

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

MODELOVANIE RIZIKOVO-NEUTRÁLNYCH
PRAVDEPODOBŇNOSTÍ VÝVOJA CIEN
FINANČNÝCH NÁSTROJOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava, 2013

Bc. Peter Štefko

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



MODELOVANIE RIZIKOVO-NEUTRÁLNYCH
PRAVDEPODOBNOSTÍ VÝVOJA CIEN
FINANČNÝCH NÁSTROJOV

Diplomová práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika, 1114
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Školiteľ: Ing. Mgr. Pavol Jurča, PhD.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Peter Štefko
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Modelovanie rizikovo-neutrálnych pravdepodobností vývoja cien finančných nástrojov

Cieľ: Rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti vývoja trhových faktorov možno odvodiť z cien opcií na príslušný finančný nástroj. Využitie týchto informácií z pohľadu centrálnej banky spočíva predovšetkým v hodnotení rizík na finančných trhoch z hľadiska finančnej stability. Teoretická metodológia výpočtu je relatívne jednoduchá, pri praktickej aplikácii však vzniká pomerne veľké množstvo komplikácií. Ide predovšetkým o dostupnosť a kvalitu údajov o cenách opcií a nájdenie spôsobu odvodenia spojitého pravdepodobnostného rozdelenia z diskretných údajov. Cieľom diplomovej práce je popísať uvedený spôsob výpočtu, implementovať niektoré metódy odvodenia pravdepodobnostného rozdelenia a analyzovať využitie získaných výsledkov pre NBS.

Vedúci: Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum zadania: 25.01.2012

Dátum schválenia: 26.01.2012

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval sám, výlučne s pomocou nadobudnutých teoretických vedomostí, konzultácií a uvedenej literatúry.

V Bratislave, apríl 2013

.....

Bc. Peter Štefko

Pod'akovanie

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať môjmu vedúcemu diplomovej práce, Ing. Mgr. Pavlovi Jurčovi, PhD., za jeho odborné pripomienky a postrehy, cenné rady a za množstvo času a trpezlivosti, ktoré mi venoval počas celej doby písania tejto diplomovej práce.

Takisto by som sa chcel poďakovať mojím rodičom za podporu počas celej doby môjho vysokoškolského štúdia.

ŠTEFKO, Peter, Bc.: Modelovanie rizikovo-neutrálnych pravdepodobností vývoja cien finančných nástrojov [Diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúci diplomovej práce: Ing. Mgr. Pavol Jurča, PhD., Bratislava, 2013, 50 s.

Abstrakt

Opcie predstavujú informačne veľmi bohatý nástroj, umožňujúci odhad rizikovo-neutrálnych pravdepodobnostných rozdelení ceny podkladového aktíva v čase ich expirácie. Rizikovo neutrálna pravdepodobnosť (RND) obsahuje dôležité informácie ohľadom očakávaní trhu, a to vrátane informácií týkajúcich sa ich možnej asymetrie, ťažkých chvostov a pod. Trhy s finančnými derivátmi sa preto čoraz viac stávajú predmetom záujmu rôznych finančných inštitúcií, najmä pri určovaní monetárnej politiky za cieľom finančnej stability, ako aj pri investičných rozhodnutiach. Na odhad rizikovo-neutrálnych pravdepodobností bolo vyvinutých viacero metód. V tejto diplomovej práci sú tie najdôležitejšie z nich (DLN - kombinácia lognormálnych rozdelení, GB2 - zovšeobecnené Beta-2 rozdelenie a SIV - interpolácia *volatility smile*) podrobne opísané, testované a vzájomne porovnané. Pri ich praktickej implementácii vzniká veľké množstvo technických problémov, na ktoré v práci upozorňujeme a uvádzame možnosti ich riešenia. Konštatujeme, že zatiaľ čo GB2 metóda poskytuje robustné odhady RND, DLN a SIV metódy sú flexibilnejšie vzhľadom na zmeny situácie na trhu, avšak za cenu väčšej citlivosti na disturbancie zdrojových dát. V práci uvádzame aj aplikáciu nami vyvinutého filtračného algoritmu, umožňujúceho výpočet robustnejších odhadov RND pre veľké množstvo dát automatizovane. Na záver demonštrujeme možné využitie RND v praxi pri viacerých situáciách na trhu.

Kľúčové slová: Call opcia, Black-Scholes, volatility smile, rizikovo-neutrálna pravdepodobnosť

ŠTEFKO, Peter, Bc.: Modeling of risk-neutral probabilities of financial instruments prices. [Diploma thesis]. Comenius University in Bratislava, Faculty of mathematics, physics and informatics, Department of applied mathematics and statistics. Diploma thesis supervisor: Ing. Mgr. Pavol Jurča, PhD., Bratislava, 2013, 50 p.

Abstract

Options represent very information-rich financial instrument, enabling us to compute risk-neutral probability distributions of their underlying asset price at the maturity date. Risk-neutral probabilities (RNDs) contain valuable information regarding market expectations, including information regarding their possible asymmetry, leptokurtosis etc. Financial derivatives markets are therefore becoming the rising point of interest for various financial institutions, especially in assessing monetary policy conditions with the aim to ensure financial stability and in determining investment decisions. Several methods have been developed for estimating these risk-neutral probabilities. In this diploma thesis, the most important ones (DLN - mixture of lognormal distributions, GB2 - generalized Beta-2 distribution and SIV - interpolation of volatility smile) are described in detail, tested and mutually compared. During their implementation, a lot of technical difficulties may arise. We identify these problems and introduce the possibilities of their solutions. We state that while GB2 method provides us with very robust estimates of RND, DLN and SIV methods are more flexible with respect to changes on market, however, this flexibility comes at the cost of higher sensitivity to source data disturbances. In the thesis we also introduce an application of our own filtration algorithm that enables us to compute more robust estimates of large number of RNDs automatically. Finally, we demonstrate possible applications of RND estimates in several market situations.

Keywords: Call option, Black-Scholes, volatility smile, risk-neutral probability

Obsah

Úvod	1
1 Metodika	3
1.1 Black-Scholesov vzorec	3
1.2 Implikovaná volatilita, <i>volatility smile</i>	4
1.3 Odhadovanie rizikovo-neutrálnych pravdepodobností	5
1.3.1 Spoločné východiská	5
1.3.2 Metóda dvoch lognomálnych rozdelení (DLN)	7
1.3.3 Metóda zovšeobecneného Beta-2 rozdelenia (GB2)	10
1.3.4 Metóda využívajúca interpoláciu <i>volatility smile</i> (SIV)	11
1.4 Odhad reálnej pravdepodobnosti	13
1.5 Prehľad pozitívnych metód v literatúre	16
2 Technické problémy	17
2.1 Dáta	17
2.2 Prvá filtrácia dát	17
2.3 Black-Scholes Benchmark (BS)	20
2.4 DLN metóda	21
2.5 GB2 metóda	25
2.6 SIV metóda	29
2.7 GARCH metóda	31
2.8 Porovnanie výsledných hustôt pravdepodobností	34
2.9 Porovnanie výsledných funkcií relatívnej averzie voči riziku	35
2.10 Druhá filtrácia dát	36
3 Aplikácia metód na reálne trhové dáta	40
3.1 Opcie s rôznou maturitou	40
3.2 Časový rad opcií s fixným dátumom maturity	42
3.3 Časový rad opcií s fixnou hodnotou T	44
3.4 Prípadová štúdia: Analýza dopadu prejavu Maria Draghiho zo dňa 26.7.2012	46
Záver	47
Literatúra	49

Úvod

Informácie o finančných nástrojoch, ktoré sú dostupné na trhu, sú vo veľkej miere využívané nielen investormi (pri stanovovaní ich ďalšej obchodnej stratégie) ale aj dozornými finančnými inštitúciami (akými sú centrálné banky) pri určovaní monetárnej politiky. Dôvodom je fakt, že aplikáciou vhodných postupov sa analytici môžu dozvedieť veľké množstvo užitočných informácií nielen o súčasnom stave ekonomiky, ale aj o jej očakávanom stave v budúcnosti. V cenách týchto nástrojov sú totiž takisto zahrnuté očakávania trhu a investorov na ňom pôsobiacich. Toto informačné bohatstvo motivuje k dôkladnému štúdiu postupov, ktorými môžeme dané očakávania vhodne kvantifikovať analýzou údajov dostupných na trhu.

Okrem základných údajov, akými sú aktuálne ceny akcií, akciových indexov, hodnoty úrokových mier a rôznych makroekonomických ukazovateľov sa čoraz viac štúdií sústreďuje na ceny finančných derivátov. Finančné deriváty možno vo všeobecnosti rozdeliť na tri základné skupiny: forwardy, opcie a swapy. Na trhu sa obchoduje v rôznych objemoch so všetkými troma typmi derivátov, pričom podkladové aktíva sa takisto môžu líšiť (akcie, úrokové miery, komodity a pod.). Ceny týchto derivátov vedia napovedať mnoho o očakávaniach trhu ohľadom budúceho vývoja cien podkladových aktív. Za najbohatší zdroj takýchto informácií sa považujú opcie.¹ Dôvodom je fakt, že zatiaľ čo cena forwardu (s danou maturitou pre dané podkladové aktívum) je len jedna, pre dané podkladové aktívum býva v konkrétnom čase k dispozícii zvyčajne väčšie množstvo rôznych cien opcií s tou istou maturitou. Tieto opcie sa líšia realizačnou cenou.

V tejto práci sa budeme zaoberať metódami, ktoré umožňujú z cien európskych opcií získať tzv. rizikovo-neutrálnu pravdepodobnosť (ďalej takisto označovanú ako RND - risk-neutral density) ceny podkladového aktíva v čase expirácie týchto opcií. Pod pojmom rizikovo-neutrálna pravdepodobnosť sa myslí hustota pravdepodobnosti ceny podkladového aktíva v čase expirácie, za predpokladu, že trh aj investori sú rizikovo neutrálni, čiže nepožadujú žiadnu rizikovú prémiiu za opcie, ktorých uplatnenie subjektívne považujú za menej pravdepodobné. Inými slovami, investori aj trh majú nulovú averziu voči riziku.

Extrahovaniu RND z cien opcií sa venuje veľké množstvo štúdií, čo sa prejavuje na pomerne veľkom počte metód, ktoré sa pri tomto postupe dajú použiť. Cieľom tejto diplomovej práce je preto podrobý popis spôsobu výpočtu a odhadu rizikovo-neutrálnych pravdepodobností podľa viacerých metód, ich vzájomné porovnanie a vyhodnotenie a analýza ich využitia najmä pre tvorcov monetárnej politiky. Práca sa skladá z troch kapitol a jej štruktúra je nasledovná.

V prvej kapitole sa sústreďujeme na teoretický popis ako samotných rizikovo-neutrálnych pravdepodobností, tak aj najpoužívanejších metód, zaoberajúcich sa ich odhadovaním. Podrobne vysvetlíme podstatu dvoch parametrických metód, predpokladajúcich určitú parametrickú triedu RND funkcie (v našom prípade sa jedná o kombináciu dvoch lognormálnych rozdelení a zovšeobecnené Beta-2 rozdelenie) a jednej neparametrickej metódy, založenej na interpolácii *volatility smile*. Keďže RND odrážajú

¹Európska call (put) opcia predstavuje právo, ale nie povinnosť, kúpiť (predať) podkladové aktívum za vopred dohodnutú realizačnú cenu (strike price) vo vopred dohodnutom čase splatnosti (expirácie) opcie.

reálne očakávania trhu iba v prípade, že reprezentatívny investor je rizikovo-neutrálny, je potrebné poznamenať, že tento predpoklad v praxi splnený nie je. Na záver druhej kapitoly preto uvádzame popis jednej metódy, umožňujúcej odhad reálnej pravdepodobnosti na základe GARCH(1,1) modelu.

Keďže pri praktickej implementácii týchto metód často dochádza k množstvu otázok a problémov, v druhej kapitole ilustrujeme názorný postup pri výpočtoch jednotlivých RND, upozorňujeme na jednotlivé problémy a navrhujeme možnosti ich riešenia.

Tretia kapitola sa zaoberá ukázkami možných spôsobov aplikácie odhadnutých RND za účelom získania informácie ohľadom situácie na trhu, poprípade očakávaní vývoja ceny podkladového aktíva v budúcnosti. Ako zdrojové dáta pri všetkých praktických výpočtoch používame ceny opcií akciového indexu Eurostoxx-50, zaujímať nás teda bude možná interpretácia výsledkov vzhľadom na aktuálnu ekonomickú situáciu v Európe.

1 Metodika

1.1 Black-Scholesov vzorec

Black, Scholes a Merton (1973) vo svojej práci prvýkrát uviedli analytický vzorec na oceňovanie európskeho typu call a put opcií. Ich výsledok spôsobil obrovský rozmach obchodov s opčnými derivátmi. Označme:

- S_t ... spotovú cenu podkladového aktíva v čase ocenenia opčného kontraktu (tento čas označujeme symbolom t),
- K ... realizačnú cenu (strike price),
- T ... čas maturity (expirácie) opcie,
- r ... bezrizikovú úrokovú mieru platnú od času t po čas T ,
- σ ... volatilitu logaritmickej zmeny ceny podkladového aktíva (logaritmickej výnosov).

Black Scholesov vzorec pre cenu európskej call, resp. put opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy je potom nasledovný:

$$\begin{aligned}C(S_t, t) &= S_t \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\P(S_t, t) &= Ke^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1) \\d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\end{aligned}$$

kde $\Phi(\cdot)$ je kumulatívna distribučná funkcia normovanej normálnej náhodnej premennej. Pre úplnosť uvedieme ešte tzv. put-call paritu, umožňujúcu previesť cenu call opcie na cenu put opcie s rovnakou realizačnou cenou a maturitou:

$$P(S_t, t) = C(S_t, t) + Ke^{-r(T-t)} - S_t$$

Uvedené vzťahy sa však opierajú o viacero relatívne silných a náročných predpokladov, ktorých platnosť v reálnom svete je pomerne spochybniteľná. Týmito predpokladmi sú nasledovné:

- cena podkladového aktíva S sa riadi geometrickým Brownovým pohybom s konštantným driftom μ a j volatilitou σ , t.j. spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw,$$

kde w je Wienerov proces. Tento predpoklad implikuje normálne rozdelenie výnosov aktíva, ktoré zrejme nekorešponduje s realitou. Výnosy väčšiny aktív majú totiž rozdelenie, ktoré má v porovnaní s normálnym rozdelením výrazne ťažšie chvosty (extrémne udalosti nastávajú častejšie ako opisuje normálne rozdelenie) a v mnohých prípadoch je aj zošíkmené. Problematický je takisto predpoklad konštantnosti volatility v čase, ktorý neopisuje striedanie a zhukovanie sa období s vysokou a nízkou volatilitou, tzv. volatility clustering.

- Na trhu nie sú žiadne transakčné náklady.
- Investori si môžu požičať ľubovoľné množstvo peňazí za bezrizikovú úrokovú mieru.
- Na trhu neexistuje arbitrážna príležitosť.
- Aktíva sú dokonale deliteľné a likvidné.

Z uvedených predpokladov je práve obmedzenie na stochastický proces tým, ktorý priamo kladie obmedzenia na rizikovo-neutrálnu pravdepodobnosť, na určenie ktorej sa táto práca zameriava. V prípade dodržania tohto predpokladu by totiž úloha bola ľahko vyriešená priamym obmedzením na parametrickú triedu rozdelení: ak sa cena podkladového aktíva riadi geometrickým Brownovým pohybom, potom náhodná premenná S_T má lognormálne rozdelenie s parametrami $\ln(S_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)$, $\sigma\sqrt{T-t}$, čiže rizikovo-neutrálna pravdepodobnosť ceny podkladového aktíva v čase T , ktorú budeme značiť $q(S_T)$, je daná vzťahom:

$$q(S_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma S_T} e^{-\left(\frac{\ln(S_T) - \ln(S_t) - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{2\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2}$$

To, že uvedenú vlastnosť drvivá väčšina aktív nespĺňa, potvrdzuje aj výskyt tzv. volatility smile, ktorý je objasnený v nasledujúcej kapitole.

1.2 Implikovaná volatilita, *volatility smile*

Jediný z päťice vstupných parametrov (S_t, K, r, σ, T) , potrebných na aplikáciu Black Scholesovho (B-S) vzorca, ktorý v čase ocenenia opcie nie je priamo pozorovateľný a je teda potrebné ho odhadnúť, je hodnota volatility výnosov podkladového aktíva σ . Ak by bol splnený predpoklad konštantnosti volatility výnosov v čase, nevychýleným odhadom volatility by bola historická volatilita

$$\sigma_{hist} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

kde y_1, \dots, y_n sú výnosy podkladového aktíva v minulosti. Keďže ale často nastáva striedanie období s prevažne nízkou volatilitou s obdobiami s prevažne vysokou volatilitou (jav známy takisto pod pojmom volatility clustering), takýto odhad nie vždy musí byť správny a môže spôsobiť výrazné chyby vo výpočtoch. V pokročilejších modeloch sa preto volatilita odhaduje pomocou zložitejších metód (príkladom môže byť modelovanie volatility GARCH modelmi pri výpočte Value-at-Risk).

V prípade, ak už ale poznáme trhovú cenu opcie, môžeme nájsť takú hodnotu volatility, aby sa teoretická cena opcie vypočítaná pomocou B-S vzorca zhodovala s pozorovanou cenou na trhu. Túto hodnotu volatility nazývame implikovaná volatilita. Je to v podstate volatilita, ktorú trh stanovením danej ceny opcie implikuje pre výnos podkladového aktíva do času expirácie. Keďže v danom čase máme k dispozícii viacero cien opcií líšiacich sa iba ich realizačnou cenou, môžeme pre každú opciu nájsť zodpovedajúcu hodnotu implikovanej volatility. V prípade platnosti predpokladov B-S modelu by táto hodnota mala byť rovnaká pre všetky realizačné ceny opcií. To však v praxi neplatí. Možno pozorovať, že implikovaná volatilita je zvyčajne konvexnou funkciou realizačnej ceny pre danú množinu opcií s rovnakou maturitou. Podľa tvaru grafu tejto závislosti môžu nastať dva základné javy:

- Volatility smile - ak je daný graf symetrický a pripomína úsmev (smile). Je typický najmä pre opcie na akcie s krátkou maturitou. Platí, že cena opcií, ktoré sú ďalej od at-the-money² pozície je väčšia ako by bola za platnosti B-S modelu, a teda po týchto opciách je väčší dopyt.
- Volatility smirk - ak je implikovaná volatilita opcií s nižšou realizačnou cenou väčšia, resp. menšia ako pre opcie s vyššou realizačnou cenou, graf pripomína úškrn (smirk). Tento jav je typický najmä pre opcie na akciové indexy, špeciálne na tie so vzdialenejším časom splatnosti.

Zobrazením implikovanej volatility v závislosti nielen od realizačnej ceny K , ale aj od času expirácie opcií T môžeme sledovať zmenu tvaru volatility smile, resp. smirk s meniacim sa časom expirácie na trojrozmernom grafe. Takýto graf sa nazýva volatility surface.

Je prakticky nemožné nájsť na trhu sériu opcií (pod sériou opcií budeme rozumieť opcie líšiac sa iba realizačnou cenou), pre ktorú by bol graf závislosti implikovanej volatility od realizačnej ceny konštantnou funkciou, ako by vyplývalo z B-S modelu. Toto platí takisto pre opcie s rovnakou realizačnou cenou, ale rôznou dobou splatnosti, čo sa prejavuje na meniacom sa tvare volatility smile v závislosti od času expirácie opcií, čo možno najlepšie pozorovať práve na volatility surface. To značí, že predpoklady B-S modelu sú vzhľadom k realite príliš obmedzujúce a výsledná rizikovo-neutrálna pravdepodobnosť, ktorá je nimi implikovaná, sa takisto môže výrazne líšiť od skutočnej rizikovo-neutrálnej pravdepodobnosti, ktorá je zapracovaná v cenách opcií. Existencia volatility smile tým pádom poukazuje na fakt, že účastníci trhu majú o vývoji cien podkladových aktív komplexnejšie predpoklady, ako je predpoklad geometrického Brownovho pohybu. Navyše, čím viac sa tvar volatility smilu líši od konštantnej funkcie, tým viac sa trhovú rizikovo-neutrálna pravdepodobnosť líši od tej, ktorú predpokladá B-S model (Bahra, 1997). Je preto potrebné skúmať metódy, ktorými je odhad rizikovo-neutrálnych pravdepodobností vývoja cien finančných nástrojov možné vylepšiť.

1.3 Odhadovanie rizikovo-neutrálnych pravdepodobností

1.3.1 Spoločné východiská

Základným stavebným kameňom modernej teórie financií sú tzv. *contingent claims* (podmienené pohľadávky). *Contingent claim* je aktívum, ktorého výnos závisí na stave podkladového aktíva v určitom čase v budúcnosti. Jedným z takýchto aktív je napríklad aj opcia. Keďže jej hodnota závisí na stave podkladového aktíva v budúcnosti, dá sa očakávať, že v cenách opcií sú zahrnuté subjektívne predpoklady investorov ohľadom pravdepodobnostného rozdelenia ceny daného podkladového aktíva v čase ich expirácie.

Najjednoduchším, ale dôležitým príkladom takéhoto podmieneného aktíva je elementárny nárok (*elementary claim*), zvaný aj Arrow-Debreu aktívum, ktorého výplata je 1 v prípade, že nastal

²Pre call (put) opciu platí, že je v:

- at-the-money pozícii, ak pre jej realizačnú cenu K platí: $K = S_0$,
- in-the-money pozícii, ak platí $K < S_0$, ($K > S_0$)
- out-of-the-money pozícii, ak platí $K > S_0$, ($K < S_0$).

In-the-money a out-of-the-money pozície sa zvyčajne spoločne nazývajú away-from-the-money.

konkrétny stav hodnoty podkladkového aktíva S_T v čase expirácie T a 0 v ostatných prípadoch.³ Ceny Arrow-Debreu aktív sú tým pádom priamo úmerné rizikovo-neutrálnej pravdepodobnosti nastatia daného stavu (viď napríklad Cochrane, 2001). Pri prechode do spojitého stavu je takisto oceňovacia funkcia Arrow-Debreu aktív proporčná s hustotou rizikovo-neutrálnej pravdepodobnosti.

Arrow-Debreu aktíva sú teda informačne veľmi bohatými nástrojmi. Nanešťastie nie sú obchodované na žiadnej burze či organizovanom trhu (Bahra, 1997). Ross (1976) však ukázal, ako možno replikovať Arrow-Debreu aktívum stavu S_T pomocou portfólia call opcií európskeho typu, konkrétne pomocou portfólia nazývaného *butterfly-spread*, centrovaneho na hodnotu S_T . Táto stratégia pozostáva z predaja dvoch call opcií s realizačnou cenou S_T a kúpy dvoch call opcií, jednej s realizačnou cenou $S_T - \Delta S_T$ a druhej s realizačnou cenou $S_T + \Delta S_T$, kde ΔS_T je vzdialenosť realizačných cien dvoch susedných call opcií. Ak cenu call opcie s expiračnou cenou K v čase t označíme $C(K, t)$, výplata takejto stratégie je potom rovná:

$$\frac{[C(S_T + \Delta S_T, t) - C(S_T, t)] - [C(S_T, t) - C(S_T - \Delta S_T, t)]}{\Delta S_T} = 1$$

v prípade, že $K = S_T$ a nula v ostatných prípadoch. *Butterfly spread* teda skutočne replikuje Arrow-Debreu aktívum. Ak ďalej označíme $P(S_T, t, \Delta S_T)$ cenu Arrow-Debreu aktíva centrovaneho na $S_T = K$ a predelíme ju vzdialenosťou ΔS_T , dostaneme:

$$\frac{P(S_T, t, \Delta S_T)}{\Delta S_T} = \frac{[C(S_T + \Delta S_T, t) - C(S_T, t)] - [C(S_T, t) - C(S_T - \Delta S_T, t)]}{(\Delta S_T)^2}$$

Pre ΔS_T limitne idúce k 0 potom dostávame vzťah:

$$\lim_{\Delta S_T \rightarrow 0} \frac{P(S_T, t, \Delta S_T)}{\Delta S_T} = \frac{\partial^2 C(K, t)}{\partial K^2} \Big|_{K=S_T} \quad (1)$$

V prípade možnosti vytvoriť *butterfly-spread* stratégiu pre každú hodnotu K a tým replikovať Arrow-Debreu aktívum pre každú hodnotu S_T by sme teda získali kompletnú *call pricing* funkciu. To by si však vyžadovalo mať k dispozícii opcie s realizačnými cenami líšiacimi sa nekonečne malými hodnotami, čo je nereálna požiadavka.

Zavedením predpokladu vylúčenia arbitrážnych príležitostí Cox a Ross (1976) ukázali, že opcie (nie výhradne európskeho typu) môžu byť ocenené pod rizikovou neutralitou investorov. Cena call opcie európskeho typu (čiže opcie s výplatnou funkciou $\max(S_T - K, 0)$), je rovná diskontovanej hodnote všetkých očakávaných výplat danej opcie pod rizikovo-neutrálnou mierou, t.j.:

$$C(K, t) = e^{-rT} \hat{E}[\max(S_T - K, 0)] = e^{-rT} \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) q(S_T) dS_T$$

kde \hat{E} vyjadruje strednú hodnotu pri rizikovo-neutrálnej hustote pravdepodobnosti ceny podkladového aktíva $q(S_T)$ v budúcnosti.

Rovnaký princíp platí aj pre cenu Arrow-Debreu aktíva:

$$P(S_T, t, \Delta S_T) = e^{-rT} [1 \cdot q(S_T) + 0 \cdot (1 - q(S_T))],$$

kde $q(S_T)$ značí rizikovo-neutrálnu pravdepodobnosť nastatia stavu S_T . Položením do rovnosti s rovnicou (1) a aplikovaním cez celú spojitú množinu možných hodnôt S_T získavame, že druhá derivácia *call*

³Prvýkrát spomenuté v prácach Arrowa (1964) a Debreua (1959).

pricing funkcie podľa realizačnej ceny sa rovná diskontovanej rizikovo-neutrálnej pravdepodobnosti náhodnej premennej S_T (Breedeen a Litzenberger, 1978), t.j. medzi rizikovo-neutrálnou pravdepodobnosťou a oceňovacou funkciou call opcie je nasledovný vzťah:

$$q(S_T) = e^{rT} \frac{\partial^2 C(S, t, K)}{\partial K^2} \quad (2)$$

Tento výsledok je kľúčový z hľadiska praktického výpočtu rizikovo-neutrálnych pravdepodobností pomocou viacerých metód.

Metódy odhadov rizikovo-neutrálnych pravdepodobností možno rozdeliť na päť skupín:

- metódy využívajúce špecifikáciu stochastického procesu, ktorým sa riadi podkladové aktívum;
- metódy využívajúce diskrétny prístup cez implikované binomické stromy;
- metódy konečných diferencií;
- parametrické metódy;
- metódy založené na vyhladzovaní *volatility smile* danej opčnej série.

Podrobný prehľad uvedených metód spolu s literatúrou, ktorá sa nimi zaoberá, uvádzajú Bliss a Panigirtzoglou (2002) ako aj Bahra (1997).

V našej práci sa budeme venovať trom metódam: dvom parametrickým metódam založených na zmesi dvoch lognormálnych rozdelení a zovšeobecnenom Beta 2 rozdelení a neparametrickej metóde interpolácie *volatility smile* pomocou tzv. vyhladzovacieho splajnu. V nasledujúcich častiach sú tieto metódy podrobnejšie vysvetlené.

1.3.2 Metóda dvoch lognomálnych rozdelení (DLN)

Táto metóda spadá pod kategóriu parametrických metód. Tie vo všeobecnosti predpokladajú určitú parametrickú triedu rozdelení pravdepodobnosti, poprípade stochastických procesov opisujúcich dynamiku ceny podkladového aktíva. Typickým príkladom druhého prístupu je vyššie spomenutý Black-Scholesov model, predpokladajúci geometrický Brownov pohyb pre podkladové aktívum.

Vo všeobecnosti je však výhodnejšie klásť parametrické predpoklady na výslednú hustotu pravdepodobnosti ako na stochastický proces ceny podkladového aktíva. Konkrétny stochastický proces totiž jednoznačne určuje terminálne rozdelenie pravdepodobnosti, zatiaľ čo dané terminálne rozdelenie pravdepodobnosti môže byť konzistentné s viacerými stochastickými procesmi (Bahra, 1997). Pre odhad RND je takisto informácia ohľadom dynamiky podkladového aktíva nadbytočná, potrebné je iba poznať výslednú triedu hustoty pravdepodobnosti.

Ceny európskych call a put opcií môžu byť vyjadrené ako diskontovaná suma všetkých budúcich očakávaných výplat. Platí teda:

$$\begin{aligned} C(K, t|\xi) &= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty q(S_T|\xi)(S_T - K) dS_T \\ P(K, t|\xi) &= e^{-r(T-t)} \int_0^K q(S_T|\xi)(K - S_T) dS_T \end{aligned} \quad (3)$$

kde $C(K, t|\xi)$ a $P(K, t|\xi)$ sú modelované ceny call a put opcií s realizačnou cenou K v čase t a $q(S_T|\xi)$ je rizikovo-neutrálna hustota pravdepodobnosti ceny podkladového aktíva v čase expirácie opcie T , čo je funkcia, ktorú hľadáme. Ak pre túto funkciu predpokladáme, že je definovaná pomocou konečnej množiny parametrov ξ a zároveň pozorujeme na trhu nejakú sériu opcií, môžeme nájsť optimálne hodnoty jednotlivých parametrov pomocou nelineárnej optimalizácie, riešením úlohy nelineárneho programovania.

V tejto práci skúmame parametrickú triedu kombinácie dvoch lognormálnych rozdelení (*double lognormal method* - DLN). Tento model prvý krát použili Melick a Thomas (1997). Kombinácia dvoch lognormálnych rozdelení sa ukázala byť schopná zachytiť široké spektrum tvarov výsledných rozdelení, ako aj vysvetliť konvexné tvary *volatility smile*, poprípade *volatility smirk* (Bahra, 1997). V porovnaní s kombináciou viacerých lognormálnych rozdelení však nekladie nereálne nároky na množstvo parametrov optimalizačného procesu. To nemôže byť príliš vysoké, keďže v drivej väčšine sú opcie obchodované len pre určité (na potreby optimalizácie malé) množstvo realizačných cien.

Flexibilita vzhľadom na tvary výslednej RND predstavuje však pre túto metódu aj nevýhodu. Kombinácia dvoch lognormálnych funkcií umožňuje okrem asymetrie (ktorej prípadné zachytenie je žiadúce) takisto bimodalitu výslednej RND. Táto bimodalita je v niektorých prípadoch extrémna, keďže dve maximá sa môžu od seba veľmi líšiť a viesť ku nereálnym, často ťažko interpretovateľným tvarom RND. Táto metóda sa ukázala byť v porovnaní s ostatnými obzvlášť citlivá na vstupné dáta.

Lognormálne rozdelenie je definované pomocou dvoch parametrov α, β nasledovne:

$$L(S_T|\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_T\beta} e^{-\frac{(\ln(S_T)-\alpha)^2}{2\beta^2}}, \quad S_T > 0 \quad (4)$$

Predpokladajúc pre dynamiku podkladového aktíva geometrický Brownov pohyb s konštantným driftom μ a konštantnou volatilitou σ aplikovaním Itôvej lemy na stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

kde w je Wienerov proces, dostávame, že pre logaritmus náhodnej premennej S_T platí:

$$\ln(S_T) \sim N\left(\ln(S_t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right) \quad (5)$$

S_t je hodnota podkladového aktíva v aktuálnom čase t a $N(\mu, \sigma^2)$ značí normálne rozdelenie s priemerom μ a varianciou σ^2 . Náhodná premenná S_T má teda lognormálne rozdelenie s parametrami $\alpha = \ln(S_t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)$, $\beta = \sigma\sqrt{T-t}$. Black a Scholes (1973) ukázali, že opcie môžu byť ocenené za predpokladu, že investori sú rizikovo-neutrálni, nahradením driftu podkladového aktíva μ bezrizikovou úrokovou mierou r . Pre známe hodnoty S_t ceny podkladového aktíva v čase t a úroku r je rozdelenie pravdepodobnosti ceny v čase T tvaru:

$$\begin{aligned} q(S_T|\alpha, \beta) &= L\left(S_T \mid \ln(S_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(T-t)\sigma S_T} e^{-\left(\frac{\ln(S_T) - \ln(S_t) - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{2\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Kombinácia dvoch lognormálnych rozdelení je teda jednoznačne definovaná piatimi parametrami

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta$, kde θ je váha prvého lognormálneho komponentu vo výslednom podmienenom rozdelení. To možno potom vyjadriť v parametrickom tvare ako:

$$q_{DLN}(S_T|\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta) = \theta L(S_T|\alpha_1, \beta_1) + (1 - \theta)L(S_T|\alpha_2, \beta_2)$$

Dosadením tohoto vzťahu do (3) získavame vzorec pre výpočet teoretických cien call a put opcií za predpokladu rozdelenia zodpovedajúceho kombinácii dvoch lognormálnych rozdelení. Tento vzorec možno vyčísliť numericky, existuje však preň aj explicitné riešenie (podrobné odvodenie možno nájsť v "Mathematical appendix" článku Bahru (1997)):

$$\begin{aligned} C_{DLN}(K, t|\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta) &= \\ &= e^{-r(T-t)} \left[\theta \left(e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right) + (1 - \theta) \left(e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} \Phi(d_3) - K \Phi(d_4) \right) \right], \\ P_{DLN}(K, t|\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta) &= \\ &= e^{-r(T-t)} \left[\theta \left(-e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} \Phi(-d_1) + K \Phi(-d_2) \right) + (1 - \theta) \left(-e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} \Phi(-d_3) + K \Phi(-d_4) \right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

kde:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-\ln(K) + \alpha_1 + \beta_1^2}{\beta_1}, & d_2 &= d_1 - \beta_1, \\ d_3 &= \frac{-\ln(K) + \alpha_2 + \beta_2^2}{\beta_2}, & d_4 &= d_3 - \beta_2, \\ \alpha_i &= \ln(S_t) + \left(r_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) (T - t), \\ \beta_i &= \sigma_i \sqrt{T - t}. \end{aligned} \quad (8)$$

Za predpokladu vylúčenia arbitráže musí takisto platiť, že očakávaná hodnota výslednej RND funkcie by sa mala rovnať momentálnej forwardovej cene podkladového aktíva pre čas expirácie. Podkladové aktívum sa v tomto zmysle správa rovnako ako opcia s nulovou expiračnou cenou a táto informácia môže byť takisto zahrnutá v optimalizácii. Očakávaná hodnota (priemer) kombinácie dvoch lognormálnych rozdelení je rovná $\theta e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} + (1 - \theta) e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2}$ a forwardová cena pri bezrizikovej úrokovej miere r je rovná $e^{r(T-t)} S_t$. Výsledná úloha nelineárneho programovania je potom tvaru:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta} \sum_{i=1}^n \left(C_{DLN}(K_i, t|\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta) - \hat{C}_i \right)^2 + \sum_{j=1}^m \left(P_{DLN}(K_j, t|\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta) - \hat{P}_j \right)^2 \\ + \left[\theta e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} + (1 - \theta) e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} - e^{r(T-t)} S_t \right]^2 \end{aligned} \quad (9)$$

\hat{C}_i, \hat{P}_j sú pozorované skutočné ceny call a put opcií (predpokladáme, že v danej sérii opcií máme k dispozícií n call opcií a m put opcií) a $C_{DLN}(K_i, t|\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta), P_{DLN}(K_j, t|\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta)$ sú teoretické ceny call, resp. put opcií vypočítané podľa (7).

Ako možno interpretovať predpoklad kombinácie dvoch lognormálnych rozdelení na cenu podkladového aktíva v čase T ? Jednotlivé komponenty možno pokladať za plauzibilné rozdelenia pravdepodobnosti pri určitom stave trhu. Predpokladáme, že situácia na trhu sa môže vyvíjať dvomi základnými spôsobmi, ktoré môžu nastať s rozličnou pravdepodobnosťou. Keďže sa jedná o rizikovo-neutrálnu pravdepodobnosť, pre každý scenár predpokladáme, že výsledné rozdelenie pravdepodobnosti bude lognormálne s parametrom \hat{r}_i zodpovedajúcim bezrizikovej úrokovej miere platnej pre daný

scenár a volatilitou $\hat{\sigma}_i, i = 1, 2$. Aj keď optimalizáciu pomocou parametrov $\alpha_i, \beta_i, \theta$, optimálne hodnoty $\hat{r}_i, \hat{\sigma}_i$ vieme na základe optimálnych parametrov $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$ bez problémov získať použitím vzťahov (8), ktorými sme pôvodne náhodne vygenerované r_i, σ_i pretransformovali na α_i, β_i . Pri tejto spätnej transformácii budú uvedené vzťahy v nasledovnej forme:

$$\begin{aligned}\hat{r}_i &= \frac{\hat{\alpha}_i - \ln(S_t)}{T - t} + \frac{\hat{\sigma}_i^2}{2}, i = 1, 2 \\ \hat{\sigma}_i &= \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{(T - t)}}, i = 1, 2.\end{aligned}\tag{10}$$

Parameter $\hat{\theta}$ reprezentuje pravdepodobnosť, že sa trh bude vyvíjať tak, že rozdelenie pravdepodobnosti ceny podkladového aktíva bude zodpovedať prvému komponentu nami uvažovanej kombinácie. Vzhľadom na vzťah rizika a výnosu je očakávaním, že komponent s menšou hodnotou očakávaného výnosu \hat{r}_i bude takisto disponovať menšou hodnotou volatility $\hat{\sigma}_i$.

1.3.3 Metóda zovšeobecného Beta-2 rozdelenia (GB2)

Medzi ďalšiu významnú a široko používanú triedu parametrických rozdelení patrí aj zovšeobecné Beta-2 rozdelenie (*Generalized Beta-2 distribution*, GB2). Ako prvý ho na modelovanie ekonomických dát použil McDonald (1984), ktorý modeloval rozdelenie príjmov. Vo financiách je táto trieda populárna najmä vďaka publikácii Bookstibera a McDonalda (1987), v tomto prípade prvýkrát použitá na modelovanie cien aktív.⁴ Pre odhad rizikovo-neutrálnej pravdepodobnosti ju použili Dutta a Babbel (2005), ktorí ju modelovali pre opcie na úrokové miery. Z tohoto dôvodu ju uvádzame ako druhú parametrickú metódu na odhad rizikovo-neutrálnej pravdepodobnosti. GB2 hustota je definovaná ako:

$$q_{GB2}(S_T | a, b, p, q) = \frac{a}{b^{ap} B(p, q)} S_T^{ap-1} \left[1 + \left(\frac{S_T}{b} \right)^a \right]^{-(p+q)}, S_T > 0, a, b, p, q > 0, q - \frac{1}{a} > 0, \tag{11}$$

kde:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{12}$$

je beta funkcia a $\Gamma(\cdot)$ je gamma funkcia definovaná ako:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{13}$$

Postup pri odhade tejto RND je metodologicky rovnaký ako v predchádzajúcom prípade (zmes lognormálnych rozdelení), keďže takisto ide o parametrickú metódu. Na výpočet teoretických cien call a put opcií opäť možno použiť vzorec (3), pričom za funkciu $q(S_T)$ tentoraz treba dosadiť hustotu GB2 rozdelenia. Tento vzorec avšak takisto možno vyjadriť aj v explicitnom tvare a vyhnúť sa tak numerickej integrácii. Postup odvodenia je analogický s DLN rozdelením a možno ho nájsť napríklad v Minderfereski, Rebonato (2001). Pre cenu call, resp. put opcie platí:

⁴Pozri takisto aj Cummins, Dionne a McDonald (1990)

$$\begin{aligned}
C_{GB2}(K, t|a, b, p, q) &= \\
&= S_t \left[1 - G_\beta \left(z(K, a, b) \mid p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a} \right) \right] - K e^{-r(T-t)} [1 - G_\beta(z(K, a, b) \mid p, q)]
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
P_{GB2}(K, t|a, b, p, q) &= \\
&= K e^{-r(T-t)} [-1 + G_\beta(z(K, a, b) \mid p, q)] - S_t \left[-1 + G_\beta \left(z(K, a, b) \mid p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a} \right) \right]
\end{aligned}$$

pričom G_β je kumulatívna distribučná funkcia beta rozdelenia (nie GB2 rozdelenia ⁵) a funkcia z je definovaná ako:

$$z(x, a, b) = \frac{\left(\frac{x}{b}\right)^a}{\left(1 + \left(\frac{x}{b}\right)^a\right)}. \tag{15}$$

Podobne ako v prípade DLN rozdelenia možno zaviesť dodatočnú podmienku ohľadom priemeru výsledného rozdelenia rovnému diskontovanej forwardovej cene podkladového aktíva. Táto podmienka pre GB2 rozdelenie vyzerá nasledovne:

$$S_0 = \frac{bB\left(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a}\right)}{B(p, q)} \tag{16}$$

Našou úlohou pri hľadaní výslednej RND je nájsť hodnoty štyroch parametrov GB2 rozdelenia a, b, p, q riešením nelineárnej optimalizácie tvaru:

$$\begin{aligned}
\min_{a, b, p, q > 0 \mid q - \frac{1}{a} > 0} & \sum_{i=1}^n \left(C_{GB2}(K_i, t|a, b, p, q) - \hat{C}_i \right)^2 + \sum_{j=1}^m \left(P_{GB2}(K_j, t|a, b, p, q) - \hat{P}_j \right)^2 \\
& + \left[S_0 - \frac{bB\left(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a}\right)}{B(p, q)} \right]^2
\end{aligned} \tag{17}$$

Keďže výsledná RND je pre DLN aj GB2 metódu daná parametricky a definičným oborom funkcie hustoty lognormálneho rozdelenia, rovnako ako GB2 rozdelenia je $(0, \infty)$, vo výstupe parametrických metód dostávame hodnoty RND pre každú možnú budúcu hodnotu ceny podkladového aktíva. Táto cena takisto môže byť len nezáporná. Definičný obor výslednej RND teda nezávisí od toho, v akých hodnotách realizačných cien máme k dispozícii ceny opcií. Toto neplatí pri nasledujúcej metóde.

1.3.4 Metóda využívajúca interpoláciu *volatility smile* (SIV)

Veľmi populárnou metódou je takisto tzv. *smoothed interpolation of volatility smile*. Narozdiel od DLN metódy ide o neparametrickú metódu, čo znamená, že na výslednú RND nie sú vopred kladené žiadne predpoklady či parametrické obmedzenia.

Základným vzťahom, o ktorý sa táto metóda opiera, je výsledok daný rovnicou (2), ktorý ako prví získali Breeden a Litzenberger (1978). Dokázali, že medzi rizikovo-neutrálnou pravdepodobnosťou $q(S_T)$ a oceňovacou funkciou call opcie (*call pricing function*) $C(K, t)$ určujúcou cenu call opcie s realizačnou cenou K na podkladové aktívum s hodnotou S_t v čase t je jednoznačný vzťah.

⁵Funkcia G_β súvisí s kumulatívnou distribučnou funkciou GB2 rozdelenia cez funkciu z nasledovne:

$$G_{GB2}(x \mid a, b, p, q) = G_\beta(z(x, a, b) \mid p, q).$$

Ak by sme teda mali k dispozícii kompletnú *call pricing function* pre danú sériu opcií, nájdením jej druhej derivácie a vynásobením príslušným koeficientom e^{rT} by sme hneď získali RND. To je však neuskutočniteľné, keďže v realite nikdy nemáme k dispozícii ceny pre spojitú množinu hodnôt realizačných cien. Vždy v danej opčnej sérii existuje iba obmedzený počet pozorovateľných cien opcií prislúchajúcich diskkrétnej množine hodnôt realizačných cien.

Prirodzeným riešením by bolo použiť tieto diskkrétne dáta a interpoláciou vhodným polynómom alebo splajnom získať požadovanú *call pricing function*. Tento postup sa však v praxi ukázal ako neefektívny. Malé odchýlky vzniknuté pri interpolácii *call pricing function* môžu totiž vyvolať veľké zmeny vo výslednej RND funkcii, čo sa najviac prejavuje ako na chvostoch odhadnutej RND, tak aj na jej multimodalite (Bliss a Panigirtzoglou, 2002).

S úpravou tohto postupu ako prvý prišiel Shimko (1993). Ten navrhol na interpoláciu namiesto *call pricing function* použiť *volatility smile*. Postupom má byť dané implikované volatility získať pomocou B-S vzorca, interpolovať *volatility smile* vhodným typom funkcie (Shimko (1993) použil vyhladzovací kvadratický polynóm) a výslednú funkciu previesť na *call pricing function* takisto pomocou B-S vzorca. Numerickým diferencovaním je možné následne získať RND.

V tejto práci použijeme tento postup, avšak s niekoľkými vylepšeniami. Namiesto vykonávania príslušnej interpolácie v priestore realizačná cena/implikovaná volatilita tento priestor transformujeme na tvar delta/implikovaná volatilita, kde využijeme vzorec pre deltu (Δ) vyplývajúci z B-S vzorca:

$$\text{delta} \equiv \Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) \quad (18)$$

Delta vyjadruje citlivosť ceny call opcie na zmenu ceny podkladového aktíva. Touto transformáciou sa body reprezentujúce opcie, ktoré sú away-from-the-money k sebe zhluknú bližšie ako body zodpovedajúce near-the-money opciám, čo dodá väčšiu voľnosť tvarom RND v strede rozdelenia. Near-the-money opcie teda majú väčší vplyv na tvar stredu výslednej RND. To je žiadúce, keďže v tejto oblasti je viac spoľahlivých a likvidných dát. Túto transformáciu zaviedol Malz (1997).

Napriek tomu, že Malz ako interpolačnú funkciu takisto použil vyhladzovací polynóm nízkeho rádu, v tejto práci použijeme metódu Panigirtzoglou (Bliss a Panigirtzoglou, 2002). V práci interpolovali priestor delta/implikovaná volatilita pomocou tzv. vyhladzovania kubického prirodzeného splajnu (*smoothed natural cubic spline*)⁶. Ten sa získa riešením minimalizačnej úlohy

$$\min_{\Theta} \lambda \sum_{i=1}^N \nu_i \left(IV_i - \hat{IV}_i(\Theta) \right)^2 + (1 - \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} f''(x, \Theta)^2 dx \quad (19)$$

kde Θ je matica parametrov prirodzeného kubického splajnu f , IV_i sú pozorované implikované volatility, $\hat{IV}_i(\Theta)$ sú implikované volatility modelované pomocou splajnu s parametrami Θ . Jednotlivé odchýlky pozorovaní sú vážené hodnotami ν_i , ktoré zodpovedajú vegám jednotlivých opcií. Tie sú určené vzťahom:

$$\text{vega} \equiv \nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S \Phi'(d_1) \sqrt{T - t} \quad (20)$$

⁶Ako prví použili vyhladzovací prirodzený splajn Campa, Chang a Reider (1997). Tí však nepoužili vegy ako váhy jednotlivých komponentov účelovej funkcie minimalizácie.

Vega je citlivosť zmeny ceny opcie na zmenu (implikovanej) volatility a má tú vlastnosť, že je tým väčšia, čím je daná opcia viac v near-the-money pozícii. Vďaka takejto voľbe váh sa kladie dôraz na to, aby vyhladzovací splajn aproximoval volatility opcií v near-the-money pozícii prioritne oproti opciám, ktoré sú viac away-from-the-money.

Vyhladzovací splajn teda na rozdiel od klasického splajnu neinterpoluje vzorku dát presne, ale sa snaží o čo najmenšiu váženú sumu štvorcov odchýlok modelovaných hodnôt od vzorky. Druhým členom účelovej funkcie je tzv. miera zakrivenia splajnu. Parameter $(1 - \lambda)$ určuje váhu priradenú penalizácii za zakrivenie splajnu. Čím je tento parameter väčší (teda čím je λ menšie), tým menej je výsledný splajn zakrivený, avšak tým horšie aproximuje získané hodnoty implikovaných volatilit.

Lahko sa nahliadne, že pri voľbe parametra $\lambda = 0$ sa prakticky jedná o lineárnu regresiu (metódu najmenších štvorcov) cez priestor delta/implikovaná volatilita. Výsledným splajnom teda bude regresná priamka. Naopak pre $\lambda = 1$ dostaneme presnú interpoláciu pomocou kubického prirodzeného splajnu. Jednou z úloh teda bude určiť rozumnú hodnotu vyhladzovacieho parametra λ .

Po získaní vyhladzovacieho splajnu vypočítame jeho funkčné hodnoty pre veľké množstvo ekvidistantne vzdialených bodov v priestore delta/implikovaná volatilita. Tieto následne spätnou konverziou (takisto pomocou B-S vzorca) prevedieme na pôvodný priestor *call pricing function* realizačná cena/cena opcie. Tu treba upozorniť na fakt, že táto metóda nepredpokladá platnosť B-S vzorca, používa ho výsostne na transformáciu dát z jedného priestoru do druhého a naopak. Numerickým zdiferencovaním, ošetrením príslušného diskontného faktoru a predelením celej funkcie jej integrálom (aby sa hustota pravdepodobnosti zintegrovala do 1) získame výslednú RND.

1.4 Odhad reálnej pravdepodobnosti

Pomocou vyššie uvedených troch metód sme teda schopní extrahovať z cien opcií rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti. Základnú vec, ktorú treba mať na pamäti je však to, že tieto pravdepodobnosti nezodpovedajú tým, aké na trhu reálne panujú. Rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti by sa reálnym pravdepodobnostiam rovnali iba vtedy, ak by investori aj trh nemali žiadnu averziu voči riziku, inými slovami, ak by boli rizikovo-neutrálni (práve preto sa daným pravdepodobnostiam hovorí rizikovo neutrálne). Pokiaľ reprezentatívny investor, ktorý opcie oceňuje (trh) nie je rizikovo neutrálny, t.j. za rizikovejšie aktíva požaduje istú rizikovú prirážku, pravdepodobnostné rozdelenie ceny podkladového aktíva implikované cenami týchto opcií takisto nezodpovedá reálnym pravdepodobnostiam. Metód, umožňujúcich odhad reálnych pravdepodobností je takisto viacero.⁷ Základným vzťahom, od ktorého je možné pri odvodzovaní jednotlivých postupov začať, je úloha maximalizácie užitočnosti reprezentatívneho investora vzhľadom k rozpočtovému ohraničeniu:

$$\max_{S_T} \int p(S_T)U(S_T)dS_T - \lambda \left(e^{-r(T-t)} \int q(S_T)S_T dS_T - S_t \right), \quad (21)$$

kde S_T reprezentuje budúci majetok (bohatstvo) v čase T investora s funkciou užitočnosti $U(S_T)$ a počiatočným majetkom S_t , $q(S_T)$ je rizikovo-neutrálna pravdepodobnosť, $p(S_T)$ subjektívna prav-

⁷Anagnou et al. (2002) poskytujú podrobný prehľad článkov zaoberajúcich sa odhadom reálnych pravdepodobností, rovnako aj testami, či dané pravdepodobnosti vierohodne opisujú realitu.

depodobnosť investora a λ reprezentuje tzv. tieňovú cenu rozpočtového ohraničenia (má teda iný význam ako v predchádzajúcej časti venovanej SIV metóde).

Vzťah medzi rizikovo-neutrálnou pravdepodobnosťou a reálnou pravdepodobnosťou prostredníctvom funkcie užitočnosti je potom na základe (21) nasledovný:

$$\frac{q(S_T)}{p(S_T)} = \frac{1}{e^{r(T-t)\lambda}} U'(S_T) \quad (22)$$

Poznaním dvoch z troch funkcií vystupujúcich v tomto vzťahu sa teda ľahko vieme dopracovať k tretej. Najčastejšie používanou metódou je separátny odhad ako rizikovo-neutrálnej pravdepodobnosti (jednou z nami opisovaných metód), tak aj reálnej pravdepodobnosti (pomocou časového radu historických cien podkladového aktíva) a následný odhad funkcie užitočnosti, ako aj funkcie relatívnej averzie voči riziku. My v tejto práci ilustrujeme práve tento postup, pričom na odhad reálnej pravdepodobnosti použijeme metódu GARCH(1,1) modelu so Studentovým t-rozdelením rezíduí. Pre úplnosť ešte dodajme, že existuje relatívne nový prístup, umožňujúci odhad reálnej pravdepodobnosti pomocou cien opcií a testu overujúceho kvalitu výsledných pravdepodobností, ktorý predstavil Berkowitz (2001) a ktorého aplikáciu možno vidieť napríklad v článku Bliss a Panigirtzoglou (2001). Pre dátovú náročnosť tohoto postupu (nutné mať k dispozícii ceny kompletných opčných sérií pre viacero dátumov s konštantnou hodnotou $\tau = T - t$) však v našej práci použijeme štandardnú metódu, využívajúcu iba ceny podkladového aktíva.

Náš postup bude nasledovný: z časového radu denných cien podkladového aktíva získame vektor logaritmických výnosov ako:

$$y_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \quad t = 1, \dots, n, \quad (23)$$

ktorý použijeme na odhad parametrov GARCH(1,1) modelu s t-rozdelením rezíduí. Dôvodom na použitie t-rozdelenia je vyššie spomenutý fakt, že rozdelenie výnosov aktív v drvivej väčšine prípadov nekorešponduje s normálnym rozdelením, ale má ťažšie chvosty, ktoré je schopné t-rozdelenie s vhodne zvoleným počtom stupňov voľnosti ν popísať lepšie. Špecifikácia tohoto modelu je nasledovná:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + z_t \\ z_t &= \sigma_t \cdot \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim Student - t(\nu) \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Odhad parametrov $\omega, \alpha, \beta, \nu$ vykonáme metódou maximálnej vierohodnosti, za parameter μ dosadíme klasický odhad očakávaného výnosu:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (25)$$

Po odhadnutí parametrov ďalej tieto parametre spolu s rovnicami (17) použijeme na zostrojenie simulovaných trajektórií ceny podkladového aktíva od času t po čas T (ďalej predpokladáme, že tieto časy meriame v rokoch a že jeden rok má 252 obchodovateľných dní) zhodný s časom expirácie opcií na toto podkladové aktívum. Po vygenerovaní $252 * (T - t)$ denných výnosov aktíva pomocou parametrov

GARCH modelu získame simulované hodnoty S_T ako:

$$S_T = S_t e^{r_{n+1} + r_{n+2} + \dots + r_{n+252(T-t)}}, \quad (26)$$

kde $r_{n+1}, \dots, r_{n+252(T-t)}$ sú simulované hodnoty výnosov podkladového aktíva od času t po čas T a keďže sa jedná o logaritmické výnosy, môžeme na odhad výnosu na dlhšie obdobie použiť súčet výnosov za jednotlivé kratšie obdobia (v našom prípade sa jedná o denné výnosy).

Po nasimulovaní dostatočne veľkého počtu realizácií S_T získame výslednú hustotu reálnej pravdepodobnosti aplikovaním tzv. *kernel smoothing density* estimátora na histogram týchto realizácií.

Nech $S_T^{(1)}, \dots, S_T^{(N)}$ je vektor N realizácií nami nasimulovanej náhodnej premennej S_T . *Kernel density* odhad je populárna neparametrická metóda umožňujúca odhad hustoty pravdepodobnosti náhodnej premennej na základe konečného počtu jej realizácií⁸. *Kernel density* estimátor je daný vzťahom:

$$p_h(S_T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_h(S_T - S_T^{(i)}) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{S_T - S_T^{(i)}}{h}\right), \quad (27)$$

kde $K(\cdot)$ je *kernel* funkcia a $h > 0$ je vyhladzovací parameter nazývaný aj pásmo (*bandwidth*). Voľba týchto dvoch komponentov závisí od vzorky dát, resp. od skutočného rozdelenia pravdepodobnosti, z ktorého vzorka pochádza. V našom prípade je *kernel* zhodný s distribučnou funkciou normálneho rozdelenia a h sa určí ako:

$$h = \left(\frac{4\hat{\sigma}^5}{3N}\right)^{0.2}, \quad (28)$$

kde $\hat{\sigma}$ je štandardná odchýlka vzorky dát. Táto hodnota pásma je optimálna vtedy, ak skutočné rozdelenie je normálne (Silverman, 1998).

Výstupom uvedeného postupu je teda odhad hustoty reálnej pravdepodobnosti ceny podkladového aktíva, ktorú budeme značiť $p(S_T)$.

Absolútna (*RA*), resp. relatívna (*RRA*) averzia voči riziku priamo súvisia s funkciou užitočnosti reprezentatívneho investora $U(\cdot)$. Obe sú definované práve cez funkciu $U(\cdot)$ ako:

$$\begin{aligned} RA(S_T) &= -\frac{U''(S_T)}{U'(S_T)} \\ RRA(S_T) &= S_T RA(S_T) = -\frac{S_T U''(S_T)}{U'(S_T)} \end{aligned} \quad (29)$$

Pomocou odhadov rizikovo-neutrálnej pravdepodobnosti $q(S_T)$, ako aj reálnej pravdepodobnosti $p(S_T)$ a vzťahu (22) potom môžeme vypočítať funkciu absolútnej averzie voči riziku reprezentatívneho investora ako:

$$RA(S_T) = \frac{d}{dS_T} \log\left(\frac{p(S_T)}{q(S_T)}\right) \quad (30)$$

Z hľadiska interpretácie je vhodné takisto vypočítať funkciu relatívnej averzie voči riziku ako:

$$RRA(S_T) = S_T RA(S_T) \quad (31)$$

⁸V jej súčasnej podobe ju nezávisle od seba uviedli Rosenblatt (1956) a Parzen (1962).

Implikácie rôznych tvarov absolútnej a relatívnej averzie voči riziku sú nasledovné: Predpokladajme portfólio zložené s jedného rizikového a jedného bezrizikového aktíva. Investor, ktorého absolútna averzia voči riziku je vzhľadom na hodnotu S_T klesajúca pri náraste bohatstva množstvo peňazí (vyjadrené v absolútnych číslach) investované do rizikového aktíva vo svojom portfóliu zväčší. V prípade rastúcej absolútnej averzie voči riziku investor toto množstvo peňazí zníži ⁹ a v prípade konštantnej averzie sa jedná o rizikovo-neutrálneho investora nepociťujúceho ani averziu, ani preferenciu rizika.

Podobnú interpretáciu ponúka aj relatívna averzia voči riziku: Investor, ktorého relatívna averzia voči riziku je klesajúca s S_T , sa pri náraste svojho bohatstva zachová tak, že podiel peňazí investovaných do rizikového aktíva zväčší. V prípade rastúcej relatívnej averzie voči riziku tento podiel zmenší a v prípade konštantnej relatívnej averzie sa takisto jedná o rizikovo-neutrálneho investora.

Vzhľadom na jednoznačný vzťah (31) medzi absolútnou a relatívnou averziou voči riziku sa obmedzíme na výpočet a interpretáciu funkcie relatívnej averzie voči riziku.

1.5 Prehľad pozitívnych metód v literatúre

V tejto časti uvedieme informatívny prehľad metód zaoberajúcich sa odhadovaním RND v niektorých vedeckých článkoch. Podrobné informácie o článkoch možno nájsť v záverečnom prehľade použitej literatúry.

Článok	DLN	GB2	SIV	Iné metódy
Bahra (1997)	✓		✓	rizikovo-neutrálny histogram
Bliss a Paningirtzoglou (2002)	✓		✓	
Bliss a Paningirtzoglou (2003)			✓	
Campa et al. (1997)	✓		✓	implikovaný binomický strom
Coutant et al. (2001)	✓			hermitovské polynómy, maximálna entropia
Cummins et al. (1990)		✓		
Dutta (2005)		✓		lognormálne, Burr-3, Weibullovo rozdelenie
Glatzer a Scheicher (2003)	✓		✓	
Liu et al. (2007)	✓	✓	✓	
Malz (1997)			✓	
Bookstaber a McDonald (1984)		✓		
Melick (1997)			✓	
Minderfereski a Rebonato (2001)		✓		
Ornelas a Takami (2011)	✓	✓	✓	
Shimko (1993)		✓		

Tabuľka 1: Prehľad metód zaoberajúcich sa odhadovaním RND v článkoch.

⁹Nutno podotknúť, že prípad rastúcej absolútnej averzie voči riziku je za platnosti štandardných ekonomických predpokladov nerealistický. Práve tieto predpoklady však v pokrízových obdobiach nebývajú zachované, z čoho vyplývajú aj v praxi sa vyskytujúce rastúce a záporné tvary funkcií rizikovej averzie (Jackwerth, 2000).

2 Technické problémy

V predchádzajúcich kapitolách sme uviedli teoretické východiská troch rozličných metód zameraných na odhad rizikovo-neutrálnej pravdepodobnosti (metódy DLN, GB2, SIV), rovnako ako reálnej (subjektívnej) pravdepodobnosti (metóda GARCH) vývoja cien podkladových aktív. Zamerali sme sa takisto na podrobný opis postupu jednotlivých krokov, ako tieto metódy aplikovať na reálne dáta. Pri praktickej implementácii uvedených postupov v prostredí Matlab, vykonanej počas písania tejto diplomovej práce, sme však narazili na pomerne veľké množstvo "technických" problémov a otázok, na ktoré vyššie uvedená teória neposkytuje jednoznačné odpovede. Tie nie sú spomínané ani v nami citovaných článkoch, zo štúdiá ktorých sme jednotlivé metódy čerpali. Tieto problémy vyplývajú ako z nekvality trhových dát, tak z praktickej implementácie jednotlivých numerických a optimalizačných metód. V nasledujúcej kapitole, ktorú považujeme v kontexte tejto práce za pomerne kľúčovú, sa preto na mnohé z týchto problémov pokúsime upozorniť, popísať ich správanie a navrhnúť optimálny spôsob ich riešenia, poprípade zmiernenia ich nežiadúcich dôsledkov.

2.1 Dáta

Všetky výpočty v tejto kapitole budeme vykonávať na cenách opcií získaných z Bloombergu. Jedná sa o európske call opcie na akciový index Eurostoxx 50 (SX5E). Opčná séria pochádza z dňa 17.9.2012 a maturuje dňa 15.3.2013. Čas zostávajúci do expirácie opcií je teda rovný $T = 0.5$ roka. Historické ceny podkladového aktíva sú získané takisto z Bloombergu.

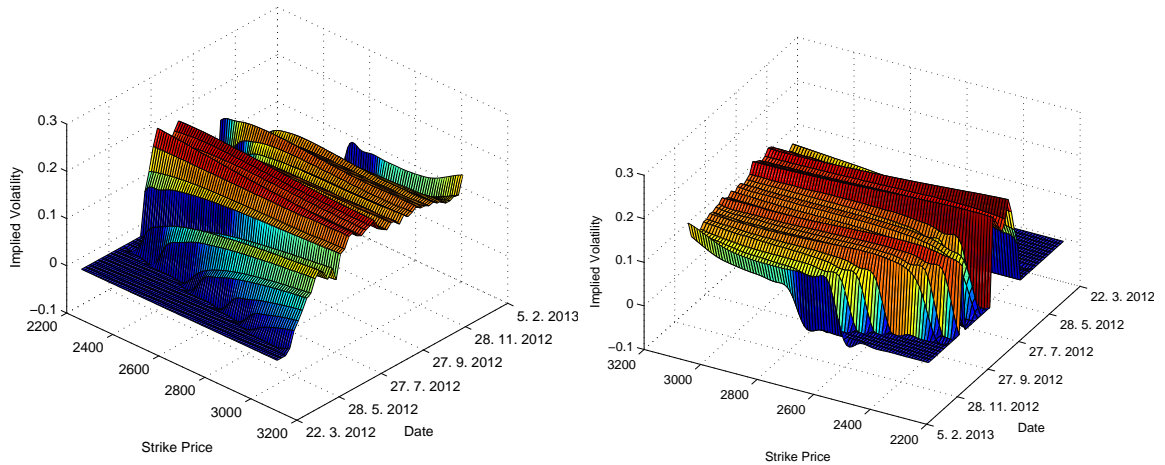
Vstupom do jednotlivých modelov je aj hodnota bezrizikovej úrokovej miery. V našej práci za takúto mieru budeme dosadzovať OIS (overnight indexed swap) sadzby z dňa začiatku života danej opcie s maturitou zhodnou s T . V prípade, že pre danú hodnotu T nemáme k dispozícii konkrétnu hodnotu OIS, použijeme lineárnu interpoláciu medzi predchádzajúcou a nasledujúcou maturitou, ktorá je k dispozícii pre daný deň.

Aj keď celá táto kapitola bude ilustrovaná príkladom série call opcií obchodovaných dňa 17.9.2012 pre akciový index Eurostoxx - 50 (SX5E), veľmi podobné problémy však nastávali pre akýkoľvek zvolený dátum a podkladové aktívum. Analýzou tohoto jediného prípadu teda aplikácia výsledných postupov nestráca na všeobecnosti.

Ako dôkaz toho, že daná opčná séria nie je z hľadiska *volatility smile* výnimočná, uvádzame na obrázku 1 *volatility surface* vývoja opčných sérií maturingých dňa 15.3.2013, obchodovaných v časovom intervale od 22.3.2012 po 5.2.2013 s krokom jedného týždňa.

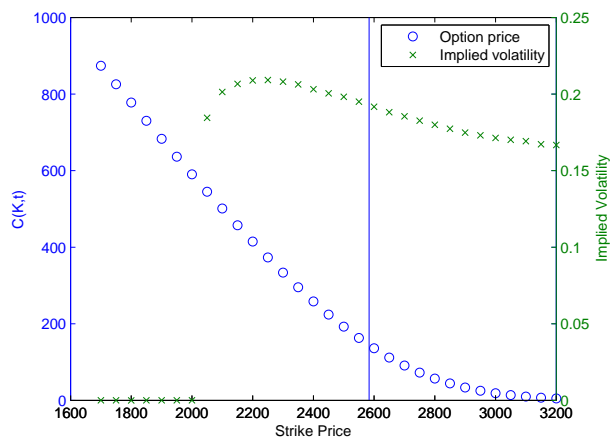
2.2 Prvá filtrácia dát

Naším prvým krokom po načítaní všetkých dostupných cien call opcií z Bloombergu bolo vykreslenie ako *call pricing function*, čiže grafu závislosti ceny call opcie od jej realizačnej ceny, tak aj *volatility smile*, čiže grafu závislosti implikovanej volatility od realizačnej ceny opcie. Očakávali sme teda, že *volatility smile* nebude konštantnou funkciou, ako je predpokladané podľa Black-Scholesovho modelu.



Obr. 1: Časový vývoj *volatility smile* pre časový rad opčných sérií maturujúcich dňa 15.3.2013 z rôznych uhlov pohľadu.

Tento jav sa nám potvrdil, avšak po zobrazení *volatility smile* všetkých pôvodných opcií bolo zrejmé, že dáta bude potrebné vystaviť ďalšej filtrácii.



Obr. 2: *Call pricing function* a *volatility smile* pôvodnej vzorky dát.

Graf trhových cien pôvodnej série call opcií so zodpovedajúcimi hodnotami implikovaných volatilit je na obrázku 2. Zvislou čiarou je zobrazená hodnota at-the-money, teda hodnota podkladového aktíva v čase obchodovania opcií $S_t = 2583,60$. Vidíme, že algoritmus, ktorý hľadá hodnotu implikovanej volatilita zlyhal pre prvých sedem opcií, ktoré sú najviac na in-the-money strane, pretože implikovaná volatilita je pre tieto opcie nulová, čo zrejme nekorešponduje s realitou a je to numerický problém. Prvou úpravou teda bude z našej vzorky dát odstrániť tie opcie, pre ktoré sa nepodarí nájsť hodnotu implikovanej volatilita z intervalu $(0, 1)$. Ďalej vidíme, že nasledujúce opcie na in-the-money strane spektra realizačných cien nezodpovedajú teórii *volatility smile*, ktorá ho opisovala ako konvexnú funkciu realizačnej ceny. Prvých päť opcií je rastúcou konkávnou funkciou realizačnej ceny a aj pre určité ďalšie opcie je konvexnosť *volatility smile* porušená. Pre call opcie často platí, že na vzdialenejšej in-the-money strane sú málo likvidné, a preto zavedieme ďalšie obmedzenie často spomínané v článkoch:

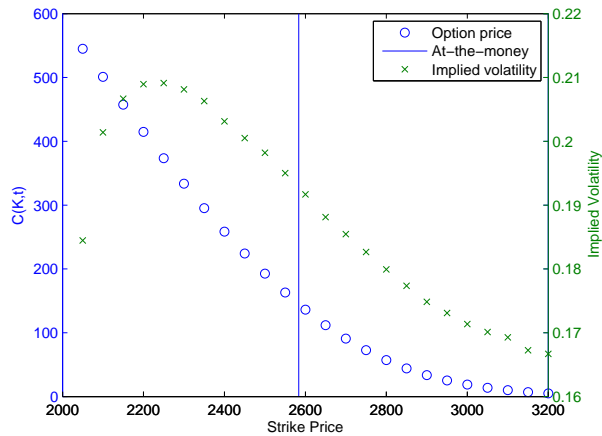
z dát odstránime také opcie, pre ktoré platí:

$$K < 0.75S_t \quad (32)$$

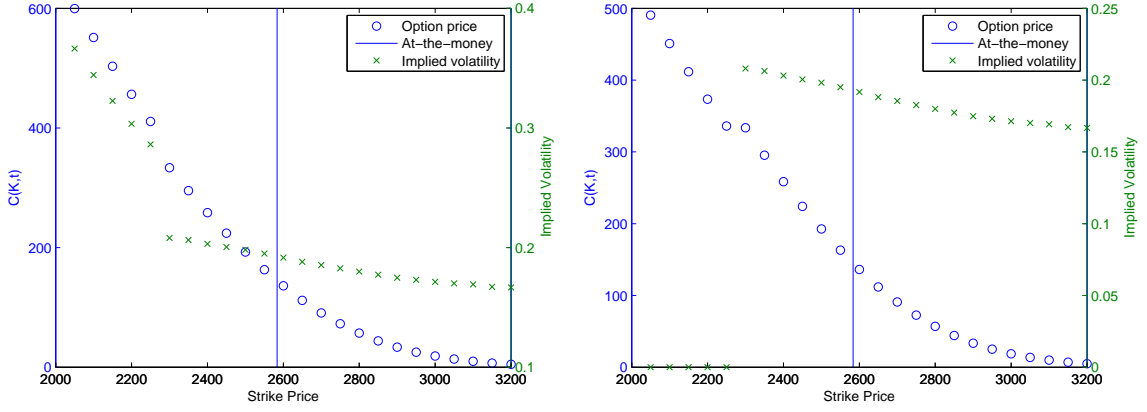
Po odstránení opcií s nulovou implikovanou volatilitou a takých opcií, ktoré spĺňajú vzťah (32) a teda sú dostatočne hlboko v in-the-money pozícii dostávame upravené *Call pricing function*, resp. *volatility smile*, zobrazené na obrázku 3. Zhodou okolností nám obmedzenie (32) odstránilo práve tie opcie, pre ktoré zlyhal algoritmus výpočtu implikovanej volatility. To však nemusí platiť zakaždým a teda obe obmedzenia majú svoj zmysel. Vidíme, že začiatok nového grafu implikovaných volatilít opäť nespĺňa teoretické predpoklady (konvexita). Riešením by bolo sprísniť vzťah (32). To by však v iných prípadoch (kedy začiatok grafu nie je konkávnou rastúcou funkciou) mohlo znamenať vylúčenie opcií, ktoré sú v poriadku, a teda nadbytočné odstránenie informácie. V našom prípade zatiaľ tieto opcie ponecháme a pokúsime sa tento problém vyriešiť neskôr.

Na tomto mieste sa ešte pokúsime hlbšie analyzovať príčiny zlyhania numerického algoritmu, ktorý počíta hodnoty implikovaných volatilít. Zrejme pre fixovanú opčnú sériu (a teda fixované hodnoty $S_t, r, (T - t)$), sú jedinými ďalšími vstupmi algoritmu, ktoré sa menia, hodnoty $K_i, C_i(K_i, t)$, teda realizačná cena a príslušná trhovú cenu call opcie. Keďže prvých päť opcií na in-the-money strane spektra realizačných cien zjavne podlieha určitým nedostatkom, pokúsili sme sa ich ceny manuálne upraviť nasledovnými dvoma spôsobmi: Cenu každej z prvých piatich opcií na in-the-money strane sme zvýšili (pri druhej analýze znížili) o 10

Tu možno pozorovať nasledujúce vlastnosti: implikovaná volatilita je zrejme rastúcou funkciou trhovej ceny call opcie, nakoľko pri zvýšení trhovej ceny možno pozorovať výrazný nárast hodnôt implikovanej volatility (pre prvých päť opcií). Pri znížení trhovej ceny sme zrejme ceny znížili tak markantne, že zodpovedajúce hodnoty implikovaných volatilít sú opäť nulové. Z uvedeného "heuristického" postupu možno vyvodíť záver, že nulová hodnota a nasledovný rastúci tvar *volatility smile* pôvodnej vzorky dát je dôsledkom podhodnotenia trhovej ceny call opcií nachádzajúcich sa na začiatku spektra realizačných cien. Toto podhodnotenie je zrejme dôsledkom nízkej likvidity in-the-money call opcií, a teda vyradenie týchto opcií z dát sa potvrdzuje ako správne. V ďalšom budeme opäť pracovať



Obr. 3: *Call pricing function* a *volatility smile* po prvej filtrácii dát.



Obr. 4: Call pricing function a volatility smile pre opčné série manuálne upravené vyššie uvedeným spôsobom.

s pôvodnou (samozrejme očistenou) vzorkou opcií.

2.3 Black-Scholes Benchmark (BS)

Pre každú sériu opcií okrem metód, ktorými sa táto práca zaoberá, odhadneme takisto rizikovo-neutrálnu pravdepodobnosť implikovanú Black-Scholesovým vzorcom. Túto RND potom použijeme ako "benchmark", čiže na jej základe budeme porovnávať ostatné RND. Black-Scholesove predpoklady implikujú log normálnu rizikovo-neutrálnu pravdepodobnosť $q_{BS}(S_T)$ danú predpisom:

$$q_{BS}(S_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma S_T} e^{-\left(\frac{\ln(S_T) - \ln(S_t) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{2\sigma\sqrt{T}}\right)^2} \quad S_T > 0$$

Za hodnotu σ možno intuitívne dosadiť dve hodnoty: hodnotu implikovanej volatility pre opciu, ktorá je v súčasnosti najbližšie k at-the-money pozícii, alebo najmenšiu hodnotu implikovanej volatility z volatility smilu. V našej práci sa prikláňame k druhej možnosti, teda zvolíme hodnotu:

$$\sigma = \min_i \{\sigma_i\}$$

Tento výber zdôvodňujeme tým, že najmenšia hodnota implikovanej volatility zrejme zodpovedá opcii, ktorá je v danej opčnej sérii najviac likvidná a teda z hľadiska informačného bohatstva najkvalitnejšia.

Pre úplnosť uvádzame pravidlo, na základe ktorého určíme definičný obor, na ktorom budeme všetky rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti získané pomocou parametrických metód (čiže metód BS, DLN, GB2) počítať: definičným oborom budú hodnoty S_T , pre ktoré platí:

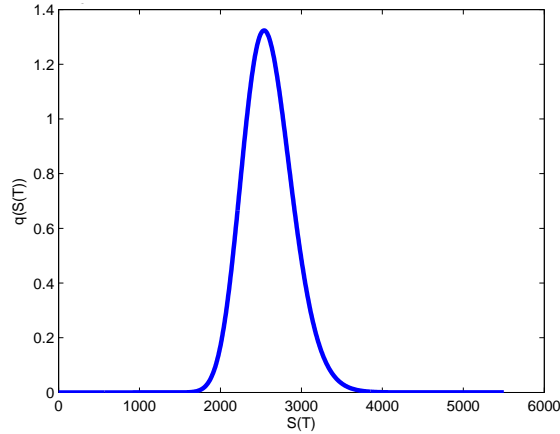
$$S_T \in (max(1, \lfloor K_{min} \rfloor - 2\lfloor (K_{max} - K_{min}) \rfloor), \lceil K_{max} \rceil + 2\lceil (K_{max} - K_{min}) \rceil), \quad (33)$$

kde K_{max} , resp. K_{min} sú najväčšia, resp. najmenšia hodnota realizačnej ceny, ktorá je v danej opčnej sérii k dispozícii. Takto zvolený interval je dostatočne široký na to, aby aj s rezervou zachytil všetky "prakticky" nenulové funkčné hodnoty výsledných RND. Keďže v praxi nepočítame funkčné hodnoty na spojitých, ale na diskretných množinách hodnôt, uvedený interval rozdelíme na dostatočne veľký počet

(1000) ekvidistantných podintervalov $(x_i, x_{i+1}), i = 0, \dots, 1000$ a výsledné hodnoty RND budeme počítať v bodoch $x_i, i = 0, \dots, 1000$. Pre náš príklad konkrétne platilo:

$$K_{min} = 2050, K_{max} = 3200, S_T \in \{1 : 5, 5 : 5500\}$$

Na obrázku 5 vidíme Black-Scholesovu lognormálnu rizikovo-neutrálnu pravdepodobnosť pre našu sériu opcií:



Obr. 5: Rizikovo-neutrálna pravdepodobnosť podľa Black-Scholesovej metódy.

2.4 DLN metóda

Ďalej sa sústreďíme na vyriešenie optimalizačnej úlohy (9) s cieľom nájsť päťicu parametrov kombinácie dvoch lognormálnych rozdelení $(\theta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$.

Keďže musí platiť ohraničenie:

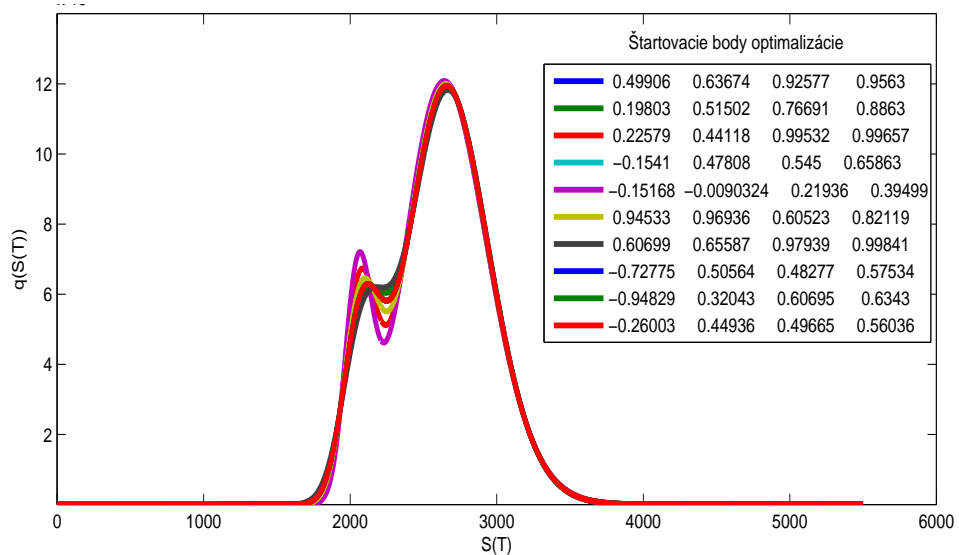
$$\theta \in (0, 1),$$

v záujme čo najmenej dimenzionality problému optimalizáciu implementujeme tak, že s krokom 0.01 budeme meniť hodnotu parametra θ od 0.01 po 0.50 a pre každú z týchto hodnôt vykonáme optimalizáciu cez štyri zvyšné parametre. Naozaj stačí s parametrom θ ísť len "do polovice", keďže hodnotami nad 0.5 by sme dostali symetrickú situáciu, iba v obrátenom poradí jednotlivých komponentov zmesi. Týmto postupom tak získame 50-člennú množinu jednotlivých optimálnych riešení: $(0.01, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \beta_{1,1}, \beta_{1,2}), \dots, (0.50, \alpha_{50,1}, \alpha_{50,2}, \beta_{50,1}, \beta_{50,2})$. Za optimálne riešenie potom vezmeme to, pre ktoré účelová funkcia nadobúda globálne minimum, t.j. nájsť také i , že pre parametre $(\theta_i, \alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \beta_{i,1}, \beta_{i,2})$ účelová funkcia optimalizačnej úlohy (9) nadobúda najmenšiu hodnotu z pomedzi všetkých päťíc uvedenej 50-člennej množiny.

Na samotnú optimalizáciu sme v Matlabe vyskúšali aplikovať jednu deterministickú a jednu stochastickú minimalizačnú procedúru. Deterministická voľná nelineárna optimalizácia je v Matlabe štandardne zahrnutá. Názov konkrétnej funkcie je "fminsearch". Okrem samotnej funkcie je vstupným parametrom takisto aj štartovací bod. Po dlhodobjšom skúmaní správania sa tejto optimalizácie sme zistili, že výsledné optimálne hodnoty mierne závisia aj od štartovacieho bodu. Pre komplexnosť účelovej funkcie je pravidlo, ktoré by určovalo jednoznačne (z hľadiska kvality optimalizácie)

najvýhodnejšiu hodnotu štartovacieho bodu pre prvú fázu hľadania optima ťažko popísateľné. Naším alternatívnym riešením bolo vykonanie viacerých optimalizácií pre viacero náhodne vygenerovaných štartovacích bodov. Keďže výsledné RND sa aj pri väčšom počte štartovacích bodov zoskupovali zväčša do dvoch alebo troch podobných "zhlukov" funkcií, za dostatočný počet považujeme 5 až 10 rôznych štartovacích bodov. Celá procedúra potom v závislosti od výpočetného výkonu môže trvať až niekoľko desiatok minút.

Pri generovaní štartovacích bodov sme postupovali nasledovne: Najprv sme zvolili náhodnú hodnotu parametra μ_1 generovaním z rovnomerného rozdelenia na intervale $(-1, 1)$. V závislosti od tohoto parametra sme vygenerovali druhý parameter μ_2 zodpovedajúci väčšiemu očakávanému výnosu ako hodnotu z rovnomerného rozdelenia na intervale $(\mu_1, 1)$. Keďže našou intuíciou je, že komponent s väčším očakávaným výnosom bude disponovať väčšou rizikovosťou¹⁰, parametre volatilit s vygenerovali z nasledovných rozdelení: $\sigma_1 \sim U(0, 1)$, $\sigma_2 \sim U(\sigma_1, 1)$. Takto vygenerované parametre sme potom pretransformovali na parametre α_i, β_i pomocou vzťahov (8) a riešili optimalizačnú úlohu (9).



Obr. 6: RND podľa DLN metódy pre 10 náhodne vygenerovaných štartovacích bodov.

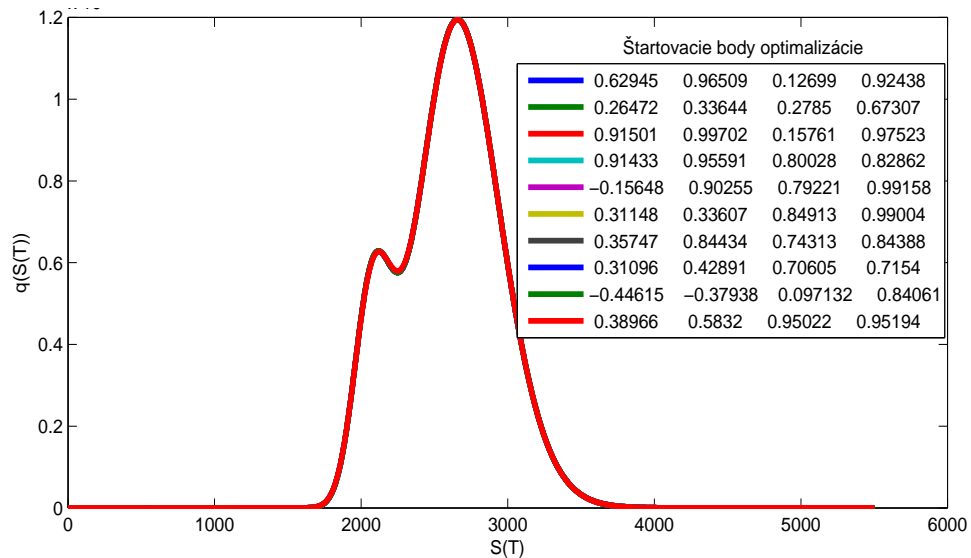
#	μ_{1START}	μ_{2START}	σ_{1START}	σ_{2START}	θ_{OPT}	μ_{1OPT}	μ_{2OPT}	σ_{1OPT}	σ_{2OPT}	f_{min}
1	0.499	0.637	0.926	0.956	0.1800	-0.4166	0.0888	0.0894	0.1450	4.5859
2	0.198	0.515	0.767	0.887	0.1900	-0.4056	0.0923	0.0962	0.1437	4.8258
3	0.226	0.441	0.995	0.997	0.1600	-0.4392	0.0817	0.0734	0.1478	5.4594
4	-0.154	0.478	0.545	0.658	0.1800	-0.4166	0.0888	0.0894	0.1450	4.5858
5	-0.152	-0.009	0.219	0.395	0.1500	-0.4509	0.0779	0.0639	0.1494	7.0934
6	0.945	0.967	0.605	0.821	0.1700	-0.4278	0.0853	0.0819	0.1464	4.7266
7	0.606	0.656	0.979	0.998	0.2000	-0.3949	0.0956	0.1024	0.1425	5.3022
8	-0.728	0.506	0.483	0.575	0.1800	-0.4166	0.0888	0.0894	0.1450	4.5858
9	-0.948	0.320	0.607	0.634	0.1800	-0.4166	0.0888	0.0894	0.1450	4.5858
10	-0.260	0.449	0.497	0.560	0.1800	-0.4166	0.0888	0.0895	0.1450	4.5858

Tabuľka 2: Štartovacie body a optimálne hodnoty parametrov DLN metódy.

¹⁰Zistili sme však, že výsledky optimalizácie nezávisia od toho, či pri generovaní štartovacieho bodu komponentu s menšou hodnotou μ priradíme menšiu alebo väčšiu hodnotu σ .

Na obrázku 6 sú zobrazené výsledné rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti pre 10 takto náhodne vygenerovaných štartovacích bodov (ktorých hodnoty sú zobrazené v legende - ide o pôvodné premenné pred transformáciou, t.j. o parametre μ_i, σ_i). Pre informatívnosť je takisto dôležitá nasledujúca tabuľka 2, v ktorej vidíme výsledné hodnoty optimálnych parametrov $\theta, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ ako aj výslednú optimálnu hodnotu účelovej funkcie f_{min} zodpovedajúce danej optimalizácii.

Uvedený postup je však časovo pomerne náročný a takisto mierne nerobustný vzhľadom na štartovací bod optimalizácie. Zistili sme však, že je možné ho zefektívniť pridaním druhého kroku. Tým bude pre získanú množinu 50 riešení nájsť také i , že pre parametre $(\theta_i, \alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \beta_{i,1}, \beta_{i,2})$ účelová funkcia optimalizačnej úlohy (9) nadobúda najmenšiu hodnotu z pomedzi všetkých päťíc tejto množiny a následne uskutočniť optimalizáciu cez všetkých 5 parametrov $(\theta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$. Dôležité ale je v tomto druhom kroku za štartovací bod zvoliť optimálne riešenie z predchádzajúceho kroku, t.j. vektor $(\theta_i, \alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \beta_{i,1}, \beta_{i,2})$. Optimum získané touto minimalizačnou procedúrou budeme potom považovať za výsledné optimálne riešenie. Takouto úpravou sme dosiahli výrazné zlepšenie robustnosti celej optimalizácie, čo potvrdzujú nasledujúci obrázok 7 a tabuľka 3:

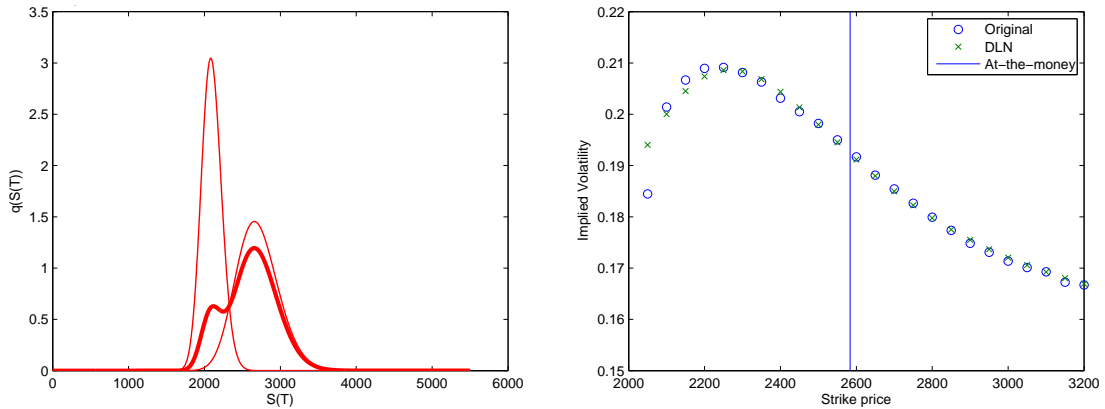


Obr. 7: RND podľa upravenej DLN metódy pre 10 náhodne vygenerovaných štartovacích bodov.

#	μ_{1START}	μ_{2START}	σ_{1START}	σ_{2START}	θ_{OPT}	μ_{1OPT}	μ_{2OPT}	σ_{1OPT}	σ_{2OPT}	f_{min}
1	0.629	0.965	0.127	0.924	0.1784	-0.4188	0.0883	0.0888	0.1452	4.5050
2	0.264	0.336	0.278	0.673	0.1785	-0.4187	0.0883	0.0888	0.1452	4.5050
3	0.915	0.997	0.158	0.975	0.1784	-0.4188	0.0882	0.0887	0.1452	4.5050
4	0.914	0.956	0.800	0.829	0.1784	-0.4188	0.0883	0.0887	0.1452	4.5050
5	-0.156	0.902	0.792	0.992	0.1784	-0.4188	0.0883	0.0887	0.1452	4.5051
6	0.311	0.336	0.849	0.990	0.1784	-0.4187	0.0883	0.0887	0.1452	4.5050
7	0.357	0.844	0.743	0.844	0.1784	-0.4188	0.0883	0.0887	0.1452	4.5050
8	0.311	0.429	0.706	0.715	0.1784	-0.4188	0.0883	0.0888	0.1452	4.5050
9	-0.446	-0.379	0.097	0.841	0.1785	-0.4187	0.0883	0.0887	0.1452	4.5051
10	0.390	0.583	0.950	0.952	0.1799	-0.4171	0.0888	0.0887	0.1450	4.5097

Tabuľka 3: Štartovacie body a optimálne hodnoty parametrov upravenej DLN metódy.

Vyššia kvalita takto upraveného algoritmu je zrejماً. Nielenže sme dosiahli väčšiu presnosť daných optimálnych parametrov, dvoj-etapové vykonanie optimalizácie má za následok to, že nájdenie optima prakticky nezávisí od štartovacieho bodu, a teda sme schopní dosiahnuť výraznú časovú úsporu. Nie je totiž ďalej nutné generovať 10 štartovacích bodov, pre dostatočnú istotu stačí uvedený postup spustiť len raz. Všetky výsledné RND sú prakticky rovnaké a hodnota účelovej funkcie je dokonca o niečo menšia ako v predchádzajúcom prípade, čo potvrdzuje kvalitatívne zlepšenie celej procedúry. Výslednou rizikovo-neutrálnou pravdepodobnosťou získanou pomocou DLN metódy bola teda krivka znázornená na obrázku 8 vľavo.



Obr. 8: Výsledná RND podľa upravenej DLN metódy spolu s oboma lognormálnymi komponentami kombinácie (vľavo) a porovnanie *volatility smile* pôvodných cien call opcií a modelovaných cien call opcií podľa výsledného DLN rozdelenia (vpravo).

Tenkými čiarami sú zobrazené jednotlivé lognormálne komponenty zmesi a hrubou čiarou výsledná DLN RND. Už na pohľad je zrejmé, že v porovnaní s BS metódou DLN metóda vyprodukovala rozdielnu rizikovo-neutrálnu pravdepodobnosť. Príčinou sú práve dva komponenty, ktoré sú navyše relatívne vzdialené od seba (z hľadiska očakávanej hodnoty) a jeden z nich má oproti druhému relatívne malú váhu, čo sa prejavilo v tom, že výsledná RND má dve lokálne maximá. Možnú bimodalitu výslednej RND umožňuje samotná konštrukcia metódy a jej výskyt vôbec nie je výnimočný, čo potvrdzujú aj Ornelas, Takami (2010). To, či je takéto správanie sa metódy DLN vhodné a ako je možné ho potlačiť, budeme skúmať neskôr.

Zaujímavým môže byť však porovnanie pôvodného *volatility smile* (t.j. takého, ktorý sme získali z pôvodnej vzorky dát) a *volatility smile*, implikovaného parametrami, ktoré sme počas výpočtu DLN hustoty odhadli. Rozdielom teda bude pri výpočte implikovanej volatility pre jednotlivé realizačné ceny nepoužiť pôvodné trhové ceny opcií, ale nami modelované ceny, získané dosadením optimálnych parametrov $(\theta_{OPT}, \alpha_{1OPT}, \alpha_{2OPT}, \beta_{1OPT}, \beta_{2OPT})$ do vzťahov (7), resp. (8).

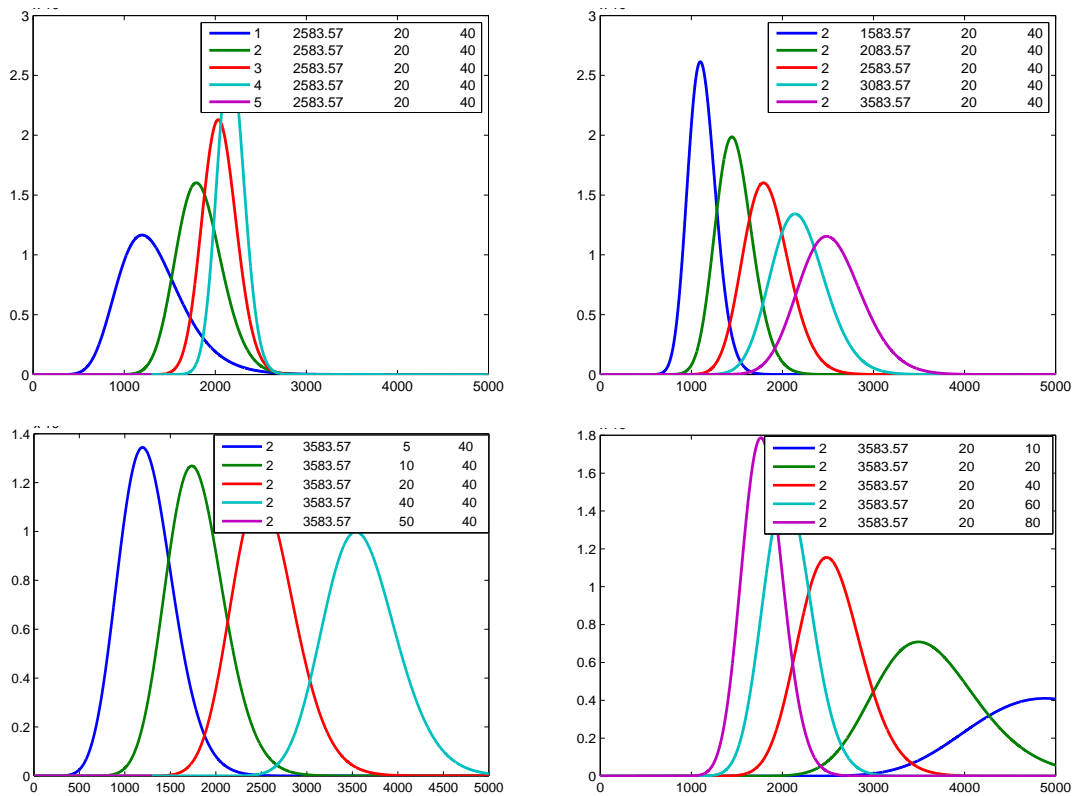
Porovnanie takto získaných *volatility smile* vidíme na obrázku 8 vpravo. Je zrejmé, že práve v oblasti, v ktorej pri výslednej DLN hustote nastalo už spomínané zhrboľatenie sú modelované hodnoty implikovaných volatilit najviac vzdialené od pôvodných, čo je však spôsobené prudkým rastom implikovaných volatilit v tejto oblasti. Keďže sme vyššie už ukázali, že takýto tvar *volatility smile* je spôsobený podhodnotením trhových cien opcií, dôsledkom takéhoto podhodnotenia je teda aj citlivosť

hodnôt výslednej RND získanej DLN metódou v tejto oblasti spektra realizačných cien.

Druhou optimalizačnou metódou, ktorou sme sa optimálne parametre pokúšali nájsť, bolo tzv. simulované žihanie. Jedná sa o stochastickú optimalizačnú metódu prvýkrát nezávisle vyvinutú V. Černým (1985) a S. Kirkpatrickom et al (1983). Táto metóda je takisto implementovaná v Matlabe v balíčku Optimization toolbox. Názov funkcie je "simulannealbnd". Pri spustení tejto funkcie s účelovou funkciou identickou ako v prípade deterministickej optimalizácie sme však nedospeli k riešeniu. Navyše, časovo bola táto optimalizácia podstatne náročnejšia, preto sme ďalej používali pre DLN metódu iba upravenú (dvoj-etapovú) deterministickejšiu optimalizáciu pomocou funkcie "fminsearch", s ktorej robustnosťou sme spokojní.

2.5 GB2 metóda

Pri hľadaní zovšeobecnenej beta-2 (GB2) funkcie je takisto potrebné do jednotlivých procedúr zadať štartovací bod. Keďže v závislosti od štyroch parametrov a, b, p, q sa tvary rozdelení veľmi výrazne menia a na náhodné generovanie štartovacích bodov z rovnomerného rozdelenia na nejakom intervale sa teda nie je vhodné spoľahnúť, na obrázku 9 uvádzame, ako sa tvary GB2 rozdelenia menia pri zmene jedného zo štyroch parametrov (a, b - horné obrázky, p, q - dolné obrázky): Pri určovaní vhodného

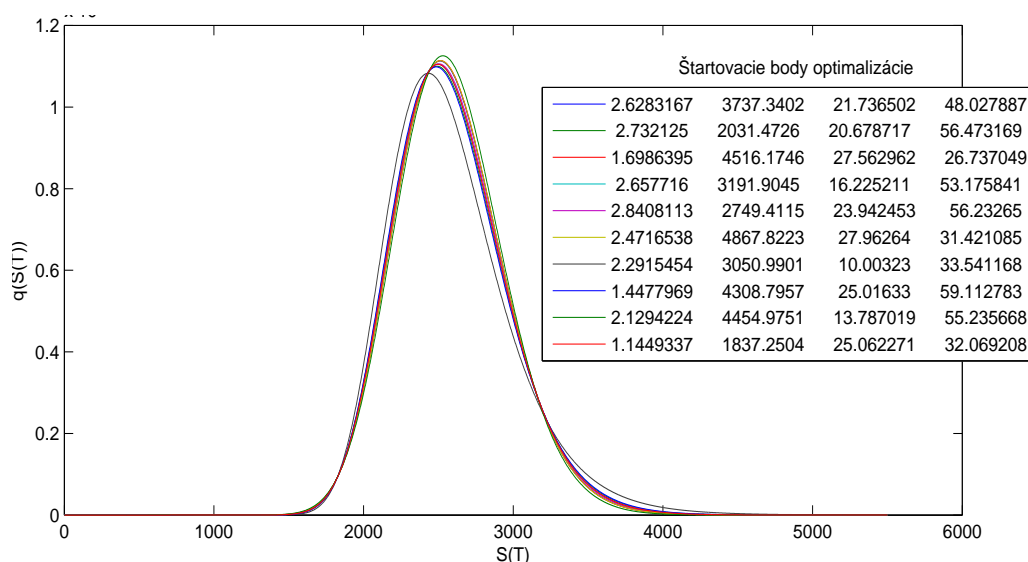


Obr. 9: Tvar zovšeobecného beta-2 rozdelenia s meniacou sa hodnotou jednotlivých parametrov (a, b - horné obrázky, p, q - dolné obrázky).

štartovacieho bodu sme postupovali tak, že sme sa najprv pokúsili vykresliť rozdelenie, ktoré by sa tvarovo aj umiestnením podobalo na BS RND. Postupovali sme heuristickou zmenou parametrov:

Za najvhodnejšiu hodnotu sme z hľadiska tvaru rozdelenia zvolili $a = 2$. Ďalej sme skúmali posun rozdelenia v závislosti od parametra b . Všimli sme si, že hodnoty tohoto parametra musia byť rádovo totožné s cenou podkladového aktíva S_t , a tak sme postupne volili hodnoty $S_t - 1000, S_t - 500, S_t, S_t + 500, S_t + 1000$. Vo všeobecnosti je vhodné zvoliť viacero hodnôt parametra b ako $x * S_t$, kde $x \in (0.5, 1.5)$. Za najvhodnejší parameter sme v našom prípade vybrali $S_t + 1000$. Následnou zmenou parametrov p, q sme za najvhodnejšiu kombináciu považovali hodnoty $p = 20, q = 40$. Pri voľbe parametra q sme dbali na ohraničenie $q - \frac{1}{a} > 0$. Voľbou parametrov $(2, S_t + 1000, 20, 40)$ sme tak získali uspokojivý tvar výsledného rozdelenia, centrovanej približne na hodnotu $S_t = 2583.57$ s rozumnou disperziou.

Pre zachovanie robustnosti optimalizácie sme však aj pri GB2 rozdelení použili sieť štartovacích bodov, pričom jednotlivé štartovacie hodnoty parametrov $\xi \in \{a, b, p, q\}$ sme generovali z rozdelenia $U(0.5\xi, 1.5\xi)$. Na obrázku 10 sú výsledné GB2 RND funkcie pre 10 takto vygenerovaných rôznych štartovacích bodov. Nasleduje takisto tabuľka 4 štartovacích bodov, výsledných optimálnych hodnôt parametrov a optimálnej hodnoty účelovej funkcie pre jednotlivé optimalizácie:



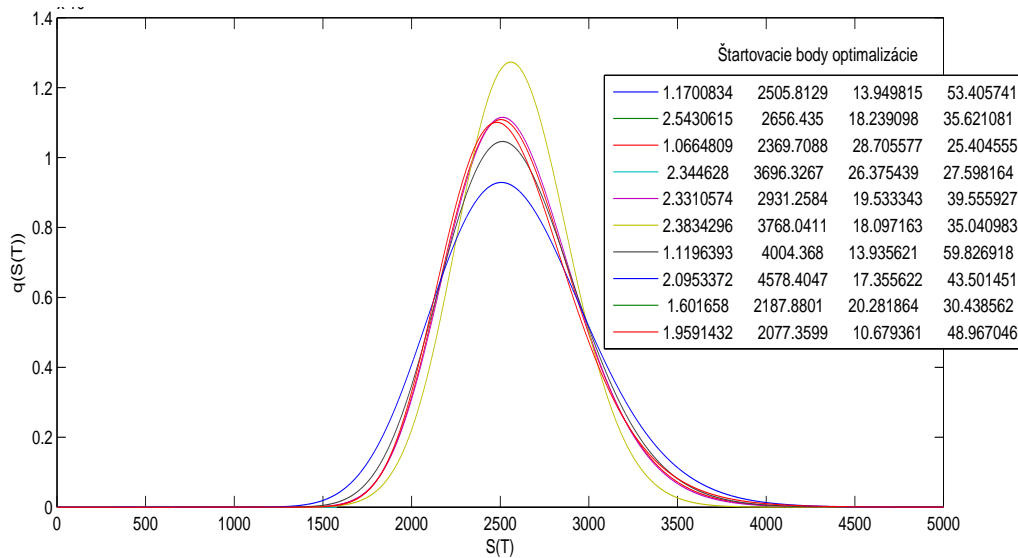
Obr. 10: Výsledné optimálne hodnoty GB2 rozdelenia pre viacero štartovacích bodov s použitím deterministickej optimalizácie.

Pri uvedenom postupe sa nám teda opäť potvrdila konzistentnosť optimalizačnej funkcie f_{min} -arch. Počet štartovacích bodov 10 sa takisto javí ako dostatočný, keďže rozdiely medzi výslednými RND nie sú veľmi veľké a s výnimkou troch funkcií sa nám opäť vytvoril "zhluk" výsledných, veľmi podobných RND. Z uvedených RND, ktoré máme k dispozícii, vyberieme tú najlepšiu opäť na základe optimálnej hodnoty účelovej funkcie dosiahnutej pri danej optimalizácii: v našom prípade sa jedná o siedmu optimalizáciu (hodnota účelovej funkcie 6.250). Všimnime si však, že napriek tomu, že výsledné RND sú si veľmi podobné, jednotlivé parametre a, b, p, q vykazujú pomerne výraznú vzájomnú odlišnosť. To však nie je znepokojivý fakt, keďže rôznymi kombináciami týchto štyroch parametrov sme zrejme schopní dosiahnuť kvalitatívne podobné zovšeobecnené Beta-2 rozdelenia.

#	$\frac{1}{a_{START}}$	b_{START}	p_{START}	q_{START}	$\frac{1}{a_{OPT}}$	b_{OPT}	p_{OPT}	q_{OPT}	f_{min}
1	2.63	3737.34	21.74	48.03	1.53	2901.6	39.24	47.49	8.798
2	2.73	2031.47	20.68	56.47	1.87	1836.5	39.55	21.56	7.941
3	1.70	4516.17	27.57	26.74	1.46	3189.0	40.83	56.18	8.897
4	2.65	3191.90	16.23	53.16	1.95	2069.9	32.25	21.51	8.172
5	2.84	2749.41	23.94	56.23	1.26	2194.6	69.21	57.21	8.398
6	2.47	4867.82	27.96	31.42	1.52	3088.2	38.28	50.82	8.886
7	2.29	3050.99	10.00	33.54	3.60	1596.2	21,17	4.31	6.250
8	1.45	4308.79	25.02	59.11	2.03	1747.3	36.80	17.29	7.722
9	2.13	4454.98	13.79	55.24	1.52	5702.6	29.27	98.01	9.676
10	1.44	1837.25	25.06	32.07	1.77	2047.7	38.77	26.33	8.200

Tabuľka 4: Štartovacie body a optimálne hodnoty parametrov deterministickej GB2 metódy.

Na rozdiel od DLN metódy sme však boli schopní otestovať aj výkonnosť stochastickej optimalizačnej metódy - simulovaného žihania. V tomto prípade bol čas potrebný na výpočet optimálnych parametrov relatívne krátky, aj keď približne dvojnásobný oproti času potrebnému pre funkciu "fminsearch". Pre porovnanie teda takisto uvádzame výsledok rovnakej procedúry (t.j. vygenerovania desiatich štartovacích bodov rovnakým spôsobom a následnej optimalizácie), s tým rozdielom, že namiesto deterministickej metódy použijeme stochastickú procedúru "simulannealbdn":



Obr. 11: Výsledné optimálne hodnoty GB2 rozdelenia pre viacero štartovacích bodov s použitím stochastickej optimalizácie (simulovaného žihania).

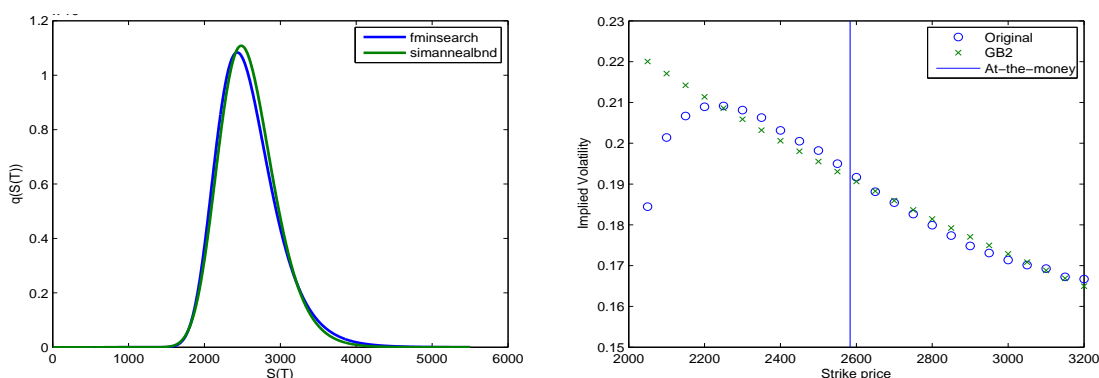
Na obrázku 11, resp. tabuľke 5 vidíme, že v tomto prípade výsledky optimalizácií nie sú až tak konzistentné, ako pri deterministickej optimalizácii. Vykreslenie funkcie dokonca zlyhalo v troch z desiatich optimalizácií (č. 1,2,9). Ostatné výsledné RND sú tvarovo pomerne podobné, avšak na pohľad sú medzi nimi rozdiely výraznejšie ako pri použití "fminsearch". Príčinami sú ako komplexnosť a numerická zložitnosť účelovej funkcie, tak aj stochastickosť zahrnutá v optimalizačnom algoritme simulovaného žihania, ktorý sme na výpočet výslednej RND použili.

Výsledná GB2 RND získaná deterministicky sa však od tej získanej stochasticky líši veľmi mierne, obe tieto funkcie sú na obrázku 12 vľavo. Potvrďuje to aj výsledná optimálna hodnota účelovej

#	$\frac{1}{a}_{START}$	b_{START}	p_{START}	q_{START}	$\frac{1}{a}_{OPT}$	b_{OPT}	p_{OPT}	q_{OPT}	f_{min}
1	1.17	2505.81	13.95	53.41	Inf	2515.7	21.69	51.16	4994.9
2	2.54	2656.44	18.24	35.62	Inf	2664.1	87.53	58.34	6876.7
3	1.07	2369.71	28.71	25.40	1.71	2372.0	36.15	31.84	8.49
4	2.34	3696.33	26.38	27.60	2.72	3687.7	35.82	94.09	370.4
5	2.33	2931.26	19.53	39.56	1.73	2956.3	30.24	38.7	8.92
6	2.38	3768.04	18.10	35.04	3.21	3782.3	8.70	29.10	52.32
7	1.12	4004.37	13.94	59.83	1.56	4009.8	27.57	55.17	48.91
8	2.09	4578.40	17.36	43.50	1.79	4569.8	15.14	42.03	463.6
9	1.60	2187.88	20.28	30.44	Inf	2210.8	4.35	65.57	13936
10	1.96	2077.36	10.68	48.97	2.77	2042.1	18.24	10.02	7.97

Tabuľka 5: Štartovacie body a optimálne hodnoty parametrov stochastickej GB2 metódy (simulovaného žihania).

funkcie, ktorá bola pre deterministickú metódu rovná 6.250 a pre stochastickú metódu 7.97. V oboch prípadoch však z hľadiska účelovej funkcie GB2 metóda poskytovala horšie fitovanie dát oproti DLN metóde, keďže v jej prípade sme dosiahli hodnotu účelovej funkcie iba 4.5050. GB2 metóda sa však z hľadiska tvaru výslednej RND ukázala byť robustnejšia vzhľadom na rozdielne tvary *volatility smile* v away-from-the-money pozíciách, čo máme možnosť vidieť aj na nasledovnom obrázku. V ďalších výpočtoch budeme používať aj v prípade GB2 metódy deterministickú optimalizáciu.



Obr. 12: Porovnanie výsledných GB2 rozdelení získaných deterministickou a stochastickou optimalizačnou procedúrou (vľavo) a porovnanie *volatility smile* pôvodných cien call opcií a modelovaných cien call opcií podľa výsledného deterministického GB2 rozdelenia (vpravo).

Podobne ako pri DLN metóde, aj v tomto prípade sme schopní získať *volatility smile* implikovaný našou odhadnutou GB2 rizikovo-neutrálnou pravdepodobnosťou a to s využitím vzťahov (14), kde za parametre a, b, p, q dosadíme nami vypočítané optimálne parametre. Takýto *volatility smile* je spoločne s pôvodným zobrazený na obrázku 12 vpravo.

Na základe porovnania uvedených *volatility smile* funkcií vidíme, že GB2 RND implikuje klesajúcu *volatility smile*, bez rastúcej časti na začiatku spektra realizačných cien, ako tomu je pri našich pôvodných dátach. Táto skutočnosť sa odráža na tom, že graf výslednej RND získanej GB2 metódou neporušuje v uvedenom intervale realizačných cien zvonovitý tvar funkcie, narozdiel od DLN hustoty pravdepodobnosti, kde sme mohli pozorovať isté zahrboľatenie. Môžeme teda usúdiť, že GB2 metóda je menej citlivá na takéto disturbancie zdrojových dát.

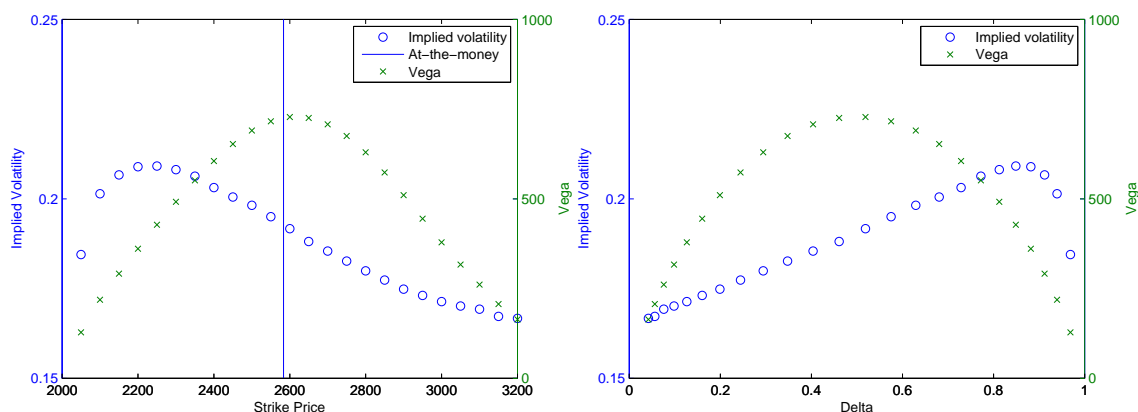
2.6 SIV metóda

Pripomeňme si minimalizačnú úlohu (19), pomocou ktorej získame vyhladzovací splajn interpolujúci v priestore delta-implikovaná volatilita:

$$\min_{\Theta} \lambda \sum_{i=1}^N \nu_i \left(IV_i - \hat{IV}_i(\Theta) \right)^2 + (1 - \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} f''(x, \Theta)^2 dx$$

kde Θ je matica parametrov prirodzeného kubického splajnu f , IV_i sú pozorované implikované volatilita, $\hat{IV}_i(\Theta)$ sú implikované volatilita modelované pomocou splajnu s parametrami Θ . Jednotlivé odchýlky pozorovaní sú vážené hodnotami ν_i , ktoré zodpovedajú vegám jednotlivých opcií. Druhým členom účelovej funkcie je tzv. miera zakrivenia splajnu. Parameter $(1 - \lambda)$ určuje váhu priradenú penalizácii za zakrivenie splajnu. Čím je tento parameter väčší (teda čím je λ menšie), tým menej je výsledný splajn zakrivený, avšak tým horšie aproximuje získané hodnoty implikovaných volatilit.

Na obrázku 13 je ilustrovaný *volatility smile* našej série opcií spolu s príslušnými hodnotami ν_i , a to ako v priestore realizačná cena - implikovaná volatilita (vega), tak aj v priestore delta - implikovaná volatilita (vega). Samotnú interpoláciu je podľa Malza (1997) výhodnejšie vykonávať v druhom spomínanom priestore, keďže táto spôsobí, že opcie v near-the-money pozícii majú pri výpočte splajnu väčšiu váhu, a to aj vďaka preváženiu hodnotami vega, tak aj tým, že táto transformácia umiestni takéto opcie ďalej od seba.



Obr. 13: *Volatility smile* spolu s hodnotou vega v priestore realizačná cena/implikovaná volatilita (vega) - vpravo a delta/implikovaná volatilita (vega) - vľavo.

Vidíme, že opciám v near-the-money pozícii, ktoré sú na oboch obrázkoch v strede (vľavo je hodnota at-the-money znázornená zvislou čiarou a vpravo je at-the-money totožná s hodnotou $\Delta = 0.5$), sú pri výpočte splajnu priradené najväčšie váhy.

Samotný výpočet prirodzeného kubického vyhladzovacieho splajnu je implementovaný v Matla-bovskom balíku Curve Fitting Toolbox v procedúre "csaps". Je tu možné takisto priradiť vektor váh jednotlivým pozorovaniam. Samotnú interpoláciu *volatility smile* vykonáme na množine $\Delta \in \langle 0; 0.001; \dots; 0.999; 1 \rangle$.

Posledným parametrom, ktorý pred spustením interpolácie treba určiť, zostáva teda parameter λ určujúci penalizáciu zakrivenia splajnu. Voľba tejto hodnoty nie je jednoznačná. Bliss a Panigirtzoglou

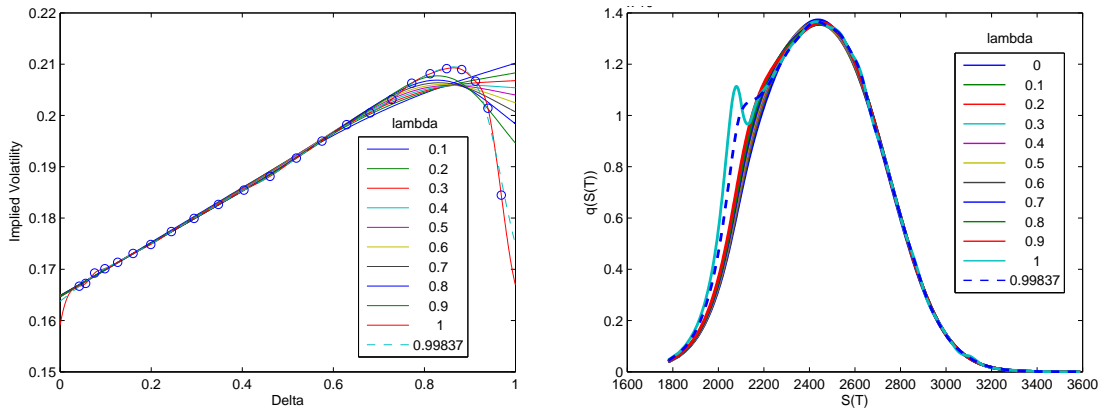
(2001) navrhujú zvoliť hodnotu $\lambda = 0.99$ a zároveň uvádzajú, že výsledná RND nie je pre hodnoty $\lambda \in \langle 0.99, 0.9999 \rangle$ príliš citlivá.

My sme vyskúšali viacero hodnôt parametra $\lambda \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1\}$, rovnako ako hodnotu λ_{MATLAB} , ktorú Matlab použije v prípade, že hodnota nie je manuálne zadaná, ako najvhodnejšiu hodnotu na základe algoritmu, ktorý uvažuje vzdialenosti medzi jednotlivými pozorovaniami. Pre hodnotu λ_{MATLAB} platí:

$$\lambda_{MATLAB} = \frac{1}{1 + \frac{h^3}{6}}, \quad (34)$$

kde h je priemerná vzdialenosť susedných hodnôt (v zmysle x-osi) vstupnej vzorky dát.

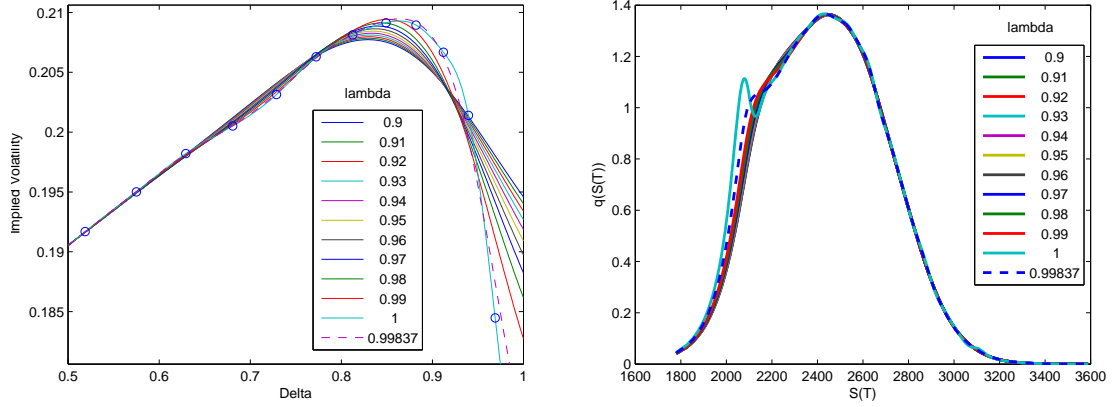
Na obrázku 14 vľavo sú zobrazené výsledné splajny pre viacero hodnôt parametra λ , ako aj pre Matlabovskú predvolenú hodnotu λ_{MATLAB} (prerušovaná čiara). To, aká hodnota je teda optimálna, určíme na základe výslednej RND. Po spätnom prevedení splajnu do priestoru realizačná cena - *call pricing function*, dvojnásobnom zdiferencovaní a vynásobení diskontným faktorom (využívajúc tak vzťah (2)) sme získali jednotlivé RND zobrazené na obrázku 14 vpravo.



Obr. 14: Interpolácia prirodzeným splajnom pre rôzne hodnoty vyhladzovacieho parametra λ (vľavo) a zodpovedajúce rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti (vpravo). Prerušovanými čiarami je zobrazená interpolácia s použitím parametra λ_{MATLAB} .

Z obrázku je zrejmé, že čím väčšia hodnota λ , tým sa na hladkosť (v našej úlohe sa pod hladkosťou myslí linearita) výsledného splajnu kladú menšie nároky a teda tým presnejšie splajn interpoluje naše dáta. Vidíme takisto, že hodnota λ_{MATLAB} je veľmi blízka 1, keďže interpoluje dáta presnejšie ako splajn zodpovedajúci $\lambda = 0.9$. Výsledné RND poukazujú na skutočnosť, že nie sú príliš citlivé na hodnoty $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$, keďže medzi nimi nastávajú iba relatívne drobné posuny pri zmenách nami zvolených parametrov λ . Je však zrejmé, že na intervale $\lambda \in \langle 0.9, 1 \rangle$ sú rozdiely výraznejšie.

Na obrázku 15 sú preto znázornené interpolujúce splajny a RND funkcie pre jemnejšie delenie na tomto intervale, teda pre hodnoty $\lambda \in \{0.90, 0.91, \dots, 0.99, 1\}$ a takisto pre λ_{MATLAB} . Hodnota použitá Matlabom pri nezadaní nami zvoleného parametra λ bola $\lambda_{MATLAB} = 0.99837$. Z výsledkov môžeme vyvodíť záver, že výraznú citlivosť na voľbu λ vykazuje SIV metóda v podstate iba pre hodnoty λ z intervalu $\langle 0.99, 1 \rangle$. Pre hodnotu 1 vidíme výraznú podobnosť s hustotou získanou pomocou DLN metódy. Táto podobnosť sa najviac prejavuje v zahrboľatí RND na intervale, ktorý zodpovedá



Obr. 15: Interpolácia prirodzeným splajnom pre rôzne hodnoty vyhladzovacieho parametra λ (vľavo) a zodpovedajúce rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti (vpravo). Prerušovanými čiarami je zobrazená interpolácia s použitím parametra λ_{MATLAB} .

takým vstupným dátam, ktorých kvalitu sme už viac krát spochybnili. To, že uvedené zahrboľatenie je najvýraznejšie pre $\lambda = 1$ a s klesajúcou hodnotou sa zmierňuje, je teda spôsobené tým, že tieto nekvalitné dáta pri $\lambda = 1$ interpolujeme najpresnejšie. Pri zmenšení váhy určujúcej presnosť interpolácie (t.j. pri zmenšení λ) sa efekt nekvality dát postupne stráca.

Keďže v nasledujúcej kapitole sa budeme zaoberať postupom, ako obmedziť vplyv nekvality vstupných dát (ktorá sa zatiaľ do určitej miery nachádza aj v našich dátach), v ďalších výpočtoch budeme používať pri získavaní SIV RND hodnotu vyhladzovacieho parametra $\lambda = \lambda_{MATLAB}$.

Dôležitým záverom však je, že pokiaľ si nie sme istí kvalitou vstupných dát a nechceme sa zaoberať ich filtráciou, SIV metóda je veľmi vhodnou metódou, nakoľko voľbou vyhladzovacieho parametra vieme jej citlivosť vzhľadom na nekvalitu vstupných dát obmedziť. V našom prípade by vhodnou bola zrejme jedna z hodnôt $\lambda = 0.99, \lambda_{MATLAB}$. Ďalšou výhodou SIV metódy je samozrejme aj to, že sa jedná o neparametrickú metódu, a teda tvar výslednej RND nie je vopred nijako obmedzený a závisí výsostne od *volatility smile* uvažovanej opčnej série.

2.7 GARCH metóda

Po získaní viacerých odhadov rizikovo-neutrálnych pravdepodobností sa zameriame na odhad reálnej pravdepodobnosti ceny podkladového aktíva v čase expirácie opcií. Na jej odhad už nepoužijeme ceny opcií, ale časový rad cien podkladového aktíva z minulosti.

Náš postup bude nasledovný: z časového radu denných cien podkladového aktíva získame vektor logaritmickej výnosov ako

$$r_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \quad t = 1, \dots, n,$$

ktorý použijeme na odhad parametrov GARCH(1,1) modelu so Studentovým-t rozdelením rezíduí s počtom voľnosti ν . Dôvodom na použitie tohoto rozdelenia je vyššie spomenutý fakt, že rozdelenie výnosov aktív v drvivej väčšine prípadov nekorešponduje s normálnym rozdelením, ale má ťažšie chvosty, ktoré je schopné Studentovo-t rozdelenie s vhodne zvoleným počtom stupňov voľnosti ν

popísať lepšie. Pre Studentovo-t rozdelenie platí, že konverguje k normálnemu rozdeleniu pre $\nu \rightarrow \infty$. Čím je hodnota parametra ν menšia, tým má rozdelenie ťažšie chvosty. V praxi platí, že Studentovo-t rozdelenie s parametrom $\nu > 20$ je takmer totožné s normálnym rozdelením. Špecifikácia tohoto modelu je nasledovná:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + z_t \\ z_t &= \sigma_t \cdot \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim Student - t(\nu) \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \tag{35}$$

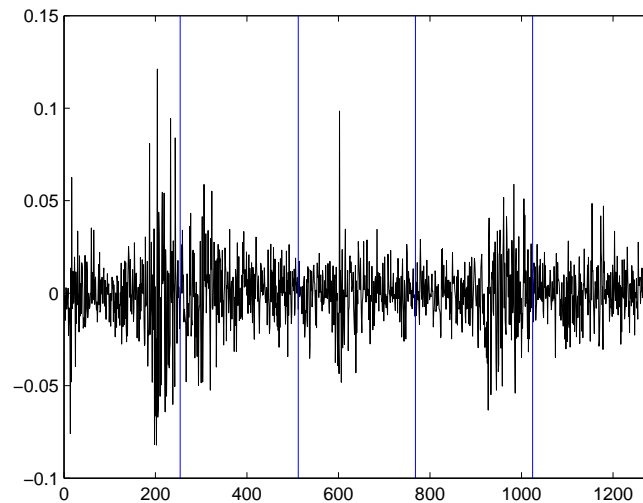
Ak pre náhodné disturbancie ϵ_t platí, že pochádzajú zo štandardizovaného Studentovho-t rozdelenia s ν stupňami voľnosti, potom pre vektor výnosov platí:

$$r_t = \mu + z_t = \mu + \sigma_t \epsilon_t,$$

a teda r_t pochádza zo Studentovho-t rozdelenia s ν stupňami voľnosti, priemerom μ a škálovacím parametrom σ_t .

Spoločne s odhadom parametrov ω, α, β GARCH(1,1) modelu odhadneme takisto (pomocou metódy maximálnej vierohodnosti - *maximum likelihood estimation*) najvhodnejšiu hodnotu parametra ν udávajúceho počet stupňov voľnosti Studentovho-t rozdelenia. Na to, aby sme mohli model použiť, teda potrebujeme vyriešiť ešte problém určenia správnej dĺžky historického časového okna použitého na odhad uvedených parametrov, t.j. čísla n .

Na obrázku 16 je graf historických výnosov indexu Eurostoxx-50 od 1. januára 2008 po súčasnosť (t.j. po 17. septembra 2012):

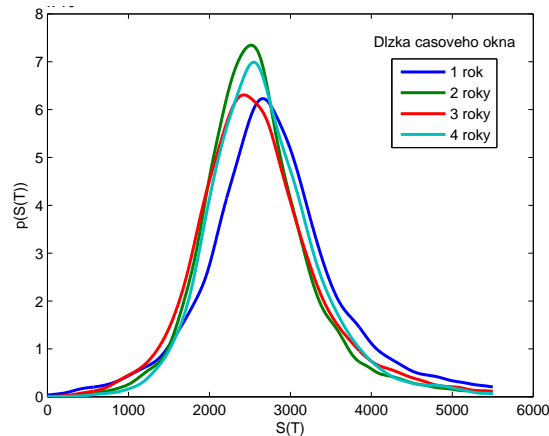


Obr. 16: Výnosy akciového indexu Eurostoxx-50 (SX5E) počas obdobia 1. 1. 2008 - 17. 9. 2012. Zvislými čiarami sú zvýraznené dni zodpovedajúce 1,2,3 a 4 rokom pred súčasnosťou.

Zvislými čiarami sú zvýraznené dni zodpovedajúce 1,2,3 a 4 rokom pred súčasnosťou, čiže z grafu sú dobre čitateľné výnosy počas jednotlivých časových okien. Intuíciou je, že voľba časového okna

jedného roku sa nám zdá nesprávna, keďže toto okno nie je dostatočne veľké na to, aby rozumne zachytilo volatility clustering výnosov, ktorý je z tohto grafu zrejmý. Zaujímáť nás preto budú najmä odhady reálnej pravdepodobnosti pre štvorročné, trojročné a dvojročné časové okno. Takýto postup (t.j. "heuristická" analýza grafu výnosov počas dlhšieho obdobia) odporúčame vo všeobecnosti, keďže často najmä pohľad na graf výnosov stačí na zvolenie rozumného časového okna, pričom takisto netreba zabudnúť, že dĺžka tohto okna závisí aj od času do expirácie T (v našom prípade pol roka). Vo všeobecnosti je vhodné zvoliť časové okno zodpovedajúce niekoľkonásobku času do expirácie T .

Na obrázku 17 sú výsledné reálne pravdepodobnosti získané odhadom GARCH modelu pre štyri rôzne časové okná, generovaním dostatočne veľkého (10 000) počtu simulácií vývoja ceny podkladového aktíva do času expirácie opcií a následným vyhladením histogramu týchto hodnôt pomocou funkcie "ksdensity". Získané funkcie takisto treba predeliť ich integrálom, aby skutočne predstavovali pravdepodobnostnú hustotu.



Obr. 17: Subjektívne (reálne) hustoty pravdepodobnosti pre akciový index Eurostoxx-50 (SX5E) pre rôzne obdobia použité na odhad parametrov GARCH modelu.

Parameter	1 rok	2 roky	3 roky	4 roky
ω	1.67e-06	2.95e-06	3.97e-06	4.98e-06
α	0.9333	0.9135	0.9122	0.9048
β	0.0582	0.0782	0.0719	0.0733
ν	5.3195	6.8922	6.3947	7.7139
offset (μ)	0.0001	-0.0002	-0.0002	0.0001

Tabuľka 6: *Maximum likelihood* odhady jednotlivých parametrov GARCH modelu pre rôzne časové okná.

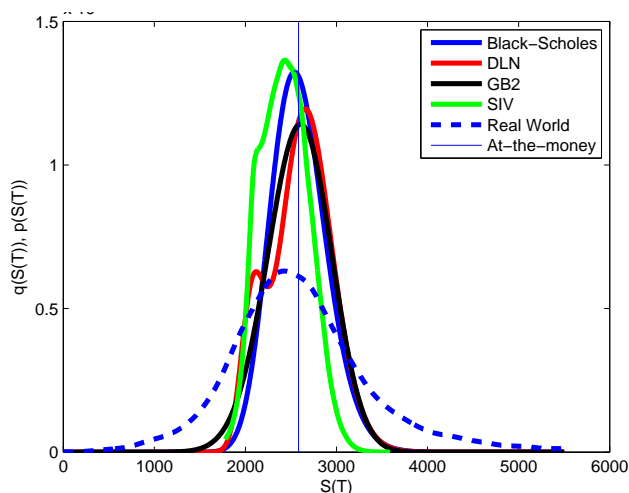
Tabuľka 6 takisto sumarizuje výsledné hodnoty parametrov GARCH modelu, ktorým sme tieto reálne pravdepodobnosti modelovali. Vidíme, že prakticky všetky časové okná, medzi ktorými sme sa rozhodovali, implikujú kvalitatívne podobné odhady reálnej pravdepodobnosti. Najviac sa od ostatných líši jednoročné časové okno, ktoré poskytlo výslednú hustotu pravdepodobnosti mierne posunutú kladným smerom. Keďže už z grafu historických výnosov sme za vhodné toto obdobie nepovažovali, zo zvyšných troch sme sa v tomto prípade rozhodli za náš finálny odhad reálnej pravdepodobnosti zobrať ten, ktorý vznikne pri použití trojročného časového okna, čiže $n = 3 * 252 = 756$.

2.8 Porovnanie výsledných hustôt pravdepodobností

Odhadom reálnej pravdepodobnosti sme tak získali aj poslednú hustotu pravdepodobnosti. Obrázok 18 pre porovnanie zobrazuje všetky rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti (Black-Scholes, DLN, GB2, SIV) ako aj reálnu pravdepodobnosť získanú pomocou GARCH modelu (zvislou čiarou je znázornená hodnota podkladového aktíva v súčasnosti, t.j. S_t). Tabuľka 7 sumarizuje vybrané štatistiky (očakávaná hodnota, štandardná odchýlka, šikmosť, špicatosť (excess kurtosis)) náhodných premenných S_T , ktoré pochádzajú z jednotlivých rozdelení.

Prvá vec, ktorá je zrejماً, je fakt, že subjektívna pravdepodobnosť má v porovnaní so všetkými rizikovo-neutrálnymi pravdepodobnosťami podstatne ťažšie chvosty, čo sa prejavilo ako na hodnote štandardnej odchýlky (približne dvojnásobná v porovnaní s ostatnými metódami), tak aj na jej špicatosťi. Ľahšie chvosty všetkých rizikovo-neutrálnych pravdepodobností sú zrejme implikované cenami opcií, ktoré boli na odhad jednotlivých hustôt použité, zatiaľ čo pri odhade reálnej pravdepodobnosti sme použili len časový rad historických cien podkladového aktíva. Ťažšie chvosty sú dôsledkom relatívne nízkeho stupňa voľnosti Studentovho-t rozdelenia, z ktorého sme generovali disturbancie pri simuláciách vývoja ceny do času expirácie opcií.

Ak sa sústredíme len na porovnanie rizikovo-neutrálnych pravdepodobností medzi sebou, môžeme si všimnúť, že v porovnaní s Black-Scholesovým lognormálnym rozdelením sú všetky ostatné hustoty mierne zošikmené doľava. Je to zrejme dôsledok tvaru *volatility smile*, ktorý (až na začiatok grafu) je klesajúcou funkciou, zatiaľ čo Black-Scholesov model predpokladá konštantnú funkciu. Pre jeho tvar je takisto vhodnejšie *volatility smile* nazývať *volatility smirk*. Môžeme si takisto všimnúť mierne zahrboľatenie v okolí hodnoty $S_T = 2100$, ktoré sa prejavilo najmä na DLN a SIV hustotách.



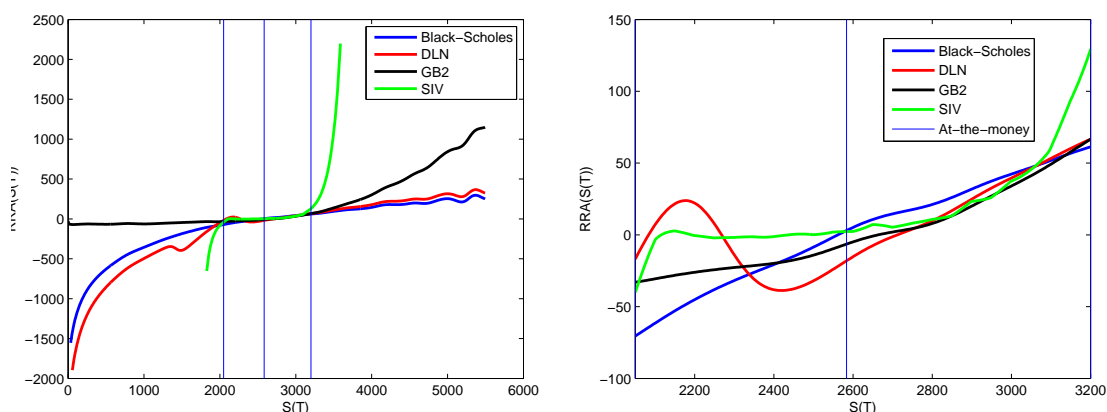
Obr. 18: Záverečné porovnanie jednotlivých rizikovo-neutrálnych pravdepodobností, ako aj subjektívnej pravdepodobnosti.

Metóda	Očakávaná hodnota	Štandardná odchýlka	Šikmosť	Špicatosť (excess kurtosis)
Black-Scholes	2592.6	306.7	0.3565	0.2268
DLN	2592.3	346.6	0.0154	-0.3744
GB2	2583.6	347.8	0.1592	0.0704
SIV	2466.8	261.1	0.1120	-1.2302
Real-World	2587.2	848.08	0.5003	0.6743

Tabuľka 7: Štatistické vlastnosti výsledných pravdepodobnostných rozdelení.

2.9 Porovnanie výsledných funkcií relatívnej averzie voči riziku

Na záver procedúry ešte pre každú z výsledných rizikovo-neutrálnych pravdepodobností vypočítame na základe vzťahov (30), resp. (31) funkcie relatívnej averzie reprezentatívneho investora (v našom prípade trhu) voči riziku. Tieto funkcie sú zobrazené na obrázku 19, vľavo pre kompletný definičný obor parametrických RND, vpravo pre hodnoty $S_T \in \langle \min K_i, \max K_i \rangle$.



Obr. 19: Porovnanie funkcií relatívnej averzie voči riziku pre jednotlivé rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti.

Vidíme, že na intervaloch $\langle 0, \min K_i \rangle$, $\langle \max K_i, 5500 \rangle$ je interpretácia výsledných funkcií problematicá, čo je zrejme spôsobené tým, že zatiaľ čo reálna pravdepodobnosť na týchto intervaloch nadobúda nenulové hodnoty, rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti sú takmer nulové. Keďže rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti počítame rôznymi metódami na základe cien call opcií, sústredíme sa na interpretáciu rizikovej averzie na intervale medzi minimálnou a maximálnou realizačnou cenou, ktoré sme pre danú opčnú sériu mali k dispozícii.

Funkcie na tomto intervale sú zobrazené na obrázku vpravo. Možno pozorovať, že pre každú RND je funkcia porovnateľne rastúca, z čoho možno vyvodiť záver, že investor pri náraste svojho bohatstva zníži váhu investície do rizikového aktíva a presunie časť prostriedkov do bezrizikového aktíva, čo značí jeho averziu k riziku.

2.10 Druhá filtrácia dát

Keďže vo veľkej väčšine prípadov sa inštitúcie a investori pri výpočtoch rizikovo-neutrálnych pravdepodobností nezaujímajú iba o jednu sériu opcií pre jeden dátum ich expirácie, ale skúmajú vývoj a zmeny týchto funkcií v čase, často pre veľké množstvo opčných sérií, na takéto postupné sledovanie výpočtov v každom kroku nemajú prostriedky. Obzvlášť skúmanie každého jedného *volatility smile* a následné manuálne odstránenie (z hľadiska kvality) nevyhovujúcich opcií za účelom predídania distorbancii vo výsledných hustotách je pri veľkom množstve dát problémom, ktorý si žiada zaviesť určitú automatizáciu. Preto v tejto časti uvedieme jednoduchý algoritmus, vyvinutý nami v priebehu písania tejto diplomovej práce. Osvedčil sa nám ako vhodný z hľadiska automatickej filtrácie nevyhovujúcich opcií pre veľké množstvo rozličných opčných sérií.

Vychádzať budeme zo splajnu interpolujúceho dáta v priestore delta/implikovaná volatilita, ktorý zároveň používame na výpočet RND pri neparаметrickej SIV metóde. Keďže sa jedná o vyhladzovací splajn, naše dáta neinterpoluje presne, ale s určitými odchýlkami:

$$\epsilon_i = |\sigma_i^{impl} - f(K_i)|, \quad (36)$$

keď $f(K_i)$ je hodnota vyhladzovacieho splajnu získaného riešením minimalizácie (19) v bode K_i a σ_i^{impl} je hodnota implikovanej volatility prislúchajúcej opcii s realizačnou cenou K_i . Tieto odchýlky sa pre rôzne opcie líšia. Keďže za dáta najviac náchylné ku nekvalitám považujeme away-from-the-money opcie a vďaka konštrukcii splajnu sa na interpoláciu týchto opcií kladie najmenší dôraz, môžeme predpokladať, že hodnota ϵ_i je určitou mierou nekvality opcie. Opacie, ktorým prislúchajú veľké hodnoty ϵ_i , sa zrejme najviac odchyľujú od hladkých tvarov *volatility smile*, ktoré sa splajnom snažíme napodobiť.

Po preskúmaní histogramov hodnôt ϵ pre viacero opčných sérií pre rôzne podkladové aktíva sme za najvhodnejšie kritérium filtrácie opcií zvolili nasledovné: z našich zdrojových dát po vykonaní prvej interpolácie splajnom (19) odstránime tie opcie, pre ktoré platí:

$$\epsilon_i = |\sigma_i^{impl} - f(K_i)| > \frac{1}{2}\sqrt{Var(\epsilon)}, \quad (37)$$

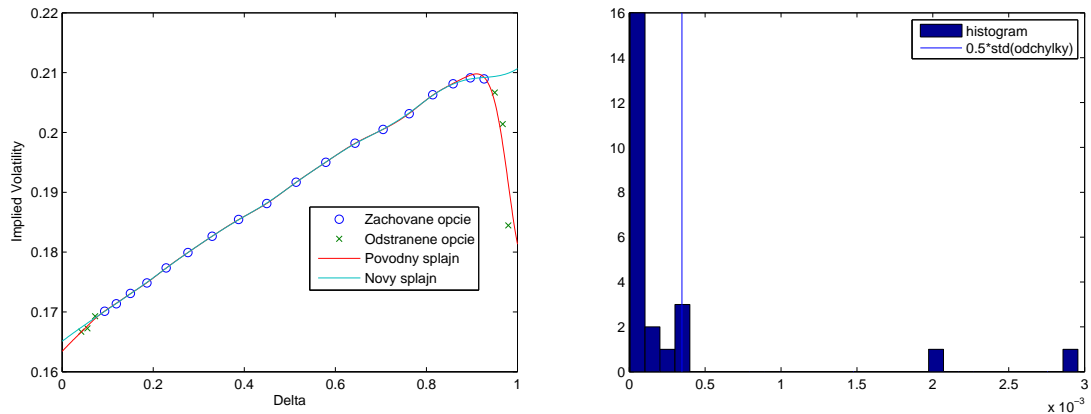
teda odstránime opcie, ktorých implikované volatility sa od tých interpolovaných líšia o viac ako polovicu štandardnej odchýlky všetkých hodnôt ϵ_i . Ďalej takisto odstránime opcie, ktoré takýmto postupom zostali „osamotené“, t.j. pre ktoré platí, že obe susedné opcie boli v predchádzajúcom kroku odstránené. Dôvod takéhoto kritéria je ten, že veľká väčšina hodnôt ϵ_i má zvyčajne podobne nízke hodnoty, až na zopár opcií, ktoré môžeme nazvať aj outliermi danej opčnej série. Cieľom je teda z analýz odstrániť práve takýchto outlierov.

Pre filtrované dáta potom opäť vypočítame nový vyhladzovací splajn, ktorý následne použijeme pre odhad RND pomocou SIV metódy. Pre oba vyhladzovacie splajny použijeme za vyhladzovací parameter hodnotu $\lambda = \lambda_{MATLAB}$, dôkladne popísanú vyššie.

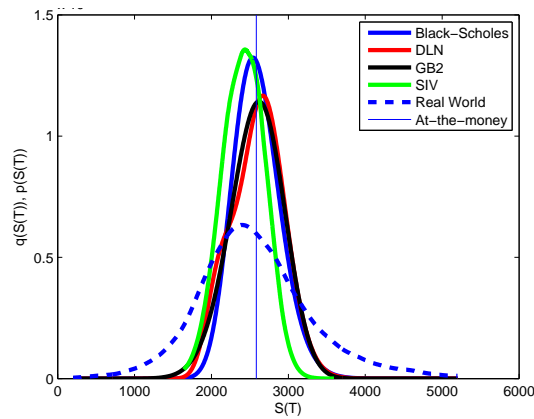
Na obrázkoch 20, 21 a 22 je zobrazená naša filtrácia pôvodných dát ¹¹, spolu s histogramom odchýlok ϵ_i a výsledné funkcie rizikovo-neutrálnych pravdepodobností, reálnej pravdepodobnosti a

¹¹Za pôvodné dáta v tejto časti považujeme dáta, ktoré už podstúpili prvotnú filtráciu (t.j. odstránenie opcií, pre ktoré sa nepodarilo vypočítať implikovanú volatilitu a odstránenie opcií s realizačnou cenou menšou ako $\frac{3}{4}S_t$).

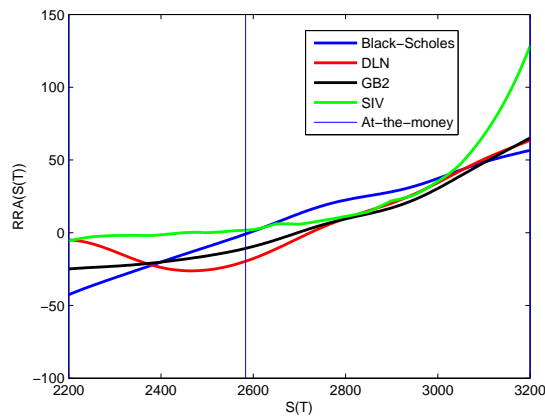
relatívnych averzií voči riziku pre takto upravené dáta. Štatistické vlastnosti jednotlivých hustôt pravdepodobnosti potom sumarizuje tabuľka 8.



Obr. 20: Filtrácia opcií pomocou vyhladzovacieho splajnu a histogram odchýlok ϵ_i pre túto filtráciu spolu s kritickou hodnotou $\frac{1}{2}\sqrt{Var(\epsilon)}$.



Obr. 21: Záverečné porovnanie jednotlivých rizikovo-neutrálnych pravdepodobností, ako aj subjektívnej pravdepodobnosti po filtrácii dát.



Obr. 22: Porovnanie funkcií relatívnej averzie voči riziku pre jednotlivé rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti po filtrácii dát.

Metóda	Očakávaná hodnota	Štandardná odchýlka	Šikmosť	Špicatosť (excess kurtosis)
Black-Scholes	2592.6	306.7	0.3565	0.2268
DLN	2592.6	347.2	-0.0309	-0.3057
GB2	2583.6	349.7	-0.1769	0.0179
SIV	2416.9	311.9	-0.0925	-2.9095
Real-World	2592.5	761.1	0.5761	1.0893

Tabuľka 8: Štatistické vlastnosti výsledných pravdepodobnostných rozdelení po filtrácii dát.

Náš filtračný algoritmus teda z pôvodnej opčnej série odstránil celkovo 5 opcií, z toho 3 zodpovedali problematickej časti začiatku spektra realizačných cien. Pre takto upravené dáta sme zaznamenali oproti pôvodnému prípadu niekoľko zmien vo výsledných RND hustotách: RND získaná metódami DLN a SIV je výrazne hladšia v tom zmysle, že už nemožno pozorovať výrazné zahrboľatenie v okolí $S_T = 2000$. Toto považujeme za úspech nášho algoritmu, nakoľko uvedené zahrboľatenia sme nepovažovali za relevantný záver vyplývajúci zo situácie na trhu, ale za disturbance spôsobené nekvalitou dát. Vidíme takisto, že parametrické metódy, t.j. DLN a GB2 vyprodukovali veľmi podobné rizikovo-neutrálne pravdepodobnosti, čo možno pozorovať aj na hodnotách jednotlivých centrálnych momentov rozdelení uvedených v tabuľke. Hustota získaná SIV metódou je aj naďalej mierne posunutá vľavo, a disponuje o niečo menšou hodnotou štandardnej odchýlky. Dôvodom bude zrejme fakt, že SIV metóda neobsahuje implementáciu ohraničenia na forwardovú cenu podkladového aktíva, ktoré je zahrnuté v optimalizáciách parametrických metód (9), resp. (17). Skutočne, z uvedenej tabuľky možno pozorovať že očakávaná hodnota RND sa v prípade DLN metódy presne rovná forwardovej cene:

$$E_{DLN}[S_T] = S_t e^{rT} = 2583.6 e^{0.007 \cdot 0.5} = 2592.6 \quad (38)$$

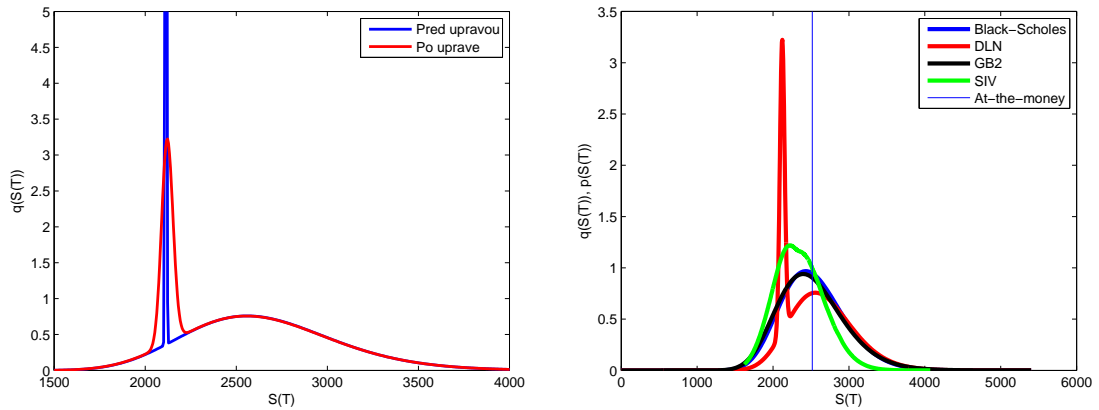
Toto ohraničenie nie je dokonale dosiahnuté v GB2 metóde, avšak zapríčiňuje to, že očakávaná hodnota RND má tendenciu blížiť sa tejto hodnote a teda má vplyv na tvar a umiestnenie výslednej RND.

Čo sa týka zmien vo funkciách relatívnej averzie voči riziku, možno z nich vyvodit' veľmi podobné závery ako v predchádzajúcom prípade. Možno avšak pozorovať väčšiu hladkosť funkcií zodpovedajúcich DLN a SIV metódam, čo je samozrejme spôsobené zmenou tvaru daných hustôt.

V ďalších výpočtoch teda budeme zakaždým nasledovať postup podrobne obsiahnutý v tejto kapitole. Všetky metódy a algoritmy popísané vyššie (ako implementácie jednotlivých optimalizácií, tak aj jednotlivé filtrácie dát) majú za následok pomerne dobrú robustnosť výsledkov voči outlierom spôsobených nekvalitnými pozorovaniami, ktorá však nemá za následok zníženie presnosti a kvality výsledných rizikovo-neutrálnych pravdepodobností.

Na záver však považujeme za potrebné zdôrazniť, že aj napriek tomu, že uvedený filtračný algoritmus vždy zmiernuje nežiadúce dôsledky nekvality dát, v niektorých prípadoch (ako napríklad nami uvažovaná opčná séria v tejto kapitole) dokonca výrazne, nie zakaždým sa uvedené problematické opcie podarí všetky odstrániť. Závisí to najmä na tvare *volatility smile*, a to nielen v problematickej oblasti realizačných cien, ale v celom ich spektre. Najcitlivejšou metódou sa v tomto zmysle ukázala byť DLN metóda.

Ako príklad uvádzame opčnú sériu SX5E zo dňa 5.11.2012, maturujúcu 20.12.2013 ($T = 1.18$).



Obr. 23: Rozdiely medzi DLN RND pred a po aplikácii nášho filtračného algoritmu (vľavo) - príklad, kedy sa hrboľatosť DLN RND nepodarí úplne odstrániť. Vpravo porovnanie výsledných RND po aplikácii nášho filtračného algoritmu.

Na obrázku 23 vľavo vidíme, ako sa zmenila výsledná DLN RND po aplikácii filtračného algoritmu. Aj keď sa uvedenú bimodalitu podarilo výrazne zmierniť, tvar DLN RND sa aj tak podstatne líši od hustôt získaných ostatnými metódami, čo možno pozorovať na obrázku 23 vpravo. Takýto výsledok možno pozorovať špeciálne pre opčné série s dlhším časom zostávajúcim do expirácie. Pod dlhším časom rozumieme hodnoty $T > 0.5$ roka. Pre opčné série maturujúce skôr ako o pol roka náš filtračný algoritmus však veľmi efektívne odstraňoval takúto "zvláštnosť" RND funkcií.

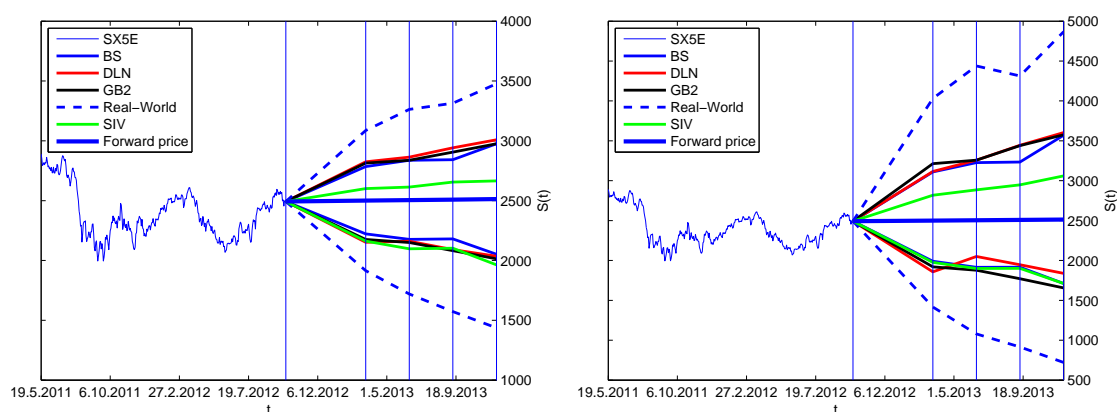
Pri odhadovaní rizikovo-neutrálnych pravdepodobností pre veľké množstvo opčných sérií sa však v mnohých prípadoch vyvodzujú závery nie z tvarov týchto hustôt, ale z hodnôt distribučných funkcií z nich vyplývajúcich. Väčšinou nás zaujímajú intervaly spoľahlivosti pre rôzne úrovne pravdepodobnosti, a teda skúmame skôr kvantily výsledných rozdelení. Na kvantilovej úrovni sa však takéto disturbance neprejavajú v rozhodujúcej miere, keďže obsah plochy pod problematickým intervalom býva v porovnaní so zvyškom funkcie relatívne malý.

3 Aplikácia metód na reálne trhové dáta

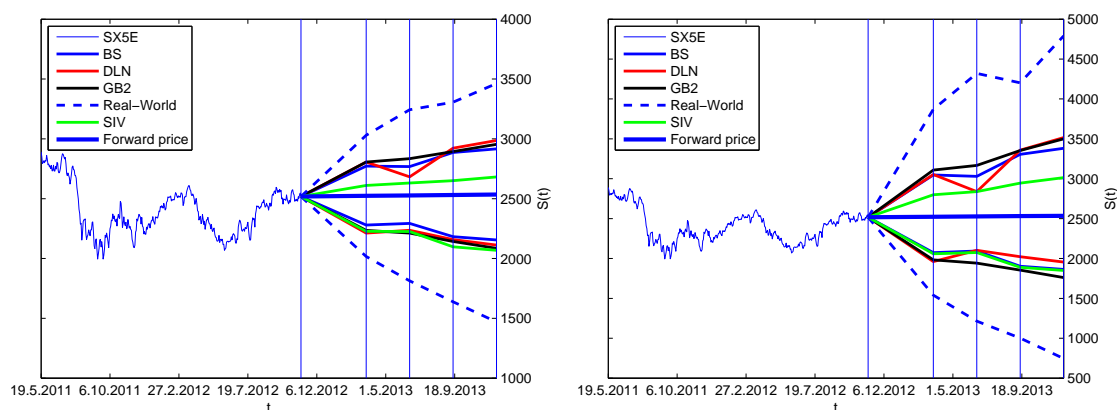
3.1 Opcie s rôznou maturitou

V tejto časti budeme skúmať správanie sa odhadnutých RND pre opčné série emitované v ten istý deň, ale pre rôznu maturitu opcií, čiže pre rôzne T . K dispozícii sme mali ceny európskych call opcií na akciový index Eurostoxx-50 maturing v marci, júni, septembri a decembri roku 2013. Opcie pre tento akciový index maturing vždy v tretí piatok v danom mesiaci. V našom prípade sa teda jednalo o nasledovné časy expirácie: 15.3.2013, 21.6.2013, 20.9.2013, 20.12.2013.

Z dôvodu dostupnosti dát sme uvažovali opčné série pre 5 rôznych dní, od začiatku októbra 2012 po začiatok februára 2013, vždy s krokom jedného mesiaca, čiže ceny opcií pochádzajú z nasledovných dní: 3.10.2012, 5.11.2012, 3.12.2012, 3.1.2013, 4.2.2013.

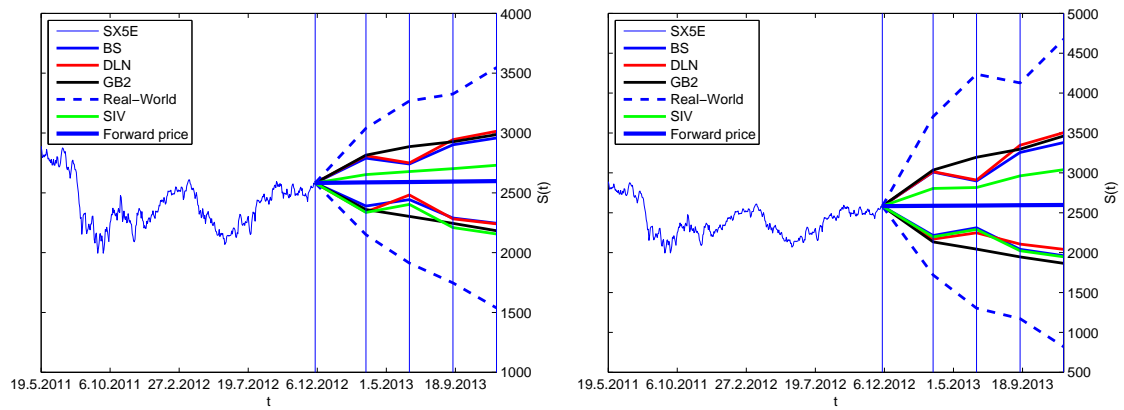


Obr. 24: 68-percentný a 95-percentný interval spoľahlivosti ceny podkladového aktíva pre opcie emitované dňa 3.10.2012, expirujúce v marci, júni, septembri a decembri 2013.

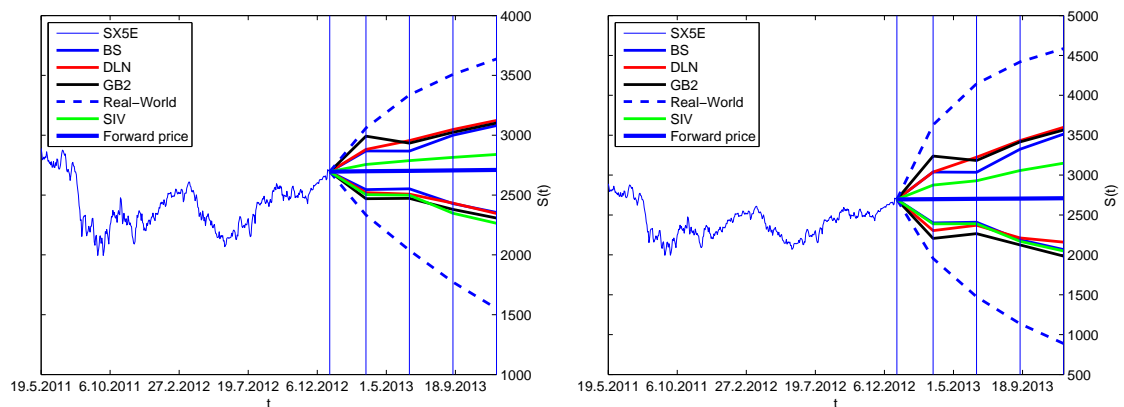


Obr. 25: 68-percentný a 95-percentný interval spoľahlivosti ceny podkladového aktíva pre opcie emitované dňa 5.11.2012, expirujúce v marci, júni, septembri a decembri 2013.

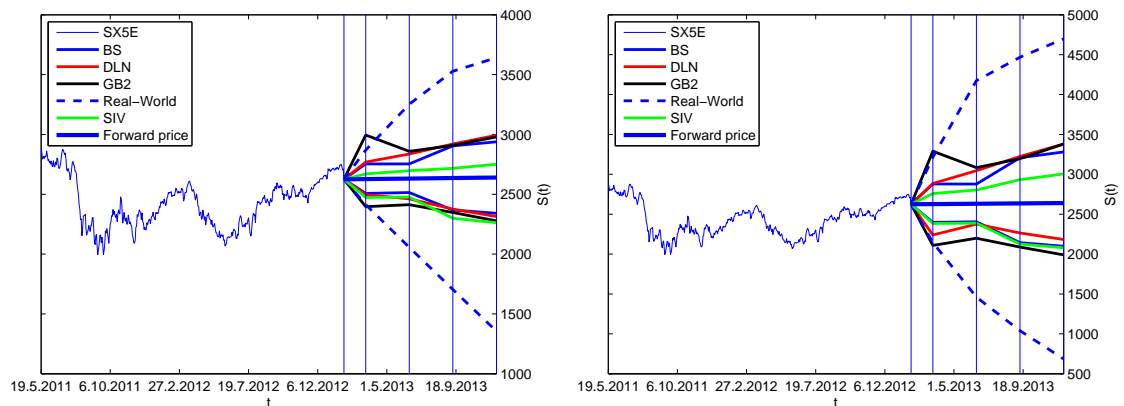
Na obrázkoch 24 až 28 sú zobrazené časové vývinu 68-percentných (vľavo) a 95-percentných (vpravo) intervalov spoľahlivosti ceny podkladového aktíva SX5E v časoch maturity nami uvažovaných štyroch opčných sérií pre každý deň (t.j. zvislé čiary grafov zodpovedajú času emitovania opčnej série a



Obr. 26: 68-percentný a 95-percentný interval spoľahlivosti ceny podkladového aktíva pre opcie emi-
tované dňa 3.12.2012, expirujúce v marci, júni, septembri a decembri 2013.



Obr. 27: 68-percentný a 95-percentný interval spoľahlivosti ceny podkladového aktíva pre opcie emi-
tované dňa 3.1.2013, expirujúce v marci, júni, septembri a decembri 2013.



Obr. 28: 68-percentný a 95-percentný interval spoľahlivosti ceny podkladového aktíva pre opcie emi-
tované dňa 4.2.2013, expirujúce v marci, júni, septembri a decembri 2013.

d'alej dátumom 15.3.2013, 21.6.2013, 20.9.2013 a 20.12.2013). Môžeme z nich vyvodit' niekoľko záverov:

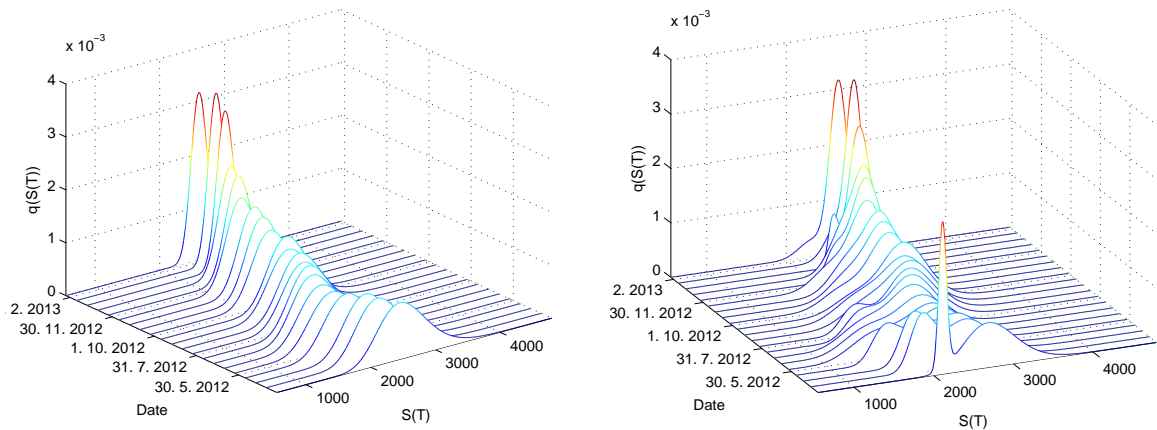
- Samozrejmosťou je fakt, že čím ďalej do budúcnosti sa pozeráme, tým väčšia je naša neistota ohľadom ceny podkladového aktíva, čo sa odzrkadľuje na tom, že jednotlivé intervaly spoľahlivosti sa s časom rozširujú.
- Ďalšou zrejmovou skutočnosťou je, že subjektívne rozdelenie pravdepodobnosti získané GARCH metódou je v porovnaní s rizikovo-neutrálnymi pravdepodobnosťami výrazne širšie. Táto rozdielnosť je spôsobená existenciou averzie voči riziku. Subjektívna pravdepodobnosť je zároveň naprieč jednotlivými odhadmi pomerne stabilná. Zmena RND teda môže byť odôvodnená aj časovou zmenou rizikovej averzie.
- Pri porovnaní jednotlivých RND pravdepodobností máme možnosť vidieť veľmi podobné výsledky pre kratšie časy zostávajúce do maturity opcií pre DLN a GB2 metódu. S rastúcim časom táto podobnosť zostáva zachovaná, DLN metóda však vykazuje vyššiu citlivosť a flexibilitu, čo možno vidieť najmä na druhej a tretej dvojici obrázkov (výrazný skok horného kvantilu medzi marcovou, júnovou a septembrovou maturitou opcií).
- Podobne ako DLN odhad sa často správal aj odhad pomocou neparametrickej SIV metódy, to však platí iba pre dolné kvantily rozdelení (v in-the-money intervale). Výraznú odlišnosť možno badať medzi SIV metódou a ostatnými metódami v horných kvantiloch, kedy 68, resp. 95-percentné kvantily pre SIV RND nadobúdajú zakaždým významne menšie hodnoty ako zodpovedajúce kvantily ostatných RND. Zdôvodnenie tohto správania SIV metódy ponechávame ako možné rozšírenie tejto diplomovej práce. Našou intuíciou však je, že takéto správanie súvisí s tým, že SIV metóda je neparametrická a ako jediná spomedzi nami uvažovaných metód neobsahuje podmienku na forwardové ohraničenie výslednej RND.

3.2 Časový rad opcií s fixným dátumom maturity

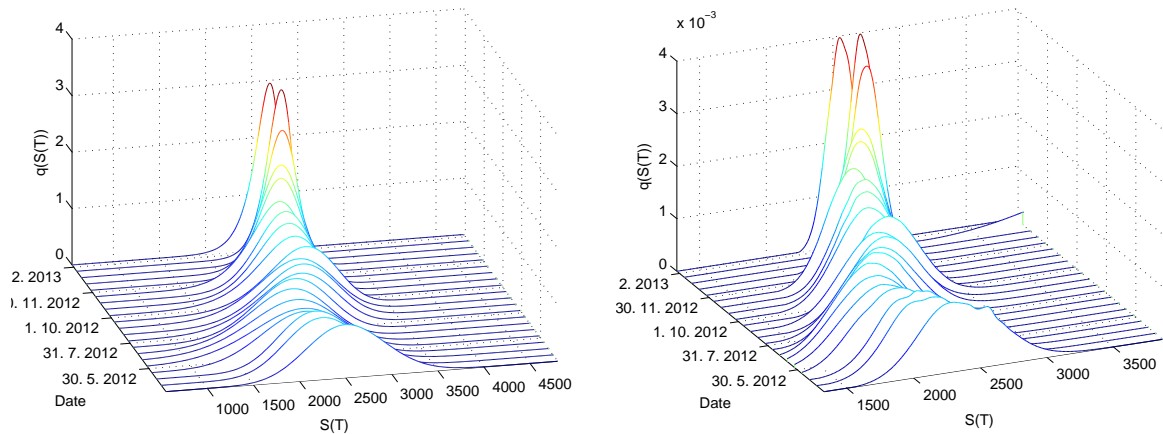
V tejto časti sa zameriame na analýzu vývoja rizikovo-neutrálnych pravdepodobností s časom pre opčné série maturujúce v ten istý, fixný deň. Konkrétne budeme sledovať vývoj opcií na index SX5E maturujúcich 15.3.2013. Celkovo sme odhadli BS, DLN, GB2 a SIV pravdepodobnosti pre 21 opčných sérií. Prvým dňom bol 23.3.2012 a posledným 6.2.2013. Medzi jednotlivými dňami bol časový interval dvoch týždňov. Čas zostávajúci do expirácie opcií sa teda postupne skracoval z hodnoty $T = 0.98$ po $T = 0.10$.

Jednotlivé časové rady odhadov RND sú na obrázkoch 29 a 30. Závěry:

- Pre všetky metódy sa časový rad odhadnutých RND správa v súlade s intuitívnymi očakávaniami: s časom sa RND posúva v rámci osi $S(T)$ podľa toho, ako sa vyvíja cena podkladového aktíva a zároveň sa s časom výsledné RND funkcie zužujú a tým opisujú zmenšujúcu sa neistotu ohľadom ceny podkladového aktíva v budúcnosti spôsobenú tým, že čas zostávajúci do tejto fixnej budúcnosti sa skracuje.
- Zatiaľ čo tvary BS hustôt (ktoré sú lognormálne) sa s časom výrazne nemenia, zovšeobecnenie na kombináciu dvoch lognormálnych rozdelení, ktoré opisuje DLN metóda, umožňuje podstatne



Obr. 29: Časový vývin rizikovo-neutrálnych pravdepodobností získaných metódami BS (vľavo) a DLN (vpravo) pre opcie maturujúce 15.3.2013.

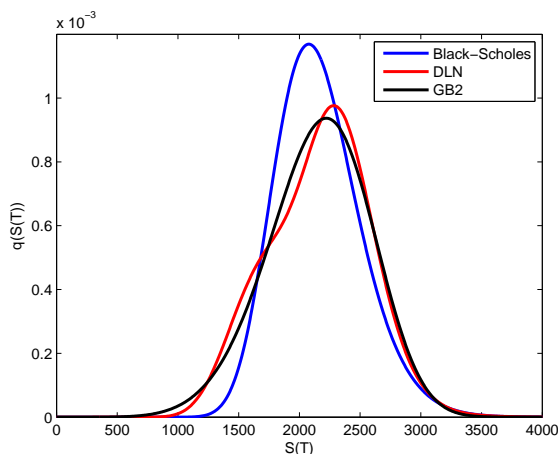


Obr. 30: Časový vývin rizikovo-neutrálnych pravdepodobností získaných metódami GB2 (vľavo) a SIV (vpravo) pre opcie maturujúce 15.3.2013.

výraznejšiu flexibilitu v tvaroch RND. DLN metóda je teda schopná lepšie zachytiť informáciu plynúcu z *volatility smile*, ktorá sa odzrkadľuje na meniacej sa šikmosti a špicatosti RND. Zvýšenú flexibilitu možno takisto pozorovať pre SIV metódu.

- Čo sa týka GB2 metódy, z obrázku takáto flexibilita nie je vždy očividná. Pri porovnaní výsledných *volatility smile* implikovaných GB2 metódou však takisto konštatujeme zlepšenie oproti B-S RND. Zakaždým sa zopakovala situácia podobná tej, ktorú sme mali možnosť pozorovať vyššie na obrázku ???. Aj keď implikovaný *volatility smile* nekopíroval ten pôvodný s takou presnosťou ako pri DLN metóde, vždy bolo výsledné porovnanie lepšie ako pre BS metódu (ktorá predpokladá konštantný tvar *volatility smile*). GB2 metóda je teda menej kvalitnou metódou z hľadiska *goodness-of-fit*, je však rozumným kompromisom oproti DLN metóde vďaka robustnosti výsledného tvaru RND vzhľadom na disturbancie dát.

Pridanú hodnotu RND odhadnutých z cien opcií oproti štandardnému BS prístupu možno pozorovať na obrázku 31, ktorý potvrdzuje flexibilitu oboch parametrických metód. Vidíme, že dňa

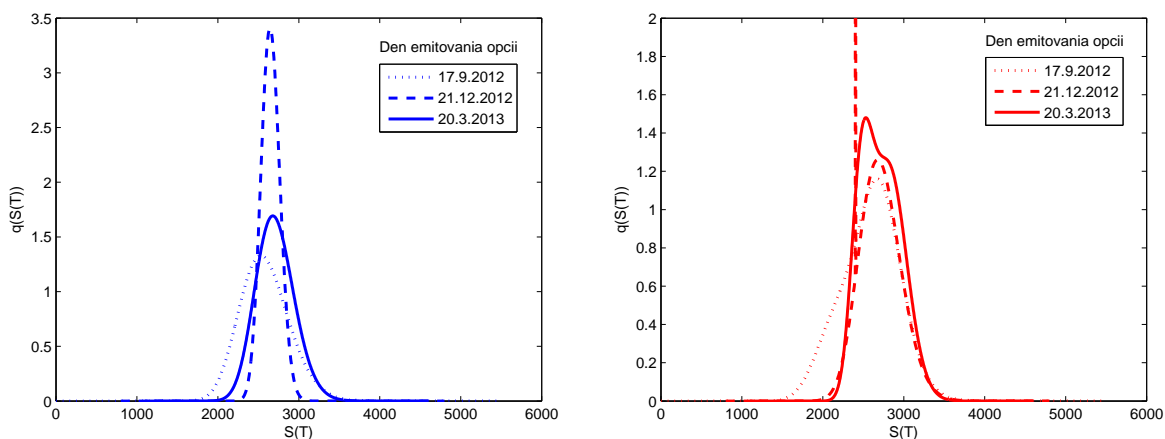


Obr. 31: Porovnanie BS, DLN a GB2 funkcie RND pre dátum 6.7.2012. Opčná séria maturuje 15.3.2013.

6.7.2012 disponovali odhadnuté DLN a GB2 RND ťažšími ľavými chvostami a takisto väčšou hodnotou štandardnej odchýlky. Takýto tvar BS metóda nie je schopná zachytiť, jej použitie by teda poskytovalo len nekompletnú informáciu ohľadom očakávaní trhu.

3.3 Časový rad opcií s fixnou hodnotou T

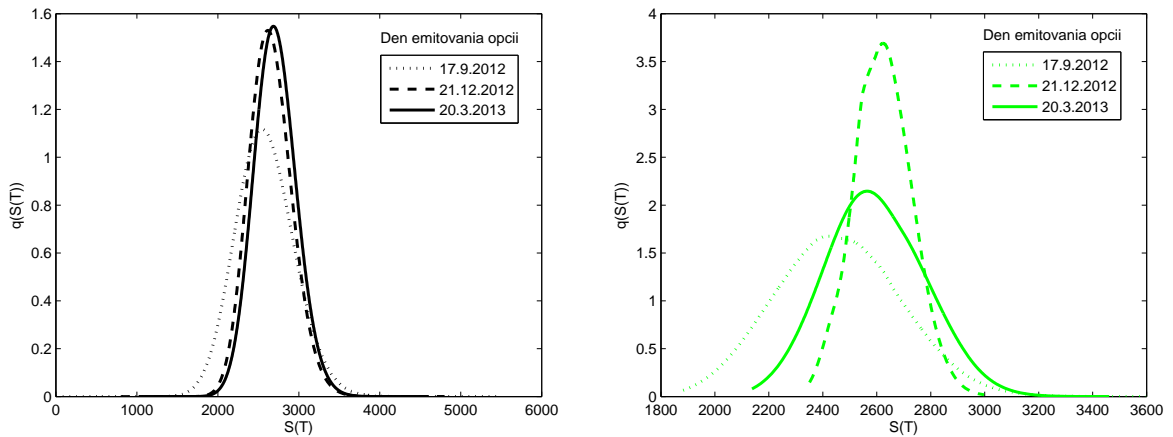
V tejto časti sme sledovali, ako sa mení odhad RND s časom, pričom zakaždým nami uvažovaná opčná séria maturovala o pol roka, čiže pre všetky prípady platilo $T = 0.5$. Toto sme sledovali pre tri rôzne dni, medzi ktorými bol časový krok troch mesiacov. Konkrétne sa jednalo o nasledovné opčné série indexu SX5E: prvá zo dňa 17.9.2012, matujúca 15.3.2013, druhá zo dňa 21.12.2012, matujúca 21.6.2013 a tretia zo dňa 20.3.2013, matujúca 20.9.2013.



Obr. 32: Časový vývin rizikovo-neutrálnych pravdepodobností získaných metódami BS (vľavo) a DLN (vpravo) pre opcie matujúce zakaždým o 6 mesiacov.

Takto odhadnuté RND sú na obrázkoch 32 a 33. Závěry:

- Keďže všetky odhady RND sú očistené o faktor času do expirácie (ten je vždy 6 mesiacov), zo



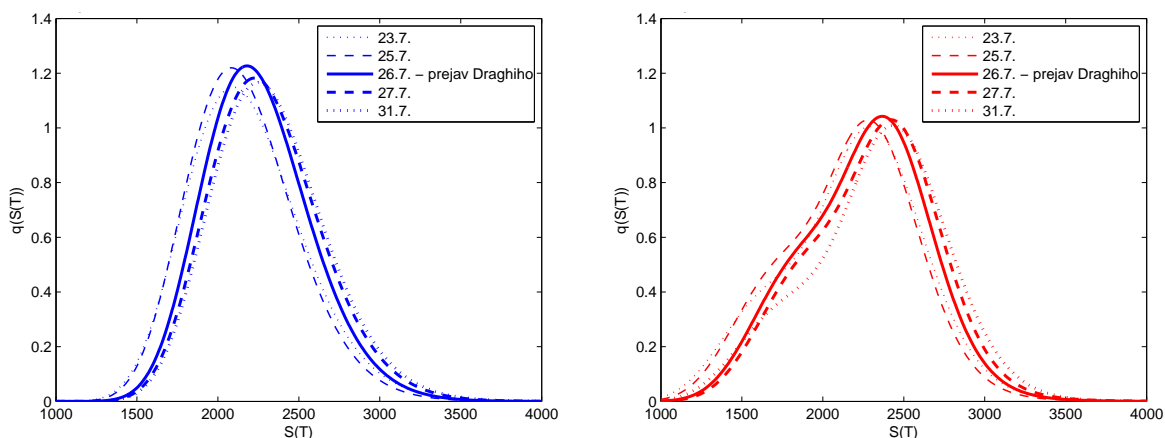
Obr. 33: Časový vývin rizikovo-neutrálnych pravdepodobností získaných metódami GB2 (vľavo) a SIV (vpravo) pre opcie maturujúce zakaždým o 6 mesiacov.

zmeny ich tvarov možno vyvodit' zodpovedajúce zmeny situácie a nálady na (najmä európskom) trhu. Pre všetky metódy nastaly podobné zmeny tvaru medzi jednotlivými trojmesačnými intervalmi. Decembrové opcie majú v porovnaní so septembrovými vždy výrazne menšiu štandardnú odchýlku. Zároveň sú posunuté smerom k vyšším hodnotám S_T . Tieto dve skutočnosti sú dôsledkom situácie na trhu, keďže ku koncu roka nastalo upokojenie trhov a prevládali mierne optimistické prognózy. Tie sa v priebehu prvého štvrťroku roku 2013 čiastočne vytratili, čo sa prejavilo na opätovnom zvýšení neistoty a náraste štandardnej odchýlky jednotlivých rozdelení. Táto neistota vyplýva najmä z dvoch kľúčových udalostí - tou prvou sú parlamentné voľby v Taliansku, ktoré prebehli koncom februára 2013, a z ktorých síce vzišla víťazne stredoľavicová koalícia Piera Luigiho Bersaniho, ale potrebnú väčšinu bude mať iba v poslaneckej snemovni, nie v Senáte. Hlavnou príčinou je prekvapivo vysoké percento hlasov v prospech stredopravicovej koalície, na čele ktorej stojí kontroverzný politik Silvio Berlusconi, známy svojimi protikonsolidačnými postojmi. Práve táto strana bude zohrávať pri zostavovaní vlády v Taliansku kľúčovú úlohu. Druhou príčinou je prehlbovanie finančnej krízy na Cypre. V sobotu 16.3.2013 sa ministri financií eurozóny a predstavitelia Medzinárodného menového fondu dohodli na udelení záchranej pôžičky pre Cyprus vo výške 10 miliárd eur. Následne Cyprus zavrel banky a uzákonil zdanenie vkladov.

- Najslabšie na tieto udalosti v zmysle odhadu RND reagovala metóda GB2, keďže najmä medzi decembrovou a marcovou RND nebadat' významný rozdiel. To však neplatí pri ostatných metódach. B-S a DLN metódy z decembra na marec zväčšili štandardné odchýlky RND, SIV metóda navyše zaznamenala aj pesimistický posun RND k nižším hodnotám S_T .

3.4 Prípadová štúdia: Analýza dopadu prejavu Maria Draghiho zo dňa 26.7.2012

Na záver zobrazíme vývin BS a DLN RND počas krátkeho obdobia v okolí dňa 26.7.2012. V tento deň nastala kľúčová udalosť eurozóny roka 2012. V dôsledku kulminujúcej neistoty na finančných trhoch na prejave počas Global Investment Conference v Londýne prezident Európskej Centrálnaj Banky Mario Draghi uviedol, že ECB je “pripravená urobiť pre záchranu eura všetko, čo sa dá”.¹² Európske trhy na túto skutočnosť zareagovali pozitívne.



Obr. 34: Časový vývin BS (vľavo) a DLN (vpravo) RND funkcií počas krátkeho obdobia v okolí dňa prejavu Maria Draghiho 26.7.2012.

Na obrázku 34 vidíme časový vývin odhadnutých SX5E opcií z dní 23., 25., 26. (deň prejavu), 27. a 31. júla 2012. Všetkých 5 opčných sérií maturuje 15.3.2013. V tejto časti sa zameriame na porovnanie klasického BS lognormálneho rozdelenia a zmesi dvoch lognormálnych rozdelení.

Hoci obe metódy zaznamenali najmä v deň prejavu a deň nasledujúci po prejave významný posun vpravo smerom k vyšším hodnotám S_T , DLN metóda umožňuje okrem toho zachytiť aj zmenu šikmosti výslednej RND, ktorá pri BS metóde nenastáva. Toto zošikmenie vpravo možno sledovať najmä na poslednej DLN RND zo dňa 31. júla 2012. Na tomto príklade teda môžeme ilustrovať pridanú hodnotu RND odhadnutých z cien opcií a nimi implikovaných *volatility smile* oproti štandardnej BS RND, na odhad ktorej je potrebná iba jedna hodnota volatility podkladového aktíva. Okrem posunu RND pozdĺž osi S_T totiž môžeme pre takéto RND sledovať aj vývin zložitejších, pre analýzy trhu často podstatných vlastností. Vidno napríklad, že hoci Draghiho prejav viedol k rastu cien na akciových trhoch a k zníženiu ich volatility, práve DLN RND poukazuje na to, že na trhu zostala pomerne veľká neistota týkajúca sa opätovného poklesu cien akcií. Je však nižšia, ako bola pred uvedeným prejavom.

¹²<http://ekonomika.etrend.sk/svet/ecb-urobi-pre-zachranu-eura-cokolvek.html>

Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo predstaviť najvýznamnejšie parametrické a neparametrické metódy odhadovania rizikovo-neutrálnych pravdepodobností založených na cenách opcií, opísať spôsob ich implementácie a načrtnúť ich možné aplikácie a využitie pre finančné inštitúcie (ako napríklad Národná banka Slovenska).

V práci sme predstavili tri najrozšírenejšie metódy, ktoré sa spomínajú v drvivej väčšine článkov zaoberajúcich sa problematikou odhadovania RND. Z týchto troch metód sú dve parametrické - metóda predpokladajúca kombináciu dvoch lognormálnych rozdelení (DLN) a zovšeobecnené Beta-2 rozdelenie (GB2) a jedna neparametrická, založená na interpolácii *volatility smile* pomocou vyhladzovacieho prirodzeného splajnu. Okrem nich sme takisto stručne predstavili jednu z metód odhadovania reálnej pravdepodobnosti pomocou GARCH(1,1) modelu so Studentovým-t rozdelením rezíduí.

Pri praktickej implementácii uvedených metód často vzniká veľké množstvo technických problémov, súvisiacich ako s jednotlivými optimalizačnými procedúrami, tak aj s prechodom z diskrétného priestoru zdrojových dát do spojitého priestoru výsledných RND. Samostatným problémom je takisto spoľahlivosť zdrojových dát, ktorá v prípade opcií nie je vždy zaručená. Podstatná časť tejto práce sa preto sústreďuje nielen na opis jednotlivých problémov, ktoré môžu v praxi pri odhadovaní RND nastať, ale aj na oboznámenie čitateľa s ich možnými riešeniami.

Jedným z častých problémov je nespoľahlivosť zdrojových cien opcií pre určitú množinu dostupných realizačných cien. Táto nespoľahlivosť vyplýva najmä z nízkej likvidity zodpovedajúcich opcií. Keďže je nepraktické pre každú opčnú sériu triediť dáta manuálne, pri výpočtoch vykonaných počas písania tejto diplomovej práce sa nám osvedčil náš filtračný algoritmus, založený na interpolácii zdrojových dát v priestore delta/implikovaná volatilita pomocou vyhladzovacieho splajnu. Aplikáciou tohto algoritmu sa zakaždým vychýlenosť odhadov spôsobená nekvalitou dát významne potlačila, uvádzame ho preto ako jedno z dostupných riešení tohto problému. Považujeme ho zároveň za jeden z hlavných prínosov diplomovej práce, nakoľko odhadovanie RND pre veľké množstvo opčných sérií je častá úloha. Práve v prípade veľkého objemu dát je určitá automatizácia, umožňujúca potlačenie nežiadúceho vplyvu nekvality niektorých z nich, prínosom.

Posledná kapitola uvádza niekoľko možných analýz využívajúcich odhady rizikovo-neutrálnych pravdepodobností. Môžeme konštatovať, že výsledné RND, poprípade výsledné časové rady RND, do značnej miery korešpondujú s vývojom situácie a očakávaní na trhu. Pozorujeme takisto výhody a nevýhody jednotlivých metód. Z hľadiska goodness-of-fit metóda DLN zakaždým poskytuje lepšie výsledky ako metóda GB2, čo sa však najmä pri výskyte problematických (nelikvidných) dát prejavuje na zvláštnych, často výrazne bimodálnych tvaroch výslednej RND. GB2 teda poskytuje výraznú robustnosť vzhľadom na nekvalitu vstupných dát. Tá je však do veľkej miery zachovaná aj pri SIV metóde, ktorá navyše pre jej neparametrickosť kladie najmenšie obmedzenia na tvary výsledných RND funkcií.

Keďže zmena RND v čase môže nastať buď v dôsledku zmeny reálnej pravdepodobnosti alebo v dôsledku zmeny rizikovej averzie investorov, skúmali sme vzťah medzi reálnou a rizikovo neutrálnou

pravdepodobnosťou. Ukázalo sa, že v sledovanom období mala reálna pravdepodobnosť ťažšie chvosty a pri rastúcej cene aktíva investori preferujú zníženie podielu rizikovej časti investície.

Hlavnú výhodu nami skúmaných RND oproti štandardnému Black-Scholes prístupu predstavuje podstatne väčšia voľnosť tvarov výsledných funkcií, umožňujúcich väčšie informačné bohatstvo RND, najmä čo sa týka momentov vyššieho rádu. Význam informácie o celom pravdepodobnostnom rozdelení, ako aj jeden z možných spôsobov aplikácie RND na analýzu zmien očakávaní účastníkov trhu sme demonštrovali na prípade prejavu Maria Draghiho dňa 26.7.2012.

Medzi možné rozšírenia tejto diplomovej práce môže patriť hlbšia analýza vychýlenia pravého chvostu SIV RND oproti ostatným metódam. Zaujímavým môže byť aj hlbšie štúdium porovnania rizikovo-neutrálnych pravdepodobností so subjektívnymi pravdepodobnosťami, porovnania rozličných metód zaoberajúcich sa odhadmi subjektívnych pravdepodobností a analýza funkcií averzie voči riziku z týchto pravdepodobnostných rozdelení vyplývajúca.

Literatúra

- [1] Anagnou, I., Mascia B., Hodges, S., Tompkins R. (2002). “The relation between implied and realised probability density functions.” Working paper, University of Technology, Vienna.
- [2] Arrow, K. J. (1964). “The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing.” *Review of Economic Studies*, 31, No. 2 (April), 91-96.
- [3] Bahra, B. (1997). “Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application.” Bank of England, Working Paper 66.
- [4] Berkowitz, J. (2001). “Testing density forecasts with applications to risk management.” *Journal of Business and Economic Statistics* 19, 465–474.
- [5] Bliss, R., Panigirtzoglou, N. (2002). “Testing the stability of implied probability density functions.” *Journal of Banking & Finance* 26, 381-422.
- [6] Bliss, R., Panigirtzoglou, N. (2001). “Option implied risk-aversion estimates: Robustness and patterns.” FRB Chicago, Working Paper 15.
- [7] Bookstaber, R., McDonanld, J., (1987). “General distribution for describing security price returns.” *Journal of Business*, 60, 401–424.
- [8] Breeden, D. T., Litzenberger, R. H. (1978). “Prices of state-contingent claims implicit in option prices.” *Journal of Business*, 51(4), 621-651.
- [9] Campa, J. M., Chang, P. H. K., Reider, R. L. (1997). “Implied exchange rate distributions: evidence from OTC option markets.” NBER Working Paper, No 6179.
- [10] Černý, V. (1985). “Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm.” *Journal of Optimization Theory and Applications* 45: 41–51.
- [11] Cochrane, J. H. (2001). “Asset Pricing.” Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [12] Coutant, S., Jondeau, E., Rockinger, M. (2001). “Reading PIBOR futures options’ smile: The 1997 Snap election.” *Journal of Banking and Finance*, 25, 1957–1987.
- [13] Cox, J., Ross, S. (1976). “The valuation of options for alternative stochastic processes.” *Journal of Financial Economics*, 3, 145-66.
- [14] Cummins, J. D., Dionne, G., McDonald, J. B. (1990). “Application of the GB2 family of distributions in modeling insurance loss proceses.” *Insurance: Mathematics and Economics*, 9, 257-272.

- [15] Debreu, G. (1959). “Theory of Value.” Wiley, NY.
- [16] Dutta, K., Babbel, D. F. (2005). “Extracting probabilistic information from the prices of interest rate options: Tests of distributional assumptions.” *Journal of Business*, 78, 841–870.
- [17] Glatzer, E., Scheicher, M. (2003). “Modelling the implied probability of stock market movements.” European Central Bank, Working Paper 212.
- [18] Jackwerth, J.C. (2000). “Recovering risk aversion from option prices and realized returns.” *The Review of Financial Studies*, Summer 2000, Vol. 13, No. 2, 433-451.
- [19] Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., Vecchi, M. P. (1983). “Optimization by Simulated Annealing.” *Science* 220 (4598): 671–680.
- [20] Liu, X., Shackleton, M., Taylor, S., Xu, X. (2007). “Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions.” *Journal of Banking and Finance*, 31, 1501–1520.
- [21] Malz, A. M. (1997). “Estimating the probability distribution of the future exchange rate from options prices.” *Journal of Derivatives*, Winter, 18-36.
- [22] McDonald, J., (1984). “Some generalized functions for the size distribution of income.” *Econometrica*, 52, 647–663.
- [23] Melick, W. R., Thomas, C. P. (1997). “Recovering an asset’s implied PDF from option prices: an application to crude oil during the Gulf crisis.” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32(1), 91-115.
- [24] Mirfendereski, D., Rebonato, R. (2001). “Closed-form solutions for option pricing in the presence of volatility smiles: a density-function approach.” *Journal of risk*, Volume 3/Number 3, Spring 2001.
- [25] Ornelas, J. R. H., Takami, M. Y. (2011). “Recovering risk-neutral densities from brazilian interest rate options.” *Revista Brasileira de Financas*, Rio de Janeiro, Vol. 9, N. 1, 9–26.
- [26] Parzen, E. (1962). “On estimation of a probability density function and mode.” *The Annals of Mathematical Statistics* 33 (3): 1065.
- [27] Rosenblatt, M. (1956). “Remarks on some nonparametric estimates of a density function.” *The Annals of Mathematical Statistics* 27 (3): 832.
- [28] Shimko, D. C. (1993). “Bounds of probability.” *Risk*, 6(4), 33-37.
- [29] Silverman, B.W. (1998). “Density estimation for statistics and data analysis.” London: Chapman & Hall/CRC, 48.