

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



**Investičné stratégie v sporivom pilieri dôchodkového systému na
Slovensku**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2013

Bc. Igor Vilček

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Kód práce: a5207ac6-afca-4935-a6f3-56826d5d275e

Investičné stratégie v sporivom pilieri dôchodkového systému na Slovensku

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika, 1114
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: Doc. Mgr. Igor Melicherčík, Phd.

Bratislava 2013

Bc. Igor Vilček



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Igor Vilček
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Investičné stratégie v sporivom pilieri dôchodkového systému na Slovensku
Cieľ: Práca sa bude zaoberať situáciou v dôchodkovom sporení na Slovensku po posledných legislatívnych zmenách. Na základe týchto zmien je napr. možné reálne investovať do akcií a dlhopisov s dlhšou duráciou.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Dátum zadania: 25.01.2012

Dátum schválenia: 26.01.2012
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že diplomovú prácu som vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava, apríl 2013

.....

Vlastnoručný podpis

Pod'akovanie

Touto cestou chcem pod'akovať predovšetkým svojmu vedúcemu práce, Doc. Igorovi Melicherčíkovi za jeho nápady, pripomienky a cenné rady, no v neposlednom rade i ľudský prístup, ústretovosť a čas, ktorý mne a mojej práci venoval. Veľká vd'aka tiež patrí mojim blízkym za ich podporu a vytvorenie vhodného prostredia na písanie.

Abstrakt

VILČEK, Igor: *Investičné stratégie v sporivom pilieri dôchodkového systému na Slovensku* [diplomová práca]. Univerzita Komenského, Bratislava. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúci diplomovej práce: Doc. Mgr. Igor Melicherčík, Phd.; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Univerzita Komenského, Bratislava. Bratislava: FMFI UK, 2013. 79 strán.

Cieľom tejto práce je analýza investičných stratégií v rámci druhého dôchodkového piliera na Slovensku. Získané výsledky sú však ľahko rozšíriteľné aj na príspevkovo definované sporiace schémy iných štátov. Ukazuje sa, že dynamické rozloženie úspor v čase na základe situácie konkrétneho sporiteľa môže výrazne zvýšiť hodnotu úspor oproti pasívnemu sporeniu. Jadrom práce je dynamický stochastický model sporenia, ktorý vyúsťuje do úlohy dynamického stochastického programovania. Jej riešením je funkcia optimálnej alokácie úspor medzi dôchodkové fondy. Alokačná funkcia zohľadňuje fázu sporenia, doterajší vývoj zhodnotenia úspor, aktuálnu úrokovú mieru a legislatívne obmedzenia. Berie tiež do úvahy trhové a makroekonomické faktory ako očakávaný vývoj na finančných trhoch alebo rast miezd. Ceny rizikových aktív sú modelované geometrickým Brownovým pohybom a okamžitá úroková miera prostredníctvom CIR modelu.

Okrem prispôsobenia modelu súčasnej legislatívy sú v práci navrhnuté stresové scenáre vývoja finančných trhov. Scenáre sú použité na spätné otestovanie výsledných optimálnych stratégií tak, aby si sporiteľ na základe svojho rizikového profilu a očakávaní vývoja trhov mohol zvoliť jemu najbližšiu stratégiu sporenia. Práca ďalej rozširuje doterajší model o využitie bezkupónových dlhopisov s ľubovoľnou splatnosťou v rámci dlhopisových fondov. Vykonaná je tiež analýza senzitivity investičných stratégií vzhľadom na rozličné vstupné parametre a pozornosť je venovaná aj úlohe bez budúcich príspevkov.

Kľúčové slová: optimálne investičné stratégie, dôchodkové sporenie, voľba dôchodkových fondov, stresové testovanie stratégií, celoživotné portfólio, simulácie penzijného portfólia, príspevkovo definované dôchodkové systémy, druhý pilier dôchodkového sporenia na Slovensku, dynamické stochastické programovanie, CIR model.

Abstract

VILČEK, Igor: *Investment strategies in the second pillar of the Slovak pension savings system* [master thesis]. Comenius University, Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Department of Applied Mathematics and Statistics. Supervisor: Doc. Mgr. Igor Melicherčík, Phd.; Department of Applied Mathematics and Statistics, Comenius University, Bratislava. Bratislava: FMFI UK, 2013. 79 pages.

The aim of this paper is to analyze investment strategies in the funded pillar of the Slovak pension system. Nonetheless, the majority of presented outcomes is applicable to any other defined contribution pension scheme. I show that by means of dynamic investing in time, which is based on the situation of the specific saver, one can substantially increase value of his/her savings when compared against passive investment. The core technique used throughout the paper is the dynamic stochastic accumulation model which leads to the dynamic stochastic programming problem. Solution to this problem provides the function of the optimal allocation of the savings between stock and bond pension funds. The function accounts for the phase of the savings process, current amount of savings, current interest rate and governmental regulations. It also incorporates macroeconomic and market factors such as wage growth or expected trends in the financial markets. Prices of risky assets are modelled by means of the geometric Brownian motion and interest rates are modelled utilizing the Cox-Ingersoll-Ross model.

In addition to adjusting model parameters to reflect the recent slovak regulations I also propose simple stress scenarios of possible stock market trends. The scenarios are utilized to backtest optimal investment strategies in a way that allows a saver to choose the strategy which is closest to his/her risk profile and market expectations. Moreover, I extend the existing model by allowing the use of the zero coupon bonds of any maturity in the modelled bond fund. I also conduct the sensitivity analysis with respect to various input parameters and I investigate the case of no future contributions.

Keywords: optimal investment strategies, pension saving, pension funds selection, stress testing of strategies, lifetime portfolio, pension portfolio simulations, defined-contribution funded systems, the funded pillar of the Slovak pension system, dynamic stochastic programming, CIR model.

Obsah

Úvod	1
1 Predstavenie problematiky	3
1.1 Slovenský dôchodkový systém a jeho druhý pilier	3
1.1.1 História systému	3
1.1.2 Aktuálna podoba 2. piliera	5
1.2 Motivácia	5
1.3 Literatúra	9
2 Teoretická príprava	11
2.1 Teória stochastických procesov	12
2.2 Teória úrokových mier	14
2.2.1 Časová štruktúra úrokových mier	14
2.2.2 Krátkodobá úroková miera	15
2.2.3 Jednofaktorové modely krátkodobej úrokovej miery	16
2.3 Teória optimálneho riadenia	17
2.4 Funkcie užitočnosti	19
3 Dynamický stochastický model sporenia	22
3.1 Predpoklady	22
3.1.1 Model sporenia	23
3.1.2 Modelovanie výnosov akcií	24
3.1.3 Modelovanie výnosov dlhopisov	25
3.2 Transformácia na úlohu optimálneho riadenia	26
3.3 Vlastnosti úlohy	29
3.3.1 Existencia a jednoznačnosť riešenia	29
3.3.2 Úloha bez budúcich príspevkov	30
3.4 Numerické riešenie úlohy	32
4 Parametre, scenáre a dáta	35
4.1 Parametre	35
4.2 Scenáre	40
4.3 Stratégie	41

5	Výsledky	42
5.1	Analýza základného výstupu (benchmark)	42
5.2	Analýza senzitivity	47
5.2.1	Zmena vo výške príspevkov	47
5.2.2	Bez zákonných obmedzení	49
5.2.3	Zmena v averzii k riziku	49
5.2.4	Zmena v splatnosti dlhopisov	51
5.2.5	Zmena v raste miezd	52
5.2.6	Zmena v hodnote driftu	53
5.2.7	Zmena v úrovni volatility	55
5.2.8	Súčasne iba v jednom fonde	57
5.3	Iné horizonty sporenia	60
5.4	Stresové testovanie	63
5.4.1	Empirické vyhodnotenie jednotlivých stratégií	63
5.4.2	Investičné odporúčania	69
	Záver	72
	Príloha A: Štatistiky stresových scenárov	77

Úvod

Slovenský dôchodkový systém počas poslednej dekády poznačili časté reformy, neustále meniace pravidlá sporenia na dôchodok. Najvýraznejšou zmenou bolo zavedenie trojpilierového systému v roku 2005, ktorý dal sporiteľom možnosť sporiť si okrem priebežného prvého piliera i v zásluhovom druhom pilieri. Výška nasporeného majetku v tomto pilieri, narozdiel od priebežného, závisí od pracovnej aktivity individuálneho pracovníka a od vývoja dôchodkových fondov, v rámci ktorých sú príspevky sporiteľa a zhodnocované. Tento pilier tiež dáva sporiteľovi možnosť zvoliť si dôchodkový fond najbližší jeho rizikovému profilu. Podľa najnovšej legislatívy môže sporiteľ rozložiť úspory do dvoch fondov súčasne a toto rozloženie v čase meniť. Pilier tým poskytuje účastníkovi možnosť aktívne ovplyvniť vývoj svojich úspor investičnými rozhodnutiami.

V práci sa zaoberám práve matematickým modelom príspevkovo definovaného dôchodkového systému založeného na sporení prostredníctvom priebežných príspevkov. Skúmať budem model odvodený v [1], pričom ho prispôbim aktuálnej legislatíve a podmienkam na finančných trhoch. Cieľom mojej práce je stanoviť optimálny pomer rozloženia úspor v dvoch základných ponúkaných dôchodkových fondoch - akciovom negarantovanom (rizikovom) a dlhopisovom garantovanom. Tento optimálny pomer sa bude meniť v čase, i podľa doterajšieho vývoja sporiteľových úspor a krátkodobej úrokovej miery. Optimálne investičné stratégie otestujem pre rôzne scenáre vývoja finančných trhov a pre rozličné typy sporiteľov.

Hlavným prínosom mojej práce je prispôbenie dynamického stochastického modelu súčasnej legislatívy a trhovým podmienkam. V práci využívam aktualizované parametre modelov, zohľadňujem najnovšie zákonné obmedzenia a pretransformujem model z [1] využívajúci 1-ročné bezkupónové dlhopisy na bezkupónové dlhopisy s ľubovoľným časom do splatnosti. Okrem toho vykonám analýzu senzitivity modelu vzhľadom k vybraným parametrom a porovnam získané optimálne investičné stratégie, ako aj strednú hodnotu nasporeného dôchodku, s prípadom neexistujúcich zákonných obmedzení i so situáciou pred ostatnou zmenou zákona.

Ďalším prínosom je vytvorenie stresových scenárov a spätné otestovanie optimálnych stratégií pre ne. Na základe nich viem odporučiť typ investičného rozhodnutia pre konkrétny predpoklad o vývoji trhov. Takisto identifikujem stratégiu, ktorá obostojí najlepšie „za každého počasia“, teda v priemere najlepšie zhodnotí úspory pri všetkých scenároch, alebo stratégiu, ktorej najhorší scenár je najmenej katastrofický.

V práci tiež odvodím vzťah, ktorým potvrdím Samuelsonov výsledok z [2], teda, že v prípade nulových budúcich príspevkov (t.j. jednorazovej investície) je podiel majetku v rizikovom a bezrizikovom aktíve nezávislý od času a od aktuálnej veľkosti majetku, pričom pre mnou riešenú úlohu bude platiť len druhá časť tohto tvrdenia.

Výstup z práce je tiež použiteľný pre príspevkovo definované systémy, v ktorých môže sporiteľ sporiť súčasne iba v jednom fonde. Vtedy si sporiteľ môže z ponuky fondov vybrať vypočítanému optimálnemu pomeru úspor (v dlhopisovom garantovanom a akciovom negarantovanom fonde) jeden najpríbuznejší dôchodkový fond, čo sa týka výnosu i rizika. Nakoľko si práca nekladie za cieľ replikovať existujúce dôchodkové fondy, výsledok v podobe optimálneho podielu úspor v dvoch uvedených fondoch je tiež prispôsobiteľný aktuálnej štruktúre jednotlivých fondov na trhu, a to napríklad výberom iného fondu ako práve akciového alebo dlhopisového. Vyžaduje si to vyhľadať fond z ponuky správcov, ktorý je rizikovým profilom najbližší vypočítanému optimálnemu rozloženiu úspor v práci uvažovaných dvoch fondoch.

Práca sa člení na nasledovné časti:

V *prvej kapitole* uvediem základné poznatky z problematiky dôchodkového sporenia na Slovensku, uvediem stručnú históriu domáceho dôchodkového systému a popíšem aktuálne fungovanie 2. piliera. Uvediem príklad motivujúci k aktívnym investičným stratégiám v rámci 2. piliera a zhrniem literatúrú zaoberajúcu sa mnou skúmanou problematikou.

V *druhej kapitole* stručne uvediem v práci využívané pojmy, tvrdenia a základy pre matematické modely. Nazriem do základov teórie stochastických procesov, teórie úrokových mier, teórie optimálneho riadenia a teórie funkcií užitočnosti, ktoré sa naprieč prácou budú prelínať.

V *tretej kapitole* odvodím dynamický stochastický model sporenia publikovaný v [1] a z neho vychádzajúcu optimalizačnú úlohu o rozložení úspor medzi rôzne finančné aktíva, pričom ho prispôbím aktuálnej legislatíve. V tejto časti tiež odvodím vlastnosť nezávislosti optimálneho rozloženia úspor od výšky nasporeného majetku v prípade nulových príspevkov.

V *štvrtej kapitole* objasním používané numerické i trhové parametre, dôvody osvojenia si konkrétnych parametrov, spôsob ich získania a využité zdroje dát. Predstavím tiež scenáre vývoja rizikového fondu, na základe ktorých v ďalšej kapitole vykonám stresové testovanie získaných optimálnych stratégií.

V *piatej kapitole* najskôr zanalyzujem a popíšem základný výstup z riešenej úlohy, ktorý bude slúžiť ako porovnávací základ pre analýzu senzitivity. Následne vykonám spomínanú analýzu vzhľadom k viacerým, ako parametrickým, tak i zákonným, resp. systémovým zmenám. V tejto časti tiež zanalyzujem rozličné horizonty a počiatočné situácie sporenia. Na záver podrobím vypočítané optimálne stratégie spolu s vybranými, v praxi používanými stratégiami stresovému testovaniu a predostriem investičné odporúčania pre rôzne typy sporiteľov.

Kapitola 1

Predstavenie problematiky

V prvej časti mojej práce predstavím problematiku formovania slovenského dôchodkového systému, so zameraním na druhý pilier. Zhrniem fungovanie systému od čias jeho zavedenia s dôrazom na aktuálne zmeny. Uvediem tiež príklad motivujúci k aktívnej voľbe dôchodkových fondov namiesto pasívneho zotrávania v jednom type fondu a zhrniem relevantnú literatúru k danej problematike.

1.1 Slovenský dôchodkový systém a jeho druhý pilier

1.1.1 História systému

Do roku 2005 fungoval na Slovensku povinný, priebežný, tzv. „*Pay As You Go*“ (PAYG) dôchodkový systém. V jednoduchosti, systém bol postavený na vyplácaní dôchodkov dôchodcom z príspevkov aktuálne pracujúceho obyvateľstva. Systém však, najmä pre fenomén starnutia obyvateľstva (a teda menšie množstvo pracujúcich odvádzajúcich príspevky pre čoraz väčšie množstvo dôchodcov), ako aj pre vysokú nezamestnanosť a vyhybanie sa príspevkom, prešiel rozsiahlou reformou. Tá vstúpila do platnosti 1.1.2005 a zaviedla na Slovensku tzv. trojpilierový systém sporenia:¹

- *Prvý pilier* bol a dodnes je povinný, spravovaný Sociálnou poisťovňou, a funguje na rovnakom, priebežnom PAYG princípe.
- *Druhý pilier* je plne zásluhový, t.j. funguje na princípe individuálneho sporenia jednotlivcov, ktorí sú povinní pravidelne odvádzať príspevky na dôchodkové účty vedené dôchodkovými správcovskými spoločnosťami (DSS). Tie prostriedky sporiteľov zhodnocujú v dôchodkových fondoch. Pilier bol v rokoch 2005-2008 pre novosporiteľov povinný, momentálne povinný nie je.
- *Tretí pilier* je dobrovoľný, a funguje identicky ako druhý pilier, pričom na neho nadviazané fondy spravujú doplnkové dôchodkové spoločnosti (DDS).

¹Zákon č. 461/2003 Z. z. o sociálnom poistení a Zákon č. 43/2004 Z.z. o starobnom dôchodkovom sporení.

Miera odvodov na starobné dôchodkové sporenie do prvého i druhého piliera bola stanovená na 9% z vymeriavacieho základu na výpočet odvodov, resp. 18% v prípade účastníka sporiaceho iba v pilieri prvom. V rámci druhého piliera spravovala každá DSS 3 fondy - *konzervatívny, vyvážený a rastový*, sporiteľ si pritom mohol sporiť súčasne iba v jednom z nich. Do tretieho piliera si mohli sporitelia navyše odvádzať časť zo mzdy, pričom zvyčajne im prispieval aj zamestnávateľ.

Po finančnej kríze v roku 2008 bola schválená novela zákona, ktorá výrazne zmenila pravidlá investovania pre DSS v rámci dôchodkových fondov druhého piliera.² S platnosťou od 1.7.2009 bola DSS okrem znížených poplatkov za správu fondov tiež uložená povinnosť vyhodnocovať na 6-mesačnej báze, t.j. každého pol roka, výkonnosť všetkých dôchodkových fondov. V prípade poklesu hodnoty majetku (dôchodkovej jednotky) na konci týchto polročných sledovaných (porovnávacích, resp. referenčných) období dostali DSS zo zákona povinnosť doplatiť z vlastného majetku rozdiel, ktorý predstavoval práve spomínané znehodnotenie. Zaručiť na finančných trhoch pozitívnu výkonnosť počas 6-mesačného obdobia bolo ale možné len investovaním do krátkodobých cenných papierov s nízkym výnosom. Investičné stratégie DSS sa preto zmenili na silne konzervatívne, čo síce znížilo riziko, no eliminovalo i značnú časť výnosov.

Novela zákona z roku 2011, vstupujúca do platnosti od 1.4.2012, opäť zásadne zmenila investičné možnosti v rámci druhého piliera.³ Hlavnou zmenou, ktorú priniesla, bolo zvýšenie počtu fondov z dvoch na štyri, zrušenie garancií v troch z nich a zmena sledovaného referenčného obdobia v garantovanom fonde z 6 mesiacov na 5 rokov. Správcovské spoločnosti boli povinné zmeniť a premenovať doterajšie 3 existujúce fondy na *dlhopisový, zmiešaný a akciový*, a vytvoriť nový, *indexový* fond. Garancie však zostali iba v dlhopisovom fonde. Indexový fond musel zo zákona pasívne kopírovať so stanovenou povolenou odchýlkou vývoj správcom zvoleného akciového indexu. V zložení zvyšných dvoch fondov mali správcovia voľnosť, až na niektoré zákonné obmedzenia ako napr. maximálne 80% peňažných a dlhopisových investícií v akciovom fonde, daný maximálny podiel cenných papierov emitovaných jedným štátom, a podobne.⁴ Sporitelia navyše dostali možnosť sporiť si v dvoch fondoch súčasne (jeden z nich musel byť dlhopisový) a rozloženie úspor vo fondoch mohli pravidelne meniť, pričom pred odchodom do dôchodku boli ich úspory postupne prevádzané do dlhopisového fondu. Táto reforma však nepriniesla takmer žiadnu zmenu v investičných stratégiách správcov (s výnimkou vytvorenia indexového fondu), keďže včase vstupovania do platnosti už dostávala reálnu podobu ďalšia novela zákona.

²Zákon č. 137/2009 Z. z.

³Zákon č. 334/2011 Z. z., resp. v úplnom znení Zákon č. 28/2012 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení.

⁴Zákon č. 334/2011 Z. z. §82.

1.1.2 Aktuálna podoba 2. piliera

Najnovšia novela, schválená v auguste 2012, ktorá do platnosti⁵ vstúpila od 1.1.2013, opäť výrazne mení fungovanie celého dôchodkového systému na Slovensku. Okrem otvorenia druhého piliera pre vstup a výstup sa výrazne zmenil pomer odvodov v prospech priebežného systému prvého piliera. Medzi najpodstatnejšie zmeny patrí:

- *Zníženie povinných odvodov do 2. piliera z 9% vymeriavacieho základu iba na 4% v rokoch 2013-2016 a od roku 2017 postupné zvyšovanie na konečnú úroveň 6% v roku 2024. Ďalšie príspevky si môžu sporitelia dobrovoľne pripoistiť, t.j. navyše doplácať zo svojej mzdy, pričom daňovo zvýhodnené budú len ďalšie 2%. Odvody na starobné dôchodkové sporenie v 1. pilieri teda stúpili až na 14%.*
- *DSS sú ďalej povinné spravovať iba dva fondy, dlhopisový garantovaný a akciový negarantovaný, pričom zriadenie prípadných ďalších fondov nie je obmedzené.*
- *Sledované referenčné obdobie v garantovanom fonde sa predĺžilo na 10 rokov, pričom DSS dostali možnosť zvoliť si i referenčné obdobie 15 rokov.*
- *Poplatok za vedenie dôchodkového účtu zostal na úrovni 1% z mesačných príspevkov, naopak poplatok za zhodnotenie majetku sa zvýšil na maximálne 10% zo zhodnotenia úspor a maximálny poplatok za správu dôchodkového fondu zostal vo všetkých fondoch na úrovni 0.3% z priemernej ročnej čistej hodnoty majetku sporiteľa.*
- *Sporitelia si opäť môžu sporiť v dvoch fondoch súčasne (z ktorých jeden musí byť dlhopisový) a na základe vlastného uváženia rozhodovať o konkrétnom rozložení svojich úspor počas doby sporenia.*
- *Rozloženie úspor v rámci fondov je na konci sporenia obmedzené zákonom, ktorý DSS ukladá povinnosť postupne prevádzať sporiteľove úspory do dlhopisového fondu, a to po dovŕšení 50. roku života na úrovni 10% úspor, po 51. roku 20% úspor, atď. až po 100% úspor v dlhopisovom fonde pri veku sporiteľa 59 a viac rokov.*

Práve možnosť aktívnej voľby dôchodkových fondov sporiteľom umožňuje tvorbu vlastných dynamických investičných stratégií v rámci sporivého piliera a dáva základ mojej práci. Ďalej sa budem venovať výlučne sporeniu a stratégiám v rámci druhého piliera.

1.2 Motivácia

Autori v [3] uviedli vynikajúci motivačný príklad, ktorý si tu dovoľím v pozmenenej a rozšírenej verzii uviesť. Príklad ukazuje, prečo sa pri sporení oplatí viac investovať

⁵Zákon č. 252/2012 Z. z.

do rizikového aktíva na začiatku sporenia a nie na jeho konci. Príklad tiež utvrdzuje v jednoduchej logickej úvahe, že ak uprostred horizontu sporenia vezmeme do úvahy doterajší vývoj aktív, budúcemu zhodnoteniu investície by sme tým mali iba pomôcť.

Príklad 1.2.1 (2-ročné sporenie). *Predpokladajme, že jediná na trhu pôsobiaca dôchodková správcovská spoločnosť ponúka sporiteľom na výber z dvoch fondov - akciového a dlhopisového. Predpokladajme sporiteľa sporiaceho si na dôchodok po dobu dvoch rokov. Na začiatku každého z týchto dvoch rokov si odloží na dôchodok 1€. Okrem toho si na začiatku každého roka vyberie jeden z ponúkaných fondov a prevedie do neho všetky svoje úspory.*

Predpokladat' budem, že ročné výnosy akciového fondu sú náhodné, normálne rozdelené so strednou hodnotou 6% a smerodajnou odchýlkou 15% a výnosy dlhopisového fondu sú stabilné, nenáhodné, na úrovni istých 3% ročne.⁶ Na porovnanie uvediem ešte prípad, v ktorom sú aj výnosy dlhopisového fondu náhodné (používaný i neskôr naprieč mojou prácou avšak v odlišnom modeli), normálne rozdelené so štandardnou odchýlkou 6% ročne.

Pozrime sa teraz, aká by v priemere bola hodnota takto investovaných úspor na konci dvojročného sporiaceho obdobia. Uvažovať budeme rozličné hypotetické stratégie voľby fondov v jednotlivých rokoch:

- (S1) *Bezpečná investícia.* Sporiteľ zostane celý čas v dlhopisovom fonde.
- (S2) *Riziková investícia.* Sporiteľ zostane celý čas v akciovom fonde.
- (S3) *Istota, potom riziko.* Sporiteľ si prvý rok sporí v dlhopisovom fonde a druhý rok v akciovom fonde.
- (S4) *Riziko, potom istota.* Sporiteľ si prvý rok sporí v akciovom fonde a druhý rok v dlhopisovom fonde.
- (S5) *Riziko, potom uvidíme.* Sporiteľ si prvý rok sporí v akciovom fonde. Pokiaľ tento fond zarobí viac ako stanovenú hranicu (prah), neriskuje a sporí druhý rok v dlhopisovom fonde. Inak sporí opäť v akciovom fonde.

⁶Počas ostatných 3 rokov, t.j. v období keď fondy v 2. pilieri podliehali prísny regulatórny kritériám (akékoľvek znehodnotenie investície počas obdobia 6 mesiacov museli DSS doplácať z vlastných zdrojov), sa priemerné ročné zhodnotenie všetkých typov fondov pohybovalo okolo úrovne 1.5%. Do roku 2009 bola priemerná výkonnosť dlhopisových fondov okolo 4% p.a. a akciových dokonca iba 1% p.a., avšak výrazne ju poznačila finančná kríza. Predpokladat' ročné zhodnotenia 3%, resp. 6% sa teda môže javiť ako odvážne. Nová legislatíva však umožňuje správcovi investovať s väčším dôrazom na dlhodobé zhodnotenie úspor, a preto môžu byť zhodnotenia podobnej úrovne čoskoro reálne. Tiež ide iba o ilustratívny príklad.

Údaje sú čerpané z web stránky Ministerstva práce sociálnych vecí a rodiny
<http://www.employment.gov.sk/ii-pilier-statisticke-udaje-nominalne.html>

Stratégia	r_1	r_2	σ_1	σ_2	$E(D)$	$\sigma(D)$	$\frac{E(D)-E(S1)}{\sigma(D)}$	$Q_{5\%}$
(S1) Bezpečná investícia	3%	3%	0%	0%	2.0909	0	–	2.0909
(S2) Riziková investícia	6%	6%	15%	15%	2.1836	0.3482	0.2662	1.6269
(S3) Istota, potom riziko	3%	6%	0%	15%	2.1518	0.3045	0.2000	1.6510
(S4) Riziko, potom istota	6%	3%	15%	0%	2.1218	0.1545	0.2000	1.8677
(S5) Uvidíme, prah=3%	6%	?	15%	?	2.1460	0.2300	0.2397	1.6794
(S5) Uvidíme, prah=6%	6%	?	15%	?	2.1509	0.2454	0.2445	1.6649
(S5) Uvidíme, prah=9%	6%	?	15%	?	2.1558	0.2609	0.2488	1.6537

Tabuľka 1.1: Výsledky stratégií pri predpokladanom normálnom rozdelení výnosov akciového fondu a istých výnosoch dlhopisového fondu.

Stratégia	r_1	r_2	σ_1	σ_2	$E(D)$	$\sigma(D)$	$\frac{E(D)-E(S1)}{\sigma(D)}$	$Q_{5\%}$
(S1) Bezpečná investícia	3%	3%	6%	6%	2.0909	0.1366	–	1.8687
(S2) Riziková investícia	6%	6%	15%	15%	2.1836	0.3482	0.2662	1.6269
(S3) Istota, potom riziko	3%	6%	6%	15%	2.1518	0.3112	0.1955	1.6430
(S4) Riziko, potom istota	6%	3%	15%	6%	2.1218	0.1981	0.1560	1.8037
(S5) Uvidíme, prah=3%	6%	?	15%	?	2.1460	0.2503	0.2202	1.6794
(S5) Uvidíme, prah=6%	6%	?	15%	?	2.1509	0.2623	0.2287	1.6649
(S5) Uvidíme, prah=9%	6%	?	15%	?	2.1558	0.2746	0.2366	1.6537

Tabuľka 1.2: Výsledky stratégií pri predpokladanom normálnom rozdelení výnosov oboch fondov, s rozličnými parametrami.

Ako prvé si z Tab. (1.1) a (1.2) môžeme všimnúť, že charakter výsledkov v rámci oboch tabuliek, ak ich medzi sebou porovnáme, je veľmi podobný.⁷ Pre oba uvažované prípady rozdelenia výnosov platí niekoľko základných pozorovaní.

V priemere najziskovejšou stratégiou bolo sporenie výlučne v akciovom fonde, avšak i najrizikovejšou. Štatistika „katastrofického scenára“⁸ ukazuje, že v 5 prípadoch zo 100 môže byť hodnota nasporeného dôchodku nižšia oproti bezrizikovému investovaniu do dlhopisového fondu až o 20%, čo je najviac spomedzi všetkých stratégií. Ukazovateľ nadvýnosu (resp. „naddôchodku“) oproti bezrizikovému sporeniu na jed-

⁷Stredná hodnota nasporeného dôchodku je rovnaká, nakoľko sme predpokladali rovnakú strednú hodnotu výnosov dlhopisového fondu v rizikovom i bezrizikovom prípade. Najviditeľnejší rozdiel spočíva v celkovo vyššej štandardnej odchýlke (t.j. riziku) v prípade uvažovania náhodných výnosov dlhopisového fondu, čo ale nie je nič prekvapujúce. Z tohto porovnania teda vyplýva len toľko, že sú si oba modely (čo sa porovnania jednotlivých stratégií týka) kvalitatívne veľmi blízke.

⁸5% kvantil získaný z 10⁸ Monte Carlo simulácií, ozn. $Q_{5\%}$.

notku rizika⁹ je ale opäť najvyšší pre investíciu do akciového fondu.

Zdanlivo najhoršou aktívnou stratégiou sa javí byť stratégia Najprv riziko, potom istota s druhou najnižšou priemernou hodnotou úspor. Dokonca má v Tab. (1.1) spolu so stratégiou Najprv istota, potom riziko i najnižší ukazovateľ nadvýnosu na jednotku rizika, resp. v Tab. (1.2) suverénne najnižší. Táto stratégia je však jednoznačne najbezpečnejšou spomedzi (S2)-(S5). Katastrofický scenár pre ňu znamená iba o 10% nižšiu hodnotu dôchodku oproti bezrizikovej investícii.

Niekde uprostred sa umiestnili Uvidíme stratégie, rozhodujúce sa na základe výnosu akciového fondu v prvom roku. Vidno, že so zvyšujúcimi sa nárokmi na dosiahnutie výnosu v prvom roku stúpa v priemere celková nasporená suma, no i riziko, a zhoršuje sa katastrofický scenár. Ukazovateľ nadvýnosu na jednotku rizika sa však so zvyšujúcim sa prahom zlepšuje. Porovnajme teraz stratégiu s prahom 9% so stratégiou Istota, potom riziko. Môžeme si všimnúť, že táto verzia stratégie Uvidíme dosahuje v priemere vyššiu hodnotu dôchodku, nižšie riziko (volatilitu), teda aj vyšší nadvýnos na riziko, a takisto aj prijateľnejší výsledok v prípade katastrofického scenára. Aktívnou stratégiou založenou na zohľadnení doterajšieho vývoja sme teda dosiahli lepšiu investičnú alternatívu.

Hlavným zistením z tohto príkladu je pozorovanie, že vhodným využitím prístupných dostupných informácií môžeme zmenou v rozložení úspor dosiahnuť ich lepšie zhodnotenie. Tiež možno odhadnúť, že silne rizikovo averzný sporiteľ by mal zrejme zostať v dlhopisovom fonde, o niečo menej rizikovo averzný sporiteľ by sa mal snažiť vyhľadávať rizikové fondy najmä na začiatku sporenia, riziku ešte viac naklonený investor by mal začať v akciovom fonde a neskôr sa rozhodnúť na základe jeho vývoja a sporiteľ s najväčším sklonom k riziku by mal ostať verný akciovému fondu. Stratégiu Istota, potom riziko nemôžem odporučiť, keďže vo všetkých meračných ukazovateľoch je porazená dynamickou stratégiou Uvidíme s prahom 9%.

Logika v pozadí týchto výsledkov je jednoduchá. Keďže tesne pred ukončením sporenia na dôchodok je veľkosť takto nazhromaždených úspor vysoká (vzhľadom k predošlým rokom sporenia), neoplatí sa úspory vystaviť vysokému riziku, napr. v podobe investovania do akcií. Naopak, v období, keď sporiteľ len začína sporiť na dôchodok je potenciálny nadvýnos z akciovej investície, no s ním i spojené riziko, oveľa prijateľnejšie. Ak nahliadneme do histórie, v priemere ponúkali akciové trhy dlhodobo vyššie výnosy ako trhy dlhopisové (čo okrem histórie vyplýva i z fundamentálnych princípov fungovania trhovej ekonomiky). Prípadný pokles akciových trhov v počiatkovej fáze sporenia na dôchodok sa úspor dotkne iba minimálne (keďže neovplyvní budúce príspevky), kým prípadný nárast trhov môže potenciálne výrazne zvýšiť úspory.

Na druhej strane, rozložením úspor na základe ich doterajšieho vývoja by sme už len intuitívne mali dosiahnuť lepší výsledok ako v prípade, že doterajší vývoj nebe-

⁹Pseudo Sharpeov pomer pre dôchodok $\frac{E(D)-E(S1)}{\sigma(D)}$.

rieme do úvahy. Základná myšlienka, prečo je tomu naozaj tak, je založená na poznatkoch z predošlých riadkov.

Cieľom tejto časti bolo ukázať, že má zmysel zaoberať sa matematicky exaktnými metódami, ktoré by nám dali návod na optimálne rozloženie úspor medzi dôchodkové fondy v jednotlivých etapách sporenia a za danej situácie na finančných trhoch. Presne toto je cieľom mojej práce.

1.3 Literatúra

Základnou publikáciou, z ktorej moja práca vychádza, je článok *Dynamic stochastic accumulation model with application to pension savings management* z roku 2010 od Melicherčíka a Ševčoviča, [1]. Autori v ňom nadviazali na článok [3] a odvodili dynamický model sporenia založený na predpokladoch lognormálneho rozdelenia vzájomne v čase nezávislých výnosov rizikových aktív a v čase závislej, no len markovovskej, krátkodobej úrokovej miery modelovanej prostredníctvom jednofaktorového CIR modelu. Výstupom z autormi riešenej optimalizačnej úlohy bola funkcia optimálnej alokácie prostriedkov medzi uvažované (rizikové a dlhopisové) aktíva, závislá od času, veľkosti majetku a okamžitej úrokovej miery. Článok pritom uvažoval 1-ročné bezkupónové dlhopisy a výstupy z modelu boli prispôbené vtedajšej legislatíve. Autori tiež odvodili dôležité kvalitatívne a kvantitatívne vlastnosti uvažovanej úlohy, ako sú napr. existencia a jednoznačnosť riešenia.

Spomínaná práca [3] z roku 2006 sa zaoberala taktiež dynamickým stochastickým modelom sporenia, avšak predpokladala normálne rozdelenie (vzájomne v čase nezávislých) výnosov ako rizikových, akciových aktív, tak aj (vzájomne v čase nezávislých) výnosov dlhových cenných papierov. Tento predpoklad zredukoval dimenziu úlohy (v zmysle relevantných premenných pre funkciu optimálneho rozhodovania sa medzi ponúkanými fondmi) z 3-rozmernej na 2-rozmernú, nakoľko alokačný pomer v tomto prípade závisel už iba od času a veľkosti majetku. Rozdiel bol tiež v skutočnosti, že pokiaľ [1] poskytol exaktný optimálny alokačný pomer (na základe ktorého si sporiteľ mohol vyhľadať tomuto pomeru najpríbuznejší fond), tak v [3] bola úloha založená na rozhodovaní sa medzi konkrétnymi dôchodkovými fondmi.

Na prácu [3] nadviazali okrem [1] i publikácie Kilianovej [4] z roku 2006 a Ševčoviča s Macovou [5] z roku 2010. Prvý spomínaný článok sa zaoberal analýzou senzitivity dynamického stochastického modelu z [3] vzhľadom k dynamicky sa meniacim výnosom fondov ponúkaných sporiteľom. Skúmaný bol pritom konkrétny prípad spojitého exponenciálneho poklesu výnosov dlhopisov a jeho dopad na optimálne investičné rozhodnutia vystupujúce z modelu.

Analýzou senzitivity modelu odvodeného v [3] vzhľadom k rôznym parametrom, za platnosti starej legislatívy, sa zaoberal aj Jakubík vo svojej diplomovej práci [6]. Následne na ňu spolu so Ševčovičom a Melicherčíkom nadviazali v článku [7]. V ňom bol okrem spomínanej analýzy uvedený i dôkaz linearitu výšky nasporených úspor

vzhľadom k výške pravidelných príspevkov. Súčasťou článku bol i dôkaz nezávislosti optimálneho rozloženia úspor od výšky príspevkov.

Jadrom druhej uvedenej práce, [5], bola spojená verzia dynamického stochastického modelu. Publikácia sa konkrétne venovala dôkladnej, podrobnej analýze nelineárnej parabolickej diferenciálnej rovnice, ktorá vzišla z problému optimálnej alokácie dôchodkových úspor skúmaného v [3]. V práci bol opäť uvažovaný predpoklad normálneho rozdelenia akciových i dlhopisových aktív, podobne ako v [3], avšak výstupom riešenej úlohy už nebol špecifický fond, ale presný pomer optimálneho rozloženia investície medzi rizikové a nízko rizikové aktívum. Práca analyzuje viaceré kvalitatívne a kvantitatívne vlastnosti riešení a porovnáva výsledky spojeného modelu s diskretnou verziou.

Kapitola 2

Teoretická príprava

Najprv uvediem základné pojmy teórie stochastických procesov a časti finančnej matematiky, ktoré budú ďalej využívané v práci. Stochastické procesy slúžia na modelovanie náhodných, nedeterministických javov, resp. premenných, ako napríklad vývoj cien akcií alebo úrokových mier. Názorná ukážka je na Obr. (2.1) a Obr. (2.2). Teóriu budovania stochastických procesov, ako aj dôkazy a matematicky podrobnejšie rozobraté tvrdenia možno nájsť v [8] a [9]. Z týchto zdrojov čerpám definície a tvrdenia uvedené v časti (2.1).

Následne popíšem základy teórie úrokových mier s dôrazom na pojmy potrebné k práci s CIR modelom vývoja úrokových mier, ktorý je jedným zo základných pilierov mojej práce. V zásade rozlišujeme dva prístupy pri modelovaní vývoja úrokových mier. Prvým je *bezarbitrážny* prístup využívajúci modely *krátkodobej (okamžitej)* úrokovej miery, ktoré sú kalibrované na základe reálnej trhovej krivky úrokových mier (časová štruktúra úrokových mier). Druhým sú *ekvilibriové* modely, založené na princípe dlhodobej trhovej rovnováhy, pričom výstup z modelu nemusí byť totožný s aktuálnou trhovou krivkou. CIR model sa zaraďuje do prvej z týchto skupín a preto sa v práci budem venovať výhradne modelom okamžitej úrokovej miery. Teória úrokových mier je podrobnejšie uvedená opäť v [8] a [9], odkiaľ čerpám definície a tvrdenia uvedené v časti (2.2). CIR model je odvodený v [10].

Ďalej uvediem niekoľko základných pojmov teórie stochastického optimálneho riadenia, konkrétne diskretnú úlohu na maximalizáciu funkcie koncového stavu a s ňou súvisiacu *Bellmanovu rovnicu dynamického programovania*. Práve optimálne riadenie mi poslúži ako nástroj na vyriešenie problému voľby optimálneho rozloženia úspor medzi dôchodkovými fondami. Podrobné teoretické a praktické poznatky o teórii stochastického i deterministického optimálneho riadenia pre diskretné problémy možno nájsť v [11]. Uvedená publikácia je zdrojom definícií a tvrdení z časti (2.3).

Ako posledné predstavím potrebné pojmy z teórie užitočnosti, resp. funkcií užitočnosti. Práve funkcie užitočnosti umožňujú zohľadniť v modeloch sporiteľovu averziu k riziku. Pre typickú funkciu užitočnosti platí, že jej hodnota rastie s rastúcim majetkom, a čím je majetok vyšší, tým má jednotka navyše pridaná k tomuto majetku pre sporiteľa menšiu hodnotu (užitočnosť). Po zvolení konkrétnej funkcie užitočnosti

je ešte potrebné určiť aj parameter rizikovej averzie investora, teda do akej miery je ochotný akceptovať riziko. Úvod do teórie užitočnosti v mikroekonomickom kontexte sa nachádza v [12], v súvislosti s finančnou matematikou v [8]. Z literatúry podrobne sa venujúcej danej problematike možno spomenúť [13] a článok zaoberajúci sa špeci-ficky triedou tzv. *CRRA funkcií užitočnosti*, ktoré budem využívať v práci je napr. [14]. Definície a tvrdenia uvedené v časti (2.4) čerpám z [8] a [12].

2.1 Teória stochastických procesov

Daná je množina Ω , obor všetkých možných hodnôt náhodného experimentu ω . Ďalej definujeme σ -algebru merateľných množín $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ a P - pravdepodobnostnú mieru na Ω . Tým dostávame pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{F}, P) , na ktorom ďalej pracujeme.

Definícia 2.1.1 (Stochastický proces). *Jednorozmerný stochastický proces je t -parametrický systém náhodných premenných $\{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{F}, P) , ktorý má hodnoty v \mathbb{R} .*

Ako funkcia ω je to pre každé t náhodná premenná

$$\omega \rightarrow X_t(\omega); \omega \in \Omega$$

a ako funkcia t , pre pevné ω ide o trajektóriu X priradenú ω

$$t \rightarrow X_t(\omega); 0 \leq t < \infty.$$

Ďalej fixujeme ω a kvôli prehľadnosti uvádzame pre stochastické procesy tvar X_t . Tiež uvažujeme (ak nie je uvedené inak) iba nezáporné časy $t \geq 0$.

Stochastický proces sa nazýva *markovovský*, ak jeho hodnota v čase t_{i+1} závisí iba od jeho hodnoty v čase t_i a nie od hodnôt v časoch t_{i-1}, \dots, t_0 .

Definícia 2.1.2 (Markovovský proces). *Stochastický proces sa nazýva markovovský, ak*

$$P(X_{t_{i+1}} = h_{i+1} | X_{t_i} = h_i, X_{t_{i-1}} = h_{i-1}, \dots, X_{t_0} = h_0) = P(X_{t_{i+1}} = h_{i+1} | X_{t_i} = h_i)$$

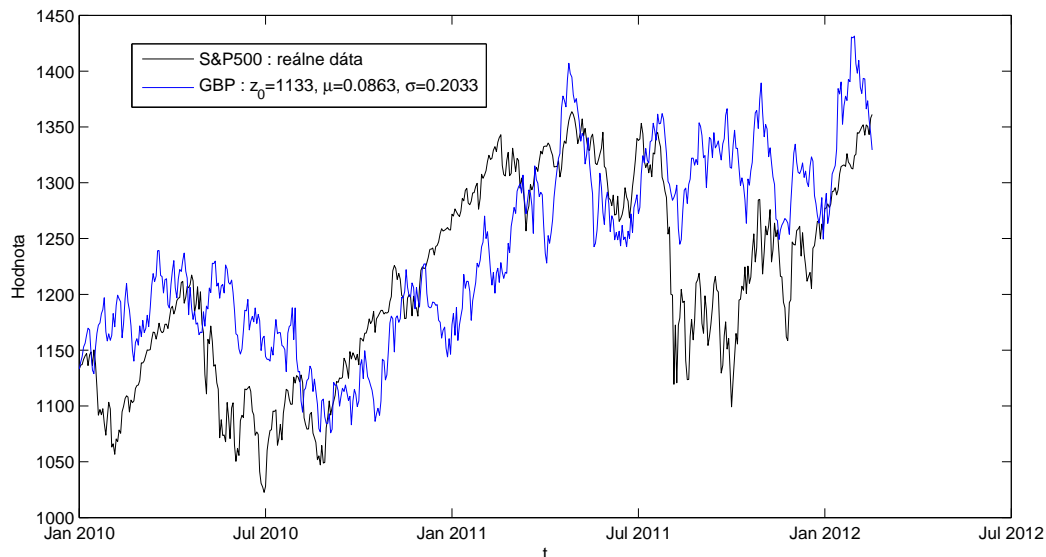
Definícia 2.1.3 (Brownov pohyb). *Brownov pohyb $\{B_t, t \geq 0\}$ je stochastický proces s vlastnosťami:*

- (i) *trajektória B_t je s pravdepodobnosťou 1 spojitá a $B_0 = 0$,*
- (ii) *pre ľubovoľné t a Δ majú prírastky $B_{t+\Delta} - B_t$ rozdelenie $\sim \mathcal{N}(\mu\Delta, \sigma^2\Delta)$,*
- (iii) *pre ľubovoľné delenie časov $0 \leq t_0 < \dots < t_n$ sú prírastky $B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ nezávislé náhodné premenné rozdelené ako v (ii), pričom $\Delta = t_i - t_{i-1}, \forall i = 1, \dots, n$.*

Definícia 2.1.4 (Wienerov proces). Wienerov proces definujeme ako Brownov pohyb s $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$.

Definícia 2.1.5 (Geometrický Brownov pohyb). Nech B_t je Brownov pohyb s všeobecnými μ, σ^2 a $z_0 \geq 0$, potom geometrický Brownov pohyb Z_t je stochastický proces tvaru:

$$Z_t = z_0 e^{B_t}.$$



Obr. 2.1: Ukážka náhodne vygenerovaného geometrického Brownovho pohybu a akciový index S&P500.

Pre prácu s funkciami, ktorých aspoň jedna premenná je náhodnou premennou riadiacou sa stochastickou diferenciálnou rovnicou, je potrebný odlišný matematický aparát ako pre funkcie deterministických premenných. Špeciálne počítanie diferenciálu týchto funkcií nám umožní Itóova lema.

Lema 2.1.6 (Itóova lema). Nech $f(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R})$ a nech x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dW,$$

pričom W je Wienerov proces z (2.1.4), potom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt,$$

dosadením za dx a združením členov pri dt a dW dostávame

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dW.$$

Nasledovná veta nám umožní lepšie pracovať so strednými hodnotami náhodných premenných.

Veta 2.1.7 (Zákon iterovaných očakávaní). *Nech X je náhodná premenná na (Ω, \mathcal{F}, P) a jej stredná hodnota $E(|X|) < \infty$. Nech \mathcal{G}, \mathcal{H} sú také σ -algebry, čo splňajú*

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{F}.$$

Potom:

$$(i) E(E(X|\mathcal{H})) = E(X),$$

$$(ii) E(X|\mathcal{G}) = E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}).$$

2.2 Teória úrokových mier

V práci budem používať výhradne spojitú úročenú. To znamená, že ak ročný úrok na dobu $T - t$ rokov (kde t je dnešný čas, a T čas splatnosti) označíme ako $r(t, T)$, tak po vložení jednej penaznej jednotky bude mať sporiteľ na konci sporiaceho obdobia o dĺžke $T - t$ rokov nasporené

$$1 \cdot e^{r(t, T)(T-t)}.$$

Keďže sa ale úroky na rôzne obdobia líšia, potrebujeme efektívne pracovať s celou paletou rôznych úrokových mier. Táto „paleta“ sa nazýva *časová štruktúra úrokových mier* a predstavuje krivku, ktorej hodnoty získavame z trhových cien dlhopisov.

2.2.1 Časová štruktúra úrokových mier

Presnejšie, ak označíme $P(t_0, T)$ cenu dlhopisu v čase $t = t_0$, splatného v čase T , s nominálnou hodnotou F , ročným kupónom C a frekvenciou výplaty týchto kupónov dĺžky δ -roka tak pre cenu dlhopisu platí vzťah

$$P(t_0, T) = \sum_{i=1}^n C e^{-r(t_0, t_0+i\delta)(i\delta)} + F e^{-r(t_0, T)(T-t_0)}, \quad n = \frac{T - t_0}{\delta}, \quad (2.1)$$

z čoho následne pre bezkupónové dlhopisy ($C = 0$) s nominálnou hodnotou $F = 1$ dostávame¹ časovú štruktúru úrokových mier v čase t_0 , vyjadrujúcu ročný úrok za využitie peňazí na dané obdobie $T - t_0$

$$r(t_0, T) = -\frac{\ln P(t_0, T)}{T - t_0}. \quad (2.2)$$

¹Časovú štruktúru úrokových mier možno počítať aj pre inú nominálnu hodnotu cez vzťah $r(t_0, T) = -\frac{\ln \frac{P(t_0, T)}{F}}{T - t_0}$, a aj pre kupónové dlhopisy, vyjadrením z (2.1). Tiež je dôležité pre akú oblasť, resp. aký štát počítame úrokové miery, a z akých dlhopisov - vládne alebo iné, rating dlhopisov a pod.

V praxi sa časová štruktúra úrokových mier získava najmä z trhových cien vládnych dlhopisov.² Keďže vládne dlhopisy sú emitované nepravidelne a pre rôzne splatnosti, nepoznáme explicitne pre každú hodnotu splatnosti $T - t_0$ prislúchajúci úrok. Zaužívané sú preto rozličné techniky odhadu časovej štruktúry úrokových mier, napr. *bootstrap*, pričom na získanie úroku k splatnostiam ku ktorým nám chýbajú trhové dáta sa používa napr. interpolácia. Viac sa možno dozvedieť v [15].

2.2.2 Krátkodobá úroková miera

Východiskom pre modelovanie úrokovej miery ako stochastického procesu je pojem *krátkodobej (okamžitej) úrokovej miery*. Tá predstavuje úrokovú mieru, ktorou sú úročené pôžičky na veľmi krátke obdobie, matematicky limitne idúce k nule.

V praxi pod krátkodobu úrokovou mierou rozumieme napr. v Európe medzibankovú sadzbu za ktorú si banky požičiavajú a ukladajú prostriedky „cez noc“, t.j. na dobu 24 hodín, tzv. *EONIA (European Overnight Index Average)*. EONIA sa denne zverejňuje³ a počíta na základe priemeru sadzieb, ktoré hlásia jednotlivé bankové inštitúcie Európskej centrálnej banke.

Matematické zavedenie pojmu krátkodobej úrokovej miery je nasledovné (citácia z [8]):

Definícia 2.2.1 (Krátkodobá úroková miera). *Krátkodobá úroková miera (short rate) predstavuje začiatok krivky časovej štruktúry úrokových mier $r_t = r(t, t)$. Na základe (2.2), ak sa posunieme o veľmi krátky čas Δt , dostaneme*

$$r(t, t + \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} \ln P(t, t + \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} [\ln P(t, t + \Delta t) - \ln P(t, t)],$$

pričom sme využili fakt, že $P(t, t) = 1 \Rightarrow \ln P(t, t) = 0$. Ak $\Delta t \rightarrow 0$, potom

$$r_t = r(t, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\ln P(t, t + \Delta t) - \ln P(t, t)}{\Delta t}.$$

Z definície derivácie funkcie vieme, že potom

$$r_t = r(t, t) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, t). \quad (2.3)$$

²Časová štruktúra úrokových mier z AAA vládnych dlhopisov eurozóny:
<http://www.ecb.europa.eu/stats/money/yc/html/index.en.html>,

výnosové krivky pre americké a iné vládne dlhopisy :

<http://www.bloomberg.com/markets/rates-bonds/government-bonds/us/>

³<http://www.euribor-rates.eu/eonia.asp>

2.2.3 Jednofaktorové modely krátkodobej úrokovej miery

V jednofaktorových modeloch sa predpokladá, že úroková miera je stochastický proces s jedným zdrojom náhodnosti, pričom sa riadi príslušnou stochastickou diferenciálnou rovnicou. Vo všeobecnosti je táto rovnica tvaru

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t, \quad (2.4)$$

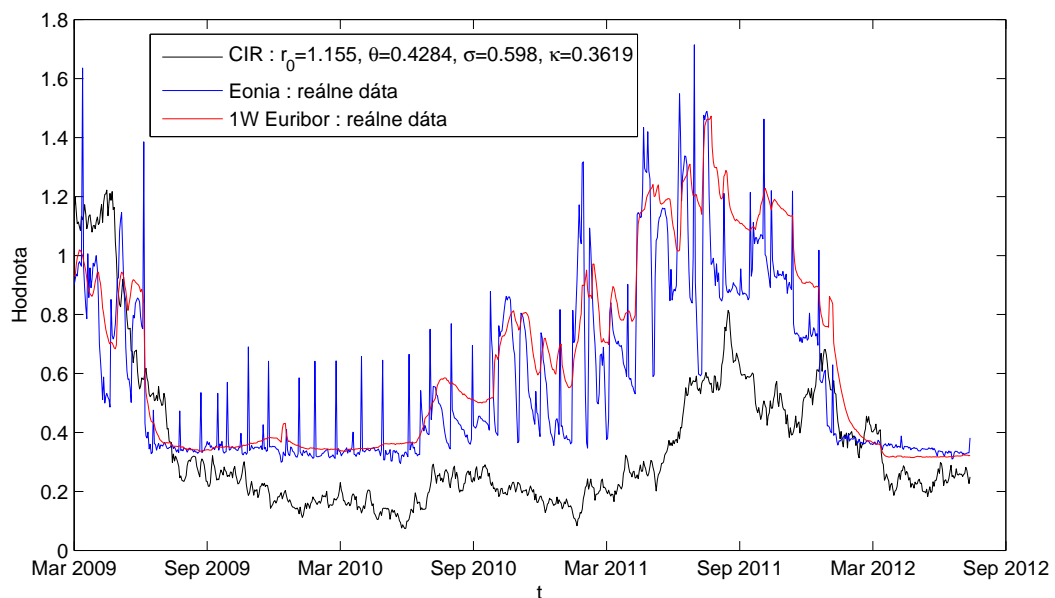
kde *drift* $\mu(t, r_t)$ a *volatilita* $\sigma(t, r_t)$ sú deterministické funkcie a W_t je Wienerov proces z (2.1.4).

Takto definovaný jednofaktorový model implikuje skutočnosť, že proces úrokovej miery r_t je *markovovský*, t.j. jeho hodnota v čase r_{t+1} závisí iba od hodnoty v čase r_t a nie od starších hodnôt.

Podmnožinou všeobecných markovovských jednofaktorových modelov okamžitej úrokovej miery je tzv. *Ornstein-Uhlenbeckov* stochastický proces, ktorý má drift tvaru

$$\mu(t, r_t) = \kappa(\theta - r_t), \quad \kappa, \theta > 0.$$

Ornstein-Uhlenbeckov proces má tiež prívlastok tzv. *mean reversion*, t.j. proces ktorého hodnoty dlhodobo oscilujú okolo rovnovážnej úrovne θ . Absolútna veľkosť týchto oscilácií závisí na volatilitate $\sigma(\cdot)$ a silu priťahovania procesu k hodnote θ udáva parameter κ .



Obr. 2.2: Ukážka náhodne vygenerovanej okamžitej úrokovej miery z diskretizovanej rovnice (2.5) pre $\gamma = \frac{1}{2}$ (CIR model), v grafe s Eoniou a týždňovým Euriborom.

Často využívanou triedou jednofaktorových modelov okamžitej úrokovej miery sú modely tvaru

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t, \quad \kappa, \theta, \sigma > 0, \quad (2.5)$$

ktorých špeciálnym prípadom sú v praktických aplikáciách vo veľkom používaný *Vašičkov model* ($\gamma = 0$) a *CIR model* ($\gamma = \frac{1}{2}$). Práve CIR model využívam v práci, pričom popísaný je v časti (3.1.3).

Hlavnou výhodou týchto modelov je, že pre ne poznáme rozdelenie okamžitej úrokovej miery v explicitnom tvare, vieme odhadnúť ich parametre metódou maximálnej vierohodnosti a vieme na ich základe oceňovať deriváty úrokovej miery (t.j. poznáme napr. cenu dlhopisov a teda i časovú štruktúru úrokových mier v explicitnom tvare). Podrobné odvodenia možno nájsť v [9].

2.3 Teória optimálneho riadenia

V práci riešim diskretnú úlohu stochastického optimálneho riadenia, pričom maximalizujem očakávanú hodnotu funkcie koncového stavu, v etapách zodpovedajúcich rokom sporenia na dôchodok. Ide teda o úlohu v tzv. *Mayerovom tvare*, jednorozmernú v riadení, dvojrozmernú v stavovej premennej, s ohraničeniami na riadenie, bez explicitných ohraničení na stavové premenné, s voľným koncom.

Pre lepšiu predstavu optimalizačnej úlohy už vopred uvediem, že budeme maximalizovať očakávanú užitočnosť z majetku nasporeného pri odchode na dôchodok. Stavovými premennými budú hodnota naakumulovaných úspor (d_t) a hodnota okamžitej úrokovej miery (r_t). Riadiacou premennou bude podiel úspor uložených v rizikovom (δ_t), resp. garantovanom fonde ($1 - \delta_t$). Stochastický charakter bude mať výnos ako rizikového fondu, tak aj garantovaného fondu.

Vo všeobecnosti (presný tvar úlohy je odvodený v časti (3.2)) bude teda riešená úloha tvaru

$$\max_{\mathcal{V} \in \mathcal{S}} E[\varphi(d_T)] \quad (2.6)$$

$$d_{t+1} = f_t(d_t, r_t, x_t, y_t, \mathcal{P}_t, \delta_t(d_t, r_t)), \quad (2.7)$$

$$r_{t+1} = g_t(d_t, r_t, x_t, y_t, \mathcal{P}_t, \delta_t(d_t, r_t)), \quad (2.8)$$

$$r_0 = \bar{r}_0, \quad (2.9)$$

$$d_0 = \bar{d}_0, \quad (2.10)$$

$$d_t, r_t \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

$$\delta_t \in M_t, \quad (2.12)$$

$$t = 0, 1, \dots, T-1$$

φ, f_t, g_t	- zatiaľ bližšie neurčené funkcie,
$x_t \in X, y_t \in Y$	- zatiaľ bližšie neurčené náhodné premenné, postupnosti ich realizácií $\mathcal{X} = \{x_0, \dots, x_{T-1}\}, \mathcal{Y} = \{y_0, \dots, y_{T-1}\}$,
\mathcal{P}_t	- deterministické parametre, $\mathcal{P}_t = \{\tau_t, \beta_t, \mu_t^s, \sigma_t^s\}$,
d_0, r_0	- deterministická počiatočná hodnota majetku, resp. úroku,
\mathcal{V}	- $\mathcal{V} = \{\delta_0(\cdot), \dots, \delta_{T-1}(\cdot)\}$, stratégia, t.j. postupnosť spätných väzieb $\delta_t(\cdot) = \delta_t(d_t, r_t)$,
\mathcal{S}	- trieda všetkých prípustných stratégií, t.j. tých čo spĺňajú (2.12),
M_t	- množina prípustných $\delta_t(\cdot)$, $M_t = [0, \Delta_t]$, $\Delta_t \in [0, 1]$.

Ide o úlohu diskkrétnej dynamickej stochastickej optimalizácie, pri ktorej v každom časovom okamihu berieme do úvahy všetku dostupnú informáciu do daného času. Úloha toho istého tvaru je riešená i v [11], zhrniem preto iba výsledky najpodstatnejšie pre ďalší postup.

Na vyriešenie úlohy spomínaného typu využijeme *rovniciu dynamického programovania*. K tomu je potrebné zaviesť pojem *hodnotovej funkcie* a vysloviť niekoľko predpokladov. Dôkladné teoretické odvodenie je možné nájsť vo vyššie spomínanej literatúre.

Základnú úlohu značím ako \mathcal{D}_0 , podúlohu riešenú na časovom úseku $[j, T-1]$ analogicky \mathcal{D}_j , celý systém úloh ako $\mathcal{D}_{(\cdot)}$. Presná definícia podúlohy ako i ďalších pojmov potrebných k vybudovaniu teórie pre všeobecnejší prípad je v [11].

Predpokladajme teda voľný koncový stav, úlohu bez stavových ohraničení (t.j. každé riadenie $\delta_t \in M_t$ je prípustné a ich ľubovoľná postupnosť tvorí prípustnú stratégiu), diskkrétne náhodné premenné (X, Y sú konečné alebo spočítateľné) a predpokladajme, že pre každú podúlohu \mathcal{D}_j existuje príslušná optimálna stratégia $\hat{\mathcal{V}}_j$, t.j.:

$$\max_{\mathcal{V}_j} E_{[j, T-1]} \{ \varphi(d_T) | r_j = r, d_j = d, \mathcal{X}_j, \mathcal{Y}_j, \mathcal{V}_j \} = E_{[j, T-1]} \left\{ \varphi(d_T) | r_j = r, d_j = d, \mathcal{X}_j, \mathcal{Y}_j, \hat{\mathcal{V}}_j \right\}.$$

Potom na základe literatúry [11] možno zdefinovať *hodnotovú funkciu* nasledovne:

Definícia 2.3.1 (Hodnotová funkcia). *Pre každé $j \in [0, T-1]$ je $V_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ hodnotovou funkciou pre úlohu \mathcal{D}_j a postupnosť funkcií $V = \{V_0, \dots, V_{T-1}\}$ hodnotovou funkciou pre systém úloh $\mathcal{D}_{(\cdot)}$, ak*

$$V_j(d, r) = \begin{cases} \max_{\mathcal{V}_j} E_{[j, T-1]} \{ \varphi(d_T) | r_j = r, d_j = d, \mathcal{X}_j, \mathcal{Y}_j, \mathcal{V}_j \} & , \text{ pre } j \in [0, T-1] \\ \varphi(d_T) & , \text{ pre } j = T \end{cases} \quad (2.13)$$

Opäť na základe [11] platí tzv. *rovnica dynamického programovania*, a to v nasledovnej podobe:

Veta 2.3.2 (Rovnica dynamického programovania). *Nech sú splnené horeuvedené predpoklady, pričom uvažujeme úlohu (2.6)-(2.12). Ak pre $\forall j = 0, \dots, T-1$ a pre $\forall d, r \in \mathbb{R}$ funkcie*

$\hat{\delta}_j$, V_j splňajú rovnicu dynamického programovania

$$\begin{aligned} V_j(d, r) &= \max_{\delta \in M_j} E_{[j,j]} [V_{j+1}(f_j(d, r, x_j, y_j, \delta, \mathcal{P}_j), g_j(d, r, x_j, y_j, \delta, \mathcal{P}_j))] = \\ &= E_{[j,j]} \left[V_{j+1} \left(f_j(d, r, x_j, y_j, \hat{\delta}_j(d, r), \mathcal{P}_j), g_j(d, r, x_j, y_j, \hat{\delta}_j(d, r), \mathcal{P}_j) \right) \right], \\ V_T(d) &= \varphi(d_T), \forall d \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

potom $V = \{V_0, \dots, V_{T-1}\}$ je hodnotová funkcia a $\hat{V}_j = \{\hat{\delta}_0, \dots, \hat{\delta}_{T-1}\}$ je optimálna stratégia.

Poznámka: Keďže v našej úlohe budú mať premenné d (majetok) a r (úrok), ako aj náhodné premenné x, y kontinuálny charakter, zavedieme diskretizáciu týchto premenných a úlohu budeme riešiť numericky. Dostaneme teda len približné riešenie danej úlohy, ktoré sa však pri dostatočne hustej diskretizačnej sieti spresňuje.

Kvôli diskretizáciám nám tiež síce vzniknú dodatočné ohraničenia na stavové premenné v podobe okrajových častí diskretizačnej siete, tieto ohraničenia ale zvolíme tak, aby neovplyvnili riešenie danej úlohy. Konkrétne za horné ohraničenia zvolíme dostatočne veľké konštanty, a ako neskôr uvidíme, dolnými ohraničeniami implicitne zahrnutými v modeli budú nulové hodnoty majetku, resp. úroku, na základe prirodzenej logiky ako aj výstavby modelu.

Posledným problémom spôsobeným diskretizáciou je počítanie hodnotovej funkcie V_j za pomoci V_{j+1} v takom bode, ktorý nie je súčasťou diskretizačnej siete. S týmto problémom sa vysporiadame využitím interpolácie.

2.4 Funkcie užitočnosti

Definícia 2.4.1 (Funkcia užitočnosti). Funkcia $U(x)$ majetku x je funkciou užitočnosti ak

- (i) je spojitá, t.j. $U(x) \in C^0$,
- (ii) je kvázikonkávna, t.j. $\{x | U(x) \geq k\}$ sú konvexné $\forall k \in \mathbb{R}$,
- (iii) je monotónna, t.j. $U(x) \geq U(y)$, $x \geq y$, resp. ostro monotónna, ak $U(x) > U(y)$, $x > y$.

Pre rizikovo averzného investora je funkcia užitočnosti nielen kvázikonkávna, ale aj konkávna, resp. rýdzo-konkávna a ostro monotónna. Ďalej budem uvažovať výhradne funkcie užitočnosti s týmito vlastnosťami.

Funkcia užitočnosti sa využíva primárne v súvislosti s optimalizačnými úlohami, v ktorých maximalizujeme funkciu užitočnosti z majetku, resp. za prítomnosti stochastických javov jej očakávanú hodnotu. Voľne povedané, zaujímať nás bude stratégia δ , pre ktorú bude očakávaná hodnota funkcie užitočnosti (zohľadňujúca rizikovú averziu investora) maximálna.

Na základe vlastnosti, že ľubovoľná rastúca transformácia (zloženie $h \circ U$) funkcie užitočnosti zachováva preferencie (pozri [12]) možno ďalej využívať fakt, že voľba

optimálnej stratégie (argument maxima) nezávisí od afinných transformácií funkcie:

$$\arg \max_{\delta} \{A \cdot U(x) + B\} = \arg \max_{\delta} \{U(x)\}, \quad A > 0, B \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Definícia 2.4.2 (Arrow-Prattov koeficient averzie k riziku). *Absolútny ($\bar{a}(x)$) a relatívny ($a(x)$) Arrow-Prattov koeficient averzie k riziku sú definované ako*

$$\bar{a}(x) = -\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} / \frac{\partial U(x)}{\partial x}, \quad a(x) = -x \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} / \frac{\partial U(x)}{\partial x}.$$

Významnou a často využívanou triedou funkcií užitočnosti sú tzv. CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*) funkcie, nazývané aj *izoelastické* funkcie užitočnosti. Medzi ich najpodstatnejšie vlastnosti patrí konštantý Arrow-Prattov relatívny koeficient averzie k riziku. Táto vlastnosť implikuje fakt, že sporiteľ s CRRA funkciou užitočnosti drží počas investičného horizontu konštantý pomer svojho majetku v rizikovom aktíve (fonde), nezávisle od veľkosti tohto majetku.

Tvar CRRA funkcií užitočnosti je nasledovný (uvádzaný bez multiplikatívnych a aditívnych konštánt, na základe (2.14) irelevantných pre maximalizáciu očakávanej užitočnosti) :

$$U(x) = \begin{cases} -x^{1-a} & , \text{ pre } a > 1 \\ \ln x & , \text{ pre } a = 1 \\ x^{1-a} & , \text{ pre } a < 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

CRRA funkcia užitočnosti je tiež invariantná (v zmysle maximalizácie očakávanej užitočnosti) voči peňažným jednotkám, t.j. škálovaniu, čo možno opäť overiť na základe úvahy podobnej (2.14). Uvediem časť pre $a > 1$ a škálovanie konštantou $A > 0$:

$$\max_{\delta} \{U(A \cdot x)\} = \max_{\delta} \{-(A \cdot x)^{1-a}\} = A^{1-a} \cdot \max_{\delta} \{-(x)^{1-a}\} = A^{1-a} \cdot \max_{\delta} \{U(x)\}, \text{ t.j.,}$$

$$\arg \max_{\delta} \{U(A \cdot x)\} = \arg \max_{\delta} \{U(x)\}.$$

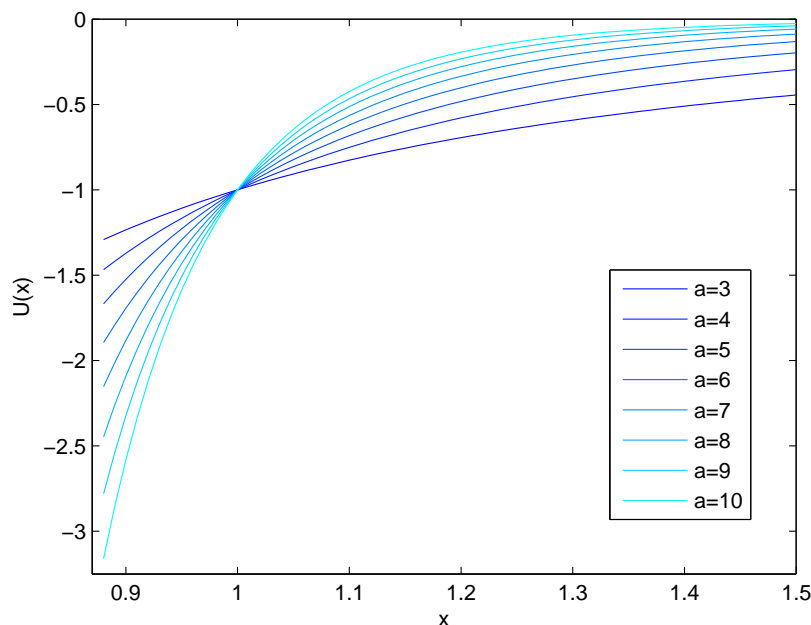
V práci budem používať výlučne CRRA funkciu užitočnosti tvaru

$$U(x) = -x^{1-a}, \quad a > 1. \quad (2.16)$$

Za posledné desiatky rokov sa mnohé štúdie zaoberali vhodnou voľbou funkcie užitočnosti (napr. [16]). Jedným z prvých, ktorý odporučil vo všeobecnosti využívať práve CRRA funkcie bol *Arrow*, v knihe [17], v ktorej sumarizoval dovtedajší výskum z tejto oblasti. Dôvodom voľby funkcie užitočnosti tohto tvaru v mojej práci je (okrem Arrowovej práce) i narastajúci konsenzus v nedávnej literatúre (napr. [18]), poukazujúci na štatisticky zanedbateľné rozdiely v Arrow-Prattovom relatívnom koeficiente averzie k riziku vzhľadom k rôznym hodnotám majetku.

Ďalšou významnou časťou pri práci s CRRA funkciou užitočnosti je voľba parametra rizikovej averzie „ a “, resp. voľba rozsahu parametrov, pre ktoré budeme úlohu alo-

kácie prostriedkov do dôchodkových fondov skúmať. Publikovaných bolo opäť niekoľko štúdií zaoberajúcich sa odhadmi tohto koeficientu, pričom v mnohých sa blížil k hodnote 1, značiacej nízku rizikovú averziu investora. Naopak, viaceré iné články naznačovali i oveľa vyššie hodnoty, v zásade bola teda variácia takto získaných odhadov pomerne vysoká.



Obr. 2.3: CRRA funkcia užitočnosti tvaru (2.16) pre rôzne parametre averzie k riziku.

Keďže sme ale presvedčení, že pokiaľ uvažujeme sporiteľa na dôchodok, ide jednoznačne o rizikovo averzného investora (t.j. $a \gg 1$), na základe [19], článku zhŕňajúceho štúdie neodporúčajúce v praktických aplikáciách používať hodnotu koeficientu vyššiu ako 10, sa budeme zaoberať iba koeficientmi z rozsahu $a \in [3, 12]$, t.j. prekračujúc hodnotu 10 iba marginálne. Alternatívne je samozrejme možné odhadnúť koeficient i manuálne z vlastných dát, viac sa dá dočítať v [14] a konkrétne výsledky z Dánska sú uvedené v [20]. Na Obr. (2.3) je znázornená v práci používaná CRRA funkcia užitočnosti pre rozličné hodnoty koeficientu averzie k riziku, a .

Kapitola 3

Dynamický stochastický model sporenia

Jadrom mojej práce je dynamický stochastický akumulčný model sporenia predstavený v [1]. Model popisuje dynamiku sporenia na dôchodok v druhom pilieri, t.j. modeluje tú časť úspor, ktorá podlieha vývoju finančných trhov.

Model dokáže zohľadniť (krátkodobo) náhodný charakter vývoja akciových trhov i úrokovej miery, ich koreláciu, v čase rozličný (dlhodobý) trend vo vývoji spomínaných veličín, aj v čase nekonštantnú volatilitu oboch premenných. Ďalej v sebe zakomponováva v čase rozličný rast nominálnych miezd (v diskretných časoch), pričom je možné ho rozšíriť o ich stochastický charakter alebo jednoduchšie o rast miezd v spojitých časoch. Berie tiež do úvahy rizikovú averziu sporiteľ'a prostredníctvom funkcie užitočnosti, ktorú je možné nakalibrovať pre každého investora individuálne. Použitelný je v prípade legislatívy umožňujúcej investovanie do dvoch fondov súčasne ako aj iba do jedného.

3.1 Predpoklady

Pri modelovaní sporenia na dôchodok budeme predpokladať existenciu 2 fondov - *negarantovaného* (akciového, rizikového) a *garantovaného* (dlhopisového, nízko rizikového). Rizikový fond budem aproximovať ako čisto akciový fond (scenáre jeho vývoja budem okrem iného vytvárať aj na základe historického vývoja amerického akciového indexu *S&P 500*) a garantovaný fond ako čisto dlhopisový fond¹ držiaci 3-ročné² (splatnosť 3 roky) bezkupónové dlhopisy (čo je približne ekvivalentné v praxi predpokladanému udržiavaniu durácie 3 v dlhopisových fondoch).

¹V prípade, ak je charakter reálnych fondov na trhu veľmi vzdialený od tejto aproximácie, je možné vybrať si taký fond, resp. kombináciu fondov, ktorá sa výnosovým a rizikovým profilom najviac približuje vypočítanému optimálnemu rozloženiu úspor v aproximačných fondoch.

²Model odvodený v ďalšej časti umožňuje rovnako využiť aj bezkupónové dlhopisy s inou splatnosťou, jediným obmedzením je predpoklad držby dlhopisového portfólia s tou istou splatnosťou všetkých dlhopisov.

Ďalej predpokladáme, že v týchto fondoch má sporiteľ možnosť sporiť si na dôchodok po dobu 40 rokov.³ Rebalancovať svoje dôchodkové portfólio, t.j. meniť pomer úspor uložených v rizikovom ($\delta \in [0, 1]$) a v garantovanom fonde ($1 - \delta$), môže v diskrétnych časových okamihoch, vždy na začiatku roka. Zaujímať nás preto budú práve ročné charakteristiky (výnos a riziko) fondov a sporenie budeme sledovať v ročných intervaloch.

Rozloženie úspor do dôchodkových fondov podlieha zákonným obmedzeniam (napr. tesne pred odchodom na dôchodok je možné sporiť si iba v garantovanom fonde, viac v časti (1.1)). Toto obmedzenie na časť úspor v rizikovom fonde môže byť v čase premenlivé, značiť ho budem Δ_t , a teda $\delta_t \in [0, \Delta_t]$.

Predpokladať budeme tiež, že výnosy rizikového fondu sú náhodné a v čase od seba nezávislé, pričom sú ale korelované s výnosmi dlhopisového fondu. Výnosy dlhopisového fondu už budú od seba v čase závislé, avšak len markovovsky. Tieto vlastnosti budú zrejme z mnou používaných modelov. Predpokladáme deterministické, v čase nekonštantné parametre driftu (trendu) a volatility (rizika) pre akciový fond a konštantné parametre driftu a volatility pre dlhopisový fond.

Nakoľko v 2. pilieri ide o príspevkovo definované sporenie, predpokladáme, že každoročne sporiteľ odvádza do sporiacej schémy danú, vopred známu časť (τ_t) zo svojej ročnej nominálnej mzdy (w_t). Predpokladáme deterministickú valorizáciu mzdy (o $\beta_t\%$) v diskrétnych, ročných časoch.

3.1.1 Model sporenia

Dosiaľ naakumulovaný majetok do času t vrátane značíme s_t . Po 1. roku má sporiteľ na konte iba vložené príspevky ($s_1 = \tau_1 w_1$). Následne sa majetok každý ďalší rok zhodnotí na základe zvoleného rozloženia úspor pre časť v rizikovom fonde spojitým ročným výnosom $r_{(t,t+1)}^s$ a pre časť v dlhopisovom fonde spojitým ročným výnosom $r_{(t,t+1)}^b$, pričom v oboch prípadoch ide o stochastické (náhodné) výnosy. Dostávame tak pre $t = 1, \dots, T - 1$ rekurentnú rovnicu

$$\begin{aligned} s_1 &= \tau_1 w_1 \\ s_{t+1} &= s_t \left(\delta e^{r_{(t,t+1)}^s} + (1 - \delta) e^{r_{(t,t+1)}^b} \right) + \tau_{t+1} w_{t+1}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Keď vezmeme do úvahy, že absolútne výšky dôchodkov, ako aj miezd, z roka na rok kvôli inflácii (spravidla) rastú, opodstatnené je merať veľkosť nasporeného majetku nie v absolútnych hodnotách, ale v relatívnych oproti priemernej mzde v hospodárstve. Inak povedané, pre dôchodcu je podstatné nasporiť si čo najvyššiu čiastku nie ani tak absolútne ale skôr v pomere k predošlej mzde, v zmysle udržania si svojho dovtedajšieho životného štandardu. Z tohto dôvodu je do modelu zavedená relatívna jednotka $d_t = \frac{s_t}{w_t}$. Nasporený majetok teda budeme chápať ako počet ročných miezd a

³Model je opäť ľahko možné prispôsobiť aj inému horizontu sporenia.

rovnica (3.1) nadobudne tvar

$$\begin{aligned} d_1 &= \tau_1 \\ d_{t+1} &= \frac{s_t}{w_{t+1}} \left(\delta e^{r^s(t,t+1)} + (1-\delta) e^{r^b(t,t+1)} \right) + \tau_{t+1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Berúc do úvahy, že rast miezd je známy (získaný napr. z makroekonomickej predikcie), $w_{t+1} = (1 + \beta_t)w_t$, vieme (3.2) preformulovať na diferenčnú rovnicu

$$\begin{aligned} d_1 &= \tau_1 \\ d_{t+1} &= d_t \frac{\delta e^{r^s(t,t+1)} + (1-\delta) e^{r^b(t,t+1)}}{1+\beta_t} + \tau_{t+1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dosiaľ boli ročné výnosy rizikového fondu ($r^s_{(t,t+1)}$) a dlhopisového fondu ($r^b_{(t,t+1)}$) formulované len nekonkrétne. Na ich presnú formuláciu využijeme poznatky z kapitoly (2.1) a (2.2) o stochastických procesoch, resp. úrokových mierach.

3.1.2 Modelovanie výnosov akcií

Predpokladáme, že aktíva v rizikovom fonde sa ako celok riadia geometrickým Brownovým pohybom. T.j. predpokladáme, že pre cenu, resp. hodnotu (S_t) akciového fondu v ročných časových okamihoch $t = 1, \dots, T$ platí

$$S_t = S_0 e^{\mu^s t + \sigma^s W_t}, \quad (3.4)$$

kde W_t je Wienerov proces a μ^s, σ^s parametre driftu a volatility. Z (3.4) využitím (2.1.3) môžeme nahliadnuť, že logaritmický výnos takto definovaného akciového fondu je normálne rozdelený

$$\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = \mu^s + \sigma^s (W_t - W_{t-1}) = r^s_{(t-1,t)} \sim \mathcal{N}(\mu^s, (\sigma^s)^2), \quad (3.5)$$

čo môžeme po posunutí časového indexu prepísať do tvaru

$$r^s_{(t,t+1)} = \mu^s + \sigma^s \Psi, \quad \text{kde } \Psi \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.6)$$

Takto definovaný výnos je tiež konzistentný so štandardným výpočtom výnosu v tvare: $\tilde{r}^s_{(t-1,t)} = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 \approx \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = r^s_{(t-1,t)}$.

Ak uvažujeme v čase nekonštantné, no deterministické parametre driftu a volatility, dostávame obdobný výsledok. Ak využijeme, že $W_0 = 0$, tak vzťah (3.4) vieme prepísať ako $S_t = S_0 e^{\sum_{i=1}^t (\mu^s) + \sum_{i=1}^t \sigma^s (W_i - W_{i-1})}$, a teda pre v čase nekonštantné parametre dostávame

$$S_t = S_0 e^{\sum_{i=1}^t (\mu^s_{i-1}) + \sum_{i=1}^t \sigma^s_{i-1} (W_i - W_{i-1})}, \quad \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = \mu^s_{t-1} + \sigma^s_{t-1} (W_t - W_{t-1}), \quad (3.7)$$

$$r_{(t,t+1)}^s = \mu_t^s + \sigma_t^s \Psi, \quad \Psi \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.8)$$

Využitím Itóovej lemy, kde $f := S(W, t)$, $dW = 0dt + 1dW$, $\sigma(W, t) := 1$, dostaneme z (3.4) stochastickú diferenciálnu rovnicu vývoja akciového fondu

$$\begin{aligned} dS_t &= \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial W} dW_t + \frac{1}{2} 1^2 \frac{\partial^2 S}{\partial W^2} dt = \\ &= \mu^s S_t dt + \sigma^s S_t dW_t + \frac{1}{2} (\sigma^s)^2 S_t dt = \\ &= \left(\mu^s + \frac{1}{2} (\sigma^s)^2 \right) S_t dt + \sigma^s S_t dW_t. \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.1.3 Modelovanie výnosov dlhopisov

Výnosy dlhopisového fondu budeme modelovať prostredníctvom mean reversion modelu okamžitej úrokovej miery (pozri časť (2.2.3)) odvodeného v roku 1985 Coxom, Ingersollom a Rossom v [10], v skratke CIR modelu. Okamžitá úroková miera sa v ňom riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad \kappa, \theta, \sigma > 0, \quad (3.10)$$

kde κ (rýchlosť prít'ahovania k rovnovážnej hodnote), θ (dlhodobá rovnovážna hodnota) a σ (volatilita) môžu byť aj závislé od času.

Dôležitou vlastnosťou CIR modelu je kladnosť úrokovej miery, pokiaľ je splnené $\theta \geq \frac{1}{2}\sigma^2$. Ďalej tiež vieme nájsť explicitné podmienené rozdelenie krátkodobej úrokovej miery $r_t | r_0 \sim c(t)\chi'_{(\cdot)}^2(\cdot)$ (necentrálne chí-kvadrát rozdelenie), resp. limitné rozdelenie pre $t \rightarrow \infty$, $r_\infty \sim c\chi_{(\cdot)}^2(\cdot)$, ktoré nebudem uvádzať detailne, nakoľko ho nebudem využívať.

Pre ďalšie výpočty potrebujeme najmä rovnicu pre ročný výnos dlhopisového fondu ($r_{(t,t+1)}^b$), reprezentovaného 3-ročnými bezkupónovými dlhopismi. Tú získame v explicitnom tvare, pokiaľ budeme poznať vzťah pre výpočet cien dlhopisov $P(t, T)$ v modeli, nasledovne (podobne ako pre akciový fond):

$$r_{(t,t+1)}^b = \ln \left(\frac{P(t+1, T)}{P(t, T)} \right) = \ln P(t+1, T) - \ln P(t, T). \quad (3.11)$$

Na základe [10] je cenu dlhopisu v CIR modeli rovná

$$P(r, t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r}, \quad (3.12)$$

kde

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \left(\frac{2\gamma e^{\frac{(\kappa+\lambda+\gamma)(T-t)}{2}}}{(\kappa+\lambda+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}, \\ B(t, T) &= \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\kappa+\lambda+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}, \\ \gamma &= \sqrt{(\kappa+\lambda)^2 + 2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Vzorce je možné odvodiť využitím parciálnej diferenciálnej rovnice pre ceny dlhopisov, pričom parameter λ predstavuje *trhovú cenu rizika* (pozri napr. ([9])). Tiež je dôležité si uvedomiť, že členy A, B nezávisia od dvoch premenných ale v skutočnosti iba od času zostávajúceho do splatnosti. Ak označíme $\tau_b := T - t$, dostávame

$$P(r_t, \tau_b) = A(\tau_b)e^{-B(\tau_b)r_t}. \quad (3.14)$$

Teraz už vieme vyjadriť z (3.11) ročný (v čase t) výnos dlhopisového fondu (za čas $[t, t+1)$) ako

$$\begin{aligned} r_{(t,t+1)}^b &= \ln P(r_{t+1}, \tau_b - 1) - \ln P(r_t, \tau_b) = \\ &= r_t B(\tau_b) - \ln(A(\tau_b)) - r_{t+1} B(\tau_b - 1) + \ln(A(\tau_b - 1)). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ďalej využijeme diskretizáciu (uvádzanú napr. v [21] alebo [22]) stochastickej diferenciálnej rovnice pre CIR model (3.10) s časovým krokom 1 rok a dostávame tak okamžitú úrokovú mieru v čase $t+1$, t.j. o rok:

$$r_{t+1} = g(r_t, \Phi) = \theta + e^{-\kappa}(r_t - \theta) + \left(\sigma^b \sqrt{\frac{r_t}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa})} \right) \Phi; \quad \Phi \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.16)$$

Keď už poznáme vzťahy pre výnosy akciového fondu (3.6) a dlhopisového fondu (3.15, $\tau_b = 3$) definujeme i *koreláciu* týchto výnosov ako konštantu ρ . Platí teda

$$\begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right). \quad (3.17)$$

3.2 Transformácia na úlohu optimálneho riadenia

V tejto časti sformulujem úlohu o optimálnom rozložení úspor medzi dôchodkové fondy v 2. pilieri ako úlohu optimálneho riadenia. Cieľom sporiteľ'a je maximalizovať očakávanú užitočnosť z celkového nasporeného majetku v čase odchodu na dôchodok.

Ako som uviedol v predošlej časti, sporiteľ môže každoročne meniť pomer majetku investovaného v jednotlivých fondoch, pričom vždy pri tejto zmene pozná doterajší vývoj jednotlivých fondov (aproximovaných akciami, resp. 3-ročnými dlhopismi), ako aj veľkosť dosiaľ nasporeného majetku. Túto sporiteľ'ovu informáciu o

minulosti v čase $1 \leq t \leq T - 1$ označíme I_t .

Keďže rast miezd a parametre driftu a volatility pre obe triedy aktív predpokladáme ako deterministické, sú súčasťou každej z množín I_t a pre prehľadnosť ich nebudem označovať. Tiež ak si uvedomíme, že výnosy akciového fondu sú v čase vzájomne nezávislé, informácia o poslednom výnose nám o budúcnosti nič nehovorí.

Informačná množina I_t teda pozostáva z informácií $\{r_0, \dots, r_t\}$, $\{d_0, \dots, d_t\}$. Teraz ale môžeme zohľadniť markovovskú vlastnosť vývoja úrokových mier a fakt, že sporiteľ sa v používanom markovovskom modeli rozhoduje na základe aktuálnej výšky naakumulovaného majetku (a nie vývoja tohto majetku v minulosti). Dostaneme tak napokon $I_t = \{d_t, r_t\}$, t.j. rozhodnutie sporiteľa o rozložení úspor v čase t závisí iba od hodnôt d_t, r_t , čiže $\delta_t = \delta_t(d_t, r_t)$.

Teraz teda môžeme sformulovať úlohu dynamickej stochastickej optimalizácie v diskrétnych časoch, toho istého tvaru ako v (2.6)-(2.12):

$$\max_{\bar{\delta} \in \bar{\Delta}} E[U(d_T)] \quad (3.18)$$

$$d_{t+1} = F_t(d_t, r_t, \Phi, \Psi, \delta_t(d_t, r_t)) , \quad (3.19)$$

$$r_{t+1} = g(r_t, \Phi) , \quad (3.20)$$

$$r_1 = \bar{r}_1 , \quad (3.21)$$

$$d_1 = \tau_1 , \quad (3.22)$$

$$d_t, r_t \in \mathbb{R} , \quad (3.23)$$

$$\delta_t \in [0, \Delta_t] , \quad \Delta_t \in [0, 1] , \quad (3.24)$$

$$t = 1, 2, \dots, T - 1$$

$$F_t(d, r, x, y, \delta) = d \frac{\delta e^{\mu_t^s + \sigma_t^s y + (1-\delta)e^{rB(\tau_b) - \ln(A(\tau_b)) - g(r,x)B(\tau_b-1) + \ln(A(\tau_b-1))}}}{1 + \beta_t} + \tau_{t+1} ,$$

$$g(r, x) = \theta + e^{-\kappa}(r - \theta) + \left(\sigma^b \sqrt{\frac{r}{2\kappa}}(1 - e^{-2\kappa})\right) x ,$$

Φ, Ψ - náhodný vektor z (3.17), pričom realizácia zložky Φ tohto náhodného vektora je v danom čase rovnaká pre (3.19) a (3.20) ,

τ_t - veľkosť príspevkov, t.j. dané percento z ročnej nominálnej mzdy ,

\bar{r}_1 - daná počiatočná hodnota úroku ,

Δ_t - zákonom dané horné obmedzenie na podiel úspor v rizikovom fonde ,

$\bar{\delta}$ - stratégia, t.j. postupnosť spätných väzieb

$$\bar{\delta} = \{\delta_1(d_1, r_1), \dots, \delta_{T-1}(d_{T-1}, r_{T-1})\} ,$$

$\bar{\Delta}$ - trieda všetkých prípustných stratégií, t.j. tých čo spĺňajú (3.24) .

Úlohu ešte upravíme do tvaru, v ktorom možno na jej vyriešenie využiť rovnicu dynamického programovania. Na základe zákona iterovaných očakávaní platí

$$E[U(d_T)] = E[E[U(d_T)|d_t = d, r_t = r]] .$$

T.j. v (3.18) riešená maximalizácia $E[U(d_T)]$ je ekvivalentná maximalizácií výrazu $E[E[U(d_T)|d_t = d, r_t = r]]$, čo je ekvivalentné maximalizácií $E[U(d_T)|d_t = d, r_t = r]$. Teraz, ak označíme podobne⁴ ako v sekcii (2.3) $\bar{\delta}_t$ stratégie z podúlohy na časovom úseku $[t, T - 1]$ a ekvivalentne triedu takýchto prípustných stratégií ako $\bar{\Delta}_t$, môžeme definovať hodnotovú funkciu ako

$$V_t(d, r) = \begin{cases} \max_{\bar{\delta}_t \in \bar{\Delta}_t} E_{[t, T-1]} \{U(d_T) | r_t = r, d_t = d, \bar{\delta}_t\} & , \text{ pre } t \in [1, T - 1] \\ U(d) & , \text{ pre } t = T \end{cases} \quad (3.25)$$

Opätovným využitím zákona iterovaných očakávaní

$$E[U(d_T) | d_t = d, r_t = r] = E[E[U(d_T) | d_{t+1} = d, r_{t+1} = r] | d_t = d, r_t = r]$$

dostávame s využitím definície hodnotovej funkcie (3.25) a (3.19),(3.20) rovnicu dynamického programovania ako v (2.3.2) $\forall d, r \in \mathbb{R}$:

$$V_t(d, r) = \begin{cases} \max_{0 \leq \delta \leq \Delta_t} E \{V_{t+1}(F_t(d, r, \Phi, \Psi, \delta), g(r, \Phi))\} & , \text{ pre } t \in [1, T - 1] \\ U(d) & , \text{ pre } t = T \end{cases} \quad (3.26)$$

Strednú hodnotu v (3.26) vieme explicitne počítať, keďže poznáme rozdelenie náhodného vektora $(\Psi, \Phi)^T$ z (3.17). Funkcia hustoty tohto náhodného vektora parametrizovaná korelačným koeficientom premenných je daná ako

$$f_\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x^2-2\rho xy+y^2)}{2(1-\rho^2)}} , \quad (3.27)$$

teda (3.26) môžeme z definície strednej hodnoty písať ako

$$\max_{0 \leq \delta \leq \Delta_t} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} V_{t+1}(F_t(d, r, x, y, \delta), g(r, x)) f_\rho(x, y) dx dy \right\} , \quad (3.28)$$

a zjednodušiť zavedením substitúcie $\left| \xi = \frac{x-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}} , \quad \frac{dx}{\sqrt{1-\rho^2}} = d\xi , \quad x = \xi\sqrt{1-\rho^2} + \rho y \right|$ na

$$\max_{0 \leq \delta \leq \Delta_t} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} V_{t+1} \left(F_t(d, r, \xi\sqrt{1-\rho^2} + \rho y, y, \delta), g(r, \xi\sqrt{1-\rho^2} + \rho y) \right) f_0(\xi, y) d\xi dy \right\} . \quad (3.29)$$

⁴Pre prehľadnosť nebudeme značiť deterministické parametre (v sekcii (2.3) ako \mathcal{P}_t), ani postupnosti realizácií náhodných premenných Ψ, Φ do času t (v sekcii (2.3) ako $\mathcal{X}_t, \mathcal{Y}_t$).

3.3 Vlastnosti úlohy

3.3.1 Existencia a jednoznačnosť riešenia

Aby malo úlohu (3.26) vôbec zmysel riešiť, potrebujeme ukázať, že riešenie $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$, t.j. argument maxima úlohy (3.26) existuje, a že je určené jednoznačne. K tomu nám posluží nasledovné tvrdenie podrobne dokázané v [1].

Tvrdenie 3.3.1 (Existencia a jednoznačnosť riešenia). *Nech $d, r > 0$ a nech $U(d) \in C^2$, $U'(d) > 0$, $U''(d) < 0$, pre $d > 0$, potom $\forall t = 1, \dots, T$*

$$(i) \frac{\partial V_t(d_t, r_t)}{\partial d_t} > 0, \quad \frac{\partial^2 V_t(d_t, r_t)}{\partial d_t^2} < 0,$$

(ii) *argument maxima úlohy (3.26) existuje a je jednoznačne určený, ozn. $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$,*

(iii) *$V_t(d_t, r_t)$, $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ sú spojité v oboch premenných a navyše $V_t(d_t, r_t)$, $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ sú spojitě diferencovateľné v premennej d na ľubovoľnom ohraničenom intervale $(0, d_{max})$, až na konečný počet izolovaných bodov.*

Dôkaz: Pre náš model sa dôkaz nezmení, nakoľko zmena splatnosti dlhopisov oproti modelu z [1] neovplyvní postup uvedený v [1].

Zaujímavým pozorovaním je, že optimálne rozloženie úspor nezávisí od výšky príspevkov. Presnejšie, rozloženie úspor pri príspevkoch o výške $\vec{\tau} = \{\tau_1, \dots, \tau_T\}$ je totožné ako pre príspevky o výške $c\vec{\tau}$, kde $c > 0$. Je teda invariantné vzhľadom k percentuálnej zmene všetkých príspevkov, ale už nie k zmene časovej štruktúry týchto príspevkov.

Tvrdenie 3.3.2 (Nezávislosť riešenia od výšky príspevkov). *Riešenie úlohy (3.18)-(3.24), resp. (3.26) pre funkciu užitočnosti tvaru $U = -d^{1-a}$, $a > 1$ nezávisí od výšky príspevkov $\vec{\tau}$, v zmysle ich relatívnej zmeny. Navyše veličina d_t z (3.19) je lineárnou funkciou výšky príspevkov. Teda $\forall t = 1, \dots, T - 1$:*

$$\hat{\delta}_t(d_t, r_t, c\tau_t) = \hat{\delta}_t(d_t, r_t, \tau_t),$$

kde $c > 0$ je konštanta, a pre $\forall t = 1, \dots, T$, platí:

$$d_t(c\tau_t) = cd_t(\tau_t).$$

Dôkaz: Pre prvú časť je založený na fakte, že pre hodnotovú funkciu z (3.25) a uvedenú funkciu užitočnosti platí $V_t(cd, r, c\tau_t) = c^{1-a}V_t(d, r, \tau_t)$, $c > 0$, t.j. jej maximalizácia je invariantná vzhľadom k výške príspevkov. Využitá je spätná indukcia. Pre druhú časť je jednoducho využitý tvar (3.19) a dopredná indukcia. Myšlienka dôkazu oboch častí tvrdenia je uvedená v [23] a podrobne rozpísaný dôkaz (pre úlohu s v čase nezávislými normálne rozdelenými výnosmi dlhopisov i akcií a konštantnými príspevkami, pre ktorú sa ale v dôkaze nič nemení) je možno nájsť v [7].

3.3.2 Úloha bez budúcich príspevkov

Zaujímavé je tiež skúmať špeciálny prípad úlohy (3.18)-(3.24), v ktorej sú budúce príspevky nulové. Vklad sporiteľa je teda jediný, a to na začiatku horizontu sporenia. Úlohou je maximalizovať očakávanú užitočnosť zo zhodnoteného majetku na konci horizontu vhodným dynamickým prerozdelením majetku medzi rôzne fondy, t.j. investovaním. Touto úlohou sa už zaoberal Samuelson v [2] pre diskretný prípad i Merton v [24] pre spojitý prípad, pričom ich hlavným výsledkom bolo, že v prípade nulových budúcich príspevkov je podiel majetku v rizikovom a bezrizikovom aktíve nezávislý od času a od aktuálnej veľkosti majetku.

Je na mieste položiť si otázku, či aj pre našu úlohu (bez príspevkov) toto pozorovanie platí. Samuelson i Merton vychádzali z nasledovných predpokladov:

- (i) investor investuje a rebalancuje počas investičného horizontu iba počiatočný vklad, bez budúcich príspevkov,
- (ii) investovať je možné do bezrizikového aktíva s deterministickým výnosom alebo do rizikového aktíva, ktorého výnos je stochastický,
- (iii) pre výnosy rizikového aktíva platí, že sú *iid* (nezávislé, rovnako rozdelené),
- (iv) investor maximalizuje CRRA funkciu užitočnosti,
- (v) pri investovaní nevznikajú žiadne transakčné náklady.

Všetky predpoklady sú konzistentné s našou úlohou, avšak uvedení autori nezakomponovali do svojich modelov rast miezd závislý od času, ani v čase nekonštanté parametre driftu a volatility rizikového aktíva, a takisto ani stochastický charakter bezrizikového aktíva. Tým sa teda nezávislosť riešenia úlohy od času poruší, avšak intuitívne by sa nemala porušiť nezávislosť od veľkosti majetku. Nasledujúce tvrdenia ukážu, že je tomu naozaj tak.

Tvrdenie 3.3.3 (Tvar hodnotovej funkcie v prípade nulových príspevkov). *Ak v úlohe (3.26) položíme $\tau_t \equiv 0, t > 1$ t.j. ide o úlohu bez budúcich príspevkov, potom hodnotovú funkciu možno zapísať v tvare*

$$V_t(d_t, r_t) = L_t(r_t)U(d_t),$$

kde U je CRRA funkcia užitočnosti tvaru $U = -d^{1-a}$, pričom $a > 1$ je daná konštanta.

Dôkaz: (Spätnou indukciou $t = T, T - 1, \dots, 1$). Pre $t = T$ vieme z definície hodnotovej funkcie, že

$$V_T(d_T, r_T) = U(d_T).$$

Z tvrdenia máme

$$V_T(d_T, r_T) = L_T(r_T)U(d_T).$$

Ak položíme $L_T(r_T) \equiv 1$, tak prvý krok indukcie je splnený.

Ďalej nech platí indukčný predpoklad $V_{t+1}(d_{t+1}, r_{t+1}) = L_{t+1}(r_{t+1})U(d_{t+1})$. Z tvaru funkcie F_t pre nulové príspevky, z definície hodnotovej funkcie a z indukčného predpokladu dostávame

$$\begin{aligned}
V_t(d_t, r_t) &= \max_{0 \leq \delta_t \leq \Delta_t} E [V_{t+1}(F_t(d_t, r_t, \Phi, \Psi, \delta_t), g(r_t, \Phi))] = \\
&= \max_{0 \leq \delta_t \leq \Delta_t} E [L_{t+1}(g(r_t, \Phi))U(F_t(d_t, r_t, \Phi, \Psi, \delta_t))] = \\
&= \max_{0 \leq \delta_t \leq \Delta_t} E \left[L_{t+1}(g(r_t, \Phi))U \left(d_t \frac{\delta_t e^{\xi_t} + (1 - \delta_t)e^{\eta_t}}{1 + \beta_t} \right) \right] = \\
&= -d_t^{1-a} \min_{0 \leq \delta_t \leq \Delta_t} E \left[L_{t+1}(g(r_t, \Phi)) \left(\frac{\delta_t e^{\xi_t} + (1 - \delta_t)e^{\eta_t}}{1 + \beta_t} \right)^{1-a} \right] = \\
&= U(d_t)L_t(r_t),
\end{aligned}$$

pričom sme označili:

$$\begin{aligned}
\xi_t &:= \mu_t^s + \sigma_t^s y, \\
\eta_t &:= B(\tau_B)r_t - \ln A(\tau_B) - g(r_t, \Phi)B(\tau_B - 1) + \ln A(\tau_B - 1), \\
L_t(r_t) &:= \min_{0 \leq \delta_t \leq \Delta_t} E \left[L_{t+1}(g(r_t, \Phi)) \left(\frac{\delta_t e^{\xi_t} + (1 - \delta_t)e^{\eta_t}}{1 + \beta_t} \right)^{1-a} \right].
\end{aligned}$$

□

Dôsledok 3.3.1 (Riešenie úlohy v prípade nulových príspevkov). *Ak v úlohe (3.18)-(3.24), resp. (3.26) položíme $\tau_t \equiv 0, t > 1$ t.j. ide o úlohu bez budúcich príspevkov, a U je tvaru $U = -d^{1-a}$, $a > 1$ potom*

$$\hat{\delta}_t(d_t, r_t) = \hat{\delta}_t(r_t),$$

teda riešenie nezávisí od aktuálnej výšky naakumulovaného majetku.

Dôkaz: Vyplýva z predchádzajúceho dôkazu, konkrétne predposledného vzťahu, z ktorého vidno, že argument minima nezávisí od d_t . □

Ukázali sme teda, že v úlohe bez príspevkov nezávisí zloženie portfólia sporeteľa od veľkosti majetku. Z toho vyplýva, že v prípade ak veľkosť majetku d_t je „veľká“ relatívne voči výške príspevkov (t.j. príspevky sú takmer zanedbateľné), tak optimálny podiel rizikového fondu v portfóliu $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ „takmer“ nezávisí od výšky majetku. Teda ak fixujeme $r_t \equiv \bar{r}$, pre vysoké hodnoty d_t možno aproximovať hodnotu rozhodovacej funkcie $\hat{\delta}_t(\cdot)$ konštantou $\hat{\delta}_t(d_t, \bar{r}) \approx \bar{\delta}$. Toto zjednodušenie neskôr spozorujeme i vo výsledkoch, keď sa (v prípade rezu s konštantným úrokom r_t) riešenie $\hat{\delta}_t(\cdot)$ ustáli pre veľké hodnoty d na konštantnej hodnote.

Rovnaký výsledok, t.j. konštantný optimálny pomer rizikového fondu (resp. akcií) a garantovaného fondu (resp. dlhopisov) v portfóliu v prípade nulových príspevkov, sa podarilo odvodiť aj autorom v [5]. V spomínanej práci bola analyzovaná nelineárna parabolická parciálna diferenciálna *Hamilton-Jacobi-Bellmanova rovnica*, ktorá vzišla zo spojitého dynamického stochastického akumuláčného modelu.

Okrem rozdielu v spojitaj a diskkrétnej verzii sa uvedený článok líšil aj predpokladom normálneho rozdelenia výnosov jednotlivých fondov. Fondy sa v článku diferencujú na základe percentuálneho zastúpenia akcií a dlhopisov, presnejšie, podielu akcií (δ) a dlhopisov ($1 - \delta$), pričom pre ich výnos platí $r_t(\delta) \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}_t, \tilde{\sigma}_t^2)$, kde $\tilde{\mu}_t := \delta\mu_t^s + (1 - \delta)\mu_t^b$, $\tilde{\sigma}_t^2 := \delta^2(\sigma_t^s)^2 + 2\delta(1 - \delta)\sigma_t^s\sigma_t^b\rho_t + (1 - \delta)^2(\sigma_t^b)^2$.

3.4 Numerické riešenie úlohy

Naším cieľom je teraz dať odpoveď na otázku kedy, za akej situácie (úrokové miery, nasporená suma) a ako má sporiteľ optimálne rozložiť svoje úspory medzi dôchodkové fondy. Chceme teda pre konkrétny čas t , hodnotu majetku \bar{d}_t i úrokovú mieru \bar{r}_t určiť optimálny alokačný pomer $\hat{\delta}_t$. Umožní nám to práve riešenie úlohy (3.26).

Budeme ju riešiť rekurzívne od $t = T - 1$ až po $t = 1$ a budeme vychádzať z tvaru (3.29). Premenné r, d, ξ, y, δ sú však kontinuálneho charakteru a nemáme zarúčené žiadne vlastnosti maximalizovanej funkcie vzhľadom k δ (ako napr. konvexnosť), ktoré by nám umožnili analytické nájdenie riešenia (napr. prostredníctvom diferenciálneho kalkulu). Úlohu teda budeme riešiť numericky, pričom každú z premenných r, d, ξ, y, δ diskretizujeme na konečný počet hodnôt, čím dostaneme ohraničenú diskretizačnú sieť.

Rekurzívna schéma riešenia úloh tohto typu je podrobne popísaná v [11]. Pre daný konkrétny uzol trojrozmiernej (resp. pre konkrétnu časovú vrstvu, t , dvojrozmiernej) diskretizačnej siete (d_t^i, r_t^j) určíme optimálne $\hat{\delta}$ prebráním všetkých možností (ktorých je na základe našej diskretizácie iba konečne veľa), pričom pre každú vyčíslíme hodnotu integrálu (3.29) a tú, pre ktorú bude integrál maximálny, prehlásime za optimálne $\hat{\delta}$. Dostaneme tak približné riešenie spojitaj úlohy, ktoré sa ale pre dostatočne hustú diskretizačnú sieť blíži skutočnému riešeniu.

Presnejšie, pri diskretizácii volíme pre všetky premenné ekvidištantné delenie danej premennej p . Zadávame pritom okrajové body, t.j. minimálnu (p_{min}) a maximálnu (p_{max}) hodnotu a počet diskretizačných bodov (p_n), t.j. frekvenciu diskretizácie. Vzdielenosť (p_{step}) medzi jednotlivými uzlami potom dostávame jednoducho zo vzťahu

$$p_{step} = \frac{p_{max} - p_{min}}{p_n - 1}.$$

Diskretizácia danej premennej je teda tvaru $\{p_{min}, p_{min} + p_{step}, p_{min} + 2p_{step}, \dots, p_{max}\}$, pričom za „ p “ môžeme dosadiť premenné r, d, ξ, y, δ . Konkrétny bod diskretizačnej siete $(d_{min} + i \cdot d_{step}, r_{min} + j \cdot r_{step})$, $i = 0, \dots, d_n - 1$, $j = 0, \dots, r_n - 1$, môžeme potom v danej časovej vrstve t značiť ako (d_t^i, r_t^j) .

Teraz pre $\forall t = 1, \dots, T - 1$, $i = 0, \dots, d_n - 1$, $j = 0, \dots, r_n - 1$ nájdeme prebráním

všetkých možností $\delta = \{\delta_{min}, \delta_{min} + \delta_{step}, \dots, \delta_{max} = \Delta\}$ pre daný uzol (d_t^i, r_t^j) také $\hat{\delta}$, pre ktoré je integrál

$$\int_{\mathbb{R}^2} V_{t+1} \left(F_t(d_t^i, r_t^j, \xi \sqrt{1 - \rho^2} + \rho y, y, \delta), g(r_t^j, \xi \sqrt{1 - \rho^2} + \rho y) \right) f_0(\xi, y) d\xi dy$$

maximálny, čím dostaneme hľadanú optimálnu rozhodovaciu (alokačnú) funkciu $\hat{\delta}_t(d_t^i, r_t^j)$, udávajúcu optimálny podiel úspor v akciovom fonde v danej situácii (d_t^i, r_t^j) .

Integrovať však nebudeme cez celé \mathbb{R}^2 , ale využitím *lichobežníkového* pravidla pre numerickú integráciu vypočítame aproximáciu integrálu ako váženú sumu funkčných hodnôt cez diskretnú oblasť $\{\xi_{min} = \xi_1, \dots, \xi_{max} = \xi_n\} \times \{y_{min} = y_1, \dots, y_{max} = y_n\}$, kde $\xi_n = y_n$ a kde $\xi_{max} = y_{max} = -\xi_{min} = -y_{min}$ sú dostatočne veľké. Použitím spomínanej *Newton-Cotesovej* zloženej kvadratury dostávame pre dané δ aproximáciu vyššie uvedeného integrálu (ostatné zafixované premenné neuvádzam):

$$\begin{aligned} I(\delta) &= \frac{1}{4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_0(\xi_i, y_j)} [f_0(\xi_1, y_1)V(\xi_1, y_1, \delta) + f_0(\xi_n, y_1)V(\xi_n, y_1, \delta) + \\ &+ f_0(\xi_n, y_n)V(\xi_n, y_n, \delta) + f_0(\xi_1, y_n)V(\xi_1, y_n, \delta) + \\ &+ 2 \sum_{i=2}^{n-1} f_0(\xi_i, y_1)V(\xi_i, y_1, \delta) + 2 \sum_{i=2}^{n-1} f_0(\xi_1, y_i)V(\xi_1, y_i, \delta) + \\ &+ 2 \sum_{i=2}^{n-1} f_0(\xi_n, y_i)V(\xi_n, y_i, \delta) + 2 \sum_{i=2}^{n-1} f_0(\xi_i, y_n)V(\xi_i, y_n, \delta) + \\ &+ 4 \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} f_0(\xi_i, y_j)V(\xi_i, y_j, \delta)] \end{aligned} \quad (3.30)$$

Pripomínam ešte, že autori v [1] použili kvôli veľkému rozptylu hodnôt integrovanej funkcie škálovanie hodnotovej funkcie na zabezpečenie lepšej numerickej stability. Ja škálovaciu techniku nevyužívam pre ušetrenie výpočtového času, nakoľko moje numerické experimenty⁵ vykazovali totožné výsledky pre výpočet so škálovaním aj bez neho.

Ďalším problémom, s ktorým je potrebné vysporiadať sa pri numerickej aproximácii (3.29) je počítanie funkcie V_t v bodoch mimo našej diskretizačnej siete (keďže $F(\cdot), g(\cdot) \in \mathbb{R}$). Ako som už spomenul v časti (2.3), problém výpočtu hodnotovej funkcie v netabelovaných bodoch riešim využitím interpolačných techník, konkrétne kubických interpolačných splajnov implementovaných v softvéri MATLAB.

Posledným problémom súvisiacim s vyššie uvedenou interpoláciou je nemožnosť exaktne extrapolovať hodnotovú funkciu pre uzly za okrajovými bodmi, t.j. mimo diskretizačnej siete. Tento problém sa prejavil najmä pri počítaní výsledných hodnôt funkcie optimálnej alokácie $\hat{\delta}_t$ pre hranične vysoké hodnoty majetku d , t.j. v blízkosti d_{max} . Totiž na základe úvahy z časti (3.3.2) by sa pre vysoké hodnoty d funkcia optimál-

⁵Výpočet bol vykonaný v softvéri MATLAB.

nej alokácie mala ustáliť na konštante. Pri numerických výpočtoch sa to však blízko hodnôt d_{max} nedialo. Tento problém som vyriešil zvýšením hodnoty d_{max} približne na úroveň $\tilde{d}_{max} = 2d_{max}$, pričom prakticky využívam iba výsledky po hodnotu $\approx \frac{\tilde{d}_{max}}{2}$, pri ktorých je riešenie stabilné. Tieto kroky sú opätovne zdôvodnené i v Pozn. (2), v časti (4.1), v ktorej sa zaoberám konkrétnymi numerickými parametrami úlohy.

Kapitola 4

Parametre, scenáre a dáta

4.1 Parametre

Parameter	Hodnota	Typ ¹	Popis
<i>Numerická schéma</i>			
n_y	16	fixný	krok v smere y na 2-rozmernej $\{\xi_i\} \times \{y_j\}$ oblasti pri aproximácii integrálu
y_{min}	-3	fixný	
y_{max}	3	fixný	
n_ξ	16	fixný	krok v smere ξ na 2-rozmernej $\{\xi_i\} \times \{y_j\}$ oblasti pri aproximácii integrálu
ξ_{min}	-3	fixný	
ξ_{max}	3	fixný	
n_d	500	fixný	krok diskretizácie hodnôt majetku ²
d_{min}	0.0397	fixný	
d_{max}	30	fixný	
n_r	45	fixný	krok diskretizácie hodnôt úroku
r_{min}	0.001	fixný	
r_{max}	0.09	fixný	
n_δ	30	fixný	krok diskretizácie podielu v akciovom fonde
δ_{min}	0	fixný	
δ_{max}	1	fixný	

Tabuľka 4.1: Hodnoty použitých parametrov.

¹Fixný parameter je vo všetkých výpočtoch nemenný. Voľný parameter som pri rôznych porovnaníach, ktoré sú napr. súčasťou analýzy senzitivity, menil. V tabuľke uvedená hodnota však platí vždy, pokiaľ v texte nie je spomenuté inak.

²Pri numerických výpočtoch je použitá hodnota $d_{max} = 30$, avšak pri grafickom vyobrazení zobrazujem majetok po nižšiu maximálnu hodnotu. Dôvod je ten, že na základe úvahy z časti (3.3.2), sa pre vysoké hodnoty d funkcia optimálnej alokácie ustáli na konštante. Pri numerických výpočtoch sa tak blízko hodnôt d_{max} nedialo, kvôli nemožnosti exaktne extrapolovať hodnotovú funkciu pre uzly mimo diskretizačnej siete. Navyše vysoké hodnoty premennej d pre nás väčšinou nie sú relevantné (ak sú, tak ich zobrazujem). Pri príspevkoch výšky 4% zo mzdy k nasporeniu sumy d_{max} zd'aleka nedochádza.

Parameter	Hodnota	Typ	Popis
<i>CIR model</i>			
κ	0.8993	fixný	sila, resp. rýchlosť mean-reversion „príťahovania“
θ	0.0226	fixný	dlhodobá rovnovážna hodnota okamžitej úrokovej miery
σ^b	0.148	fixný	volatilita, t.j. veľkosť fluktuácií short rate
λ	0	fixný	trhová cena rizika ³
τ_B	3	voľný	splatnosť bezkupónových dlhopisov v modeli (v rokoch)
<i>Geometrický Brownov pohyb</i>			
μ_t^s	0.0844	voľný	drift v GBP ⁴ , defaultne $\mu_t^s \equiv \mu^s = 0.0844$
σ_t^s	0.1417	voľný	volatilita v GBP, $\sigma_t^s \equiv \sigma^s = 0.1417$
<i>Ostatné parametre</i>			
ρ	-0.01082	voľný	korelačný koeficient akciových a dlhopisových výnosov z (3.17)
τ	Tab.(4.3)	voľný	výška príspevkov ⁵ ako podiel z hrubej nominálnej mzdy
β_t	Tab.(4.3)	voľný	medziročný rast nominálnych miezd
Δ_t	Tab.(4.4)	voľný	legislatívne obmedzenia na podiel úspor v akciovom fonde
a	9	voľný	parameter rizikovej averzie sporiteľa
\bar{r}_1	0.005	fixný	počiatočná hodnota short rate

Tabuľka 4.2: Hodnoty použitých parametrov, pokračovanie.

Parametre numerickej schémy som zvolil tak, aby pre úlohu neboli nijako obmedzujúce. T.j. krajné hodnoty sú dostatočne malé, resp. dostatočne veľké, a kroky dostatočne vysoké, aby nespôsobovali výrazný odklon od skutočného riešenia úlohy.

Parametre používané v CIR modeli som odhadol z aktuálnych dát⁶ metódou maximálnej vierohodnosti na základe [26] (v článku je uvedený aj kód v programe MATLAB určený na odhady CIR koeficientov z reálnych dát). Nakoľko som odhadoval

³V jednoduchosti, parameter vyjadruje vzťah medzi hodnotami parametrov v reálnej a rizikovo neutrálnej miere. V [25] je uvedená nasledovná interpretácia - očakávaný trhový výnos z dlhopisov r^* je vyšší ako bezrizikový výnos r , pokiaľ $\lambda < 0$; naopak, ak $\lambda > 0$, tak trhom požadovaný výnos z dlhopisov je nižší ako bezrizikový výnos, $r^* < r$. Viac o trhovej cene rizika napr. v [9].

⁴DSS si účtujú poplatok 10% zo zhodnotenia úspor a za správu 0.3% z ročnej čistej hodnoty majetku. Tieto poplatky je potrebné odrátať od výnosov fondov. V numerickej výpočte poplatky zohľadňujem.

⁵Poplatok za vedenie dôchodkového účtu predstavuje v prepočte 1% z ročných príspevkov. Vo výpočtoch teda vždy uvažujem $\bar{\tau} = 0.99\tau$.

⁶Denné dáta z obdobia 1999-2012, zdroj: <http://www.euribor-info.com/en/eonia>

parametre v reálnej miere, hodnotu parametra λ vyjadrujúceho vzťah medzi parametrami v reálnej a v rizikovo neutrálnej miere preberám z [1]. Za povšimnutie stojí, že mnou odhadnuté parametre sú hodnotovo veľmi blízke parametrom využívaným v [1], ktorý sa odvoláva na prebratie parametrov z článku [25] z roku 2005.

Koeficient rizikovej averzie vystupujúci v exponente funkcie užitočnosti volím na začiatku rovnako ako autori v [1], neskôr ho budem meniť.

Rast nominálnych miezd na Slovensku počas najbližších 40 rokov som získal z najaktuálnejších dostupných prognóz. Konkrétne hodnoty za rok 2013-2015 sú priemerom prognóz Národnej banky Slovenska, Inštitútu finančnej politiky a Slovenskej sporiteľne,⁷ a údaje za roky 2016-2051 sú z publikácie Slovenskej akadémie vied, [27].

Rok	Medzir. rast mzdy	Rok	Výška príspevkov
2013	4.37%	2013-2016	4%
2014	4.75%	2017	4.25%
2015	5.2%	2018	4.5%
2016-2020	6.4%	2019	4.75%
2021-2025	5.9%	2020	5%
2026-2030	5.6%	2021	5.25%
2031-2035	5.2%	2022	5.5%
2036-2040	4.9%	2023	5.75%
2041-2051	4.5%	2024-2051	6%

Tabuľka 4.3: Vľavo: Prognóza medziročného rastu priemernej hrubej nominálnej mzdy na Slovensku. Vpravo: Predpokladaná výška príspevkov v percentách z ročnej hrubej mzdy.

Vek sporiteľ'a	Rok sporenia ⁸	Maximálny povolený podiel	Δ_t
49 a menej	1. – 28.	100%	1
50 až 58	29. – 37.	$10 \cdot (59 - vek)\%$	$0.1 \cdot (59 - vek)$
59 a viac	38. – 40.	0%	0

Tabuľka 4.4: Legislatívne obmedzenia na podiel úspor v akciovom fonde.

Hoci cieľom tejto práce nie je odhadovať budúci vývoj na akciových trhoch, je dôležité pri výpočtoch uvažovať s odhadmi, ktoré nie sú od reality priveľmi vzdialené. Základnú používanú hodnotu driftu μ^s som preto odhadol z dát⁹ ako ročný logaritmickej výnos, na základe vzťahu (3.5). Z Obr. (4.1) vidno, že ročný výnos z investovania do akcií sa pri rozličných 40-ročných obdobiach pohyboval v rozmedzí

⁷NBS: http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Publikacie/PREDIK/2012/P2Q-2012.pdf

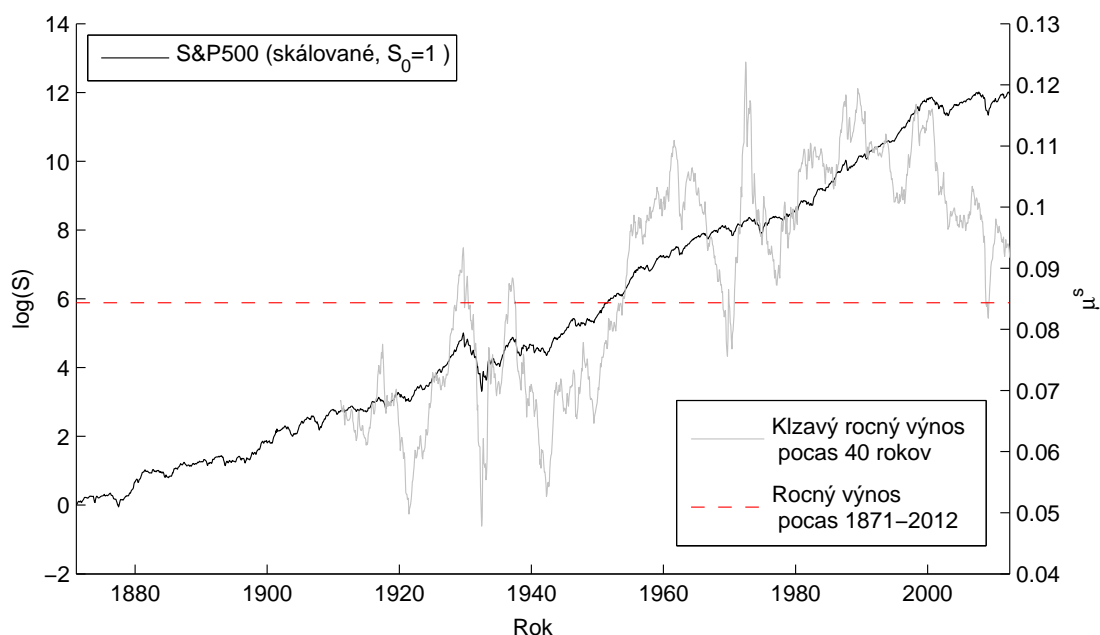
IFP: <http://www.finance.gov.sk/Default.aspx?CatID=8226>

SLSP: http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Publikacie/PREDIK/2012/P2Q-2012.pdf

⁸Za predpokladu, že si sporiteľ sporí presne 40 rokov.

⁹Historické ročné výnosy amerického akciového indexu S&P500 vrátane reinvestovaných dividend (*total return*). Mesačné dáta, zdroj: <http://www.econ.yale.edu/~shiller/data.htm>

5% – 12% *p.a.*. V práci budem používať hodnotu $\mu^s = 8.44\% p.a.$, t.j. ročný výnos z celého obdobia 1871-2012.



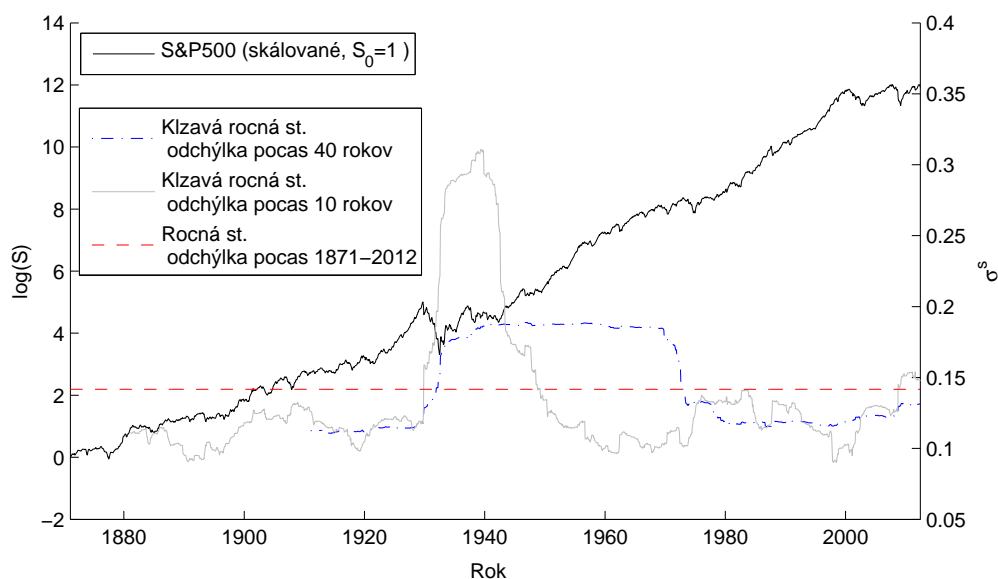
Obr. 4.1: Ľavá os: Historický vývoj akciového indexu S&P500 s reinvestovanými dividendami. Logaritmickej škále, $S_0 = 1$. Pravá os: Kĺzavý (po mesiacoch) ročný výnos indexu, počítaný spätne z obdobia 40 rokov a ročný výnos indexu počas celého vyobrazeného obdobia.

Hodnotu σ^s , t.j. volatilitu akciovej zložky, som tiež odhadol z dát na základe (3.5). Opäť nemám v úmysle predikovať túto premennú, ale používať zmysluplný odhad. Na Obr. (4.2) je znázornený priebeh štandardnej odchýlky výnosov v čase. Počas 40-ročných období bola jej hodnota stabilná, pričom ju ovplyvnila najmä veľká hospodárska kríza (v rokoch mimo 1929-1930 približne 12% *p.a.* a v rokoch zahŕňajúcich krízové obdobie približne 19% *p.a.*). Počas 10-ročných období sa mimo krízy pohybovala v pásme 10% – 14% *p.a.* a v kríze sa vyšplhala až na 31% *p.a.*. Ja budem používať smerodajnú odchýlku výnosov z celého uvedeného obdobia, $\sigma^s = 14.17\% p.a.$.

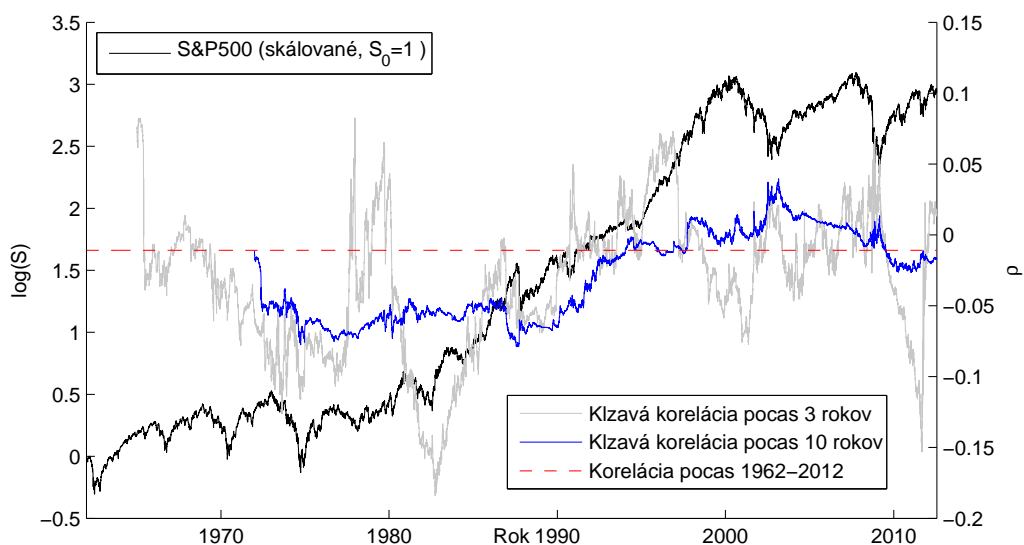
Korelačný koeficient akciovej a dlhopisovej zložky¹⁰, t.j. (3.17), som taktiež odhadol z dát.¹¹ Jeho denný vývoj v rokoch 1962-2012 je na Obr. (4.3). V práci používam hodnotu z celého uvažovaného obdobia, $\rho = -0.01082$.

¹⁰Korelačný koeficient už nemožno pre náš model počítať z dát jednoducho ako koreláciu výnosov akciového indexu (3.5) a výnosov 3-ročných dlhopisov (3.11). Odhadnúť potrebujeme korelačný koeficient z (3.17), t.j. $\rho(\Psi, \Phi)$. Potrebujeme teda najskôr vyjadriť Φ zo vzťahu (3.16) a následne vypočítať z dát koreláciu takto vyjadrenej premennej s výnosmi akciového indexu, resp. s premennou Ψ .

¹¹S&P500, denné dáta, zdroj: <http://finance.yahoo.com/>. Americká short rate (*Effective Federal Funds Rate*), zdroj: <http://research.stlouisfed.org/fred2/>



Obr. 4.2: Ľavá os: Historický vývoj akciového indexu S&P500 s reinvestovanými dividendami. Logaritmickej škále, $S_0 = 1$. Pravá os: Klzavá (po mesiacoch) ročná štandardná odchýlka, počítaná späť z obdobia 40, resp. 10 rokov a jej hodnota počas celého vyobrazeného obdobia.



Obr. 4.3: Ľavá os: Historický vývoj akciového indexu S&P500. Logaritmickej škále, $S_0 = 1$. Pravá os: Klzavý (po dňoch) korelačný koeficient premenných Ψ a Φ z (3.17), počítaný späť z obdobia 3, resp. 10 rokov a korelačný koeficient počas celého vyobrazeného obdobia.

4.2 Scenáre

Pod možnými scenármi vývoja akciových trhov budem ďalej rozumiť predpokladané budúce hodnoty driftu μ_t^s . Vytvoril som scenáre 2 typov. Prvým typom sú mnou umelo vytvorené, s realitou nekorešpondujúce scenáre. Medzi ne patria úrovňové zmeny v drifte (pod čím rozumieme dlhodobu konštantnú úroveň $\mu_t^s \equiv \mu^s$, avšak rozličnej výšky) a lineárny nárast driftu v čase. Tieto typy scenárov sú síce vzdialené od reality, no na druhej strane umožňujú akúsi stabilnú aproximáciu budúceho vývoja trhov. Prečo stabilnú, to zodpoviem v nasledujúcich riadkoch.

Druhým typom scenárov sú scenáre založené na historických ročných výnosoch podkladových aktív počas vybraných 40-ročných období. Optimálne riešenia vychádzajúce z týchto scenárov preto „pasujú“ iba do veľmi špecifickej situácie daného konkrétneho vývoja. Takáto aproximácia možného budúceho zhodnotenia akciových fondov preto nie je veľmi stabilná, nakoľko je až príliš konkrétna. Na účely stresového testovania však poslúži dobre. Všetky scenáre sú spísané v Tab. (4.5) a scenáre 2. typu sú vyobrazené na Obr. (4.4).

Scenár	Roky	Podkladové aktívum	Popis
(SC1)	–	–	dlhodobá úroveň $\mu^s \equiv 11\%$
(SC2)	–	–	dlhodobá úroveň $\mu^s \equiv 9\%$
(SC3)	–	–	dlhodobá úroveň $\mu^s \equiv 7\%$
(SC4)	–	–	dlhodobá úroveň $\mu^s \equiv 5\%$
(SC5)	–	–	lineárny nárast z 2% na 11.5% , $\mu_t^s = 2\% + 0.25 \cdot (t - 1)\%$
(SC6)	1900 – 1939	S&P500	scenár rastu s depresiou na konci ¹⁰
(SC7)	1915 – 1954	S&P500	scenár stagnácie, boomu, recesie a zotavenia ¹⁰
(SC8)	1950 – 1989	S&P500	scenár dlhodobého zdravého rastu ¹⁰
(SC9)	1929 – 1968	S&P500	scenár recesie, zotavenia a rastu ¹⁰
(SC10)	1880 – 1919	S&P500	scenár stagnácie a mierneho rastu ¹⁰
(SC11)	1991 – 2012 1949 – 1967	Nikkei225	scenár dlhodobej recesie s oživením na konci ¹¹

Tabuľka 4.5: Scenáre vývoja akciovej investície.

¹⁰Historické ročné výnosy amerického akciového indexu S&P500 s reinvestovanými dividendami (total return). Zdroj: <http://www.econ.yale.edu/~shiller/data.htm>

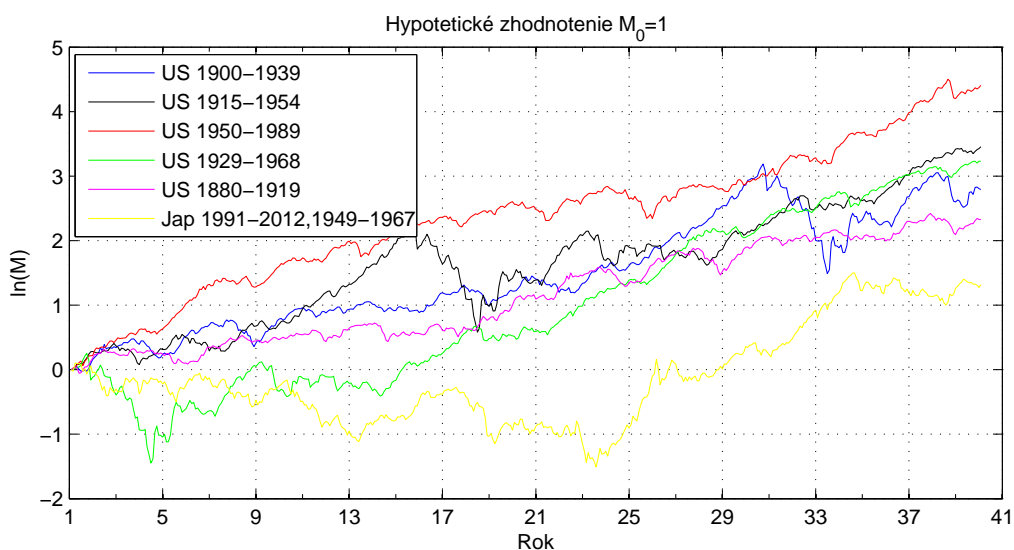
¹¹Scenár je vytvorený umelo spojením 22 rokov dodnes trvajúceho obdobia japonského poklesu akciových trhov, na ktoré je nadpojené predošlé obdobie rastu. Historické ročné výnosy japonského akciového indexu Nikkei225. Zdroj: <http://indexes.nikkei.co.jp/en/nkave/archives/data>

4.3 Stratégie

Stratégie, ktoré vystavím stresovému testovaniu na uvedených scenároch sú uvedené v Tab. (4.6). Pozostávajú jednak z optimálnych stratégií vypočítaných pre jednotlivé scenáre, no i zo 4 navyše pridaných, pasívnejších stratégií. Prvá investuje po celú dobu do dlhopisového fondu, druhá po celú dovolenú dobu do akciového fondu, tretia začína v akciovom fonde a každý rok lineárne presúva úspory do dlhopisového fondu a posledná štvrtá sa riadi známym pravidlom „drž v akciách $(100 - vek)\%$ úspor”.

Stratégia	Popis
(ST1)-(ST11)	Optimálne $\hat{\delta}$ prislúchajúce danému scenáru
(ST12)	$\delta = 0$
(ST13)	$\delta = \min\{\Delta_t, 1\}$
(ST14)	$\delta_t = \max\{0, 1 - \frac{t-1}{36}\}$
(ST15)	$\delta_t = \min\{\Delta_t, 1 - \frac{t+22}{100}\}$

Tabuľka 4.6: Investičné stratégie, neskôr podrobené stresovému testovaniu.



Obr. 4.4: Znázornenie scenárov (SC6)-(SC11). Dáta sú na mesačnej frekvencii.

Kapitola 5

Výsledky

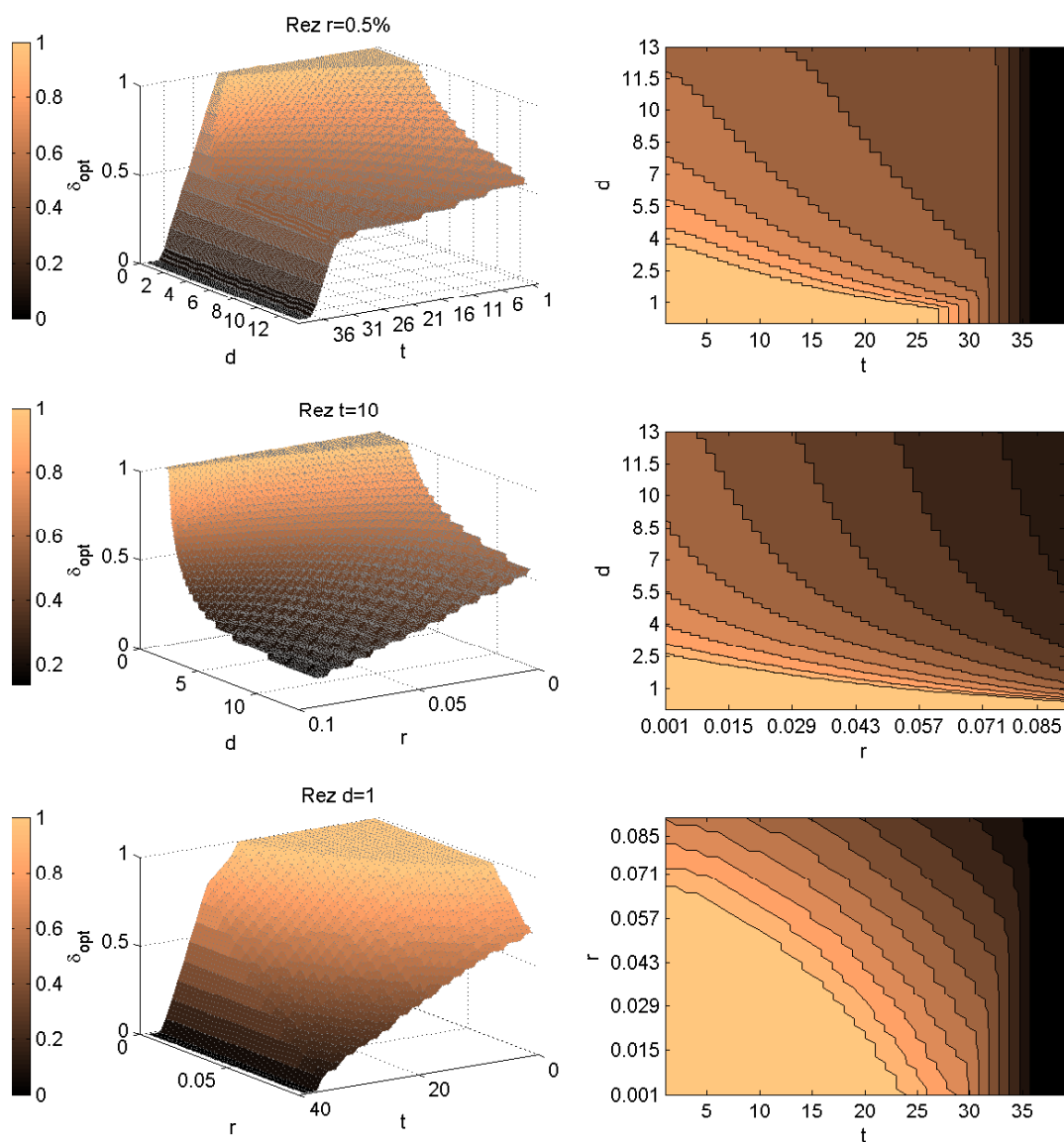
V tejto časti uvediem konkrétne numerické výsledky konzistentné s aktuálne platnou legislatívou na Slovensku. Pokiaľ neuvediem inak, použité parametre sú z Tab. (4.1) a Tab. (4.2). Najskôr predstavím typický výsledok mojich analýz, graf funkcie $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ a základné štatistické charakteristiky hodnoty úspor v čase, pre konkrétnu optimálnu stratégiu. Následne vykonám empirickú analýzu senzitivity výstupov vzhľadom k vybraným parametrom. Nakoniec podrobím optimálne stratégie stresovému testovaniu, na základe vlastných vytvorených scenárov, popísaných v časti (4.2).

5.1 Analýza základného výstupu (benchmark)

Výstupom z modelu, alebo inak povedané optimálnym riešením, je funkcia $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$. Hodnota funkcie nám hovorí, aký je optimálny pomer úspor investovaných v akciovom fonde, pokiaľ sa nachádzame v roku sporenia t , máme dosiaľ nasporené úspory o výške d_t a aktuálna „overnight“ úroková miera je rovná r_t . Ide teda o funkciu 3 premenných, ktorej vyobrazenie v 2-rozmernom priestore nemá veľmi veľkú výpovednú hodnotu (Obr. (5.3)). Na Obr. (5.1) preto zobrazujem najprv iba *rezy* tejto funkcie, pre jednu z premenných konštantnú. Tieto grafy, hoci nereálnych situácií, pomáhajú odhaliť vlastnosti funkcie optimálnej alokácie vzhľadom k jednotlivým parametrom a napovedať o jej štruktúre.

Hoci vyobrazenie funkcie $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ predstavuje problém, optimálne rozloženie úspor za každej do úvahy pripadajúcej situácie poznáme. Funkciu máme síce tabelovanú iba v diskretných bodoch, no táto sieť je dostatočne hustá, a preto vždy môžeme jednoducho nájsť v tabuľke $\{d_t^i\}_{i=1}^{n_d} \times \{r_t^j\}_{j=1}^{n_r}$ hodnotu najbližšiu našej situácii a na základe nej jednoznačne určiť optimálny pomer úspor v akciovom a dlhopisovom fonde. Vychádzajúc z pevných a známych hodnôt nasporeného majetku ($d_1 = \tau_1$ ročných plátov) a okamžitej úrokovej miery ($r_1 = 0.5\%$) na začiatku obdobia sporenia (hodnoty je samozrejme možné kedykoľvek zmeniť), a tiež z toho, že poznáme rozdelenie výnosov akciového i dlhopisového fondu, tak môžeme vytvárať simulácie. Jedna simulácia predstavuje simulované zhodnotenie úspor v čase, pričom zhodnotenie fondov v

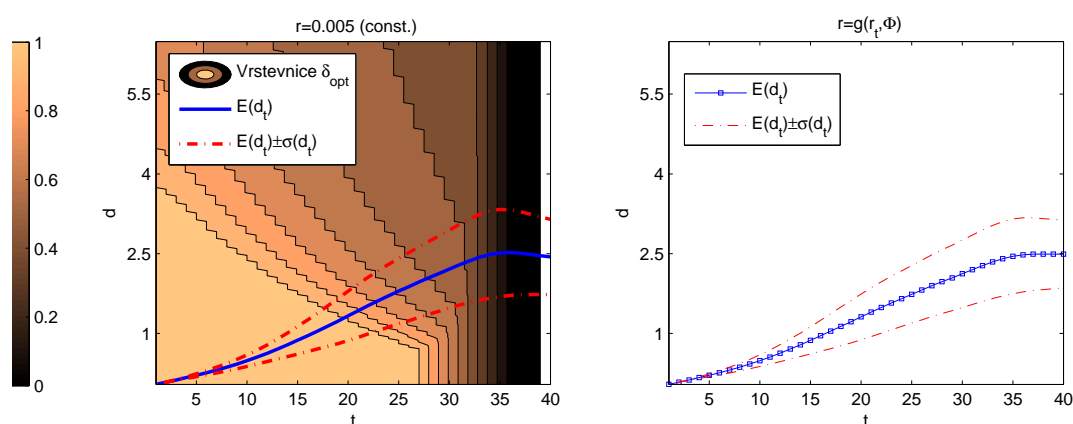
budúcnosti je generované pomocou generátora pseudonáhodných čísel (v mojom prípade generátora z normálneho rozdelenia, na základe (3.6), (3.15) a (3.16)) a v každom čase sa rozhodujeme na základe optimálnej alokačnej funkcie $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$. Po vykonaní dostatočného množstva simulácií z nich vieme získať empirické rozdelenie, a teda ich strednú hodnotu, štandardnú odchýlku a 5%-ný kvantil. To sú presne charakteristiky, ktoré budem sledovať.



Obr. 5.1: Naľavo graf rezov funkcie $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ udávajúcej na z-osi optimálny pomer úspor v akciovom fonde pre danú situáciu (d_t, r_t) . Napravo vrstevnice týchto rezov. V poradí zhora nadol: $\hat{\delta}_t(d_t, r_t = 0.005) = \hat{\delta}(t, d)$, $\hat{\delta}_{10}(d_{10}, r_{10}) = \hat{\delta}(d, r)$, $\hat{\delta}_t(d_t = 1, r_t) = \hat{\delta}(t, r)$.

Výsledné grafy sú v súlade s intuíciou.¹ Z prvej dvojice obrázkov z Obr. (5.1) vidno, že s rastúcimi úsporami klesá ich optimálny podiel investovaný do akciového fondu a ustaluje sa na hodnote približne $\bar{\delta} = 0.55$, teda klesá závislosť optimálneho riešenia od výšky úspor. Taktiež vidno, že s blížiacim sa odchodom do dôchodku podiel úspor v akciovej zložke opäť klesá. Výsledok je v súlade s motivačným príkladom z úvodu práce i úvahou z časti (3.3.2). Lineárny charakter funkcie tesne pred dôchodkom je spôsobený legislatívnymi obmedzeniami.

Druhá a tretia dvojica obrázkov hovorí o vzťahu rozloženia úspor a okamžitej úrokovej miery. Klesajúcosť pomeru investícií v akciovom fonde pri rastúcej short rate je tiež logická, nakoľko pri vyššej okamžitej úrokovej miere požaduje aj trh vyšší výnos od emitentov dlhopisov, tie sa tak stávajú atraktívnejšou investičnou alternatívou.



Obr. 5.2: Naľavo výsek z vrstevnice rezu $r_t = 0.005$ funkcie $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ (znázornenej v prvej dvojici z Obr. (5.1) napravo) spolu so strednou hodnotou a smerodajnou odchýlkou úspor získanými zo 100 000 Monte Carlo simulácií pre $r \equiv 0.005$. Napravo stredná hodnota a štandardná odchýlka úspor pre r ako náhodný proces (3.16).

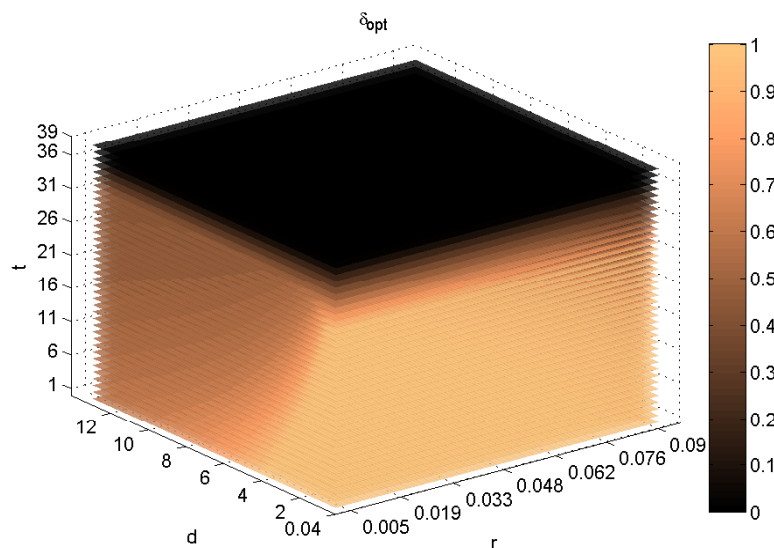
V prípade zjednodušenia v podobe uvažovanej konštantnej okamžitej úrokovej miery vieme (Obr. (5.2) vľavo) zobrazit' do jedného grafu vrstevnicu funkcie $\hat{\delta}_t(d_t, r_t = 0.005)$, ako aj strednú hodnotu a smerodajnú odchýlku úspor vypočítaných z Monte Carlo simulácií.² Vidieť, že pri použití parametrov z Tab. (4.1) a Tab. (4.2) je stredná hodnota naakumulovaných úspor pri odchode na dôchodok na pomerne nízkej úrovni necelého 2.5-násobku priemernej ročnej mzdy v čase dôchodku. Spôsobené to je predovšetkým nízkou výškou príspevkov a predpokladaným vysokým rastom nominálnych miezd.

Podobný graf, t.j. strednú hodnotu a smerodajnú odchýlku úspor vypočítaných z Monte Carlo simulácií, vieme (Obr. (5.2) vpravo) vyobrazit' aj pre úrokovú mieru nie

¹Nehladkosť kriviek je spôsobená diskretizáciou premenných, zhladzovacie filtre nepoužívam.

²Stredná hodnota a smerodajná odchýlka úspor siaha až do času dôchodku, t.j. $t = 40$, kým posledné rozhodovanie o alokácii úspor prebieha v poslednom roku pred dôchodkom $t = 39$. To vysvetľuje, prečo vyobrazené štatistiky siahajú až do „bielej“, neurčenej časti grafu.

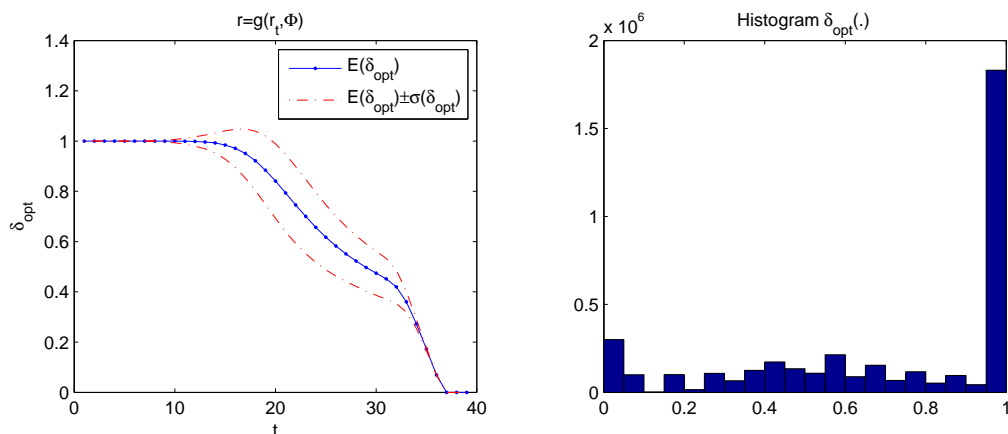
konštantnú, ale modelovanú ako náhodný proces na základe časti (3.1.3). Spolu s funkciou 3 premenných $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ by sa však už tieto štatistiky vyobrazovali len obtiažne, graf preto funkciu nezahŕňa. Všimnúť si ešte môžeme, že stredná hodnota úspor až do 36. roku sporenia rastie a následne začne klesať (pre $r \equiv 0.005$), alebo sa ustáli (pre r náhodné). Spôsobené je to práve legislatívnymi obmedzeniami, ktoré v súčinnosti s predpokladaným vysokým rastom nominálnych miezd spôsobujú relatívny pokles úspor meraných v jednotkách priemernej ročnej mzdy v hospodárstve. Rozdiel medzi poklesom úspor pred dôchodkom pre $r \equiv 0.005$ a ustálením pre r náhodné je vysvetliteľný tým, že v prvom prípade, pri alokovaní všetkých úspor do dlhopisového fondu s veľmi nízkym výnosom, ich relatívna hodnota klesá. Naopak v druhom prípade je výnos dlhopisov o niečo vyšší (keďže dlhodobá rovnovážna hodnota okamžitej úrokovej miery je na úrovni 2.2%), a teda i stredná hodnota úspor.



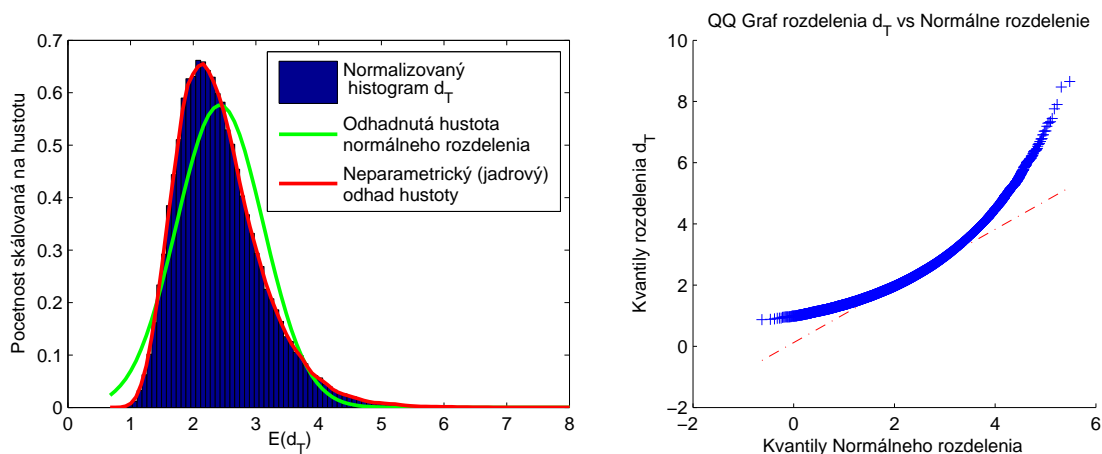
Obr. 5.3: Vyobrazenie optimálnej alokačnej funkcie 3 premenných $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ s využitím farby ako štvrtého rozmeru. Farba udáva optimálny pomer úspor v akciovom fonde pre danú situáciu (d_t, r_t) .

Na Obr. (5.4) vľavo (r náhodné podľa (3.16)) tiež vidno, že v súlade s intuíciou, na začiatku horizontu sporenia, pri nízkej hodnote úspor, je prvých niekoľko rokov optimálne byť zainvestovaný výlučne v akciovom fonde. Postupom času sa optimálny podiel úspor v rizikovom fonde znižuje, pričom narastá i rozptyl investičných rozhodnutí pre rôzne situácie (d_t, r_t) . Koniec sporiaceho obdobia je ovplyvnený najmä legislatívnymi obmedzeniami. Optimálny pomer úspor v akciovom fonde je v tomto čase maximálny, aký dovoľuje legislatíva.

Z Obr. (5.5) vľavo vidno, že rozdelenie úspor má pozitívny sklon, t.j. medián je nižší ako priemer. Tiež možno z Obr. (5.5) vpravo odsledovať, že toto rozdelenie by sa normálnym rozdelením neaproximovalo príliš dobre, práve pre rozličnú šikmosť, tučný pravý chvost rozdelenia a chudý ľavý.



Obr. 5.4: Vľavo stredná hodnota a štandardné odchýlky optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ v čase, získané zo 100 000 Monte Carlo simulácií (r náhodné podľa (3.16)). Vpravo histogram hodnôt $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$, kumulatívne pre $\forall t$, zo simulácií.



Obr. 5.5: Vľavo normalizovaný histogram rozdelenia hodnoty nasporeného majetku v čase dôchodku pre vyššie skúmaný prípad r náhodné (Obr. (5.2) vpravo). Vpravo kvantilový diagram empirického rozdelenia úspor oproti korešpondujúcemu odhadnutému normálnemu rozdeleniu.

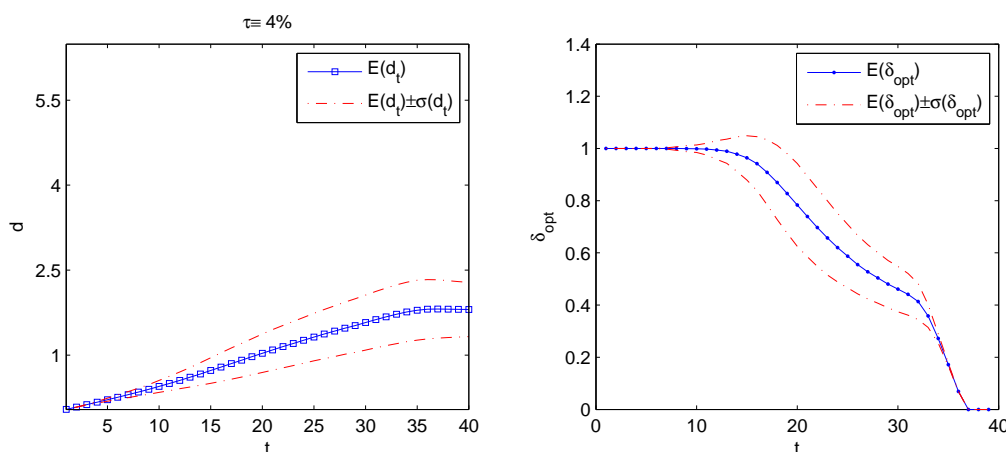
Štatistiky strednej hodnoty a smerodajnej odchýlky majetku (pre r náhodné) sú uvedené v Tabuľke (5.1) pod názvom benchmark, keďže horeuvedený výstup nám bude slúžiť ako porovnávacia báza pre analýzu senzitivity. Spomínaná tabuľka obsahuje aj 5. percentil (5%-ný kvantil) rozdelenia úspor zo simulácií, t.j. akýsi „katastrofický scenár“ ktorý by mohla dosiahnuť hodnota úspor s 5% pravdepodobnosťou.

V ďalšom texte sa už nebudem zaoberať rezmi funkcie $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$. Výpočty a vyobrazenia budú vykonané výhradne v súlade s modelom krátkodobej úrokovej miery zo sekcie (3.1.3), t.j. pre r náhodné.

5.2 Analýza senzitivity

V tejto časti budem porovnávať optimálne stratégie $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ za rozličných predpokladov na parametre úlohy, t.j. napr. trhové (drift) alebo makroekonomické (rast miezd) podmienky. Konkrétne, uvediem časový vývoj strednej hodnoty nasporeného majetku, strednú hodnotu vývoja optimálneho rozloženia úspor a štatistiky nasporeného majetku v čase dôchodku. Meniť budem pritom vždy iba *jeden* parameter pri ostatných konštantných. Porovnávaciú základňu tvoria parametre z Tab. (4.1) a Tab. (4.2), t.j. benchmark analyzovaný v predchádzajúcej časti. Prehľad všetkých výsledkov je uvedený na konci sekcie v Tab. (5.1) a Tab. (5.2).

5.2.1 Zmena vo výške príspevkov



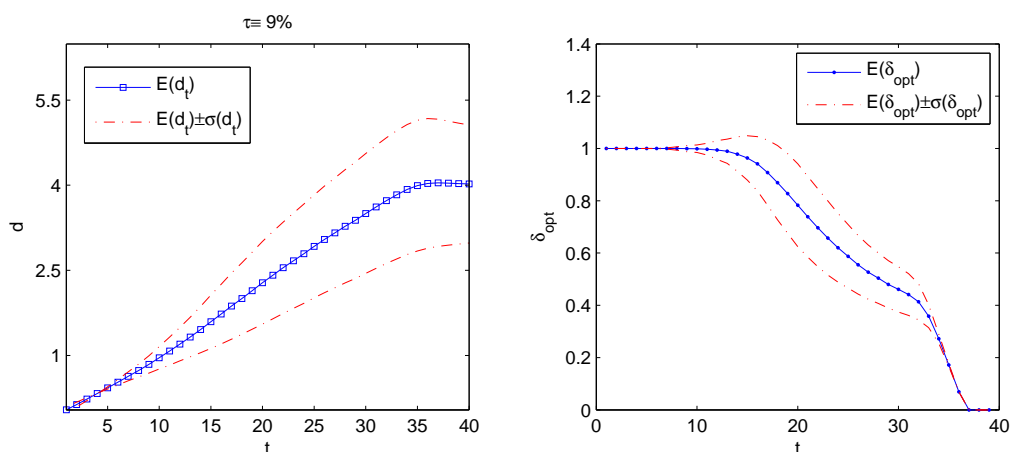
Obr. 5.6: $\tau \equiv 4\%$. Naľavo stredná hodnota a smerodajná odchýlka úspor získaná zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. Vpravo stredná hodnota a štandardné odchýlky optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ v čase.

Pôvodný návrh vlády počítal s trvalým znížením odvodov do druhého piliera na úroveň 4%. Dôsledky na výšku dôchodku nasporeného v tomto pilieri, ako aj zmenu optimálnej alokácie sú vyobrazené na Obr. (5.6).

Časť vľavo znázorňuje vývoj strednej hodnoty úspor v čase pri zníženom odvode spolu s ich štandardnou odchýlkou. Stredná hodnota nasporeného majetku by pri takto nastavenom odvode klesla približne na úroveň 1.79-násobku priemernej ročnej mzdy sporiteľ'a v čase dôchodku. Bola by teda skoro o 30% nižšia ako pri súčasne platnom nastavení. Volatilita nasporeného majetku by sa síce taktiež výrazne znížila, približne o 26%, avšak významne by sa zhoršil i katastrofický scenár, teda 5%-ný kvantil rozdelenia úspor, ktorý by klesol na úroveň približne 1.15-násobku ročnej mzdy.

Pravá časť grafu vyobrazuje strednú hodnotu funkcie optimálneho rozloženia úspor medzi dôchodkové fondy v čase. Presnejšie, znázorňuje strednú hodnotu optimálneho podielu úspor v akciovom fonde a smerodajnú odchýlku tohto podielu. Pri dô-

kladnom porovnaní vývoja optimálnej alokačnej funkcie z modelového príkladu (Obr. (5.4) vľavo) s prípadom uvedeným vyššie si možno všimnúť, že vývoj funkcií v čase je veľmi podobný, avšak nie totožný. Výsledok je plne v súlade s Tvrdením (3.3.2). Tvrdenie síce hovorí, že optimálny podiel úspor v akciovom fonde je nezávislý od relatívnej, rovnakej, zmeny výšky všetkých príspevkov, avšak nehovorí už nič o nezávislosti optimálneho podielu od výšky príspevkov v prípade štrukturálnej zmeny príspevkov (rôzna zmena výšky príspevkov v rôznych časoch). To je presne náš prípad, keď sme zmenili v čase nekonštantné ($\tau \in [4\%, 6\%]$) pravidelné príspevky na v čase konštantné príspevky ($\tau \equiv 4\%$), čo sa prejavilo i na zmene optimálnej alokácie.

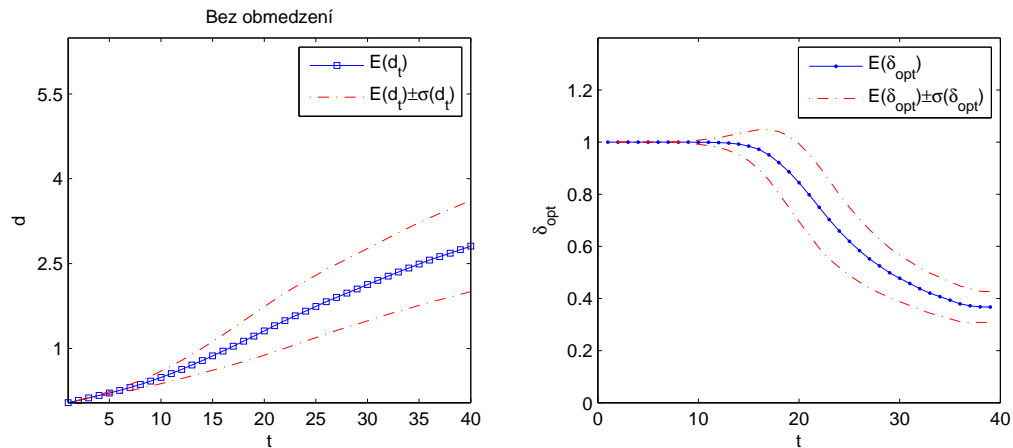


Obr. 5.7: $\tau \equiv 9\%$. Naľavo stredná hodnota a smerodajná odchýlka úspor získaná zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. Vpravo stredná hodnota a štandardné odchýlky optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ v čase.

Z Obr. (5.7) si môžeme všimnúť, že zachovaním starej úrovne príspevkov, 9% z mesačnej mzdy, by výrazne vzrástli všetky pozorované štatistiky. Sporiteľ by tak na dôchodok odchádzal v priemere s vyše 4-násobkom ročných, v čase dôchodku očakávaných, platov. Výsledok opäť presne korešponduje s Tvrdením (3.3.2), konkrétne s časťou o linearite výšky úspor vzhľadom k jednotnej relatívnej zmene výšky príspevkov. Kým príspevky vzrástli z 4% na 9%, teda o 125%, výška nasporeného majetku vzrástla z 1.7922 na 4.0357, čo približne zodpovedá 125% (malá odchýlka je spôsobená Monte Carlo simuláciami). V prípade vyšších príspevkov by sa tiež zvýšila aj volatilita úspor a katastrofický scenár (v 5 a menej percentách prípadov) by predstavoval nasporené úspory o výške 2.58 a menej ročných platov.

Porovnaním výsledkov pre príspevky o konštantnej výške 9% s konštantnými príspevkami 4% tiež vidno, že priebeh voľby optimálneho rozloženia úspor v čase medzi akciový a dlhopisový fond je totožný pre nízke i pre vysoké príspevky. Numerický výsledok je teda totožný s teoretickým z Tvrdenia (3.3.2).

5.2.2 Bez zákonných obmedzení



Obr. 5.8: $\Delta_t \equiv 1$. Naľavo stredná hodnota a smerodajná odchýlka úspor získaná zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. Vpravo stredná hodnota a štandardné odchýlky optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ v čase.

Zrušenie zákonných limitov na podiel úspor v akciovom fonde v čase blížiaceho sa dôchodku sa prejavilo na náraste strednej hodnoty úspor o vyše 12%. Súčasne so strednou hodnotou úspor síce vzrástla aj ich volatilita, no zlepšil sa katastrofický scenár reprezentovaný 5. percentilom. Všimnúť si možno, že v ani jednom z grafov vyobrazených na Obr. (5.8) tentokrát nenastáva zlom. Stredná hodnota úspor síce v počiatkovej fáze sporenia rastie rýchlejšie ako v neskorších obdobiach (kvôli vyššej rizikovej expozícii na začiatku), avšak rast na celom časovom horizonte je viac „rovnomerný“ ako v modelovom príklade. Dané to je prirodzene absenciou obmedzení.

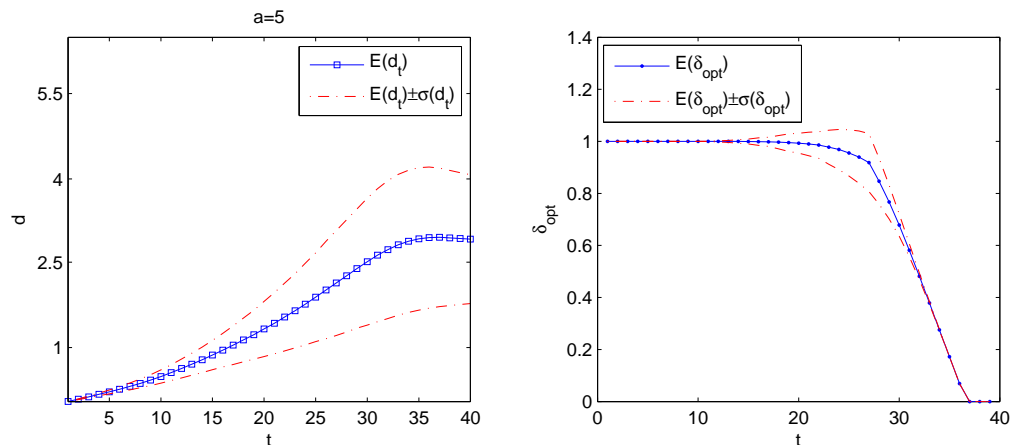
Z časti vpravo vidno, že stredná hodnota alokačného pomeru i smerodajná odchýlka je až do 31. roku sporenia totožná ako pre benchmark. Následne pozvoľna klesá spolu s volatilitou a ustáľuje sa okolo úrovne 0.37. Príčinou sú opäť chýbajúce zákonné obmedzenia, ktoré v prípade benchmarku začali byť aktívnymi obmedzeniami v priemere práve okolo 31. roku sporenia. Tento výsledok podporuje hypotézu, že zrušením obmedzení by sa zvýšil potenciál vyšších dôchodkov, no rovnako i riziko poklesu. Stredná hodnota úspor očistená o 1 štandardnú odchýlku je ale v prípade neexistujúcich obmedzení vyššia (pozri Tab. (5.2), (P4)).

5.2.3 Zmena v averzii k riziku

Výrazný pokles sporiteľovej averzie k riziku (reprezentovaný znížením koeficientu rizikovej averzie na úroveň $a = 5$) tiež vyústil v intuitívne očakávané výsledky. Z ľavej časti Obr. (5.9) vidno, že okrem strednej hodnoty (približne 18%-ný nárast) výrazne vzrástla i volatilita nasporeného majetku v čase odchodu na dôchodok (takmer o 80%)

a zhoršil sa i katastrofický scenár. Cenou za zvýšený rizikový apetít je teda menšia stabilita, resp. vyššia fluktuácia vo výške úspor.

Uvedené výsledky sú ľahko vysvetliteľné prostredníctvom pravej časti obrázka. Z nej možno vyčítať vysokú koncentráciu úspor v rizikovom fonde, po celú dobu sporenia. Alokácia majetku do akciového fondu je obmedzená až v závere horizontu sporenia, a to nútene, legislatívnymi obmedzeniami. Sporiteľ s malou averziou voči riziku si teda v priemere (dodržujúc optimálnu investičnú stratégiu) nasporí vyšší dôchodok, avšak musí počítat' s možnými výraznými odchýlkami.

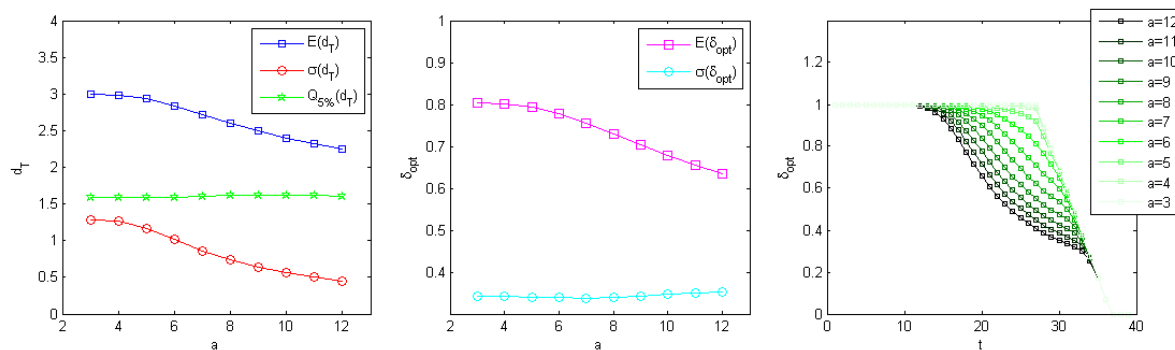


Obr. 5.9: $a = 5$. Naľavo stredná hodnota a smerodajná odchýlka úspor získaná zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. Vpravo stredná hodnota a štandardné odchýlky optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ v čase.

Obr. (5.10) vyobrazuje závislosť vlastností nasporených úspor v čase dôchodku (ľavá časť), priemerného optimálneho rozloženia úspor počas celej doby sporenia (stredná časť)³ a časovej štruktúry rozloženia úspor (pravá časť) od koeficientu rizikovej averzie.

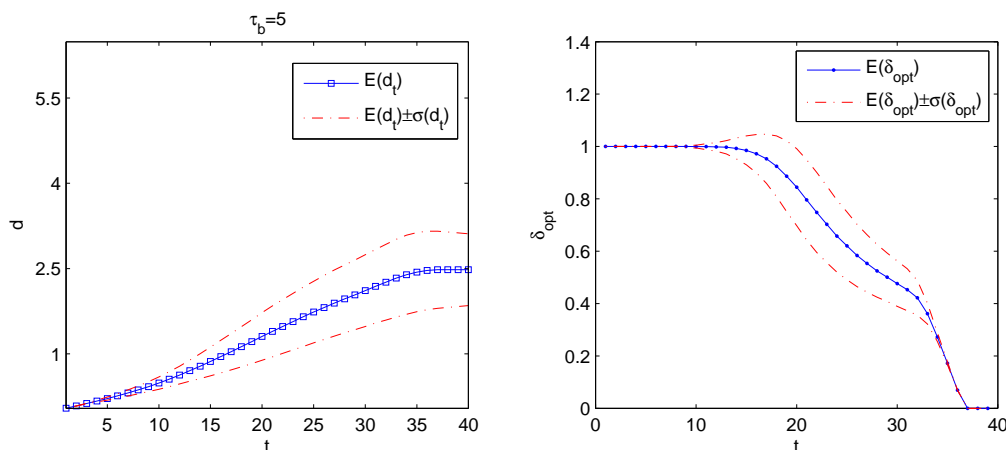
Sledované závislosti sú v súlade s očakávaniami. S rastúcim koeficientom averzie voči riziku klesá priemerná výška nasporeného majetku v čase dôchodku a klesá aj jeho volatilita (Obr. (5.10) vľavo). Vysvetlenie ponúkajú Obr. (5.10) v strede a vpravo - znižujúci sa podiel úspor v rizikovom fonde spôsobuje klesajúcu priemernú výšku úspor. Zaujímavým pozorovaním je tiež veľmi nízka závislosť 5%-ného kvantilu úspor, ktorý sa s meniacim sa koeficientom averzie k riziku naopak nemení takmer vôbec. Podobne zanedbateľná je i závislosť štandardnej odchýlky optimálneho rozloženia úspor vzhľadom ku koeficientu rizikovej averzie.

³Táto informácia môže byť skresľujúca. Nakoľko priemerujeme optimálne rozloženie úspor zo všetkých časov, môže nastať napr. situácia, že výsledný priemer je rovnaký v prípade postupného zvyšovania podielu úspor v akciovom fonde z 0 na 1 a aj v prípade postupného znižovania tohto podielu z 1 na 0. Stredná hodnota i volatilita úspor v týchto prípadoch by sa však radikálne líšila. Dôkladnejšia analýza si teda vyžaduje uviesť aj štruktúru optimálneho rozloženia úspor v čase pre každú hodnotu koeficientu averzie k riziku. Táto prídavná informácia je však už menej prehľadná, ako vidno z pravej časti Obr. (5.10).



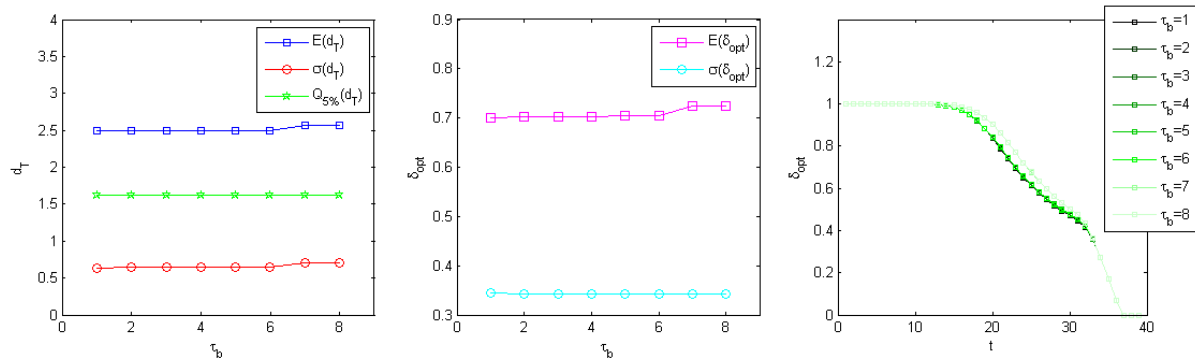
Obr. 5.10: Senzitivita vzhľadom k a . Naľavo stredná hodnota, smerodajná odchýlka a 5%-ný kvantil úspor v čase dôchodku v závislosti od koeficientu averzie k riziku, získané zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. V strede závislosť strednej hodnoty a štandardnej odchýlky optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ od koeficientu averzie k riziku (kumulatívne zo všetkých časov). Vpravo $E[\hat{\delta}_t(d_t, r_t)]$ v čase, pre rôzne a .

5.2.4 Zmena v splatnosti dlhopisov



Obr. 5.11: $\tau_b = 5$. Naľavo stredná hodnota a smerodajná odchýlka úspor získaná zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. Vpravo stredná hodnota a štandardné odchýlky optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ v čase.

Z Tab. (5.1) a Tab. (5.2), (P6), ako aj z Obr. (5.11) je zřejmé, že zmena v splatnosti dlhopisov dosiaľ najmenej ovplyvnila ako vývoj strednej hodnoty, tak aj optimálne rozloženie úspor v čase medzi jednotlivé fondy, ktoré zostalo takmer totožné ako pre modelový príklad.

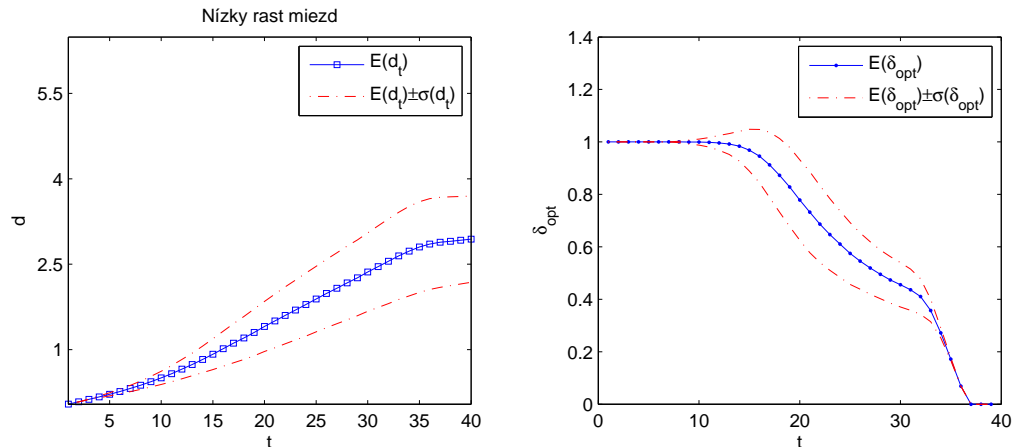


Obr. 5.12: Senzitivita vzhľadom k τ_b . Naľavo stredná hodnota, smerodajná odchýlka a 5%-ný kvantil úspor v čase dôchodku v závislosti od splatnosti dlhopisov, získané zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. V strede závislosť strednej hodnoty a štandardnej odchýlky optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ od splatnosti dlhopisov (kumulatívne zo všetkých časov). Vpravo $E[\hat{\delta}_t(d_t, r_t)]$ v čase, pre rôzne τ_b .

Nízku citlivosť sledovaných štatistík úspor v čase dôchodku vzhľadom k rôznej dĺžke splatnosti bezkupónových dlhopisov (z ktorých pozostáva nami modelovaný dlhopisový fond) možno ľahko vypožorovať i z Obr. (5.12) vľavo. Vidno, že stredná hodnota úspor, ich smerodajná odchýlka a tiež aj 5%-ný kvantil sú takmer nezávislé od splatnosti τ_b .

5.2.5 Zmena v raste miezd

V prípade analýzy senzitivity vzhľadom k výške nominálnych miezd, resp. vzhľadom k intenzite ich rastu som zvolil scenár poklesu miezd. Konkrétne počas najbližších rokov, t.j. 2013-2015 zostáva rast miezd na úrovni aká je uvedená v Tab. (4.3), avšak počas zvyšného obdobia sporenia nastane pokles každej z uvedených ročných hodnôt rastu miezd o 1 percentuálny bod. T.j. $\tilde{\beta}_t = \beta_t$ pre $1 \leq t \leq 3$ a $\tilde{\beta}_t = \beta_t - 1\%$ pre $4 \leq t \leq 39$.



Obr. 5.13: Nízky rast miezd. Naľavo stredná hodnota a smerodajná odchýlka úspor získaná zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. Vpravo stredná hodnota a štandardné odchýlky optimálneho podielu v akciovom фонде $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ v čase.

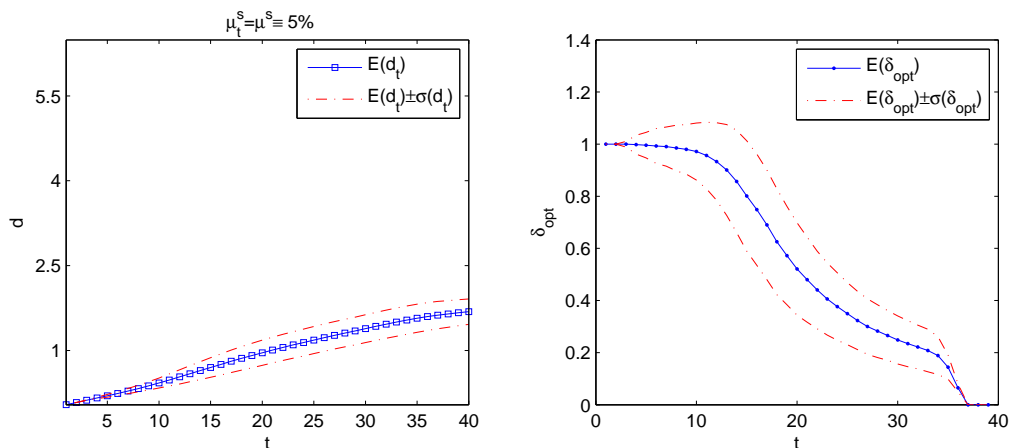
Pokles miezd sa v súlade s intuíciou odzrkadlil v náraste strednej hodnoty úspor, nakoľko sa znížil porovnávací základ, voči ktorému meriame veľkosť nasporeného majetku. Hrubo odhadnuté, mzdy v tomto scenári sa v priemere znížili približne o 18% a rovnako o približne 18% vzrástla stredná hodnota nasporeného majetku no i štandardná odchýlka úspor. Táto závislosť však nie je explicitne vyjadrená (teda ničím nemáme zaručené, že táto približná zhoda veľkosti zmeny rastu miezd a strednej hodnoty nasporeného majetku nebola iba náhodou) a mohla by byť spolu s inými dosiaľ sledovanými závislosťami objektom budúceho skúmania.

Čo sa týka optimálneho rozloženia úspor, zmeny oproti modelovému príkladu nie sú výrazné. Model však alokuje úspory do dlhopisového fondu o niečo skôr, čo je zrejme spôsobené nasporením vyššej sumy v skoršom čase a teda i znižovaním rizika v skoršom čase. Na základe modelu by teda v prípade očakávania výrazného poklesu miezd mal sporiteľ presúvať úspory do konzervatívnejších fondov v skoršom čase.

5.2.6 Zmena v hodnote driftu

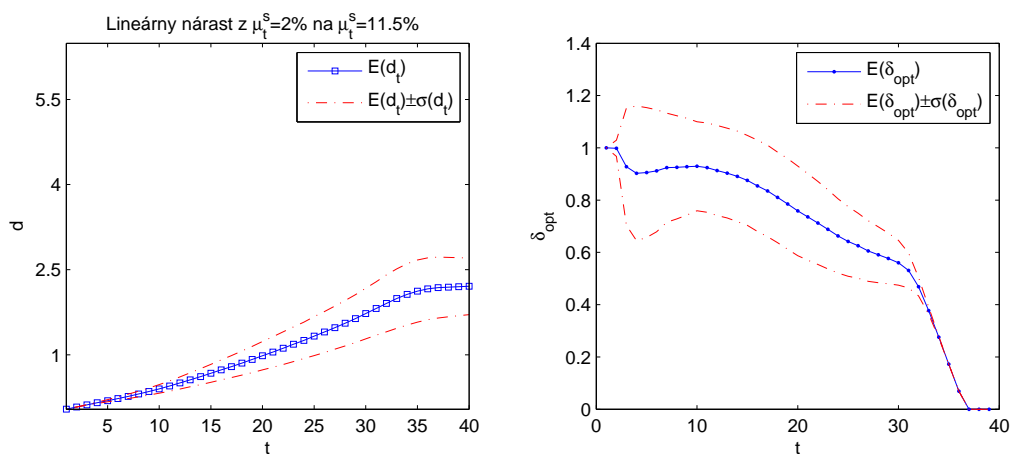
Obr. (5.14) zobrazuje výsledky v prípade predpokladaného poklesu hodnoty driftu z 8.44% na 5%. Potenciál výnosu nadobudnutého investovaním do akcií sa tak výrazne znižuje. To sa prejavilo jednak na nižšej hodnote nasporených úspor v čase odchodu na dôchodok, no i na menšej štandardnej odchýlke, t.j. riziku. Funkcia optimálneho rozloženia úspor tiež alokuje prostriedky do dlhopisového fondu v skoršom čase a v priemere optimálny podiel úspor v akciovom фонде klesol.

V prípade, že sporiteľ očakáva nízke akciové výnosy, neznamená to, že by sa mal úplne vyhnúť sporeniu v rizikovom фонде. Numerické výsledky implikujú iba skorší a rýchlejší prechod k dlhopisovým investíciám.



Obr. 5.14: $\mu_t^s \equiv 5\%$. Naľavo stredná hodnota a smerodajná odchýlka úspor získaná zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. Vpravo stredná hodnota a štandardné odchýlky optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ v čase.

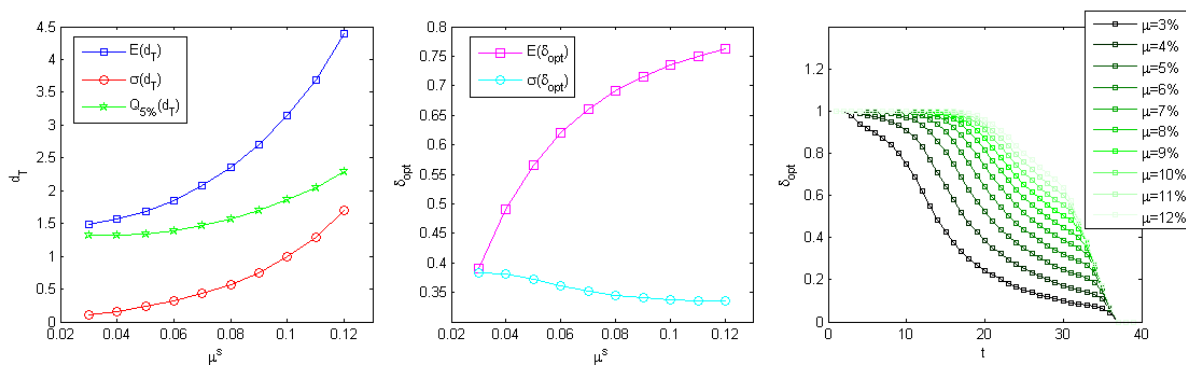
Výsledky v prípade lineárneho nárastu hodnoty driftu z nízkych úrovní na vysokú úroveň sú vyobrazené na Obr. (5.15). Nízky potenciál akciových výnosov v prvej polovici sporiaceho obdobia spôsobil celkovo o niečo nižšiu strednú hodnotu úspor pred dôchodkom. Oproti modelovému príkladu sa znížila aj volatilita, no 5. percentil sa zhoršil. Spôsobené je to tým, že v úvodnej fáze investovania model kvôli nízkym hodnotám driftu už po 3 rokoch začína alokovať časť úspor do dlhopisového fondu a následne túto časť (kvôli rastúcemu driftu) mierne zvyšuje.



Obr. 5.15: Lineárny nárast driftu z $\mu_t^s = 2\%$ na $\mu_t^s = 11.5\%$. Naľavo stredná hodnota a smerodajná odchýlka úspor získaná zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. Vpravo stredná hodnota a štandardné odchýlky optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ v čase.

Interpretácia vývoja samotnej alokačnej funkcie rozloženia úspor (Obr. (5.15) vpravo) je už o niečo zložitejšia. Jedno z možných vysvetlení by mohlo byť nasledovné. Počas prvých 3 rokov, na základe logiky dlhodobého investovania, aj napriek nízkemu

výnosu z akcií, model vkladá všetko do akciového fondu (treba mať napamäti začiatočnú hodnotu short rate na úrovni 0.5%, akcie sú teda stále atraktívnejšie). Následne model zníži akciovú expozíciu, zrejme kvôli priblíženiu sa výnosov dlhopisov k svojej dlhodobej úrovni, ktorá je vyššia ako v prvých rokoch. V ďalších rokoch model postupne investuje do akcií viac, keďže ich drift rastie. Približne okolo 11. roku ale opäť nastáva zlom, ktorý už je v súlade so základným výstupom - s rastúcim časom klesá alokácia do rizikových aktív. Tento pokles je ale výrazne pomalší ako v prípade základného výstupu, spôsobené to je práve neustále rastúcim akciovým driftom. Koniec sporiaceho obdobia je opäť ovplyvnený reguláciami, ktoré nútene znižujú pomer úspor v akciovom fonde.



Obr. 5.16: Senzitivita vzhľadom k μ^s . Naľavo stredná hodnota, smerodajná odchýlka a 5%-ný kvantil úspor v čase dôchodku v závislosti od driftu akcií, získané zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. V strede závislosť strednej hodnoty a štandardnej odchýlky optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ od driftu akcií (kumulatívne zo všetkých časov). Vpravo $E[\hat{\delta}_t(d_t, r_t)]$ v čase, pre rôzne μ^s .

Obr. (5.16) vľavo, zobrazujúci závislosť strednej hodnoty výšky úspor d_T a optimálneho podielu úspor v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$, prináša výsledky podľa očakávaní. S rastúcim akciovým driftom vystupujúcim v exponente vo funkcii (3.19) narastá ako stredná hodnota úspor, tak aj ich volatilita a 5%-ný kvantil. Všimnúť si môžeme, že závislosť sledovaných štatistík od driftu nie je lineárna, čo je zrejme spôsobené vystupovaním driftu μ^s v exponente.

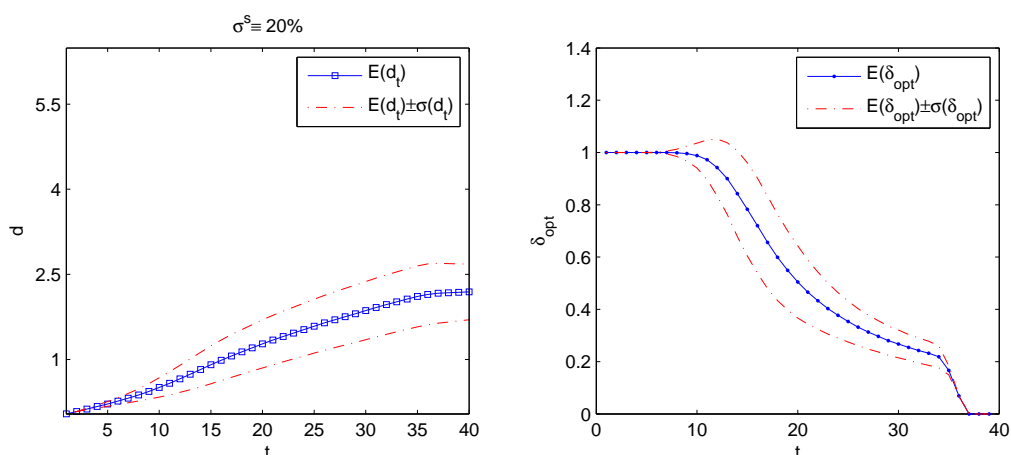
Nárast strednej hodnoty a volatility úspor samozrejme súvisí so zvyšujúcim sa (taktiež nie lineárne) optimálnym podielom akciovej zložky, do ktorej model alokuje úspory. Vidieť to zo strednej a pravej časti Obr. (5.16). Taktiež platí, že štandardná odchýlka optimálnych investičných rozhodnutí ($\sigma(\hat{\delta})$) klesá s rastúcim driftom, navzdory tomu, že volatilita samotných úspor stúpa.

5.2.7 Zmena v úrovni volatility

Na Obr. (5.17) sú zobrazené výstupy pre zvýšený parameter volatility akciových trhov. Z ľavého obrázku si možno všimnúť, že stredná hodnota nasporeného majetku

ako aj volatilita klesli. Vysvetlenie ponúka pravá časť obrázku. Pri vysokej volatilitě akciových investícií je model konzervatívnejší a ukladá skôr a väčší podiel úspor do dlhopisového fondu. Tým znižuje priemerný výnos, no i rizikovosť.

Implikáciou pre silne rizikovo averzného sporiteľa ($a = 9$) očakávajúceho vysokú volatilitu na trhu je teda na základe nášho modelu konzervatívnejšie investovanie. Toto odporúčanie ale opäť neznamená úplné zavrhnutie akciových fondov, ako vidno z horeuvedenej analýzy.



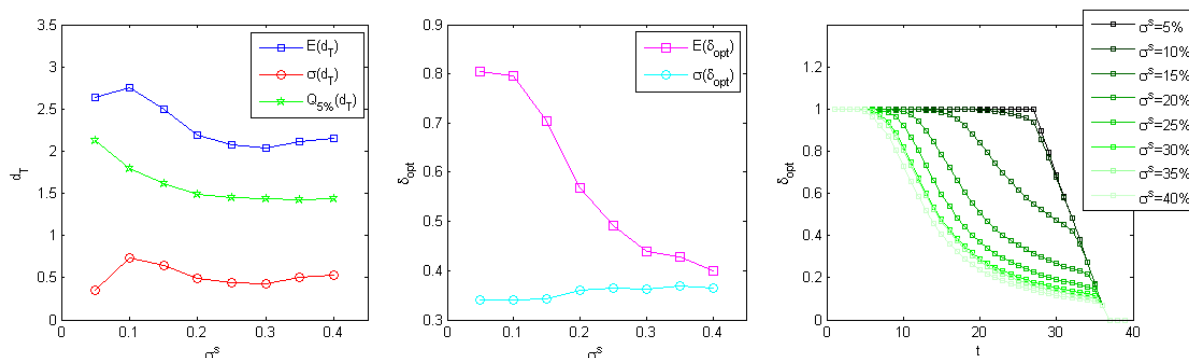
Obr. 5.17: $\sigma_t^s \equiv 20\%$. Naľavo stredná hodnota a smerodajná odchýlka úspor získaná zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. Vpravo stredná hodnota a štandardné odchýlky optimálneho podielu v akciovom фонде $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ v čase.

Azda najzaujímavejšou z pozorovaných závislostí, no i najt'azšie interpretovateľnou, je závislosť výšky úspor od akciovej volatility. Obráz o nej nám poskytujú grafy na Obr. (5.18). Z ľavej časti uvedeného obrázku možno vyčítať, že stredná hodnota i volatilita úspor v čase dôchodku najskôr v prípade $\sigma^s = 10\%$ vzrastie oproti $\sigma^s = 5\%$, no následne klesá až po hodnotu $\sigma^s = 30\%$, od ktorej začína mierne narastať. Popri tom 5%-ný kvantil úspor s rastúcou volatilitou klesá.

Možné vysvetlenie tohto javu je nasledovné. Zo strednej a pravej časti Obr. (5.18) vidno, že v prípade $\sigma^s = 10\%$ mierne klesne optimálny podiel úspor v akciovom фонде oproti $\sigma^s = 5\%$. To by za normálnych okolností malo znamenať pokles strednej hodnoty i volatility úspor. Tieto štatistiky však naopak vzrastú, pretože hoci o málo poklesne podiel úspor v akciovom фонде, výrazne sa zvýši volatilita (na relatívnej báze sa zdvojnásobí). To má za následok výrazné zvýšenie potenciálu rastu akciovej zložky, ktorý prevýši spomínaný malý pokles podielu úspor uložených v akciovom фонде a teda stredná hodnota i volatilita úspor vzrastú.⁴

⁴Fakt, že s nárastom volatility vzrastie i stredná hodnota úspor môže súvisieť s tým, ako akciový fond modelujeme. Keďže využívame lognormálne rozdelenú náhodnú premennú, resp. geometrický Brownov pohyb, pre ktorý platí $E[X(t)] = X(0)e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}}$, pozorovaný výsledok môže (no nemusí, keďže rovnako ako v predošlých skúmaných prípadoch nemáme explicitne vyjadrenú závislosť sledovaných štatistík od úrovne volatility) súvisieť s týmto vzťahom.

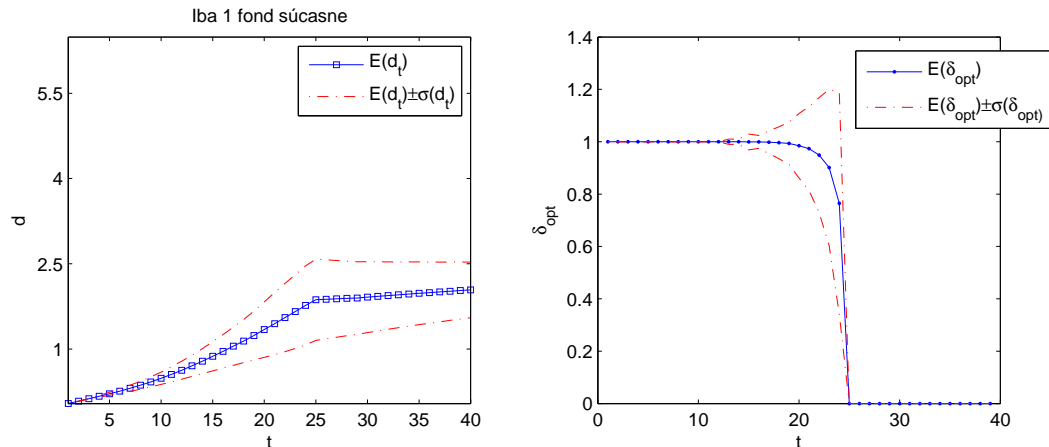
Následne, so zvyšujúcou sa akciovou volatilitou model signifikantne znižuje alokáciu úspor do akciového fondu, čo prevyšuje efekt rastúcej akciovej volatility a odráža sa na poklese strednej hodnoty úspor ako aj ich štandardnej odchýlky. Platí to až po hodnotu $\sigma^s = 30\%$, keď môžeme opäť spozorovať pre hodnoty $\sigma^s = 35\%$, resp. $\sigma^s = 40\%$, iba malý pokles optimálneho podielu úspor v akciovom fonde. Keďže ale akciová volatilita vzrastá, na základe rovnakej úvahy ako v predchádzajúcom odstavci mierne narastá i stredná hodnota a volatilita úspor.



Obr. 5.18: Senzitivita vzhľadom k σ^s . Naľavo stredná hodnota, smerodajná odchýlka a 5%-ný kvantil úspor v čase dôchodku v závislosti od volatility akcií, získané zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. V strede závislosť strednej hodnoty a štandardnej odchýlky optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ od volatility akcií (kumulatívne zo všetkých časov). Vpravo $E[\hat{\delta}_t(d_t, r_t)]$ v čase, pre rôzne σ^s .

5.2.8 Súčasne iba v jednom fonde

Pred aprílom 2012 legislatíva neumožňovala sporenie si v dvoch fondoch súčasne. V tejto časti zanalyzujem výsledky práve pre spomínaný prípad. Predpokladám teda, že sporiteľ si v danom roku môže uložiť úspory buď výhradne do negarantovaného, akciového fondu, alebo výlučne do garantovaného, dlhopisového fondu. Ďalej predpokladám obmedzenie stanovujúce povinné sporenie v dlhopisovom fonde najneskôr 15 rokov pred odchodom do dôchodku. V reči formulácie úlohy z časti (3.2) dostaneme $\delta \in \{0, 1\}$ a $\Delta_t = 1$ pre $1 \leq t \leq 24$, resp. $\Delta_t = 0$ pre $25 \leq t \leq 39$, čím sa numerický výpočet výrazne urýchli.



Obr. 5.19: Držba úspor súčasne iba v 1 fonde. Naľavo stredná hodnota a smerodajná odchýlka úspor získaná zo 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja výnosov akciového a dlhopisového fondu. Vpravo stredná hodnota a štandardné odchýlky optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ v čase.

Z Obr. (5.19) vľavo možno vypožorovať, že optimálne investičné rozhodnutie je v tomto prípade výrazne ovplyvnené stanoveným obmedzením na sporenie v akciovom fonde od 25. roku sporenia. Stredná hodnota úspor rastie v súlade s intuíciou najrýchlejšie počas obdobia bez investičných obmedzení, nakoľko model alokuje počas väčšiny tohto obdobia úspory do akciového fondu. S tým korešponduje i najvyššia hodnota štandardnej odchýlky nasporeného majetku práve v čase „zlomu“, t.j. uvedenia obmedzení do platnosti. Vynútený presun úspor do dlhopisových aktív sa počnúc 25. rokom prejavil na výraznom znížení volatility, no na konci investičného horizontu aj na nižšej strednej hodnote úspor.

Pravá časť obrázka vypovedá o optimálnej voľbe fondu v čase. Presnejšie, všimnúť si možno, že model začína alokovať úspory do dlhopisového fondu v neskoršom čase, ako tomu bolo pri možnosti sporiť si v dvoch fondech súčasne. Spôsobené je to nevyhnutnosťou voľby práve jedného fondu, pričom optimálnym riešením v takmer celej prvej polovici horizontu je negarantovaný fond. Približne od spomínanej polovice horizontu sporenia začína model voliť ako optimálny i dlhopisový fond, avšak táto voľba je od 25. roku výrazne ovplyvnená obmedzením. Najvyšší rozptyl vo voľbe optimálneho fondu je rok pred uvedením obmedzenia do platnosti.

Predpoklad	Hodnota	$E(d_T)$	$\sigma(d_T)$	$Q_{5\%}(d_T)$
(P1) Benchmark	Tab. (4.1) a (4.2)	2.4947	0.6441	1.6226
(P2) Nízke príspevky	$\tau_t \equiv 4\%$	1.7922	0.4747	1.1454
(P3) Staré príspevky	$\tau_t \equiv 9\%$	4.0357	1.0757	2.5808
(P4) Bez obmedzení	$\Delta_t \equiv 1$	2.8063	0.8028	1.7302
(P5) Nižšia riz. averzia	$a = 5$	2.9284	1.1535	1.5875
(P6) Dlhšia splatnosť	$\tau_B = 5$	2.4984	0.6487	1.6195
(P7) Nízky rast miezd	$\tilde{\beta}_{4-39} = \beta_{4-39} - 1\%$	2.9597	0.7774	1.8997
(P8) Pokles driftu	$\mu_t^s \equiv 5\%$	1.6873	0.2326	1.3415
(P9) Lin. nárast driftu	μ_t^s ako v (SC5)	2.2122	0.5093	1.5049
(P10) Nárast volatility	$\sigma_t^s \equiv 20\%$	2.1803	0.4912	1.4893
(P11) Súčasne v 1 fonde	$\delta_t \in \{0, 1\}$	2.0326	0.4924	1.4054

Tabuľka 5.1: Výsledky analýzy senzitivity - porovnanie s benchmarkom

Predpoklad	$E(d_T) - \sigma(d_T)$	$\frac{E(d_T) - \sigma(d_T)}{2\sigma(d_T)}$	$E(d_T) \setminus \sigma(d_T)$
(P1)	1.8506	1.2065	3.8732
(P2)	1.3175	0.8428	3.7752
(P3)	2.9600	1.8843	3.7517
(P4)	2.0035	1.2008	3.4958
(P5)	1.7748	0.6213	2.5386
(P6)	1.8496	1.2009	3.8511
(P7)	2.1823	1.4049	3.8072
(P8)	1.4546	1.2220	7.2527
(P9)	1.7029	1.1937	4.3439
(P10)	1.6891	1.1978	4.4385
(P11)	1.5402	1.0478	4.1277

Tabuľka 5.2: Výsledky analýzy senzitivity - analýza výnosu a rizika

5.3 Iné horizonty sporenia

V praktickom živote sa často stáva, že sporiteľ si nespóri na dôchodok po celú možnú predpokladanú dobu 40 rokov. Deje sa tak či už z dôvodu zamestnaní sa v neskoršom veku, práce v zahraničí pod iným dôchodkovým systémom (a následnom návrate na Slovensko) alebo sa jednoducho sporiteľ rozhodol vstúpiť, resp. vstúpil do 2. piliera⁵ až v neskoršej fáze svojho života. Zákon⁶ túto možnosť pripúšťa, nakoľko aktuálne stanovuje minimálnu dobu sporenia na 10 rokov. Rovnako môže nastať situácia, že sporiteľ si už dosiaľ sporil v rámci 2. piliera a disponuje v ňom už určitým majetkom, avšak plánuje zmeniť svoju investičnú stratégiu v rámci tohto piliera.

Cieľom tejto časti je analýza vývoja úspor sporiteľa, ktorý si spóri na horizonte kratšom, ako bolo dosiaľ analyzovaných $T = 40$ rokov, pre vybrané konkrétne horizonty. V analýze sú použité fixné parametre pre základný príklad, benchmark, uvedené v Tab. (4.1) a Tab. (4.2). Meniť sa bude doba sporenia T , pričom uvažovať budem horizonty sporenia o dĺžke 10, 15, 20, 25, 30 a 35 rokov. Pre každý z uvedených horizontov tiež uvádzam rozličnú štartovaciu hodnotu majetku d_1 . Tá zahŕňa ako novosporiteľa ($d_1 = \tau_1$), tak aj sporiteľa s už skôr naakumulovanými úsporami o výške $d_1 = \bar{d}_1$. Zvolené počiatočné hodnoty majetku pre skúmané horizonty sporenia sú uvedené v Tab. (5.3). Nasledujúce výsledky sú získané zo 100 000 Monte Carlo simulácií s využitím horeuvedených počiatočných parametrov.

T	$d_1^{(A)}$	$d_1^{(B)}$	$d_1^{(C)}$	$d_1^{(D)}$	$d_1^{(E)}$	$d_1^{(F)}$
10	τ_1	1.1	1.6	2.1	2.6	3.1
15	τ_1	0.9	1.3	1.7	2.1	2.5
20	τ_1	0.7	1.0	1.3	1.6	1.9
25	τ_1	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5
30	τ_1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
35	τ_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5

Tabuľka 5.3: Zvolené vstupné parametre - počiatočná hodnota majetku $d_1^{(\cdot)}$ pre rôzne horizonty sporenia.

Na Obr. (5.20) sú znázornené optimálne investičné stratégie pre rozličné horizonty sporenia a počiatočnú hodnotu majetku, s ktorým sporiteľ do sporiacej schémy vstupuje. Presnejšie, nakoľko sa jedná o simulácie,⁷ vyobrazená je stredná hodnota opti-

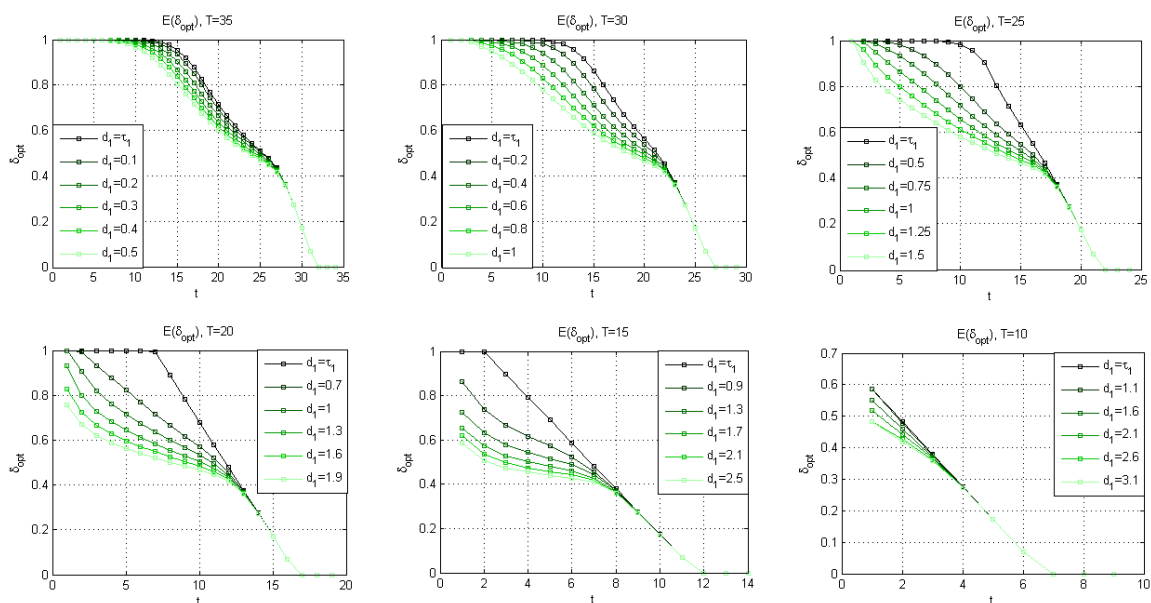
⁵V prípade jeho otvorenia, čo sa napríklad presne stalo v nedávnom období 1.9.2012-31.1.2013.

⁶Zákony č. 334/2011 Z. z. a č. 252/2012 Z. z., resp. v úplnom znení Zákon č. 28/2012 Z. z.

⁷Uvádzané optimálne rozloženie úspor medzi fondy, ako aj štatistiky strednej hodnoty, štandardnej odchýlky a kvantilu úspor pre rôzne horizonty sporenia predstavujú priemerné hodnoty zo vzorky 100 000 sporiteľov. Nekorešponujú teda presne s realitou daného špecifického sporiteľa (reprezentovaného jednou Monte Carlo simuláciou). Pre identifikáciu optimálnej investičnej stratégie pre jedného konkrétneho sporiteľa s daným horizontom sporenia je nutné každý rok t určiť optimálny podiel úspor v akciovom fonde na základe aktuálnej výšky majetku d_t a úrokovej miery r_t . To samozrejme model umožňuje, no pre obsiahlosť a prehľadnosť tejto informácie ju neuvádzam.

málneho podielu úspor v akciovom fonde v čase, pre konkrétnu dobu sporenia T a štartovaciu výšku úspor $d_1^{(\cdot)}$.

Z grafov možno vypočítať dva základné javy, ktoré sú v súlade s logikou motivačného príkladu z úvodu práce. Optimálna investičná stratégia sa s klesajúcou vstupnou výškou úspor stáva agresívnejšou, t.j. alokácia do akciového fondu rastie. Dôvodom je, že v prípade nízkych úspor je optimálne podstúpiť vyššie riziko, s potenciálom signifikantného výnosu, oproti prípadu vysokých úspor, v ktorom je optimálna vyššia úroveň ochrany naakumulovanej investície. Tiež platí, že čím je sporiaci horizont kratší, tým je optimálna stratégia konzervatívnejšia, t.j. alokuje väčší podiel úspor do garantovaného fondu. Spôsobené to je vysokou citlivosťou naakumulovaných úspor v období tesne pred dôchodkom voči prípadným trhovým výkyvom.



Obr. 5.20: Optimálne rozloženie úspor v čase pre rozličný horizont sporenia a štartovaciu výšku úspor. Každý z grafov reprezentuje konkrétny horizont sporenia (v poradí zľava doprava 35, 30, 25, 20, 15 a 10 rokov). Každý graf znázorňuje strednú hodnotu optimálneho podielu v akciovom fonde $\hat{\delta}_t(d_t, r_t)$ v čase, získanú zo 100 000 Monte Carlo simulácií, pre rôzne počiatkové hodnoty úspor $d_1^{(\cdot)}$ uvedené v Tab. (5.3).

Z Tab. (5.4), Tab. (5.5) a Tab. (5.6) vidno, že s rastúcou vstupnou hodnotou majetku (t.j. výškou úspor, s ktorou vstupujeme do uvedeného horizontu sporenia) rastú všetky pozorované štatistiky. Stredná hodnota nasporených úspor, ich štandardná odchýlka (volatilita), ako aj 5%-ný kvantil sú teda (v rámci tohto empirického experimentu) rastúce vzhľadom k počiatkovej výške úspor.

Závislosť pozorovaných štatistík od horizontu sporenia už nie je úplne jednoznačná, kvôli rozličným štartovacím hodnotám majetku. Pre identickú počiatkovú hodnotu úspor $d_1^{(A)} = \tau_1$ platí, že s rastúcim horizontom sporenia narastajú i sledované štatistiky strednej hodnoty, volatility a kvantilu, čo je úplne prirodzené. Pre roz-

ličné štartovacie hodnoty úspor to už platiť nemusí. Všimnúť si to možno napríklad v poslednom stĺpci Tab. (5.4), kde stredná hodnota úspor v prípade 10-ročného sporiaceho horizontu prevyšuje dôchodok nasporený na 35-ročnom horizonte. Spôsobené to je vysokou zvolenou štartovacou hodnotou majetku až na úrovni viac ako 3 ročných miezd v prípade 10-ročného sporenia oproti iba *polovici* ročnej mzdy, ako zvolenou počiatočnou hodnotou majetku pre 35-ročné sporenie. Efekt rozličnej štartovacej pozície v tomto prípade prevážil efekt dĺžky sporiaceho horizontu.

T	$d_1^{(A)}$	$d_1^{(B)}$	$d_1^{(C)}$	$d_1^{(D)}$	$d_1^{(E)}$	$d_1^{(F)}$
10	0.3793	1.2446	1.6470	2.0450	2.4420	2.8414
15	0.6324	1.3604	1.6653	1.9620	2.2620	2.5593
20	0.9231	1.5348	1.7727	1.9935	2.2040	2.4223
25	1.2575	1.7262	1.9489	2.1566	2.3505	2.5374
30	1.6293	1.8108	2.0251	2.2240	2.4166	2.5912
35	2.0460	2.1177	2.2479	2.3666	2.4813	2.5871

Tabuľka 5.4: $E(d_T)$. Stredná hodnota úspor na konci horizontu sporenia, získaná zo 100 000 Monte Carlo simulácií, pre rozličné horizonty sporenia a počiatočné hodnoty nasporeného majetku uvedené v Tab. (5.3).

T	$d_1^{(A)}$	$d_1^{(B)}$	$d_1^{(C)}$	$d_1^{(D)}$	$d_1^{(E)}$	$d_1^{(F)}$
10	0.0115	0.1257	0.1738	0.2167	0.2585	0.3042
15	0.0452	0.2176	0.2696	0.3157	0.3654	0.4100
20	0.1184	0.3069	0.3621	0.4062	0.4485	0.4938
25	0.2224	0.3830	0.4487	0.5107	0.5605	0.6095
30	0.3393	0.4066	0.4872	0.5562	0.6239	0.6774
35	0.4787	0.5041	0.5572	0.6066	0.6562	0.6935

Tabuľka 5.5: $\sigma(d_T)$. Štandardná odchýlka úspor na konci horizontu sporenia, získaná zo 100 000 Monte Carlo simulácií, pre rozličné horizonty sporenia a počiatočné hodnoty nasporeného majetku uvedené v Tab. (5.3).

T	$d_1^{(A)}$	$d_1^{(B)}$	$d_1^{(C)}$	$d_1^{(D)}$	$d_1^{(E)}$	$d_1^{(F)}$
10	0.3616	1.0563	1.3866	1.7205	2.0522	2.3828
15	0.5667	1.0446	1.2743	1.5042	1.7306	1.9626
20	0.7594	1.0997	1.2566	1.4149	1.5618	1.7167
25	0.9504	1.1967	1.3238	1.4431	1.5705	1.6869
30	1.1571	1.2515	1.3571	1.4639	1.5646	1.6586
35	1.3886	1.4245	1.4870	1.5410	1.5967	1.6527

Tabuľka 5.6: $Q_{5\%}(d_T)$. 5%-ný kvantil úspor na konci horizontu sporenia, získaný zo 100 000 Monte Carlo simulácií, pre rozličné horizonty sporenia a počiatočné hodnoty nasporeného majetku uvedené v Tab. (5.3).

5.4 Stresové testovanie

V tejto časti podrobujem vybrané investičné stratégie stresovému testovaniu v zmysle zmeny akciového driftu a na základe výsledných štatistík hodnotím ich výnosový a rizikový profil. Na účely tejto analýzy sú použité ako historické, tak aj umelo vytvorené scenáre zahŕňajúce napr. úrovňovú zmenu konštantného driftu alebo konkrétny vývoj driftu z daného historického obdobia, najmä pre americký akciový trh. Scenáre sú uvedené a popísané v časti (4.2) a v Tab. (4.5). Testované stratégie pozostávajú jednak z optimálnych stratégií korešpondujúcich k jednotlivým scenárom, no aj z ďalších, v dôchodkovom sporení rozšírene používaných, stratégií. Uvedené a podrobne popísané sú v časti (4.3) a v Tab. (4.6). Numerické a modelové parametre sú s výnimkou akciového driftu (ktorý sa mení na základe scenárov) fixné a rovnaké ako pre základnú úlohu (benchmark). Nájst' ich možno v Tab. (4.1) a Tab. (4.2).

5.4.1 Empirické vyhodnotenie jednotlivých stratégií

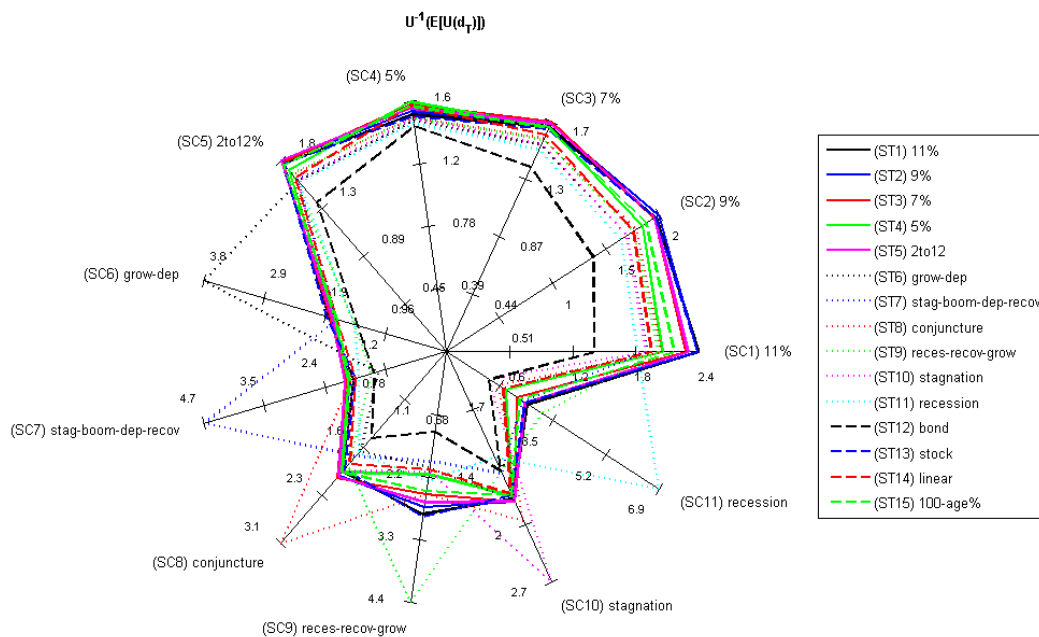
Pre každú z $11 \times 15 = 165$ možných kombinácií použitia danej stratégie za daného scenára som vykonal 100 000 Monte Carlo simulácií vývoja dôchodkových úspor. Určitostný ekvivalent, stredná hodnota, štandardná odchýlka a 5%-ný kvantil nasporeného dôchodku, ako aj nasporený majetok očistený o „takmer-bezrizikovo“ nasporený majetok (sporením si iba v dlhopisovom fonde) škálovaný na jednotku rizika sú pre každý scenár a každú stratégiu uvedené v Prílohe A.

Nakoľko s rastúcou rizikovosťou stratégie spravidla narastá stredná hodnota výšky nasporeného majetku, no rastie i volatilita (teda riziko výraznej odchýlky od tejto strednej hodnoty), nebolo by správne vyhodnocovať jednotlivé stratégie iba na základe výšky strednej hodnoty úspor. Práve z tohto dôvodu zavádzam okrem popisných štatistík strednej hodnoty, štandardnej odchýlky a kvantilu úspor aj dva ukazovatele reflektujúce v jednej hodnote ako výnos, resp. strednú hodnotu výšky úspor, tak aj rizikóvu averziu sporiteľa (ukazovateľ určitostný ekvivalent), resp. riziko fluktuácie tejto výšky (ukazovateľ pseudo Sharpeov pomer).

Za hlavný ukazovateľ berúci do úvahy rizikový profil sporiteľa budem uvažovať inverziu zo strednej hodnoty užitočnosti z úspor ($U^{-1}(E[U(d_T)])$), resp. *určitostný ekvivalent*. Invertovaním dostávame pre každú kombináciu stratégie a scenára jednu skalárnu hodnotu, meranú rovnako ako doposiaľ v jednotkách ročnej mzdy v čase sporenia na dôchodok. V tejto hodnote je teda zohľadnené zhodnotenie úspor i averzia k riziku. Súhrnne je vyobrazená na Obr. (5.21), konkrétne hodnoty sú uvedené v Tab. (9) v Prílohe A.

Ako doplnkový ukazovateľ používam upravenú verziu vo finančnej praxi obľúbeného ukazovateľa nadvýnosu na jednotku rizika, tzv. *Sharpeov pomer*. V mojom prípade je počítaný ako stredná hodnota úspor pri konkrétnej stratégii a scenári, očistená o strednú hodnotu úspor pri tom istom scenári, nasporených investovaním výlučne do dlhopisového fondu, a tento rozdiel je následne škálovaný volatilitou úspor. Do-

stávame tak ukazovateľ reprezentujúci zhodnotenie úspor v pomere k ich volatilitate. Vyobrazený je na Obr. (5.28), hodnoty sú uvedené v Tab. (13).

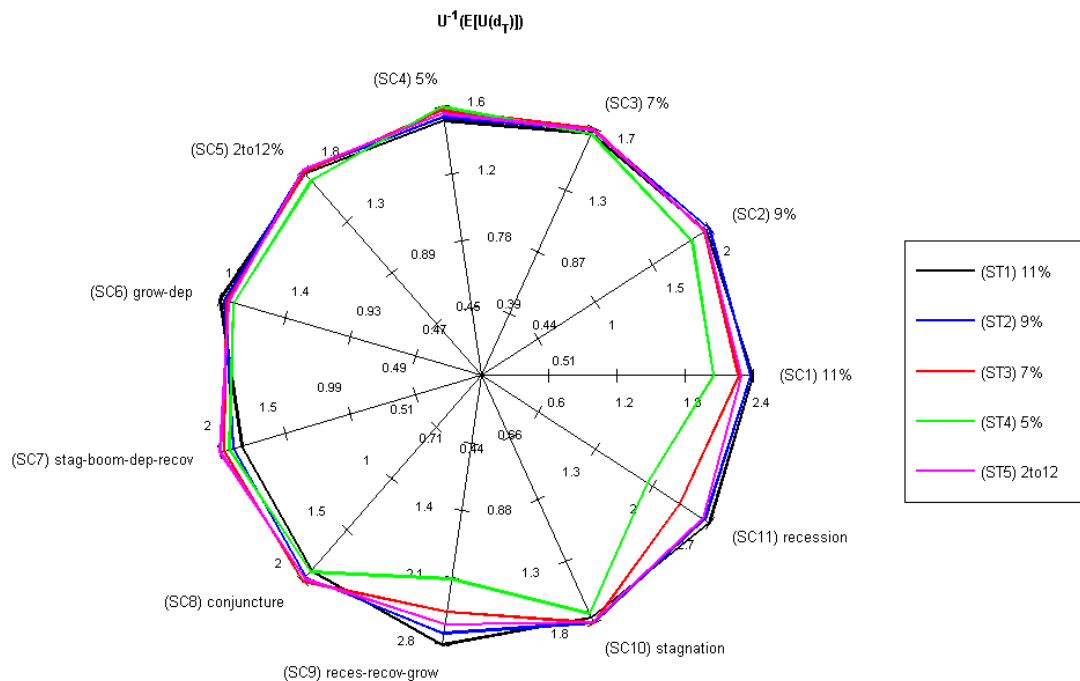


Obr. 5.21: Určitostný ekvivalent nasporeného dôchodku $U^{-1}(E[U(d_T)])$ pre jednotlivé stratégie za daného scenára.

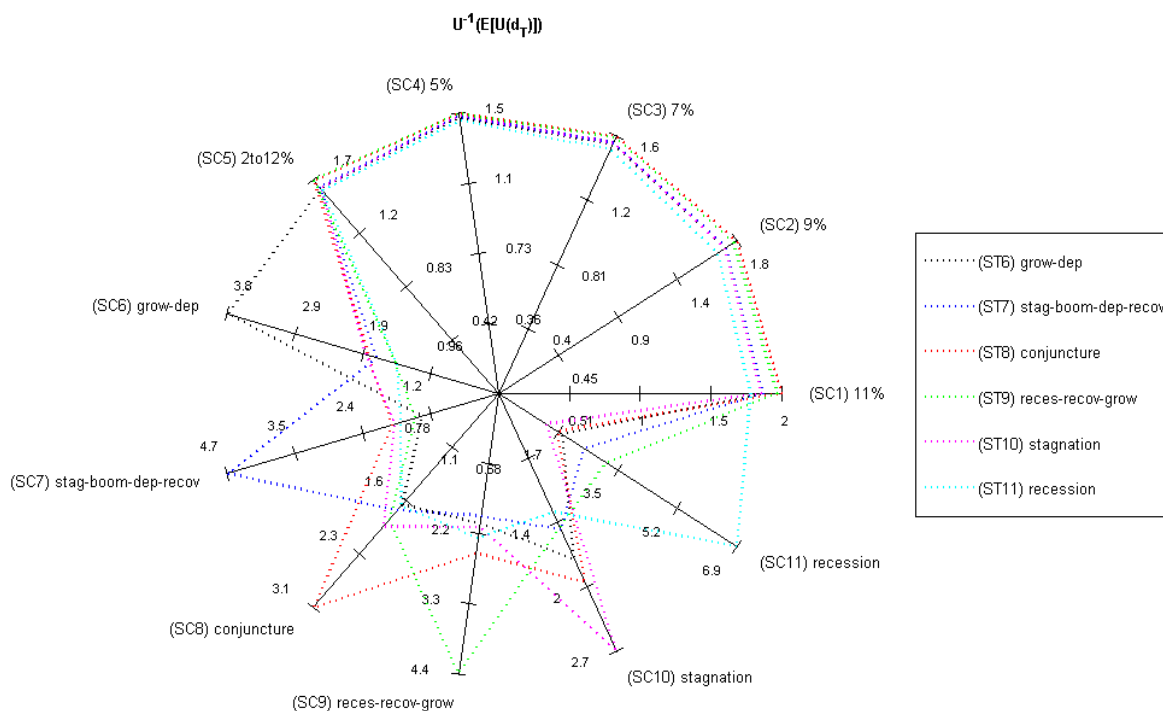
Pre lepšiu prehľadnosť uvádzam ešte raz Obr. (5.21) rozložený na tri podobrázky - Obr. (5.22), Obr. (5.23), Obr. (5.24), každý reprezentujúci jednu skupinu stratégií, resp. ich určitostný ekvivalent, pri všetkých scenároch.

V sledovanom ukazovateli určitostného ekvivalentu na Obr. (5.21) vizuálne dominujú optimálne stratégie (ST6)-(ST11) kvôli vysokým hodnotám ukazovateľa v prípade presného nastatia daného korešpondujúceho scenára. To je v súlade s logikou, keďže napr. v prípade nastatia scenára konjunktúry dominuje jednoznačne optimálna stratégia konjunktúry, „šitá tomuto scenáru na mieru“. Uvedené stratégie však nie sú zďaleka také flexibilné ako ostatné stratégie. Vidno, že v prípade nastatia iného scenára ako korešpondujúceho k danej stratégii, patria stratégie (ST6)-(ST11) k najhorším.

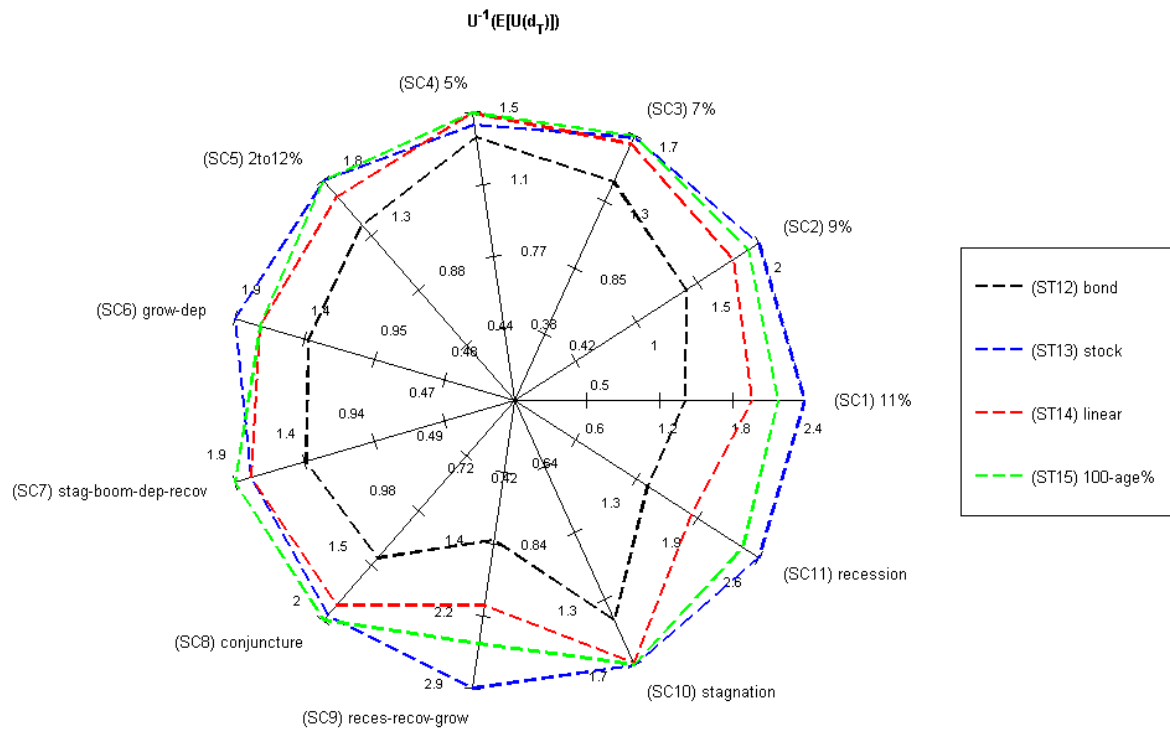
Zvyšné stratégie sú (s výnimkou najdefenzívnejšej stratégie (ST12) investovania do dlhopisového fondu po celú dobu sporenia) na Obr. (5.21) len ťažko rozlíšiteľné. Ich vyhodnocovanie uľahčia prídavné dekompozičné obrázky (5.22), (5.23) a (5.24). Spomínaná dlhopisová stratégia (ST12) je v sledovanom ukazovateli vo väčšine scenárov najhoršou alternatívou. Spôsobené je to až príliš konzervatívnym profilom stratégie, ktorý sporiteľov ukracuje o možné dlhodobé zhodnotenie.



Obr. 5.22: Určitostný ekvivalent nasporeného dôchodku $U^{-1}(E[U(d_T)])$ pre jednotlivé stratégie za daného scenára. Dekompozícia č. 1.

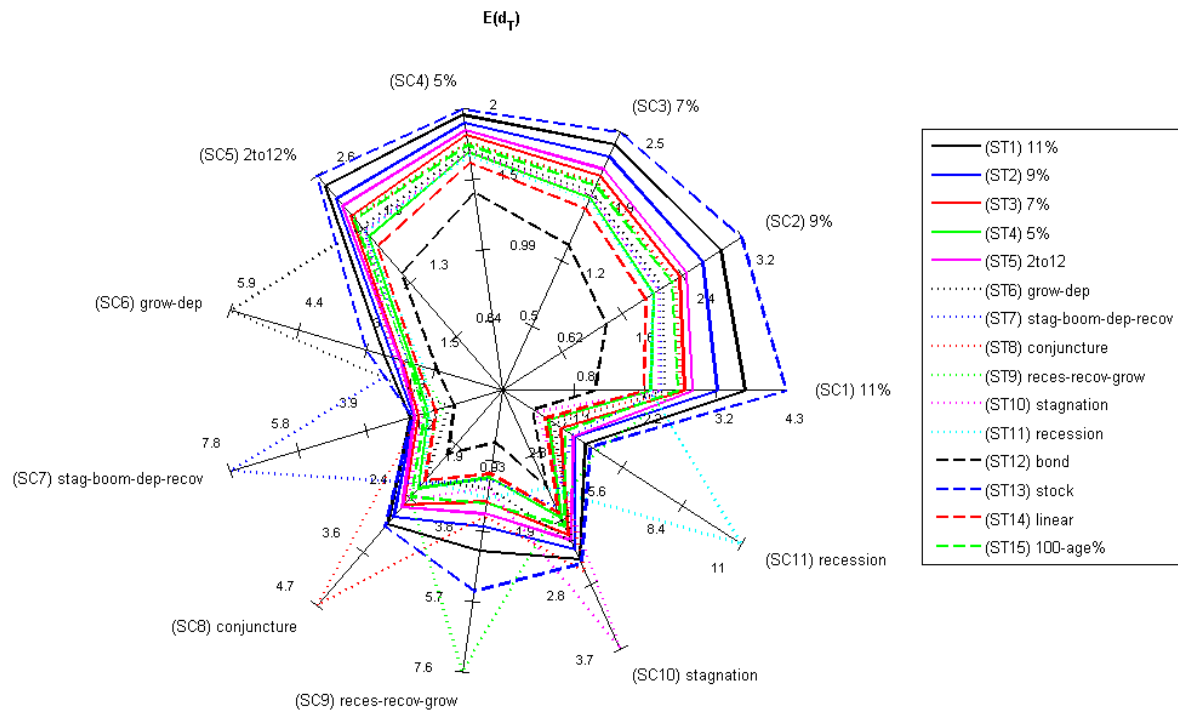


Obr. 5.23: Určitostný ekvivalent nasporeného dôchodku $U^{-1}(E[U(d_T)])$ pre jednotlivé stratégie za daného scenára. Dekompozícia č. 2.



Obr. 5.24: Určitostný ekvivalent nasporeného dôchodku $U^{-1}(E[U(d_T)])$ pre jednotlivé stratégie za daného scenára. Dekompozícia č. 3.

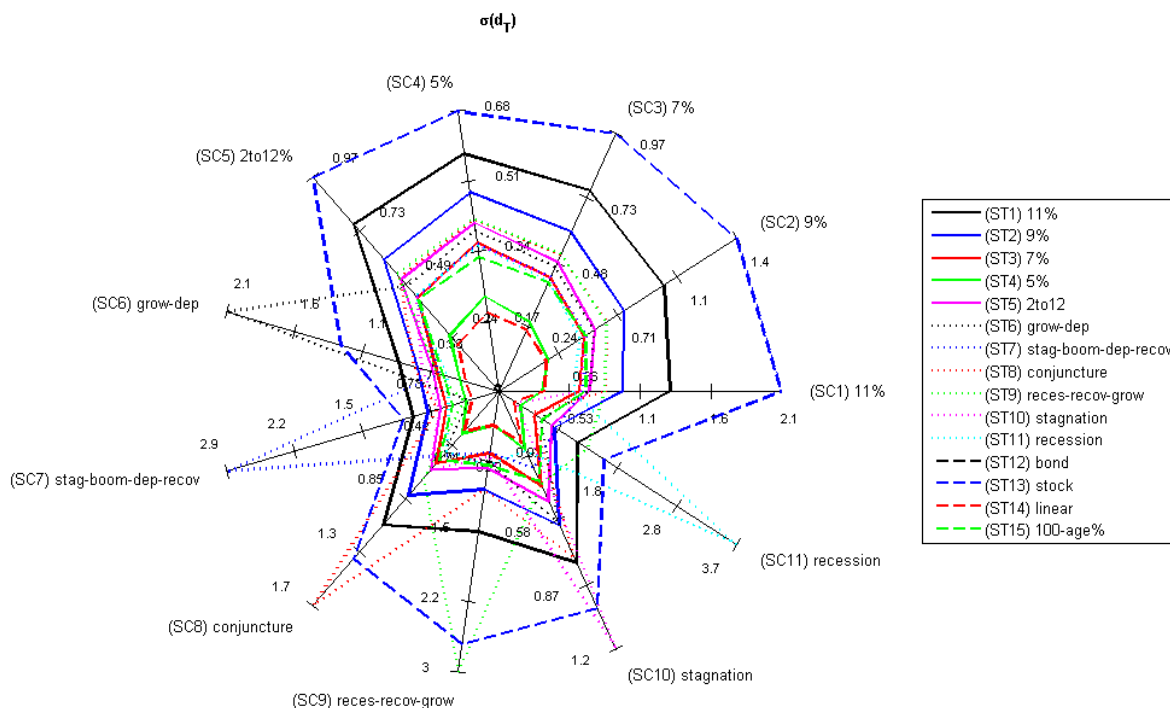
Čo sa týka štatistiky strednej hodnoty úspor na dôchodku pre jednotlivé stratégie za daných scenárov (Obr. (5.25) a Tab. (10)), platí v tomto prípade spravidla čím viac agresívna a rizikovejšia stratégia, tým vyššia stredná hodnota úspor. Výnimkou sú opäť stratégie zostavené na základe historického vývoja akciových trhov (ST6)-(ST11), ktoré vynikajú v prípade nastatia korešpondujúceho scenára a v zvyšných scenároch sú podpriemernými. Najhoršou je podľa očakávania stratégia investovania do dlhopisového fondu (ST12). Najlepšou v scenároch (SC1)-(SC5), resp. najlepšou v priemere je spomínaná najagresívnejšia stratégia investovania do akciového fondu maximálnou možnou mierou, (ST13).



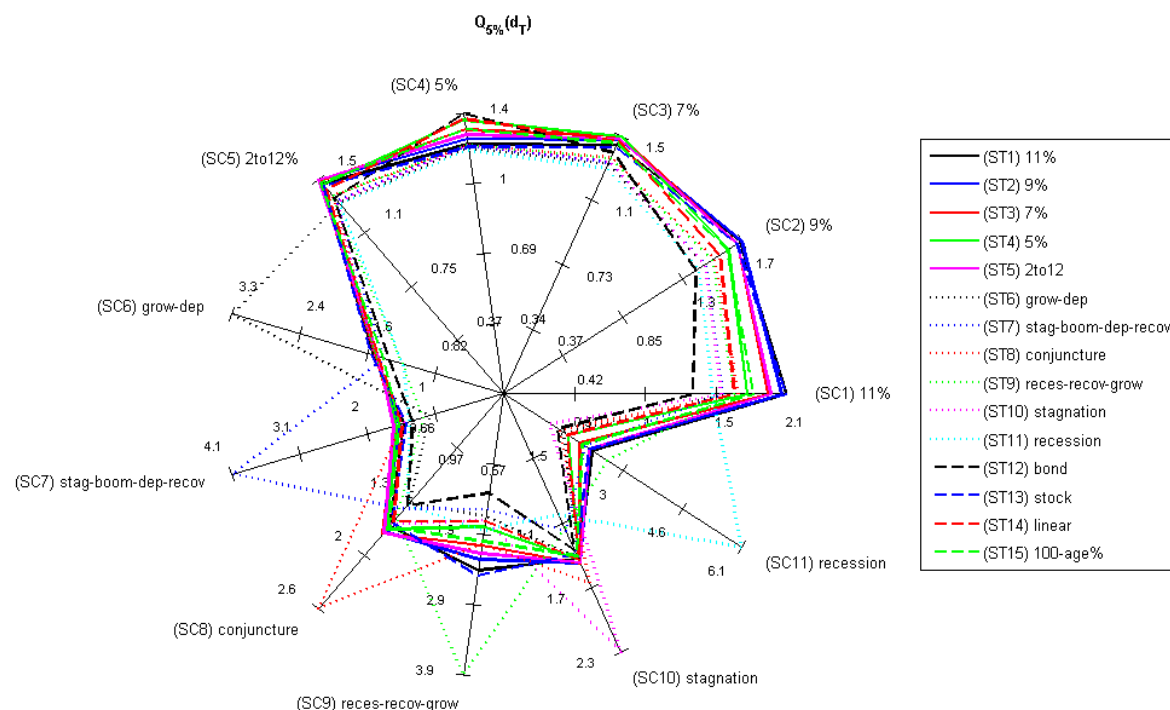
Obr. 5.25: Stredná hodnota nasporeného dôchodku $E(d_T)$ pre jednotlivé stratégie za daného scenára.

Nakoľko s vyšším potenciálnym výnosom je spojené i vyššie riziko, Obr. (5.26) a Tab. (11) popisujúce štandardnú odchýlku úspor na dôchodku pre jednotlivé stratégie za daných scenárov sú kvalitatívne podobné predošlému Obr. (5.25). Najrizikovejšou (s výnimkou scenárov (SC6)-(SC11)) je akciová stratégia (ST13), pokiaľ dlhopisová stratégia (ST12) je stratégiou s najnižšími výkyvmi.

5%-ný kvantil jednotlivých stratégií za daných scenárov, t.j. akýsi „katastrofický“ scenár v 5% najhorších prípadoch je vyobrazený na Obr. (5.27) a jeho hodnoty sú uvedené v Tab. (12).

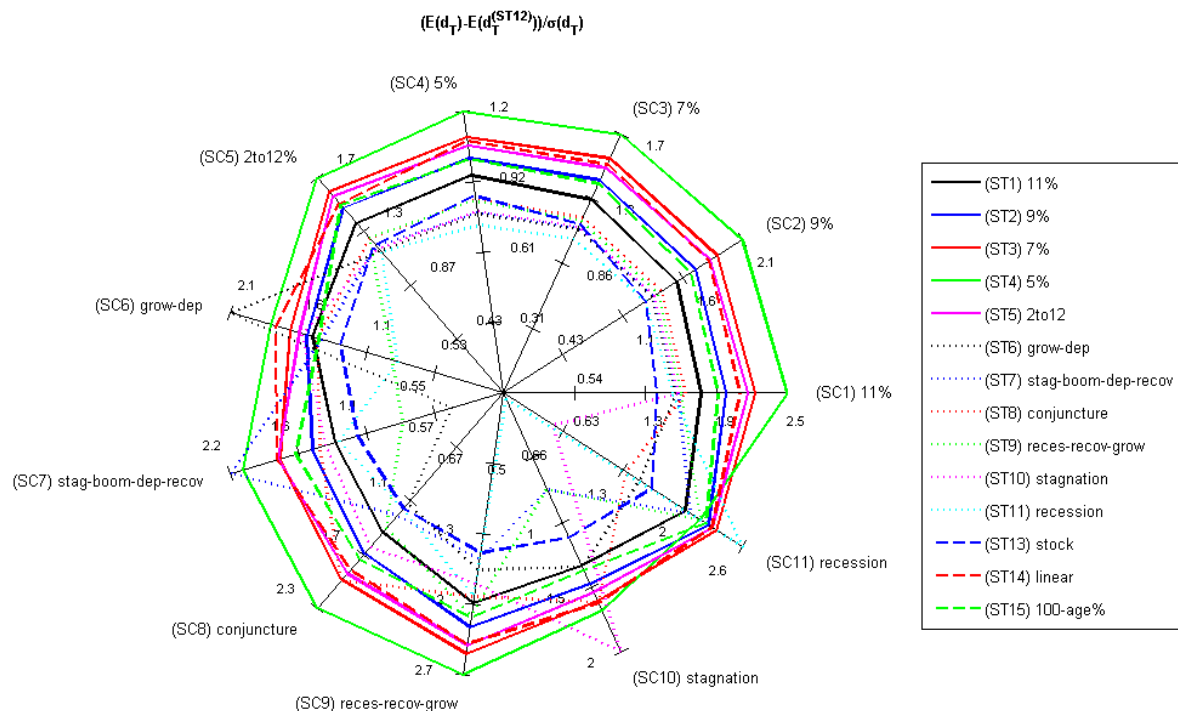


Obr. 5.26: Štandardná odchýlka nasporeného dôchodku σ_{d_T} pre jednotlivé stratégie za daného scenára.



Obr. 5.27: 5%-ný kvantil nasporeného dôchodku $Q_{5\%}$ pre jednotlivé stratégie za daného scenára.

Sledujúc nadvýnos na jednotku rizika (Sharpeov pomer) je najúspešnejšou stratégiou bezpochyby (ST4), optimálna stratégia pre scenár konštantného driftu na úrovni 5%. Najvyššiu hodnotu Sharpeho pomeru dosahuje v 7 z 11 scenárov. Vďaka za to predovšetkým nízkej volatilita a nie o toľko nižšiemu výnosu v porovnaní so zvyšnými stratégiami. Medzi najhoršie v sledovanom ukazovateli patria (ST6)-(ST11), (opäť s výnimkou nastatia scenára, pre ktorý sú optimálne) a vysoko riziková (ST13), stratégia výlučne akciových investícií.



Obr. 5.28: Pseudo Sharpeov pomer nasporeného dôchodku $\frac{E(d_T) - E(d_T^{(ST12)})}{\sigma(d_T)}$ pre jednotlivé stratégie za daného scenára.

5.4.2 Investičné odporúčania

Dosiaľ boli jednotlivé stratégie podrobené stresovému testovaniu vyhodnotenú iba empiricky, s využitím obrázkov. Prirodzenou otázkou, ktorá však vyvstáva z uvedenej analýzy je, ktorú konkrétnu z uvedených stratégií možno vybrať ako „najlepšiu za každého počasia“.

Odpoveď na túto otázku samozrejme závisí od toho, ako definujeme hodnotiace kritérium pre stratégie. Pre niektorých sporiteľov by to mohla byť napríklad stratégia, ktorá má zo všetkých najvyššiu strednú hodnotu úspor spriemerovanú zo všetkých scenárov, tzv. *max-mean* prístup. Pre hazardérov napr. stratégia, ktorej najlepší scenár v zvolenom sledovanom ukazovateli (stredná hodnota úspor, určitostný ekvivalent alebo Sharpeov pomer) je najlepší, tzv. *max-max* prístup. No a napr. pre rizikovo

averzného sporiteľa môže byť najlepšou stratégiou tá, ktorej najhorší scenár daného ukazovateľa je najmenej katastrofický, tzv. *max-min* prístup.

V tejto časti uvediem najlepšie stratégie v zmysle všetkých hore spomenutých kritérií, i niektorých ďalších. Každé kritérium pritom aplikujem na jeden konkrétny ukazovateľ. Sporiteľ si tak môže zvoliť ukazovateľ a kritérium najviac relevantné pre jeho rizikový profil, resp. postoj k investovaniu. Ja budem za primárny, najviac relevantný ukazovateľ považovať určitostný ekvivalent ($U^{-1}(E[U(d_T)])$).

	$U^{-1}(E[U(d_T)])$	$\frac{E(d_T) - E(d_T^{(ST12)})}{\sigma(d_T)}$
<i>Max-Min</i>	(ST4) 5%	(ST4) 5%
<i>Max-Mean</i>	(ST11) recession	(ST4) 5%
<i>Max-Median</i>	(ST5) 2to12	(ST4) 5%
<i>Max-E[U]</i>	(ST3) 7%	(ST4) 5%
<i>Max-Max</i>	(ST11) recession	(ST11) recession

Tabuľka 5.7: Najlepšie stratégie v zmysle ukazovateľa uvedeného v stĺpci, aplikovaním kritéria uvedeného v riadku na všetky scenáre. Stratégie sú identifikované na základe výsledkov stresových scenárov uvedených v Tab (9)-(13) v Prílohe A.

	$E(d_T)$	$\sigma(d_T)^8$	$Q_{5\%}(d_T)$
<i>Max-Min</i>	(ST13) stock	(ST12) bond	(ST12) bond
<i>Max-Mean</i>	(ST13) stock	(ST12) bond	(ST11) recession
<i>Max-Median</i>	(ST13) stock	(ST12) bond	(ST5) 2to12
<i>Max-E[U]</i>	(ST13) stock	(ST12) bond	(ST3) 7%
<i>Max-Max</i>	(ST11) recession	(ST12) bond	(ST11) recession

Tabuľka 5.8: Najlepšie stratégie v zmysle ukazovateľa uvedeného v stĺpci, aplikovaním kritéria uvedeného v riadku na všetky scenáre. Stratégie sú identifikované na základe výsledkov stresových scenárov uvedených v Tab (9)-(13) v Prílohe A.

Z Tab. (5.7) a Tab. (5.8) možno vyčítať konkrétne investičné odporúčania zostavené na základe špecifického kritéria (riadky) sledujúc špecifický ukazovateľ (stĺpec). Konkrétne napríklad sledujúc jeden z najrelevantnejších ukazovateľov (berúci do úvahy mieru zhodnotenia úspor aj rizikovú averziu sporiteľa), určitostný ekvivalent (1. stĺpec Tab. (5.7)), platí, že stratégia *maximalizujúca najhorší* možný scenár je (ST4), t.j. optimálna stratégia pre prípad konštantného 5%-ného driftu.

⁸Pre prípad volatility sledujeme samozrejme opačné kategórie, t.j. *Min-Max*, *Min-Mean*, *Min-Median*, *Min-E[U]* a *Min-Min*.

Pre rovnaký ukazovateľ je stratégiou *maximalizujúcou priemer* zo všetkých scenárov stratégia (ST11), optimálneho investovania na základe historického scenára recesie. Spôsobené to však je najmä veľmi vysokou hodnotou ukazovateľa v prípade nastatia (SC11), ktorá výrazne ovplyvnila celý priemer. Vidno to aj z piateho kritéria, kritéria *maximalizácie maximálneho scenára*, ktoré taktiež spĺňa (ST11). Rovnako to vidno i z faktu, že stratégia, ktorá *maximalizuje medián* scenárov je odlišná, konkrétne (ST5), t.j. optimálna stratégia v prípade lineárneho nárastu driftu. Stratégiu (ST11) by som preto pre nestabilitu a možné vysoké fluktuácie sporiteľom neodporúčal.

Štvrtým (4. riadok v Tab. (5.7) a Tab. (5.8)) z použitých kritérií (a posledným dosiaľ nespomínaným) je *maximalizácia strednej hodnoty užitočnosti* zo všetkých scenárov. Stratégiou spĺňajúcou toto kritérium je (ST3), optimálna stratégia pre prípad konštantného 7%-ného driftu.

Rovnaký rozbor možno vykonať aj pre ostatné ukazovatele. Napr. v prípade ďalšieho ukazovateľa zohľadňujúceho výnos i riziko, Pseudo-Sharpeho pomeru (2. stĺpec Tab. (5.7)), je na základe štyroch z piatich kritérií najlepšou stratégiou (ST4), optimálna stratégia pre prípad konštantného 5%-ného driftu. Spôsobené to je nízkou volatilitou úspor pri investovaní držiac sa uvedenej stratégie, pri zachovaní strednej hodnoty úspor len o málo nižšej ako v prípade ostatných stratégií. Sporiteľovi, ktorého zaujíma predovšetkým výška úspor v pomere k ich volatilita tak možno odporučiť práve stratégiu (ST4).

Na druhej strane, sporiteľovi, ktorého hlavným cieľom je eliminovať akékoľvek výkyvy vo výške úspor v podobe ich volatility, možno odporučiť stratégiu investovania výlučne do dlhopisového fondu, (ST12). Táto stratégia je najlepšou na základe všetkých kritérií, pokiaľ sledujeme volatilitu úspor. Sporiteľ sa však voľbou tejto stratégie musí zmieriť s nižším potenciálom výnosu oproti ostatným stratégiám.

Malá časť riziko vyhľadávajúcich sporiteľov, ktorá nesleduje volatilitu a teda i možný výrazný pokles, a zaujíma sa predovšetkým o potenciál čo možno najvyššieho zhodnotenia úspor môže siahnúť po stratégií maximálnej novej alokácie úspor do akciového fondu, (ST13). Uvedená stratégia je najúspešnejšou v 4 z 5 sledovaných kritérií. Stratégiu však odporúčam s výstrahou možných vysokých odchýlok od nasimulovanej strednej hodnoty.

Záver

V práci som sa zaoberal analýzou investičných stratégií v druhom dôchodkovom pilieri na Slovensku. Sporenie v rámci tohto príspevkovo definovaného piliera som modeloval na základe dynamického stochastického akumuláčného modelu, publikovaného v [1]. Model som rozšíril o využitie bezkupónových dlhopisov s ľubovoľnou splatnosťou v modelovanom dlhopisovom fonde. Okrem toho som použil aktualizované parametre pre CIR model a geometrický Brownov pohyb, a priblížil tým výstupy bližšie súčasnej trhovej realite. Zákonné obmedzenia pri sporení a výšku príspevkov som prispôbil tak, aby reflektovali súčasnú legislatívu, a medziročný rast miezd som aktualizoval o dostupné prognózy.

Hlavným prínosom práce bolo okrem prispôbenia dynamického stochastického akumuláčného modelu súčasnej legislatíve, a jeho rozšírení o dlhopisy s ľubovoľnou splatnosťou, vytvorenie vlastných stresových scenárov vývoja akciových trhov. Na základe týchto stresových scenárov boli optimálne investičné stratégie, spolu s heuristickými, v praxi často používanými stratégiami, spätne otestované a podrobené ďalšej analýze. Práca sa tiež venovala úlohe bez budúcich príspevkov (jednorazovej investícii), pre ktorú bolo odvodené tvrdenie o nezávislosti optimálnej investičnej stratégie od veľkosti majetku. Tvrdenie bolo ďalej v práci využívané pri numerických výpočtoch, pri vysokých hodnotách nasporeného majetku (pri ktorých sa výška príspevkov voči veľkosti majetku stávala zanedbateľnou).

V práci získané výsledky boli v súlade s očakávaniami i s pôvodným článkom [1]. Potvrdzujú, že dynamickou voľbou dôchodkových fondov v čase vieme dosiahnuť lepší pomer výšky úspor voči riziku oproti pasívnemu investovaniu. Rovnako utvrdzujú v logike agresívnejších investičných stratégií v počiatočnej fáze sporenia, a postupnému prechodu ku konzervatívnejším stratégiám v čase blížiaceho sa dôchodku.

Výstupy z práce ďalej umožňujú nahliadnuť senzitivite sledovaných štatistík dôchodkových úspor vzhľadom k meniacim sa vstupom do modelov, parametrom, trhovým i makroekonomickým podmienkam. V súlade s prirodzenou logikou sa ukázalo, že zákonným znížením pravidelných príspevkov z 9% mesačnej mzdy na 4% sa výrazne znižuje potenciál nasporenia dostatočne vysokého dôchodku v rámci 2. piliera. Tiež sa ukázalo, že súčasné vládne obmedzenia na podiel úspor v akciovom fonde v čase blížiaceho sa dôchodku nie sú optimálne, keďže v prípade ich neexistencie by ich model prekračoval. Rovnako sa ukazuje, že umožnenie sporiteľom sporiť si v 2 fondoch súčasne zvyšuje strednú hodnotu nasporených úspor, a teda i potenciál lepšieho

dôchodku.

Uvedené výsledky tiež zahŕňajú analýzu rôznych horizontov sporenia v kombinácii s rozličnými vstupnými hodnotami úspor. Opäť sa ukazuje, že čím neskôr sporiteľ vstupuje do druhého piliera, tým by mal byť konzervatívnejší. Na druhej strane, s čím menším vstupným kapitálom začína sporiť, tým agresívnejšiu stratégiu by mal na základe modelu zvoliť.

Stresové testovanie analyzovaných investičných stratégií umožnilo odsledovať charakter a veľkosť zmien pozorovaných štatistík nasporeného dôchodku, pod vplyvom neočakávaných zmien na akciovom trhu. Prezentované boli investičné odporúčania pre rozličné rizikové profily sporiteľov sledujúcich rôzličné ukazovatele. Ako príklad, pre rizikovo averzného sporiteľa maximalizujúceho výstup z najhoršieho možného scenára možno odporučiť optimálnu stratégiu predpokladajúcu dlhodobu konštantný, 5%-ný výnos akciového trhu. Táto stratégia sa ukázala byť najlepšou spomedzi uvažovaných stratégií v zmysle oboch relevantných ukazovateľov - určitosného ekvivalentu i nadvýnosu na jednotku rizika. Pre spomínané ukazovatele sa ukázala byť lepšou oproti iným, v praxi využívaným, heuristickým stratégiám, a tiež oproti stratégiám predpokladajúcim konkrétny vývoj akciového trhu na základe histórie.

Vo všeobecnosti možno na základe uvedených analýz pre rizikovo averzných sporiteľov odporučiť skôr optimálne stratégie počítané za predpokladu dlhodobu konštantných úrovní výnosov akciového trhu. To aj napriek tomu, že v prípade niektorých ukazovateľov dosahovali o niečo horšie výsledky ako stratégie počítané za predpokladu konkrétneho historického vývoja akciového trhu. Druhá menovaná skupina stratégií totiž nie je stabilná, a v prípade nenastatia konkrétneho predpokladaného scenára je náchylná na vysoké straty. Slúži preto skôr na účely stresového testovania a nie ako investičné odporúčanie.

Literatúra

- [1] I. Melicherčík and D. Ševčovič, "Dynamic stochastic accumulation model with application to pension savings management," *Yugoslav Journal of Operations Research*, vol. 20, no. 1, pp. 1–24, 2010.
- [2] P. A. Samuelson, "Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming," *The Review of Economics and Statistics*, vol. 51, no. 3, pp. 239–46, 1969.
- [3] S. Kilianová, I. Melicherčík, and D. Ševčovič, "A dynamic accumulation model for the second pillar of the slovak pension system," *Czech Journal of Economics and Finance (Finance a uver)*, vol. 56, no. 11-12, pp. 506–521, 2006.
- [4] S. Kilianová, "The second pillar of the slovak pension system - interest rate targeting," *Journal of Electrical Engineering*, vol. 57, no. 1, pp. 51–54, 2006.
- [5] Z. Macová and D. Ševčovič, "Weakly nonlinear analysis of the hamilton-jacobi-bellman equation arising from pension savings management," *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, vol. 7, no. 4, pp. 619–638, 2010.
- [6] T. Jakubík, "Analýza citlivosti dynamického akumuláčného modelu pre druhý pilier dôchodkového systému na slovensku," diplomová práca, Univerzita Komenského, Bratislava, 2008.
- [7] T. Jakubík, I. Melicherčík, and D. Ševčovič, "Sensitivity analysis for a dynamic stochastic accumulation model for optimal pension savings management," *Ekonomický časopis*, no. 8, pp. 756–771, 2009.
- [8] I. Melicherčík, L. Olšarová, and V. Úradníček, *Kapitoly z finančnej matematiky*. Epos, 2005. ISBN 80-8057-651-3.
- [9] D. Ševčovič, B. Stehlíková, and K. Mikula, *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. STU, 2009. ISBN 978-80-227-3014-3.
- [10] J. C. Cox, J. Ingersoll, J. E., and S. A. Ross, "A theory of the term structure of interest rates," *Econometrica*, vol. 53, no. 2, pp. 385–407, 1985.
- [11] M. Halická, P. Brunovský, and P. Jurča, *Optimálne riadenie*. Epos, 2009. ISBN 978-80-8057-793-3.

- [12] P. Brunovský, "Mikroekonómia (učebný text)." http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/brunovsky/mE_2012.pdf, 2011.
- [13] P. C. Fishburn, *Utility Theory for Decision Making*. John Wiley & Sons, 1970. ISBN 0-471-26060-6.
- [14] P. P. Wakker, "Explaining the characteristics of the power (crra) utility family," *Health Economics*, vol. 17, no. 12, pp. 1329–1344, 2008.
- [15] B. Vyhnánková, "Metódy na určenie štruktúry úrokovej miery," bakalárska práca, Univerzita Komenského, Bratislava, 2011.
- [16] I. Friend and M. E. Blume, "The demand for risky assets," *American Economic Review*, vol. 65, no. 5, pp. 900–922, 1975.
- [17] K. J. Arrow, *Essays in the theory of risk-bearing*. North-Holland, Amsterdam, 1971. ISBN 0-7204-3047-X.
- [18] P.-A. Chiappori and M. Paiella, "Relative risk aversion is constant : Evidence from panel data," *Journal of the European Economic Association*, vol. 9, no. 6, pp. 1021–1052, 2011.
- [19] R. Mehra and E. C. Prescott, "The equity premium: A puzzle," *Journal of Monetary Economics*, vol. 15, no. 2, pp. 145–161, 1985.
- [20] L. M. I. Harrison, G. W. and E. E. Rutström, "Estimating risk attitudes in denmark: A field experiment," *The Scandinavian Journal of Economics*, vol. 109, no. 2, pp. 341–368, 2007.
- [21] J. Yu and P. C. Phillips, "Gaussian estimation of continuous time models of the short term interest rate," Cowles Foundation Discussion Papers 1309, Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University, 2001.
- [22] A. Bergstrom, "Continuous time stochastic models and issues of aggregation over time," in *Handbook of Econometrics*, vol. 2 of *Handbook of Econometrics*, ch. 20, pp. 1145–1212, Elsevier, 1984.
- [23] I. Melicherčík and D. Ševčovič, "Dynamic model of pension savings management with stochastic interest rates and stock returns," in *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*, Springer, 2012. Proceedings of the international conference MAF 2010.
- [24] R. C. Merton, "Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case," *The Review of Economics and Statistics*, vol. 51, no. 3, pp. 247–57, 1969.
- [25] D. Ševčovič and A. Urbánová Csajková, "On a two-phase minmax method for parameter estimation of the cox, ingersoll, and ross interest rate model," *Central European Journal of Operational Research*, no. 13, pp. 169–188, 2005.

- [26] D. Brigo, A. Dalessandro, M. Neugebauer, and F. Triki, "A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management," *ArXiv e-prints, Cornell University Library*, Dec. 2008.
- [27] V. Kvetan, V. Páleník, and a. R. M. Mlýnek, M., "Starnutie, zdravotný stav a determinanty výdavkov na zdravie v podmienkach slovenska," research studies, Institute of Economics SAV, Bratislava, 2007.
- [28] M. Mlynárik, "Kalibrácia jednofaktorových modelov úrokových mier pomocou analytickej aproximácie cien dlhopisov," Master's thesis, Univerzita Komenského, Bratislava, 2009. diplomová práca.
- [29] X. Feng and D. Xie, "Bayesian estimation of cir model," *Journal of Data Science*, vol. 10, no. 1, pp. 271–280, 2012.

Príloha A: Štatistiky stresových scenárov

Na tomto mieste sa nachádzajú výsledné štatistiky testovaných stratégií pre jednotlivé scenáre, slúžiace na účely vyhodnotenia stresového testovania z časti (5.4). Testované scenáre sú uvedené a popísané v časti (4.2) a v Tab. (4.5). Analyzované stratégie sú uvedené a popísané v časti (4.3) a v Tab. (4.6).

Uvedené tabuľky postupne obsahujú určitostný ekvivalent (invertovanú strednú hodnotu funkcie užitočnosti z nasporeného dôchodku), strednú hodnotu nasporeného dôchodku, štandardnú odchýlku nasporeného dôchodku, 5%-ný kvantil nasporeného dôchodku a pseudo Sharpeov pomer (stredná hodnota nasporeného dôchodku očistená o strednú hodnotu „takmer-bezrizikovo“ nasporeného dôchodku (investovaním iba do dlhopisového fondu), škálovaná na jednotku rizika) pre danú realizovanú stratégiu počas konkrétneho uvažovaného scenára.

	(SC1)	(SC2)	(SC3)	(SC4)	(SC5)	(SC6)	(SC7)	(SC8)	(SC9)	(SC10)	(SC11)
(ST1)	2.3973	1.9989	1.7069	1.4769	1.7644	1.8677	1.8093	1.9440	2.8468	1.7181	2.6374
(ST2)	2.3715	2.0138	1.7286	1.4974	1.7765	1.8346	1.8712	2.0087	2.7228	1.7670	2.5792
(ST3)	2.2751	1.9854	1.7404	1.5383	1.7694	1.8193	1.9358	2.0481	2.4820	1.7651	2.2996
(ST4)	2.0453	1.8651	1.7003	1.5553	1.7002	1.7636	1.8995	1.9490	2.1279	1.6977	1.9170
(ST5)	2.2927	1.9879	1.7300	1.5206	1.7908	1.8014	1.9678	2.0223	2.6202	1.7558	2.5819
(ST6)	1.9055	1.7208	1.5675	1.4352	1.5999	3.7828	1.3318	1.6125	2.0329	1.7407	1.8637
(ST7)	1.9022	1.7269	1.5744	1.4472	1.6117	1.7292	4.6670	1.6849	1.9180	1.4325	2.4881
(ST8)	2.0424	1.8086	1.6173	1.4605	1.6608	1.8307	1.8456	3.1086	2.5062	1.9953	1.7199
(ST9)	2.0111	1.7908	1.6066	1.4565	1.6662	1.4457	1.4515	1.8310	4.3875	1.4142	3.1052
(ST10)	1.8893	1.7206	1.5732	1.4507	1.6030	1.8783	1.8146	1.9282	2.0895	2.6929	1.3839
(ST11)	1.8167	1.6624	1.5346	1.4207	1.5859	1.4454	1.7049	1.6331	2.2571	1.2482	6.9757
(ST12)	1.4009	1.4009	1.4011	1.4009	1.4010	1.4010	1.4009	1.4009	1.4008	1.4008	1.4010
(ST13)	2.3765	1.9876	1.6919	1.4640	1.7586	1.8984	1.7649	1.9078	2.8916	1.6817	2.5760
(ST14)	1.9478	1.7843	1.6445	1.5292	1.6317	1.7272	1.7740	1.8200	2.0518	1.6721	1.8662
(ST15)	2.1586	1.9033	1.6975	1.5273	1.7551	1.7250	1.8820	1.9580	2.4377	1.6845	2.4031

Tabuľka 9: Určitostný ekvivalent $U^{-1}(E[U(d_T)])$ majetku na dôchodku danej stratégie pri danom scenári.

	(SC1)	(SC2)	(SC3)	(SC4)	(SC5)	(SC6)	(SC7)	(SC8)	(SC9)	(SC10)	(SC11)
(ST1)	3.6946	2.9373	2.3842	1.9590	2.4413	2.5751	2.6376	2.9499	4.3304	2.4378	3.8541
(ST2)	3.2623	2.6963	2.2526	1.8989	2.2931	2.3771	2.5649	2.7949	3.6819	2.2985	3.3734
(ST3)	2.7650	2.3872	2.0717	1.8085	2.0902	2.1971	2.4068	2.5197	3.0046	2.0912	2.7375
(ST4)	2.2449	2.0358	1.8505	1.6882	1.8439	1.9556	2.1268	2.1576	2.3424	1.8486	2.1463
(ST5)	2.8908	2.4806	2.1375	1.8522	2.2106	2.2165	2.5296	2.5739	3.3229	2.1723	3.3022
(ST6)	2.4681	2.1636	1.9167	1.7093	1.9530	5.9081	1.5361	1.9917	2.6489	2.2141	2.3927
(ST7)	2.4062	2.1170	1.8799	1.6860	1.9146	2.0677	7.7920	2.0579	2.4211	1.6645	3.2386
(ST8)	2.7234	2.3261	2.0083	1.7583	2.0491	2.3544	2.3776	4.7501	3.4103	2.6240	2.1264
(ST9)	2.6690	2.2992	1.9969	1.7574	2.0698	1.8250	1.7032	2.3810	7.5978	1.7226	4.3753
(ST10)	2.3708	2.1005	1.8757	1.6897	1.9034	2.3534	2.3200	2.4128	2.6277	3.7337	1.5574
(ST11)	2.2613	2.0292	1.8319	1.6634	1.8986	1.7341	2.1177	1.9848	2.9111	1.4168	11.1651
(ST12)	1.4025	1.4025	1.4027	1.4025	1.4026	1.4026	1.4025	1.4025	1.4024	1.4024	1.4026
(ST13)	4.3313	3.2350	2.4903	1.9893	2.5670	2.9657	2.5994	3.0133	5.4328	2.4980	4.1038
(ST14)	2.1466	1.9325	1.7559	1.6134	1.7301	1.8544	1.9194	1.9924	2.2511	1.7834	1.9878
(ST15)	2.6696	2.2817	1.9785	1.7383	2.0409	2.0281	2.2318	2.3519	3.0659	1.9640	2.9275

Tabuľka 10: Stredná hodnota $E(d_T)$ majetku na dôchodku danej stratégie pri danom scenári.

	(SC1)	(SC2)	(SC3)	(SC4)	(SC5)	(SC6)	(SC7)	(SC8)	(SC9)	(SC10)	(SC11)
(ST1)	1.3000	0.9765	0.7593	0.5843	0.7584	0.7916	0.9087	1.0547	1.4726	0.7725	1.2205
(ST2)	0.9394	0.7489	0.5993	0.4816	0.5959	0.6363	0.7584	0.8259	1.0332	0.6002	0.8749
(ST3)	0.6070	0.5091	0.4292	0.3620	0.4236	0.4800	0.5635	0.5685	0.6568	0.4254	0.5729
(ST4)	0.3352	0.2945	0.2611	0.2333	0.2556	0.3087	0.3484	0.3356	0.3584	0.2649	0.3531
(ST5)	0.6886	0.5799	0.4886	0.4129	0.5086	0.5107	0.6268	0.6216	0.8093	0.4981	0.8223
(ST6)	0.6929	0.5715	0.4739	0.3924	0.4805	2.1152	0.3193	0.5091	0.7474	0.6019	0.6563
(ST7)	0.6460	0.5262	0.4334	0.3584	0.4313	0.4689	2.9224	0.5118	0.6461	0.3490	0.8861
(ST8)	0.8108	0.6475	0.5155	0.4164	0.5157	0.6568	0.6596	1.6949	1.0397	0.7524	0.5310
(ST9)	0.7960	0.6411	0.5181	0.4214	0.5324	0.4876	0.3704	0.6859	2.9588	0.4252	1.3868
(ST10)	0.6204	0.5150	0.4278	0.3581	0.4303	0.6055	0.6399	0.6275	0.6840	1.1514	0.2846
(ST11)	0.5718	0.4879	0.4163	0.3561	0.4340	0.4030	0.5387	0.4752	0.7852	0.2714	3.7180
(ST12)	0.0224	0.0222	0.0223	0.0222	0.0223	0.0224	0.0222	0.0223	0.0224	0.0223	0.0222
(ST13)	2.1561	1.4453	0.9793	0.6809	0.9808	1.2323	1.0148	1.3224	2.6563	0.9711	1.6464
(ST14)	0.3548	0.2862	0.2324	0.1912	0.2149	0.2558	0.2827	0.3201	0.3564	0.2336	0.2527
(ST15)	0.6614	0.5187	0.4116	0.3292	0.4199	0.4332	0.4935	0.5412	0.7867	0.4084	0.6804

Tabuľka 11: Štandardná odchýlka σ_{d_T} majetku na dôchodku danej stratégie pri danom scenári.

	(SC1)	(SC2)	(SC3)	(SC4)	(SC5)	(SC6)	(SC7)	(SC8)	(SC9)	(SC10)	(SC11)
(ST1)	2.0558	1.6864	1.4211	1.2224	1.4713	1.5647	1.5058	1.6323	2.4450	1.4360	2.2495
(ST2)	2.0100	1.6940	1.4505	1.2486	1.4866	1.5348	1.5734	1.6998	2.2980	1.4836	2.1796
(ST3)	1.9095	1.6700	1.4650	1.2963	1.4914	1.5282	1.6262	1.7215	2.0861	1.4888	1.9345
(ST4)	1.7528	1.6044	1.4659	1.3409	1.4678	1.5071	1.6180	1.6656	1.8231	1.4604	1.6331
(ST5)	1.9302	1.6732	1.4527	1.2761	1.5012	1.5083	1.6610	1.7051	2.2018	1.4738	2.1754
(ST6)	1.5875	1.4323	1.3080	1.2027	1.3362	3.2692	1.1245	1.3439	1.6898	1.4497	1.5527
(ST7)	1.5843	1.4428	1.3177	1.2184	1.3527	1.4515	4.0709	1.4071	1.5989	1.2073	2.0776
(ST8)	1.7044	1.5059	1.3475	1.2203	1.3839	1.5263	1.5352	2.6392	2.0955	1.6668	1.4350
(ST9)	1.6762	1.4880	1.3410	1.2181	1.3894	1.2049	1.2217	1.5243	3.8732	1.1826	2.6123
(ST10)	1.5737	1.4388	1.3181	1.2200	1.3429	1.5699	1.5093	1.6074	1.7439	2.2564	1.1758
(ST11)	1.5158	1.3887	1.2848	1.1955	1.3270	1.2092	1.4223	1.3627	1.8805	1.0582	6.0869
(ST12)	1.3664	1.3666	1.3667	1.3668	1.3667	1.3664	1.3666	1.3664	1.3662	1.3663	1.3669
(ST13)	2.0282	1.6696	1.4021	1.2113	1.4616	1.5886	1.4650	1.5934	2.5260	1.4003	2.1888
(ST14)	1.6695	1.5451	1.4362	1.3461	1.4309	1.5012	1.5362	1.5660	1.7600	1.4596	1.6284
(ST15)	1.8049	1.5968	1.4297	1.2950	1.4795	1.4501	1.5797	1.6392	2.0353	1.4185	2.0120

Tabuľka 12: 5-percentný kvantil $Q_{5\%}$ majetku na dôchodku danej stratégie pri danom scenári.

	(SC1)	(SC2)	(SC3)	(SC4)	(SC5)	(SC6)	(SC7)	(SC8)	(SC9)	(SC10)	(SC11)
(ST1)	1.7632	1.5717	1.2929	0.9524	1.3697	1.4812	1.3592	1.4671	1.9883	1.3401	2.0087
(ST2)	1.9797	1.7274	1.4186	1.0305	1.4945	1.5316	1.5328	1.6859	2.2062	1.4929	2.2528
(ST3)	2.2445	1.9343	1.5590	1.1215	1.6235	1.6553	1.7823	1.9650	2.4392	1.6188	2.3304
(ST4)	2.5130	2.1503	1.7158	1.2242	1.7271	1.7916	2.0787	2.2498	2.6225	1.6839	2.1064
(ST5)	2.1615	1.8591	1.5042	1.0891	1.5889	1.5940	1.7982	1.8844	2.3729	1.5455	2.3103
(ST6)	1.5379	1.3317	1.0849	0.7818	1.1456	2.1301	0.4182	1.1574	1.6678	1.3485	1.5086
(ST7)	1.5536	1.3579	1.1014	0.7909	1.1873	1.4184	2.1863	1.2805	1.5765	0.7505	2.0721
(ST8)	1.6291	1.4265	1.1752	0.8544	1.2537	1.4492	1.4782	1.9751	1.9311	1.6234	1.3631
(ST9)	1.5910	1.3986	1.1472	0.8421	1.2533	0.8665	0.8115	1.4265	2.0939	0.7526	2.1437
(ST10)	1.5607	1.3553	1.1061	0.8020	1.1638	1.5704	1.4337	1.6100	1.7913	2.0247	0.5441
(ST11)	1.5018	1.2842	1.0314	0.7326	1.1431	0.8227	1.3276	1.2254	1.9213	0.0525	2.6257
(ST13)	1.3584	1.2679	1.1108	0.8618	1.1872	1.2685	1.1794	1.2181	1.5173	1.1281	1.6407
(ST14)	2.0974	1.8518	1.5205	1.1024	1.5245	1.7664	1.8281	1.8426	2.3808	1.6307	2.3162
(ST15)	1.9158	1.6949	1.3995	1.0199	1.5205	1.4442	1.6806	1.7542	2.1142	1.3747	2.2412

Tabuľka 13: Pseudo Sharpeov pomer majetku na dôchodku ($\frac{E(d_T) - E(d_T^{(ST12)})}{\sigma(d_T)}$) danej stratégie pri danom scenári.