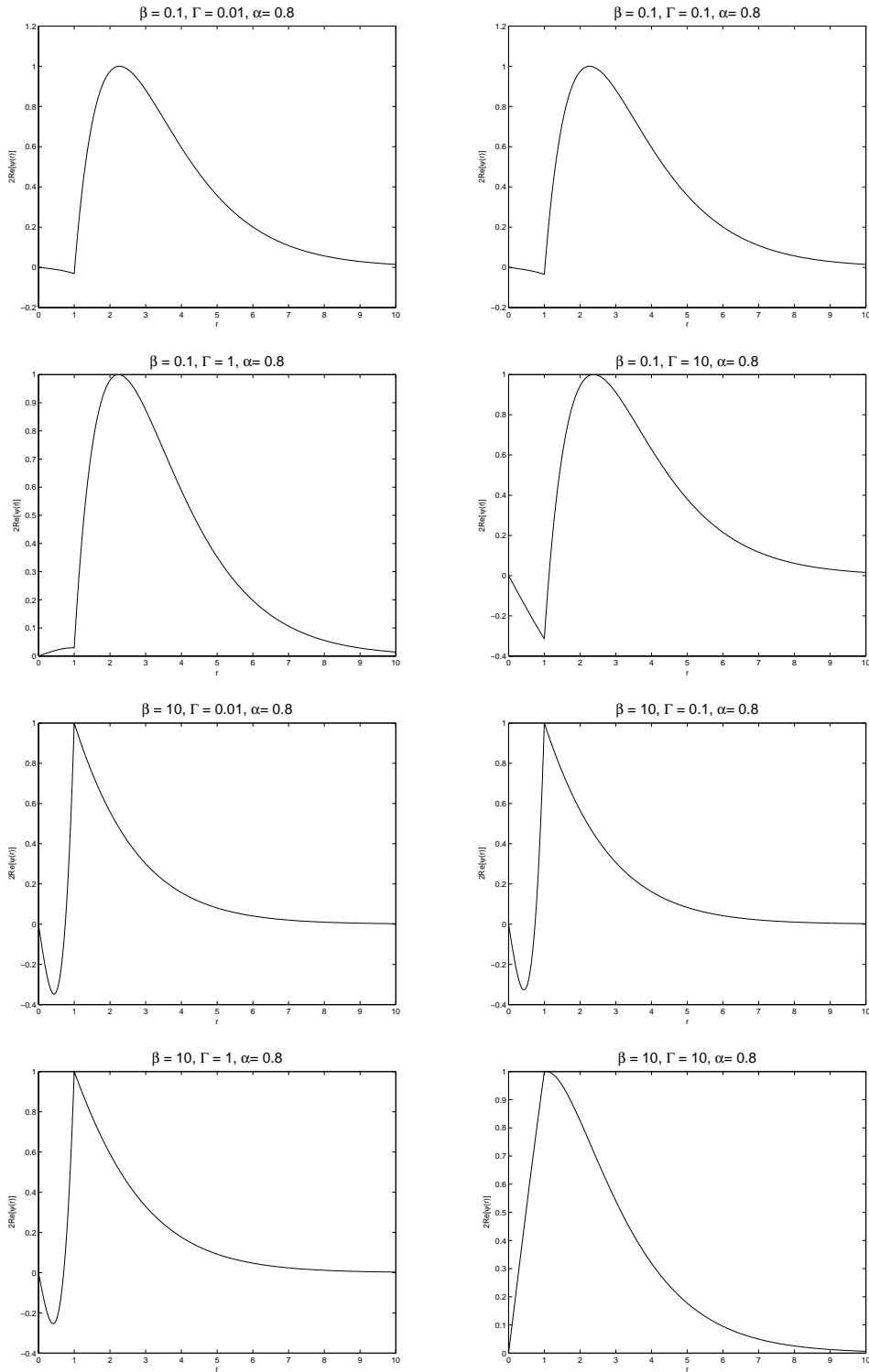
Vlastné číslo	v modifikovanej distribúcii	v Čebyševskej distribúcii
5.	+4,05437186045 - 2718,2946481668i	+4,05436726641 - 2718,2946575901i
4.	+3,82027512635 - 1794,5564012382i	+3,82027037749 - 1794,5564107832i
3.	+2,83628963210 - 1222,2472615449i	+2,83628874198 - 1222,2472788468i
2.	+3,04014592957 - 952,5002236489i	+3,04014990835 - 952,5002333490i
1.	+0,02853674842 - 0,3198733699i	+0,02853673458 - 0,3198733526i

Tabuľka 3.4: **Antisymetrické poruchy.** Porovnanie prvých 10 vlastných čísel s najväčšou imaginárnou časťou podľa distribúcie.

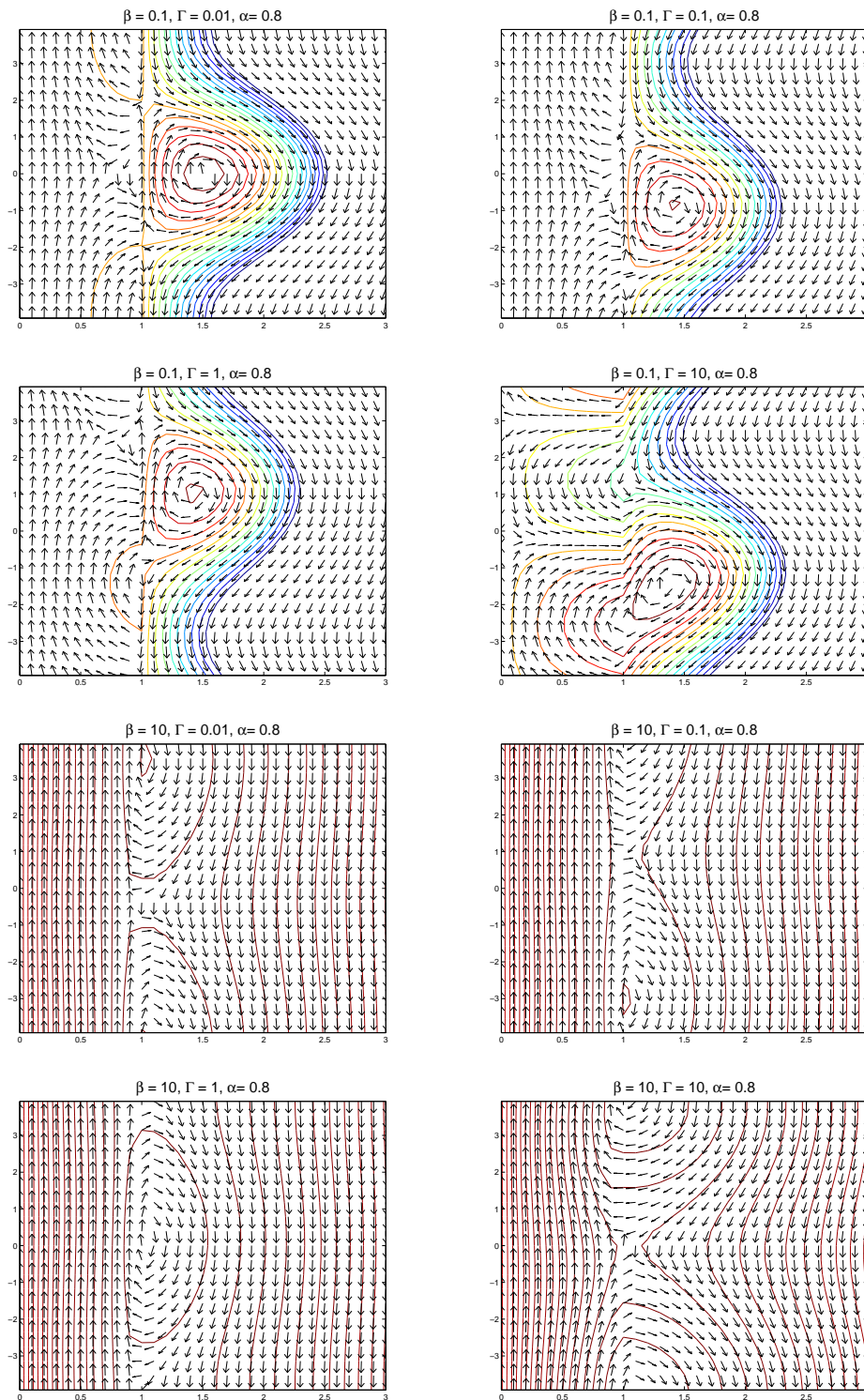
## 3.5 Dodatok ku kapitole



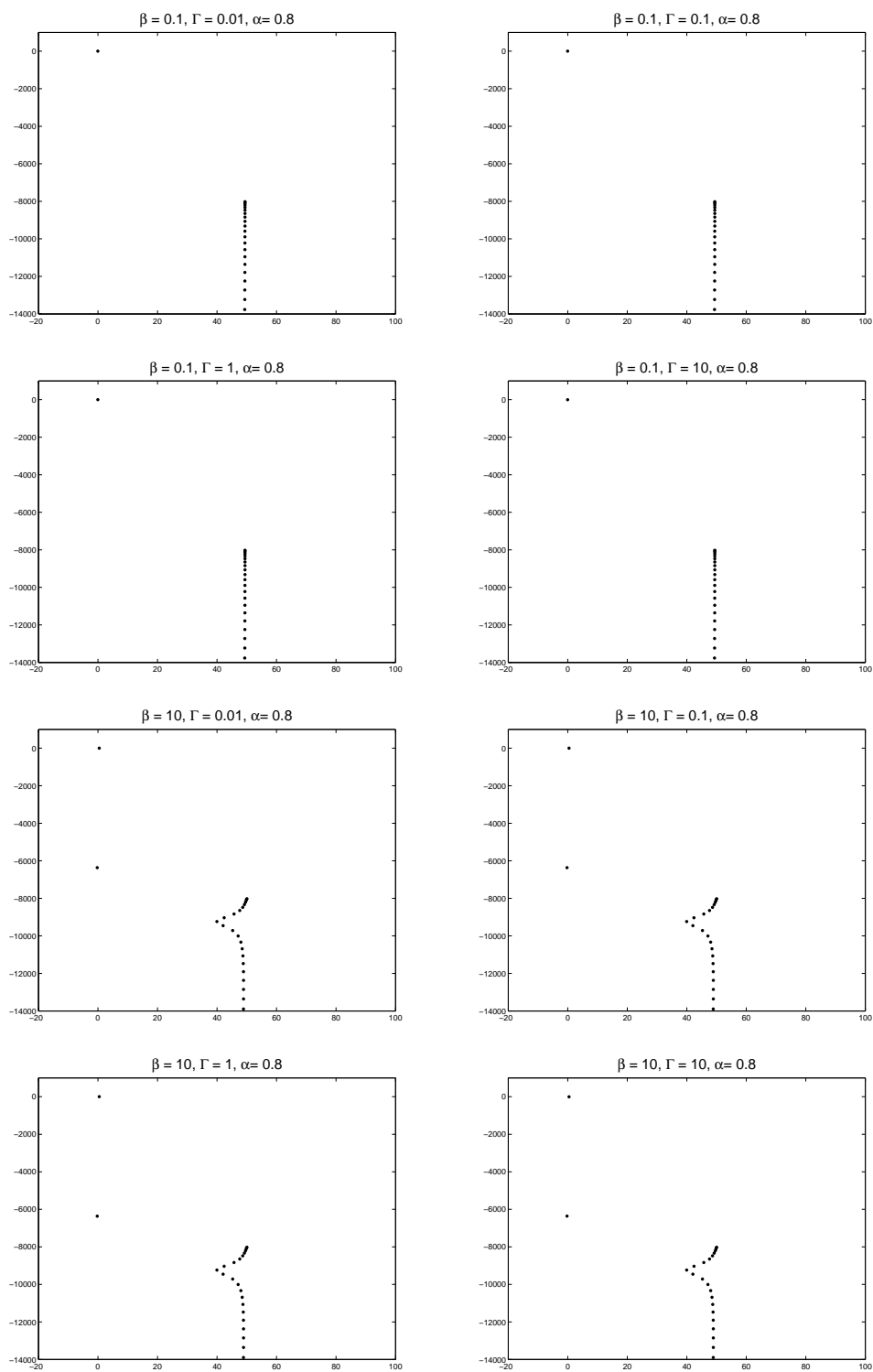
Obr. 3.10: Asymptotická limita  $R \rightarrow 0$ ,  $\alpha = O(1)$ ,  $A = 10^2$ . Spektrá v symetrických poruchách pre rôzne kombinácie parametrov.



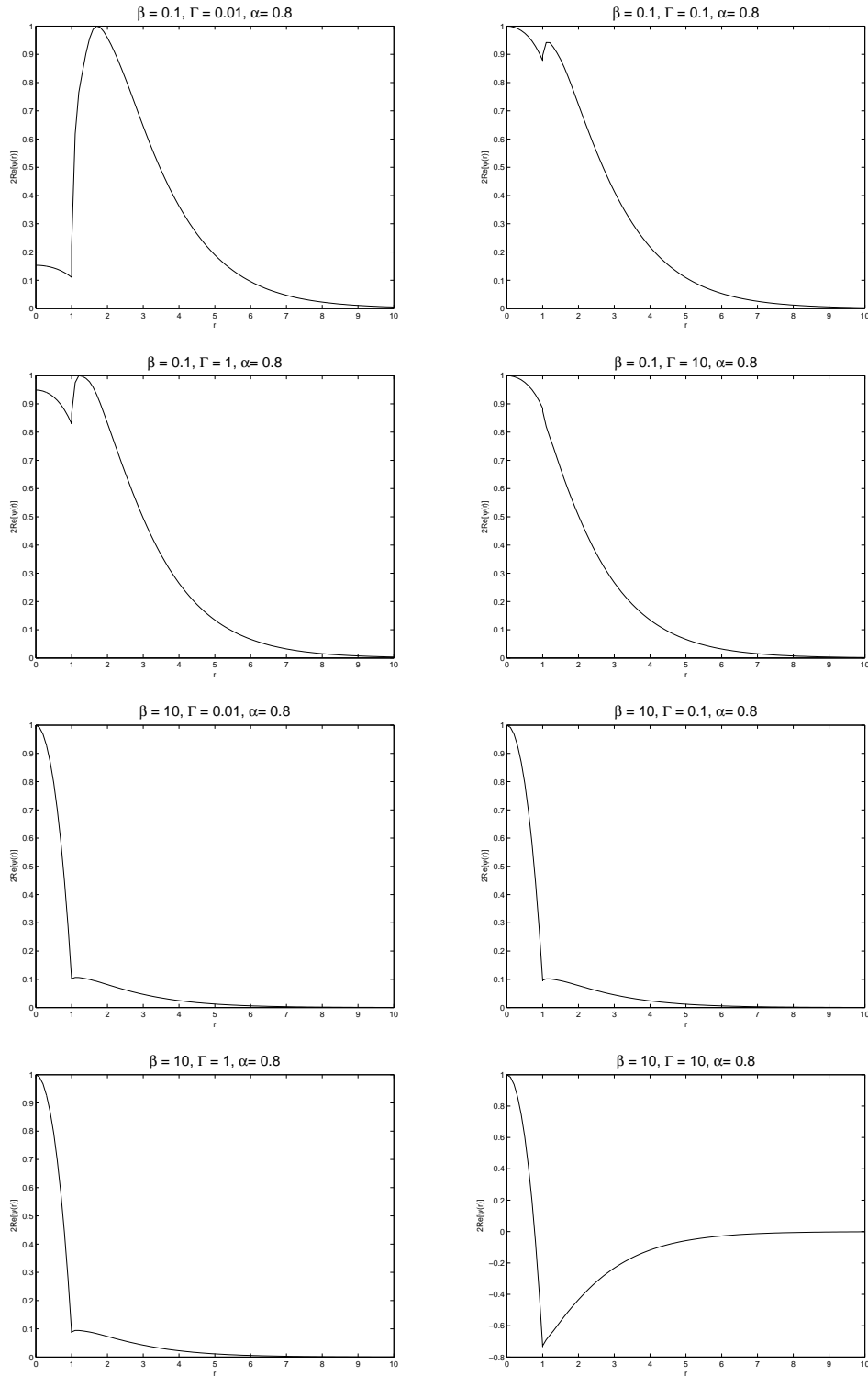
Obr. 3.11: **Asymptotická limita**  $R \rightarrow 0$ ,  $\alpha = O(1)$ ,  $A = 10^2$ . Amplitúdy poruchy v symetrických poruchách pre rôzne kombinácie parametrov. Funkcie sú vykresľované len pre oblasť s významným gradientom.



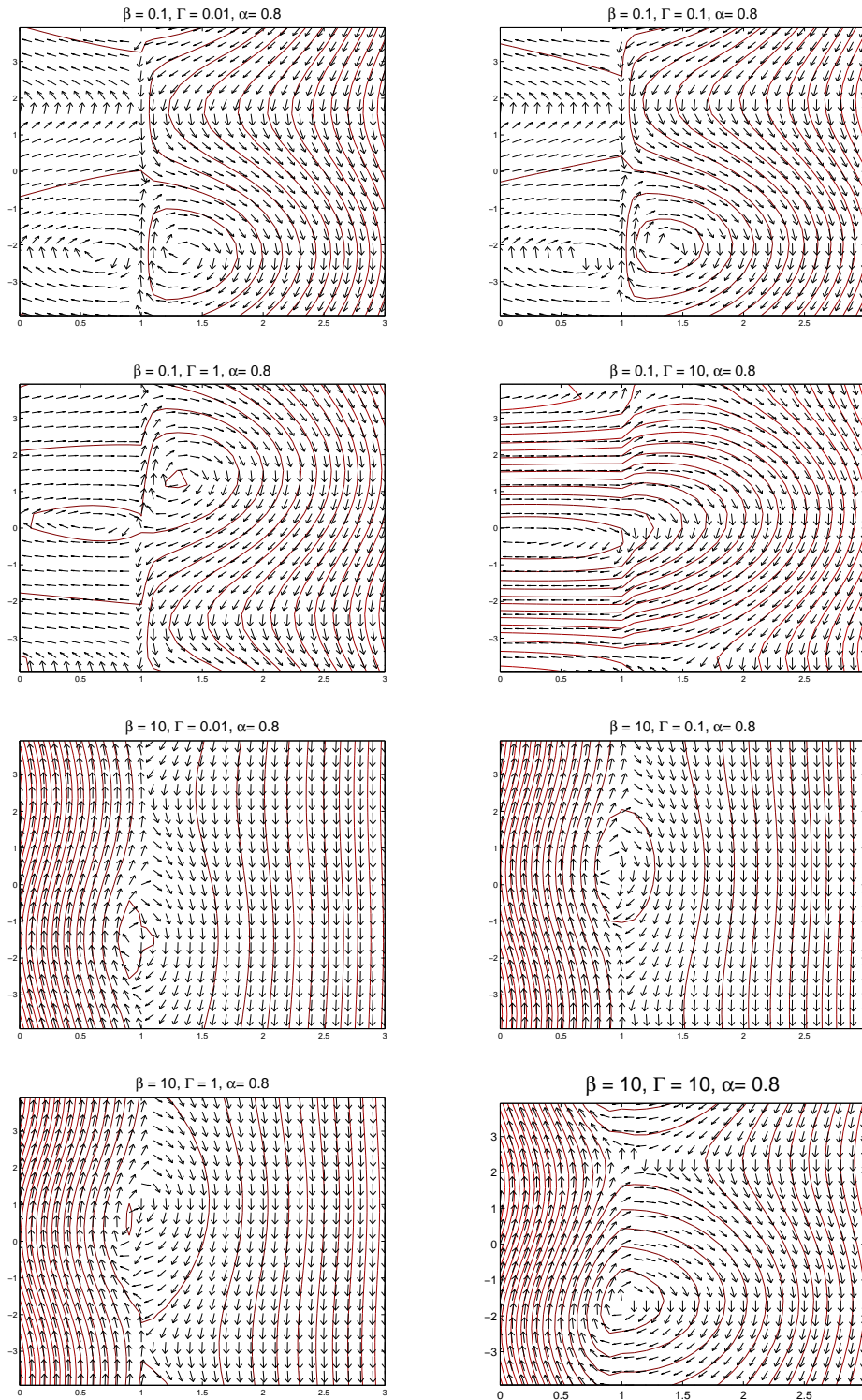
Obr. 3.12: **Asymptotická limita**  $R \rightarrow 0$ ,  $\alpha = O(1)$ ,  $A = 10^2$ . Izočiary rýchlostného poľa porušeného stavu v symetrických poruchách pre rôzne kombinácie parametrov.



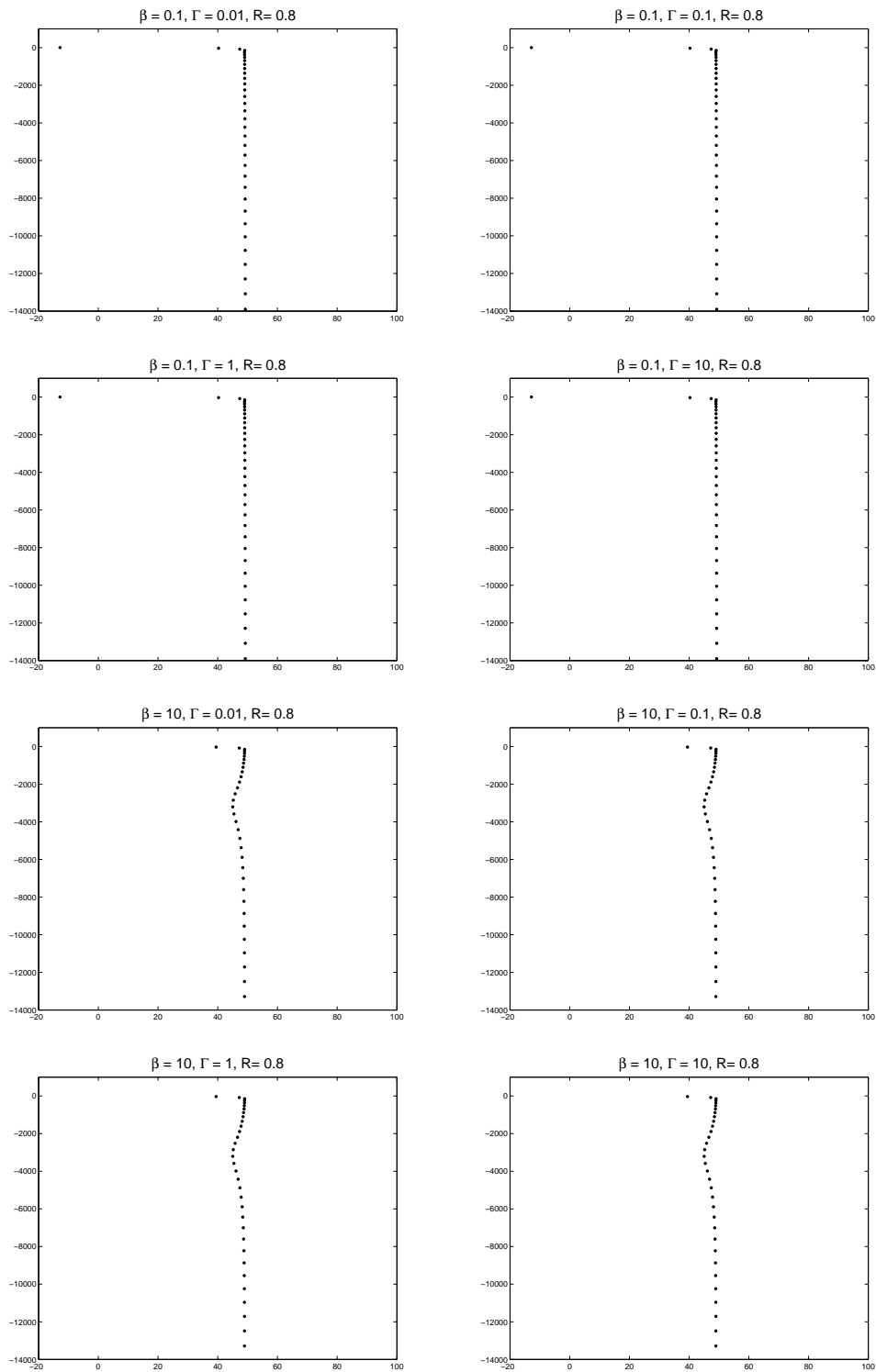
Obr. 3.13: Asymptotická limita  $R \rightarrow 0$ ,  $\alpha = O(1)$ ,  $A = 10^2$ . Spektra v antisymetrických poruchách pre rôzne kombinácie parametrov.



Obr. 3.14: **Asymptotická limita**  $R \rightarrow 0$ ,  $\alpha = O(1)$ ,  $A = 10^2$ . Amplitúdy poruchy v anti-symetrických poruchách pre rôzne kombinácie parametrov. Funkcie sú vykresľované len pre oblasť s významným gradientom.

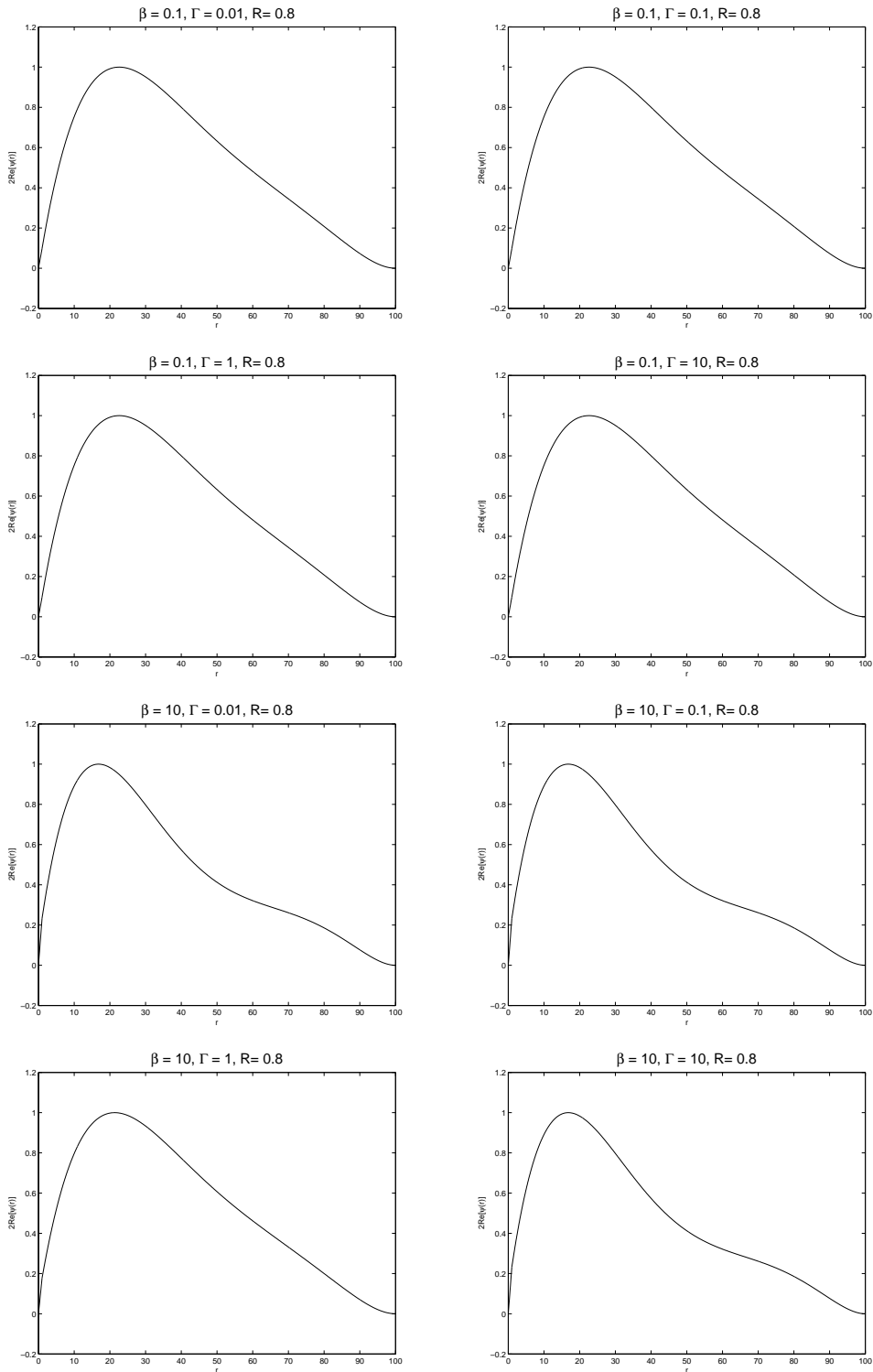


Obr. 3.15: **Asymptotická limita**  $R \rightarrow 0$ ,  $\alpha = O(1)$ ,  $A = 10^2$ . Izočiary rýchlostného poľa porušeného stavu v antisymetrických poruchách pre rôzne kombinácie parametrov.

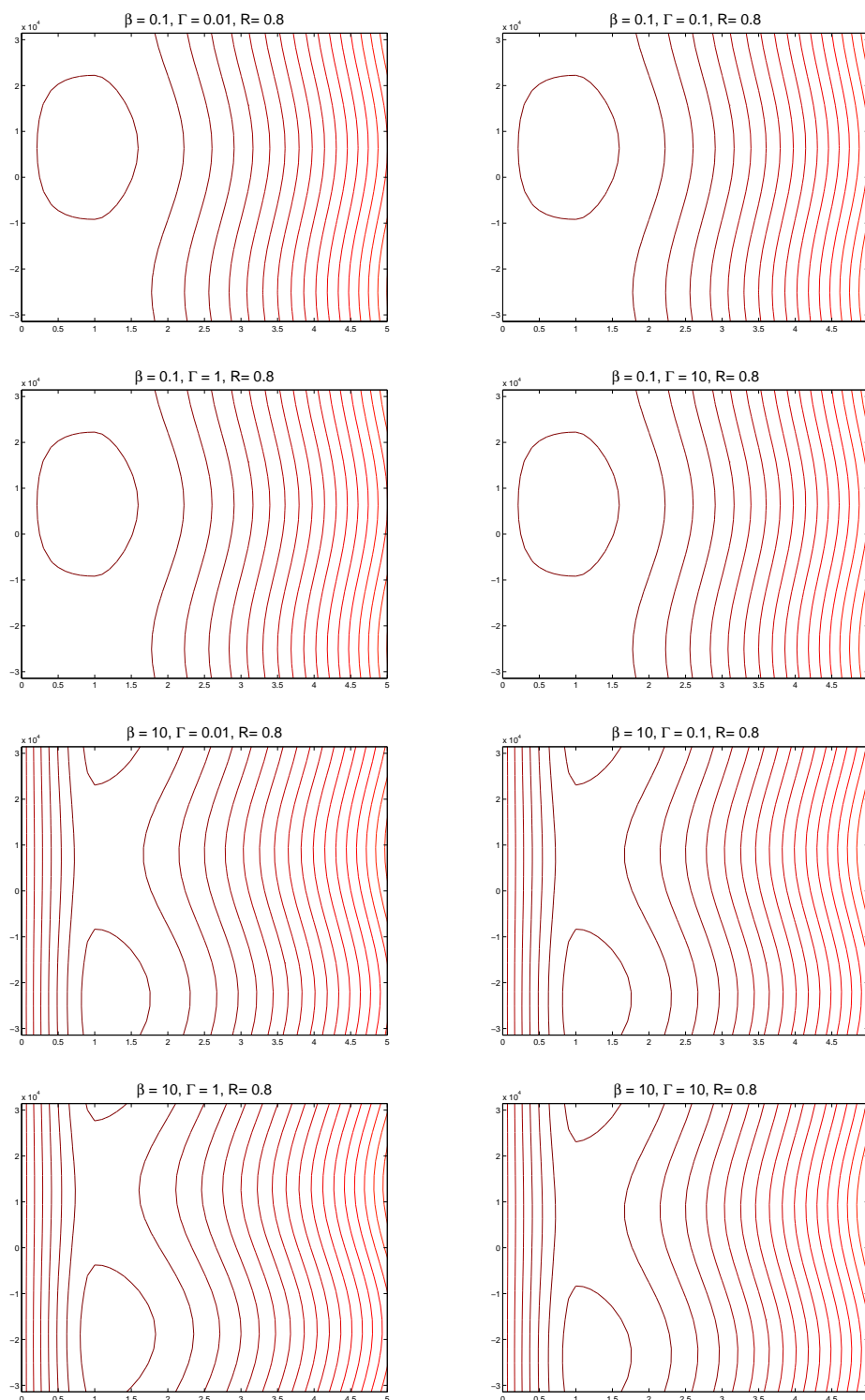


Obr. 3.16: Asymptotická limita  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $R = O(1)$ ,  $A = 10^2$ . Spektrá v symetrických poruchách pre rôzne kombinácie parametrov.

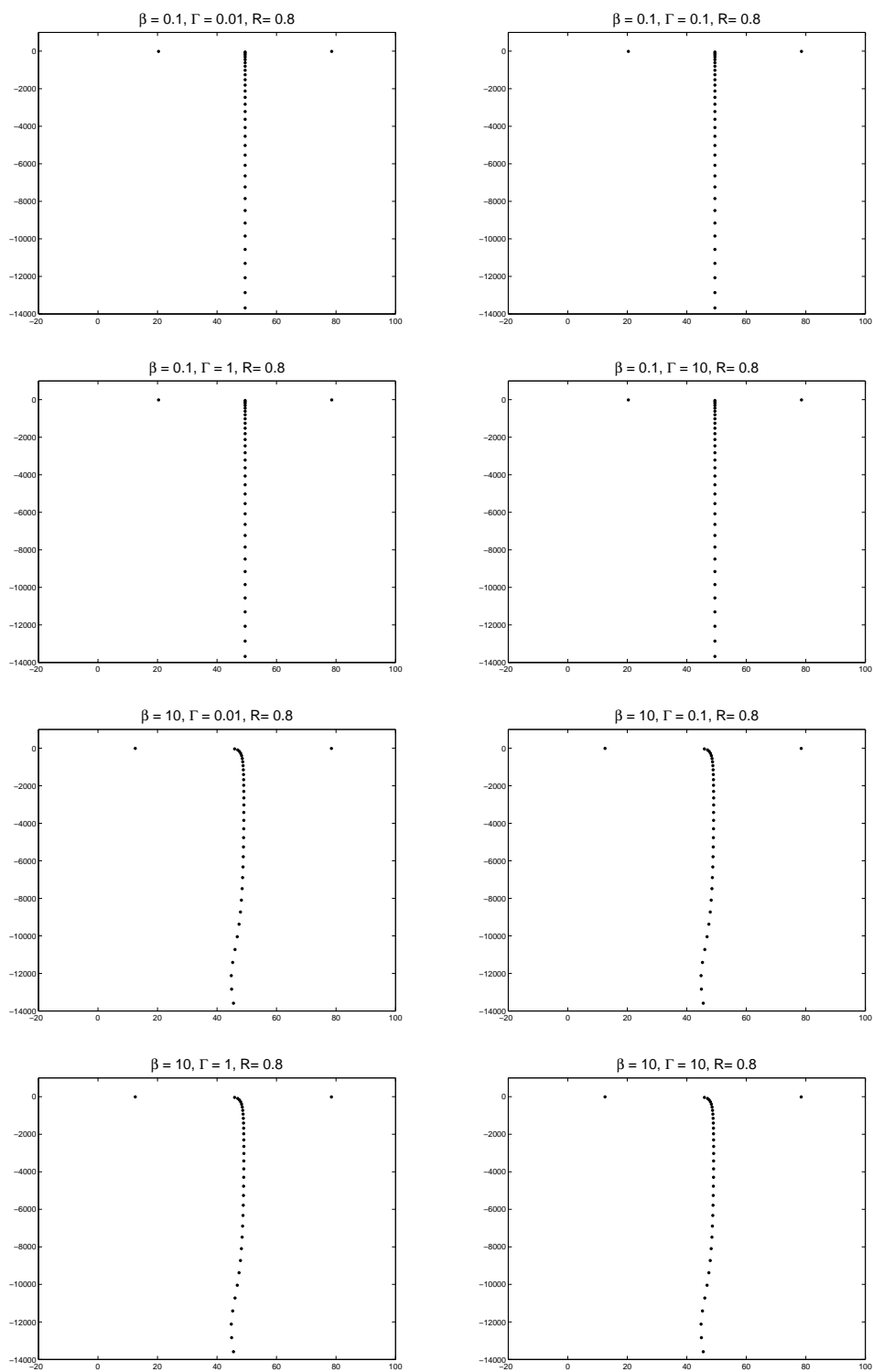




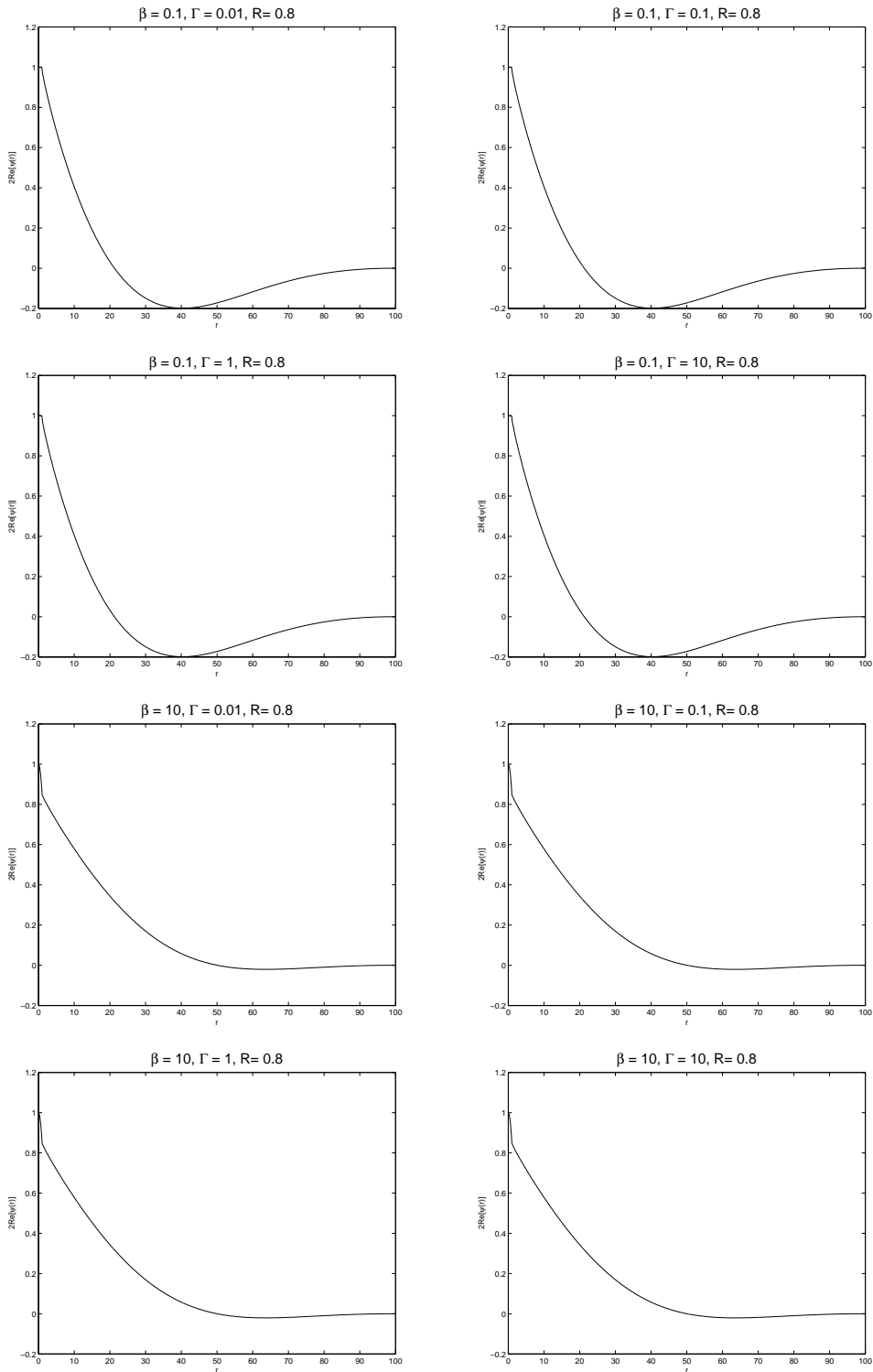
Obr. 3.17: **Asymptotická limita**  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $R = O(1)$ ,  $A = 10^2$ . Amplitúdy poruchy v symetrických poruchách pre rôzne kombinácie parametrov.



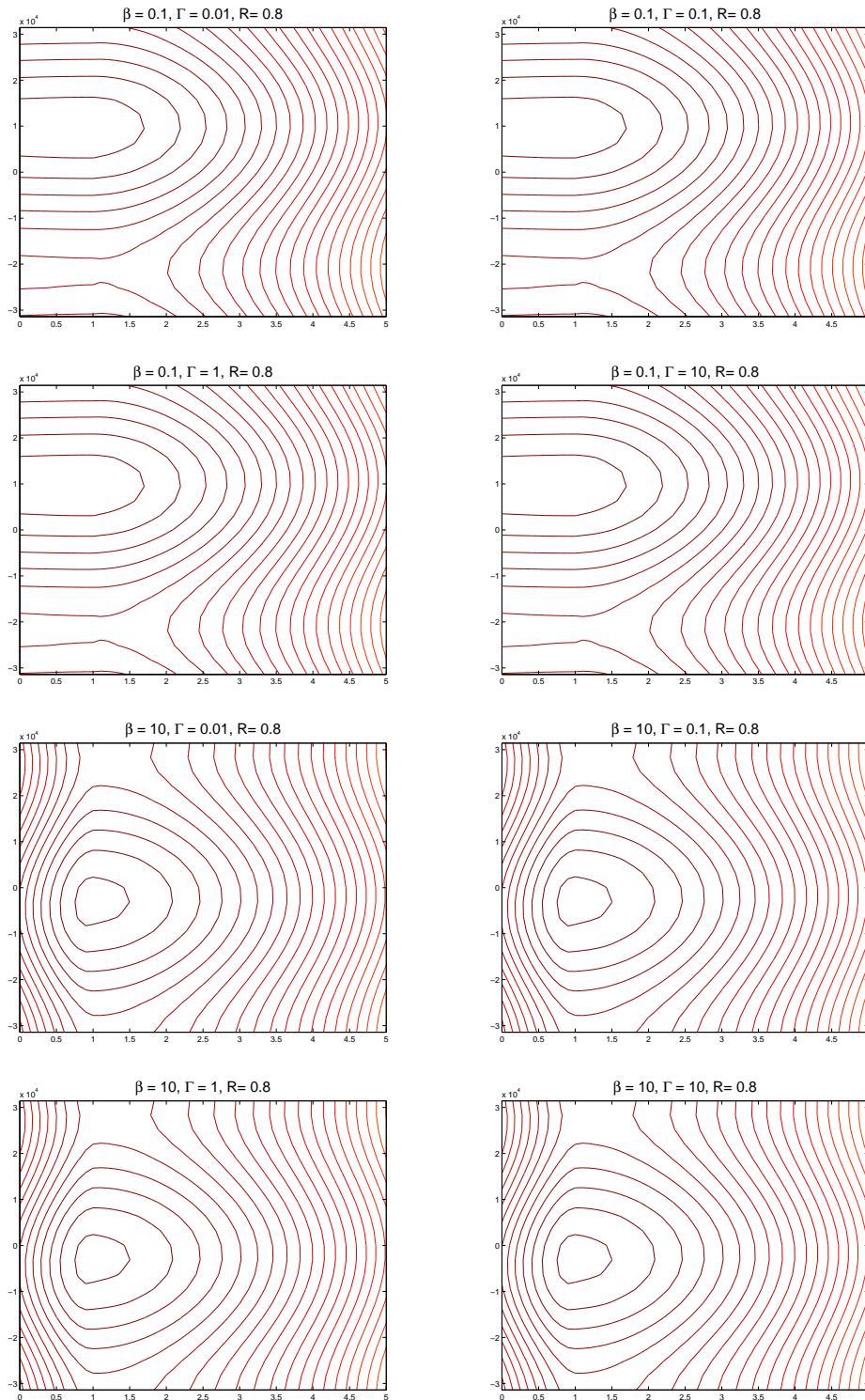
Obr. 3.18: **Asymptotická limita**  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $R = O(1)$ ,  $A = 10^2$ . Izočiary rýchlostného poľa porušeného stavu v symetrických poruchách pre rôzne kombinácie parametrov.



Obr. 3.19: **Asymptotická limita**  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $R = O(1)$ ,  $A = 10^2$ . Spektra v antisymetrických poruchách pre rôzne kombinácie parametrov.



Obr. 3.20: **Asymptotická limita**  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $R = O(1)$ ,  $A = 10^2$ . Amplitúdy poruchy v antisymetrických poruchách pre rôzne kombinácie parametrov.



Obr. 3.21: **Asymptotická limita**  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $R = O(1)$ ,  $A = 10^2$ . Izočiary rýchlostného poľa porušeného stavu v antisymetrických poruchách pre rôzne kombinácie parametrov.

# Záver

Hlavným cieľom tejto práce bola analýza stability paralelného planárneho prúdu a porovnanie numerického riešenia s asymptotickými výsledkami v špeciálnych limitných prípadoch. Numerické formy riešení v aproximáciách vykazovali rovnaký kvantitatívny charakter ako príslušné asymptotické formy. Keďže v numerickom prístupe nemožno explicitne uvažovať polonekonečné oblasti, bolo potrebné pristúpiť k aproximatívemu riešeniu. Táto aproximácia viedla k čiastočnej nezhode numerického a asymptotického prístupu najmä v prípade antisymetrických porúch v Stokesovej limite pre malé vlnové čísla. Hlavnou príčinou rozchádzajúcich sa výsledkov je práve konečná aproximácia nekonečnej oblasti. Túto odlišnosť v antisymetrickom prípade Stokesovej limity sme potvrdili aj v dodatočnej asymptotickej analýze pre problém na konečnej oblasti. V prípade stabilitných diagramov boli zistené výsledky v súlade s očakávaním. I keď došlo k popísanej miernej odchýlke v absolútnych číslach, o stabilite základného toku principiálne rozhoduje práve znamienko imaginárnej časti vlastného čísla.

Riešením predmetnej úlohy tejto práce sa podarilo načrtnúť ďalšie možné scenáre podrobnejšieho skúmania. V úvode sme načrtli situáciu pre jeden laminárny prúd, pričom možné rozšírenie by mohlo viesť k úlohe s dvoma prítomnými prúdmi. Táto situácia by viedla na analýzu až v troch parametricky odlišných oblastiach. Z hľadiska numerického prístupu, by však bolo nutné úlohu riešiť na štyroch oblastiach so zohľadnením symetrie. Tento fakt by prispel k zvýšenej výpočtovej náročnosti. Vzhľadom na zlú podmienenosť systému by bolo nutné pristúpiť k modifikáciám metódy napríklad voľbou špeciálneho maticového prefaktora.

# Literatúra

- [Acheson, 2005] ACHESON, D. J.: *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford University Press, 2005
- [Babušíková, 1999] BABUŠÍKOVÁ, J. A KOL.: *Numerické metody*, skriptum UK, 1999
- [Bourne, 2002] BOURNE, D.: *Hydrodynamic Stability, the Chebyshev Tau Method and Spurious Eigenvalues*, University of Durham, 2002
- [Dongarra a kol., 1996] DONGARRA, J.J., STRAUGHAN, B., & WALKER, D.W.: *Chebyshev tau-QZ algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems*, Applied Numerical Mathematics. **22**, 399-434, 1996
- [Drazin, 2004] DRAZIN, P. G., RAID, W. H.: *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, 2004
- [Guba a Revallo, 2012] GUBA, P., REVALLO, M.: *Shear-Flow instability at the interface between immiscible fluids*, preprint, 2012
- [Huang a Sloan, 1994] HUANG, W. & SLOAN, D.M.: *The pseudospectral method for solving differential eigenvalue problems*, J. Comput. Phys. **111**, 399-409, 1994
- [Joseph a kol., 1987] JOSEPH, D. D., THAN, P. T. & ROSSO, F.: *Instability of Poiseuille flow of two immiscible liquids with different viscosities in a channel*, Int. J. Engng Sci. **25**, 189-204, 1987
- [Juniper a Rees, 2010] JUNIPER, M.P., REES, S.J.: *The effect of confinement on the stability of viscous planar jets and wakes*, J. Fluid Mech. **656**, 309-336, 2010
- [Mason, 2003] MASON, J.C.: *Chebyshev Polynomials*, C&H, 2003
- [Moler a Stewart, 1972] MOLER, C.B., STEWART, G.W.: *An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems*, Technical report, University of Michigan, 1972
- [Orszag, 1971] ORSZAG, S. A.: *Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation*, J. Fluid Mech. **50**, 689-703, 1971
- [Orszag, 1980] ORSZAG, S. A.: *Spectral Methods for Problems in Complex Geometries*, J. Comput. Phys. **37**, 70-92, 1980
- [Renardy, 1987] RENARDY, Y.: *Viscosity and density stratification in vertical Poiseuille flow*, Phys. Fluids **30**(6) 1638-1648, 1987
- [Talon a Meiburg, 2011] TALON, L., MEIBURG, E.: *Plane Poiseuille flow of miscible layers with different viscosities: instabilities in the Stokes flow regime*, J. Fluid Mech. **686**, 484-506, 2011
- [Trefethen, 2000] TREFETHEN, L. N.: *Spectral Methods in Matlab*, SIAM, 2000
- [Yih, 1967] YIH, C. S.: *Instability due to viscosity stratification*, J. Fluid Mech. **27**, 337-352, 1967

# Zdrojové kódy systému MATLAB

```
clear all
nIn = 128;
nOut = nIn;
% Definovanie vstupov
Be = 0.5; R = 1; Ga = 1; A = 10^2;
m = 1; k = 0; ga = 1/(A-1); Al = 0.8;

[DIn,rIn] = cheb(nIn);
[DOut,rOut] = cheb(nOut);

% Konstrukcia matic M,N
EIn = eye(nIn+1,nIn+1); EOut = eye(nOut+1,nOut+1);
M = zeros(2*(nIn+nOut+2),2*(nIn+nOut+2)); N = M;
D1 = 4*DIn^2-(Al^2)*EIn; D2 = 4*(ga^2)*DOut^2-(Al^2)*EOut;

M(1:nIn+1,1:nIn+1) = 1i*Al*Be*R*EIn;
M(1:nIn+1,nIn+nOut+3:2*nIn+nOut+3) = ...
    (1/Be)*D1-1i*Al*R*diag(0.5*Be*(-1+((rIn+1)/2).^2));
N(1:nIn+1,nIn+nOut+3:2*nIn+nOut+3) = -1i*Al*R*EIn;

M(nIn+2:nIn+nOut+2,nIn+2:nIn+nOut+2) = 1i*Al*k*R*EOut;
M(nIn+2:nIn+nOut+2,2*nIn+nOut+4:2*(nIn+nOut)+4) = ...
    D2-1i*Al*R*diag((1/m-k)*((rOut+1)/(2*ga))+...
    0.5*k*((1+(rOut+1)/(2*ga)).^2-1));
N(nIn+2:nIn+nOut+2,2*nIn+nOut+4:2*(nIn+nOut)+4) = -1i*Al*R*EOut;

M(nIn+nOut+3:2*nIn+nOut+3,1:nIn+1) = D1;
M(nIn+nOut+3:2*nIn+nOut+3,nIn+nOut+3:2*nIn+nOut+3) = -EIn;

M(2*nIn+nOut+4:2*(nIn+nOut)+4,nIn+2:nIn+nOut+2) = D2;
M(2*nIn+nOut+4:2*(nIn+nOut)+4,2*nIn+nOut+4:2*(nIn+nOut)+4) = -EOut;

% Okrajove podmienky
M(nIn+nOut+2,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
N(nIn+nOut+2,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
M(nIn+nOut+3,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
N(nIn+nOut+3,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
```



```

M(1,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
N(1,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
M(2*nIn+nOut+4,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
N(2*nIn+nOut+4,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
M(2*(nIn+nOut)+4,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
N(2*(nIn+nOut)+4,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
M(nIn+nOut+2,nIn+2:nIn+nOut+2) = DOut(1,:);
M(nIn+nOut+3,1) = 1; M(nIn+nOut+3,nIn+nOut+2) = -1;

M(1,1) = -Be; M(1,nIn+nOut+2) = 1/m;
N(1,1:nIn+1) = 2*DIn(1,:); N(1,nIn+2:nIn+nOut+2) = ...
    -2*ga*DOut(nOut+1,:);

M(2*nIn+nOut+4,1) = -Be;
M(2*nIn+nOut+4,nIn+nOut+2) = m*Be*k;
N(2*nIn+nOut+4,1) = 2*A1^2;
N(2*nIn+nOut+4,nIn+nOut+2) = -2*m*Be*A1^2;
N(2*nIn+nOut+4,nIn+nOut+3) = 1;
N(2*nIn+nOut+4,2*(nIn+nOut)+4) = -m*Be;

M(2*(nIn+nOut)+4,1:nIn+1) = ...
    ((4*A1^2)/(m*Be)+(2i*Ga*A1^3)/(1/m-Be))*DIn(1,:);
P = ((1-1/m)*1i*A1*R/m)*EOut - ...
    (4*ga*A1^2+(2i*ga*Ga*A1^3)/(1/m-Be))*DOut;
M(2*(nIn+nOut)+4,nIn+2:nIn+nOut+2) = P(nOut+1,:);
M(2*(nIn+nOut)+4,nIn+nOut+3:2*nIn+nOut+3) = ...
    -(2/(m*Be))*DIn(1,:);
M(2*(nIn+nOut)+4,2*nIn+nOut+4:2*(nIn+nOut)+4) = ...
    2*ga*DOut(nOut+1,:);
N(2*(nIn+nOut)+4,nIn+2:nIn+nOut+2) = ...
    -2i*A1*R*ga*(1-1/m)*DOut(nOut+1,:);

% Alternativa 1 - Symetricke poruchy
%M(2*nIn+nOut+3,:) = []; N(2*nIn+nOut+3,:) = [];
%M(:,2*nIn+nOut+3) = []; N(:,2*nIn+nOut+3) = [];
%M(nIn+2,:) = []; N(nIn+2,:) = [];
%M(:,nIn+2) = []; N(:,nIn+2) = [];
%M(nIn+1,:) = []; N(nIn+1,:) = [];
%M(:,nIn+1) = []; N(:,nIn+1) = [];

% Alternativa 1 - Antisymetricke poruchy
M(nIn+1,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
N(nIn+1,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
M(2*nIn+nOut+3,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
N(2*nIn+nOut+3,:) = zeros(1,2*(nIn+nOut)+4);
M(nIn+1,1:nIn+1) = DIn(nIn+1,:);

```

```

M(2*nIn+nOut+3,nIn+nOut+3:2*nIn+nOut+3) = DIn(nIn+1,:);
M(nIn+2,:) = []; N(nIn+2,:) = [];
M(:,nIn+2) = []; N(:,nIn+2) = [];

% Heuristicka podmienka pre ocistenie spektra od chybných vlastných hodnot
[uu,ee] = eig(M,N,'qz');
EE = sum(ee).';
for p=1:sum(size(EE))-1
    if norm(EE(p))==Inf || norm(EE(p))<10^(-5)
        EE(p)=-1i*Inf;
    end
end
end
Spektrum = EE;
EE = imag(EE(2:nIn+nOut));
[ci,No] = max(EE);
ee = sum(ee).';
c=ee(No+1);
plot(Spektrum, '.', 'markersize',12)
c=ee(No+1);

%Vykreslovanie amplitudy
z = 0; t = 0;
dr1 = 0.1; dr2 = 0.1;
Psi = 2*real(uu(1:nIn,No+1)*exp(1i*Al*(z-c*t)));
Phi = 2*real(uu(nIn+2:nIn+nOut,No+1)*exp(1i*Al*(z-c*t)));
pPsi = spline(rIn(1:nIn),Psi);
pPhi = spline(rOut(2+1:nOut+1),Phi);
r1 = 0:dr1:1; r2 = 1:dr2:A;
hold off
psi = [ppval(pPsi,2*r1-1),ppval(pPhi,2*ga*(r2-1)-1)];
% Normalizacia
psi = psi./max(abs(psi));
if min(psi)==-1
    psi=-psi;
end
rr = [r1,r2];
plot(rr,psi,'color',[0.6,0.3,0.2])
xlabel('r')
ylabel('2Re[\psi(r)]')

% Izociary rychlostneho pola
psi = [];
zMax = pi/Al; zMin = -pi/Al; dz = pi/(50*Al);
for z = zMin:dz:zMax
    Psi = 2*real(uu(1:nIn,No+1)*exp(1i*Al*(z-c*t)));
    Phi = 2*real(uu(nIn+1:nIn+nOut,No+1)*exp(1i*Al*(z-c*t)));

```

```

    pPsi = spline(rIn(1:nIn),Psi);
    pPhi = spline(rOut(2:nOut+1),Phi);
    psi = [psi; ppval(pPsi,2*r1-1),ppval(pPhi,2*ga*(r2(2:end)-1)-1)];
end
rr = [r1,r2(2:end)];
v = -max(max(abs(psi))):0.05:max(max(abs(psi)));
contour(rr,zMin:dz:zMax,psi,v)

```

### Funkcia cheb.m<sup>9</sup>

```

function [D,x]=cheb(N)
    if N==0
        D=0;
        x=1;
        return
    end
    x=cos(pi*(0:N)/N)';
    c=[2;ones(N-1,1);2].*(-1).^((0:N)');
    X= repmat(x,1,N+1);
    dX=X-X';
    D=(c*(1./c)')./(dX+(eye(N+1)));
    D=D-diag(sum(D'));

```

<sup>9</sup>Podrobnosti o funkcii cheb.m možno nájsť v literatúre [Trefethen, 2000].