

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ÁZIJSKÉ OPCIE A ICH NUMERICKÉ METÓDY OCEŇOVANIA

Diplomová práca

Bratislava 2013

Bc. Mikuláš Polhorský

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



ÁZIJSKÉ OPCIE A ICH NUMERICKÉ METÓDY OCEŇOVANIA

Diplomová práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: Aplikovaná matematika 1114
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Školiteľ: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2013

Bc. Mikuláš Polhorský



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Mikuláš Polhorský
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Ázijské opcie a ich numerické metódy oceňovania

Cieľ: Cieľom práce je analýza Ázijských typov tzv. average rate opcií a možnosti ich numerického oceňovania. Výplatný diagram takýchto opcií je závislý od priemernenej ceny podkladového aktíva. V práci porovnáme rôzne aproximatívne riešenia tejto úlohy s numerickým riešením singulárnej Večeřovej parciálnej diferenciálnej rovnice.

Vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Katedra: FMFLKAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 13.01.2011

Dátum schválenia: 14.01.2011
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Pod'akovanie

Touto cestou sa chcem pod'akovať vedúcemu diplomovej práce prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi CSc. za jeho odborné vedenie, cenné rady, pripomienky, za množstvo času a trpezlivosti, ktoré mi venoval pri spracovaní diplomovej práce. Zároveň sa chcem pod'akovať aj rodičom za ich podporu.

Abstrakt

POLHORSKÝ, Mikuláš: Ázijské opcie a ich numerické metódy oceňovania, Diplomová práca, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, (2013), 53 s.

Školiteľ: Prof. RNDr. Daniel Ševčovič CSc

Ázijské opcie patria medzi moderné finančné nástroje, pomocou ktorých sa dá znížiť riziko plynúce z výkyvov na finančných trhoch.

Diplomová práca sa zaoberá ázijskými average – rate opciami a možnosťami ich numerického oceňovania. Jedná sa o opcie, ktorých výplatný diagram závisí od priemerovanej ceny podkladového aktíva. Tieto opcie sa dajú oceniť napríklad aj pomocou tzv. singulárnej Večeřovej rovnice.

V práci analyzujeme numerické riešenie tejto rovnice. Zároveň analyzujeme rôzne numerické aproximácie, ktoré pomáhajú určiť cenu týchto opcií, pričom poukážeme na najvhodnejšie aproximatívne metódy oceňovania.

Kľúčové slová: opcie, ázijské opcie, Večeřova rovnica, rovnica vedenia tepla, numerické aproximácie

Abstract

POLHORSKÝ, Mikuláš: Asian options and their means of numerical pricing. Diploma thesis. Faculty of mathematics, physics and informatics, Comenius University, (2013), 53 p.

Supervisor: Prof. RNDr. Daniel Ševčovič CSc

Asian options belong among modern financial tools which help to decrease financial risk resulting from market fluctuations. Diploma thesis deals with asian average – rate options and means of their numerical pricing.

Payoff diagram of such option depends on averaged price of underlying asset. These options can be priced by singular so called Večeř equation. In this thesis we will analyse numerical solution of this equation. We also analyse various numerical approximations which help to determine value of these options and point out the most suitable methods for pricing such options.

Keywords: options, Asian options, Večeř's equation, heat equation, numerical approximations

Obsah

Zoznam obrázkov	8
Použité symboly	9
Úvod	10
1 Opcie	12
1.1 Základné pojmy	12
1.2 Ďalšie typy opcií	15
1.2.1 Bariérové opcie	16
1.2.2 Lookback opcie	16
2 Ázijské opcie	17
2.1 Klasifikácia ázijských opcií	18
2.2 Parciálna diferenciálna rovnica pre ázijské opcie a jej transformácia na rovnicu vedenia tepla	19
2.3 Približné riešenie transformovanej rovnice vedenia tepla	21
3 Aproximácie cien average – rate opcií	23
3.1 Kemna a Vorst aproximácia	23
3.2 Turnbull – Wakemanova aproximácia	27
3.3 Lévyho aproximácia	30
3.4 Curranova aproximácia	32
3.5 Porovnania jednotlivých aproximácií	34

4 Numerické riešenie degenerovanej Večerevej rovnice a jej odvodenie.	35
Záver.	40
Literatúra.	41
Príloha.	44

Zoznam obrázkov

Obrázok 1 – Kennov a Vorstov vzorec pre rôzne hodnoty volatility s nenulovými transakčnými nákladmi	26
Obrázok 2 – Kennov a Vorstov vzorec pre rôzne hodnoty volatility s nulovými transakčnými nákladmi.	27
Obrázok 3 – Turnbull – Wakeman pre rôzne hodnoty volatility s nenulovými transakčnými nákladmi.	29
Obrázok 4 – Turnbull – Wakeman pri nulových transakčných nákladoch	29
Obrázok 5 – Lévyho aproximácia pre rôzne volatility a nenulové transakčné náklady . . .	31
Obrázok 6 – Curranova aproximácia pre rôzne hodnoty volatility a nenulové transakčné náklady.	33
Obrázok 7 – Porovnanie aproximácií pre čas do expirácie $T \rightarrow 0$	34
Obrázok 8 – Numerické riešenie degenerovanej Večeřovej rovnice	39
Obrázok A.1 – Obrázok A.1: Curranova aproximačná metóda pre nenulové (5%) a nulové transakčné náklady ($b = 0$)	46
Obrázok A.2 – Obrázok A.2: Porovnanie Lévyho aproximácií pri nenulových (5%) a limitne nulových (0,01%) transakčných nákladoch.	50
Obrázok B.1: Detailné zobrazenie priebehu najpresnejších aproximácií	53

Použité symboly

T – čas do okamihu expirácie

S – cena aktíva

$V(S, t)$ – cena opcie

r – bezriziková úroková miera

$N(\)$ – kumulatívna funkcia normálneho rozdelenia

σ – volatilita podkladového aktíva

K – realizačná cena

S_A – priemer realizovaný do určitého časového momentu

b – transakčné náklady

Úvod

Finančné deriváty sú odvodené (resp. derivované) od hodnoty podkladových (primárnych) aktív (komodity, akcie, dlhopisy), kurzov mien, úrokových mier alebo aj akciových indexov. V dnešnej dobe je rozmanitosť podkladových aktív v podstate neobmedzená. Spoločnou črtou vo všetkých týchto prípadoch je obchodovanie s právami na budúce plnenia.

Finančné deriváty existujú už takmer niekoľko tisícročí. Prvé deriváty sa dajú datovať do staroveku, kedy napríklad farmár nemusel platiť úroky v prípade, že jeho úroda bola zničená búrkou alebo povodňou (Chammurapiho zákonník). Prvý opčný obchod [10] je pripisovaný Thalesovi z Milétu. Ľudia sa totiž smiali Thalesovi, že je chudobný, preto im chcel ukázať, že preňho múdrosť znamená viac ako bohatstvo. Raz v zime navštívil majiteľov olivových lisov a každému zaplatil malú čiastku za právo prvého použitia lisov po žatve. Po žatve Thales práva predal majiteľom plantáží za veľkú sumu, čím profitoval.

Prvé aktíva [20] vznikli zrejme v trinástom storočí, kedy benátski bankári začali obchodovať s vládnymi cennými papiermi. Prvé akciové spoločnosti, do ktorých mohli akcionári investovať svoj majetok a zdieľať zisky alebo prípadné straty, vznikli v Holandsku na začiatku sedemnásteho storočia. Vtedy bol však objem obchodovaných aktív pomerne malý.

Obrovským míľnikom v teórii oceňovania derivátov bol rok 1973 [10], kedy Black, Scholes a Merton odvodili presné vzorce pre oceňovanie opcií. Vzápätí nastal veľký rozmach a rozvoj derivátových obchodov, ktorých dnešný objem sa nedá presne zistiť. S rozmachom obchodovania však prišli aj problémy v podobe korektného oceňovania derivátov, čo je pre investorov dôležité, pretože inak by mohlo dôjsť k veľkej strate alebo arbitrážnej príležitosti. Dôležitou informáciou pre investora je aj miera rizika, ktoré počas obchodovania podstupuje.

V posledných desaťročiach boli totiž zaznamenané viaceré menšie, ale aj prudké kolísania finančných trhov, ktoré výrazne ovplyvnili hodnoty vkladov investorov, ako napríklad Čierny pondelok z októbra 1987 [20]. Jedným zo spôsobov ako minimalizovať riziko, resp. ho znížiť, sú tzv. ázijské opcie, ktorým sa venuje táto práca. Cieľom

diplomovej práce je analyzovať ázijské average rate opcie s možnosťou predčasného uplatnenie a ich numerické metódy oceňovania.

V prvej kapitole diplomovej práce sa oboznamujeme so základnými pojmami a rôznymi typmi opcií. Okrem základných pojmov predstavujeme aj rovnicu pre ocenenie európskych typov opcií - Black – Scholesovu rovnicu a jej riešenie.

V druhej kapitole sa venujeme prehľadu ázijských opcií, ich vzťahov a klasifikácii. Oboznamujeme sa tiež s parciálnou diferenciálnou rovnicou pre ázijské opcie a tzv. semi – analytickou metódou. K parciálnej diferenciálnej rovnici transformovanej pomocou tejto metódy (tzv. Večeřova rovnica) uvádzame aj riešenie s pomocou využitia Black – Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice.

Tretia kapitola sa zaoberá aritmeticky a geometricky priemerovanými average – rate opciami. Hľadanie presných riešení pre ocenenie takýchto opcií je veľmi ťažké, ak nie nemožné, a preto sa v tejto kapitole venujeme rôznym aproximačným vzťahom, vďaka ktorým vieme približne určiť cenu aritmetických average – rate opcií.

Numerické riešenie degenerovanej Večeřovej rovnice popisujeme vo štvrtej kapitole, a zároveň aj predstavujeme jej odvodenie. Dosiahnuté výsledky sumarizujeme v závere práce.

1 Opcie

Opcie sú veľmi užitočným nástrojom sofistikovaného obchodníka. Pomocou opcií dokážeme veci, ktoré by sme si bez nich len ťažko vedeli predstaviť: či ide o špekulatívne obchody alebo naopak, zabezpečovanie svojho rizika. Jednoducho, svet s opciami je úplne iný ako svet bez nich. Investor totiž nevie akým smerom sa bude vyvíjať cena nejakého aktíva, čo mu síce môže priniesť nemalý zisk, ale aj veľkú stratu. Preto na finančných trhoch vznikli rôzne typy derivátov, ktorými sa investori snažia eliminovať tieto náhodné výkyvy, a teda minimalizovať z toho plynúce riziko. Medzi takéto nástroje patria napríklad swapy, deriváty úrokových mier, forwardy a hlavne opčné deriváty.

Avšak naučiť sa ich používať nie je jednoduché. Nie je to ani otázka rôznych typov opcií, ako skôr ich podstaty. Historicky sa používali najmä klasické opcie call a put. Neskôr sa k nim pridali rôzne exotické opcie. Avšak bez pochopenia základných vlastností opcií nie je možné správne pochopiť a oceniť žiadne ďalšie opcie. Práve preto sa budeme na začiatku venovať hlavne základným typom opcií a uvedieme si tiež aj niektoré typy exotických opcií a ich charakteristiky.

1.1 Základné pojmy

V tejto podkapitole si predstavíme dva hlavné typy opcií – call a put opciu. Opcie sú v dnešnej dobe obchodované na takmer všetkých finančných trhoch vo svete a aj na mimoburzových obchodoch. Opcia predstavuje právo (možnosť) kúpiť alebo predat' určité podkladové aktívum (underlying asset) za dopredu stanovenú cenu K , ktorá sa nazýva realizačná cena alebo aj strike price, v deň splatnosti T (maturita) tohto kontraktu (expiry date). Predajca opcie sa nazýva vypisovateľ (option writer) [10], [11].

Na rozdiel od forwardových kontraktov vlastník opcie má právo, nie povinnosť kúpiť resp. predat' nejaké aktívum za stanovenú cenu v stanovenom čase. To dáva držiteľovi opcie výhodu oproti tým, ktorí opciu nevlastnia. Táto výhoda ale nie je zadarmo, musí byť zaplatená v čase vypísania kontraktu. To znamená, že vypisovateľ si od nás ako držiteľa opcie vypýta tzv. opčnú prémiiu za to, že máme právo na budúce uplatnenie tejto

opcie. Problémom je však korektné ocenenie tohto práva tak, aby nedošlo k poškodeniu žiadnej strany kontraktu.

Rozoznávame nasledovné základné typy opcií [10], [11]:

Call opcia: majiteľ tejto opcie má právo kúpiť podkladové aktívum za vopred stanovenú cenu K vo vopred určenom čase T .

Put opcia: majiteľ takejto opcie má právo predat' podkladové aktívum za vopred stanovenú cenu K vo vopred určenom čase T .

Ďalej rozoznávame opcie podľa toho, kedy máme možnosť toto právo uplatniť [10], [11]:

Európsky typ opcií: právo kúpiť alebo predat' podkladové aktívum máme len v čase expirácie.

Americký typ opcií: v takomto prípade máme možnosť zrealizovať dohodnutý kontrakt kedykoľvek do času expirácie. Preto z dôvodu väčšieho práva na realizáciu je jeho cena vyššia.

Už sme spomenuli potrebu korektného ocenenia opcií. Najznámejší a najpoužívanější model na oceňovanie derivátov je Black – Scholesov model z roku 1973. Tento model popisuje cenu opcie ako funkciu ceny akcie v čase, ktorý zostáva do expirácie. Ďalej je zrejmé, že cena opcie bude závisieť aj volatility podkladového aktíva σ a od bezrizikovej úrokovej miery r . Cena akcie má však stochastický charakter, preto dôležitú úlohu zohráva Brownov pohyb a Wienerov proces.

Black – Scholesova rovnica má tvar [10], [11]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (1)$$

$S > 0$ – dnešná cena podkladového aktíva, na ktoré je opcia vypísaná

$V(S, t)$ – cena opcie ako funkcia ceny aktíva a času do expirácie

T – expiračný čas, v ktorom opcii vyprší platnosť

r – bezriziková úroková miera

a každý derivát, ktorý sa dá v čase splatnosti vyjadriť v tvare $V(S_T, T) = f(S_T)$ musí túto rovnicu spĺňať. Ak $t = 0$, potom $V(S, 0)$ vyjadruje opčnú prémii v čase uzatvorenia obchodu. K Black – Scholesovej rovnici ešte prislúcha podmienka určujúca typ opcie. Táto podmienka sa nazýva terminálový payoff, pretože je to podmienka na tvar závislosti ceny derivátu od ceny akcie v čase T .

Ak uvažujeme európsku **call** opciu, podmienka nadobúda tvar [10]:

$$V(S, T) = V(S) = \max(S - K, 0), \quad (2)$$

Terminálový payoff v prípade **put** opcie má tvar:

$$V(S, T) = V(S) = \max(K - S, 0), \quad (3)$$

Hlavná myšlienka riešenia rovnice (1) je postupne transformovať túto parciálnu diferenciálnu rovnicu (PDR) na základný tvar rovnice [10], [11], [12]

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad (4)$$

$$(x, t) \in (-\infty, \infty) \times \langle 0, T \rangle,$$

t.j. na rovnicu vedenia tepla so zadanou počiatočnou podmienkou. Transformácia prebieha nasledovne:

1. krok: pretransformovanie času tak, aby plynul opačne, čiže do počiatočného času $t = 0$. To sa dosiahne transformáciou $\tau = T - t$ a teda $V(S, t) = W(S, T - t)$. Rovnica (1) potom nadobudne tvar

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} - rS \frac{\partial W}{\partial S} + rW = 0, \quad (5)$$

$$S > 0, \tau \in \langle 0, T \rangle, W(S, 0) = V(S),$$

2. krok: logaritická transformácia ceny akcie S , t.j. $S = e^x$, čiže $x = \ln(S) \Rightarrow Z(x, \tau) = W(e^x, \tau) \Rightarrow W(S, \tau) = Z(\ln S, \tau)$. Rovnicu (4) sa teraz zmení na

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) \frac{\partial Z}{\partial x} + rZ = 0, \quad (6)$$

3. krok: transformovanie na základnú PDR vedenia tepla. Členy nižšieho rádu (Z a $\frac{\partial Z}{\partial x}$) eliminujeme použitím exponenciálnej transformácie:

$$u(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} Z(x, \tau) \Rightarrow Z(x, \tau) = e^{-\alpha x - \beta \tau} u(x, \tau)$$

Koeficienty α, β sa určia tak, aby koeficienty pri členoch nižšieho rádu boli nulové :

$$\alpha = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \beta = \frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r^2}{2\sigma^2}.$$

Takáto voľba koeficientov zabezpečí nasledovný tvar rovnice pre u:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = e^{\alpha x} V(e^x), \quad -\infty < x < \infty, \tau \in \langle 0, T \rangle,$$

- a. krok: aplikácia vzorca na výpočet riešenia a spätná aplikácia substitúcií na toto riešenie. Riešenie rovnice (7) sa dá napísať v tvare

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} u(s, 0) ds. \quad (8)$$

Pre európsky typ opcie platí $V(S) = \max(S - K, 0)$. Tým získame explicitné riešenie pre európsky typ v tvare

$$V(S, t) = S e^{-r(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (9)$$

kde $d_1 = \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \ln \frac{S}{K}}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ a $N()$ je distribučná funkcia normálneho rozdelenia.

1.2 Ďalšie typy opcií

V tejto časti kapitoly sa oboznámime s niektorými ďalšími typmi opcií. Už sme si vysvetlili charakteristiku call a put opcií, ako aj európsky a americký typ opcie. Viac informácií o opciách spomínaných v tejto podkapitole môžeme nájsť napríklad v knihe nórskeho odborníka na deriváty E. G. Hauga [3] alebo v knihe Ševčoviča, Stehlíkovej, Mikulu [11].

1.2.1 Bariérové opcie

Veľkou skupinou opcií sú opcie, ktorých cena závisí od vývoja ceny. Medzi ne patria bariérové opcie [3], [11], ktoré predstavujú klasické call a put opcie s tým rozdielom, že ak cena akcie prekročí istú bariéru B , tak strácajú platnosť a vypisovateľ zaplatí držiteľovi dohodnutý rabat. Bariérové opcie sa delia podľa toho, z ktorej strany bola bariéra prekročená: na tzv. down – and – out a up – and – out opcie. Klasická bariérová funkcia má tvar exponenciálnej bariérovej funkcie $B(t) = bEe^{-\alpha(T-t)}$, kde $b \in (0, 1)$ a $\alpha \geq 0$ sú zvolené konštanty.

1.2.2 Lookback opcie

Lookback opcie [3], [11] sú ďalším príkladom opcií, ktorých cena závisí aj od hodnoty aktíva počas sledovaného obdobia. Rozoznávame dva typy lookback opcií, a to:

- lookback opciu s pohyblivou expiračnou cenou. Ide o právo kúpiť (call) aktívum za najnižšiu resp. predat' (put) za najvyššiu pozorovanú cenu. Terminálova podmienka má tvar $c(S, S_{min}, T) = \max(S - S_{min}, 0)$ pre call, resp. $\max(S_{max} - S, 0)$ pre put opciu.
- Lookback opciu s fixnou expiračnou cenou K určenou vopred. V expirácii call opcia vypláca $\max(S_{max} - K, 0)$ a put opcia $\max(K - S_{min}, 0)$.

Špeciálnym prípadom lookback opcií sú tzv. ruské opcie s tým rozdielom, že držiteľ ruskej opcie nemá limitovaný koniec periódy v minulosti, počas ktorej sa môže „pozerať späť“.

Medzi ďalšie dráhovo závislé opcie patria aj forward start opcie (pri ktorých je expiračná cena určená v budúcnosti), cliquet opcie (čo sú postupnosti forward start opcií) alebo napríklad aj chooser opcie. Ich držiteľ má určitý čas na to, aby si rozmyslel, či derivát nadobudne charakter klasickej call alebo put opcie. Od vývoja ceny aktíva resp. od jeho spriemerovanej hodnoty aktíva počas jeho životnosti zase závisia ceny ázijských opcií.

2 Ázijské opcie

V predchádzajúcej kapitole sme spomenuli niektoré typy dráhovo závislých opcií. Medzi tieto opcie patria aj ázijské opcie. To znamená, že patria medzi opcie, ktorých payoff diagram závisí nielen od konečnej ceny aktíva, ale aj od jeho historického vývoja do expirácie. V prípade ázijských opcií ide o závislosť od historického priemeru ceny aktíva. Týmto opciám sa v súčasnosti venujú viacerí matematici ako napríklad Jin E. Zhang [17], [18] alebo Jan Večeř [15], [16].

Ázijské opcie patria medzi veľmi užitočné finančné nástroje. Používajú sa na zaistovanie špecifických aktív, ktorými sú napríklad kontrakty na dodávku ropných produktov. Zaistovanie pomocou ázijských opcií je zvyčajne lacnejšie ako zloženie portfólia skladajúceho sa z klasických call alebo put opcií. Deriváty ázijského typu majú oproti obyčajným call a put opciám výhodu v tom, že ich ceny príliš nezávisia od okamžitej ceny aktíva, ale od jeho spriemerovanej ceny počas sledovaného obdobia. Tak sa zároveň čiastočne znižuje riziko plynúce z novej cenovej manipulácie zo strany vypisovateľa v čase expirácie.

Existuje ešte jeden typ opcií s veľmi podobným charakterom, aký majú ázijské opcie, a to tzv. rainbow opcie [19]. Sú to opcie na viacero podkladových aktív. Počet podkladových aktív sa pritom nazýva aj počet farieb dúhy. Hodnota tejto opcie je vysoko citlivá na koreláciu medzi jednotlivými košíkovými komponentmi a to je kľúčová vlastnosť, ktorú majú rainbow opcie spoločnú s ázijskými opciami, pretože hodnota ázijskej opcie je takisto veľmi korelovaná s vývojom ceny aktíva.

2.1 Klasifikácia ázijských opcí

Klasifikácia ázijských opcí je mierne zložitejšia, pretože existuje viacero faktorov, podľa ktorých ázijské opcie rozdeľujeme. [11], [13]

1. Ázijské opcie klasifikujeme podľa typu spriemerovania cien podkladového aktíva. Najčastejšie sa jedná o aritmetické a geometrické spriemerovanie.

V diskretnom vyjadrení majú nasledovný tvar:

a. $A_{t_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}$ pre aritmetický priemer

b. $\ln(A_{t_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(S_{t_i})$ pre geometrický priemer

V spojitom prípade sa dajú vyjadriť v integrálnom tvare:

a. $A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau$ pre aritmetický priemer

b. $\ln(A_t) = \frac{1}{t} \int_0^t \ln(S_\tau) d\tau$ pre geometrický priemer

Ďalším typom priemerovania je napríklad vážený aritmetický priemer $A_t = \frac{1}{\int_0^t a(\xi) d\xi} \int_0^t a(t - \xi) S_\xi d\xi$. Príkladom funkcie $a(\cdot)$ môže byť $a(\xi) = \exp(-\lambda\xi)$.

2. Ďalším klasifikačným faktorom je pozícia priemerovanej veličiny vstupujúcej do výplatnej funkcie. Rozoznávame dva spôsoby vstupu:
 - a. Average rate opcia, ak je strike price (expiračná cena) fixná a priemerovaná hodnota je v pozícii aktíva. Payoff má potom tvar $V(S, A, T) = \max(A - K, 0)$ pre call a $V(S, A, T) = \max(K - A, 0)$ pre put opciu
 - b. Average strike opcia, ak je priemerovaná hodnota v pozícii expiračnej ceny. Potom $V(S, A, T) = \max(A - S, 0)$ pre put a $V(S, A, T) = \max(S - A, 0)$ pre call opciu. Pričom K je expiračná cena a $S = S_T$, $A = A_T$ sú cena a spriemerovaná cena aktíva v čase T

2.2 Parciálna diferenciálna rovnica pre ázijské opcie a jej transformácia na rovnicu vedenia tepla

V predchádzajúcej časti sme si vysvetlili rozdiel medzi average rate a average strike opciou a aký tvar majú ich payoff diagramy. V tejto časti si uvedieme prechod od Black – Scholesovej rovnici pre ázijské opcie k rovnici vedenia tepla. Treba si ešte uvedomiť, že mimo obdobia, počas ktorého priemerujeme, sa dá cena opcie vypočítať ako riešenie klasickej Black – Scholesovej rovnice. Obdobie, počas ktorého priemerujeme, označme $[T_0, T]$.

Na transformáciu použijeme semi – analytickú metódu, ktorú používa Zhang [17], [18]. Zavedieme premennú:

$$S_A = \int_0^t S_\tau d\tau ,$$

pričom $T_0 = 0$ a $T_0 \leq t \leq T$. Premenná S_A vyjadruje spojité súčet cien aktíva, a teda S_A/t je aritmetický priemer cien na intervale $[0, t]$.

Takže payoff diagram average rate call opcie má potom tvar:

$$\max\left(\frac{S_A}{T} - K, 0\right), \quad (10)$$

V rizikovo neutrálnom svete má cena aktíva stochastický charakter, preto na jej modelovanie môžeme použiť stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$dS = rSdt + \sigma SdX,$$

kde r je bezriziková úroková miera, σ je volatilita a dX je Wienerov proces.

Pri transformácii budeme vychádzať z Black – Scholesovej rovnice, bez ktorej by oceňovanie derivátov nebolo možné. Budeme uvažovať aritmeticky priemerovanú average rate call opciu na akciu neplatiacu dividendy, pričom základom bude rovnica [5], [17]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + S \frac{\partial C}{\partial S_A} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 , \quad (11)$$

Táto rovnica bola odvodená matematikmi Kemnom a Vorstom v roku 1990 a platí, že cena aritmeticky priemerovanej ázijskej call opcie $C(S, S_A, T)$, na akciu neplatiacu dividendy, spĺňa túto parciálnu diferenciálnu rovnicu. K nej prislúcha koncová podmienka

$$C(S, S_A, T) = \max\left(\frac{S_A}{T} - K, 0\right), \quad (12)$$

Na rovnicu (11) použijeme transformáciu [17], [18]

$$\xi = \frac{TK - S_A}{S} e^{-r\tau} - \frac{1}{r}(1 - e^{-r\tau}), \quad (13)$$

$$\tau = T - t, \quad (14)$$

$$C(S, S_A, T) = \frac{S}{T} f(\xi, \tau), \quad (15)$$

Po úprave dostávame rovnicu vedenia tepla s premennými koeficientmi:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \left[\xi + \frac{1}{r}(1 - e^{-r\tau}) \right] \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = 0, \quad (16)$$

$$-\infty < \xi < \infty,$$

Z koncovej podmienky sa po transformácii stane podmienka počiatočná

$$f(\xi, 0) = \max(-\xi, 0), \quad (17)$$

Z podmienky (17) vidno, že platí

$$\frac{\partial^2 f(\xi, 0)}{\partial \xi^2} = \delta(\xi), \quad (18)$$

kde $\delta(\xi)$ je Diracova delta funkcia s nasledovným predpisom

$$\delta(\xi) = \begin{cases} \infty, & \xi = 0 \\ 0, & \xi \neq 0 \end{cases}, \quad (19)$$

Navyše platí $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) d\xi = 1$. To znamená, že efekt vedenia tepla bude existovať iba ak $\xi = 0$ a bude významný iba pre malé ξ .

2.3 Približné riešenie transformovanej rovnice vedenia tepla

V predchádzajúcej časti sme pomocou Zhangovej transformácie pretransformovali Black – Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu na rovnicu vedenia tepla. Avšak táto novovzniknutá rovnica vedenia tepla má premenné koeficienty, a to vďaka tomu, že sa v nich nachádza čas. Preto treba tento problém odstrániť.

To urobíme zavedením časovej premennej η (pozri [17], [18]) takej, že:

$$d\eta = \frac{\sigma^2}{2r^2} (1 - e^{-r\tau})^2 d\tau, \quad (20)$$

Po zintegrovaní dostaneme výraz:

$$\eta = \frac{\sigma^3}{4r^3} (-3 + 2r\tau + 4e^{-r\tau} - e^{-2r\tau}) \quad (21)$$

Pretože efekt vedenia tepla existuje iba pre $\xi = 0$ a je dôležitý len pre malé ξ , môžeme ho z rovnice vynechať. Z rovnice (15) sa tak stane klasická rovnica vedenia tepla s nemennými koeficientmi a bude mať teda nasledovný tvar:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} = 0, \quad -\infty < \xi < \infty \quad (22)$$

K nej prislúcha koncová podmienka

$$f_0(\xi, \eta = 0) = \max(-\xi, 0), \quad (23)$$

Riešenie rovnice vedenia tepla sa dá vyriešiť pomocou Greenovho jadra a má tvar:

$$f_0(\xi, \eta) = \xi N\left(-\frac{\xi}{2\sqrt{\eta}}\right) + \sqrt{\frac{\eta}{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4\eta}}, \quad (24)$$

Tento vzorec vyjadruje približné riešenie ceny ázijskej opcie (22). K nemu prislúchajúce opčné charakteristiky (Greeks) vypočítame ako parciálne derivácie $C(S, S_A, T)$ podľa jednotlivých premenných.

Takže platí [17]:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \xi} = N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right), \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} = \frac{\partial f_0}{\partial \eta} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta}} e^{-\xi^2/4\eta}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial S} = -\frac{1}{S} \left[\xi + \frac{1}{r} (1 - e^{-r\tau}) \right], \quad (27)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 1 + r\xi, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2r^2} [1 - 2e^{-r\tau} + e^{-2r\tau}], \quad (29)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = \frac{\eta}{2\sigma}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} [r^2 \tau \xi + r\tau - 1 + e^{-r\tau}], \quad (31)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{4r^4} [9 - 4r\tau - (12 + 4r\tau)e^{-r\tau} + (3 + 2r\tau)e^{-2r\tau}], \quad (32)$$

Teda:

$$\begin{aligned} C_0(S, S_A, t) &= \frac{S}{T} \left[-\xi N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right) + \sqrt{\frac{\eta}{\pi}} e^{-\xi^2/4\eta} \right] \\ &= S \frac{1-e^{-r\tau}}{rT} N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right) + \frac{S}{T} \sqrt{\frac{\eta}{\pi}} e^{-\xi^2/4\eta} - e^{-r\tau} \left(K - \frac{S_A}{T} \right) N\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\eta}}\right), \end{aligned} \quad (33)$$

Vzorce (25) – (33) teda predstavujú približné vyjadrenie opčných charakteristík a cenu opcie Zhangovej aproximačnej metódy.

3 Aproximácie cien average – rate opcií

V tejto kapitole sa postupne oboznamujeme s rôznymi aproximačnými vzťahmi, ktoré pomáhajú určiť približnú cenu ázijských average rate opcií. Tieto aproximácie prispôsobujú volatilitu, priemer, prípadne transakčné náklady, tak aby výsledná cena opcie po dosadení do zovšeobecneného Black – Scholesovho vzorca bola čo najpresnejšie určená.

3.1 Kemna a Vorst aproximácia

Kemna a Vorst (1990) ([5], popísané aj v knihe [3]) vyvinuli explicitné riešenie pre ocenenie ázijských opcií s upravenou volatilitou a transakčnými nákladmi. V prípade, že podkladové aktívum má lognormálne rozdelenie, potom geometrický priemer $(x_1 \times \dots \times x_n)^{1/n}$ podkladového aktíva má tiež lognormálne rozdelenie. To znamená, že geometricky priemerovaná opcia môže byť ocenená ako štandardná opcia, s tým, že volatilita a transakčné náklady sú upravené:

$$c = Se^{(b_A-r)T}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2), \quad (34)$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - Se^{(b_A-r)T}N(-d_1), \quad (35)$$

Pričom platí :

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(b_A + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}, \quad (36)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}, \quad (37)$$

Upravená volatilita vyzerá nasledovne:

$$\sigma_A = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}, \quad (38)$$

Upravené transakčné náklady sa vypočítajú ako:

$$b_A = \frac{1}{2}\left(b - \frac{\sigma^2}{6}\right), \quad (39)$$

Tieto úpravy sa však nedajú urobiť v prípade aritmetického priemerovania [3]. Nájst' explicitné riešenie pre hodnotu opcie s aritmetickým priemerom $\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)$ nie je vôbec ľahké, pretože ak podkladové aktívum má lognormálne rozdelenie, samotný aritmetický priemer nebude mať lognormálne rozdelenie. Preto opcie s aritmetickým priemerovaním musia byť ocenené pomocou rôznych aproximácií.

Pri vývoji vzorcov (34) a (35) Kemna a Vorst predpokladali dokonalý nepretržité otvorený trh s bezrizikovou úrokovou mierou r [5]. Ďalej predpokladali, že cena aktíva S sa vyvíja podľa rovnice

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (40)$$

kde $W(t)$ je Wienerov proces a α, σ sú dané konštanty. Zároveň cena akcie je spojitě aritmeticky priemerovaná: $A(t) = \frac{1}{T-T_0} \int_{T_0}^t S(\tau)d\tau$, kde $\langle T_0, T \rangle$ je interval, počas ktorého je počítaná priemerná cena aktíva. Pre čas $T_0 \leq t \leq T$, cena opcie $C_A(t) = C(S(t), A(t), t)$ závisí od času t , ceny akcie $S(t)$ a priemeru cien $A(t)$, pre $t \leq T_0$ na hodnote $A(t)$ nezáleží. Pre výpočet ceny opcie v čase $t=0$ sa musí najprv vypočítať cena opcie v intervale $\langle T_0, T \rangle$ a hodnota v čase T_0 sa využije na výpočet v intervale $\langle 0, T \rangle$. Klasická call opcia expirujúca v čase T_0 má ohraničujúce resp. terminálové podmienky $C(S(T_0), T_0) = \max(S(T_0) - K, 0)$, $C(0, t) = 0$, $\frac{\partial C(\infty, t)}{\partial S} = 1$. [5]

Avšak C_A závisí od času t , ceny akcie $S(t)$ a priemeru cien $A(t)$. Preto potrebujeme rovnicu $dA(t) = \beta S(t)dt$, $\beta = 1/(T - T_0)$, ktorá vyplýva z výrazu $A(t)$. Ak C_A vyjadruje hodnotu opcie v čase $t \in \langle T_0, T \rangle$, môžeme použiť Itóovu lemu. Preto portfólio skladajúce sa z $\frac{\partial C_A}{\partial S}$ akcií a čiastočne financované pôžičkou $(S \frac{\partial C_A}{\partial S} - C_A)$, prináša riziko $\sigma S \frac{\partial C_A}{\partial S} dW(t)$, a v počiatkových nákladoch stojí presne C_A . Z arbitrážnej príležitosti potom môžeme odvodiť parciálnu diferenciálnu rovnicu pre C_A s oborom \mathcal{D} [5]:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_A}{\partial S^2} + \beta S \frac{\partial C_A}{\partial A} + r \left(S \frac{\partial C_A}{\partial S} - C_A \right) = 0, \quad (41)$$

$$\mathcal{D} = \{(S, A, t), S \geq 0, A \geq 0, T_0 \leq t \leq T\},$$

K rovnici prislúchajú podmienky ([5]):

$$C_A(T) = C(S(T), A(T), T) = \max(A(T) - K, 0),$$

$$C_A(0, A(t), t) = \max(\exp(-r(T-t))(A(t) - K), 0),$$

$$\frac{\partial C_A(\infty, A(t), t)}{\partial S} = \beta(T-t)\exp(-r(T-t)), \quad (42)$$

Je ešte potrebné určiť ohraničujúcu podmienku pre $\frac{\partial C_A}{\partial A}$, a to použitím tvrdenia: Pre tie t , kde $A(t) \geq K$, je konečný payoff opcie určite kladný. Tento payoff je v čase t rovný výrazu $(A(t) - K) + \beta \int_t^T S(\tau) d\tau$. Preto (ak podmienka žiadnej arbitráže je uplatnená), cena opcie je:

$$C_A(t) = (A(t) - K) \exp(-r(T-t)) + \frac{\beta}{r} (1 - \exp(-r(T-t))) S(t), \quad (43)$$

Odtiaľ zároveň vyplýva aj ohraničujúca podmienka v prípade $\widehat{\mathcal{D}} = \{(S, A, t) \in \mathcal{D} \mid A \leq K\}$:

$$C(S(t), K, t) = \frac{\beta}{r} (1 - \exp(-r(T-t))) S(t), \quad (44)$$

Pomocou (42) a (44) sa potom vyrieši problém (41) a cena opcie sa dá napísať v tvare $C(S(t), A(t), t) = \exp(-r(T-t)) E^{S(t), A(t), t} \max(A(T) - K, 0)$, pričom E znamená podmienené očakávanie vzhľadom na $S(t), A(t), t$, pričom $S(t)$ je dané vzťahom (40), kde $\alpha = r$. ([5])

Autori potom odhadujú pomocou Monte Carlo simulácií pre $C_A(S(T_0), 0, T_0) = \exp(-r(T-T_0)) E^{S(T_0), T_0} \left\{ \max \left(\sum_{i=0}^n \frac{S(T_i)}{n+1} - K, 0 \right) \right\}$ realizáciu premennej ako $Y(T) = \exp(-r(T-T_0)) \max(A(T) - K, 0)$. Redukciou variancie na spresnenie intervalov spoľahlivosti a zavedenia náhodnej premennej

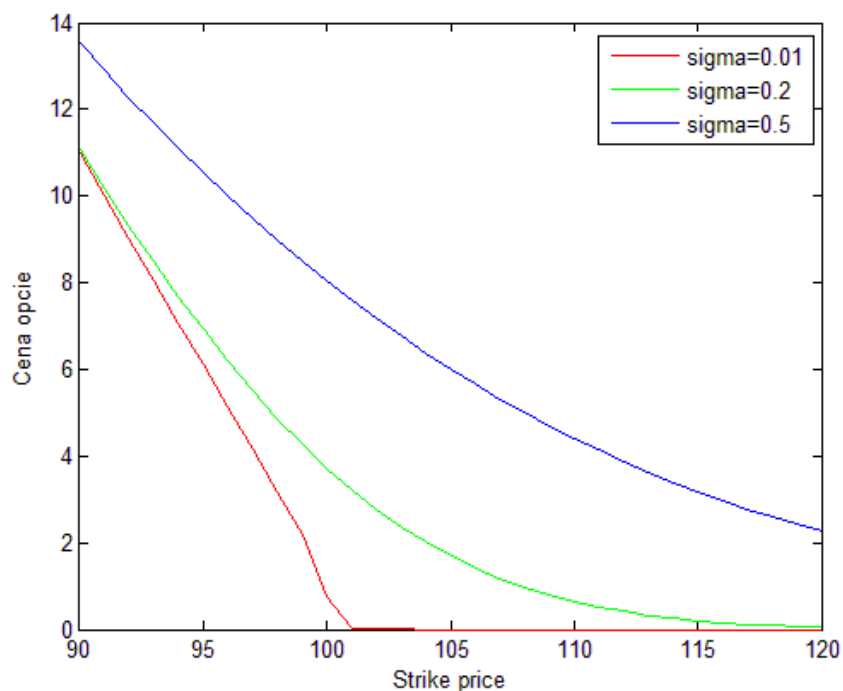
$$W(T) = \exp(-r(T-T_0)) \max(G(T) - K, 0), \quad (45)$$

kde $G(T) = \left(\prod_{i=0}^n S(T_i) \right)^{1/(n+1)}$, resp $G(T) = \exp \left(\beta \int_{T_0}^T \ln S(\tau) d\tau \right)$ v spojitom prípade dostávame $\log(G(T)) = N \left[\frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - T_0) + \ln(S(T_0)) ; \frac{1}{3} \sigma^2 (T - T_0) \right]$.

Takže cena geometricky priemerovanej opcie sa dá napísať v tvare:

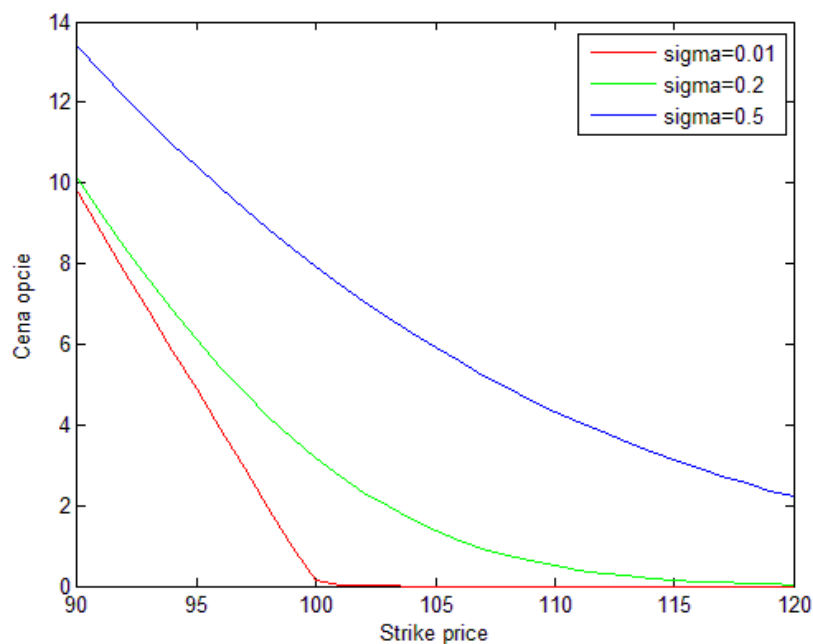
$$\begin{aligned}
 E(\max(G(T) - K, 0)) &= E(G(T)|G(T) \geq K) - KPr(G(T) \geq K) \\
 &= e^{d^*} S(T_0) N(d) - KN \left(d - \sigma \sqrt{\frac{1}{3}(T - T_0)} \right), \quad (46) \\
 d^* &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{6} \sigma^2 \right) (T - T_0), \quad d = \frac{\ln(S(T_0)/K) + \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{6} \sigma^2 \right) (T - T_0)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{3}(T - T_0)}},
 \end{aligned}$$

Týmito úpravami sme sa teda dostali k vzorcu (34).



Obrázok 1 : Kemnov a Vorstov vzorec pre rôzne hodnoty volatility, os x znázorňuje strike price a os y hodnotu put opcie. Transakčné náklady sú približne 5 percent ($b = 0.05$ vo vzorci (39)).

Na obrázku 1 možno vidieť správanie sa ázijskej put opcie s využitím geometrického priemerovania a Kemna – Vorstovho vzorca. Všimnime si, že pre $\sigma \rightarrow 0$ sa charakter opcie čoraz viac mení na európsky charakter, hoci s miernym výkyvom. Ostatné použité parametre sú $S = 100$, $K \in \langle 90, 120 \rangle$, $r = 0.05$, $T = 0.5$. Dividendy uvažujeme nulové.



Obrázok 2 : Kennov a Vorstov vzorec pre rôzne hodnoty volatility s nulovými transakčnými nákladmi ($b = 0$). Pre vysoké hodnoty volatility je priebeh ceny už výrazne odchylený. Zároveň vidno, že graf v okolí „ohybu“ už je hladší.

Tento obrázok znázorňuje priebehy ceny put opcie v prípade nulových transakčných nákladov. Môžeme vidieť, že cena opcie je vďaka tomu nižšia približne o jednotku ceny (v prípade nižších volatilit). Priebeh ceny opcie s volatilitou 0.5 zostáva približne rovnaký.

3.2 Turnbull – Wakemanova aproximácia

Nasledovná aproximácia je založená na práci Turnbulla a Wakemana (1991) (Haug [3], Turnbull a Wakeman [14]). Aproximácia prispôsobuje priemer a odchýlku tak, aby tieto boli zhodné s presnými momentmi aritmetického priemeru. Upravený priemer, b_A , a odchýlka σ_A^2 sa potom použijú v zovšeobecnenom Black – Scholesovom vzorci :

$$c \approx Se^{(b_A-r)T}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2), \quad (40)$$

$$p \approx Ke^{-rT}N(d_2) - Se^{(b_A-r)T}N(d_1), \quad (41)$$

Znova platí:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(b_A + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A \sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T},$$

Pričom T je čas do expirácie v rokoch. Volatilita a transakčné náklady sú dané ako:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\ln(M_2)}{T} - 2b_A}, \quad (42)$$

$$b_A = \frac{\ln(M_1)}{T}, \quad (43)$$

Presný prvý a druhý moment aritmetického priemeru vypočítame ako:

$$M_1 = \frac{e^{bT} - e^{bt_1}}{b(T - t_1)}, \quad (44)$$

$$M_2 = \frac{2e^{(2b + \sigma^2)T}}{(b + \sigma^2)(2b + \sigma^2)(T - t_1)^2} + \frac{2e^{(2b + \sigma^2)t_1}}{b(T - t_1)^2} \left[\frac{1}{2b + \sigma^2} - \frac{e^{b(T - t_1)}}{b + \sigma^2} \right], \quad (45)$$

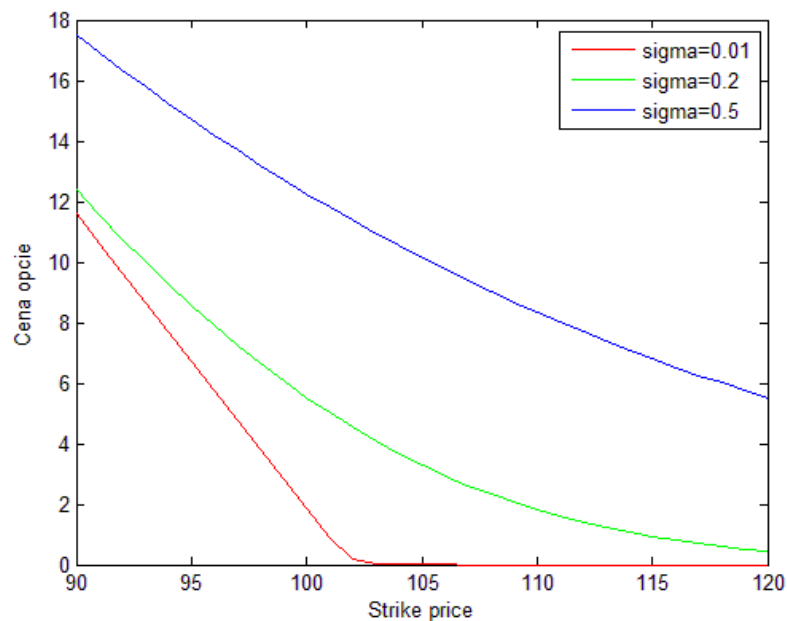
V prípade, že $b = 0$, dostaneme $M_1 = 1$, a zároveň:

$$M_2 = \frac{2e^{\sigma^2 T} - 2e^{\sigma^2 t_1} [1 + \sigma^2 (T - t_1)]}{\sigma^4 (T - t_1)^2}, \quad (46)$$

Premenná t_1 vyjadruje čas do začiatku priemerovacieho obdobia. Ak sa opcia nachádza v rámci priemerovacieho obdobia, resp. priemerovacie obdobie už začalo, potom realizačná cena je upravená nasledovným spôsobom: $K_A = \frac{T_2}{T}K - \frac{\tau}{T}S_A$, (47)

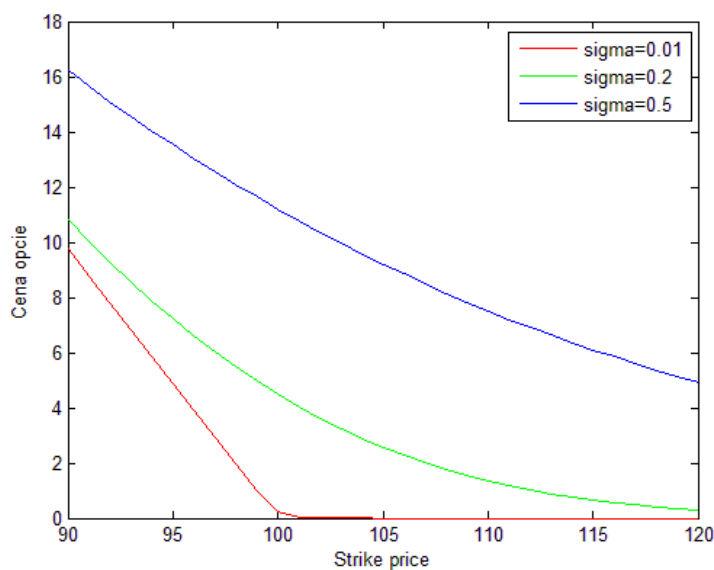
Premenná S_A vyjadruje priemernú cenu podkladového aktíva počas doteraz realizovaného, resp. pozorovaného priemerovacieho obdobia, τ je zostávajúci čas v priemerovacom období (t.j. $\tau = T_2 - T$). Ak sa nachádzame vnútri priemerovacieho obdobia (čiže $\tau > 0$), a zároveň $\frac{T_2}{T}K - \frac{\tau}{T}S_A < 0$, potom call opcia bude určite uplatnená a jej hodnota bude rovná očakávanej hodnote priemeru v čase expirácie mínus realizačná cena: $e^{-rT} (E[S_A] - X)$.

Očakávaný priemer v čase expirácie bude rovný: $E[S_A] = \frac{T_2 - T}{T}S_A + SM_1 \frac{T}{T_2}$, (48)



Obrázok 3: Turnbull – Wakemanova aproximačná metóda pre rôzne hodnoty volatility s nenulovými transakčnými nákladmi ($b = 0.05$). Cena opcie má podobný priebeh ako pri Kemna – Vorstovej aproximácii

Graf na obrázku 3 znázorňuje Turnbull – Wakemanovu aproximáciu ázijskej put opcie. Aj tu sa pre $\sigma \rightarrow 0$ charakter opcie čoraz viac mení na čisto európsky charakter. Ostatné vstupné parametre sú $S = 100$, $S_A = 110$, $K \in (90, 120)$, $r = 0.05$, $T_2 = 0.25$, $T = 0.5$. T_2 je pôvodný čas v priemerovacom období v rokoch, je konštantný počas životnosti opcie a parameter S_A je doteraz realizovaný priemer cien aktíva. Transakčné náklady sú 5 percent



Obrázok 4: Turnbull – Wakemanova aproximačná metóda pri nulových transakčných nákladoch ($b = 0$)

Obrázok 4 (viď predchádzajúcu stranu) znázorňuje priebeh ceny ázijskej put opcie s nulovými transakčnými nákladmi. Môžeme pozorovať, že zmena správania sa priebehu ceny opcie je o čosi výraznejšia ako v prípade Kemna – Vorst aproximácií, hlavne pri výraznom zvýšení volatility.

3.3 Lévyho aproximácia

Alternatívnu k Turnbullovej a Wakemanovej aproximačnej formuli je Lévyho aproximácia ázijských opcií (1992) ([3], [8]). Táto aproximácia by podľa Lévyho mala byť presnejšia ako Turnbull – Wakemanova formula:

$$c_A \approx S_E N(d_1) - \hat{K} e^{-rT_2} N(d_2), \quad (49)$$

Pričom platí nasledovné:

$$S_E = \frac{S}{Tb} (e^{(b-r)T_2} - e^{-rT_2}), \quad (50)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{V}} \left[\frac{\ln(D)}{2} - \ln(\hat{K}) \right], d_2 = d_1 - \sqrt{V}, \quad (51)$$

$$\hat{K} = K - \frac{T-T_2}{T} S_A, D = \frac{M}{T^2}, \quad (52)$$

$$V = \ln(D) - 2[rT_2 + \ln(S_E)], \quad (53)$$

$$M = \frac{2S^2}{b + \sigma^2} \left[\frac{e^{(2b + \sigma^2)T_2 - 1}}{2b + \sigma^2} - \frac{e^{bT_2 - 1}}{b} \right], \quad (54)$$

kde:

S_A – aritmetický priemer známych pevných cien podkladového aktíva

T_2 – čas, ktorý zostáva do okamihu expirácie

T – pôvodný čas do okamihu expirácie

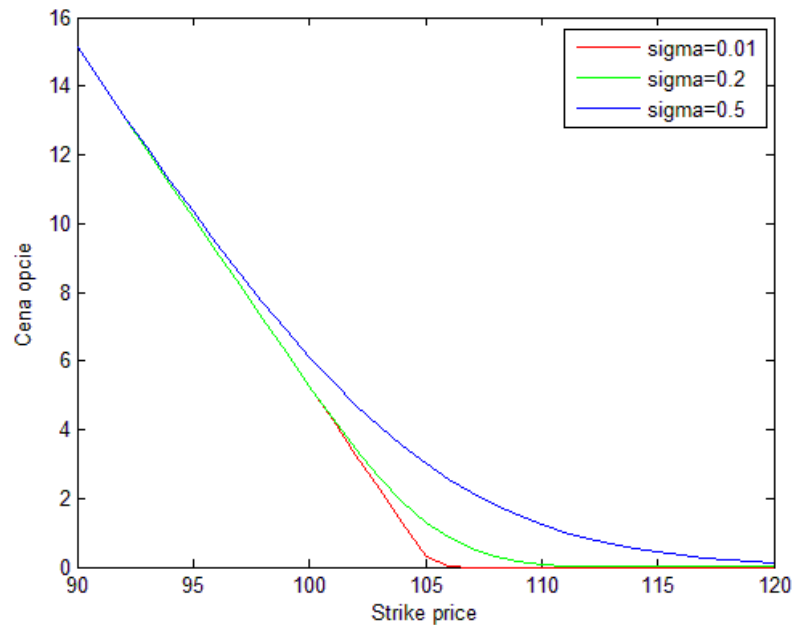
σ – volatility prirodzeného logaritmu výnosu podkladového aktíva

Ak chceme nájsť hodnotu put opcie, uplatníme príslušnú put – call paritu:

$$p_A = c_A - S_E + \widehat{K}e^{-rT_2}, \quad (55)$$

V prípade, že $b = 0$, vzorec samozrejme nie je možné priamo aplikovať, je potrebné limitne upraviť cenu S_E a parameter M :

$$S_E = \frac{ST_2}{T}, M = \frac{2S^2}{\sigma^2} \left[\frac{e^{2\sigma^2 T_2} - 1}{\sigma^2} - T_2 \right],$$



Obrázok 5: Lévyho aproximačná metóda pre rôzne volatility a nenulové transakčné náklady (5%).

Z grafov možno vidieť, že priebeh ceny opcie má naozaj menšie odchýlky ako pri Kemna – Vorstových aproximáciach alebo Turnbull – Wakemanových aproximáciach, a to aj pre vyššie hodnoty volatility. Ostatné parametre: $S = 100$, $S_A = 110$, $K \in \langle 90, 120 \rangle$, $T = 0.5$, $T_2 = 0.25$, $r = 0.05$, $b = 0.05$. V tomto prípade T_2 vyjadruje zostávajúci čas do expirácie. V prípade nulových, resp. limitne nulových transakčných nákladov dochádza iba k nepatrnej zmene správania sa priebehu ceny opcie (viď prílohu B, obrázok B.1).

3.4 Curranova aproximácia

V roku 1992 Curran vyvinul metódu pre aproximáciu ceny ázijských opcií, ktorá je založená na geometricky podmienenom prístupe ([1], [3]). Podľa Currana je táto aproximácia presnejšia ako aproximácie vymyslené v minulosti. Táto metóda aproximuje cenu opcie nasledovným spôsobom:

$$c \approx e^{-rT} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}\right) N\left(\frac{\mu - \ln(\hat{K})}{\sigma_x} + \frac{\sigma_{xi}}{\sigma_x}\right) - KN\left(\frac{\mu - \ln(\hat{X})}{\sigma_x}\right) \right], \quad (56)$$

Pričom platí:

$$\mu_i = \ln(S) + \left(b - \sigma^2/2\right) t_i, \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma^2 [t_1 + (i-1)\Delta t]}, \quad (57)$$

$$\sigma_{xi} = \sigma^2 \{t_1 + \Delta t [(i-1) - i(i-1)/(2n)]\}, \quad (58)$$

$$\mu = \ln(S) + \left(b - \sigma^2/2\right) [t_1 + (n-1)\Delta t/2], \quad (59)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma^2 [t_1 + \Delta t(n-1)(2n-1)/6n]}, \quad (60)$$

$$\hat{K} = 2K - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left\{\mu_i + \frac{\sigma_{xi}[\ln(K) - \mu]}{\sigma_x^2} + \frac{\sigma_i^2 - \sigma_{xi}^2/\sigma_x^2}{2}\right\}, \quad (61)$$

t_1 – čas, ktorý zostáva do okamihu prvého priemerovania

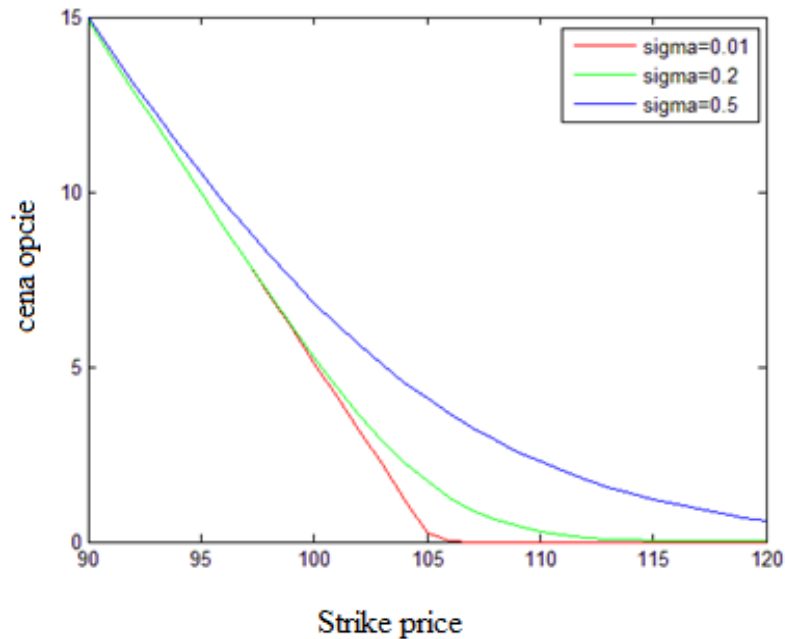
T – čas v rokoch do okamihu expirácie, Δt – čas medzi priemerovacími bodmi

n – počet priemerovacích bodov, $N(x)$ – kumulatívna funkcia normálneho rozdelenia

Pre $m > 0$ (čiže vo vnútri priemerovacieho obdobia), by realizačná cena mala byť vyjadrená ako: $K = \frac{nK - mS_A}{n-m} n - \frac{m}{n-m}$.

Ak $S_A > \frac{n}{m} K$, potom v prípade call opcie opciu uplatníme (vzhľadom na to, že put opcia bude out – of – the – money) a jej hodnota teda bude: $c_A = e^{-rT} (\widehat{S}_A - K)$, pričom $\widehat{S}_A = \frac{m}{n} S_A + E[S_A] \frac{n-m}{n}$. Pokiaľ do času expirácie zostáva iba jeden fixný bod, hodnota

opcie sa dá vypočítať pomocou zovšeobecneného Black – Scholesovho vzorca váženého so zostávajúcim časom do expirácie a upravenou realizačnou cenou. Cena call opcie je: $c_A = \frac{1}{n} c_{VBS}(\hat{K}, S, T, r, b, \sigma)$, kde c_{VBS} je všeobecný Black – Scholesov call predpis: $\hat{K} = nK - (n - 1)S_A$, kde S_A je doteraz realizovaný priemer. Put opciu vypočítame analogicky.

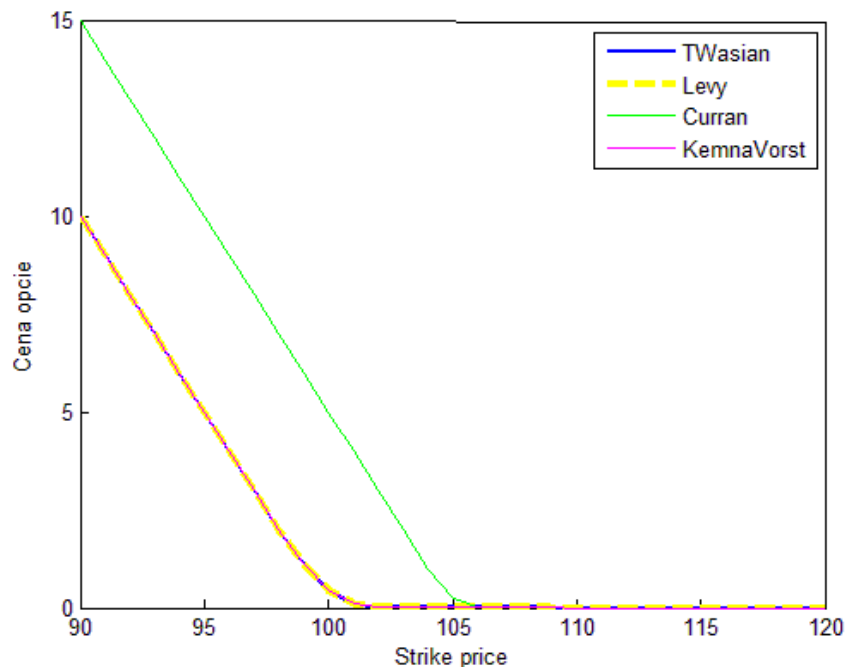


Obrázok 6: Curranova aproximácia pre rôzne hodnoty volatility a nenulové transakčné náklady (5%). Pre zvyšujúcu sa volatilitu Curranova aproximácia nadobúda postupne väčšie odchýlky. Naopak pre $\sigma \rightarrow 0$, resp. pre rozumné hodnoty volatility sú obe aproximácie takmer identické.

Ostatné parametre sú: $S = 100$, $S_A = 110$, $K \in \langle 90, 120 \rangle$, $t_1 = 0$, $T = 0.5$, $n = 360$, $m = 180$, $r = 0.05$, $b = 0.05$

3.5 Porovnanie jednotlivých aproximácií

V predchádzajúcich odstavcoch sme popísali jednotlivé aproximácie a spôsoby, ako aproximujú cenu ázijských average-rate opcií. Tiež sme aproximácie vzájomne porovnali. To však bolo v určitom čase pred expiráciou. Otázkou je, ako a či sa zmení presnosť jednotlivých aproximácií v prípade $T \rightarrow 0$. Naše očakávanie je, že aproximácie by mali postupne nadobúdať charakter čisto európskeho typu opcií. Ak niektorá aproximácia nadobudne resp. postupne nadobúda tento charakter, môžeme ju považovať za veľmi dobrú aproximáciu ceny ázijskej average – rate opcie. Ako referenčný bod sme aj v tomto prípade zvolili cenu aktíva $S = 100$, a pre názornosť čas do expirácie $T = 0,05$ rokov, t.j. 18 dní. Výsledok je znázornený na obrázku 10 a ukazuje, že najpresnejšie aproximácie sú Lévyho, Turnbull – Wakemanova a Kemna – Vorstova (resp. GeomPrice) aproximácia. Na obrázku možno vidieť, že tieto tri aproximácie sú takmer identické (pre detail vid' obrázok C.1 v prílohe C). Očakávania nenaplnila Curranova aproximácia, ktorá mala byť relatívne presná, avšak pre $T \rightarrow 0$ postupne zlyháva.



Obrázok 7: Porovnanie aproximácií pre čas do expirácie $T \rightarrow 0$. Ukazuje sa, že Curranova aproximačná formula nie je až taká presná, keď sa blíži okamih expirácie, čo platí aj pre diskretizovanú aproximáciu. Naopak, ostatné aproximácie očakávania potvrdili.

4 Numerické riešenie Večeřovej rovnice a jej odvozenie

Už vieme, že ázijské opcie sú typom opcií, ktorých výplatný diagram je prepojený s priemernou hodnotou aktíva počas daného časového úseku. V článku Unified option pricing Večeř predstavuje spôsob oceňovania ázijských opcií pomocou parciálnych diferenciálnych rovníc. Výhodou tohto spôsobu je, že funguje pre diskrétnu, ale aj spojité aritmetické priemerovanie. Pomocou metódy redukcie dimenzií Večeř odvodil jednoducho vyzerajúcu, ale degenerovanú parabolickú rovnicu ([2], [6]) o dvoch neznámych $(t, x) \in \langle 0, T \rangle \times \mathbb{R}$.

$$u_t + \frac{1}{2} \left(x - e^{-\int_0^t dv(s)} q(t) \right)^2 \sigma^2 u_{xx} = 0, \quad (62)$$

K nej prislúcha terminálová podmienka:

$$u(T, x) = \max(x - K, 0), \quad (63)$$

Pričom $v(t)$ vyjadruje dividendový výnos, σ je volatilita podkladového aktíva a $q(t)$ vyjadruje kúpnu stratégiu danú nasledovným výrazom:

$$q(t) = e^{-\int_t^T dv(s)} \cdot \int_t^T \exp\left(-r(T-s) + \int_s^T dv(\tau)\right) d\mu(s), \quad (64)$$

Pričom r vyjadruje úrokovú mieru a $\mu(t)$ vážiaci faktor. Zároveň

$$\begin{aligned} b(t) &= e^{-\int_0^t dv(s)} q(t) \\ &= e^{-\int_0^t dv(s)} \cdot \int_t^T \exp\left(-r(T-s) + \int_s^T dv(\tau)\right) d\mu(s), \end{aligned} \quad (65)$$

Funkcia $b(t)$ je nezáporná monotónna Lipschitzovsky spojitá klesajúca funkcia definovaná na intervale $\langle 0, T \rangle$. Okrem toho platí aj $b(T) = 0$ a $m_1 \leq -b'(t) \leq m_2$ pre $t \in (0, T)$ pre $m_1, m_2 > 0$. Existencia a jedinečnosť riešenia tohto problému sa dá vysvetliť pomocou pravdepodobnostného prístupu. Úloha totiž naozaj pripúšťa riešenie v tvare

$$u(t, x) = \mathbb{E}f(X_T(t, x)), \quad (66)$$

kde $f(y) = \max(y - K, 0)$ a $X_S = X_S(t, x)$ je taký náhodný proces, ktorý spĺňa nasledovnú štandardnú diferenciálnu rovnicu:

$$dX_s = (X_s - b_s)\sigma dw_s, \quad s \geq t, \quad b_s = b(s), \quad (67)$$

$$X_t = x,$$

Dokázat' regularitu takéhoto riešenia je už ťažšie. Riešenie v klasickom slova zmysle existuje [2]. Toto riešenie znamená, že ak funkcia f v (73) je dvakrát spojitely diferencovateľná a okrem toho ešte spĺňa podmienku rastúcosti, potom riešenie v tvare (66) zmysel má a je dvakrát spojitely diferencovateľné vzhľadom na x v (t, x) [7]. Lenže funkcia f je v tomto prípade iba Lipschitzovsky spojitá, čo nie je dostatočnou podmienkou, a preto tento postup sa nedá aplikovať (funkcia f má v tomto prípade tvar $\max(x, 0)$, čo po dvojnásobnom diferencovaní dá ako výsledok Diracovu delta funkciu).

S. Kim a S. Kim a H.Dong v článkoch [2] a [6] ukazujú, že ak $K = 0$ (ázijská call opcia s fixnou realizačnou cenou) a ak $b(t)$ je monotónne klesajúca Lipschitzovsky spojitá funkcia, tak potom riešenie vyjadrené v pravdepodobnostnom tvare (66) je klasickým riešením úlohy (62) – (63). Ak $d\mu(t) = \rho(t)dt$ pre nejaké $\rho \in L^\infty((0, T))$ spĺňa $\rho(t) \geq \rho_0 > 0$, teda miera $\mu(t)$ je absolútne spojitá vzhľadom na Lebesgueovu mieru $d(t)$ a jej funkcia hustoty $\rho(t)$ je ostro kladná a zdola ohraničená, potom funkcia $b(t)$ uvedené predpoklady spĺňa.

Tento predpoklad navyše nepripúšťa prípad, keď $d\mu(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(\frac{k}{n}T)dt$, t.j. keď miera $\mu(t)$ je lineárnou kombináciou Diracových delta funkcií, inak povedané keď sa jedná o diskretné rozdelené ázijské opcie ([2]). Takéto opcie sa ale často vyskytujú, a preto je potrebné regularitu pravdepodobnostných riešení overovať.

Uvažujme, že miera $\mu(t)$ je daná predpisom ([2]):

$$d\mu(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \delta(t_i)dt, \quad (68)$$

$$\alpha_i > 0, 0 < t_1 < \dots < t_k \leq T, \quad (69)$$

Potom sa funkcia $b(t)$ stáva monotónne klesajúcou krokovou funkciou:

$$b(t) = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i \chi_{(t_{i-1}, t_i)}(t), \quad (70)$$

$$\beta_1 > \dots > \beta_k > \beta_{k+1} = 0, t_0 = -\infty, t_{k+1} = T, \quad (71)$$

Následne sa rovnica (62) spolu s terminálovou podmienkou pretransformuje na úlohu:

$$u_t + \frac{1}{2}(x - b(t))^2 \sigma^2 u_{xx} = 0, \quad (72)$$

$$u(T, x) = \max(x - K, 0),$$

V nasledovných odstavcoch teraz popíšeme odvodenie tejto rovnice. Predpokladajme, že podkladové aktívum sa riadi rizikovo neutrálnou mierou podľa rovnice ([16])

$$dS_t = S_t((r - \gamma)dt + \sigma dW_t), \quad (73)$$

kde r vyjadruje úrokovú mieru, γ spojitú dividendu a σ volatilitu podkladového aktíva. Ak

$$q_t = \frac{1}{(r - \gamma)^T} (e^{\gamma(T-t)} - e^{-r(T-t)}), \quad (74)$$

$$\begin{aligned} dX_t &= q_t dS_t + r(X_t - q_t S_t)dt + q_t \gamma S_t dt \\ &= rX_t dt + q_t (dS_t - rS_t dt + \gamma S_t dt), \end{aligned}$$

a s počiatočnou hodnotou:

$$X_0 = \frac{1}{(r - \gamma)^T} (e^{rT} - e^{-rT}) S_0, \quad (75)$$

a pretože platí:

$$\begin{aligned} d(e^{r(T-t)} q_t S_t) &= e^{r(T-t)} q_t dS_t - r e^{r(T-t)} q_t S_t dt + e^{r(T-t)} S_t dq_t, \\ q_T S_T - e^{rT} q_0 S_0 &= \int_0^T e^{r(T-t)} q_t (dS_t - rS_t dt) + \int_0^T e^{r(T-t)} S_t dq_t, \end{aligned}$$

platí nasledovné:

$$\begin{aligned} X_T &= e^{rT} X_0 + \int_0^T e^{r(T-t)} q_t (dS_t - rS_t dt + \gamma S_t dt) \\ &= e^{rT} X_0 + q_T S_T - e^{rT} q_0 S_0 + \int_0^T e^{r(T-t)} S_t (q_t \gamma dt - \dot{q}_t dt) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt, \end{aligned} \quad (76)$$

Navyše tento postup nezávisí od voľby úrokového modelu a môže sa aplikovať na ocenenie ázijských opcií ([16]). Zovšeobecnená výplatná payoff funkcia sa dá napísať v tvare $\max(\bar{S}_T - K_1 S_T - K_2)$ prípadne $\max(K_2 - K_1 S_T - \bar{S}_T)$.

Vďaka put – call parite:

$$\begin{aligned} & e^{-rT} \mathbb{E}(\max(\bar{S}_T - K_1 S_T - K_2)) - e^{-rT} \mathbb{E}(\max(K_2 - K_1 S_T - \bar{S}_T)) \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}(\bar{S}_T - K_1 S_T - K_2) = \frac{1}{(r-\gamma)^T} (e^{\gamma T} - e^{-rT}) S_0 - K_1 e^{-\gamma T} S_0 - e^{-rT} K_2, \end{aligned} \quad (77)$$

stačí vypočítať cenu ázijskej opcie s payoffom $\max(\bar{S}_T - K_1 S_T - K_2)$. Čiže ak $K_1 = 0$, jedná sa o ázijskú call opciu s fixnou realizačnou cenou, a ak $K_2 = 0$, potom sa jedná o ázijskú put opciu s plávajúcou realizačnou cenou. Myšlienka replikácie trhovej ceny pomocou samofinancovanej stratégie sa dá použiť aj na oceňovanie ázijských opcií. Payoff ázijskej opcie sa dá napísať v tvare $\max(\bar{S}_T - K_1 S_T - K_2)$ resp. $\max(K_2 - K_1 S_T - \bar{S}_T)$. Keďže platí vzorec (77), cenu ázijskej opcie stačí vypočítať s pomocou payoff funkcie $\max(\bar{S}_T - K_1 S_T - K_2)$. Na replikáciu opcie využijeme vzorec (74), pričom na začiatku budeme disponovať hodnotou $X_0 = q_0 S_0 - e^{-rT} K_2$ a samofinancovaná stratégia je daná predpisom dX_t zo vzorca (74). Potom $X_T = \bar{S}_T - K_2$ a výplatný payoff diagram $\max(\bar{S}_T - K_1 S_T - K_2, 0)$. Na redukciu počtu dimenzií tohto problému zavedieme premennú ([16]):

$$Z_t = \frac{X_t}{e^{\gamma t} S_t}, \quad (78)$$

Podľa Itoovej lemy potom platí

$$dZ_t = (Z_t - e^{-\gamma t} q_t) \sigma^2 dt - (Z_t - e^{-\gamma t} q_t) \sigma dW_t \quad (79)$$

$$= -(Z_t - e^{-\gamma t} q_t) \sigma d\tilde{W}_t,$$

$$\tilde{W}_t = -\sigma t + W_t,$$

Takže sa cena ázijskej call opcie dá napísať v tvare :

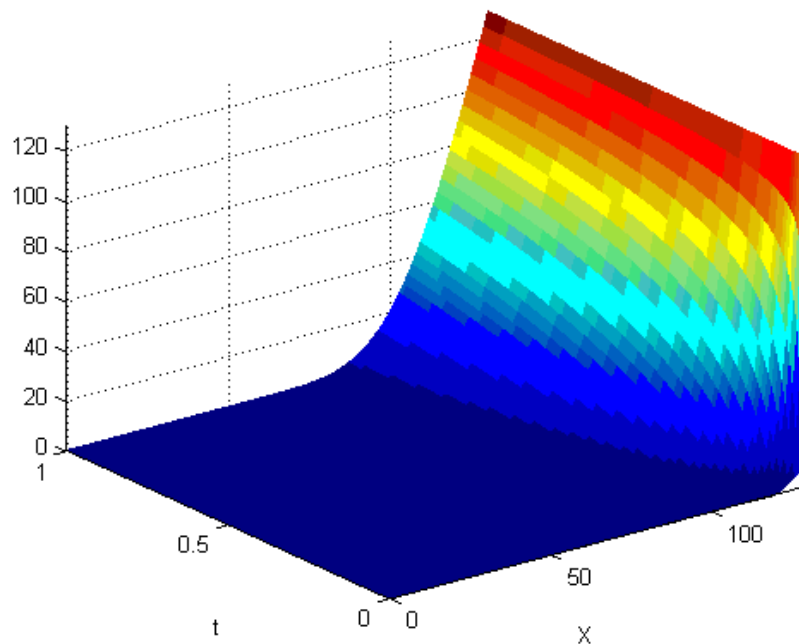
$V(0, S_0, K_1, K_2) = e^{-rT} \mathbb{E}(\max(X_T - K_1 S_T, 0)) = S_0 \tilde{\mathbb{E}}(\max(Z_T - K_1, 0))$. Po zavedení premennej $u(0, Z_0) = \tilde{\mathbb{E}}(\max(Z_T - K_1, 0))$, kde Z_t je proces zo vzorca (79) a jeho počiatočná podmienka je $Z_0 = \frac{X_0}{S_0} = \frac{1}{(r-\gamma)^T} (e^{-\gamma T} - e^{-rT}) - e^{-rT} \frac{K_2}{S_0}$, môžeme cenu opcie prepísať do tvaru $V(0, S_0, K_1, K_2) = S_0 u(0, Z_0)$.

Funkcia u potom splňa nasledovnú parciálnu diferenciálnu rovnicu ([16]):

$$u_t + \frac{1}{2}(z - e^{-\gamma t} q_t)^2 \sigma^2 u_{zz} = 0 \quad (80)$$

$$u(T, z) = \max(z - K_1, 0),$$

Túto rovnicu potom riešime v jazyku MATLAB aj za pomoci vstavaných funkcií. Výsledok môžeme vidieť na obrázku 8:



Obrázok 8: Priebeh ceny ázijskej average-rate opcie ako riešenie Večerovej rovnice

Pri výpočte sme použili nasledovné parametre: $S = 100, K = 120, r = 0.05, \sigma = 0.2, T = 0.5$. Môžeme pozorovať, že priebeh ceny opcie je presne taký, aký sme predpokladali.

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo skúmanie ázijských average rate opcií s možnosťou predčasného uplatnenia a analýza ich numerických metód oceňovania. Tieto opcie sa dajú oceniť pomocou degenerovanej Večeřovej rovnice. Hlavným problémom riešenia tejto rovnice je práve jej degenerovanosť, preto sme na zjednodušenie riešenia použili Zhangovu metódu, ktorú popisujeme v druhej kapitole diplomovej práce. Odvodenie a numerické riešenie Večeřovej rovnice potom popisujeme vo štvrtej kapitole.

Iným spôsobom, ako oceniť ázijské average – rate opcie, sú aj rôzne aproximácie, ktoré podobne ako Večeřova rovnica, pomáhajú približne určiť cenu takýchto opcií. V tejto práci sme použili aproximácie využívajúce upravenú volatilitu, priemer či momentovú metódu.

Zistili sme, že najpresnejšie cenu ázijských average – rate opcií aproximujú Lévyho, Turnbull – Wakemanova a Kemna – Vorstova aproximácia. Curranova sa ukázala ako nepresná, za jej hlavný nedostatok považujeme nedostatočné reagovanie na blížiaci sa okamih expirácie ($T \rightarrow 0$), v čom nielen v riešení Večeřovej rovnice spočíva prínos práce.

Výsledky diplomovej práce by bolo vhodné podrobiť podrobnejšiemu skúmaniu. Ideou by mohlo napríklad byť vylepšenie Curranovej aproximačnej metódy, ktorá sa pre $T \rightarrow 0$ ukázala ako nedostatočne presná metóda.

Literatúra

- [1] Curran, M. 1992 – Beyond Average Intelligence, Risk Magazine 5(10), 1992
- [2] Dong, H., Kim, S. 2009 – Regularity of a degenerate parabolic equation appearing in Večeř's unified pricing of Asian options, 2009, 8 p.
- [3] Haug, E.G. 2006 – The complete guide to option pricing formulas, McGraw Hill, 2006, 536 p., Dostupné na internete: http://r2d2.bu.edu/AT_The_Complete_Guide_to_Option_Pricing_Formulas_2nd_ed_.pdf
- [4] Haug, E.G., Haug, J., Margrabe, W. 2003 – Asian Pyramid Power, Wilmott Magazine, 2003
- [5] Kemna, A.G.Z., Vorst, A.C.F. 1990 – A pricing method for options based on average asset values, Journal of Banking and Finance, 14 (1990), p. 113 – 129, Dostupné na internete: <https://docs.google.com/javaquant.net/papers/Kemna-Vorst.pdf>
- [6] Kim, S. 2008 – On a degenerate parabolic equation arising in pricing of Asian options, 2008, 9 p.
Dostupné na internete: <http://arxiv.org/pdf/0805.1101.pdf>
- [7] Krylov, N.V. 1996 – Introduction to the theory of diffusion processes, American mathematical society, 1996, Providence, Rhode Island, 271 pp. ISBN: 0-8218-4600-0

- [8] Levy, E. 1992 – Pricing European Average Rate Currency Options, 1992, Journal of International Money and Finance, 11, p. 474 – 491
- Dostupné na internete: <https://docs.google.com/journal-of-international-money-and-finance-levy-pricing-european-average-rate-currency-options>
- [9] Levy, E. 1997 – Exotic Options: The State of Art., 1997, ed. L. Clewlow a C. Strickland (Washington, DC: International Thomson Business Press), 232 p., ISBN 1-86152-321-1
- [10] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V. 2005 – Kapitoly z finančnej matematiky, EPOS, Bratislava 2005, 242 s., ISBN 80 – 8057 – 651 – 3
- [11] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K., 2009 – Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov, STU Bratislava, 2009, 200 s., ISBN – 978 – 80 – 227 – 3014 – 3
- [12] Ševčovič D. 2008 – Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie, IRIS vydavateľstvo a tlač s.r.o., 2008, 130 s., ISBN 978 – 80 – 89238 – 15 – 6
- [13] Ševčovič D., Takáč M. 2011 – Sensitivity analysis of early exercise boundary for American style of Asian options, 2011, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Ser. B 2, 2011, p. 231-247
- [14] Turnbull, S. M., Wakeman, L. M. 1991. A Quick Algorithm for Pricing European Average Options. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1991, 26(3), p. 377 - 389.

[15] Večeř, J. 2001 – A new PDE approach for pricing arithmetic average asian options, 2001, 9 p.

The Journal of Computational Finance, 4(4), Summer 2001, p. 105 –113

[16] Večeř J. 2002 – Unified pricing of asian options, 2002, 9 p.

[17] Zhang J. E. 1999 – Arithmetic asian options with continuous sampling, 1999, 22 p.

Dostupné na internete:

www.cb.cityu.edu.hk/EF/getFileWorkingPaper.cfm

[18] Zhang J. E. 2000 – Theory of Continuously – sampled Asian Option Pricing, 2000, 25 p.

Dostupné na internete:

www.cb.cityu.edu.hk/EF/getFileWorkingPaper.cfm

[19] http://en.wikipedia.org/wiki/Option_style (2.4.2013)

[20] http://en.wikipedia.org/wiki/Stock_market (2.4.2013)

Príloha

V prílohe uvádzame kódy počítajúce približné ceny opcií, programované boli za pomoci uvedenej literatúry a v programe MATLAB.

Príloha A

Aproximačné formuly

Curranova aproximačná formula

Nasledovný kód vypočíta cenu ázijskej geometricky priemerovanej opcie, parametre vstupujúce do výpočtu sú: TypOpcie – Call/Put (c pre call, p pre put), cena podkladového aktíva S, priemer cien podkladového aktíva SA, realizačná cena X, čas t1 ako čas do okamihu prvého priemerovacieho okamihu, čas do expirácie v rokoch T, n ako počet priemerovacích okamihov, konštanta m, úroková miera r, transakčné náklady b a volatilita v. Potom nasleduje ešte niekoľko pomocných premenných.

```
function
AsianCurranApprox=AsianCurranApprox(TypOpcie,S,SA,X,t1,T,n,m,r,b,v
)
    clc
    % pomocne premenne
    dt=0; my=0;
    myi=0; vxi=0;
    vi=0; vx=0;
    km=0; sumal=0;
    suma2=0; ti=0;
    EA=0;
    %z=0;
    i=0;

    %%%

    z=1;
    if TypOpcie=='p'
        z=-1;
```

```

end

dt=(T-t1) / (n-1);

if b==0
    EA=S;
else
    EA=(S/n) *exp (b*t1) * (1-exp (b*dt*n) ) / (1-exp (b*dt) );
end

if m>0
    if SA>(n/m) *X
        if TypOpcie=='p'
            AsianCurranApprox=0;
        elseif TypOpcie=='c'
            SA=SA*m/n + EA*(n-m)/n;
            AsianCurranApprox=(SA-X) *exp (-r*T) ;
        end
    end
end

if m==n-1
    X=n*X- (n-1) *SA;
    AsianCurranApprox=GBS (TypOpcie, S, X, T, r, b, v) * (1/n) ;
end

if m>0
    X=n/ (n-m) *X-m/ (n-m) *SA;
end

vx=v*sqrt (t1+dt* (n-1) * (2*n-1) / (6*n) );
my=log (S) + (b-v*v*0.5) * (t1+ (n-1) *dt/2) ;

suma1=0;
for i=1:n

```

```

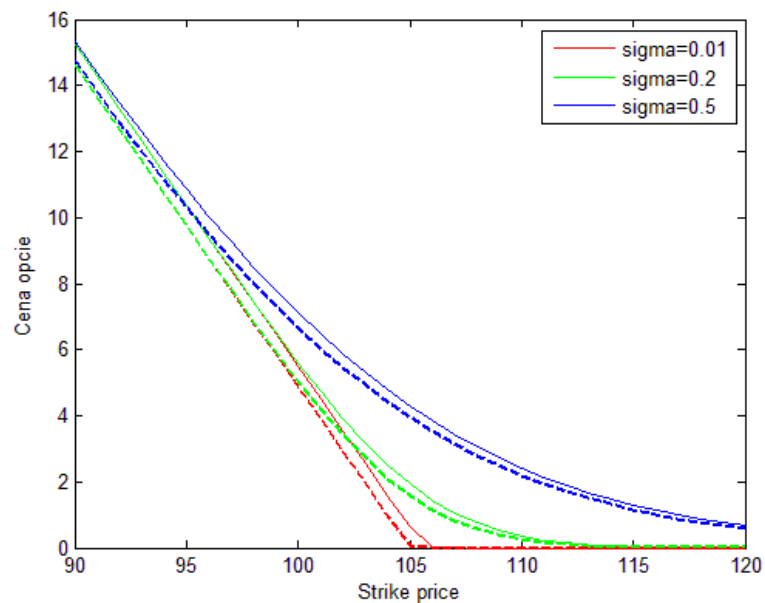
    ti=dt*i+t1-dt;
    vi=v*sqrt(t1+(i-1)*dt);
    vxi=v*v*(t1+dt*((i-1)-i*(i-1)/(2*n)));
    myi=log(S)+(b-v*v*0.5)*ti;
    suma1=suma1+exp(myi+vxi/(vx*vx)*(log(X)-my)+(vi*vi-
vxi*vxi/(vx*vx))*0.5);
end

Km=2*X-1/n*suma1;
suma2=0;

for i=1:n
    ti=dt*i+t1-dt;
    vi=v*sqrt(t1+(i-1)*dt);
    vxi=v*v*(t1+dt*((i-1)-i*(i-1)/(2*n)));
    myi=log(S)+(b-v*v*0.5)*ti;
    suma2=suma2+exp(myi+vi*vi*0.5)*normcdf(z*(my-
log(Km))/(vx+vxi/vx));
end

AsianCurranApprox=exp(-r*T)*z*(1/n*suma2-X*normcdf(z*(my-
log(Km))/(vx))* (n-m)/n

```



Obrázok A.1: Curranova aproximačná metóda pre nenulové (5%) a nulové transakčné náklady ($b = 0$)

Obrázok A.1 (predchádzajúca strana) znázorňuje Curranove aproximácie pre nenulové transakčné náklady v porovnaní s nulovými transakčnými nákladmi (prerušované čiary). Odchýlky sú síce o čosi väčšie ako v prípade Lévyho (Obrázok A.2, príloha), ale aj napriek tomu sú tieto aproximácie relatívne presné.

Turnbull - Wakemanova aproximačná formula

Nasledovný kód vypočíta cenu opcie podľa Turnbull – Wakemanovej aproximačnej metódy.

```
function TurnbullWakemanAsian=TurnbullWakemanAsian(TypOpcie, S,  
SA, X, T, T2, r, b, v)  
  
clc  
% TypOpcie -> c=call, p=put  
% S=cena podkladoveho aktiva  
% SA=doteraz realizovany priemer cien podkladoveho aktiva  
% X=realizacna cena  
% t1=cas do zaciatku priemerovacieho obdobia v rokoch  
% T=cas do maturity opcie v rokoch  
% T2=povodny cas v priemerovacom období v rokoch, pocas zivotnosti  
opcie konstantny  
% r=bezrizikova urokovna miera  
% b=transakcne naklady  
% v=annualizovana volatilita podkladoveho aktiva  
% tau=zostavajuci cas priemerovacieho obdobia  
  
m1=0;  
m2=0;  
tau=0;  
t1=0;  
bA=0;  
vA=0;  
  
t1=max(0, T-T2);  
tau=T2-T;
```



```

if b==0
    m1=1;
else
    m1=(exp(b*T)-exp(b*t1))/(b*(T-t1));
end

if tau>0
    if ((T2/T)*X-(tau/T)*SA)<0
        if TypOpcie=='c'
            SA=SA*(T2-T)/T2+S*m1*T/T2;
            TurnbullWakemanAsian=max(0, SA-X)*exp(-r*T)
        else TurnbullWakemanAsian=0
        end
    end
end

if b==0
    m2=2*exp(v*v*T)/((v^4)*(T-t1)^2)-2*exp(v*v*t1)*(1+v*v*(T-
t1))/((v^4)*(T-t1)^2);
else m2=2*exp((2*b+v*v)*T)/((b+v*v)*(2*b+v*v)*(T-
t1)^2)+2*exp((2*b+v*v)*t1)/(b*(T-t1)^2)*(1/(2*b+v*v)-exp(b*(T-
t1))/(b+v*v));
end

bA=log(m1)/T;
vA=sqrt(log(m2)/T-2*bA);

if tau > 0
    X=(T2/T)*X-(tau/T)*SA;
    TurnbullWakemanAsian=GBS(TypOpcie, S, X, T, r, bA, vA)*(T/T2)
else TurnbullWakemanAsian=GBS(TypOpcie, S, X, T, r, bA, vA)
end
end

```

Levyho aproximačná formula

Podobný spôsob určenia približnej ceny opcie ako Turnbull – Wakemanova metóda je Lévyho aproximácia. Táto metóda je o čosi presnejšia.

```
function LevyAprox=LevyAprox(S,Sa,X,T,T2,r,b,sigma)
% TypOpcie = call/put
% Sa aritmeticky priemer znomych fixnzch cien podkladoveho aktiva
% S cena podkladoveho aktiva
% X realizacna cena opcie
% r bezrizikova urokovka miera
% b transakcne naklady
% T2 zostavajuci cas do maturity
% T povodny cas do maturity
% volatilita ln(return of underlying asset)

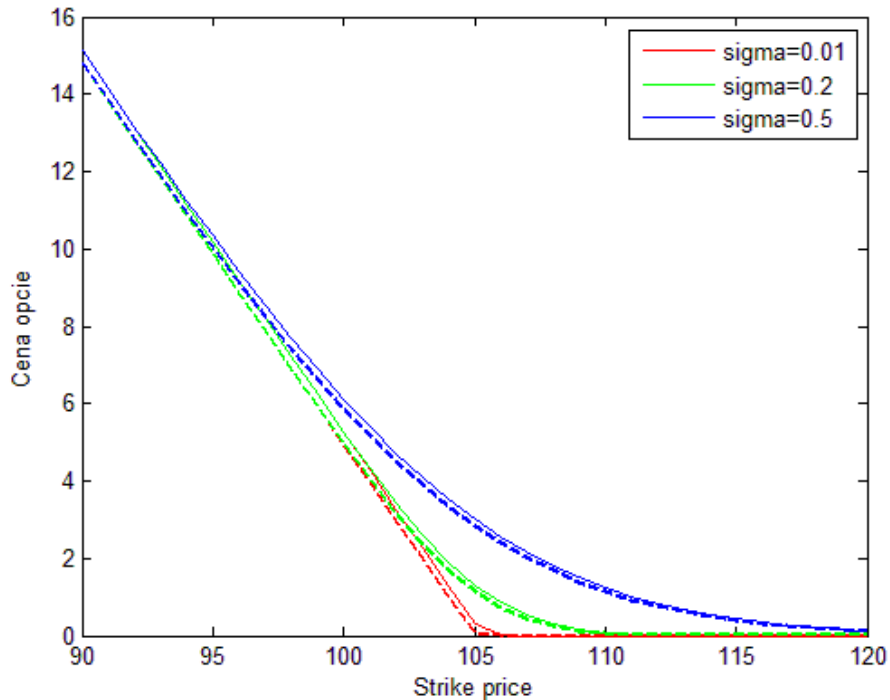
clc

if b>0
Se=(S/(T*b))*(exp((b-r)*T2)-exp(-r*T2));
M=((2*S^2)/(b+sigma^2))*((exp((2*b+sigma^2)*T2)-1)/(2*b+sigma^2)-
((exp(b*T2)-1))/b);
D=M/(T^2);
V=log(D)-2*(r*T2+log(Se));
Xhat=X-(T-T2)*Sa/T;
d1=(1/sqrt(V))*((log(D)/2)-log(Xhat));
d2=d1-sqrt(V);
%LevyAprox=Se*normcdf(d1)-Xhat*exp(-r*T2)*normcdf(d2) % for call
%LevyAproxP=LevyAprox-Se+Xhat*exp(-r*T2) % for put
elseif b==0
Xhat=X-(T-T2)*Sa/T;
Se=S*T2/T;
M=((2*S^2)/(sigma^2))*((exp(2*T2*sigma^2)-1)/(sigma^2)-T2);
D=M/(T^2);
V=log(D)-2*(r*T2+log(Se));
d1=(1/sqrt(V))*((log(D)/2)-log(Xhat));
d2=d1-sqrt(V);
end
```

```

LevyAprox=Se*normcdf(d1)-Xhat*exp(-r*T2)*normcdf(d2) % for call
LevyAproxP=LevyAprox-Se+Xhat*exp(-r*T2)

```



Obrázok A.2: Porovnanie Lévyho aproximácií pri nenulových (5%) a limitne nulových (0,01%) transakčných nákladoch. Grafy znázorňujúce limitne nulové transakčné náklady sú znázornené spodnými prerušovanými čiarami.

Približná analytická formula (využívajúca upravenú volatilitu a transakčné náklady)

Táto formula je Kemna – Vorstova aproximácia. Jej odvodenie môžeme nájsť v podkapitole 3.1. Parametre vstupujúce do výpočtu sú cena podkladového aktíva S , realizačná cena X , úroková miera r , čas do expirácie v rokoch T , volatilita σ . Dividendy D uvažujeme nulové.

```

function GeomPrice=GeomPrice(S,X,r,D,T,sigma)
sigmaA=sigma/sqrt(3);
b=0.5*(r-D-(sigma^2)/6);
d1=(log(S/X)+(0.5*sigmaA^2)*T)/(sigmaA*sqrt(T));
d2=d1-sigmaA*sqrt(T);

```

```
GeomPrice=S*exp((b-r)*(T))*normcdf(d1)-X*exp(-  
r*(T))*normcdf(d2);  
%GeomPrice=X*exp(-r*(T))*normcdf(-d2)-S*exp((b-  
r)*(T))*normcdf(-d1);  
%GeomPrice=S*exp((-r)*(T))*normcdf(d1)-X*exp(-  
r*(T))*normcdf(d2);  
%GeomPrice=X*exp(-r*(T))*normcdf(-d2)-S*exp((-  
r)*(T))*normcdf(-d1);
```

Príloha B

Nasledujúci kód predstavuje vzájomné porovnanie jednotlivých aproximačných metód. Za kódom potom uvádzame ešte detailné rozlíšenie priebehu najpresnejších aproximácií.

Porovnanie

```
clc
X=90:1:120;
for i=1:31

for i=1:31

F(i)=TurnbullWakemanAsian('c',100,110,X(i),0.5,0.25,0.07,0.02,0.2)
;
end
plot(X,F,'b')

hold on

for i=1:31
    H(i)=LevyAprox(100,110,X(i),0.5,0.25,0.07,0.02,0.2); %pre call
end
plot(X,H,'y')

hold on

for i=1:31

G(i)=AsianCurranAprox('c',100,110,X(i),0,0.5,360,180,0.07,0.02,0.
2);
end
plot(X,G,'g')

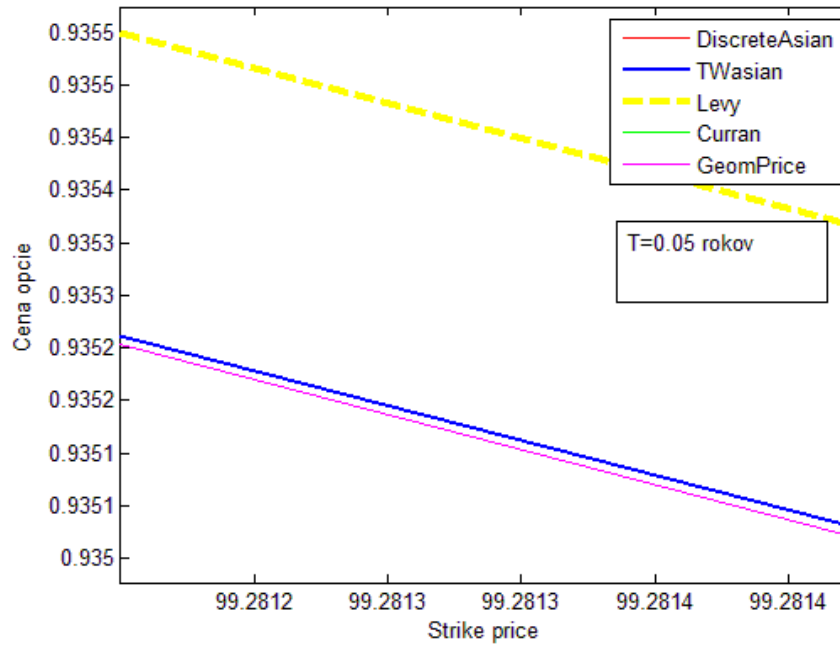
hold on

for i=1:31
    I(i)=GeomPrice(100,X(i),0.05,0,0.5,0.2);
```

```

end
plot(X,I,'m')
legend('TWAsian','Levy','Curran','GeomPrice')

```



Obrázok B.1: Detailné zobrazenie priebehu najpresnejších aproximácií (Lévy, Turnbull – Wakeman a Kemna – Vorstova aproximácia (GeomPrice)). Relatívne odchýlky jednotlivých aproximácií sú na úrovni nepresahujúcej 10^{-4} .