



UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY
A INFORMATIKY

“AGENT BASED“ MODELY FLUKTUÁCIÍ CIEN
ŠPEKULATÍVNYCH AKTÍV

(Diplomová práca)

BC.LÁSZLÓ PASTOREK

Vedúci: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

Bratislava, 2013

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

“AGENT BASED“ MODELY FLUKTUÁCIÍ CIEN
ŠPEKULATÍVNYCH AKTÍV

(Diplomová práca)

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika 1114
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

Bratislava 2013

Bc. László Pastorek



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. László Pastorek
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: "Agent based" modely fluktuácií cien špekulatívnych aktív

Cieľ: Porovnať rozličné modely krátkodobých fluktuácií cien špekulatívnych aktív a preskúmať modely, študované v diplomových prácach z rokov 2003-2009 z hľadiska "agent based" metodiky.

Vedúci: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 25.01.2012

Dátum schválenia: 26.01.2012

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Týmto prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne, iba s pomocou literatúry uvedenej v zozname, konzultácií s vedúcim diplomovej práce a vedomosti získaných počas štúdia.

V Bratislave, 20. apríla 2013

.....

Podakovanie

Týmto sa chcem poďakovať Prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za odbornú pomoc, množstvo cenných pripomienok a rád, ako aj za ochotu, prejavenu pri vedení práce.

Abstrakt

PASTOREK, László, Bc.: "Agent based" modely fluktuácií cien špekulatívnych aktív. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúci diplomovej práce Prof. RNDr. Pavol Brunovský DrSc. Bratislava 2013.

Predmetom práce je skúmanie modelu krátkodobých fluktuácií výmenných kurzov z pohľadu "agent based" prístupu. Vychádzajúc z modelu LUX a MARCHESI [2]. Model z diplomových prác A. ERDÉLY [4], K. BODOVÁ [5] a T. BOKES [7] sa dopĺňa o dynamiku podielu dvoch typov agentov. Práca ďalej obsahuje aj numerické simulácie tohto modelu.

Kľúčové slová: Agent Based model, fundamentalisti, chartisti, pevné body, stabilita, numerické simulácie

Abstract

PASTOREK, László, Bc.: Agent based models of the fluctuations of speculative assets. Comenius University in Bratislava. Faculty of mathematics, physics and informatics; Department of applied mathematics and statistics. Thesis supervisor Prof. RNDr. Pavol Brunovský DrSc. Bratislava 2013.

Subject of this thesis is to observe models short time fluctuations of exchange rates from the view of agent based approach, based on model LUX MARCHESE [2]. Model from master thesis by A. ERDÉLY [4], K. BODOVÁ [5] and T. BOKES [7] upgrades by dynamics ratio two types of agents. Furthermore the thesis contains several numerical simulations for this model.

Key words: Agent Based model, fundamentalists, chartists, fix points, stability, numerical simulations

Obsah

Úvod	9
1 Model Lux Marchesi	11
1.1 Zmeny v presvečení	12
1.2 Dopyt a ponuka	14
1.3 Model a stabilita	14
2 Modely fluktuácií výmenného kurzu	16
2.1 Porovnanie modelov	18
3 Vlastný model	20
3.1 Pevné body	22
3.2 Analýza stability pevných bodov	24
4 Numerické simulácie	26
4.1 Prípady $a < 1$	26
4.2 Prípady $a = 1$	32
4.3 Prípady $a > 1$	36
Záver	39
Literatúra	41
Príloha	42

Úvod

Hlavnou snahou ekonómov a matematikov bolo vytvárať stále lepšie a lepšie modely popisujúce realitu resp. budúcnosť. V priebehu pár desaťročí vzniklo viacero modelov v ktorých sa pokúšali rôznymi spôsobmi odhadnúť budúce správanie cien aktív. Tieto modely, ale častokrát majú také predpoklady, ktoré sú len ťažko splniteľné v reálnom svete. Takýto predpoklad je napríklad, že agenti sú rovnakí (homogénni) a správajú sa racionálne. Z tohto predpokladu vyplýva to, že keď sa trh dostane do rovnováhy určenej hodnotami fundamentálnych ekonomických parametrov, táto rovnováha je stabilná v tom zmysle, že všetci účastníci v nej sú v optime a nemajú dôvod svoj voľbu zmeniť. Ukazuje sa však, že prichádza k fluktuáciám okolo rovnováhy s oveľa menšou časovou škálou, než je škála zmien fundamentálnych parametrov, ale aj vzniku cenových bublín. Jedným z vysvetlení je, že agenti nie sú homogénni ale heterogéni. S takýmito modelmi sa môžeme oboznámiť v nedávno (2011) publikovanom prehľadovom článku [1], kde sú prezentované najreprezentatívnejšie modely, ako napríklad:

- Kim - Markowitz model
- Santa Fe Artificial Stock Market
- Minority Game
- Lux and Marchesi model

Z tohoto spektra modelov sme si vybrali model Luxa a Marchesiho [2] pre jeho príbuznosť s modelom, študovaným v diplomovej práci A. Erdélyi [4].

Na túto diplomovú prácu nadväzujú aj ďalšie diplomové práce z minulých rokov. Sú to práce od K. Boďovej[5] , J. Szolgayovej [6] a T. Bokesa [7]. Ako sme už spomínali tieto modely sú založené na heterogenite agentov, ktorých snahov je zarobiť na pohybe cien špekulatívnych aktív. Nimi rozumieme aktíva, ktoré sa kupujú a predávajú s cieľou zarobiť na pohybe ich cien. Sú to okrem iného akcie, komodity, cudzia mena. V týchto modeloch sa agenti spravidla klasifikujú do dvoch tried:¹

- fundamentalisti: rozhodujú sa na základe fundamentálnych ekonomických faktorov ako sú napríklad v prípade cudzej meny parita kúpnej ceny alebo úrokový diferenciál. Svoje očakávania zakladajú na predpoklade, že sa cena v dlhodobej perspektíve vráti k rovnováhe, danej fundamentálnymi veličinami. Predávajú, ak je cena nad týmto ekvilibriom, lebo predpokladajú pokles ceny a kupujú v opačnom prípade.
- chartisti: svoje očakávania tvoria na základe vývoja cien v bezprostrednej minulosti, predávajú, keď cena aktíva má klesajúci trend a nakupujú v opačnom prípade.

V spomenutých diplomových prácach autori ešte nepoužívajú pojmy fundamentalisti a chartisti, ale časom sa ukázalo, že tieto dva typy agentov sa tam naozaj vyskytujú a teda aj tento model môžeme zaradiť do triedy modelov s heterogénnymi agentami (resp. do tried “agent based”).

V prvej časti práce sa podrobnejšie oboznámime s jednotlivými modelmi heterogénných agentov. V ďalšej časti porovnáme tieto modely a vytvoríme nový model. Na konci práce urobíme analýzu tohto modelu, nájdeme pevné body a vyšetríme ich stabilitu. V poslednej kapitole uvedieme numerické simulácie.

¹Delenie agentov na fundamentalistov a chartistov zaviedli Frankel a Froot v práci [9].

Kapitola 1

Model Lux Marchesi

Lux a Marchesi sa pokúšajú modelovať správanie agentov na finančnom trhu. Predpokladajú, že počas obchodovania agenti menia svoje stratégie (z fundamentalistov sa stávajú chartisti a opačne) a tieto zmeny potom vplývajú spätne na cenu. V tejto práci len stručne uvedieme tento model, čitateľ môže nájsť pობrobnejšie vysvetlenie v pôvodnom článku [2]. Pre jednoduchosť použijeme podobnú symboliku ako v pôvodnej práci.

Lux a Marchesi vo svojom modeli delia agentov podľa toho akú stratégiu zvolia, do dvoch skupín. Prvú skupinu tvoria *fundamentalisti*, ktorý predpokladajú, že existuje tzv. *fundamentálna hodnota* p_f pre dané aktívum. Obchodná stratégia fundamentalistov je teda: predávajú ak aktuálna cena $p(t)$ je vyššia ($p(t) > p_f$) a nakupujú ak aktuálna cena je menšia ($p(t) < p_f$) ako fundamentálna hodnota, lebo predpokladajú, že cena sa do p_f vráti. Intuitívne má takéto správanie agentov na trh stabilizačný efekt (cenu aktíva udržajú okolo fundamentalnej hodnoty).¹ Druhú skupinu tvoria *chartisti*, ktorých správanie je ovplyvnené *stádovým efektom*² a aktuálnymi cenovými trendami. Kým celkový počet agentov je pevne daný (N), počet funda-

¹Ukazuje sa, že to nemusí tak byť, napríklad ak je reakcia fundamentalistov príliš prudká.

²”herding behavior stádovité správanie: Stádovité správanie sa investorov (tzv. investor herding) označuje jav, keď rozhodujúca časť investorov koná na trhu rovnakým spôsobom bez toho, aby sa takéto správanie dalo podložiť konkrétnymi ekonomickými impulzmi.

mentalistov a chartistov, n_f a n_c , sa môže meniť. Okrem toho, chartisti sa delia do dvoch podskupín: *optimisti* (n_+) sú presvečení, že cena aktíva bude rásť a preto vždy nakupujú, na druhej strane *pesimisti* (n_-) sú presvečení, že cena aktíva bude klesať, preto predávajú aktíva. Samozrejme platí $n_+(t) + n_-(t) = n_c(t)$. Kvôli jednoduchosti sú použité premenné z a x , ktoré vyjadrujú pomer chartistov medzi agentmi, a pomer pesimistov medzi chartistami.

$$z = \frac{n_c}{N} \quad (1.1)$$

$$x = \frac{n_+ - n_-}{n_c} \quad (1.2)$$

Premenná z nadobúda hodnoty od 0 (všetci agenti sú fundamentalisti) až 1 (všetci agenti sú chartisti). Na druhej strane, premenná x môže nadobúdať hodnoty z intervalu $[-1, 1]$, -1 značí, že chartisti sú všetci pesimisti a 1 že sú všetci optimisti.

1.1 Zmeny v presvečení

V každom časovom okamihu ľubovoľný agent môže zmeniť svoje presvedčenie alebo aj stratégiu danou *prechodovou pravdepodobnosťou*. Týmto spôsobom, je určená vnútorná dynamika v rámci tried. Prechodové pravdepodobnosti medzi fundamentalistami a optimistami, fundamentalistami a pesimistami sú dané nasledovne

$$p_{+f} = \nu_2 \exp(U_{2,1}) p_{f+} = \nu_2 \exp(-U_{2,1}) \quad (1.3)$$

a

$$p_{-f} = \nu_2 \exp(U_{2,2}) p_{f-} = \nu_2 \exp(-U_{2,2}). \quad (1.4)$$

Parameter ν_2 je konštantný, $U_{2,1}$ a $U_{2,2}$ sú úžitkové funkcie, ktorých hodnota vyjadruje rozdiel medzi okamžitými ziskami dvoch skupín (stratégií). Prechodová pravdepodobnosť medzi optimistami a pesimistami je

$$p_{+-} = \nu_1 \exp(U_1); p_{-+} = \nu_1 \exp(-U_1); \quad (1.5)$$

kde parameter ν_1 je zase konštantný, U_1 je podobne úžitková funkcia. Zdôvodnením voľby užitkových funkcií čitateľ môže nájsť v [2].

$$U_1(x, z, p) = \alpha_1 x + \alpha_2 \dot{p} / \nu_1, \dot{p} = dp/dt. \quad (1.6)$$

$$U_{2,1}(x, z, p) = \alpha_3((r + \dot{p}/\nu_2)/p - R - s|(p_f - p)/p|) \quad (1.7)$$

$$U_{2,2}(x, z, p) = \alpha_3(R - (r + \dot{p}/\nu_2)/p - s|(p_f - p)/p|) \quad (1.8)$$

Uvedieme najprv diferenciálnu rovnicu, ktorá opisuje zmenu počtu optimistov a pesimistov (keďže celkový počet agentov je konštantný zmenu fundamentalistov nepotrebuje zvlášť skúmať) a potom ich vysvetlíme.

$$\frac{dn_+}{dt} = (n_- p_{+-} - n_+ p_{-+})(1 - \frac{n_f}{N}) + n_f(\frac{n_+}{N})p_{+f} - n_+(\frac{n_f}{N})p_{f+} - (a-b)n_+ \quad (1.9)$$

$$\frac{dn_-}{dt} = (n_+ p_{-+} - n_- p_{+-})(1 - \frac{n_f}{N}) + n_f(\frac{n_-}{N})p_{-f} - n_-(\frac{n_f}{N})p_{f-} - (a-b)n_- \quad (1.10)$$

Keďže rovnice (1.9) a (1.10) sú analogické, budeme sa zaoberať len prvou rovnicou. Diferenciálna rovnica sa skladá z troch častí:

- výraz $(n_- p_{+-} - n_+ p_{-+})(1 - \frac{n_f}{N})$ vyjadruje zmenu presvedčení chartistov.
- výraz $n_f(\frac{n_+}{N})p_{+f} - n_+(\frac{n_f}{N})p_{f+}$ vyjadruje zmenu stratégií agentov
- výraz $(a - b)n_+$ vyjadruje rozdiel počtu agentov, ktorí vstúpili na trh resp. z neho odišli.

Konečná forma rovníc v premených x a z je nasledujúca

$$\frac{dx}{dt} = z[(1-x)p_{+-} - (1+x)p_{-+}] + 0.5(1-z)(1-x^2)(p_{+f} - p_{f+} + p_{f-} - p_{-f}) \quad (1.11)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.5(1-z)z(1+x)(p_{+f} - p_{f+}) + 0.5(1-z)z(1-x)(p_{-f} - p_{f-}) + a(1-z). \quad (1.12)$$

1.2 Dopyt a ponuka

Teraz sa pozrieme na obchodné stratégie jednotlivých agentov. Chartisti predávajú svoje aktíva podľa toho aké majú presvedčenie. Dopyt chartistov teda môžeme jednoducho vyjadriť podľa toho, aké majú presvedčenie

$$ED_c = (n_+ - n_-)t_c = nt_c = xzNt_c \equiv xzT_c; T_c \equiv Nt_c \quad (1.13)$$

kde t_c je pevne daná čiastka akcií s ktorými chartisti môžu obchodovať.³ Na druhej strany fundamentalisti nakupujú(predávajú) keď cena je pod(nad) fundamentálnou hodnotou. Teda môžeme povedať, že sa pokúsia realizovať arbitrážnu príležitosť, keď aktíva sú podcenené alebo nadhodnotné. Z tohto vyplýva, že ich dopyt závisí od rozdielu medzi fundamentálnou hodnotou a aktuálnou trhovu cenou ($p_f - p$), teda dostaneme

$$ED_f = n_f\gamma(p_f - p) = (1 - z)N\gamma(p_f - p) = (1 - z)T_f(p_f - p); T_f \equiv N\gamma \quad (1.14)$$

kde parameter γ vyjadruje citlivosť na rozdiel. Pre formulovanie cenovej dynamiky použijeme hypotézu, že cena lenivo reaguje na previs dopytu. Teda časový vývoj ceny je modelovaný nasledovne

$$dp/dt = \beta(ED_c + ED_f) = \beta(xzT_c + (1 - z)T_f(p_f - p)), \quad (1.15)$$

kde β je (konštant) rýchlosť reakcie ceny.

1.3 Model a stabilita

Dosadením prechodových pravdepodobností (1.3),(1.4) a (1.5) do pohybových rovníc (1.11) a (1.12) a kombinovaním cenovej dynamiky (1.15) dostaneme zložitý nelineárny systém diferenciálnych rovníc stavových premenných x, z a p . Formálne analýza tohto systému je trochu uľahčená ak transformovaním exponenciálnych výrazov na hyperbolické funkcie.⁴ Takto dostaneme

³Lux používa označenie ED ako excess demand a preto použijeme aj my toto označenie
⁴ $Sinh(x) = 0.5(e^x - e^{-x}), Cosh(x) = 0.5(e^x + e^{-x})$ a $Tgh(x) = Sinh(x)/Cosh(x)$

nasledujúci systém

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2z\nu_1[Tgh(U_1) - x]Cosh(U_1) + (1-z)(1-x^2)\nu_2[Sinh(U_{2,1}) - Sinh(U_{2,2})], \\ \dot{z} &= (1-z)z(1+x)\nu_2Sinh(U_{2,1}) + (1-z)z(1-x)\nu_2Sinh(U_{2,2}) + a(1-z), \quad (1.16) \\ \dot{p} &= \beta(xzT_c + (1-z)T_f(p_f - p)),\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}U_1 &= \alpha_1x + \alpha_2\dot{p}/\nu_1 \\ U_{2,1} &= \alpha_3((r + \dot{p}/\nu_2)/p - R - s|(p_f - p)/p|) \\ U_{2,2} &= \alpha_3(R - (r + \dot{p}/\nu_2)/p - s|(p_f - p)/p|)\end{aligned} \quad (1.17)$$

Lux a Marchesi zahrnuli viaceré rozumné aspekty do svojho modelu. Podarilo sa im vybudovať realistický model, ktorý dobre opisuje realitu. Na druhej strane si treba uvedomiť, že model je veľmi komplikovaný [13 parametrov], ktorých vplyv na model je ťažko sledovať.

Kapitola 2

Modely fluktuácií výmenného kurzu

V tejto kapitole sa budem zaoberať modelom, ktorým vo svojich diplomových prácach zaoberali Erdélyi [4], Boďová [5], Szolgayová [6] a Bokes [7]. Hoci sa v prácach hovorí o modeli fluktuácií výmenných kurzov, je rovnako dobre použiteľný pre iné druhy špekulatívnych aktív. Model, ktorý taktiež využíva delenie agentov na chartistov a fundamentalistov. Hodnota výmenného kurzu je jedným hlavným ukazovateľom danej ekonimiky, ktorý však závisí od viacerých faktorov. Budeme sa zaoberať *krátkodobými odchýlkami* výmenného kurzu, vzhľadom na ktoré môžeme rovnovážny kurz považovať za konštantný. Nech \hat{S} je rovnovážna hodnota tohoto výmenného kurzu a pre výmenný kurz $S(t)$ tak dostaneme:

$$S(t) = \hat{S} + x(t), \quad (2.1)$$

kde $x(t)$ je odchýlka od rovnovážnej hodnoty. Potom môžeme predpokladať, že sa agenti jednoducho rozhodujú na základe relatívnej odchýlky. Práve preto hlavným cieľom tohto modelu je modelovanie zložky $x(t)$.

Na odhadnutie budúcej hodnoty odchýlky v modeli je použitá nasledujúca [4] diferenciálna rovnica s oneskorením

$$\dot{x} = a(x(t) - x(t-1)) - b | x(t) | x(t) \quad (2.2)$$

kde $a, b > 0$ sú parametre. Všimnime si, že rovnica má dva členy na pravej strane, logika za nimi je nasledujúca

- Prvý člen $a(x(t) - x(t - 1))$. Hodnota $(x(t) - x(t - 1))$ predstavuje pohyb ceny v bezprostrednej minulosti. Chartisti sa držia predpovede, že trend pohybu zachová aj v budúcnosti. Ak táto hodnota je kladná, to znamená, že kurz má rastúci(klesajúci) trend a teda budú nakupovať (predávať) cudziu menu. Ďalej predpokladáme, že efekt tohoto mechanizmu je lineárny a môžeme vyjadriť hodnotou a .
- Druhý člen, $b |x(t) - x(t)|$ Fundamentalisti naopak nakupujú(predávajú) ak aktuálna hodnota je pod(nad) rovnovážnou hodnotou. To znamená, že ak odchýlka je kladná(záporná) budú predávať(kupovať). Predpokladá sa, že čím väčšia bude veľkosť odchýlky ($|x(t) - x(t-1)|$), tým viac agentov sa bude správať ako fundamentalisti. Ďalej predpokladáme, že efekt tohoto mechanizmu je lineárny a môžeme vyjadriť hodnotou b .

A. Erdélyi v diplomovej práci [4] analyzuje (2.2) diferenciálnu rovnicu s oneskorením. Podarilo sa mu dokázať, že pri určitej prahovej hodnote parametrov stráca rovnovážny výmenný kurz stabilitu a pri prekročení tejto hodnoty vznikajú v simuláciach periodické fluktuácie. K.Boďová vo svojej diplomovej práci [5] prevedie spojitý model na diskretný model

$$x_{n+\Delta} = x_n + (A(x_n - x_{n-\Delta}) - B |x_n - x_{n-1}|) \Delta. \quad (2.3)$$

Kvôli jednoduchosti Boďová používa časový krok $\Delta = 1$ a namiesto konštanty A zavedie funkciu $\bar{A}(x_n)$ závislú od premennej x_n , ktorá bola zavedená preto, aby sa zamedzilo neohraničenosti trajektórií. Funkcia $\bar{A}(x_n)$ je definované nasledovne

$$\bar{A}(x_n) = A(M - |x_n - x_{n-1}|)^+, \quad (2.4)$$

kde $A > 0$ a $M > 0$ sú konštanty a $(x)^+ = \max\{x, 0\}$. Člen $\bar{A}(x_n)$ však má interpretáciu: Čím väčšia je hodnota $|x_n - x_{n-1}|$, tým menší počet agentov sa rozhoduje podľa aktuálneho trendu. Navrhnutý model je teda nasledujúci

$$x_{n+1} = x_n + A(x_n - x_{n-1})(M - |x_n - x_{n-1}|)^+ - B |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.5)$$

Ďalej pomocou substitúcií $x_n := Mx_n$ a $a = MA, b = MB$ dostane normalizovaný model¹

$$x_{n+1} = x_n + a(x_n - x_{n-1})(1 - |x_n|)^+ - b|x_n|x_n. \quad (2.6)$$

Pre stabilitu rovnovážného kurzu \hat{S} dostáva rovnako ako Erdelyi, že je asymptoticky stabilný pre $a < 1$ a nestabilný pre $a > 1$. Jej simulácie naznačujú, že pre $a > 1$ trajektórie konvergujú k invariantnej kružnici. Na tento model nadväzujú práce J. Szolgayovej[6] a T. Bokesa [7]. Bokes vo svojej diplomovej práci analyzuje model s diskretným časom priamo odvodený z diferenciálnej rovnice nahradením časovej derivácie diferenciou

$$x_{n+\Delta} = x_n + (A(x_n - x_{n-\Delta}) - B|x_n|x_n)\Delta. \quad (2.7)$$

podobne ako Bodová a Szolgayová. V predchádzajúcich prácach boli autori nútení upraviť model s diskretným časom pridaním dodatočného ohraničujúceho činiteľa. V tejto práci sa Bokes zaoberá analýzou modelu bez tohto faktoru, ale kratším časovým krokom než je dĺžka intervalu, podľa ktorého chartisti odvodzujú svoje očakávanie ($\Delta < 1$). Dokazuje, že ak $\Delta < \frac{1}{2}$ trajektórie zostávajú ohraničené.

2.1 Porovnanie modelov

V predchádzajúcich kapitolách sme uviedli dva typy modelov heterogénnych agentov. Hoci sa tieto modely na prvý pohľad nepodobajú, treba si uvedomiť že základná schéma v tvorbe týchto modelov je veľmi podobná:

$$\text{očakávania} \rightarrow \text{váhy} \rightarrow \text{dopyt/ponuka} \rightarrow \text{cena} \rightarrow \text{očakávania}.$$

Interpretácia tejto schémy je nasledovná: na základe očakávaní agentov si vieme odvodiť počty fundamentalistov a chartistov (váhy), pomocou ktorých vieme vytvoriť rovnicu dopytu (resp. ponuky). Podľa týchto rovníc sa

¹ďalej ešte substitúciou $y_n = x_{n-1}$ prevedie model na dvojrozmerný nelineárny diferečný systém.

agenti správajú a tým ovplyvňujú cenu (resp. odchýlku). Podstatným rozdielom modelu Lux-Marchesi (ďalej len LM) a modelu Erdélyi-Bođová-Bokes (ďalej len EBB) je, že kým v prvom agenti reagujú "lenivo" na zmenu ceny, v druhom sú funkciou ceny a teda reagujú okamžite. Presnejšie, rozdiel od tohto modelu v modeli LM od ceny závisí rýchlosť zmeny. V ďalšej kapitole pozmeníme model EBB tak, aby rovnako v LM táto väzba bola dynamickou.

Kapitola 3

Vlastný model

V tejto kapitole sa modelom EBB priblížime k modelu LM vo forme, že ho obohatíme o dynamiku zmeny počtu podielu fundamentalistov a chartistov. Pozrime sa ešte raz na pôvodnú rovnicu EBB modelu

$$\dot{x} = a(x(t) - x(t-1)) - b | x(t) | x(t).$$

Ako sme už spomínali, člen $a(x(t) - x(t-1))$ vyjadruje správanie chartistov a druhý člen $x(t)$ vyjadruje správanie fundamentalistov. Teda našou snahou bude nájsť (alebo vytvoriť) nasledujúci model:

$$\dot{x} = a(x(t) - x(t-1))c(t) - bf(t)x(t)$$

alebo v diskretnom prípade

$$x_{n+1} = x_n + A(x_n - x_{n-1})c_n - Bf_nx_n,$$

kde $c(t)$ a $f(t)$ resp. c_n a f_n vyjadruje počet chartistov a fundamentalistov v danom okamihu. Podobne ako v modeli LM budeme predpokladať konštantný celkový počet agentov, teda $c_n + f_n = N$. Pri taktomto predpoklade zaviedeme novú premennú z , ktorá bude vyjadrovať pomer fundamentalistov a chartistov:

$$z := \frac{f}{N}$$
$$(1 - z) := \frac{c}{N}$$

Teraz pomocou premennej z napíšeme model

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + A(x_n - x_{n-1})c_n - Bf_nx_n \\x_{n+1} &= x_n + A(x_n - x_{n-1})(1 - z_n)N - Bz_nNx_n \\x_{n+1} &= x_n + a(x_n - x_{n-1})(1 - z_n) - bz_nx_n\end{aligned}$$

kde $a = AN$ a $b = BN$. Takto sme dostali model, ktorý je veľmi podobný k modelu, ktorým má Boďová

$$x_{n+1} = x_n + a(x_n - x_{n-1})(1 - z_n) - bz_nx_n.$$

Keďže $c_n = N - f_n$, k tomu aby bol model úplný, treba doplniť dynamiku počtu fundamentalistov f_n . Vyjdeme z predpokladu, že počet fundamentalistov narastá, ak je odchýlka ceny od rovnovážnej vysoká a klesá, ak je nízka. Túto dynamiku môžeme vyjadriť nasledujúcou rovnicou

$$f_{n+1} = f_n + D(|x_n| - c) \quad (3.1)$$

kde parametry c, D sú kladné. Pri tejto dynamike sa však môže stať, že sa f_n dostane do záporných hodnôt, alebo prekročí N a tým sa stane záporným c_n . Aby sa tak nestalo treba rovnicu (3.1) pozmeniť tak, aby nadobúdala hodnoty iba z intervally $[0, N]$. To zabezpečíme tak, že nahradíme pravú stranu predpisu (3.1) výrazom $\max\{0, \min\{N, f_n + D(|x_n| - c)\}\}$ teda dostaneme

$$f_{n+1} = \max\{0, \min\{N, f_n + D(|x_n| - c)\}\} \quad (3.2)$$

Využitím vzťahu $f_n = z_nN$ dostaneme

$$\begin{aligned}Nz_{n+1} &= \max\{0, \min\{N, Nz_n + D(|x_n| - c)\}\} \\z_{n+1} &= \max\{0, \min\{1, z_n + d(|x_n| - c)\}\},\end{aligned}$$

kde $d = \frac{D}{N}$. Takto dostaneme dvojrozmernú diferencnú rovnicu druhého rádu

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + a(x_n - x_{n-1})(1 - z_n) - bz_nx_n. \\z_{n+1} &= \max\{0, \min\{1, z_n + d(|x_n| - c)\}\}\end{aligned}$$

substitúciami premenných $x_n = x_n, y_n = x_{n-1}$ a $z_n = z_n$, môžeme rovnicu pretransformovať na trojrozmernú diferenčnú rovnicu

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + a(x_n - y_n)(1 - z_n) - bz_n x_n \\y_{n+1} &= x_n \\z_{n+1} &= \max\{0, \min\{1, z_n + d(|x_n| - c)\}\}\end{aligned}\tag{3.3}$$

Je zrejmé, že explicitne sa nedá vyriešiť model (3.3), teda budeme skúmať niektoré kvalitatívne vlastnosti modelu. Našou prvou úlohou bude nájsť pevné body.

3.1 Pevné body

V prvom kroku rozpíšme tretí výraz z (3.3) nasledujúcim spôsobom

$$z_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{ak } z_n + d(|x_n| - c) \leq 0 \\ z_n + d(|x_n| - c) & \text{ak } 0 < z_n + d(|x_n| - c) < 1 \\ 1 & \text{ak } z_n + d(|x_n| - c) \geq 1 \end{cases}\tag{3.4}$$

Z definície pevných bodov vyplýva, že $x_{n+1} = x_n = \hat{x}, y_{n+1} = y_n = \hat{y}$ a $z_{n+1} = z_n = \hat{z}$. Dosadením do rovníc (3.3) (pričom namiesto tretej rovnice použijeme výraz (3.4)) dostaneme nasledujúce podmienky

$$0 = b\hat{z}\hat{x}\tag{3.5}$$

$$\hat{z} = \begin{cases} 0 & \text{ak } \hat{z} + d(|\hat{x}| - c) \leq 0 \\ \hat{z} + d(|\hat{x}| - c) & \text{ak } 0 < \hat{z} + d(|\hat{x}| - c) < 1 \\ 1 & \text{ak } \hat{z} + d(|\hat{x}| - c) \geq 1 \end{cases}\tag{3.6}$$

Z rovnice (3.5) vyplýva, že buď $\hat{x} = 0$ alebo $\hat{z} = 0$.

- Nech $\hat{x} = 0$ a \hat{z} je ľubovoľné. Takto dostaneme

$$\hat{z} = \begin{cases} 0 & \text{ak } \hat{z} - dc \leq 0 \\ \hat{z} - dc & \text{ak } 0 < \hat{z} - dc < 1 \\ 1 & \text{ak } \hat{z} - dc \geq 1 \end{cases}$$

Kedže parametre c a d sú kladné, možnosť $\hat{z} = 1$ môžeme vylúčiť. Situácia $\hat{z} = \hat{z} - dc$ tiež nemôže nastať. Zostane nám jediná možnosť a to prípad $\hat{z} = 0$ (je splnená aj podmienka $\hat{z} - dc \leq 0$).

- Nech $\hat{z} = 0$ \hat{x} je ľubovoľné. Takto dostaneme

$$0 = \begin{cases} 0 & \text{ak } d(|\hat{x}| - c) \leq 0 \\ d(|\hat{x}| - c) & \text{ak } 0 < d(|\hat{x}| - c) < 1 \\ 1 & \text{ak } +d(|\hat{x}| - c) \geq 1 \end{cases}$$

Ľahko si všimneme, že v prípade $\hat{z} = 0$ dostaneme pre \hat{x} podmienku $|\hat{x}| \leq c$.

Teda systém (3.3) má nekonečne veľa pevných bodov, pre ktoré platí

$$|\hat{x}| \leq c, \hat{y} = \hat{x} \text{ a } \hat{z} = 0 \tag{3.7}$$

3.2 Analýza stability pevných bodov

Pre analýzu stability pevného bodu dynamickému systému (DS)

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (3.8)$$

kde $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ a $F : X \rightarrow X$ je C^r , $r \geq 0$ sa používa nasledujúca veta

Veta 1 *Nech F je C^1 a nech \hat{x} je pevným bodom zobrazenia F . Potom \hat{x} je:*

- *asymptoticky stabilný, ak sú absolútne hodnoty všetkých vlastných hodnôt operátora¹ $DF(\hat{x})$ menšie ako 1*
- *nestabilný, ak má niektorá z vlastných hodnôt operátora $DF(\hat{x})$ absolútnu hodnotu väčšiu ako 1,*

Vnašom prípade

$$F(x, y, z) = \begin{cases} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{cases} \quad (3.9)$$

kde

$$F_1(x, y, z) = x_n + a(x_n - y_n)(1 - z_n) - bz_n x_n$$

$$F_2(x, y, z) = x_n$$

$$F_3(x, y, z) = \max\{0, \min\{1, z_n + d(|x_n| - c)\}\}$$

sa však Veta 1. nedá bezprostredne použiť pre (3.3), lebo $F_3(x, y, z)$ nie je diferencovateľná. Všimnime si však, že v okolí pevného bodu $(\hat{x}, \hat{x}, 0)$ a $|\hat{x}| < c$

¹Jacobiho matica

$$DF(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\hat{x}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\hat{x}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\hat{x}) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\hat{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\hat{x}) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(\hat{x}) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

platí $z(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 0$ a teda F je v ňom diferencovateľné. V takom bode platí

$$DF(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \begin{pmatrix} 1+a & -a & -b\hat{x} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Teda charakteristická funkcia

$$(1+a-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) - (-\lambda)(-a) = 0$$

$$\lambda[\lambda(\lambda-a-1)+a] = 0$$

$$\lambda = 0 \text{ alebo } [\lambda(\lambda-a-1)+a] = 0$$

Prvú vlastnú hodnotu už máme $\lambda_1 = 0$

$$\lambda^2 - \lambda(1+a) + a$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{(1+a) \pm \sqrt{(1+a)^2 - 4a}}{2} = \frac{(1+a) \pm (1-a)}{2}$$

teda

$$\lambda_2 = 1 \text{ a } \lambda_3 = a$$

Z Vety 1. vyplýva, že ak $a > 1$ pevné body $(\hat{x}, \hat{x}, 0)$ pre $|\hat{x}| < c$ sú nestabilné. Veta však nerieši stabilitu týchto bodov pre $a \leq 1$. Je zrejmé, že bod $(\hat{x}, \hat{x}, 0)$ pri $|\hat{x}| < c$ nemôže byť asymptoticky stabilný, pretože trajektória k nemu ľubovoľne ležiacemu bodu $(x, y, 0)$ je konštantná a teda nekonverguje k bodu $(\hat{x}, \hat{x}, 0)$. Pomocou zložitejšej teórie invariantných foliácií sa však dá dokázať, že každá trajektória lokálne konverguje k jedinému z bodov $(\hat{x}, \hat{x}, 0)$, $|\hat{x}| < c$.² Podobne ako v prácach [7], [5] sa nám nepodarilo rigorózne analyzovať ani globálne správanie trajektórií. To sa ani nedalo očakávať, pretože systém (3.3) je na rozdiel od dvojrozmerného systému v EBB trojrozmerný a teda zložitejší. Obmedzili sme sa teda na simulácie o ktorých hovorí nasledujúca kapitola.

²Informácia od školiteľa.

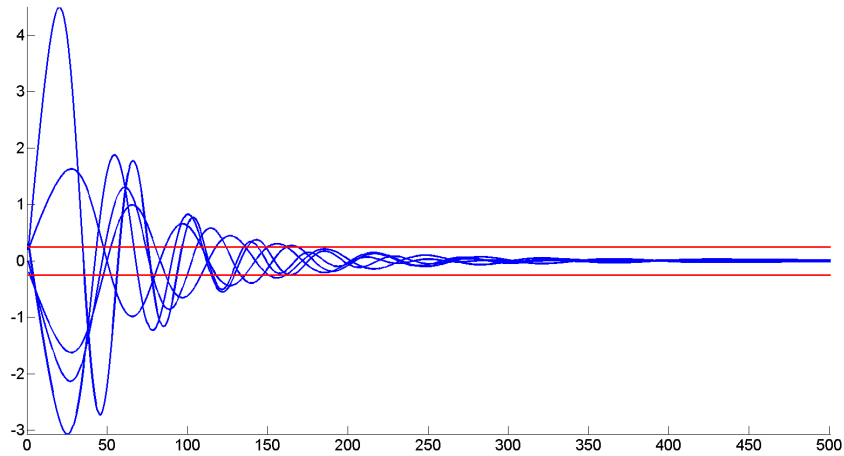
Kapitola 4

Numerické simulácie

V tejto kapitole sú prezentované grafy trajektórií vyhovujúce systému (3.3), ktoré boli získané počítačovými simuláciami. Simulácie boli vykonané v matematickom softvéri MATLAB 7.9.0. V predošlej kapitole bolo dokázané, že závislosti od hodnoty parametra a trajektória konverguje k jedinému pevnému bodu alebo pevný bod môže byť aj nestabilný. Budeme teda skúmať správanie trajektórií pre tri prípady $a < 1$, $a = 1$ a $a > 1$. V prílohe máme zoznam presných hodnôt parametrov, ktoré boli použité pri jednotlivých simuláciach.

4.1 Prípado $a < 1$

Prvým prípadom, ktorým sa budeme zaoberať je $a < 1$ pre ktorý očakávame asymptoticky stabilnú trajektóriu. Najprv sa pozrieme ako vyzerajú trajektórie pre rôzne počiatočné podmienky $x(0) = x_0$ a $y(0) = y_0$.

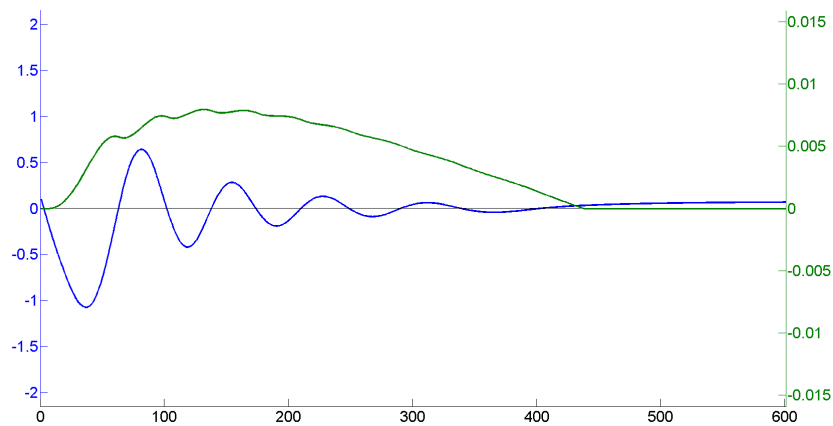


Obr. 4.1: $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = 0, c = 0.25$

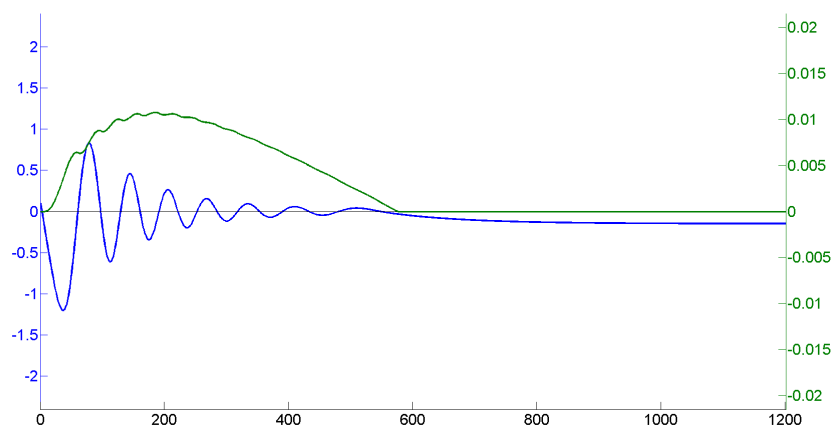
Ako vidíme na Obrázku 4.1 pre rôzne počiatkové hodnoty x_0 a y_0 (ostatné parametre sú nemenné) trajektórie konvergujú do rôznych pevných bodov $(\hat{x}, \hat{x}, 0)$, pričom platí $|\hat{x}| < c$ - červená čiara.

Ďalej budeme skúmať vplyv parametrov a, b, c, d na systém. V prílohe máme zoznam presných hodnôt parametrov (Tabuľka 4.1), ktoré boli použité pri jednotlivých simuláciach.¹ Na obrázkoch 4.2 a 4.3. sú znázornené trajektórie pre $a = 0.985$ a $a = 0.992$. Ako vidíme s hodnotou a bližšie sa k 1 sa zvyšuje tendencia systému k osciláciám.

¹Pri znázornení budeme pre premennú x používať modrú farbu a pre z zelenú.

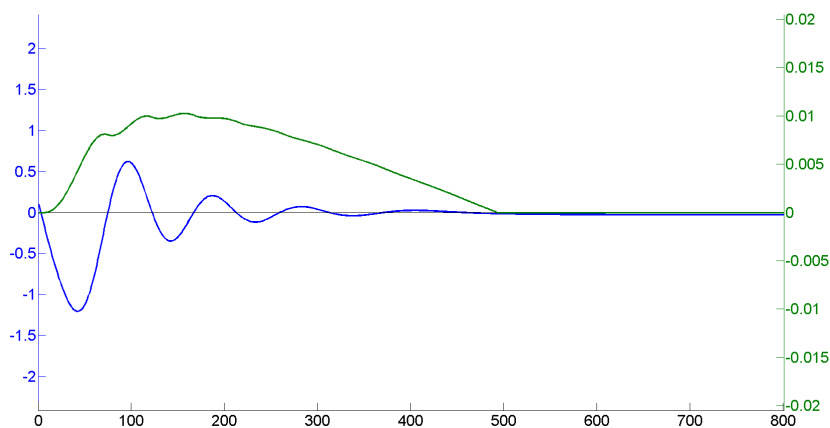


Obr. 4.2: $a = 0.985$

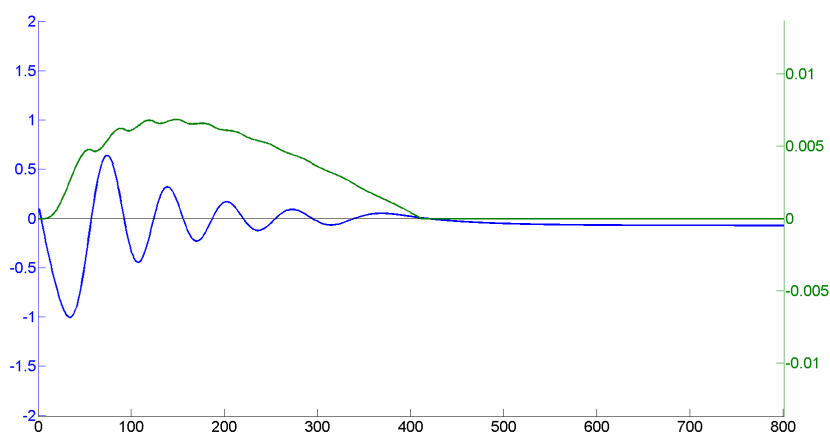


Obr. 4.3: $a = 0.992$

Zdá sa, že parameter b ovplyvňuje frekvenciu oscilácií (Obr. 4.4 a Obr 4.5). Kým pre menšiu hodnotu $b = 0.5$ je frekvencia malá, pre $b = 1.5$ je viditeľne väčšia.

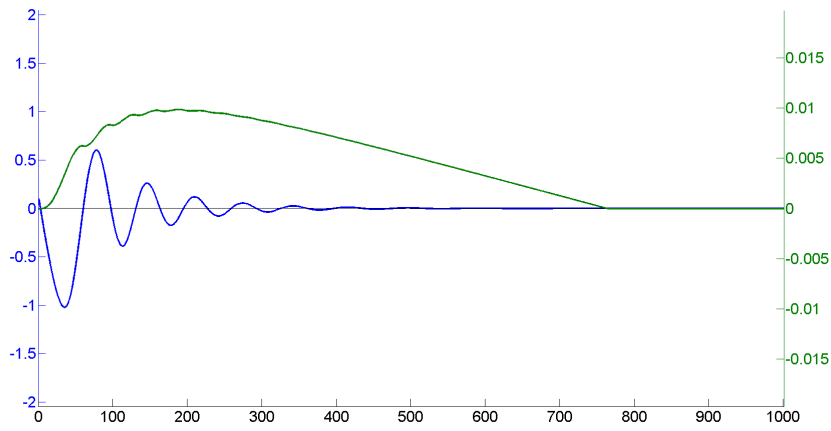


Obr. 4.4: $b = 0.5$

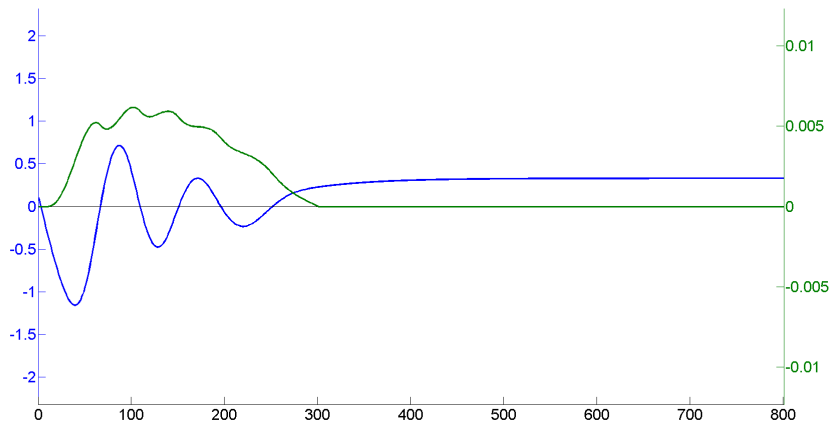


Obr. 4.5: $b = 1.5$

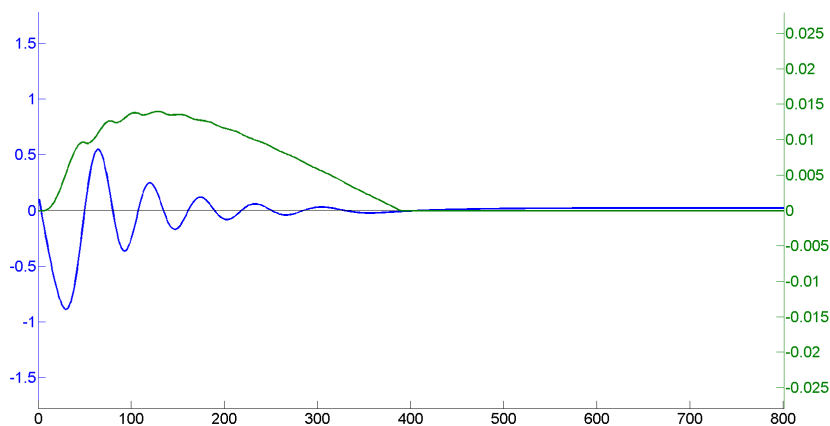
Na obrázkoch 4.6 a 4.7 sú porovnané trajektórie pre rôzne hodnoty parametra c . Je zjavné, že so zvýšením hodnoty parametra c sa zvyšuje rýchlosť konvergencie. Podobný priebeh sa odohráva aj pre parameter d (Obr. 4.8 a Obr. 4.9): nižšie hodnoty \rightarrow pomalšia konvergencia. Dá sa to vysvetliť tým, že pre nižšie hodnoty c a d počet fundamentalistov pomalšie klesá (reaguje), a tým pádom sa systém pomalšie dostane do rovnovážneho stavu.



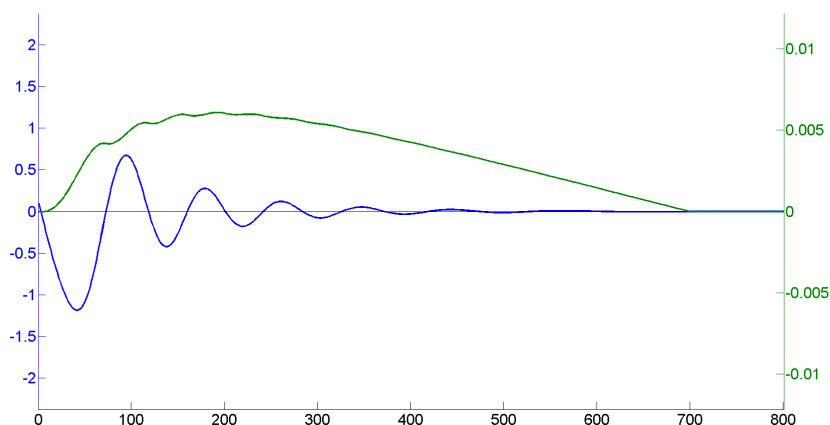
Obr. 4.6: $c = 0.1$



Obr. 4.7: $c = 0.35$



Obr. 4.8: $d = 0.0005$



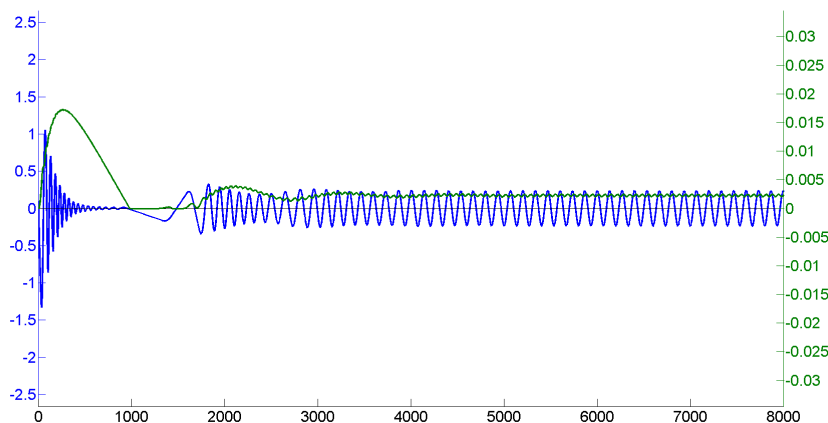
Obr. 4.9: $d = 0.0001$

Počítačové simulácie, teda nám potvrdzujú fakt, že pre hodnoty parametra $a < 1$ systém naozaj konverguje k jedinému z bodov $(\hat{x}, \hat{x}, 0)$, $|\hat{x}| < c$.²

²Podmienka $|\hat{x}| < c$, bola splnená pri každej simulácii. Hodnoty \hat{x} sú uvedené v prílohe, a čitateľ si to môže overiť - Tabuľka 4.2.

4.2 Prípád $a = 1$

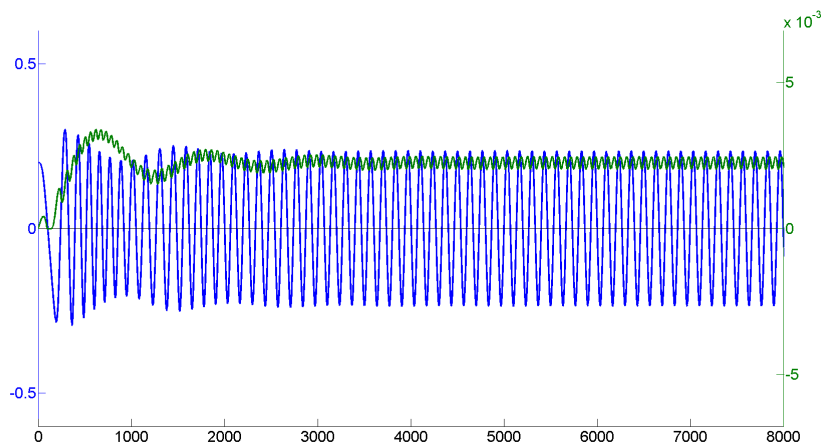
Numerické riešenie systému (3.3) pre hodnotu 1 parametra a je najzaujímavejší, lebo o tejto hodnote parametra nám nehovorí teória nič. Na Obrázok 4.10 vidíme, že hodnota odchýlky x_n najprv začína konvergovať, ale potom zrazu začne oscilovať.



Obr. 4.10: $a = 1, x_0 = 0.1, y_0 = 0.15$

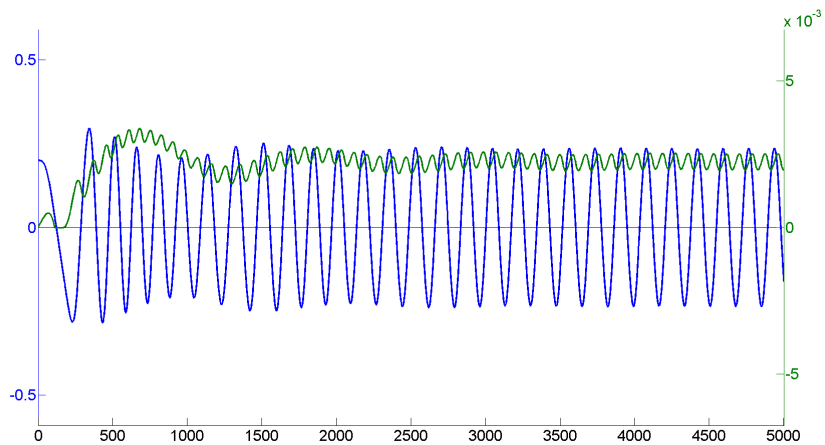
Treba si všimnúť, že dynamiku ceny môžeme rozdeliť na dve fázy: v prvej sa osciláciami ustáľuje na rovnovážnej hodnote, v druhej sa ustáľuje na osciláciách s frekvenciou, odlišnou od frekvencie oscilácií v prvej fáze. Ako naznačujú ďalšie simulácie, po zmene počiatkových hodnôt prvá fáza ubudne.³

³Prvá fáza bola prítomná v prípadoch, keď rozdiel $x_0 - y_0$ bol významnejší.

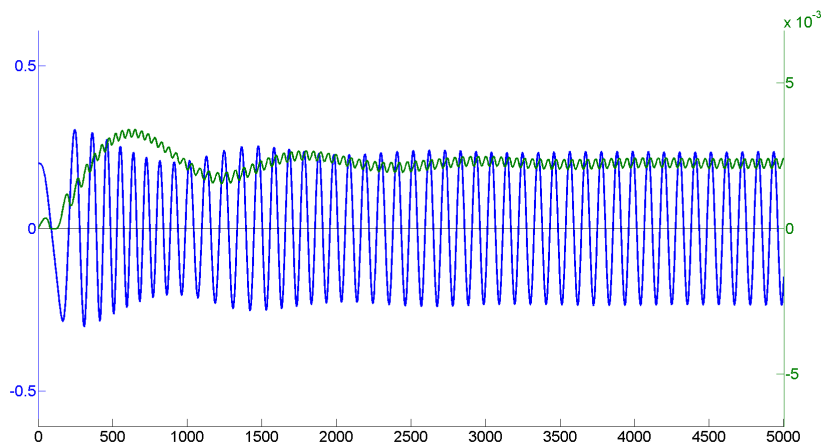


Obr. 4.11: $a = 1, x_0 = 0.2, y_0 = 0.2$

Na obrázkoch 4.12 a 4.13 je porovnaný vplyv parametra b . Vidíme, že vyššia hodnota b zvýši frekvenciu oscilácií.

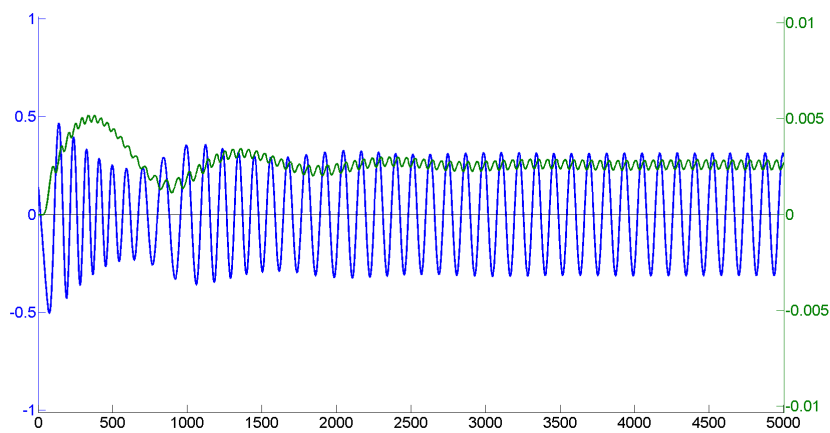


Obr. 4.12: $b = 0.6$

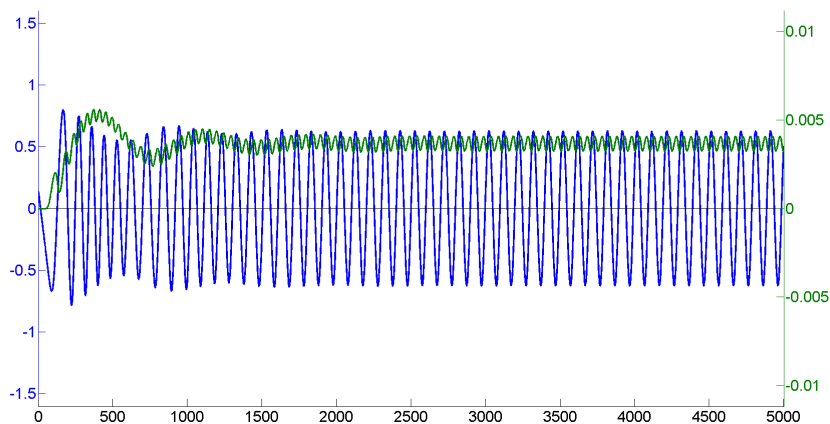


Obr. 4.13: $b = 1.6$

Na obrázkoch 4.14 a 4.15 zase skúmame vplyv parametra c . Vidíme, že čím väčšia je hodnota c tým väčšia je amplitúda oscilácií. To sa dalo aj intuitívne očakávať.

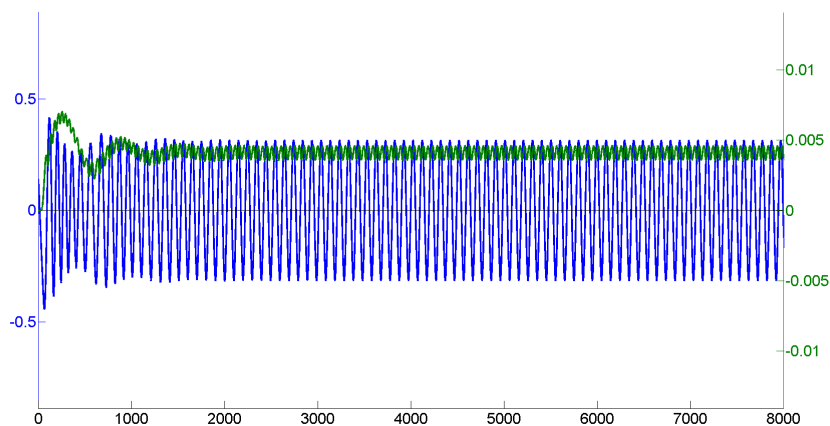


Obr. 4.14: $c = 0.2$

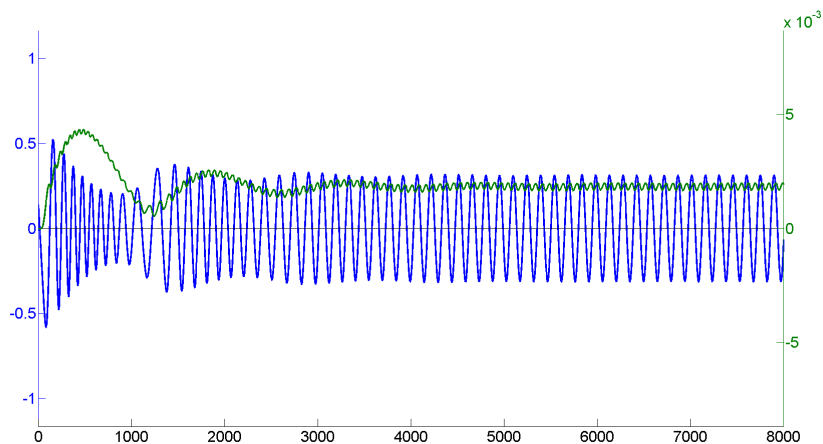


Obr. 4.15: parametre $c = 0.4$

Na rozdiel od prípadu $a < 1$ parameter d má odlišný vplyv na systém ako parameter c . V tomto prípade zvýšením hodnoty d sa zvyšuje frekvencia oscilácií (Obr 4.16. a Obr 4.17), podobne ako pri parametri b .



Obr. 4.16: parametre $d = 0.0005$



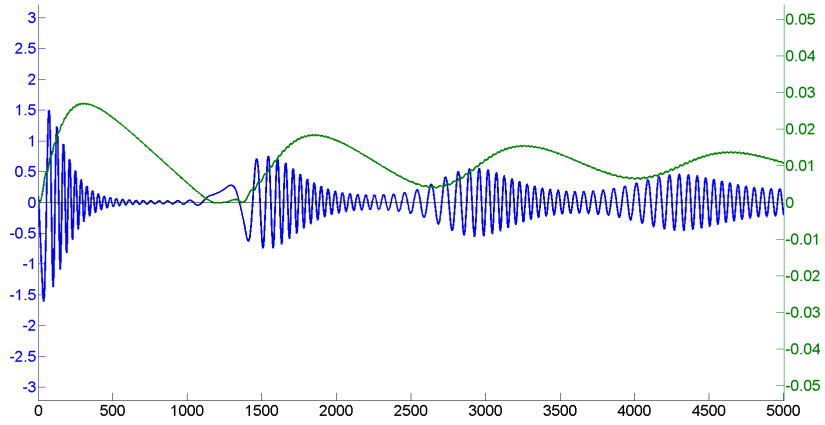
Obr. 4.17: parametre $d = 0.0001$

Počítačové simulácie nám naznačujú, že v prípade $a = 1$ dynamika fundamentalistov a ceny sa ustáľujú na osciláciách. Ako bolo ukázané, vlastnosti oscilácií - frekvencia, amplitúda - sú závislé od hodnôt parametrov b, c, d .

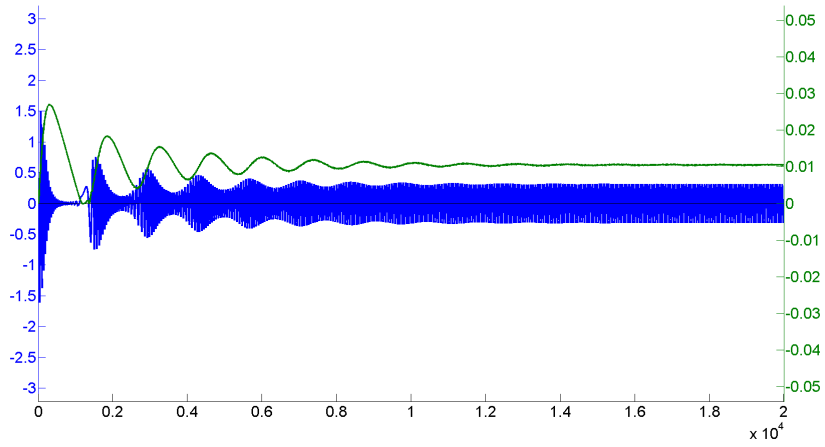
4.3 Prípady $a > 1$

Pre posledný prípad $a > 1$ nám teória hlási nestabilitu. V tomto prípade sa obmedzíme len na skúmanie vplyvu parametra a .⁴

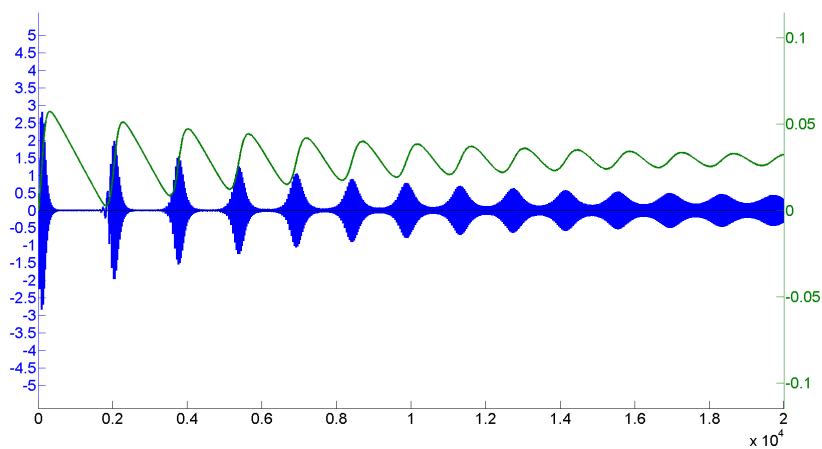
⁴Parametre b, c, d taktiež majú podobný vplyv ako v prípade $a = 1$, ale kvôli stručnosti ich teraz neuviedieme.



Obr. 4.18: parametre $a = 1.01$ a $n = 5000$



Obr. 4.19: parametre $a = 1.01$ a $n = 20000$



Obr. 4.20: parametre $a = 1.03$ a $n = 20000$

Počítačové simulácie nám naznačujú, že dynamika fundamentalistov a ceny sa ušľahujú na oscilácií, podobne ako v prípade $a = 1$. Posledné prípady však majú zaujímavú ekonomickú interpretáciu: náhly výskyt oscilácií po obdobiach pokoja možno považovať za cenové "bublíny."

Záver

Jadrom práce je skúmanie vplyvu heterogenity agentov upraveného modelu na krátkodobú dynamiku cien špekulatívnych aktív z diplomových prác [4],[5],[7]. Úprava spočíva v tom, že model je obohatený o dynamiku dvoch typov agentov - fundamentalistov a chartistov. Úprava je motivovaná "agent based" modelom z prác [2], [8].

Výsledný model je oproti modelu EBB zložitejší jednak v tom, že je troj-rozmerný, jednak tým, že nie je diferencovateľný. Preto bola aj matematicky rigorózna analýza jeho dynamiky v istej miere obmedzená na vymedzenie množiny pevných bodov a čiastočnú analýzu ich lokálnej stability.

V stabilnom prípade menšieho vplyvu chartistov na cenu ($a < 1$) numerické simulácie potvrdili výsledky, ktoré sa dali očakávať z teoretickej analýzy. Od modelu EBB sa líšia v tom, že limitnou hodnotou, na ktorej sa cena ustáli nemusí byť rovnovážna cena. Oveľa väčšie prekvapenie však priniesli simulácie prípadu $a \geq 1$.

V prípade $a = 1$ sú to dve celkom odlišné fázy priebehu, kým v prvej sa tlmenými osciláciami ustáľuje na rovnovážnej hodnote, v druhej sa ustáľuje na osciláciách s frekvenciou, odlišnou od frekvencie oscilácií v prvej fáze. V prípade a viac odlišného od 1 vznikajú náhle oscilácie po obdobiach pokoju, čo možno interpretovať ako cenové bubliny. Snahu vytvoriť model bublín možno pozorovať v literatúre [3]. Výsledky doterajších modelov sú podľa nás neuspokojivé z dvoch dôvodov: jednak sú oscilácie prítomné stále, jednak sú obojstrané vzhľadom na rovnovážnu cenu. Prvý nedostatok náš model nemá, druhý áno.

K výsledkom treba pristupovať s určitou opatrnosťou. Hoci model pozostáva iba z troch rekurentných vzťahov, nemožno celkom vylúčiť prítomnosť numerických artefaktov. Nedostatky samostatného modelu sú dva. Prvým je "surové" ohraničenie v dynamickej rovnici pre z , druhým je veľkosť kroku dynamiky, ktorý je rovnaký ako krok porovnávania cien aktíva chartistami. Ako sa totiž ukazuje v [7], zmenšenie kroku má vplyv na dynamiku, konkrétne zabezpečuje ohraničenosť trajektórií. Zaujímavé by bolo skúmať podobne ako v [4] limitný prípad so spojitým časom - diferenciálnu rovnicu s oneskorením.

Literatúra

- [1] M. Cristelli, L. Pietronero, A. Zaccaria, *Critical Overview of Agent-Based Models for Economics* arXiv:1101.1847 [q-fin.TR], 2011.
- [2] Thomas Lux, *The socio-economic dynamics of speculative markets: interacting agents, chaos, and the fat tails of return distributions* Journal of Economic Behavior Organization, Vol. 33,(1998), pp. 143-165
- [3] Thomas Lux, *Herd Behaviour, Bubbles and Crashes* The Economic Journal, Vol. 105, No. 431(Jul., 1995), pp. 881-896
- [4] Alexander Erdélyi, *A delay differential equation model of oscillations of exchange rates*, Diplomová práca FMFI UK, Bratislava, 2003.
- [5] Bodová, K., *Oscillation of the Foreign Exchange rate and the Devil's Staircase*, Diplomová práca FMFI UK, Bratislava, 2004.
- [6] Szolgayová, J., *Diskrétny model fluktuácií výmenného kurzu*, Diplomová práca FMFI UK, Bratislava, 2006.
- [7] Bokes, T., *Short time oscillations of exchange rates*, Diplomová práca FMFI UK, Bratislava, 2007.
- [8] Lux T., Marchesi M., *Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market* Nature, 397 (1999) page 498 - 500.
- [9] Frankel, J. A., Froot, K. A., 1990a, *Chartists, fundamentalists and the demand for dollars* In: Private behaviour and government policy in in-

dependent economies, Courakis, A. S., Taylor, M. P. Editors, Oxford University Press, New York, pp. 73-126

- [10] Brunovský, P., Diferenčné a diferenciálne rovnice, Študijný materiál, FMFI UK, Bratislava, dostupné na <http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/skripta/>
- [11] Lukašíková, Z., *Heterogenita agentov a dynamika výmenných kurzov*, Diplomová práca FMFI UK, Bratislava, 2010.
- [12] Korhauseňová, M., *Analýza bifurkácií v modeli fundamentalistov a charitistov*, Diplomová práca FMFI UK, Bratislava, 2012.
- [13] Chiarella, C., Dieci, R., Gardini, L., *Speculativ behavior and complex asset price dynamics: a global analysis* Journal of Economic Behavior Organization, Vol. 49,(2002), pp. 173-197

Príloha

Tabuľka 4.1: Parametre

Číslo Obr.	a	b	c	d	n	x_0	y_0	z_0
4.2	0.985	1	0.2	0.0002	600	0.1	0.15	0
4.3	0.992	1	0.2	0.0002	1200	0.1	0.15	0
4.4	0.985	0.5	0.2	0.0002	800	0.1	0.15	0
4.5	0.985	1.5	0.2	0.0002	800	0.1	0.15	0
4.6	0.985	1	0.1	0.0002	1000	0.1	0.15	0
4.7	0.985	1	0.35	0.0002	800	0.1	0.15	0
4.8	0.985	1	0.15	0.0005	800	0.1	0.15	0
4.9	0.985	1	0.15	0.0001	800	0.1	0.15	0
4.10	1	1	0.15	0.0002	8000	0.1	0.15	0
4.11	1	1	0.15	0.0002	8000	0.2	0.2	0
4.12	1	0.6	0.15	0.0002	5000	0.2	0.2	0
4.13	1	1.6	0.15	0.0002	5000	0.2	0.2	0
4.14	1	1.1	0.2	0.0002	5000	0.2	0.2	0
4.15	1	1.1	0.4	0.0002	5000	0.14	0.15	0
4.16	1	1	0.2	0.0005	8000	0.14	0.15	0
4.17	1	1	0.2	0.0001	8000	0.14	0.15	0
4.18	1.01	1	0.2	0.0002	5000	0.14	0.15	0
4.19	1.01	1	0.2	0.0002	20000	0.1	0.15	0
4.20	1.03	1	0.2	0.0002	20000	0.1	0.15	0

Tabuľka 4.2: Hodnoty \hat{x}

Číslo Obr.	c	\hat{x}
4.2	0.2	0.0716
4.3	0.2	-0.1483
4.4	0.2	-0.0301
4.5	0.2	-0.0715
4.6	0.1	6.2373e-004
4.7	0.35	0.3295
4.8	0.15	0.0221
4.9	0.15	-0.0048