UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

Zosilňovanie konceptu Nashovho ekvilibria v dynamických hrách

Diplomová práca

2013

Bc. Jozef Vlársky

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

Zosilňovanie konceptu Nashovho ekvilibria v dynamických hrách

Diplomová práca

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	9.1.9 aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Školitel:	doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.

Bratislava 2013 **Bc. Jozef Vlársky**

90035471

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Bc. Jozef Vlársky
Študijný program:	ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor:	9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce:	diplomová
Jazyk záverečnej práce:	slovenský

Názov: Zosilňovanie konceptu Nashovho ekvilibria v dynamických hrách

Cieľ: Proces zosilňovania požiadaviek na vylepšovanie konceptu Nashovho ekvilibria v dynamických hrách, pomocou ktorého sa zbavujeme ekvilibrií, ktoré zodpovedajú nedôveryhodným hrozbám a prísľubom.

Vedúci: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Dátum zadania: 03.02.2012

Dátum schválenia: 03.02.2012

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Čestne prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave, 22.4.2013 ....

Chcel by som sa poďakovať vedúcemu mojej diplomovej práce doc. RNDr. Jánovi Pekárovi, PhD. za jeho pozitívny a priateľský prístup a taktiež za jeho rady a trpezlivosť.

Abstrakt

VLÁRSKY, Jozef: *Zosilňovanie konceptu Nashovho ekvilibria v dynamických hrách* [diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD. Bratislava: FMFI UK, 2013. 47 s.

Diplomová práca obsahuje vypracovanie zosilňovacieho konceptu Nashovho ekvilibria v dynamických hrách. V prvej kapitole si definujeme základné predpoklady teórie hier. V ďalšej kapitole si uvedieme Nashove ekvilibria a rôzne typy zosilňovacích konceptov. V poslednej časti zrealizujeme herné experimenty na porovnanie hernej teórie s realitou.

Kľúčové slová: všeobecné poznanie racionality, extenzívna forma hry, Nashove ekvilibrium, dokonalé ekvilibrium vzhľadom na podhry, sekvenčné ekvilibrium, spätná indukcia, herné experimenty.

Abstract

VLÁRSKY, Jozef: *Refinements of Nash equilibrium in dynamic games* [Diploma's thesis]. Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Department of Applied Mathematics and Statistics. Supervisor: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD. Bratislava: FMFI UK, 2013. 47 p.

The Diploma's thesis includes drawing up the issue of refinements of Nash equilibrium in dynamic games and its searching methods. The introductory chapter contains basic requirements of game theory. In the next chapters we introduce Nash equilibrium and some refinement concepts. In the last chapter we run some game experiments to compare game theory with real problems.

Key words: common knowledge of rationality, extensive form of game, Nash equilibrium, subgame perfect Nash equilibrium, backward induction, sequential equilibrium, game experiments

Obsah

Úvod

Koncept Nashovho Equilibria je základný nástroj používaný na analýzu hier od jeho uvedenia spred 60 rokov. Najčastejšie využívaný v ekonómii, a v iných sociálnych vedách. Môžme ho považovať ako základnú požiadavku (resp. nevyhnutnú podmienku) pre strategickú stabilitu. Každá predpoveď hry, ktorá zahrňuje racionálne správanie a presné očakávania musí byť Nashovym Equilibriom.

Avšak, v mnohých hrách nachádzame väčší počet rozmanitých Nashovych Equilibrií. Podmienky, ktoré charakterizujú tieto equilibriá sú často nedostatočné k tomu aby sme sa dostali k jednoznačnému výsledku. Potrebujeme preto ďalšie kritéria strategickej stability ako dodatok ku kritériam zahrnutých v Nashovom koncepte. Tento prístup dal možnosť k nárastu širokej škále zosilňovania konceptu Nashovho Equilibria (ďalej NE).

V prvej kapitole si predstavíme základné kamene, na ktorých je postavený koncept NE. Ďalej si ukážeme koncept dynamických hier, s ktorými budeme operovať a predstavíme si NE. V ďalších kapitolách si ukážeme rôzne zosilňovacie metódy (okresania), ktorými sa zbavujeme nedôveryhodných equilibrií. V záverečnej časti uskutočníme konkrétne herné experimenty a budeme skúmať racionalitu hráčov, ktorá z nich vyplýva.

Kapitola 1

Všeobecné racionálne poznanie a konzistentné zoskúpenie presvedčení

Očakávania ohľadom toho, čo budú hrať ostatní hráči ovplyvňujú čo je racionálne urobiť pre mňa. Fixovanie presvedčení, ktoré poznajú racionálni agenti o ostatných agentoch, je klúčový aspekt racionálneho rozhodovania v hrách.

Prínos všeobecného racionálneho poznania (Common Knowledge of Rationality, skr. CKR):

Ak chceme sformovať očakávanie, čo budú robiť ostatní hráči, je prirodzené uvažovať model, ktorý určuje ich správanie a použiť ho na predikciu okolností, ktoré nás zaujímajú? Môžme predpokladať, že dotyčná osoba je negramotný človek, alebo robot, alebo ktokoľvek. Ale väčšinu času budeme predpokladať, že hráči sú racionálni ako my. Preto treba uvažovať súperov ako racionálnych hráčov. Toto je idea na základe, ktorej hráči formujú očakávania. Predpokladáme, že každý hráč má všeobecné racionálne poznanie. Formálne sa to dá predstaviť ako nekonečný reťazec daný:

1. každý hráč je racionálny
2. každý hráč vie, že 1.
3. každý hráč vie, že 2.
4. každý hráč vie, že 3. A takto až do nekonečna.

A preto je všeobecné poznanie natoľko žiadané v teórii hier. Idea je podobná ako v prípade, že kamerujete televíziu, v ktorej ide obraz produkovaný tou istou kamerou - nekonečná sebareflexia.

Veľa ľudí, ktorí aplikujú teóriu hier v praxi predpokladajú CKR a dokonca posúvajú hranice ešte ďalej, na získanie ešte presnejších predpovedí racionálneho správania.

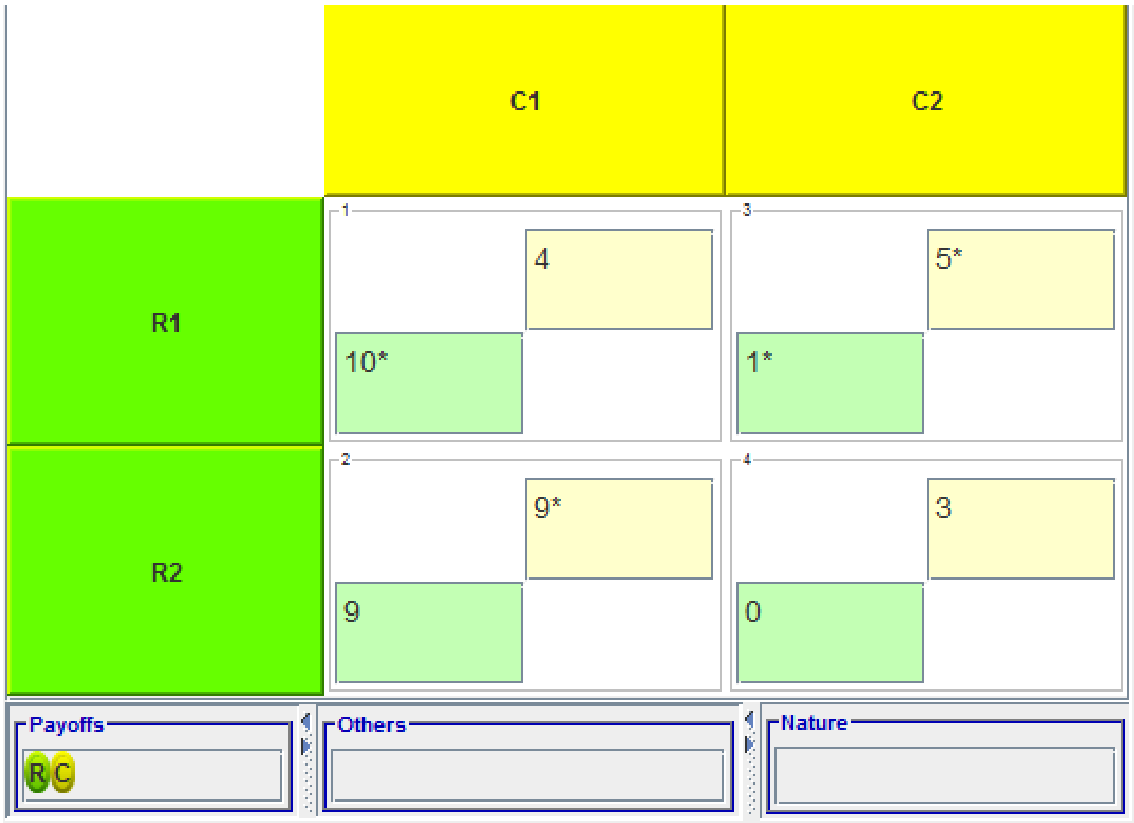
Predpokladajú, že presvedčenia hráčov sú konzistentné navzájom. Konzistentné zoskúpenie presvedčení (Consistent Alignment of Beliefs skr. CAB) dáva analytickú silu herným teoretikom ako uvidíme neskôr. Avšak presun z CKR na CAB je podľa niektorých odborníkov kontroverzný. Neformálne povedané CAB je o tom, že žiadny racionálny hráč nemôže byť prekvapený iným racionálnym hráčom. Čiže, ak sa myšlienky druhého hráča vyvíjajú pozdĺž racionálnej línii, a ja viem, že ten hráč je racionálny a aj ja som racionálny, tak aj moje myšlienkové pochody sa dostanú na rovnakú racionálnu líniu ako pochody druhého hráča. Teda moje presvedčenia o tom, čo bude súper hrať sú konzistentne určené v zmysle, že ak by som aj vedel čo bude súper hrať nijako to neovplyvní moje presvedčenie. A to platí aj pre ostatných hráčov.

Kapitola 2

Elementy teórie hier

2.1 Reprezentácia hier

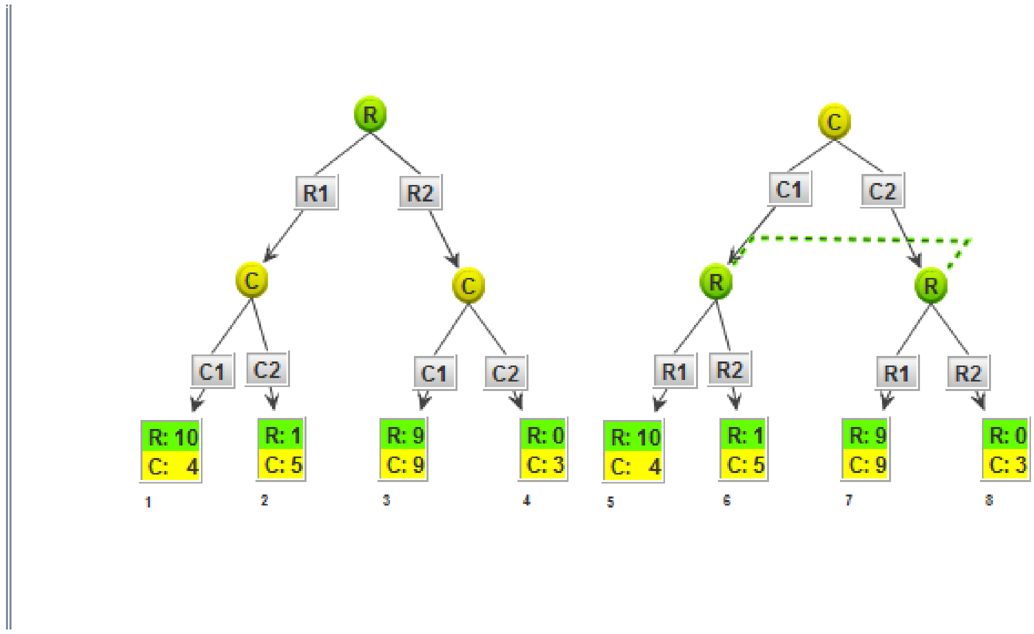
Herný teoretici rozlišujú 2 základné typy hier. Prvým typom je hra v normálnej (maticovej) forme (OBR.1). Väčšina statických hier, kde sa hráči rozhodujú súčasne sa zapisuje pomocou tejto formy. Táto matica prezentuje kombinácie všetkých možností všetkých hráčov s výsledkami (výplatami) na danej pozícii (zložke) v matici.



OBR.1 - maticový tvar

R1 a R2 v stĺpci sú všetky akcie hráča R a C1 a C2 v riadku sú zas všetky akcie hráča C. Hviezdičky indikujú výplatu ako stratégiu najlepšej reakcie na súperovu akciu.

Druhý typ prezentácie hry je prostredníctvom herného stromu (OBR.2). Tiež nazývaný extenzívny alebo dynamický typ. Tento typ je predmetom aj celej diplomovej práce, keďže budeme pozorovať dynamické hry. Hry v normálnej forme nám nič nevedia povedať o dynamike hry a procesoch, ktoré sa v nej odohrávajú. A práve nato nám slúži extenzívna, stromová forma hry.



(a) (b)

OBR.2 - extenzívny tvar

Na OBR.2 v hre (a) začíná hru hráč R a v (b) začína hráč C. V závislosti od vybranej cesty z jedného uzla (bod, kde si daný hráč volí svoju akciu) do ďalších uzlov sa postupne dostávame k výsledku hry, ktorý je prezentovaný danými výplatami (spodná časť stromu) každého hráča.

Na OBR.2 (b) máme aj zakreslenie prerušovanej čiary pri výbere akcie hráča R. Táto čiara definuje informačnú množinu daného hráča. V tomto prípade prerušovaná čiara znamená to, že hráč R pri svojom výbere akcie NEVIE akú predchádzajúcu akciu si zvolil hráč C. Na druhej strane na OBR.2 (a) sa pri výbere hráča C nevyskytuje žiadna preušovaná čiara a teda hráč C presne VIE, či predchádzajúca akcia hráča R bola R1 alebo R2.

2.2 Dominancia a ekvilibrium

Definícia 2.1:

Stratégia hráča R je najlepšou odpoveďou (reakciou) na nejakú akciu hráča C, povedzme stratégiu C_i, ak hráčovi R poskytuje najväčšiu výplatu pri C_i. Rovnako to platí aj pre hráča C.

Ak sa pozrieme späť na OBR.1, keď hráč C zvolí C1, tak najlepšou odpoveďou hráča R je akcia R1, keďže pri nej obdrží výplatu 10 nakoľko pri akcii R2 len 9. A teda R1 je najlepšou odpoveďou hráča R, ak hráč C volí C1. Podobne stačí uvažovať aj pri zvyšných možnostiach.

Definícia 2.2:

Stratégia je dominantná, ak je najlepšou stratégiou (maximalizuje hráčovu výplatu) bez ohľadu na výber stratégie ostatných hráčov.

V zmysle predošlej definícii môžme povedať, že akcia R1 je dominantná stratégia, resp. stratégia R2 je dominovaná stratégiou R1.

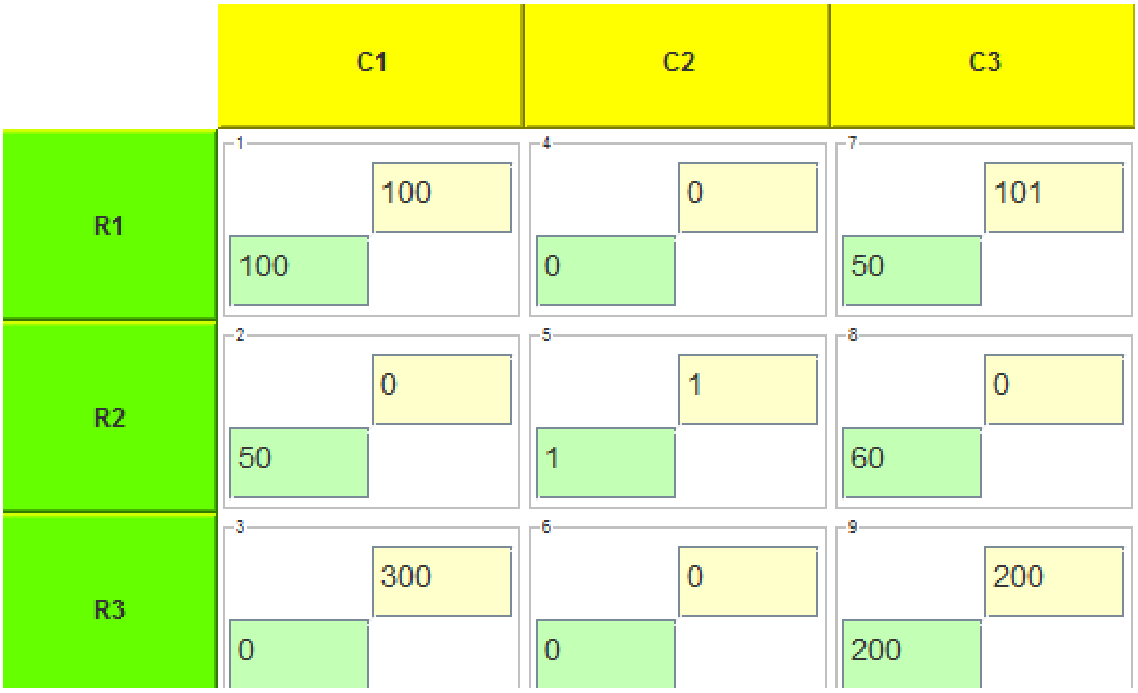
Definícia 2.3:

Všeobecné racionálne poznanie (CKR) nultého rádu opisuje situáciu, v ktorej je každý hráč racionálny, ale ani jeden z hráčov nevie nič o racionalite druhého. Naopak CKR prvého rádu opisuje každého hráča ako racionálneho,a navyše každý verí v racionalitu druhého hráča. Teda CKR n-tého rádu spĺňa: Hráč R verí, že hráč C verí, že hráč R verí..., že hráč C verí,že R je racionálny. (n-krát sa vyskytuje slovo "verí")

Skúsme CKR aplikovať na hru na OBR.1: CKR nultého rádu znamená R: R1 (":"je priradenie výberu) a z toho CKR prvého rádu implikuje, že C b R: R1 a teda C: C2 (písmeno b (belief) znamená, že hráč C verí v racionalitu R). Dostávame sa tak do ekvilibria (R1, C2). Toto je minimálna definícia ekvilibria (výsledku) hry postavená len na dominantnosti a CKR prvého rádu. Ak by hra bola väčšia, môžme použiť proces postupnej eliminácie dominovaných stratégií pri zvyšovaní rádu CKR. A tie, ktoré zostanú po eliminácii sú racionalizované stratégie.

2.3 Nashove stratégie a Nashove ekvilibrium

V 50-tych rokoch minulého storočia John F. Nash prezentuje vo svojich prácach v dnešnej dobe najpopulárnejší nástroj využívaný v teórii hier. Všíma si hlavne väčší počet racionalizovaných stratégií a hľadá reštrikcie na presvedčenia hráčov, ktoré im prislúchajú. Na ilustrovanie jeho argumentu, uvažujme hru na OBR.ex.



OBR.ex - rozšírená verzia

Uvažujme stratégiu R1. Nasledujúca úvaha hráča R je jediná množina presvedčení, ktorá racionalizuje možnosť R1.

Budem hrať R1, pretože očakávam, že C bude hrať C1. Prečo by som to mal očakávať? Lebo C očakáva, že budem hrať R3. Môžte sa ma opýtať, prečo si myslím, že si to C myslí. Možno preto, že očakáva, že budem chybne rozmýšlať nad tým, že bude hrať C3, kde v skutočnosti očakávam, že bude hrať C1. Samozrejme, ak by vedel, že plánujem hrať R1, hral by C3. Ale on to nevie a z toho dôvodu a s mojimi očakávaniami je R1 správna voľba pre mňa. Samozrejme, ak by vedel, že budem hrať R1, tak bz som asi nemal. Je to môj dohad, avšak, tým, že očakáva voľbu R3, očakávam jeho voľbu C3. V skutočnosti očakávam, že bude hrať C1 a ja budem hrať R1.

Môžme to zosumarizovať zápisom spomínaným vyššie:

R: R1 pretože

R b C: C1 pretože

R b C b R: R3 pretože

R b C b R b C: C3 pretože

R b C b R b C b R: R1 .

Môžme vidieť, že CKR štvrtého rádu je dostatočný nato aby sme vytvorili konzistentné presvedčenie s danou stratégiou. Zvyšovaním rádu CKR sa nič nezmení, keďže predošlá "slučka"sa opakuje po štyroch iteráciach. Teda stratégia R1 je založená na očakávanich, ktoré sú obhájiteľné v CKR rádoch menších než nekonečno.

Rozdielny, ale podobne konzistentný sled myšlienok existuje na podporu akcie R2 a R3.

Skrátený zápis pre úvahu o R3:

R: R3 pretože

R b C: C3 pretože

R b C b R: R1 pretože

R b C b R b C: C1 pretože

R b C b R b C b R: R3 .

Skrátený zápis pre úvahu o R2 je ešte jednoduchši a vyžaduje CKR len druhého rádu:

R: R2 pretože

R b C: C2 pretože

R b C b R: R2 .

Nash považoval stratégiu R2 za veľmi pozoruhodnú nie len preto, že je najjednoduchšia, ale hlavne preto, že je to jediná stratégia podporená presvedčeniami, ktorá nepredpokladá, že hráč C spraví chybu očakávaním niečoho, čo hráč R neplánuje hrať. Čiže, ak porovnáme na jednej strane úvahy o R1 a R3 a na druhej strane R2, je zrejmé, že R1 a R3 sú racionálne, len v prípade, ak hráč R predpokladá, že ho hráč C zle prečíta. Na druhej strane R2 nevyžaduje žiadny takýto predpoklad. Vskutku, R2 vyžaduje, že R očakáva, že C prečíta R správne. Preto, ak akceptujeme predpoklad, že presvedčenia hráčov musia byť konzistentne zoskúpené, budeme nasledovať Nash-a a jediným príslušným východiskom hry bude (R2,C2).

Definícia 2.4: *Presvedčenia sú nekonzistentne zoskúpené, keď akcia, z ktorej vychádzajú tieto presvedčenia, dokáže niekoho "rozčúliť". Presvedčenie jedného hráča (nech je X) je "rozčúlené", ak druhý hráč (Y) zahrá akciu, s ktorou hráč X nepočítal. Naopak, presvedčenia sú konzistentne zoskúpené (CAB), keď akcie každého hráča (založené na presvedčeniach o druhých hráčoch) sú obmedzené do miery, že nerozčúlia žiadneho hráča.*

Rovnakú analýzu aplikujeme aj na hráča C. Stratécie C1 a C3 sú rozumné len v prípade, že C očakáva chybu hráča R, avšak C2 je hrané, keď C rešpektuje racionálnu predpoveď hráča R ohľadom myšlienok C.

Ukazuje sa, že jediný výsledok, ktorý korešponduje vzájomnému rešpektu hráčov predpovedať korektne, je **(R2,C2)- Nashove ekvilibrium** (postavené na Nashovych stratégiach).

Definícia 2.5: *Množina racionalizovaných stratégií (jedna pre každého hráča) je NE, ak ich zahrnutie potvrdzuje očakávania hráčov o výbere iných hráčov. Inak povedané, Nashove stratégie sú jediné racionalizované, ktoré po zahrnutí potvrdzujú očakávania, na ktorých sú založené. Preto sa považujú aj ako samopotvrdzujúce stratégie alebo ako koncept ekvilibria vyžadujúci CAB.*

Pozadie za NE sa dá z istého hľadiska považovať za briliantné. Prediera sa uzlami pavučiny presvedčení a prichádza vo forme jednoduchého výsledku, ktorý korešponduje najvyššiemu levelu vzájomného rešpektu mentálnej kapacity každého hráča. V praktickom slova zmysle, Nashove stratégie pomáhajú k jednoznačnejším ekvilibriám. A preto si aj veľa herných a sociálnych teoretikov osvojilo koncept NE.

Prečo predpokladáme, že racionálni hráči majú vzájomne konzistentné presvedčenia, keď každá stratégia každého hráča môže byť podporená množinou vnútorne konzistentných presvedčení? Odpoveď, ktorú by dal Nash, je, že sú racionálni a rešpektujú racionalitu druhého. Sú prirodzene ťahaní do NE, keďže je to jediné miesto, ktoré rešpektuje rovnosť racionality každého hráča. Vnútorná konzistencia nie je dostačujúca pokiaľ predpokladáme CKR, t.j. vzájomný rešpekt najvyššieho rádu vyžaduje aby presvedčenia boli vzájomne konzistentné (CAB).

V rovnakom zmysle je niekedy rozoberané, že cieľ hocijakej analýzy hier sa dá porovnávať s napísaním knihy o tom ako hry hrať, a minimálna požiadavka, ktorú každá malá rada ohľadom ako hrať hry musi spĺňať, je jednoduchá: rada musí zostať dobrou radou aj potom ako je kniha publikovaná. Inými slovami, nebola by to najlepšia rada, ak by ju ľudia nechceli nasledovať potom ako bude obecne známa (t.j. po publikovaní knihy). Tento test ako jediné spĺňa NE (R2,C2), keďže hráč R nasleduje radu knihy, tak aj hráč C by ju chcel nasledovať, a naopak. Toto však nie je možné aplikovať na ostatné racionalizované stratégie. Pre príklad, uvažujme, že rada v knihe je (R1,C1): potom R nechce nasledovať radu, ak bude očakávané, že C zahrá poradenú akciu C1 a naopak.

Obe verzie problematiky vzhľadom nato čo vzájomná racionalita znamená sa zdajú dostačujúce. Avšak existuje tu jedna zvláštnosť. Vedie ohľad na to, že hráči vedia o vzajomnej racionalite, k tomu, že ani jeden z nich neurobí v hre chybu? Každý, kto sa rozprával s dobrými šachistami (čo sú možno majstry strategického, racionálneho myslenia), zistí zaujímavé spory. Dvaja vyrovnane racionálni hráči, ktorí hrajú proti sebe, automaticky nepredpokladajú, že ich protihráč nerobí chyby. Paradoxne pointa šachu je vynútiť určitú chybu. Sú potom hráči šachu iracionálni? Inklinuje to k odpovedi nie, ale prečo? A aký je rozdiel v porovnaní s Nashovou intuíciou?

Rozdiel je v tom, či je racionálne pre hráčov rozmýšlať, či by mohli oklamať svojho súpera, v zmysle, že budú konať na základe presvedčenia, že súper si myslí, že budú robiť niečo iné, čo v skutočnosti spravia. Nash vraví, že takýto prístup nie je racionálny, pričom šachisti tvrdia opak, a obe odpovede dávajú zmysel. Všetko závisí na tom, či daný hráč verí, že v hre existuje jedinečne racionálna cesta alebo nie. Ak takáto cesta existuje, tak pravdu má Nash, naopak ak neexistuje takáto cesta, potom je nejasné, čo by mal každý hráč očakávať od ostatných a preto je možné pre hráča konať na základe presvedčenia, že súper si myslí, že bude hrať niečo kompletne iné. Za týchto okolností, jediné obmedzenie mojich očakávaní, o tom, v čo verí súper o mne, je také, že súper nemôže očakávať, že budem hrať stratégiu, ktorá je dominovaná ostatnými, čo porušuje predpoklad CKR. Inými slovami, každá racionalizovaná stratégia je konzistentná s CKR, a presun z CKR na Nashove stratégie vyžaduje predpoklad CAB. Teda to dáva zmysel, keď existuje jedinečná racionálna cesta na hranie hry.

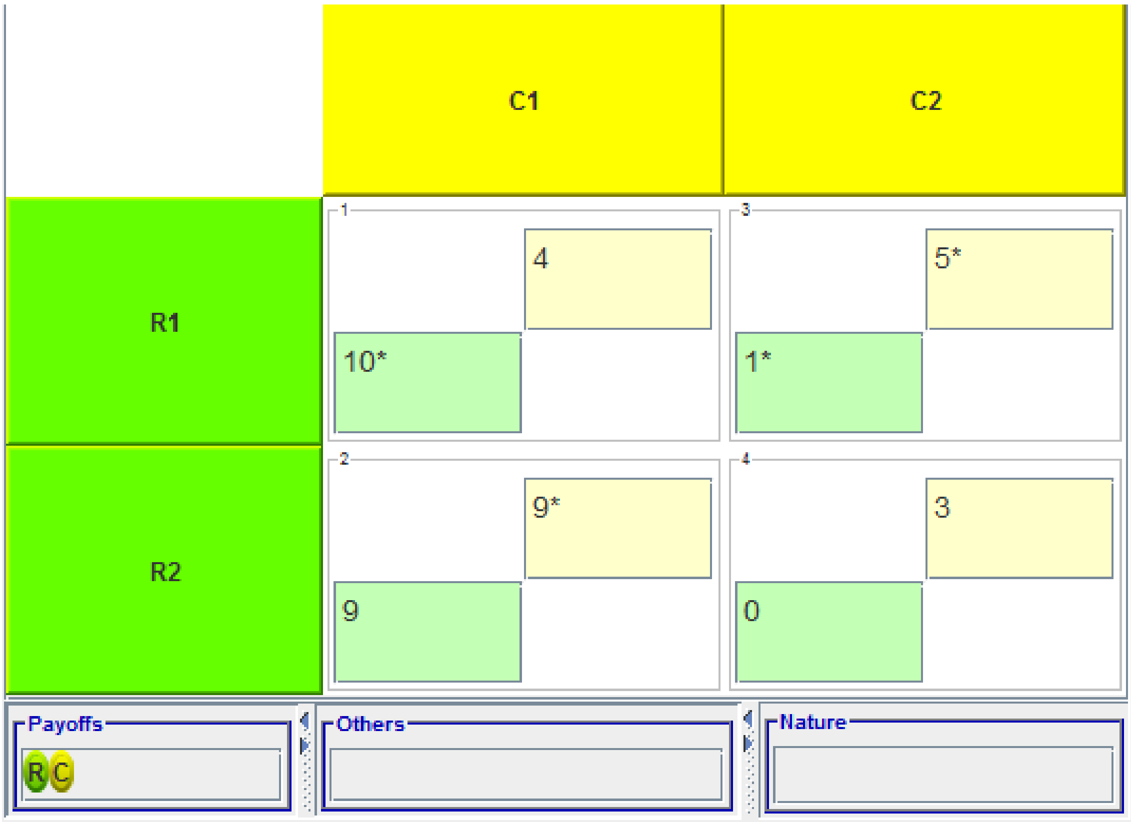
Kapitola 3

Dynamické hry a koncepty zosilňovania Nashovych ekvilibrií

V tejto kapitole sa pozrieme na hry s dynamickou štruktúrou. To sú hry, kde hráči nehrajú svoje akcie súčasne, ale postupne v ťahoch. Sú prezentované diagramom v extenzívnej forme. Ukážeme si výhody oproti hrám v statickej forme. Študovanie dynamických štruktúr v hrách môže viesť k jednoznačnejšiemu výsledku, čo sa týka získavania NE. Základný kameň pri analýze dynamických hier je typ uvažovania nazvaný spätná indukcia. V kapitole si tiež ukážeme vzťah NE a spätnej indukcii, ktorý vedie k prvým zosilňovacím konceptom - dokonalé ekvilibriá vzhľadom na podhry. A neskôr si predstavíme aj iné zosilňovacie koncepty ako sekvenčné ekvilibriá, vhodné ekvilibriá, a ekvilibriá postavené na indukcii napred.

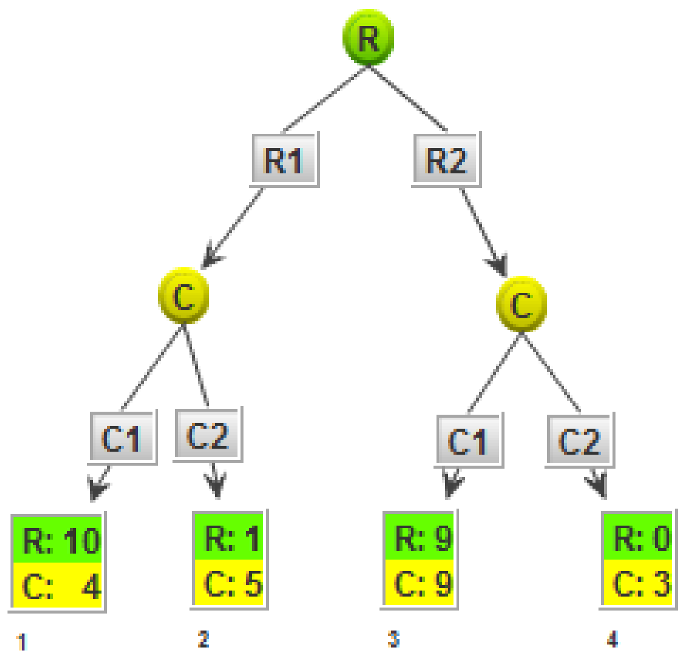
3.1 Dynamické hry, extenzívna forma a spätná indukcia

Na ilustrovanie rozdielu, uvažujme hru ako na začiatku predošlej kapitoly.



OBR.3

V predošlej kapitole sme sa na základe analýzy tejto hry v normálnej forme pri simultánnom rozhodovaní dostali k dominantnému ekvilibriu (R1,C2). Toto ekvilibrium je zároveň aj NE, keďže všetky ekvilibriá dominantných stratégií sô zároveň aj NE, opačne to však platiť nemusí. Pretransformujme si OBR.3 do extenzívnej formy (OBR.4), kde iniciálny (začiatočný) hráč bude R a hráč C, ktorý sa po R rozhoduje vie akú akciu zvolil R.



OBR.4

Akú možnosť si R vyberie? Ak si vyberie R1, kde sa môže dostať k výplate 10, na druhej strane najlepšiu výplatu pri R2 má 9. Znamená to, že by hráč R mal automaticky voliť R1? Odpoveď je nie. Racionálny hráč R si musí zodpovedať 2 otázky:

(a)Čo spraví hráč C, ak si vyberiem R1?

(b)Čo spraví hráč C, ak si vyberiem R2?

Prichádzame k odpovedi, ktorá nasleduje predpoklad CKR prvého rádu. Potom R zodpovie otázku (a) takto: "vyberie si C2, lebo 5 je vyššia výplata než 4". A (b) takto:",vyberie si C1, lebo 9 je viac než 3". A preto si R uvedomí, že je lepšie vybrať si R2 (R berie na vedomie racionálne reakcie hráča C), čo mu prináša výplatu 9 v porovnaní s 1, ktorú by očakával ak by volil R1. Vidíme, že ak je známe čo si vybral R, tak sa dostaneme do výsledného ekvilibria (R2,C1). Na dôkaz tohto stačí uvažovať, že hráči sú racionálni, a hra spĺňa predpoklad CKR prvého rádu. Všimneme si, že toto ekvilibrium je odlišné od ekvilibria, pri simultánnom rozhodovaní (R1,C2).

3.2 Dokonalosť vzhľadom na podhry

3.2.1 Podhry, Nash, CKR a spätná indukcia

V sekcii vyššie sme spätne odôvodňovali s pomocou CKR prvého rádu. Tento typ odôvodňovania je kľúčový pri konkrétnom koncepte zosilnenia NE, ktorý sa aplikuje na dynamické hry ako *dokonalosť vzhľadom na podhry.* Na vysvetlenie formálnosti si musíme najskôr zadefinovať podhru.

Definícia 3.1: *Podhra je časť dynamickej hry, resp. jej podmnožina. Uvažujeme stromový diagram extenzívnej hry: podmnožina diagramu sa označuje ako podhra, keď sú splnené podmienky: (a) podhra musí začínať z uzla, (b) potom musí vetvením pokračovať k nasledovníkovi z iniciálneho uzla, (c) potom musí skončiť pri výplatách, ktoré asociujú ku koncovým uzlom a nakoniec (d) iniciálny (začiatočný) uzol musí byť z jednoprvkovej množiny informačného úseku každého hráča.*

Časti (a), (b) a (c) sú zrejmé. Pozrime sa však na to, čo je jednoprvková množina informačného úseku. Spätne, ak sa pozrieme na OBR.2 (a), tak hráč C presne vie, v ktorej vetve hry sa nachádza, keď príde na rad jeho akcia, keďže predpokladáme, že akcia R bude zverejnená pred voľbou hráča C. Avšak na OBR.2 (b) prerušovaná čiara indikuje, že hráč R, keď príde na rad, nevie, v ktorej vetve sa nachádza. Dôvod je ten, že akcia C nie je zverejnená pre hráča R.

Pri konkrétnom bode hry, informačný úsek hráča reprezentuje rôzne pozície hráča, ktoré je schopný rozlišovať. Preto na OBR.2 (b) hráč R vie, že sa nachádza v jednom z dvoch uzlov (nevie však v ktorom), a preto tieto dva uzly v kope vytvárajú množinu informačného úseku hráča R. V tomto zmysle vidíme rozdiel, kde na OBR.2(a) má hráč C dve rozdielne množiny informačného úseku, pričom na OBR.2(b) má hráč R jednu množinu informačného úseku, ktorá obsahuje dva uzly. Jednoprvková množina (singleton) je informačný úsek, ktorý obsahuje len jeden uzol - ak je hráč v tomto informačnom úseku, tak presne vie, v ktorej časti hry sa nachádza.

Podarilo sa nám ozrejmiť vlastnosť(d). Jej účel je povedať to, že podhra musí začínať v bode, kde hráč, ktorý je na rade vie čo sa udialo predtým. Od tohoto momentu začína nova časť hry - podhra, ktorú možno analyzovať separátne. Napr. na OBR.2 (b) je jediná podhra celá hra, keďže R nemá jednoprvkovú množinu informačného úseku, a preto podľa definície podhry, sa dá podhra aplikovať len na iniciálneho hráča C (len v tomto iniciálnom uzle má informačný úsek jednoprvkovú množinu) na začiatku hry. Naopak hra na OBR.2 (a) má až tri podhry - celá hra (iniciálny uzol R), podhra v uzle po výbere akcie R1, a podhra v uzle po výbere R2.

Intuícia ohľadom konceptu dokonalých ekvilibrií vzhľadom na podhry (Subgame Perfect Nash Equilibrium, SPNE) je, že nevyžadujeme stratégiu, ktorá určuje akcie v niektorej časti hry (podhry), ktoré nie sú najlepšími odpoveďami na každú inú v danej podhre. Teda v hre s maticovým zápisom máme NE (R1,C2), pričom transformáciou na extenzívny tvar a využitím konceptu podhier získavame ekvilibrium (R2,C1). Toto ekvilibrium sa nazýva Vzhľadom na podhry dokonalé ekvilibrium (SPNE).

Definícia 3.2: *Stratégie sú SPNE v hre v extenzívnej forme, keď stratégie tvoria Nashove ekvilibrium v každej podhre.*

Prečo sa dokonalosť vzhľadom na podhry odvoláva na Nasha? Odpoveďou je, že kombináciou CKR spolu so sekvenčným uvažovaním spätnou indukciou sú hráči nútení udržať si konzistentné zoskúpenie presvedčení, v zmysle, že R hrá R2 veriac, že C bude hrať C1, a C bude hrať C1 veriac, že R bude hrať R2 pretože R vie, že C bude hrať C1 ak bude zahrané R1. Pekne povedané, je to práve spätná indukcia v kombinácii s CKR, ktorá nám prezentuje CAB.

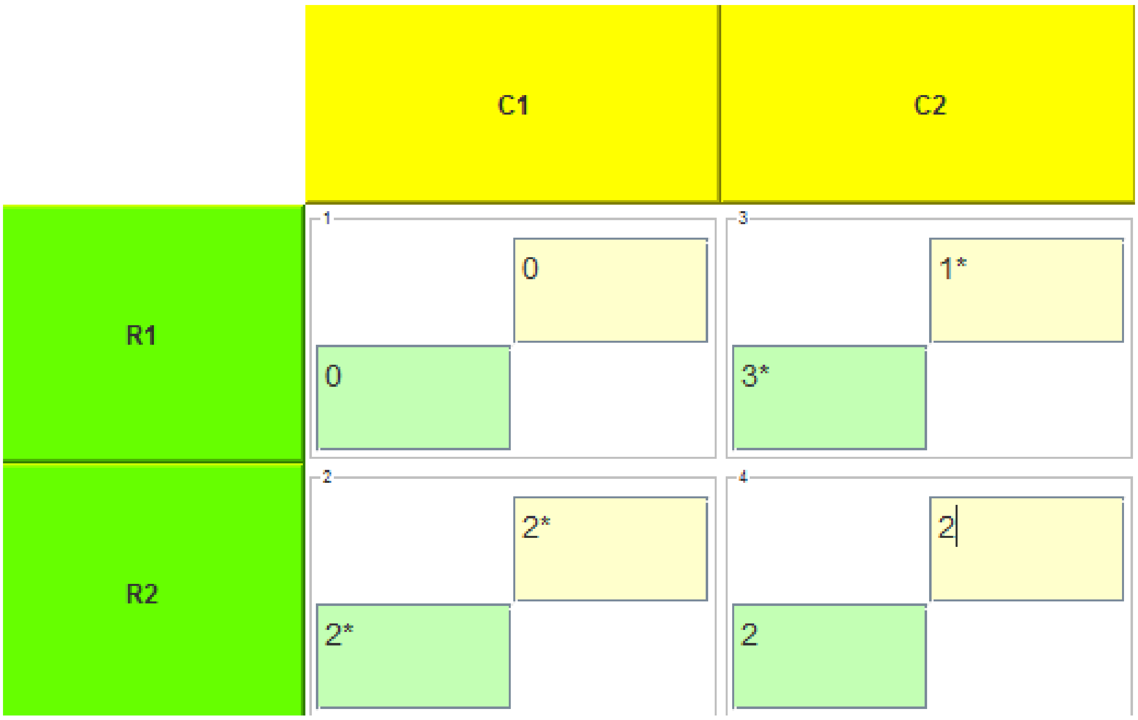
Spätná indukcia sa dá využiť aj v úplnej autonómii. Zoberme si hru "preteky do 20". Dvadsať kariet ozn. od 1-20, dvaja hráči, postupne si každý hráč môže vybrať jednu alebo dve karty zo vzostupne zoradeného balíka, a hráč, ktorý sa prvý dostane k dvadsiatej karte vyhráva. Nech som hráč R a začínam hru, akú kartu si vyberiem na začiatku 1 alebo 2? Mojim cieľom je dostať sa na kartu s označením 17, keďže druhý hráč sa dostane potom len ku karte 18 alebo 19 a následne ja si vyberiem 20 a vyhrám hru. Uvažovaním spätnou indukciou zisťujem, že pred kartou 17 sa mi stači dostať na kartu 14, predtým 11, predtým 8, 5 až 2, čiže ak začnem kartou 2, bez ohľadu na CKR, čisto len spätnou indukciou sa jedinečnou racionálnou cestou dostanem k výhre. A spätná indukcia bez CKR nemá žiadnu implikáciu ku CAB.

Definícia 3.3: *Rozdiel medzi spätnou indukciou a Nashovou spätnou indukciou sa ukazuje u predpokladoch CKR. Prvá predpoklady o CKR nevyužíva pričom druhá áno.*

3.2.2 Dokonalosť vzhľadom na podhry a výber ekvilibria

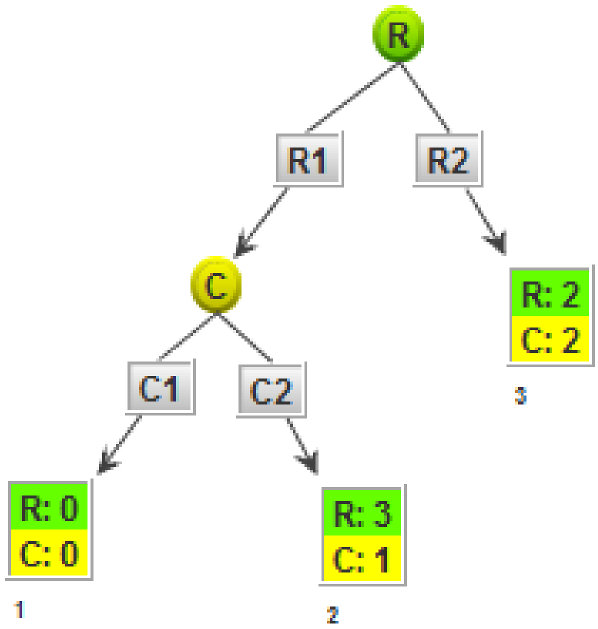
Extenzívne hry majú vyhodu oproti statickým hrám v tom, že niekedy redukujú počet NE. Na upresnenie, existujú dynamické hry, ktoré majú v maticovej forme viacero NE, avšak menej dokonalých ekvilibrií vzhľadom na podhry. Zosilňujúci koncept dokonalých ekvilibrií vzhľadom na podhry nám teda môže pomôcť s problémom výberu Nashovych ekvilibrií.

Podrobnejšie si to rozoberme v typickom príklade hry obchodného reťazca. Táto hra sa nevzťahuje len na obchodné reťazce, má viacero interpretácií. Stretneme sa s ňou napríklad v Pucinniho opere Gianni Schicchi.[1] Jej maticový a extenzívny tvar je na OBR.5 resp. OBR.6.



OBR.5

[1]interpretoval Harper, 1991, Handbook of defeasible reasoning and uncertainity managemenet systems, str. 415



OBR.6

V maticovej forme nie je žiadne dominantné ekvilibrium, ale nachádzame 2 Nashove ekvilibriá - (R2,C1) a (R1,C2)(na OBR.5 označené hviezdičkou). Avšak, ak je hra prezentovaná v extenzívnej forme (OBR.6), nachádzame len jedno SPNE: (R1,C2). Je to zrejmé, keďže C1 nie je najlepšou odpoveďou v podhre, ktorá je vytvorená na rozhodovacom uzle hráča C a preto táto stratégia nemôže byť súčasťou SPNE. Jednoducho povedané hrozba, ktorá vyplýva z hrania C1 nie je dôveryhodná, a dokonalosť vzhľadom na podhry vylučuje stratégie, ktoré predstavujú nedôveryhodné hrozby.

3.3 Spätná indukcia, presvedčenia ‘mimo ekvilibriovej cesty’ a CKR

Zdôvodnenie spätnej indukcie sa javí silné. Hráči sa pozerajú vpred, pretože rozlišujú, že to čo budú hrať teraz bude mať pre nich dôsledky v neskorších štádiách hry (v podhrách). Na posudzovanie aké tie dôsledky môžu byť sa predpokladá racionalita každého hráča v budúcnosti a v tejto báze sa rozhodujú, čo spraviť teraz ako najlepšie. Avšak pri predpoklade CKR sa môžu vyskytnúť komplikácie, ktoré si rozoberieme nižšie.

3.3.1 Presvedčenia ‘mimo ekvilibriovej cesty’ a ‘chvenia’

V predošlej sekcii sme spätnou indukciou odstránili NE (R2,C1). Stratégia C1 nebola dôveryhodná akcia C na uskutočnenie, a preto R2 nemôže byť súčasťou ekvilibria tejto hry, keďže je to najlepšia odozva len na C1. Preto analýzou nevhodnosti akcie R2, získame jediné SPNE (R1,C2).

Stratégia R2 je označená ako správanie ‘mimo ekvilibriovej cesty’. Niekto môže tvrdiť, že analýzou správania sa ‘mimo ekvilibriovej cesty’ sme vyčlenili SPNE (R1,C2). Ako keby sme vytvárali skladačku. Na jednej strane predpokladáme CKR, na druhej strane, predtým ako zavedieme racionálnu stratégiu, musíme uvažovať čo by sa stalo, ak by sa ukázal ťah iracionálny v niektorom štádiu hry. Teda správanie sa v ekvilibriu, musí byť postavené na analýze správania sa mimo ekvilibria. Inak povedané, musíme pripustiť možnosti úpadku od racionality aby sme vysvetlili, čo racionalita požaduje.

Táto úvaha vedie k dvom prepojeným otázkam: Je táto procedúra úpadku racionality konzistentná s predpokladom CKR? Prečo predpokladať, že hráči sa budú správať racionálne, keď sú ‘mimo ekvilibriovej cesty’?

Jedna odpoveď na obidve otázky prichádza vo forme predstavenia ‘chvenia’. Nech predpokladáme, že niekedy zídeme z ekvilibriovej cesty mimo kvoli malým, nahodným chýbam určitého druhu. Potom máme vysvetlenie ako hráč dosiahne tieto pozície ‘mimo ekvilibriovej cesty’ spĺňajúc CKR. Teda, dovtedy pokiaľ deviácia nepodkope CKR, hráči môžu pokračovať formovať si presvedčenia o tom, čo sa stane ‘mimo ekvilibriovej cesty’ za predpokladu racionality hráčov.

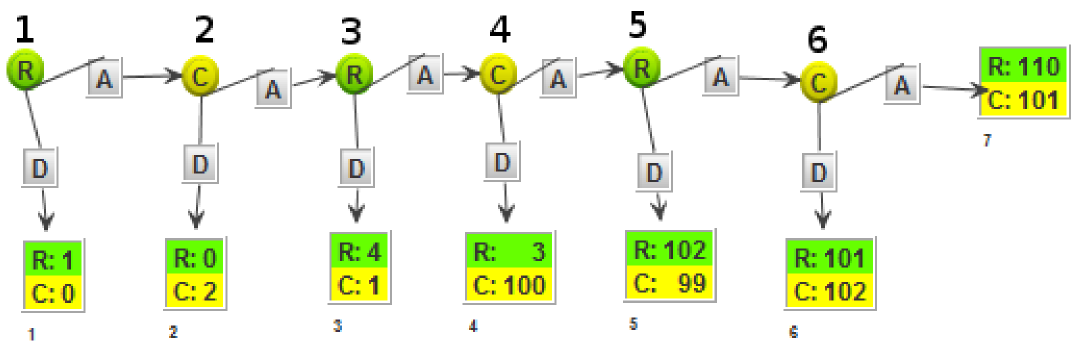
Na ilustráciu, ako myšlienka chvenia podporuje SPNE, uvažujme znova hru na OBR.6. SPNE (R1,C2) je jediné ekvilibrium hry kompatibilné s malým, náhodným chvením v racionalite hráčov. Stratégia C1 nie je najlepšou odpoveďou na stratégiu R2 hráča R, ktorý si však chybou môže vybrať R1 (kvôli chveniu). Namiesto toho, C2 je najlepšou odpoveďou na obe akcie chvejúceho sa hráča R.

Existujú viaceré užitočné aplikácie ‘chvenia’, ktoré odstránia obavy ohľadom ako zafixovať presvedčenia pri vychýlení sa z ekvilibriovej cesty, tak aby sme nepoškodili

CKR. Avšak tento prístup má aj vlastné problémy.

Ako príklad uvažujme hru stonožky (OBR.7), ktorá ponúka každému hráčovi dlhý sled alternujúcich možností.

OBR.7 - stonožka

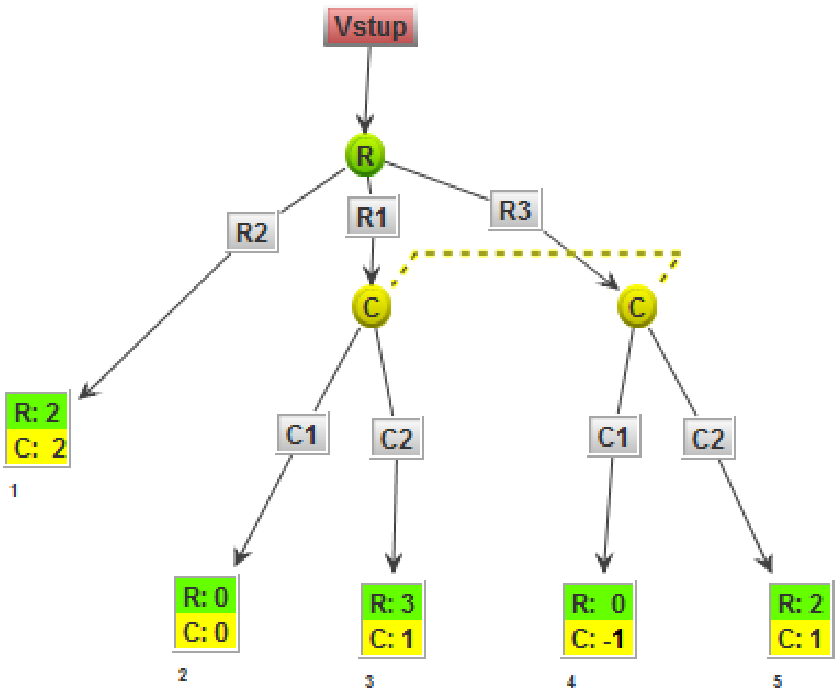


SPNE tejto hry je akcia D pri prvom rozhodovacom uzle, tým aj hra končí. Je to odvodené Nashovou spätnou indukciou. Ukazuje sa, že v každom momente hry sa hráč R rozhodne vždy len pre akciu D. Dôvod je jednoduchý. Uvažujme uzol 5, ak R zahrá D obdrži výplatu 102. Samozrejme, že preferuje 110, ale v uzle 6 bude hrať C D, keďže 102 je viac ako 101. Podobne na uzle 3, a aj na uzle 1. Ak by na uzle 1 zahral A, tak na uzle 2 by hráč C zahral D z obáv, že R by na uzle 3 ukončil hru voľbou D.

Toto SPNE pri uzle 1 je podporené dlhým sledom presvedčení mimo ekvilibriovej cesty o tom čo sa stane v neskorších rozhodovacích uzloch ak sú dosiahnuté. Ak chceme zachovať tento sled konzistentný s CKR, tak k neskorším rozhodovacím uzlom sa dostaneme prostredníctvom 'chvenia'. Čo musíme prijať, aby sme predpokladali chvenia, ktoré nas privedú do koncového rozhodovacieho uzla? Vyzerá to tak, že chvenia musia byť systematickejšou časťou hráčovho správania sa.

3.4 Sekvenčné ekvilibriá

Existujú niektoré typy dynamických hier, v ktorých sa zosilňujúce koncepty vo forme dokonalosti vzhľadom na podhry nedajú aplikovať na zredukovanie počtu NE. Vráťme sa k hre na OBR.6, interpretujme si hru spomínanou operou *Gianni Schicchi*. Bohatý muž zomrel a v závete odkázal všetok majetok mníchom. Jeho príbuzním (C) sa to nepáči a preto si najmú nejakého imitátora (Gianni-ho, R), s ktorým sa dohodnú, že spíše pre nich nový závet podľa ich ľubovôle. Imitátor sa musí rozhodnúť, či spíše tento závet (R2) alebo odstúpi od dohody a závet spíše podľa seba (R1). Príbuzní sa musia rozhodnúť, či budú tento podvod vyšetrovať (C1) a obžalujú Gianni-ho alebo ho nechajú tak (C2). Rozšírme si túto hru ešte o jednu novú Gianni-ho možnosť. Uvažujme, že si Gianni najme zdierača, ktorý zasiahne voči príbuzným, ak sa rozhodnú ho obžalovať. Príbuzní však nevedia, či si niekoho najal alebo nie. Toto rozšírenie hry je zachytené na OBR.8, kde prerušovaná čiara, ktorá prepája dva rozhodovacie uzly, určuje informačnú množinu hráča (v tomto prípade C), ktorý je na rade.



OBR.8 - rozšírená verzia

Rozhodnutie C pri výbere akcie C1 alebo C2 už viac nevytvára podhru, keďže nevie, v ktorom rozhodovacom uzle sa nachádza (z definície podhry nie je splnená vlastnosť (d)). Inak povedané, neexistuje jedinečná cesta späť od jeho rozhodnutia k počiatku rozhodovania. Nemôžme aplikovať spätné uvažovanie, a jediná podhra hry je samotná hra ako celok. NE tejto hry sú stratégie (R1,C2) a (R2,C1), ktoré su zároveň aj SPNE.

Predsa len vieme nájsť niečo podozrivé ohľadom stratégie (R2,C1), ktorú by sme vedeli nejako vylúčiť. Postup, ktorý využijeme zahŕňa princíp 'chvenia'. Tiež si všimnime, že sa v hre nevyskytujú žiadne presvedčenia o vierohodnosti vychýlenia hráča R na R1 alebo R3, ktoré by považovali C1 za optimálnu odpoveď. Pri chvení sa okolo rozhodovacieho uzlu R2 je najlepšou optimálnou odpoveďou voľba C2, teda R2 nemôže byť súčasťou 'ekvilibria chvejúcej sa ruky'[2], keďže je to najlepšia odpoveď len na akciu C1.

Chvenia nám majú pomocť objasniť tento problém. V skutočnosti Nashove zosilňovacie koncepty nie sú rozšírené verzie ekvilibrií 'chvejúcej sa ruky', ale vzťahujú sa na koncept sekvenčných ekvilibrií. (Neskôr bude zrejmé, že všetky ekvilibriá 'chvejúcej sa ruky' sú zároveň aj sekvenčnými ekvilibriami, opačne to však neplatí.)

Základná idea sekvenčného ekvilibria je rovnaká ako pri dokonalosti vzhľadom na podhry. Stratégie by mali byť racionálne v zmysle, že sú najlepšou odpoveďou v každom štádiu hry. (Obidva koncepty teda využívajú spätnú indukciu.) Jediný rozdiel je v tom, že najlepšia odpoveď v každom štádiu hry závisí na tom, kde si myslím, že sa nachádzam v informačnej množine, ktorá definuje dané štádium hry. Odtiaľ, najlepšie odpovede musia byť podmienené presvedčeniam o tom či verím, že som v tomto uzle alebo v tamtom. V našej hre je to vierohodnosť či sa hráč nachádza na ľavej strane informačnej množiny C radšej alebo na pravej. Toto vysvetluje časť (1) definície nižšie.

Musíme tiež niečo vedieť o pôvode týchto presvedčení. Koncept sekvenčného ekvilibria predpokladá, že presvedčenia sú konzistentné so sekvenčnými racionálnymi stratégiami (časť (2) definície nižšie). Zmysel konzistencie je zložitejší,ale jednoducho povedané, presvedčenia ohľadom toho, kde sa nachádzam v informačnej množine, sa dajú odvodiť použitím Bayesovho pravidla a verzie chvejúcej sa ruky pri sekvenčne racionálnych stratégiach.

Definícia 3.4: *Sekvenčné ekvilibriá sú stratégie a presvedčenia (definované pre každý rozhodovací uzol), ktoré spĺňajú nasledovné dve podmienky.*

(1)*Stratégie musia byť sekvenčne racionálne. Teda musia byť najlepšou odpoveďou vzhľadom k presvedčaniam v každej informačnej množine.*

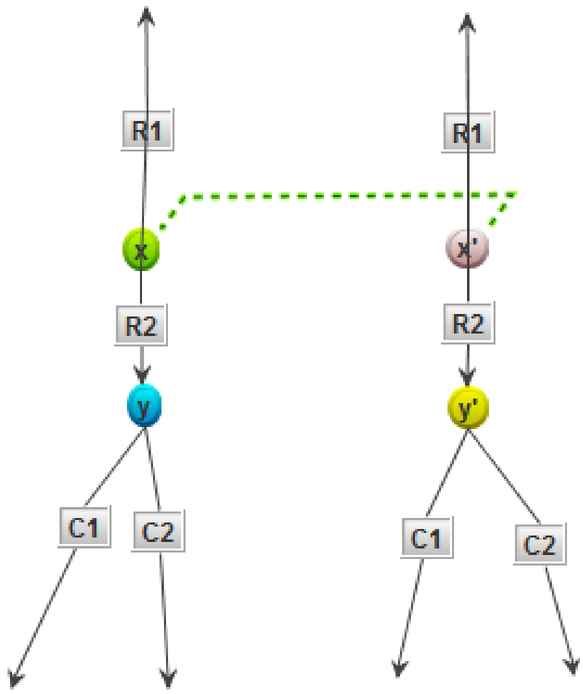
[2]Selten, R. (1975) A reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. International Journal of Game Theory 4:25-55.

(2)*Presvedčenia v každej informačnej množine musia byť konzistentné v zmysle, že pravdepodobnosti priradené z aktualizácie presvedčení použitím Bayesovho pravidla*[3] *sú podmienené sekvencii všetkých zmiešaných stratégií, ktoré konvergujú k stratégiam v časti* (1).

Chvenie si popíšeme na príklade vyššie a bude sa vzťahovať ku úplne zmiešaným stratégiam. Úplne zmiešané stratégie sú všetky čisté stratégie, ktorých pravdepodobnosť hrania v danej hre je nenulová. Na to aby sme uvažovali, či je stratégia R2 sekvenčne racionálna, musíme predpokladať, že existuje nenulová pravdepodobnosť, ktorou sa hráč R dokáže vždy vychýliť z R2 na R1 alebo na R3. Toto je základ presvedčenia hráča C, o tom kde sa nachádza v informačnej množine. Preto môžme C2 považovať za najlepšiu odpoveď. Avšak R2 nie je sekvenčne racionálne, lebo nie je najlepšou odpoveďou na C2. V porovnaní, ak budeme uvažovať R1 a povolíme chvenia hráča R na R2 alebo R3, to je nový základ presvedčení pre C, znovu zistíme, že C2 je najlepšou odpoveďou a R1 je najlepšou odpoveďou na C2, čo je naše sekvenčné ekvilibrium.

V tomto konkrétnom príklade sme nepotrebovali Bayesove pravidlo na generovanie presvedčení C, keďže stratégia sekvenčnej racionality spolu s chveniami nám dáva vierohodnosť nachádzania sa na rôznych miestach v informačnej množine hráča C priamočiaro. V hrách, ktoré majú viacero štádií, vierohodnosť toho, v ktorej časti neskoršej informačnej množiny sa nachádzam, závisí od predošlého vývinu hry a preto presvedčenia musia byť prepojené so stratégiami a aplikáciou Bayesovho pravidla sa dostaneme k výsledku. Na predstavenie tohto postupu uvažujme všeobecnú časť hry na OBR.9.

[3]Harsanyi, John C., 1967-1968. "Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, I-III."Management Science.



OBR.9 - všeobecná časť väčšej hry

Stratégia sekvenčného ekvilibria prináša pravdepodobnosť 1/3, že sa hráč R nachádza na uzle x, pravdepodobnosť 2/3, že sa hráč R nachádza na uzle x', a pravdepodobnosť 1, že hráč R bude hrať R1 v oboch vetvách hry. (R očakáva, že sa bude nachádzať v daných uzloch s príslušnou pravdepodobnosťou, keďže skoršia časť stratégie sekvenčnej racionality C je zmiešaná stratégia, ktorá aktivuje polohu R, resp. tieto pravdepodobnosti. V inom prípade môžme predpokladať hru s nekompletnou informáciou a dva typy hráča C, jeden typ aktivuje pozíciu x a druhý typ aktivuje pozíciu x' príslušnými pravdepodobnosťami.)

Na skompletizovanie konštrukcie sekvenčného ekvilibria musí hráč C, pred hraním C1 alebo C2, posúdiť situáciu na základe vierohodnosti toho, či sa nachádza v uzle y alebo y'. Pozícia y sa však dosiahne jedine za predpokladu, že hráč R zahrá R2 na pozícii x. Pravdepodobnosť, že sa hráč C nachádza na pozícii y je teda podmienená udalosti R2, ktorá je podmienená udalosti, že sa hráč R nachádza v uzle x. Pomocou Bayesovho pravidla:

$$P(y|R2) = \frac{P(R2|x)P(x)}{P(R2|x)P(x) + P(R2|x')P(x')}$$

Môžme predpokladať, že šanca vychýlenia sa na hranie R2 pri uzle x a x' je rovnaká (pravdepodobnosť ε). Odtiaľ,

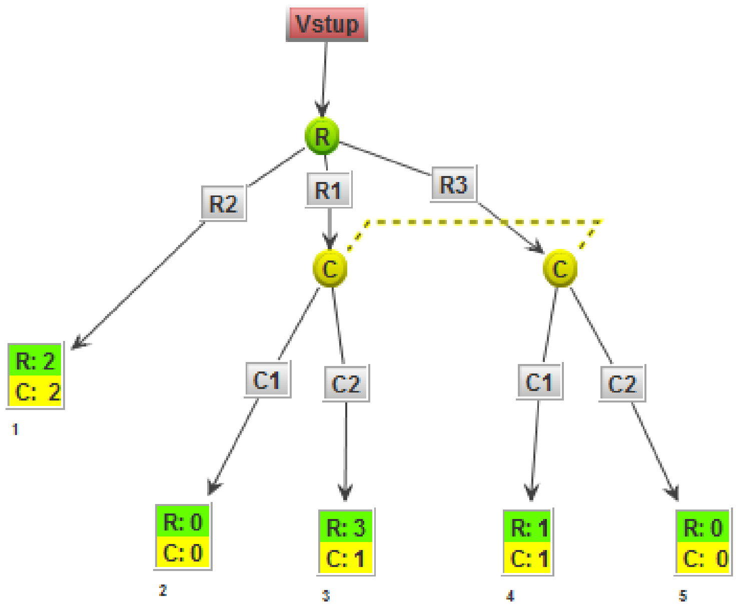
$$P(y|R2) = \frac{\frac{1}{3}\varepsilon}{\frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon}$$

ktorá konverguje k 1/3, keď $\varepsilon \to 0$.

Tento príklad je užitočný nielen ako demonštrácia Bayesovho pravidla pri počítaní sekvenčne racionálnych presvedčení, ale aj ako ďalšia ilustrácia chvenia ako kľúčového aspektu pri počítaní presvedčení mimo ekvilibriovej cesty. Informačná množina, ktorú sme uvažovali vzišla z uvažovania mimo ekvilibria, pretože vzhľadom ku sekvenčnému ekvilibriu uvažujeme, že hráč R bude hrať R1 s pravdepodobnosťou 1. Odtiaľ bez chvenia $P(R2|x) = P(R2|x') = 0$, a preto nemožno použiť Bayesove pravidlo na zafixovanie presvedčení hráča C. Inými slovami, každé presvedčenie môže byť považované za racionálne, keďže Bayesove pravidlo nemôže byť aplikované na udalosti s nulovou pravdepodobnosťou. Avšak, ak sa objaví malé chvenie, tak možno aplikovať Bayesove pravidlo, keďže pravdepodobnosť hrania R2 už nie je viac nulová. Inak povedané, sekvenčne racionálne stratégie sú perturbované chvením, tým sa z nich stávajú úplne zmiešané stratégie pri tom ako hráči (agenti) formujú svoje presvedčenia. Fakt, že sú to úplne zmiešané stratégie nám dáva možnosť na ne vždy použiť Bayesove pravidlo na generovanie presvedčení, len vďaka tomu, že perturbácia stratégií nás dostane do každej možnej informačnej množiny danej hry.

3.5 Vhodné ekvilibriá a indukcia napred

Nie vždy nám však sekvenečné ekvilibriá stačia na hľadanie najlepších ekvilibrií. Uvažujme variantu hry OBR.6 rozšírenú na OBR.10. V tejto hre má znova hráč R o jednu akciu naviac. V tejto hre máme 2 NE, ktoré sú súčasne aj sekvenčné ekvilibriá (R1,C2) a (R2,C1). (R1,C2) je sekvenčné ekvilibrium, pretože malé vychýlenie na R3 nám stále necháva ako najlepšiu odpoveď hráča C možnosť C2. Podobne (R2,C1) je sekvenčné ekvilibrium, ak uvažujeme, že vychýlenie na R3 je nepatrne väčšie než na R1, potom C1 je stále najlepšou odpoveďou. A to je práve problém. Sekvenčné ekvilibriá síce berú do úvahy presvedčenia mimo ekvilibriovej cesty, nie však dostatočne. Hráč C si môže len myslieť, či je väčšia šanca, že sa R vychýli na R1 než na R3.

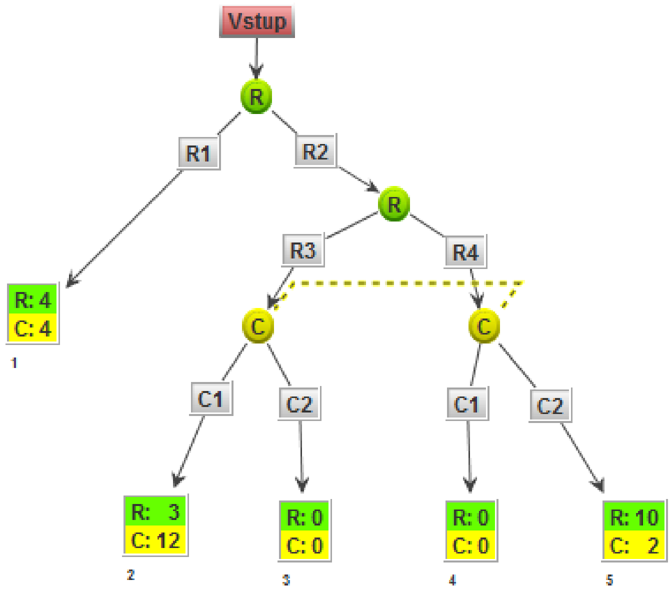


OBR.10 - rozširená verzia hry na OBR.6

Jednou odpoveďou na predošlý problém je koncept striktnej dokonalosti. Ekvilibrium tohto konceptu nezávisí na ľubovoľnej špecifikácii chvenia (či je chvenie väčšie, menšie...). Nanešťastie je veľa hier, ktoré nemajú žiadne striktne dokonalé ekvilibriá.

Ďalšou odpoveďou je možnosť uvažovať dôvody obmedziť konkrétne chvenia, ktoré sú povolené. Napríklad, niekto môže uvažovať, že je väčšia šanca vychýlenia sa z R2 na R1 než na R3, keďže akcia R2 dominuje nad R3, ale nie nad R1. Ak si niekto naozaj myslí, že sa chvenie vyskytuje pri experimentovaní hráčov, hráč R nemá dôvod experimentovať s akciou R3 pokiaľ je možnosť väčšieho zisku pri experimentovaní s R1. Alternatívne Mayerson uvažoval, že posúdenie hodnôt vychýlení bude určovať ich vierohodnosť. Aplikované v tomto príklade, ak hráč C hrá C1, tak cena za vychýlenie k R3 bude menšia než k R1, preto je správne od C uvažovať menšiu pravdepodobnosť vychýlenia hráča R k R1, než ku R3. V Mayersonovej terminológii je potom (R2,C1) označené ako **vhodné ekvilibrium**.

Všetky zosilňovacie koncepty, ktoré boli doteraz prevedené spolupracovali so spätnou indukciou. Ako doplnok však môžme uvažovať aj možnosť *indukcie napred*. Idea spočiva v tom, že hráči by mali príjmať závery ohľadom toho ako sa hra vyvinie v budúcnosti na základe minulosti. Je to niečo v duchu hry našej stonožky (OBR.7) pri výbere akcie A. Na ilustrovanie tohto problému však môžme uvažovať aj nasledovnú hru (OBR.11).



OBR.11 - hra na aplikáciu indukcie napred

V tejto hre by niekto mohol argumentovať, že hráč R bude hrať R2 jedine ak bude ďalej hrať R4, pretože pri R3 je zisk 3 menši než keby sa hneď na začiatku rozhodol pre možnosť R1. V tomto prípade sa hranie akcie R2 dá považovať ako signál pre hráča C vzhľadom ku indukcii napred. Hráč C by mal odtiaľ vyvodiť, že sa nachádza na pravej strane informačnej množiny a vybrať si C2. Jednou možnosťou je vybrať si akciu R2 pri očakávanej výplate 10 aplikovaním indukcie napred. Druhou možnosťou je neriskovať (možnosť, že hráč C sa vychýli k C1) a vybrať si R1. Teda zrejme si hráč R vyberie R2 a následne R4, a C, ktorý rozlišuje túto možnosť si vyberie C2. Úplne na opačnej strane však stojí prístup Harsanyi-ho a Selten-a, ktorí aplikáciou zosilnenej spätnej indukcie a rizikovej dominancie prídu k úplne inému ekvilibriu (R1,R3,C1). Ich argument je podporený tvrdením, že ekvilibrium (R3,C1) bude vybrané v podhre, ktorá začína pri druhom rozhodovacom uzle hráča R. Prečo je to tak? Všimnime si prerušovanú čiaru, ktorá indikuje, že C nevie, či sa R rozhodne pre R3 alebo R4. R vie, že C nevie... a tak ďalej. Ak R vedel, že C očakávalo výber R3, tak R očakáva výber C1. V opačnom prípade R očakáva výber C2. Podobne, ak C vedel, čo R očakával, tak by vedel čo spraviť. Nikto to však nevie a ani nemôže vedieť. Harsanyi a Selten vyriešili túto hádanku predpokladom rizikovej dominancie: s rovnakou šancou výberu R3 alebo R4, bude C hrať C1 a teda R bude hrať R3,a preto hráč R je znepokojený svojim výberom. Vyberie si R1 pre vyššiu výplatu (4>3). Získavame spomínané ekvilibrium (R1,R3,C1). Toto alternatívne ekvilibrium sa dá podporiť aj spätnou indukciou. Práve vďaka nej sa táto stratégia správa ako sekvenčné ekvilibrium, kde presvedčenie hráča C o vierohodnosti, v ktorej informačnej množine sa nachádza, vyplýva z malého chvenia ku R2. Použitím Bayesovho pravidla a pripustení ďalšieho chvenia z R3 na R4 si hráč C vytvorí malú pravdepodobnosť toho, že sa nachádza na pravej strane informačnej množiny. Vzhľadom k tejto informácii, šanca, že hráč R si vyberie R4 je zanedbateľne nízka. Utvrdí sa v tom, že R si vyberie R3 a jeho najlepšia reakcia bude C1. Znovu je hráč R znepokojený, zisťuj, že pravdepodobnosť hrania C2 je skoro nulová a preto sa rozhodne pre (R1,R3).

Na tomto poslednom príklade bola prezentovaná indukcia napred a spätná indukcia. Ich účinok bol protichodný. Ktorú by sme mali preferovať? Obidva prístupy majú svoj vlastný učinok. Pri hraní takýchto hier možno povedať, že výber ekvilibria určuje princíp uvažovania, ktoré agenti môžu zdielať.

Kapitola 4

Pozorovanie racionality ľudí pri herných experimentoch

V tejto kapitole si predstavíme konkrétne herné experimenty, ktorých sa zúčastnilo okolo 25 dvojíc ľudí z mojho okolia. Prevažne študenti, spolužiaci a kamaráti. Zameriavam sa na ich rozhodovacie stratégie a porovnávam ich s ucelenou teóriou okolo Nashovych ekvilibrií. Nashove ekvilibrium reprezentuje strategicky stabilnú situáciu, kde žiadny hráč nepredpovedá lepšie vyústenie hry pri vychýlení sa zo svojho strategického rozhodovania. Samozrejme každý hráč musí brať na zreteľ stratégie, ktoré možu hrať ostatní hráči. Každý hráč musí byť v pozícii predvídať aké reakcie budú viesť zo súperových stratégii v odozve k jeho vychýleniu. Niekedy takéto reakcie, aj keď sú považované za NE, vykazujú suboptimálne správanie a teda aj menej výnosné.

4.1 Racionálne rozhodovania pri hrách s nedôveryhodnými hrozbami a prísľubmi

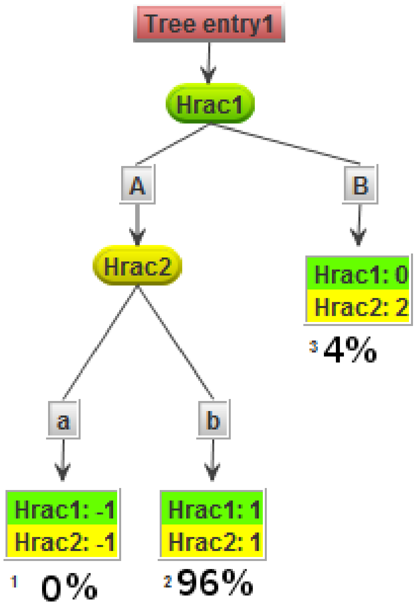
Pozrime sa hneď na prvú hru na OBR.12, na ktorej som testoval základné predpoklady racionálneho poznania u ľudí ako napr. všeobecné poznanie racionality nultého, prvého rádu, schopnosť rozlišovať medzi akciami a následnými výplatami.

Táto hra má 2 NE: (B, a) a (A, b). Avšak prvé equilibrium sa dá chápať ako stratégia nesplniteľnej hrozby, hráč 1 sa obáva výberu akcie a u hráča 2, je to však nesplniteľná hrozba, keďže ak je hráč 2 racionálny, tak nemá dôvod výberu akcie a. Aplikovaním konceptu dokonalých ekvilibrií vzhľadom na podhry sa NE (B, a) vylučuje.

Na druhej strane, equilibrium (A, b) je plne dôveryhodné.Vychádza z procedúri spätnej indukcie (postupnost optimalizácie problému riešenej z budúcnosti do prítomnosti).

Toto je jediné SPNE tejto hry.

Všimnime si, že v hre každý hráč preferuje iné NE: hráč 1 preferuje equilibrium (A, b), zatiaľčo hráč 2 preferuje (B, a), to však on nemôže ovplyvniť. Teda, dokonalosť vzhľadom na podhry je kritérium, ktoré jeden z hráčov nebude ignorovať pri analyzovaní situácie.



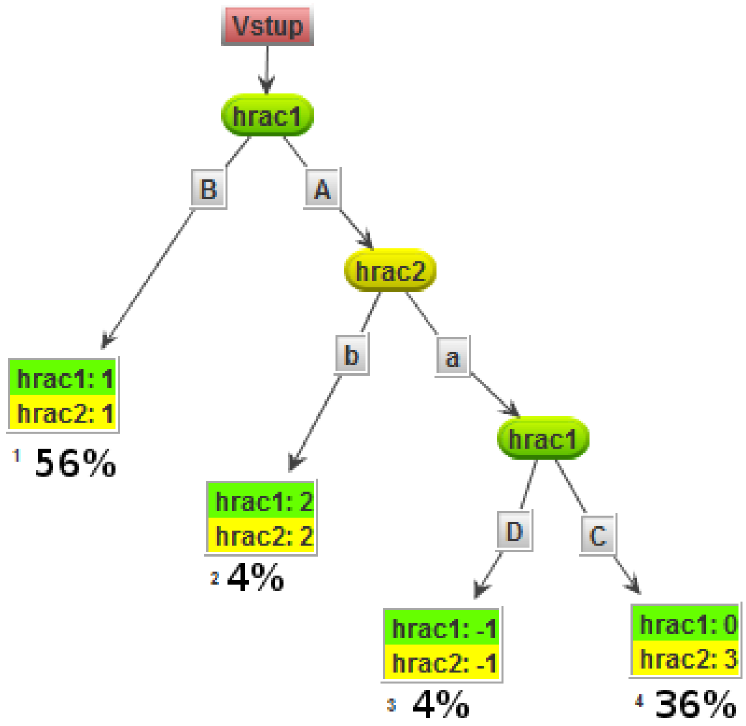
OBR12. - základný herný experiment

Pozrime sa na to ako sa darilo našim ľudským hráčom. Pod každou výplatou sa nachádza percentuálne znázornenie uskutočneného pozorovania. Z 25 hráčskych dvojíc (teda z 25 hier) 24 hier (96%) skončilo v SPNE. To znamená, že hráči neuverili hrozbe a racionálne sa rozhodli pre správnu akciu. Jediná dvojica (4%) sa vychýlila z ekvilibria. Môže to byť spôsobené obyčajnou ľudskou omylnosťou alebo sympatiami v danej dvojici. Samozrejme, túto hru hrala každa dvojica práve raz s tým, že som neumožnil dohody pred samotnou hrou žiadnej dvojici. Týmto experimentom som začal moje pozorovania, keďže som túto hru považoval za vstupný jednoduchý príklad, na ktorom si hráči osvojili ako hrať takéto hry a k čomu to vyusťuje.

V kontraste, uvažujme ďalšiu hru na OBR.13.

V tejto hre, sa môžme tiež hneď zbaviť niektorých NE, ktoré niesú dokonalé vzhľadom na podhry. Strategický profil $((A, D)$,$b)$ definuje NE, v ktorom druhý výber hráča 1 (t.j. D) nie je dôveryhodný. Paradoxne, hráč 2 by rád uveril, že táto akcia je optimálny výber pre hráča 1 na jeho poslednom rozhodovacom uzle. Na druhej strane, ak hra vyžaduje koncept dokonalého ekvilibria vzhľadom na podhry, tak jediné prípustné také equilibrium je $((B,C),a)$. (Dodatočne sa v tejto hre nachádza aj NE v čistých stratégiach - $((B,D), a)$, toto však nie je dokonalé equilibrium vzhľadom na podhry, aj keď indikuje rovnaké výplaty ako $((B,C),a)$.) v tomto jedinom prípustnom equilibriu každý hráč obdrží výplatu 1. To je však menej ako 2 pri NE $((A,D),b)$. Avšak, ak sú hráči racionálni so všeobecným rozhľadom, sú nútení do equilibria $((B,C),a)$.

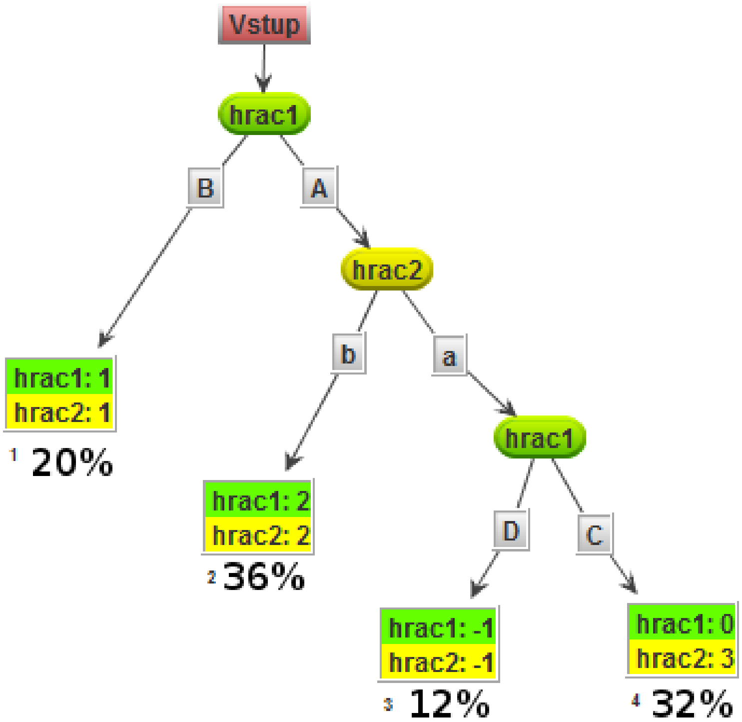
Ako už bolo vysvetlené, základ konceptu dokonalého equilibria vzhľadom na podhry je ten, že definujeme NE vo všetkých možných podhrách bez ohľadu na to či sa do danej podhry dostaneme alebo nie. Každý uzol hry (t.j. vrchol, v ktorom sa hráč rozhoduje) definuje informačnú množinu. Tieto hry sa volajú hry s úplnou informáciou, v ktorých každá akcia v každom bode indukuje podhru pričom každý hráč je plne informovaný o histórií a vie, v ktorom vrchole sa nachádza.



OBR.13 - ďalší herný experiment

Znova 25 herných dvojíc sa zúčastnilo tejto hry. Každá dvojica hrala hru práve raz, neumožnil som hráčom žiadne dohody pred hrou. Výsledky boli zaujímavé. K jedinému dokonalému ekvilibriu vzhľadom na podhry inklinovalo len 56% dvojíc. U ostatných 44% dvojíc vyustila hra mimo ekvilibriovej cesty. V 36% Hráč 1 v dvojici naletel na nedôveryhodný prísľub zo strany hráča 2, čo prinieslo hráčovi 2 najvyšší zisk, zatiaľ čo hráčovi 1 nulu. Ďalej si všimnime, že len jedna dvojica (4%) sa dostala k vzájomne najlepšej pozícii, každá s výplatou 2. To sa dá interpretovať omylnosťou hráča 2 alebo tým, že hráč 2 verí v neskoršiu hrozbu zo strany hráča 1. Táto hrozba je však znova nedôveryhodná, keďže racionálny hráč 1 si vyberie v poslednom uzle akciu C. Experiment však ukázal, že táto hrozba nie je až tak nedôveryhodná, keďže jeden hráč sa pre ňu rozhodol, tým pádom potopil seba aj súpera a obidvaja išli do mínusu. Takéto správanie sa dá chápať ako premotivovane pomstychtivé, ktoré ani jednému hráčovi neprináša žiadny úžitok, ale práve naopak.

Pri tejto hre som rozmýšľal: čo keby som dovolil hráčom ústne sa dohodnúť pred hrou, resp. vytvoriť fiktívnu kooperáciu. Hráči sa ústne dohadovali pred hrou, v rámci toho, dostať sa k výplate 2 pre každého hráča.



OBR.14 - herný experiment rozšírený o ústnu dohodu pred hrou

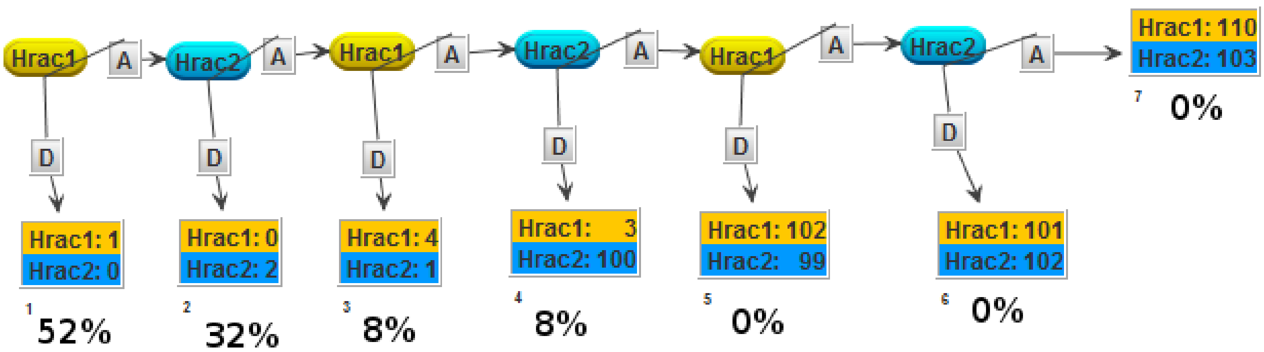
Vidíme, že ústna dohoda nijako neovplyvnila 20% skalných racionálnych hráčov, ktorí správne predpokladajú, že žiadna ústna dohoda ešte nič nezaručuje, keďže ju hráč 2 môže hocikedy porušiť. Ďalších 36% hráčov sa ukazuje ako poctiví hráči, ktorí svoje dohody plnia. Zvýšil sa však počet hier, ktoré končia záporne pre obe strany (až 14%). Interpretácia tohto javu je jednoduchá: u hráča 1 stúpa pomstychtivosť, keďže hráč 2 porušil dohodu. Zvyšných 30% bolo zmierených (hráč 1 v dvojici) s porušením zmluvy. Títo hráči 1 sa dajú v kontraste s pomstychtivými chápať ako hráči s chladnou hlavou, ktorí sa rozhodnú pre menšie zlo.

Porovnanie týchto dvoch experimentov (bez ústnej dohody a s ňou) hovorí o tom, že keď prinesieme hráčom možnosť ústnej dohody ('ilúziu'), ktorá nemá z čisto racionálneho hľadiska žiadny význam, tak dvojice sa začínajú vychylovať z jediného SPNE a pravdepodobnosť, že hra skončí mimo ekvilibria je o dosť väčšia. (V našom prípade 20% končí v ekvilibriu a zvyšných 80% sa rozlezie mimo.)

4.2 Altruisti v stonožke

Ilúzia vo forme nezáväznej ústnej dohody sa javí ako zaujímavý nástroj na ovplyvňovanie rozhodnutí, presvedčení a racionality hráčov.

Uvažujme nový herný experiment v tvare stonožky na OBR.15. Opäť 25 dvojíc hráčov hrá túto hru len raz, pričom nie sú dovolené žiadne dohody. Pre tento špeciálny experiment som oslovil nových hráčov, ktorí nepoznajú ilúziu ústnej dohody a sú nezávislí. Keby som uvažoval predošlých hráčov, tak výsledky by boli skreslené kvoli nadobúdaniu skúseností hráčov počas hrania experimentov.

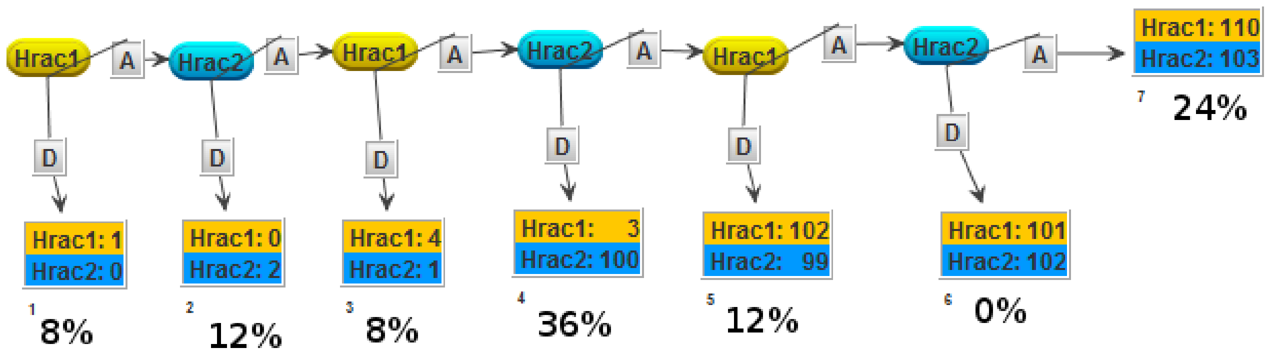


OBR.15 - stonožka

Čo sa dá vyzistiť z tejto hry po 25 hrách? Jediné SPNE tejto hry je podľa teórie stratégia D pri prvom rozhodovacom uzle. Teda podľa Nashovej logiky a aplikovaní spätnej indukcie sa 52% dvojíc s tým stotožňuje. U zvyšných 48% dvojíc vidíme pokusy dostať sa k vyššiemu zisku, ktoré sú však hneď uzemnené hráčmi 2 v dvojiciach, ktorí volia možnosť D (32%dvojíc). Len dve dvojice sa dostali aspoň po štvrtý uzol, kde vysoká výplata uspokojila aspoň hráča 2. A len dvaja hráči 1 hrali vždy možnosť A.

Toto vyústenie experimentu môžme pochopiť rôzne. Základná vec, o ktorú sa opiera môj názor stojí v tomto prípade na cieľoch hry. Hráč môže o tejto hre uvažovať dvomi spôsobmi. Buď má prvotný cieľ hry poraziť druhého hráča alebo má prvotný cieľ získať z hry čo najviac a na základe toho sa odvíja aj jeho výber akcií.

Porovnajme si túto hru s rovnakou hrou, ale s možnosťou, že sa hráči pred hrou ústne dohadujú ohľadom toho, čo najdlhšie v hre zotrvať. (OBR.16)



OBR.16 - stonožka s ústnou dohodou

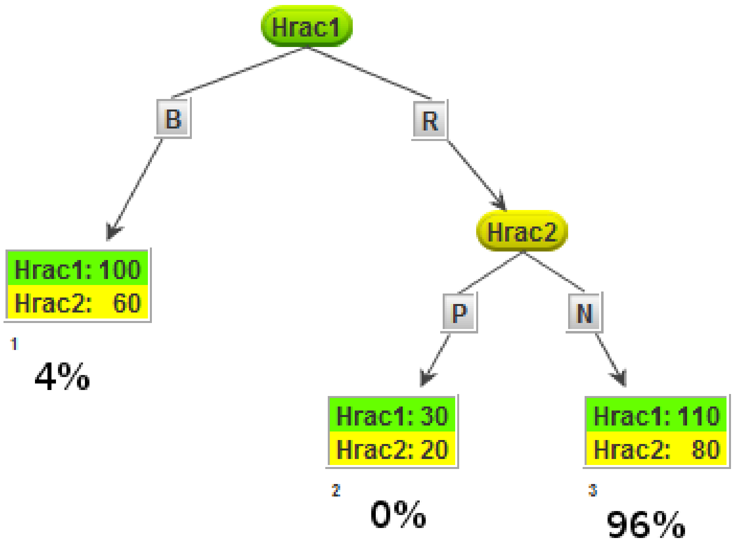
Ilúzia ústnej dohody znovu ovplyvnila vývoj hry, vidíme že hráči sa menej boja oddať hre. Ak uvažujeme hru v čase, tak jeho plynutím postupne vypadávajú dvojice, na štvrtom uzly ukonči hru najväčšie percento dvojíc pre vysokú výplatu u hráča 2. Hra sa však pri tomto experimente krajšie rozloží pozdĺž celej stonožky.

Prečo je to tak? Jedna racionálna odpoveď, ktorá mi prichádza na um je tá, že výplaty v mojich experimentoch sú rýdzofiktívne, to znamená, že ak by išlo o reálne peniaze, tak ľudia by k danej situácii pristupovali inak. Ďalšou odpoveďou môže byť aj typ ľudí v hre, tí ktorí sa neboja rizika, respektíve tí veľmi optimisticky uvažujúci, inak označovaní aj ako altruisti. Altruisti preferujú ako cieľ vyššiu výplatu pred výhrou alebo prehrou v danej hre v zmysle vyššej či nižšej výplaty v porovnaní s druhým hráčom. Takíto hráči môžu aj o svojich súperoch uvažovať s určitou pravdepodobnosťou, že sú altruisti a podľa toho sa rozhodovať. Ak sú obidvaja hráči altruisti, mohli by to zistiť hneď po druhom rozhodovacom uzle, keďže obaja hráči pokračujú v hre, vedia to už aj medzi sebou a majú najlepší nábeh zahrať hru k najvyšším výplatám.

4.3 Racionalita pri zmene výplat

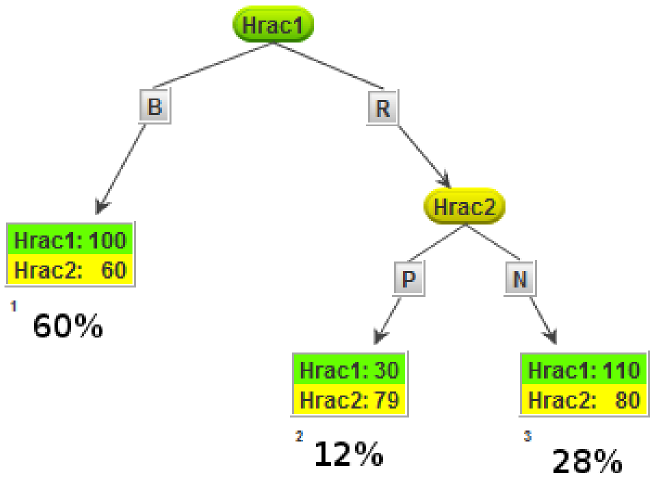
Sila spätnej indukcie je prezentovaná na experimente na OBR.17. Prvý hráč, ktorý začína hru si vyberá medzi bezpečnou akciou B a riskantnou akciou R. Ak si vyberie R, tak príde na rad druhý hráč, ktorý si vyberá z možností P potrestania obidvoch hráčov alebo možnosti N, ktorá vedie k optimálnemu SPNE. Máme v tejto hre ešte jedno NE - (B,P), ktoré však nie je SPNE. Druhý hráč nemá žiadny dôvod vychýliť sa z (B,P), pretože potrestanie sa objavuje mimo ekvilibriovej cesty. A Koncept dokonalosti vzhľadom na podhry vylučuje toto NE, keďže očakáva racionálne správanie v každej podhre.

Znovu uvažujme 25 dvojíc, ktoré budú hrať túto hru práve raz. Žiadnu dohodu vopred už neuvažujeme.



OBR.17 - pôvodná hra bez zmenených výplat

Vidíme takmer dokonalé racionálne správanie u našich hráčoch, a zároveň len jedna dvojica (4%) sa vychýlila pravdepodobne dôsledkom omylnosti alebo chvenia. Zatiaľ je to v poriadku. Poďme však brať výplatu ako parameter, ktorý môžme zvýšiť tak aby neovplyvnil ekvilibria. Pozrime sa ako si v tejto hre počínalo 25 dvojíc (OBR.18).



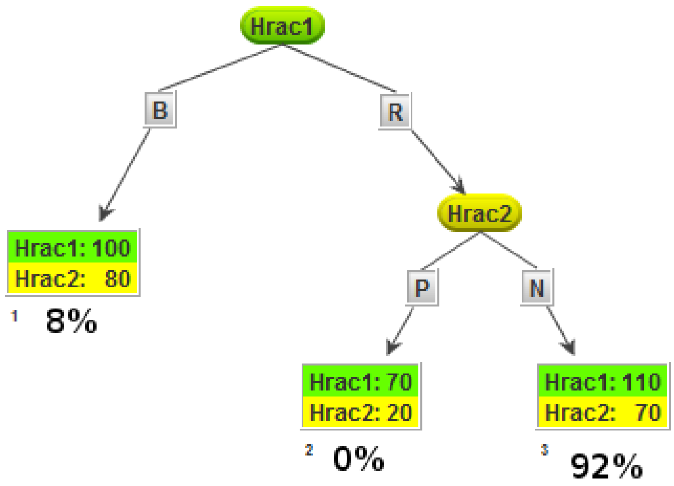
OBR.18 - hra s novou výplatou

Jediná zmena je pri výplate hráča 2 pri akcii potrestať, tá sa zvýšila tesne pod hodnotu 80. Výber akcií indikuje, že hráči 1 neveria, že hráči 2 sú racionálni a skoro dve tretiny z nich sa uchýli v bezpečí ekvilibria, ktoré však nie je SPNE! Pričom len necelá tretina hier dospeje k vzhľadom na podhry dokonalému ekvilibriu. Ďalšou zistenou zaujímavosťou je, že keď vynásobíme všetky výplaty väčšou konštantou vytvoríme dojem u hráčov 1 stále viac upúšťať od toho či veria v racionalitu hráčov 2. A preto oplatí sa nám veriť v racionalitu ostatných hráčov? To je otázka pre každého z nás.

Na záver týchto herných experimentov uvažujme hru na OBR.19. V predošlej hre nemal hráč 2 žiadny dôvod potrestania, keďže z akcie R mal zisk aj samotný hráč 2.

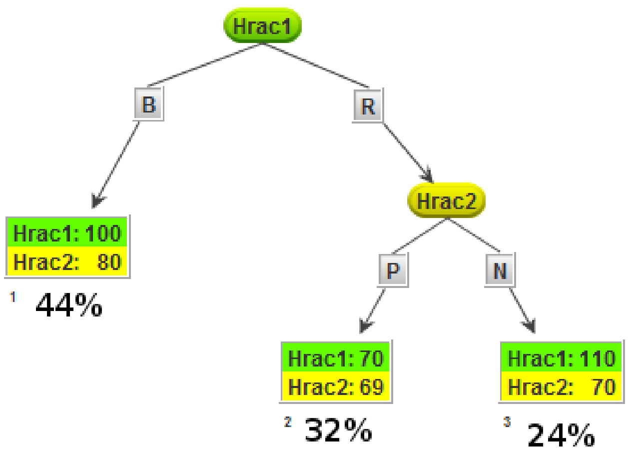
V nasledujucej hre však hráč 2 nadobudne dôvod na potrestanie, keďže akcia R mu prinesie nižšiu výplatu v obidvoch prípadoch, než akcia B a zato by chcel hráča 1 potrestať. Táto hra má znovu dve NE, jedno je (B,P),a druhé je (R,N). Aplikáciou dokonalosti vzhľadom na podhry prvé ekvilibrium vylučujeme a ostane nám SPNE - (R,N).

Na OBR.19 na ďalšej strane je výstup hier 25 dvojíc. Hrozbe z potrestania uverilo len 8% dvojíc, zatiaľ čo racionálny zvyšok skončil v SPNE.



OBR.19

Poďme túto hrozbu z potrestania trosku vykristalizovať zmenou výplaty tak aby sme znovu nepoškodili ekvilibria na OBR.20.



OBR.20 - vyburcovanie iracionálneho potrestania

Táto hrozba vystrašila hráčov 1 natoľko, že sa skoro necelá polovica schyluje k bezpečnej voľbe B. Zvýšná polovica sa rozdelila medzi racionálnych hráčov (24%) a pomstychtivých (32%). Sú nedôveryhodné hrozby skutočne nedôveryhodné?

Pri týchto experimentoch sme si porovnávali ucelenú Nashovu teóriu s experimentami v realite. Vidíme, že v mnohých prípadoch sa teoria vychyluje od praxe. Jednoducho povedané racionalita v skutočnom svete nedosahuje úroveň akú predpokladajú herní teoretici Nash a spol. Dostali sme sa ku kontrastu medzi štandardnou teóriou a skutočním správaním hráčov.

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo priblížiť zosilňovacie koncepty Nashovho ekvilibria. Zadefinovali sme si potrebné predpoklady hernej teórie a uviedli Nashove ekvilibrium. Predstavili sme si rôzne typy zosilnení a postupy ako ich aplikovať. V herných experimentoch sme potom dali do kontrastu teoretický herný základ a realitu. Ukazuje sa, že reálny svet sa nespráva dostatočne racionálne vzhľadom k ucelenej racionálnej teórii.

Literatúra

[1] Govindan, S. and Wilson, R. The New Palgrave Dictionary of Economics, 2nd Edition

[2] Hargreaves, S. and Varoufakis, Y. Game Theory, A Critical Introduction

[3] Harper,W 1991, Handbook of defeasible reasoning and uncertainity managemenet systems, str. 415

[4] Harper, W. (1991) 'Ratifiability and refinement'. Foundations of Decision Theory.

[5] Harsanyi, J. 1967. Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, IIII. Management Science

[6] Harsanyi, J., and Selten, R. 1988. A General Theory of Equilibrium Selection in Games. Cambridge: MIT Press.

[7] Kilianová, S. Matematický softvér. [online]. [cit. 2011.06.01.] Dostupné na internete: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/kilianova/teachingmatlab.html>

[8] Kohlberg, E., and Mertens, J-F. 1986. On the Strategic Stability of Equilibria. Econometrica

[9] Kreps, D., and Wilson, R. 1982. Sequential Equilibria. Econometrica

[10] Myerson, R. 1978. Refinement of the Nash Equilibrium Concept. International Journal of Game Theory

[11] Nash, J. (1951) 'Non-cooperative games'. Annals of Mathematics

[12] Selten, R. (1975) A reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. International Journal of Game Theory

[13] Selten, R. 1965. Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit. Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft

[14] van Damme, E. 1991. Stability and Perfection of Nash Equilibria. Berlin: Springer- Verlag.