

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**  
**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**

**Optimalizácia využitia prepravných ciest medzi plynárenskými hubmi  
vzhľadom na cenovú volatilitu na komoditnom trhu**

**Diplomová práca**

**Bratislava 2013**

**Bc. Marek Zelenay**

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**  
**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**

**Optimalizácia využitia prepravných ciest medzi plynárenskými hubmi  
vzhľadom na cenovú volatilitu na komoditnom trhu**

**Diplomová práca**

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Študijný odbor: Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky  
Školiteľ: Mgr. Matej Krušpán

**Bratislava 2013**

**Bc. Marek Zelenay**



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Marek Zelenay  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Optimalizácia využitia prepravných ciest medzi plynárenskými hubmi vzhľadom na cenovú volatilitu na komoditnom trhu

**Cieľ:** Komoditný trh s plynom v EU sa sústreďuje na zopár obchodovacích uzloch - huboch. Ceny na huboch sa síce menia podľa spoločného trendu (ropa, USD, a najmä cena plynu v UK), ale ceny-spready medzi jednotlivými hubmi sú takisto volatilné. Obchodníci majú možnosť kúpiť si prepravnú kapacitu (spravidla na rok), ktorá spája vždy dva huby a použiť ju jednak na fyzickú prepravu už zakúpených množstiev na jednom hube do svojho cieľového hubu, alebo ju použiť na špekulatívny trading na spread, kedy budú postupne uzatvárať transakcie na kupú a predaj na zamknutie-hedging spreadu pre danú časť prepravnej kapacity. Takisto môžu už zahedgované transakcie uzavrieť opačnou transakciou (unwinding the hedge). Cieľom diplomovej práce je navrhnúť stratégiu využitia prepravnej cesty na špekulatívny trading na spready, ktorá sa môže stať základom stratégie obchodníka pri cenových ponukách na prepravnú kapacitu

**Vedúci:** Mgr. Matej Krušpán  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 25.01.2012

**Dátum schválenia:** 26.01.2012  
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

-----  
študent

-----  
vedúci práce

## **Čestné prehlásenie**

Prehlasujem, že som túto prácu vypracoval samostatne pod odborným vedením vedúceho diplomovej práce a s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave dňa 19.4.2013

.....

## **Pod'akovanie**

Ďakujem vedúcemu práce Mgr. Matejovi Krušpánovi za cenné rady a podnetné pripomienky, ktorými ma usmerňoval pri vypracovaní tejto diplomovej práce. Zároveň by som chcel poďakovať mojej rodine, priateľke a kamarátom za ich podporu počas celého štúdia.

## **Abstrakt**

V poslednej dekáde prišlo k výraznému rozmachu na trhoch s plynom v Európe, ktorý sa začal sústreďovať do obchodovacích centier tzv. hubov. Tieto huby sú navzájom pospájané prostredníctvom siete plynovodných potrubí, cez ktoré je možné plyn prepraviť. Práca sa zaoberá vplyvmi pôsobiacimi na vývoj cien hubu a metódami na optimalizáciu ceny za prepravu určitého objemu plynu medzi dvoma hubmi. Tento poznatok sa následne využíva na výpočet opcií závislých od ceny plynu na viacerých huboch a na nájdenie arbitrážnych príležitostí medzi jednotlivými trhmi. Potvrdila sa očakávaná závislosť hubov v kontinentálnej Európe od cenového vývoja na britskom hube NBP, ako aj vplyv krátkodobých zmien cien ropy na huby západnej Európy v kontraste s hubmi strednej Európy závislými od dlhodobých zmien v trende vývoja cien ropy. Prostredníctvom Monte Carlo metódy sa odhaduje cena opcií závislých na podkladovom aktíve vyvíjajúcom sa na viacerých trhoch, ktoré sa ukazujú byť lacnejšie než v súčasnosti využívané opcie. Posledná časť využíva poznatky teórie extrémnych hodnôt na určenie pravdepodobností nastania arbitráže medzi jednotlivými trhmi.

**Kľúčové slová:** plynové huby, Grangerová kauzalita, vector error correction model, Kleinov algoritmus, Monte Carlo simulácie, všeobecné Paretovo rozdelenie

## **Abstract**

In the last decade there has been a significant expansion of gas markets in Europe, which began to concentrate into trading centers so called hubs. These hubs are connected to each other through a network of gas pipelines, through which can be the gas transported. This thesis deals with the impact of indicators on the development of gas prices and methods to optimize the shipping costs of the specific volume of gas between the two hubs. This knowledge is then used to calculate the options depending on the price of gas on several hubs and to find opportunities for arbitration between different markets. The expected dependence of continental Europe hubs on price development in the United Kingdom was confirmed, as well as the impact of short-term changes of oil prices on Western Europe hubs, in contrast with the hubs of Central Europe depending on long-term changes in the trend of the development of oil prices. The price of options dependent on underlying asset developing on several markets, estimated by means of the Monte Carlo method, which turns out to be cheaper than the currently used options. The last part is used to determine the probability of the occurrence of arbitrage between different markets through the knowledge of extreme value theory.

**Keywords:** gas hubs, Granger causality, vector error correction model, Klien algorithm, Monte Carlo simulations, generalized Pareto distribution

## Obsah

<b>Úvod .....</b>	<b>1</b>
<b>1. Úvod do poznatkov obchodovania s plynom .....</b>	<b>2</b>
<b>2. Modelovanie vývoja cien plynu na Európskych huboch.....</b>	<b>5</b>
2.1 Analýza dát a návrh modelu .....	5
2.2 Grangerová kauzalita .....	8
2.3 Vplyv trhu s ropou .....	11
2.4 Vector error correction model.....	16
<b>3. Model na optimalizáciu prepravy plynu.....</b>	<b>20</b>
3.1 Kleinov algoritmus .....	22
3.2 Algoritmus Forda – Fulkersona .....	25
3.3 Algoritmus vyhľadávania záporných polocyklov.....	31
3.4 Program.....	35
3.5 Návrh digrafu.....	38
<b>4. Aplikácia optimálnych ciest .....</b>	<b>39</b>
4.1 Opcie.....	39
4.2 Arbitráže medzi trhmi .....	46
<b>Záver .....</b>	<b>55</b>
<b>Zoznam použitej literatúry .....</b>	<b>57</b>
<b>Prílohy.....</b>	<b>58</b>



## Úvod

Komoditný trh s plynom v Európskej únii sa sústreďuje do zopár obchodných uzlov prezývaných hubov. Ceny na jednotlivých huboch spoločne reagujú na zmeny istých kľúčových parametrov, akými sú cena ropy, kurz dolára voči euru a vývoj cien plynu vo Veľkej Británii, avšak cenové rozdiely (spready) medzi hubmi sú takisto volatilné. Huby sú medzi sebou vzájomne poprepájané sieťou plynovodov. Obchodníci majú možnosť si zakúpiť na určité obdobie prepravnú kapacitu medzi dvojicou hubov a použiť ju na fyzickú prepravu už zakúpených množstiev plynu do koncového hubu, alebo ju použiť na špekulatívny trading na spread, kedy sú postupne uzatvárané transakcie na nákup a predaj podkladového aktíva – plynu na zamknutie hedging–spreadu pre danú časť prepravnej kapacity.

Cieľom diplomovej práce je s pomocou optimalizácie prepravy plynu navrhnúť stratégiu využitia prepravnej cesty na špekulatívny trading na spread alebo finančných derivátov, ktorá sa môže stať základom stratégie obchodníka pri cenových ponukách na prepravnú kapacitu.

Práca je členená na štyri časti. V prvej časti sú popísané huby – ich história, členenie a rozdiely medzi nimi. Taktiež je tu znázornená existujúca sieť plynovodov v Európe. Druhá časť sa zaoberá ekonometrickým modelovaním cien na jednotlivých huboch, ich vzájomné ovplyvňovanie, vplyv britského trhu a cenový vývoj severskej ropy Brent. V ďalšej časti je teoreticky opísané fungovanie a princípy optimalizačného programu, ktorý je následne aplikovaný na nájdenie najlacnejšej cesty prepravy plynu na sieti plynovodov. V poslednej časti sa využíva tento poznatok pri ohodnocovaní košíkových opcíí závislých na cene plynu na viacerých trhoch, ich porovnávanie s jednoduchými opciami a zisťuje sa za pomoci teórie extrémnych hodnôt možnosť uplatnenia špekulatívneho tradingu na spread medzi jednotlivými hubmi.

## 1. Úvod do poznatkov obchodovania s plynom

V posledných 15 rokoch prešlo obchodovanie s plynom v Európe veľkým vývinom. Dovedy bol obchod založený takmer výlučne na dlhodobých kontraktach medzi krajinami, pričom cena sa odvíjala na základe niekoľkých parametrov, napríklad svetových cien ropy a kurzu dolára. V Severnej Amerike bol však trend vývoja iný, kde sa celý obchod s plynom zhluchoval do niekoľkých uzlov – hubov prepojených medzi sebou sieťou plynovodov. Tieto huby tvoria vlastne burzy pre obchodovanie s plynom, teda ceny sa odvíjajú na základe aktuálnej ponuky a dopytu. Podobne ako pri trhoch s inými komoditami aj tu vznikajú rôzne deriváty odvodené od ceny plynu ako napríklad futures, opcie a swapy. Prechod k trhovému oceňovaniu komodity má väčšinou za následok zníženie jej ceny. V druhej polovici deväťdesiatych rokov dvadsiateho storočia sa preto začína v Európe rozvíjať (liberalizovať) obchod s plynom a postupne sa preberajú a rozvíjajú prvky systému fungujúce v Severnej Amerike. Hlavnými dodávateľmi plynu na trh v Európe sú Rusko, Veľká Británia, Nórsko, Alžírsko a Líbya (pred občianskou vojnou, tieto africké krajiny zásobujú plynom hlavne južnú Európu), ktoré ju prepravujú do odberateľských krajín prostredníctvom siete plynovodov.

Ako prvá krajina, v ktorej sa vytvoril trh s plynom bola Veľká Británia (v roku 1996). Ako koncové miesto odovzdania sa stanovil hub NBP (National Balancing Point) a zmluvou NBP'97 sa štandardizovali OTC obchody (Over-The-Counter obchody realizované mimo burzy). To malo za následok vznik a rozmach trhu s derivátmi (hlavne futures) v roku 1997. V nasledujúcich rokoch sa neustále zvyšoval počet obchodníkov a došlo k exponenciálnemu rastu objemu obchodov na trhu. V roku 1998 bol postavený plynovod IUK spájajúci Veľkú Britániu s Belgickom, o ktorom sa predpokladalo, že sa pričíní o vznik celoeurópskeho trhu s plynom. Avšak bankrot spoločnosti Enron v roku 2001 a kolaps distribučnej spoločnosti Eastern Gas Marketing (vlastnenej TXU Europe) mal za následok štvorročný pokles objemu obchodov. Od roku 2006 sa trh začína zotavovať a opäť dochádza k jeho rozmachu (v roku 2010 dosiahol úroveň z roku 2001). Postavením nových plynovodov (Langeled, BBL) dochádza k ďalšiemu prepojeniu siete plynovodov Británie a kontinentálnej Európy, a tým aj k zjednodušeniu a zlacneniu prepravy plynu. To má za následok nárast obchodovania medzi spoločnosťami v UK a v severozápadnej časti Európy, pričom dochádza k vyrovnávaniu cien na týchto huboch. Rast likvidity na huboch zaručuje obchodníkom vyrovnávanie nákladov spojených za

prepravu plynu medzi jednotlivými územiaми. Britský hub NBP je (zatiaľ) dostatočne veľký a likvidný na to, aby určoval ceny v ostatných častiach Európy. Práca sa bude zaoberať otázkou do akej miery a či má vývoj ceny plynu vo Veľkej Británii vplyv na pohyb cien na trhoch kontinentálnej Európy. Nie všetky huby plnia rovnaké funkcie, a preto sa delia do skupín obchodných, tranzitných a prechodných hubov.

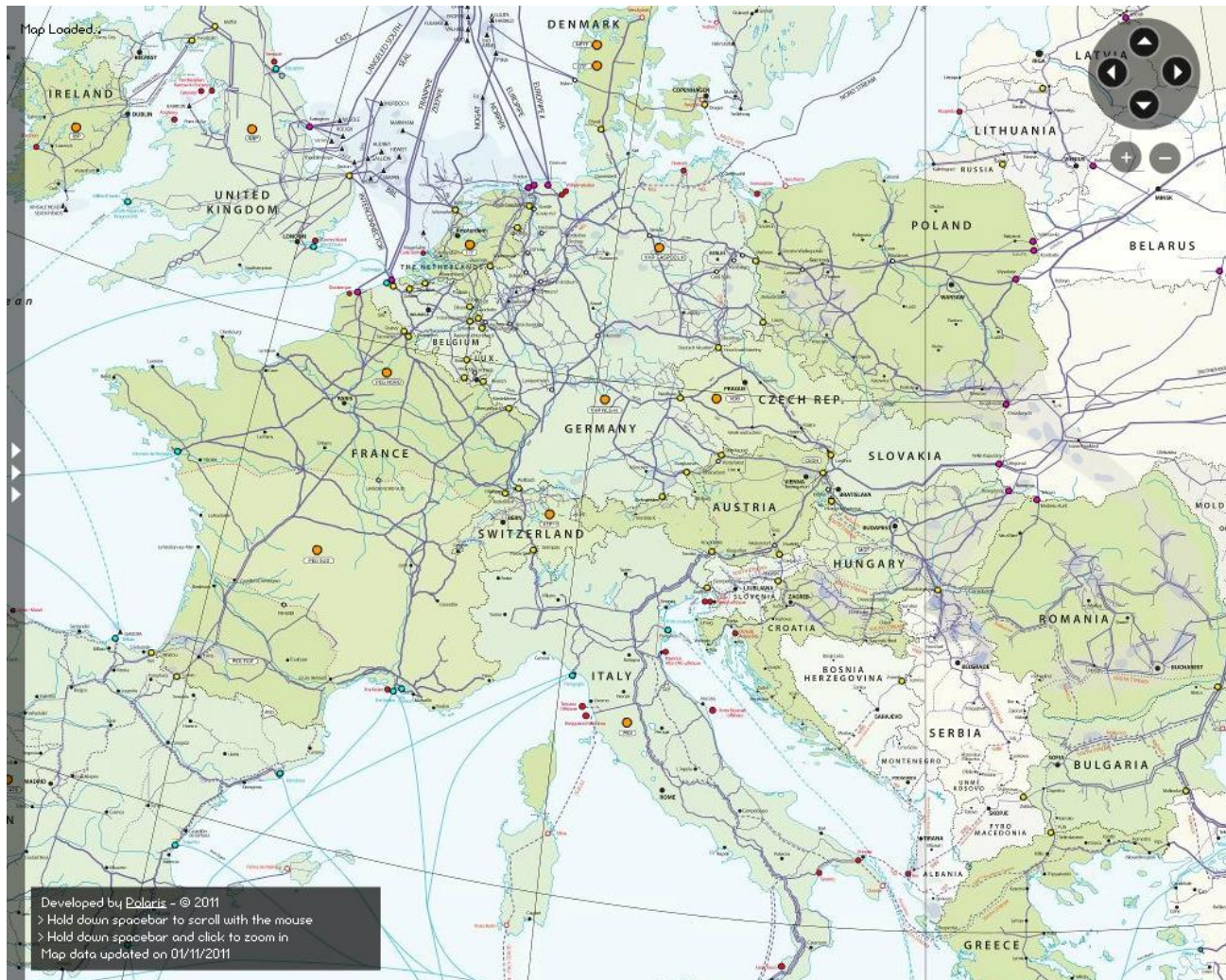
Obchodné huby („trade hubs“) sú také, ktoré už dosiahli určitú úroveň v objeme celkových obchodovateľných objemov . Existujú ako virtuálne miesta s otvoreným a jednoduchým prístupom k obchodu pre účastníkov na trhu. Teda na nich obchoduje veľké množstvo spoločností a potvrdilo sa, že sú spoľahlivými trhmi. Z európskych hubov medzi ne patria britský NBP a holandský TTF (v súčasnosti rastie TTF rýchlejšie ako NBP).

Druhá skupina – tranzitné huby, zahŕňa tranzitné miesta na prepravu plynu, na ktorých môžu účastníci trhu obchodovať. Avšak ich hlavnou úlohou je uľahčiť tranzit veľkého množstva plynu pre jeho ďalšiu prepravu.[1] V západnej Európe sú významné dva tranzitné huby – Baumgarten v Rakúsku (CEGH) a Zeeburge v Belgicku.

Poslednou skupinou sú tzv. prechodné huby („transition hubs“), ktoré sú virtuálnym obchodným miestom, ale ešte nedosiahli úroveň obchodných hubov. Väčšina z nich sa vyznačuje rastom obchodovateľných objemov, pričom majú potenciál nadobudnúť status obchodných hubov. V práci sa uvažujú dva huby tohto typu: Gaspool a NCG v Spolkovej republike Nemecko.

Spoločnosť obchodujúca medzi dvoma hubmi (predávajúci) musí zabezpečiť prepravu plynu do hubu, na ktorom sa nachádza partnerská spoločnosť (kupujúci). Na obrázku nižšie je mapa zobrazujúca huby a existujúcu sieť plynovodných potrubí v Európe.

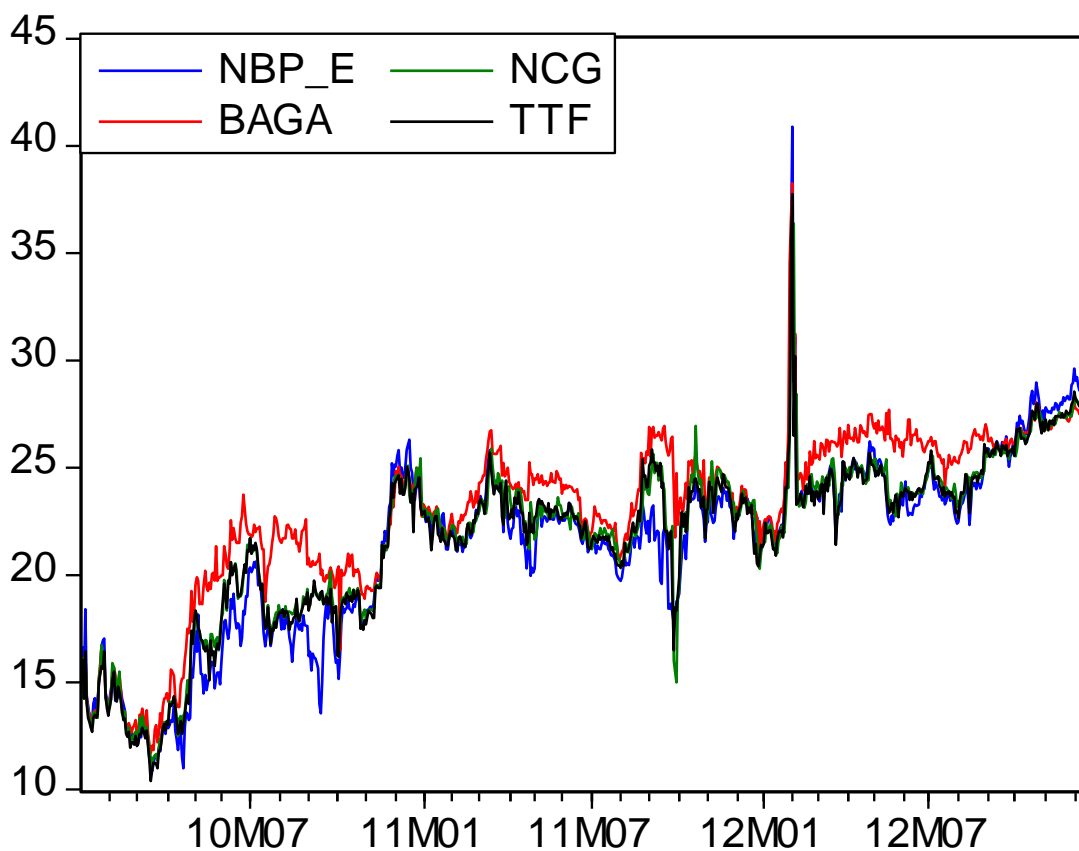
## Sieť plynovodov v Európe



## 2. Modelovanie vývoja cien plynu na Európskych huboch

V tejto časti budeme skúmať vplyv západoeurópskych trhov (prevažne holandský TTF a anglický NBP) na vývoj cien na hube NCG. Komoditný trh s plynom v EU je sústredený do zopár obchodovacích uzlov - hubov. Ceny na týchto huboch sa riadia spoločným trendom (vývoj cien ropy a plynu v UK).

Graf 2.1 cien v eurách za 1MWh plynu na európskych huboch



### 2.1 Analýza dát a návrh modelu

Z grafu nemožno jednoznačne určiť, či je vývoj cien stacionárnym, alebo nestacionárnym radom. Prostredníctvom Dickey Fullerovho testu (ADF) sme nevyhlúčili nestacionaritu jednotlivých radov (okrem anglického NBP, p-hodnota 4%), aj keď p-hodnoty často len mierne prekročovali 5% (5,5% NCG). Všetky údaje o cenách komodít boli poskytnuté z SPP. Máme k dispozícii 1073 údajov o cenách plynu na každom hube v období od 4.1.2010 do 11.12.2012 (predpokladáme, že na huboch sa obchoduje len

v pracovných dňoch- trading huby, počas nepracovných dní cena stojí). V kontinentálnej Európe je cena plynu v eurách za 1 MWh a vo Veľkej Británii sa udáva v penciach za therm (energia, ktorá vznikne spálením 100 kubických stôp zemného plynu, čo je približne 34,1 MWh).

Pri zostavovaní modelu využijeme poznatky, že na vývoj cien plynu na huboch pôsobí svetová cena ropy a ceny plynu v krajinách, kde sa ťaží (UK, Nórsko). Na základe korelácie (približne) vieme ako spolu jednotlivé časové rady súvisia.

Keďže sa prevažne jedná o nestacionárne rady, aby sme zabránili vzniku spurious regression musíme rady najskôr diferencovať. Takouto diferenciáciou však strácame informáciu o dlhodobých vzťahov medzi premennými, o ktorú v modeli nechceme prísť. Týmto sa zaoberajú tzv. error correction modely. Nech veličiny  $y_t$  a  $x_t$  sú integrované (nestacionárne) časové rady prvého stupňa  $I(1)$ , potom ich odhadom dostaneme:

$$y_t = b_0 + b_1 x_t + e_t$$

pričom táto regresia vykazuje zdanlivo dobré výsledky (vysoká hodnota parametra  $R^2$  a  $t$ -štatistik). Avšak pri jej reziduách  $e_t$  je prítomná silná autokorelácia (často sú aj sami nestacionárne), čo potvrdzuje nízka hodnota Durbin – Watsonovej štatistiky. Aby sa však predišlo strate informácie o dlhodobých vzťahoch medzi premennými, ktoré nastanú skúmaním odhadu ich diferencií, pridáva sa do rovnice tzv. error correction člen, čo sú vlastne reziduá pôvodnej rovnice, ktoré zachovávajú informácie o dlhodobom vzťahu medzi premennými. Error correction člen má tvar:

$$e_t = y_t - (b_0 + b_1 x_t)$$

V prípade, že je tento člen stacionárny, existuje kointegrácia a tým stabilné dlhodobé vzťahy medzi premennými. Granger a Engle v roku 1987 zistili, že kointegračný vektor  $e_t$  môže byť odhadnutý prostredníctvom metódy najmenších štvorcov. Následne sa testuje stacionarita Dickey – Fullerovým testom, ale v tomto prípade pre ne platia iné kritické hodnoty.<sup>1</sup>

$$\Delta e_t = \alpha e_{t-1} + \epsilon_t$$

---

<sup>1</sup> Prednášky zo semináru z ekonómie

Teda pre model platí:

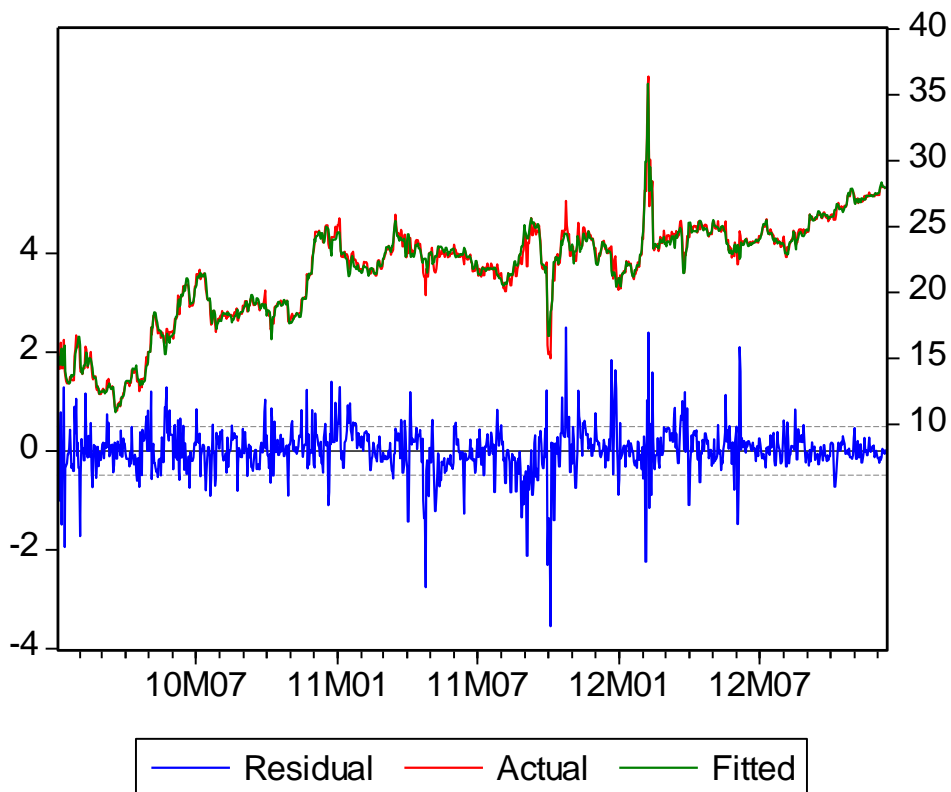
$$\Delta y_t = a_0 + a_1 \Delta x_t + a_{ec}(y_{t-1} - b_0 - x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

kde  $y_t, x_t$  sú  $I(1)$  a  $y_{t-1} - b_0 - x_{t-1}$  je  $I(0)$ . To znamená, že reziduá pôvodného modelu musia byť stacionárne (aby nevznikla spurious regression).

Po zistení súvislostí platiacich medzi radmi získavame model:

$$NCG_t = a_0 + a_1 TTF_t + a_2 TTF_{t-1} + a_3 NBP_t + a_4 NBP_{t-1} + resid_t$$

Odhadnutý model spurious regression



Z obrázku je vidno, že reziduá sú stacionárne (čo potvrdil aj Engle Granger ADF- kritické hodnoty sú iné ako pri obyčajnom ADF). To znamená, že môžeme vytvoriť error correction model:

$$\Delta \ln(NCG)_t = a_0 + a_1 \Delta \ln(TTF)_t + a_2 \Delta \ln(TTF)_{t-1} + a_3 \Delta \ln(NBP)_t + a_4 \Delta \ln(NBP)_{t-1} + a_4 resid_{t-1} + \varepsilon_t$$

Model vykazuje vysokú hodnotu adjusted R<sup>2</sup> 0,5 a Durbin-Watsonova štatistika je 2,09.

V dátach nebol zistený očakávaný vplyv svetových cien ropy na plyn. Po pridaní výnosu ropy (rozdiel logaritmov cien ropy) do modelu sa nám model vylepší iba mierne - nárast adjusted R<sup>2</sup> na 0,51, pokles DW na 2,07. Toto môže byť spôsobené tým, že cenu obchodovateľného plynu v EÚ určujú najmä producenti ako UK a Nórsko, ktorých produkcia je relatívne stabilná, ale nepokryje celkovú spotrebu Európy (väčšinu dopytu zabezpečujú dodávky z Ruska).

Dependent Variable: D(LOG(NCG))

Method: Least Squares

Date: 12/17/12 Time: 20:39

Sample (adjusted): 1/06/2010 12/11/2012

Included observations: 1071 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LOG(TTF))	0.410173	0.028734	14.27504	0.0000
D(LOG(TTF(-1)))	0.370859	0.028273	13.11701	0.0000
D(LOG(NBP_E))	0.031457	0.026257	1.198036	0.2312
D(LOG(NBP_E(-1)))	0.122352	0.025846	4.733885	0.0000
RESID_SKE2(-1)	-0.028656	0.001345	-21.29784	0.0000
C	0.000123	0.000658	0.186298	0.8522
R-squared	0.510633	Mean dependent var		0.000636
Adjusted R-squared	0.508336	S.D. dependent var		0.030701
S.E. of regression	0.021527	Akaike info criterion		-4.833425
Sum squared resid	0.493536	Schwarz criterion		-4.805546
Log likelihood	2594.299	F-statistic		222.2565
Durbin-Watson stat	2.088448	Prob(F-statistic)		0.000000

## 2.2 Grangerová kauzalita

Na základe Grangerovej kauzality sa zisťujú predikčné vlastnosti (vzťahy) medzi parametrami. Určuje sa na základe F- testu vo VAR modeli (vector autoregressive model, jedná sa o zovšeobecnený AR model). Tento model skúma vzájomné závislosti medzi jednotlivými premennými a ich lagmi (predpokladáme, že všetky parametre sú



endogénne). VAR model s dvoma premennými ( $x, y$ ) a  $q$  lagmi (predpokladáme, že  $q = 1$ ) má nasledujúci tvar:

$$x_t = \alpha_1 - \beta_{12}y_t + \gamma_{11}x_{t-1} + \gamma_{12}y_{t-1} + \varepsilon_{xt}$$

$$y_t = \alpha_2 - \beta_{21}x_t + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}x_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$

Vo VAR modeloch sa predpokladá, že premenné t.j.  $x, y$  sú endogénne a stacionárne a  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  sú nekorelované disturbancie. Pri odhade musíme zohľadniť predpoklady modelu (endogénne premenné), t.j. rovnice je nutné upraviť na redukovanú formu:

$$x_t + \beta_{12}y_t = \alpha_1 + \gamma_{11}x_{t-1} + \gamma_{12}y_{t-1} + \varepsilon_{xt}$$

$$\beta_{21}x_t + y_t = \alpha_2 + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}x_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$

Vyjadrenie v maticovom tvare:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{xt} \\ \varepsilon_{yt} \end{pmatrix}$$

$$BX_t = A + \Gamma X_{t-1} + E_t$$

Po ďalších úpravách dostaneme:

$$X_t = Z + \Lambda_1 X_{t-1} + E_t$$

Túto rovnicu je už možné (vzhľadom na vlastnosti parametrov) odhadnúť pomocou metódy najmenších štvorcov. Počet oneskorení (lagov)  $q$  v modeli určujeme na základe Akaikovho a Schwartzovho informačného kritéria. Testovaním Grangerovej kauzality zisťujeme vzájomný vplyv všetkých dvojíc parametrov a ich oneskorení (lagov). Existencia kauzality znamená vplyv daného parametra na vývoj druhého. V prípade zisťovania kauzality premennej  $x$  na  $y$  skúmame VAR( $q$ ) model:

$$x_t = \alpha_1 + \beta_{11}x_{t-1} + \dots + \beta_{1q}x_{t-q} + \gamma_{11}y_{t-1} + \dots + \gamma_{1q}y_{t-q} + e_{1t}$$

$$y_t = \alpha_2 + \beta_{21}x_{t-1} + \dots + \beta_{2q}x_{t-q} + \gamma_{21}y_{t-1} + \dots + \gamma_{2q}y_{t-q} + e_{2t}$$

Neexistenciou kauzality by sa potvrdilo, že premenná  $y$  nemá vplyv na vývoj parametra  $x$ , teda:

$$H_0: \gamma_{11} = \dots = \gamma_{1q} = 0$$

Grangerovým testom sa zisťuje aj opačná kauzalita (t.j. y na x), teda položíme:

$$H_0: \beta_{21} = \dots = \beta_{2q} = 0$$

Zamietnutím oboch nulových hypotéz by sa potvrdil vzájomný vplyv oboch parametrov na svoj vývoj.

V predchádzajúcej časti sme sa zaoberali hypotézou, že ceny z UK vplývajú na vývoj cien európskych hubov. Hypotézu testujeme pomocou Granger causality testu - v teste (na VAR model) musia byť použité stacionárne rady, teda budeme brať do úvahy relatívne zmeny cien plynu. Budeme uvažovať vývoj cien na 3 huboch: TTF (Holandsko), Gaspool (Nemecko) a NBP (UK).

#### Pairwise Granger Causality Tests

Date: 12/17/12 Time: 11:42

Sample: 1/01/2009 12/11/2012

Lags: 1

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Probability
DNBP does not Granger Cause DGASPOOL	734	13.7375	0.00023
DGASPOOL does not Granger Cause DNBP		1.4E-05	0.99706
DGASPOOL does not Granger Cause DTTF	734	0.59887	0.43926
DTTF does not Granger Cause DGASPOOL		27.1164	2.5E-07
DNBP does not Granger Cause DTTF	734	3.31873	0.06890
DTTF does not Granger Cause DNBP		2.57103	0.10927

Z testu sme zistili, že relatívne zmeny cien plynu UK hubu vplývajú na nemecký trh a naopak, nemecký trh nepôsobí na anglický (podľa očakávania). Takisto sa naplnili naše očakávania ohľadom nemeckého a holandského trhu. Avšak úplne sa nesplnil predpoklad o vplyve anglického trhu na holandský, kedy nie je možné pri 5% hladine významovosti vylúčiť neexistenciu vplyvu NBP na TTF. To môže byť spôsobené tým, že holandský

a britský hub sú najväčšie v Európe (považujú sa za jedny zo svetových centier obchodu s plynom) a navzájom veľmi prepojené, zatiaľ čo nemecký Gaspool je ešte len vo vývine a riadi sa vývojom väčších hubov. Celá tabuľka testu Grangerovej kauzality sa nachádza v prílohe.

### 2.3 Vplyv trhu s ropou

Táto časť sa zaoberá vplyvom zmien ceny ropy na vývoj trhu s plynom v jednotlivých európskych huboch. V úvode bolo spomenuté, že pre huby v západnej Európe je typický menší podiel dlhodobých kontraktov dodávok plynu a prevažujú hlavne obchody (krátkodobé kontrakty) medzi jednotlivými subjektmi na trhu. Tieto obchody zahŕňajú zmluvy o dodávke určitého množstva plynu na dohodnuté miesto (často medzi distribučnými spoločnosťami), alebo sa jedná o nákup resp. predaj rôznych produktov (derivátov) odvodených od ceny plynu (ich podkladové aktívum). Ďalším typickým znakom je lepší prístup subjektov na trh (hlavne trhové huby NBP a TTF). V strednej Európe sa však nachádzajú menej rozvinuté huby (s menej liberalizovaným a menším trhom) alebo plnia iné funkcie (ako napr. tranzitný hub CEGH). Oproti západným trhom vo väčšej miere prevažujú dlhodobé kontrakty s producentkými krajinami (hlavne s Ruskom), ktoré ovplyvňujú vývoj obchodných cien plynu. Tieto dlhodobé kontrakty sú medzinárodné zmluvy medzi krajinami (producentkou a koncovou) o každoročnom nákupe vopred určeného množstva plynu za určitú dobu (okolo 20 rokov), pričom jej cena je funkciou istých parametrov (ako ceny ropy, kurzu dolára). Teda ceny na huboch v západnej Európe by mali rýchlejšie reagovať na nálady spojené s trhom s ropou oproti hubom v strednej Európe (tie by mali byť skôr náchylné na dlhodobé zmeny trendu vo vývoji cien ropy).

Práca sa najskôr zaoberá vplyvom cien na západoeurópskych huboch, trhu s ropou a kurzu eura a dolára na vývoj ceny NCG. Na základe korelácií jednotlivých časových radov sa zisťujú závislosti panujúce medzi vysvetľujúcou a vysvetľovanými premennými, a tým sa navrhne počiatočný model. Avšak aby nedošlo diferenciáciou premenných k strate dlhodobých závislostí medzi premennými použije sa error correction člen, ktorý sa získa ako reziduum z rovnice:

$$NCG_t = \alpha_0 + \alpha_1 TTF_t + \alpha_2 TTF_{t-1} + \alpha_3 NBP_{t-1} + resid_t$$

V prípade, že error correction člen je stacionárnym radom, je možné ho zahrnúť do modelu. Stacionarita sa vyšetruje Dickey – Fullerovým testom s upravenými kritickými hodnotami.

Null Hypothesis: RESID\_NCG3 has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=19)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-15.45632	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.439056	
5% level	-2.865272	
10% level	-2.568813	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Z testu je zřejmé, že sa jedná o stacionárny rad. Z teoretických úvah vyplýva, že by na vývoj vysvetľovanej premennej mala vplývať dlhodobá zmena trendu vo vývoji ceny ropy reprezentovaná premennou vyjadrujúcou zmenu ceny ropy za posledný štvrtrok (približne 68 dní). Potom odhadovaný model bude v tvare:

Dependent Variable: DNCG

Method: Least Squares

Date: 03/23/13 Time: 10:30

Sample (adjusted): 1/06/2010 12/06/2012

Included observations: 731 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000729	0.000871	0.837139	0.4028
DTTF	0.180483	0.038505	4.687310	0.0000
DTTF(-1)	0.365489	0.030233	12.08908	0.0000
DNBP(-1)	0.099168	0.027638	3.588085	0.0004
DGASPOOL	0.282413	0.040282	7.010834	0.0000
ROPA_EUR_14(3)	-0.016303	0.008108	-2.010707	0.0447
USD(-1)	0.286958	0.120262	2.386117	0.0173
RESID_NCG3	0.041561	0.001873	22.19356	0.0000
R-squared	0.638365	Mean dependent var		0.000948
Adjusted R-squared	0.634863	S.D. dependent var		0.035564
S.E. of regression	0.021490	Akaike info criterion		-4.831574
Sum squared resid	0.333896	Schwarz criterion		-4.781293
Log likelihood	1773.940	F-statistic		182.3217
Durbin-Watson stat	2.049412	Prob(F-statistic)		0.000000

Model vykazuje lepšie vlastnosti ako to bolo v predchádzajúcom prípade, avšak bol zistený negatívny vplyv parametra ropy na vývoj ceny plynu. Vzhľadom na veľké množstvo dlhodobých kontraktov naviazaných na cenu ropy na danom trhu subjekty očakávajú so zvyšujúcou sa cenou ropy nárast cien plynu v dlhodobom období, preto sa snažia zbaviť svojich aktív, čím nastáva pokles v cene plynu.

Podobne ako v prvom prípade práca rozoberá aj ďalší stredoeurópsky hub – rakúsky Baumgarten (BAGA). Model by mal opäť ukázať súvis medzi zmenou trendu ropy a vývojom cien na hube. Najskôr sa zostaví pomocný model na získanie error correction člena:

$$BAGA_t = \alpha_0 + \alpha_1 USD_{t+3} + \alpha_2 BRENT_{14_{t+3}} + \alpha_3 NBP_t + resid_t$$

Null Hypothesis: RESID\_BAGA1 has a unit root  
 Exogenous: Constant  
 Lag Length: 2 (Automatic based on SIC, MAXLAG=19)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-6.076717	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.439093	
5% level	-2.865289	
10% level	-2.568822	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Z testu je zrejma stacionarita rezidui. A teda model je mozne zapisat' v tvare:

Dependent Variable: DBAGA  
 Method: Least Squares  
 Date: 03/23/13 Time: 11:35  
 Sample (adjusted): 1/06/2010 12/06/2012  
 Included observations: 731 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000959	0.001049	-0.914088	0.3610
DNCG	0.084365	0.032949	2.560494	0.0107
DNCG(-1)	0.101001	0.028850	3.500909	0.0005
DGASPOOL	0.366866	0.039097	9.383571	0.0000
DNBP	0.181137	0.033594	5.391930	0.0000
DNBP(-1)	-0.057408	0.028275	-2.030370	0.0427
ROPA_EUR_14(3)	0.029347	0.009911	2.961109	0.0032
RESID_BAGA1	0.009345	0.001005	9.296932	0.0000
R-squared	0.425840	Mean dependent var		0.000912
Adjusted R-squared	0.420281	S.D. dependent var		0.033885
S.E. of regression	0.025799	Akaike info criterion		-4.466046
Sum squared resid	0.481236	Schwarz criterion		-4.415765
Log likelihood	1640.340	F-statistic		76.60445
Durbin-Watson stat	2.469507	Prob(F-statistic)		0.000000

Potvrdila sa závislosť medzi zmenou trendu ropy Brent a cenami na rakúskom hube BAGA. Model však vykazuje miernu zápornú autokoreláciu rezíduí (na základe Durbin – Watsonovej štatistiky), ale spadá do odporúčaného intervalu (1.5, 2.5).

Ako poslednému sa budeme venovať holandskému TTF (Title Transfer Facility), ktorý je trhovým hubom. Z otvorenejšieho prístupu subjektov na trh, ktoré zabezpečí veľké množstvo obchodujúcich by malo zaručiť pohotové reakcie na aktuálny vývoj v ekonomike, politike a cenách ropy. Pomocný model je v tvare:

$$TTF_t = \alpha_0 + \alpha_0 NCG_t + \alpha_0 NBP_t + \alpha_0 GAS_t + \alpha_0 USD_{t-1} + resid_t$$

Pričom následne skúmame stacionaritu rezíduí:

Null Hypothesis: RESID\_TTF has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 2 (Automatic based on SIC, MAXLAG=19)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-9.822748	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.439105	
5% level	-2.865294	
10% level	-2.568825	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Z testu je zrejmé, že error correction člen je stacionárnym radom. Potom odhadovaný model zapíšeme v tvare:

Dependent Variable: DTTF

Method: Least Squares

Date: 03/24/13 Time: 11:59

Sample (adjusted): 1/11/2010 12/05/2012

Included observations: 727 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	9.26E-05	0.000694	0.133434	0.8939
DNCG	0.432289	0.024413	17.70720	0.0000

DNCG(1)	0.376503	0.022980	16.38419	0.0000
DNBP(3)	0.339416	0.022173	15.30742	0.0000
DGASPOOL(2)	-0.236419	0.023645	-9.998759	0.0000
ROPA1(-5)	0.080052	0.043195	1.853272	0.0643
USD(2)	-0.295303	0.105115	-2.809330	0.0051
RESID_TTF	0.029748	0.001580	18.83067	0.0000
<hr/>				
R-squared	0.735323	Mean dependent var	0.001019	
Adjusted R-squared	0.732747	S.D. dependent var	0.036131	
S.E. of regression	0.018678	Akaike info criterion	-5.111957	
Sum squared resid	0.250846	Schwarz criterion	-5.061460	
Log likelihood	1866.196	F-statistic	285.3604	
Durbin-Watson stat	2.008654	Prob(F-statistic)	0.000000	

Tu však na rozdiel od stredoeurópskych trhov nevplýva dlhodobý trend vývoja cien ropy. Trh skôr reaguje na aktuálne pohyby cien ropy, kurzov a udalostí vo svete, čo je charakteristické pre trhovú hubu.

## 2.4 Vector error correction model

Každý VAR model je možné upraviť do tzv. vector error correction modelu, v ktorom nie je potrebné vyžadovať od (endogénnych) premenných stacionaritu. Tieto modely odvodil vo svojich prácach Johansen. Pre VAR(2) model platí:

$$X_t = a + A_1 X_{t-1} + A_2 X_{t-2} + E_t$$

$$X_t - X_{t-1} = a + A_1 X_{t-1} - X_{t-1} + A_2 X_{t-2} + E_t$$

$$\Delta X_t = a + A_1 X_{t-1} - X_{t-1} + A_2 X_{t-2} - A_2 X_{t-1} + A_2 X_{t-2} + E_t$$

$$\Delta X_t = a + (A_1 + A_1 - I)X_{t-1} - A_2 \Delta X_{t-1} + E_t$$

Teda, platí:

$$\Delta X_t = a + \Gamma X_{t-1} + \Lambda \Delta X_{t-1} + E_t$$



Podobne ako pri Dickey – Fullеровom teste jednotkového koreňa sa aj tu zisťuje či je parameter (matica)  $I$  signifikantne odlišná od nuly (nulovej matice). [2]

Keďže pre britský hub NBP bolo na základe Grangerovej kauzality zistené, že huby v kontinentálnej Európe nemajú veľký vplyv na vývoj britského trhu s plynom (skôr bola potvrdená opačná závislosť), a teda nie je vhodné ceny na ostatných huboch považovať za exogénne premenné. V nasledujúcej časti sa na základe teoretických poznatkov odhadne VAR model. Keďže vývoj cien plynu na európskych huboch a ropy Brent (v Severnom mori) sú nestacionárnymi radmi, je preto vhodné na zistenie kointegrácie (za predpokladu endogénnosti premenných) použiť Johansenov test:

Date: 03/21/13 Time: 15:22

Sample (adjusted): 1/06/2010 12/06/2012

Included observations: 731 after adjustments

Trend assumption: Linear deterministic trend

Series: NBP\_E NCG TTF BRENT\_EUR

Lags interval (in first differences): 1 to 1

#### Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

Hypothesized		Trace	0.05	
No. of CE(s)	Eigenvalue	Statistic	Critical Value	Prob.**
None *	0.396087	661.6300	47.85613	0.0001
At most 1 *	0.311504	292.9687	29.79707	0.0001
At most 2 *	0.023689	20.12599	15.49471	0.0093
At most 3	0.003552	2.601208	3.841466	0.1068

Trace test indicates 3 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level

\* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level

\*\*MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Test potvrdil tri kointegračné vektory pre model vývoja cien na trhoch európskych hubov. Následne sa odhaduje VEC model a porovnáva s kvalitou predošlých.

Error Correction:	D(NBP_E)	D(NCG)	D(TTF)	D(BRENT _EUR)
R-squared	0.639863	0.561595	0.102602	0.028523
Adj. R-squared	0.633315	0.553624	0.086285	0.010860
Sum sq. resids	212.0752	187.6778	474.3270	1171.464
S.E. equation	0.544618	0.512334	0.814490	1.280004
F-statistic	97.71972	70.45483	6.288284	1.614842
Log likelihood	-584.3461	-539.7989	-877.7525	-1207.302
Akaike AIC	1.641553	1.519339	2.446509	3.350622
Schwarz SC	1.729733	1.607519	2.534689	3.438802
Mean dependent	0.016969	0.018999	0.018971	0.035356
S.D. dependent	0.899385	0.766837	0.852080	1.287012
Determinant resid covariance (dof adj.)		0.057526		
Determinant resid covariance		0.053233		
Log likelihood		-3068.518		
Akaike information criterion		8.583041		
Schwarz criterion		8.960956		

Model vykazuje pri odhade britského hubu NBP relatívne vysokú hodnotu  $R^2$  oproti obyčajným regresným modelom, kedy sa ceny na európskych trhoch brali ako exogénne premenné.

Po rozšírení regresí o zložku ropy došlo k zlepšeniu vlastností modelov. Bolo zistené, že trhové huby v západnej Európe reagujú na aktuálne zmeny v cenách ropy, zatiaľ čo rozvíjajúce huby (v strednej Európe) sú citlivé na zmenu trendu dlhodobého vývoja cien ropy.

### 3. Model na optimalizáciu prepravy plynu

Táto časť sa zaoberá optimalizáciou prepravy plynu prostredníctvom plynovodov medzi ľubovoľným začiatočným a koncovým hubom. V predošlých častiach bol vytvorený digraf nad sieťou už existujúcich plynovodov, v ktorom za hrany považujeme časti plynovodných potrubí a za vrcholy miesta zmeny správcoov potrubí (hranice) alebo samotné huby. Tokom budeme uvažovať objem prepravy plynu potrubím za jednotku času, v našom prípade v jednotkách kWh/deň. Na internete sú dostupné informácie o maximálnych prepravných kapacitách jednotlivých častí potrubí (t.j. horné ohraničenie toku na hrane) a takisto cena za jednotku prepraveného množstva plynu. Funkcia cien je lineárna vzhľadom na objem prepravovaného plynu. Pri obchode sa dohaduje prepravná kapacita a obdobie, počas ktorého je možné daný objem prepraviť, pričom cena prepravovanej objemovej jednotky plynu klesá s veľkosťou zakúpeného obdobia (t.j. zakúpenie prepravnej kapacity na mesiac je lacnejšie ako na deň). Počas transportu plynu dochádza k stratám – časť plynu, tzv. technický plyn sa počas transportu spotrebuje na udržiavanie a meranie tlaku v plynovode. Objem technického plynu spotrebovaného pri preprave závisí od dĺžky potrubia a prevýšením medzi začiatočnou a koncovou stanicou plynovodu. Meraním a porovnávaním tlaku na ľubovoľných dvoch staniaciach sa zisťujú rozdiely tlaku plynu v potrubí, rozdielne hodnoty by znamenali jeho únik medzi danými dvoma bodmi. Keďže zisťujeme celkovú cenu potrebnú na prepravenie určitého objemu plynu je nutné do celkovej funkcie ceny (vzhľadom na jej zachovanie lineárnosti) zakomponovať hodnotu technického plynu. Teda platí:

$$c_{ij}x_{ij} = c_{ij}^*x_{ij} + c_{ij}^*tx_{ij} = c_{ij}^*(1 + p_{ij})x_{ij}$$

Kde  $x_{ij}$  je množstvo plynu, ktoré chceme prepraviť časťou plynovodu (hrany)  $ij$ ,  $tx_{ij}$  je množstvo technického plynu potrebného na prepravu objemu  $x_{ij}$  po hrane  $ij$ ,  $c_{ij}^*$  je cena za prepravenú jednotku objemu plynu na hrane  $ij$  a  $c_{ij}$  je celková cena, ktorú zaplatíme aby sme dostali objemovú jednotku plynu do koncovkej stanice. Platí  $tx_{ij} = p_{ij}x_{ij}$ , kde  $p_{ij}$  je funkcia závislá od dĺžky hrany  $ij$  a prevýšenia začiatočného a koncového bodu,  $p : \mathbf{R}^2 \rightarrow (0,1)$ . Teda funkcia celkovej ceny na prepravu jednotky plynu je:

$$c_{ij} = c_{ij}^*(1 + p_{ij})$$

Úlohou tejto časti práce je vyhľadať takú cestu v sieti plynovodov (grafe), že náklady na prepravu plynu (toku) budú minimálne.

Uvažujme digraf  $G = (V, E)$ , kde  $V$  je množina vrcholov,  $E$  množina hrán a nech existujú vrcholy  $s, t \in V$  ( $s$  je začiatkový vrchol a  $t$  koncový). Nech  $b, a: E \rightarrow \mathbf{R}^+$  sú kapacitné funkcie priradujúce hranám kapacitné obmedzenia ( $b, a$  – maximálny, resp. minimálny možný prietok hranou  $i, j$ ) a pre každú hranu  $(i, j) \in E$  platí:

$$b_{ij} \geq a_{ij}$$

Potom  $s$ - $t$  tokom nazývame takú funkciu  $x: E \rightarrow \mathbf{R}^+$ , ktorá spĺňa nasledujúce podmienky (kapacitné obmedzenia a podmienku kontinuity):

$$a_{ij} \leq x_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall (i, j) \in E \quad (\text{kapacitné obmedzenia})$$

Pre podmienku kontinuity platí, že veľkosť toku pritekajúceho do ľubovoľného (okrem začiatkového a koncového, t.j. pre vnútorné vrcholy) vrcholu  $v \in V$  sa rovná veľkosti toku odchádzajúceho z daného vrcholu. Tým sa zamedzí hromadeniu toku vo vnútorných vrcholoch digrafu. Teda platí:

$$\sum_{i:(i,v) \in E} x_{iv} = \sum_{j:(v,j) \in E} x_{vj} \quad \forall v \in V / \{s, t\}$$

Z tejto podmienky je zrejmé, že veľkosť celkového odchádzajúceho toku (rozdiel medzi odchádzajúcim a prichádzajúcim) zo začiatkového vrcholu  $s$  je rovná celkovému prichádzajúcemu toku do koncového vrcholu  $t$ :

$$\sum_{j:(s,j) \in E} x_{sj} - \sum_{i:(i,s) \in E} x_{is} = \sum_{i:(i,t) \in E} x_{it} - \sum_{j:(t,j) \in E} x_{tj}$$

**Dôkaz:**

$$\sum_{j:(s,j) \in E} x_{sj} + \sum_{v \in V / \{s, t\}} \sum_{j:(v,j) \in E} x_{vj} + \sum_{j:(t,j) \in E} x_{tj} = \sum_{i:(i,s) \in E} x_{is} + \sum_{v \in V / \{s, t\}} \sum_{i:(i,v) \in E} x_{iv} + \sum_{i:(i,t) \in E} x_{it}$$

Z podmienky kontinuity stredný člen z rovnice vypadne a úpravou dostaneme pôvodnú rovnicu, ktorú sme chceli dokázať  $\square$

Nech  $N$  je množina všetkých prípustných  $s$ - $t$  tokov (spĺňajúcich predchádzajúce podmienky). Za veľkosť toku  $f(x)$  bude považovaný rozdiel medzi odchádzajúcim

a prichádzajúcim tokom zo začiatočného, alebo (ako bolo dokázané) rozdiel medzi prichádzajúcim a odchádzajúcim tokom do konečného vrcholu:

$$f(x) = \sum_{j:(s,j) \in E} x_{sj} - \sum_{i:(i,s) \in E} x_{is} = \sum_{i:(i,t) \in E} x_{it} - \sum_{j:(t,j) \in E} x_{tj}$$

To znamená, že veľkosť toku v digrafe môže nadobúdať aj záporné hodnoty (v prípade väčšieho odchádzajúceho ako prichádzajúceho toku do  $s$ ), alebo nulový tok, ktorý nazývame cirkuláciou. Teda cirkulácia je tokom, pre ktorý navyše platí zovšeobecnená podmienka kontinuity, ktorá zamedzuje hromadeniu toku vo všetkých vrcholoch digrafu. To vyplýva priamo z definície veľkosti toku:

$$f(x) = \sum_{j:(s,j) \in E} x_{sj} - \sum_{i:(i,s) \in E} x_{is} = \sum_{i:(i,t) \in E} x_{it} - \sum_{j:(s,j) \in E} x_{sj} = 0$$

$$\sum_{j:(m,j) \in E} x_{mj} = \sum_{i:(i,m) \in E} x_{im} \quad m \in \{s, t\}$$

Cirkulácie budeme neskôr využívať v Kleinovom algoritme na preusporiadanie tokov na hranách digrafu z dôvodu zníženia nákladovej funkcie prepravy toku.

Nech existuje funkcia cien  $c: E \rightarrow \mathbf{R}^+$ , ktorá priradzuje hranám cenu za jednotku množstva prepraveného toku z vrcholu  $i$  do vrcholu  $j$ . Model predpokladá, že náklady sú lineárnou funkciou prepravovaného toku. Z toho dôvodu definujeme nákladovú funkciu  $\gamma: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^+$  vyjadrujúcu celkovú cenu za prepravu  $s$ - $t$  toku v digrafe  $G$ .

$$\gamma = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

V digrafe  $G$  existuje viacero ciest medzi začiatočnými a koncovými bodmi, po ktorých možno prepraviť  $s$ - $t$  tok o veľkosti  $f$  (resp. maximálny tok). Z ekonomických príčin je preto vhodné hľadať cestu s najmenšou cenou. Teda pri preprave  $s$ - $t$  toku o veľkosti  $f$  (resp. maximálneho) je úlohou minimalizovať nákladovú funkciu pri zachovaní celkového toku, čo môžeme sformulovať do úlohy lineárneho programovania (špeciálna dopravná úloha):

$$\min \gamma = \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

$$a_{ij} \leq x_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall (i,j) \in E$$

$$\sum_{i:(i,v) \in E} x_{iv} = \sum_{j:(v,j) \in E} x_{vj} \quad \forall v \in V / \{s, t\}$$

$$f = \sum_{j:(s,j) \in E} x_{sj} - \sum_{i:(i,s) \in E} x_{is}$$

Pomocou metód lineárneho programovania je možné daný problém vyriešiť, avšak uprednostníme jednoduchší grafový prístup, ktorý rieši úlohu prostredníctvom Kleinovho algoritmu.

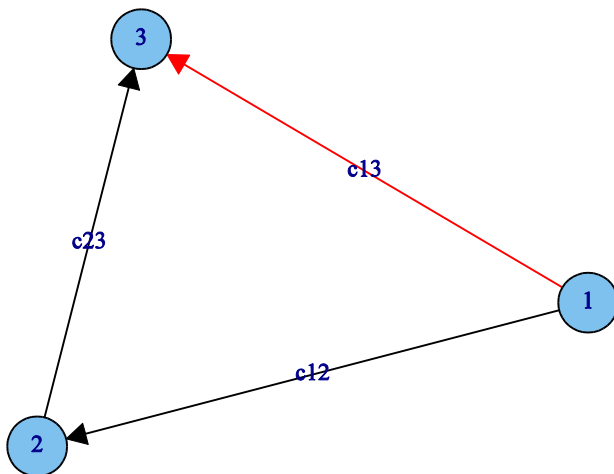
### 3.1 Kleinov algoritmus

Základnou myšlienkou je nájdenie maximálneho s-t toku (napr. Ford-Fulkersonovým algoritmom) v digrafe, ktorý následne postupne zlacňujeme po záporných rezervných polocykloch. Rezervným polocyklom  $R$  myslíme časť digrafu, ktorá nie je orientovaným cyklom (ale zmenou orientácie niektorých hrán by sa ním stal). Šípy polocyklu orientované v smere obiehania polocyklu nazývame súhlasné a protismerné označujeme ako nesúhlasné. Tok sa následne zväčšuje v smere obehu polocyklu, t.j. sa na súhlasných šípkoch zvýši a naopak na nesúhlasných zníži (teda zmena toku spôsobená úpravou je vlastne cirkuláciou). Od pôvodného toku  $x$  v polocykle požadujeme, aby na súhlasných hranách bol menší ako horná kapacita a na nesúhlasných väčší ako dolná kapacita. Potom existuje také číslo  $\delta > 0$ , o ktoré je možné tok zvýšiť na súhlasných a znížiť na nesúhlasných šípkoch (tým dostaneme nový tok  $x'$ ). Z toho vyplýva, že sa veľkosť toku v polocykle nezmenila (veľkosť s-t toku sa taktiež pri tejto operácii zachováva). Cenu polocyklu  $c(R)$  definujeme ako cenu potrebnú na prevedenie tejto úpravy na jednotku toku, t.j. je súčtom cien na súhlasných šípkoch (pridávame jednotku toku) a záporne vzatých cien na nesúhlasných (znižujeme tok). Polocyklus so zápornou hodnotou ceny nazývame záporným.

Pre cenu polocyklu z obrázka nižšie platí:  $c(Q) = c_{12} + c_{23} - c_{13}$

Ďalej číslo  $\delta$  získame:  $\delta = \min(b_{12} - x_{12}, b_{23} - x_{23}, x_{13})$

Rezervný polocyklus Q, kde čierne hrany sú v smere obiehania polocyklu a červená proti smeru



**Tvrdenie 3.1:** Úpravou záporného polocyklu znížime cenu  $s$ - $t$  toku.

**Dôkaz:** Cena upraveného toku  $x'$  je súčet ceny pôvodného toku  $x$  a hodnotou vzniknutou jeho úpravou. Teda platí:

$$c(x') = c(x) + \delta c(R)$$

Keďže  $R$  je záporným polocyklom, teda:  $c(R) < 0$  a na základe teórie vieme, že  $\delta > 0$ , potom musí platiť  $c(x') < c(x)$ , čo sme chceli dokázať  $\square$

Z predchádzajúceho tvrdenia vyplýva, že v snahe o minimalizáciu ceny za prepravu toku bude kľúčové nachádzať záporné polocykly v digrafe  $G$ . Z toho dôvodu sa vytvorí rezervný digraf  $G'$ , v ktorom hrana z vrcholu  $i$  do  $j$  existuje práve vtedy, keď je v danom smere možné navýšiť tok v pôvodnom digrafe  $G$  a jej cena bude najmenšou cenou za toto navýšenie. Prítomnosť záporného polocyklu v pôvodnom digrafe značí záporný cyklus, na ktorého detekciu sa využíva Floydov algoritmus. Číslo  $\delta$  sa zvolí maximálne možné (označuje veľkosť rezervného toku na hrane).

**Veta 3.1.1<sup>2</sup>:** Maximálny  $s$ - $t$  tok  $x$  je najlacnejší práve vtedy, keď neexistuje záporný rezervný polocyklus pre  $x$ . [2]

---

<sup>2</sup> Veta 5.7, Kapitola 5. Toky

**Dôkaz:** ← pre s-t tok  $x$  neexistuje v digrafe  $G$  rezervný polocyklus, teda pre každý polocyklus  $R$  platí:

$$\forall R \in G: c(R) \geq 0$$

Potom pri akejkolvek úprave toku  $x$  pomocou Kleinovho algoritmu by sa cena s-t toku  $x'$  navýšila:

$$c(x') = c(x) + \delta c(R)$$

Teória predpokladá, že číslo  $\delta > 0$ , v dôsledku čoho vyplýva  $c(x') > c(x)$ , teda úpravou sa už nemôže cena toku znížiť. Ešte je nutné dokázať, že cena ľubovoľného s-t toku  $x'$  tečúceho v  $G$  bude väčšia ako cena  $x$ . Toto tvrdenie je možné dokázať sporom, t.j. predpokladáme existenciu toku  $x^*$ :

$$\exists x^* \in N: c(x^*) < c(x)$$

Následne sa vytvorí pomocný vektor  $y = x^* - x$ , ktorý ale nemusí byť nutne tokom v digrafe  $G$ , pretože na niektorých hranách môže nastať prípad, že  $b_{ij} \geq x_{ij} \geq x_{ij}^* \geq a_{ij}$  a tým by bol tok  $y$  záporný (tiekol by proti smeru orientácie hrany). Preto sa vytvára vektor  $y^*$  a nový vektor cien  $c^*$ , ktorý definujeme v rezervnom digrafe  $G'$  spôsobom:

- ak  $b_{ij} \geq x_{ij} \geq x_{ij}^* \geq a_{ij}$ , t.j.  $y \leq 0$ , potom  $y_{ji}^* = -y_{ij}$  a  $c_{ji}^* = -c_{ij}$
- ak  $b_{ij} \geq x_{ij}^* \geq x_{ij} \geq a_{ij}$ , t.j.  $y \geq 0$ , potom  $y_{ij}^* = y_{ij}$  a  $c_{ij}^* = c_{ij}$
- ak  $b_{ij} \geq x_{ij}^* = x_{ij} \geq a_{ij}$ , potom  $y_{ij}^* = 0$

To znamená, že vektor  $y^*$  je tokom s nulovou veľkosťou – cirkuláciou (čo vyplýva z vektora  $y$ ). Pre cenu toku  $y$  platí:

$$c(y^*) = \sum_{(i,j) \in E'} c_{ij}^* y_{ij}^* = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} y_{ij} = c(y) = c(x^*) - c(x) < 0$$

Keďže cirkulácia  $y^*$  je tvorená cyklami, ktorých súčet cien je záporný, potom musí existovať v rezervnom digrafe  $G'$  taký cyklus  $R'$ , že platí  $c(R') < 0$  a k nemu prislúchajúci záporný polocyklus  $R$  v digrafe  $G$ , čo je v spore s predpokladom  $\square$

→ nech s-t tok  $x$  na digrafe  $G$  je najlacnejší, teda platí:

$$\forall x' \in N: c(x') \geq c(x)$$



Potom Kleinovou úpravou toku  $x$  dostaneme:

$$c(x') = c(x) + \delta c(R) \geq c(x)$$

$$\delta c(R) \geq 0$$

Kde  $\delta > 0$ , z čoho vyplýva, že  $c(R) \geq 0$ , teda všetky polocykly v digrafe sú nezáporné, čo bolo treba dokázať  $\square$

Kleinov algoritmus nie je polynomiálny algoritmus, ale vhodnou voľbou záporných polocyklov je možné ho polynomiálnym vytvoriť. Práca rozoberá metódu výberu polocyklov s najmenšou strednou hodnotou ceny hrany.

### 3.2 Algoritmus Forda – Fulkersona

V predchádzajúcej časti (na Kleinov algoritmus) bolo potrebné nájsť maximálny tok medzi začiatočným a koncovým vrcholom (s-t tok). Tento problém je možné riešiť pomocou LP – maximalizáciou veľkosti toku pri podmienkach kontinuity a kapacitných obmedzení. Zo začiatku pre jednoduchosť budeme predpokladať, že dolné ohraničenie všetkých hrán je 0, teda pre kapacitné obmedzenia platí:

$$0 \leq x_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall (i, j) \in E$$

Neskôr sa práca venuje zovšeobecneniu na ľubovoľné kapacitné obmedzenia. Nech  $G = (V, E)$  je digrafom s vrcholmi  $V$  a hranami  $E$ , hodnota  $b(e)$  označuje kapacitné obmedzenie toku na hrane  $e \in E$ . Tok  $f(x)$  nazývame maximálny ak pre ľubovoľný iný tok  $f(x')$  platí  $f(x) \geq f(x')$ .

Hlavnou ideou pre hľadanie maximálneho toku je nájdenie ľubovoľného prípustného, ktorý sa vzápätí zvyšuje po tzv. zväčšujúcej s-t polocesti. Táto cesta je charakteristická tým, že na každej jej hrane súhlasného (s-t) smeru je tok menší ako kapacita (t.j. má kladnú rezervu) a na hranách nesúhlasného smeru požadujeme tok väčší ako 0. Rezervu hrany definujeme ako rozdiel medzi kapacitou a tokom v prípade hrany súhlasného smeru a hodnotou toku v prípade nesúhlasného smeru. Následne sa definuje číslo  $\gamma > 0$  označujúce minimálnu hodnotu rezervy na zväčšujúcej polocesti, o ktorú zvýšime tok  $x$ . Tok v digrafe, pre ktorý neexistuje zväčšujúca s-t cesta označujeme ako blokujúci. Vrcholy digrafu  $G$  je možné rozdeliť na dve disjunktné podmnožiny  $S, T \subset V$ ,

pričom začiatkový vrchol  $s \in S$  a koncový  $t \in T$ . Maximálny tok je možné rozpoznať pomocou kapacity rezu definovanej:

$$b(S, T) = \sum_{e^+ \in S, e^- \in T} b(e)$$

**Lema 3.2<sup>3</sup>:** *Veľkosť ľubovoľného s-t toku  $x$  nepresahuje kapacitu ľubovoľného s-t rezu  $(S, T)$ , t.j.*

$$f(x) \leq b(S, T)$$

[2]

**Dôkaz:** Celkový odtok zo začiatkového vrcholu  $s$  je totožný s celkovým odtokom medzi vrcholovými množinami  $(S, T)$ . Teda:

$$f(x) = \sum_{e^- = s} x(e) - \sum_{e^+ = s} x(e) = \sum_{e^- = S, e^+ = T} x(e) - \sum_{e^+ = S, e^- = T} x(e) \leq b(S, T)$$

Prvý člen je menší alebo rovný, ako kapacita rezu a druhý člen je nezáporný, z čoho vyplýva nerovnosť  $\square$

Nasledujúca veta vyjadruje situáciu, kedy je s-t tok optimálny.

**Veta 3.2.1<sup>4</sup>:** *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

1. s-t tok  $x$  je maximálny
2. neexistuje zväčšujúca s-t polocesta pre tok  $x$
3. existuje taký s-t rez  $(S, T)$ , že  $f(x) = b(S, T)$  [2]

**Dôkaz:** 2.  $\rightarrow$  3. predpokladá sa, že neexistuje zväčšujúca s-t polocesta pre tok  $x$  v digrafe  $G = (V, E)$ . Nech množina  $S \subset V, s \in S$  je množina všetkých vrcholov na digrafe  $G$ , pre ktoré existuje zväčšujúca sa s-m ( $m \in S$ ) polocesta a  $T = V / S, t \in T$ . Nech  $(i, j) \in E$  je taká ľubovoľná hrana digrafu  $G$ , že  $i \in S$  a  $j \in T$ , potom musí byť tok ňou prechádzajúci rovný  $b_{ij}$ . Ak by to neplatilo, potom by existovala zväčšujúca s-j polocesta a tým by sa vrchol  $j$  zaradil do množiny  $S$ . Súčasne pre každú hrana  $(j, i) \in E$  platí, že cez ňu pretekajúci tok je rovný 0, v opačnom prípade by existovala zväčšujúca s-j polocesta

<sup>3</sup> Lema 5.1, Kapitola 5. Toky

<sup>4</sup> Veta 5.1, Kapitola 5. Toky

(znížením toku cez hranu  $(j, i)$  by sa navýšil s-j tok), a teda vrchol  $j$  by patril množine  $S$ .

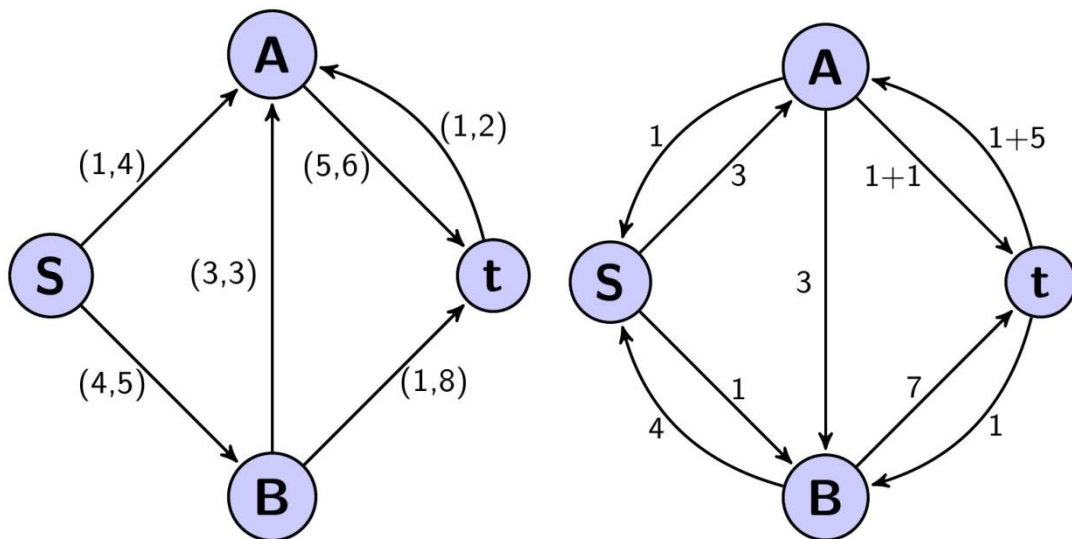
Teda by platilo:

$$f(x) = \sum_{e^- = S, e^+ = T} x(e) - \sum_{e^+ = S, e^- = T} x(e) = \sum_{e^- = S, e^+ = T} b(e) - 0 = b(S, T) \square$$

3.  $\rightarrow$  1. na základe predpokladu platí  $f(x) = b(S, T)$  a ďalej z predošlej lemy vieme, že pre ľubovoľný tok platí:  $f(x) \leq b(S, T)$ . To znamená, že tok už nemožno zväčšiť  $\square$

1.  $\rightarrow$  2. ak by existovala zväčšujúca s-t polocesta pre tok  $x$ , potom by sa dal navýšiť na hodnotu  $x^*$ ,  $f(x^*) > f(x)$ , čo by bolo v spore s predpokladom o maximálnej veľkosti s-t toku  $x$   $\square$

Jedným z možných spôsobov hľadania zväčšujúcich polociest je vytvorenie pomocného rezervného digrafu  $G' = (V, E')$ , kde  $E'$  sú hrany rezerv. Medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi  $i, j \in V$  (smer i-j toku je súhlasný s s-t tokom) existuje orientovaná hrana práve vtedy, keď medzi nimi v pôvodnom digrafe  $G$  existuje  $(i, j) \in E$  a tok ňou pretekajúci je menší ako kapacita hrany, alebo  $(j, i) \in E$  s kladným tokom, pričom hodnota  $(i, j) \in E'$  digrafu  $G'$  je rovná rezerve hrany  $(i, j)$  digrafu  $G$ . Súčasne sa vytvorí hrana  $(j, i) \in E'$  v rezervnom digrafe  $G'$  s hodnotou vyjadrenou ako súčet toku hrany súhlasného smeru (t.j.  $(i, j) \in E$  v pôvodnom digrafe  $G$ ) a rozdielom medzi kapacitou a tokom na hrane nesúhlasného smeru (t.j.  $(j, i) \in E$ , čo je vlastne rezerva danej hrany v prípade t-s toku). Následne hľadáme s-t cestu v rezervnom digrafe  $G'$ , pričom číslo  $\gamma$  vyberáme na základe najmensej hodnoty rezervy na tejto ceste, čím sa zaručí splnenie kapacitných podmienok navýšeného toku. V snahe o zabránenie zacykleniu si navštívené vrcholy s-t cesty značíme v pomocnom vektore.



Na základe rezervného digrafu môžeme vybrať zväčšujúcu sa polocestu s-A-B-t s hodnotou  $\gamma = 3$ .

Táto časť sa bude zaoberať rozšírením Ford – Fulkersonovho algoritmu na toky s hornými aj dolnými kapacitnými ohraňeniami.

$$a_{ij} \leq x_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall (i,j) \in E$$

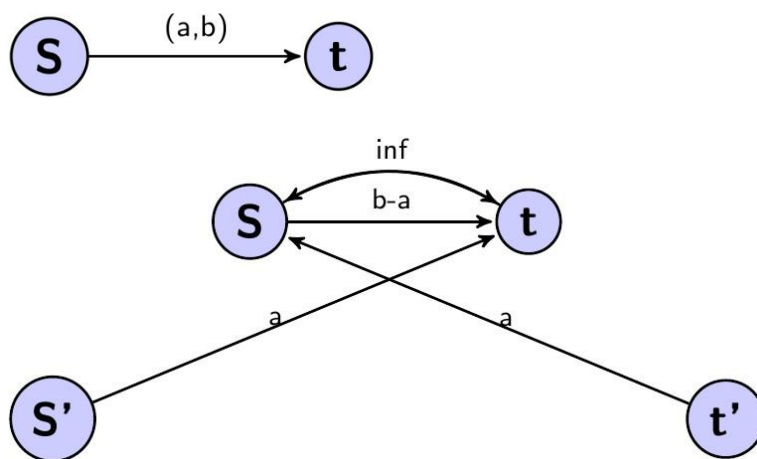
Ako bolo spomenuté v predchádzajúcej časti, je nutné v prvom kroku nájsť ľubovoľný prípustný tok, ktorý sa vzápätí zvyšuje po zväčšujúcej s-t poloceste. Na rozdiel od zjednodušeného modelu tu prípustný tok nemusí existovať (obr.), a teda práca predstaví algoritmus, pomocou ktorého sa určí. Základom je pretransformovať pôvodný digraf  $G$  s dolnou a hornou medzou na digraf s hornými medzami, v ktorom sa pomocou predchádzajúcich metód vie určiť maximálny tok. Tok na každej hrane  $(i,j) \in E$  v digrafe spĺňajúci kapacitné ohraňenia sa dá zapísať v tvare:

$$x_{ij} = a_{ij} + y_{ij}$$

Kde  $y_{ij}$  je možné charakterizovať ako tok na hrane  $(i,j) \in E$  s novým kapacitným obmedzením  $0 \leq y_{ij} \leq b_{ij} - a_{ij}$  v upravenom digrafe  $G' = (V', E')$ . Avšak v snahe zachovať informáciu o dolnej medze  $a_{ij}$  (resp. o nenarušení toku vychádzajúceho z vrcholu  $i$  v pôvodnom digrafe) je potrebné vytvoriť pomocný vrchol  $t' \in V^*$  a pomocnú hranu  $(i, t') \in E^*$ , ktorá bude odvádzať zvyšný tok z vrcholu  $i \in V$  s kapacitným

obmedzením  $0 \leq y_{it'} \leq a_{ij}$ . Ešte sa však musí zaručiť zachovanie toku vchádzajúceho do vrcholu  $j \in E$ , t.j. vytvorí sa nový pomocný vrchol  $s' \in V^*$  a hrana  $(s', j) \in E^*$ , po ktorej bude prúdiť tok s ohraničením  $0 \leq y_{s'j} \leq a_{ij}$ . Keďže pôvodné začiatkové a koncové vrcholy sa stali v novom digrafe tranzitnými je nutné v snahe o splnenie podmienky kontinuity pridať hranu, po ktorej bude odvádzaný s-t tok, t.j. vzniknú dve hrany  $(s, t), (t, s) \in E^*$  (nebudú kapacitne obmedzené, čím sa dosiahne univerzálnosť). Teda úpravou pôvodného digrafu  $G = (V, E)$  vznikol nový digraf  $G' = (V', E')$ , kde  $V' = V \cup V^*$  a  $E' = E \cup E^*$  iba s hornými kapacitnými ohraničeniami. Prípustný tok sa získa maximalizáciou s'-t' toku v upravenom digrafe.

#### Úprava digrafu



Prípustný tok v pôvodnom existuje, ak je jeho veľkosť na každej hrane rovná aspoň dolnej hranici. Z konštrukcie upraveného digrafu  $G'$  je zrejmé, že takýto s-t tok existuje, ak sú hrany vychádzajúce zo začiatkového a koncového vrcholu  $s'-t'$  toku upraveného digrafu nasýtené. V opačnom prípade s-t tok neexistuje. Toto tvrdenie je sformulované v nasledujúcej vete.

**Veta 3.2.2<sup>5</sup>:** V digrafe  $G$  s dolnými a hornými medzami existuje prípustný s-t tok  $x$  práve vtedy, keď v digrafe  $G'$  ľubovoľný maximálny  $s'-t'$  tok  $y$  nasycuje všetky hrany pri vrcholoch  $s'$  a  $t'$ . [2]

<sup>5</sup> Veta 5.6, Kapitola 5. Toky

**Dôkaz:** Hrany pri začiatkových vrcholoch sú nasýtené, ak pre celkový tok platí:

$$f(y) = \sum_{e^- = s'} b(e) - 0 = \sum_{e \in E} a(e)$$

Kde  $b(e)$  je horné ohraničenie hrán v upravenom digrafe  $G'$  a  $a(e)$  je dolné ohraničenie hrán v pôvodnom. Nech existuje  $s'$ - $t'$  tok  $y$  na  $G'$  taký, že platí predchádzajúca rovnosť a chceme dokázať, že tok  $x$  vychádzajúci z  $y$  je  $s$ - $t$  tokom. Z teórie vieme, že tok  $x$  na ľubovoľnej hrane digrafu  $G$  je možné rozložiť:

$$x_{ij} = a_{ij} + y_{ij}$$

Pričom platí podmienka  $0 \leq y_{ij} \leq b_{ij} - a_{ij}$ , t.j.  $x_{ij}$  spĺňa kapacitné podmienky. Teraz treba ešte dokázať podmienku kontinuity. Podmienka kontinuity pre tok  $y$  v  $G'$  tvrdí, že pre ľubovoľný vrchol  $v \in V$  platí:

$$y_{s'v} + \sum_{e^+ = v} y(e) = y_{vt'} + \sum_{e^- = v} y(e)$$

Pričom z predpokladu o nasýtenosti toku  $y$  na hranách pri počiatkových vrcholoch vyplýva, že:

$$y_{s'v} = \sum_{e^+ = v} a(e), \quad y_{vt'} = \sum_{e^- = v} a(e)$$

Doplnením posledného poznatku do rovnice dostávame:

$$\begin{aligned} \sum_{e^+ = v} a(e) + \sum_{e^+ = v} y(e) &= \sum_{e^- = v} a(e) + \sum_{e^- = v} y(e) \\ \sum_{e^+ = v} x(e) &= \sum_{e^- = v} x(e) \end{aligned}$$

To znamená, že tok  $x$  spĺňa aj podmienku kontinuity a je teda prípustným  $s$ - $t$  tokom v  $G$ .  $\square$

Pre opačný smer platí, že ak je tok  $x$  prípustný, teda na každej hrane má veľkosť rovnú aspoň hodnote dolnej medze, potom pre tok  $y$  z konštrukcie digrafu vyplýva, že  $0 \leq y_{ij} \leq b_{ij} - a_{ij}$  a tok na všetkých hranách pri vrcholoch  $s'$  a  $t'$  je nasýtený  $\square$

V prípade, že sa našiel prípustný tok, zvyšuje sa jeho hodnota podobne ako v jednoduchšom modeli pomocou zväčšujúcich sa polociest. Avšak hodnota rezervy sa definuje ako rozdiel medzi hornou medzou a tokom v prípade hrany súhlasného smeru a hodnotou rozdielu toku a dolnou medzou v prípade nesúhlasného smeru.

**Veta 3.2.3<sup>6</sup>:** Každý  $s$ - $t$  tok možno rozložiť na acyklický a cirkuláciu [2]

**Dôkaz:** Na digrafe  $G = (V, E)$  existuje niekoľko  $s$ - $t$  tokov o veľkosti  $f(x) = c$ , kde  $c > 0$  je číslo. Dôkazom je, že napríklad maximálny tok  $y'$  na  $G$  získaný pomocou algoritmu Forda – Fulkersona je možné na určitých hranách navýšiť pridaním cirkulácie. Takto vytvorený tok  $y$  by mal rovnakú veľkosť ako pôvodný:  $f(y) = f(y')$  a na každej hrane digrafu  $G$  by platilo  $y \geq y'$ . T.j. pre ľubovoľný  $s$ - $t$  tok  $x$  pretekajúci digrafom  $G$  existuje taký najmenší tok  $x'$ , pre ktorý platí  $f(x') = f(x)$  a  $x \geq x'$  na každej hrane digrafu. Najmenší tok  $x'$  neobsahuje cyklus (je acyklický), v ktorom by určitá časť jeho toku cirkulovala, pretože by sa dal vytvoriť nový tok o rovnakej veľkosti toku, ktorý by bol na hranách  $G$  menší, alebo rovný ako  $x'$ . Cirkuláciu tvorí rozdiel medzi tokmi  $x$  a  $x'$   $\square$

### 3.3 Algoritmus vyhľadávania záporných polocyklov

Táto časť je zameraná na detekciu záporných cyklov v digrafe, pomocou ktorej sa zisťuje prítomnosť záporných polocyklov v Kleinovom algoritme. Floydov algoritmus je pôvodne určený na hľadanie najkratšej cesty medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi digrafu. Základným predpokladom správneho určenia najkratších ciest algoritmom je, že digraf neobsahuje záporný cyklus. V opačnom prípade výsledná matica najkratších ciest má aspoň jednu zápornú hodnotu na diagonále, čo značí, že existuje taký sled z vrcholu  $i$  do  $i$  (do seba – ide o cyklus) so zápornou dĺžkou (jedná sa o záporný cyklus). Takto nájdený záporný cyklus v pomocnom rezervnom digrafe  $G'$  poukazuje na záporný polocyklus v pôvodnom digrafe  $G$ , ktorý je následne upravovaný Kleinovým algoritmom.

V predchádzajúcej časti o Kleinovom algoritme bolo ukázané, že sa nejedná o polynomiálny algoritmus, avšak výberom polocyklov s najmenšou priemernou hodnotou

---

<sup>6</sup> Veta 5.6 (a), Kapitola 5. Toky

ceny hrany sa stáva polynomiálnym. Tento výber je možné realizovať s využitím nasledujúcej vety:

**Veta 3.3.1<sup>7</sup>:** *Nech  $G = (V, E)$  je digrafom so zdrojom  $s$ , orientovanými cyklami,  $n$  počtom vrcholov a funkciou cien  $c$ . Pre každý vrchol  $v \in V$  a prirodzené číslo  $k$  označujeme  $F_k(v)$  ako najkratšiu cestu z vrcholu  $s$  do  $v$  s počtom práve  $k$  hrán. Ak medzi danými vrcholmi neexistuje žiadna cesta, položíme  $F_k(v) = \infty$ . Potom pre minimálnu priemernú cenu hrany cyklu  $\mu$  platí:*

$$\mu(G, c) = \min_{v \in V} \max \left\{ \frac{F_n(v) - F_k(v)}{n - k} : k = 1, \dots, n - 1 \right\}$$

[3]

**Dôkaz:** Na začiatok sa bude brať do úvahy len digraf  $G = (V, E)$  obsahujúci nulový a nezáporné cykly. To znamená, že minimálna priemerná cena hrany cyklu v danom digrafe je 0. Navyše pre ľubovoľný vrchol  $v$  v digrafe s nezápornými cyklami a  $n$  vrcholmi platí:

$$F_n(v) \geq d(s, v)$$

Kde  $d(s, v)$  je hodnota najkratšej cesty zo začiatočného vrcholu  $s$  do  $v$  a v digrafe s nezápornými cyklami bude prechádzať najviac  $n - 1$  vrcholmi (hranami). Teda pre ľubovoľný vrchol digrafu  $v$  platí:

$$F_n(v) \geq \min_k \{F_k(v), 1 \leq k \leq n - 1\}$$

$$\max_k \{F_n(v) - F_k(v), 1 \leq k \leq n - 1\} \geq 0$$

Teraz je potrebné ukázať, že pre istý vrchol  $v$  bude hodnota predchádzajúceho výrazu rovná 0. Nech existuje taký vrchol digrafu  $v'$ , pri ktorom časť najkratšej cesty  $d(s, v')$  bude prechádzať časťou cyklu s nulovou hodnotou. Je zrejmé, že podobné cesty, ktoré ale prechádzajú týmto cyklom (ľubovoľný počet krát) majú rovnakú dĺžku (hodnotu) ako  $d(s, v')$  – líšia sa len počtom prejdenej hrán. Navyše pre každý vrchol, ktorým prechádza  $d(s, v')$  (označme ich ako množinu  $M$ ) bude časť tejto cesty končiaca v danom vrchole najkratšou. Potom je možné vybrať taký vrchol digrafu  $v \in M$ , že prechodmi nulovým

---

<sup>7</sup> Veta 10.6.11, Circulations



cyklom sa vyberie taká cesta, ktorá obsahuje  $n$  hrán a je aj najkratšou. To znamená, že platí:

$$\min_{v \in V} \max_k \{F_n(v) - F_k(v), 1 \leq k \leq n-1\} = 0$$

Čo je hodnota (cena) nulového cyklu. A z toho priemernú cenu získame:

$$\mu = \min_{v \in V} \max_k \left\{ \frac{F_n(v) - F_k(v)}{n-k}, 1 \leq k \leq n-1 \right\} = 0$$

Následne sa úvaha zovšeobecní na ľubovoľný digraf (už môže obsahovať aj záporné cykly). Aby sa využili predošlé myšlienky, je nutné si hrany digrafu  $G$  upraviť tak, že najmenšia hodnota cyklu upraveného digrafu  $G' = (V, E')$  bude 0. Teda:

$$c'(e) = c(e) - \mu(G, c)$$

Z čoho vyplýva, že najkratšia cesta zo začiatočného vrcholu  $s$  do  $v$  zahŕňajúca  $m$  hrán má tvar:

$$F'_m(v) = F_m(v) - m\mu(G, c)$$

Potom platí:

$$\frac{F'_n(v) - F'_k(v)}{n-k} = \frac{(F_n(v) - n\mu) - (F_k(v) - k\mu)}{n-k} = \frac{F_n(v) - F_k(v)}{n-k} - \mu$$

Teda pre minimálnu priemernú hodnotu hrany cyklu upraveného digrafu platí:

$$\begin{aligned} \mu' &= \min_{v \in V} \max_k \left\{ \frac{F'_n(v) - F'_k(v)}{n-k}, 1 \leq k \leq n-1 \right\} \\ &= \min_{v \in V} \max_k \left\{ \frac{F_n(v) - F_k(v)}{n-k}, 1 \leq k \leq n-1 \right\} - \mu \end{aligned}$$

A keďže  $\mu' = 0$ , potom dostávame výraz, ktorý bol potrebný dokázať  $\square$

Pred hľadaním cyklu s najmenšou minimálnou hranou sa upraví pôvodný digraf  $G$  pridaním orientovaných hrán s nulovou hodnotou zo začiatočného vrcholu  $s$  do každej hrany  $v \in V$ . Následne sa definuje hodnotová funkcia:

$$F_0(s) = 0, F_0(v) = \infty \quad \forall v \neq s$$

Potom sa postupne počíta:

$$F_k(v) = \min_{u \in V} \{F_{k-1}(u) + c(uv), uv \in E\}$$

Pričom súčasne sa vytvára pre každý vrchol  $v \in V$  množina navštívených vrcholov  $U$ , kde sa pridávajú vrcholy  $u \in V$  po každom výpočte  $F_k(v)$  – vrchol, pri ktorom je hodnota  $F_k(v)$  minimálna. Týmto spôsobom sa počíta  $F_k(v)$  pre  $k = 1, \dots, n$  a tým získame výraz:

$$\max_k \left\{ \frac{F_n(v) - F_k(v)}{n - k}, 1 \leq k \leq n - 1 \right\}$$

pre každý vrchol  $v \in V$ . Potom sa vyberie množina navštívených vrcholov  $U$  (ktorou prechádza najkratšia cesta) na vrchole  $v$ , pri ktorom je daný výraz najmenší. Cyklus utvorený z podmnožiny množiny vrcholov  $U$  je cyklom s najmenšou priemernou hodnotou hrany.

Pred každou úpravou toku prostredníctvom Kleinovho algoritmu sa s využitím predchádzajúcich poznatkov nájde (záporný) cyklus s najmenšou priemernou hodnotou hrany, cez ktorý bude cena znižovaná. Teda vždy sa na úpravu vyberie cyklus s najmenšou priemernou hodnotou hrany, čím sa zabezpečí, že algoritmus bude polynomiálny.

### 3.4 Program

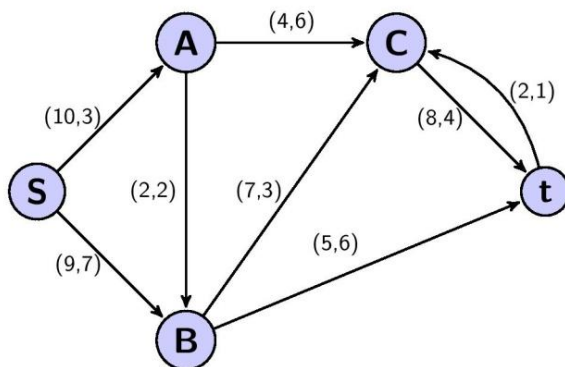
Program určí najlacnejší tok v zadanom digrafe  $G = (V, E)$  prostredníctvom upraveného Kleinovho algoritmu (s výberom cyklov s najlacnejšou hodnotou hrany). Teda vstupmi sú štvorcové matice parametrov digrafu (rozmerom je počet vrcholov v  $G$ ), t.j. matica cien  $P$ , v ktorej hodnota na mieste  $i, j$  je rovná cene orientovanej hrany spájajúcej vrcholy  $i, j \in V$  ak  $ij \in E$ . V prípade, že  $ij \notin E$ , potom hodnota  $P_{ij} = \infty$ . Matice horných a dolných ohraničení tokov v digrafe  $MaxTok$ ,  $MinTok$  a hodnotu  $x$ , ako maximálnu veľkosť (objem) toku, ktorú je možné vyslať zo začiatočného vrcholu. Ďalej matica začiatočného toku v digrafe  $zTok$ , ktorá sa zväčša udáva ako nulová a vektor začiatočného a koncového vrcholu  $zacV$  (obvykle je rovný  $1, n$ ). Výstupom je matica najlacnejšieho toku  $Tok$  a cena, za ktorú tento tok prepravíme  $fx$ .

Celý program sa skladá z viacerých podprogramov, ktoré sa vzájomne vyvolávajú, pričom spúšťačom všetkých podprogramov je funkcia  $optimnew(P, MaxTok, MinTok, zTok, x, zacV)$ . Jej úlohou je preusporiadať matice parametrov digrafu podľa polohy začiatočného a koncového vrcholu (začiatočný vrchol

musí byť v poradí ako prvý a koncový posledný). Súčasne vyvoláva hlavný program, t.j. funkciu Kleinovho algoritmu  $Kleinnew(P, MaxTok, MinTok, zTok, x)$ , ktorá vypočíta najlacnejší tok a jeho cenu. Najskôr vyvolá funkciu  $LB\_inic(MaxTok, MinTok, zTok, x)$  na určenie maximálneho toku v digrafe prostredníctvom algoritmu Forda – Fulkersona zovšeobecneného na toky s hornými aj dolnými kapacitnými ohraničeniami. Následne sa vytvára pomocná matica pomocného rezervného digrafu  $G'$ , kde sa hľadá záporný cyklus (zodpovedajúci zápornému polocyklu v pôvodnom digrafe) funkciou  $Floydnew(pomM)$ , po ktorom sa znižuje cena toku. Táto funkcia vyberie záporný cyklus s najmenšou priemernou hodnotou hrany (pomocou funkcie  $meancycle$  fungujúcej na princípoch vety 3.3.1).

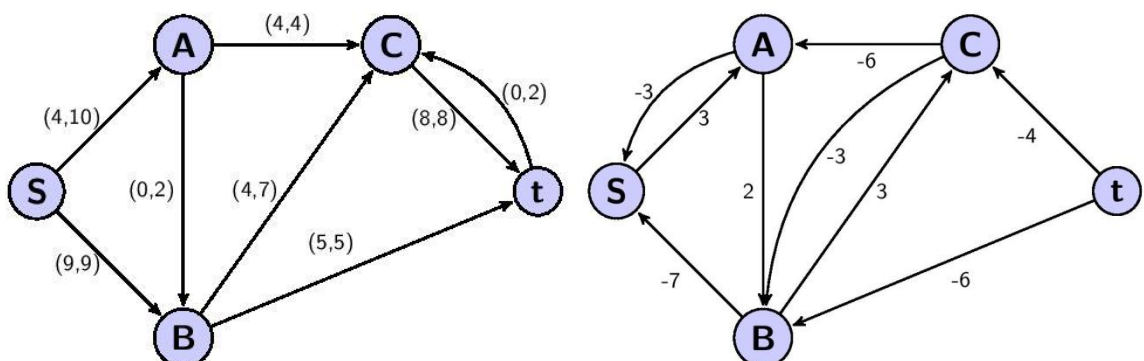
Grafická ukážka fungovania Kleinovho algoritmu na digrafe znázorneného na obrázku nižšie, kde hodnoty na  $i$ -tej hrane  $(b_i, p_i)$  vyjadrujú horné tokové obmedzenie hrany a cenu za jednotku prepraveného toku.

#### Digraf



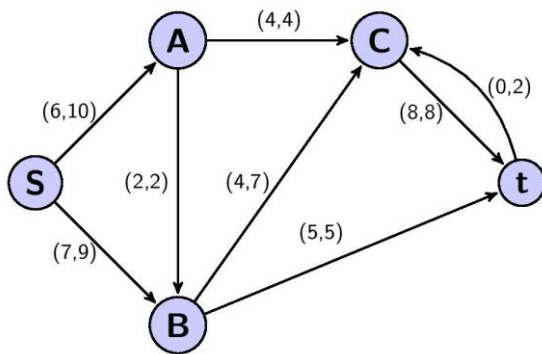
Pomocou algoritmu Forda – Fulkersona sa nájde maximálny tok, ktorý sa následne úpravami zlacňuje. Cena toku v digrafe po použití FF je 173.

#### Vytvorenie pomocného rezervného (cenového) digrafu



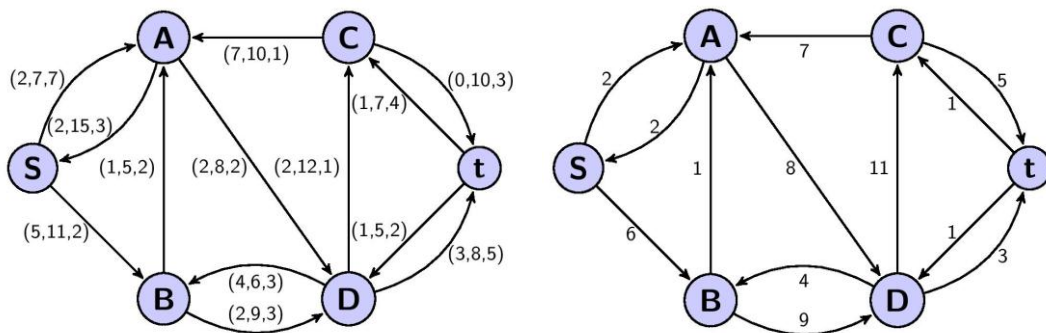
Negatívne cykly (A-B-S a A-B-C) v rezervnom digrafe indikujú prítomnosť negatívnych polocyklov. Cez polocyklus A-B-S (polocyklus s najmenšou priemernou hodnotou ceny hrany) sa následne znižuje cena toku, pričom hodnota  $\delta = 2$ . Po týchto úpravách došlo k zníženiu ceny toku na hodnotu 169.

**Tok v digrafe po úprave**



Príklad pre digrafy s dolnými tokovými obmedzeniami, kde hodnoty nad  $i$ -tou hranou  $(a_i, b_i, p_i)$  označujú dolné tokové obmedzenie, horné tokové obmedzenie a cenu za prepravu jednotkového toku hranou:

**Zadanie: nájsť najlacnejší maximálny tok v digrafe a jeho riešenie**

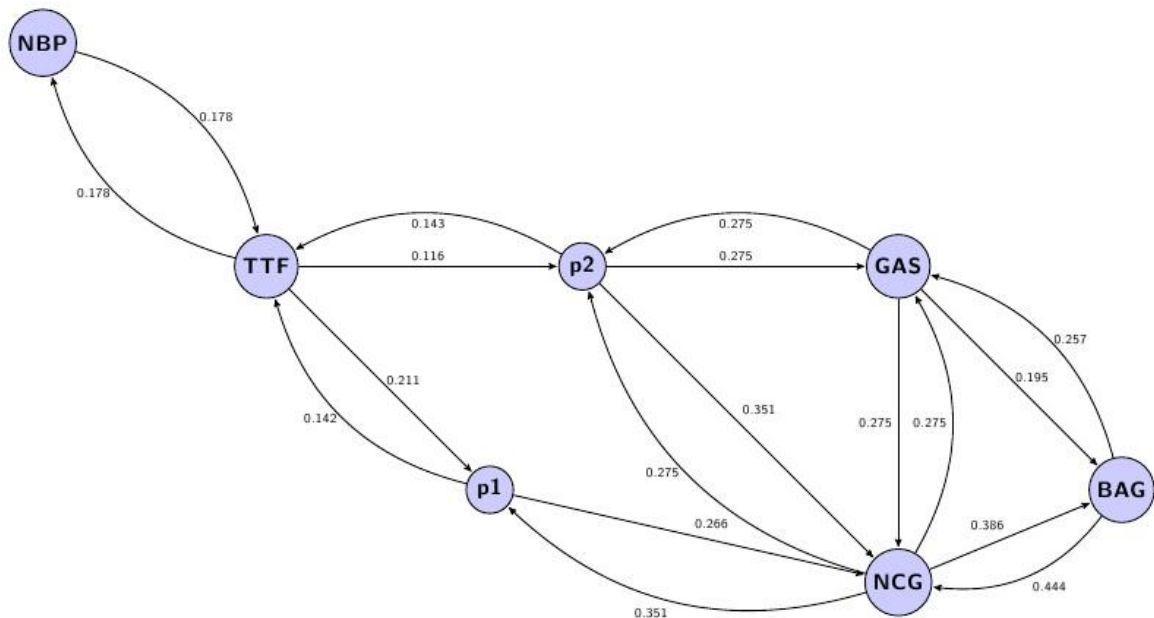


Cena najlacnejšieho maximálneho toku v danom digrafe je rovná hodnote 143.

### 3.5 Návrh digrafu

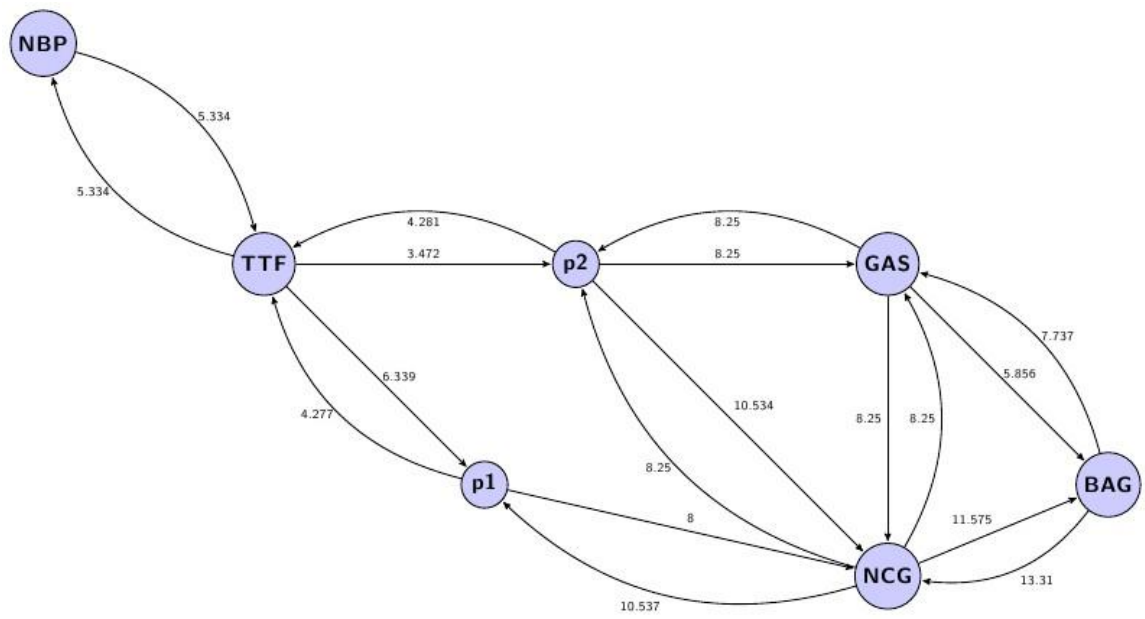
Táto časť sa zameria na tvorbu digrafu z existujúcej siete plynovodov spájajúcich jednotlivé európske huby. Hlavné vrcholy, medzi ktorými sa hľadá optimálna preprava toku budú charakterizovať huby. Ostatné vrcholy tvoria miesta (stanice), kde dochádza k zmene podmienok prepravy. Čo pokrýva rozdielne ceny za prepravenú jednotku objemu z dôvodu zmeny spoločností, ktoré spravujú jednotlivé úseky plynovodov (k tomu najčastejšie dochádza pri prechode štátnou hranicou), meniace sa vlastnosti plynovodného potrubia, ako napríklad rozdielne prevýšenie medzi jednotlivými úsekmi vyžadujúce odlišné množstvo technického plynu potrebného k preprave, alebo stanice, na ktorých sa spájajú viaceré plynovodné potrubia (križovatky).

Digraf európskej siete plynovodov spájajúcich huby s cenami za dennú rezerváciu



Pričom cena hrán (na obrázku vyššie) vyjadruje cenu (v eurách) za prepravu jednej megawatt hodiny plynu (množstvo plynu, ktorého spálením sa získa energia 1MWh) v priebehu jedného dňa. V práci bude potrebná informácia o cene rezervácie prepravnej kapacity na mesiac (obrázok nižšie).

Digraf európskej siete plynovodov spájajúcich huby s cenami za mesačnú rezerváciu



## 4. Aplikácia optimálnych ciest

V tejto časti sa budeme zaoberať využitím poznatku o voľbe optimálnej cesty na prepravu plynu medzi jednotlivými hubmi. Na začiatku sa práca venuje tvorbe a oceňovaniu opcií a rôznych opčných stratégií, ktoré následne porovnáva. Ďalej analyzuje možnosť arbitráže medzi jednotlivými trhmi.

### 4.1 Opcie

V posledných rokoch nastal spolu s rastom hubov v Európe rozmach v obchodovaní s derivátmi odvodenými od cien plynu. Jeden z týchto derivátov sú práve opcie, ktoré umožňujú jej vlastníčkovi právo na kúpu (call), alebo predaj (put) podkladového aktíva za vopred dohodnutú cenu  $E$ . Rozdiel medzi opciou na finančných a komoditných trhoch je v tom, že pri komoditách sa nevyplácajú dividendy. Pre investorov majú význam zaistenia voči veľkému poklesu (respektíve nárastu) ceny plynu na trhoch. Práca sa zaoberá európskymi opciami (vanilla option), ktoré je možné uplatniť iba v čase expirácie  $T$ .

Pri oceňovaní opcií sa uvažuje, že vývoj ceny podkladového aktíva je náhodný (stochastický), pričom ju môžeme vyjadriť pomocou geometrického Brownovho pohybu (diferenciálny tvar):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Kde  $S_t$  je cena podkladového aktíva v čase  $t$ , parametrami  $\mu$ ,  $\sigma$  a Weinerovým procesom  $W_t$  zabezpečujúcim náhodnosť vývoja ceny (stochastický člen). Pričom Weinerov proces je stochastickým procesom s vlastnosťami<sup>8</sup>:

1. S pravdepodobnosťou 1 sú trajektórie  $W_t$  spojité a platí  $W_0 = 0$
2. Náhodná premenná  $W_t$  má normálne rozdelenie  $N(0, t)$
3. Diferencie  $W_{t+\Delta t} - W_t$  majú rozdelenie  $N(0, \Delta t)$ . Ďalej platí, že  $W_t$  má nezávislé prírastky, teda  $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  sú nezávislé pre všetky  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  [4]

---

<sup>8</sup> Kapitoly z finančnej matematiky

**Lema 4.1** (Itôva lema):<sup>9</sup> Nech  $f(x, t)$  je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná  $x$  je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice:

$$dx = \mu(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dW$$

Potom prvý diferenciál funkcie  $f(x, t)$  je možné vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(x_t, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x_t, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x_t, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x_t, t) \frac{\partial f}{\partial x} dW \end{aligned}$$

[5]

Teda pre funkciu ceny opcie  $V(S, T)$  možno na základe Itôvej lemy odvodiť diferenciálny tvar:

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW$$

Ten sa následne využije pri odvodzovaní Black – Scholesovej rovnice na oceňovanie derivátov, ktorá je v tvare:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Kde  $r$  je úroková miera bezrizikového dlhopisu. Keďže v čase expirácie je výplata (call) opcie rovná  $\max(S_T - E, 0)$ , potom riešením Black – Scholesovej rovnice dostávame (4.1):

$$V_{ec}(S, t) = S N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

(4.1)

Kde  $d_1$  a  $d_2$  sú vyjadrené:

$$d_1 = \frac{\left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \ln \left( \frac{S}{E} \right)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

<sup>9</sup> Analytické a numerické oceňovania finančných derivátov



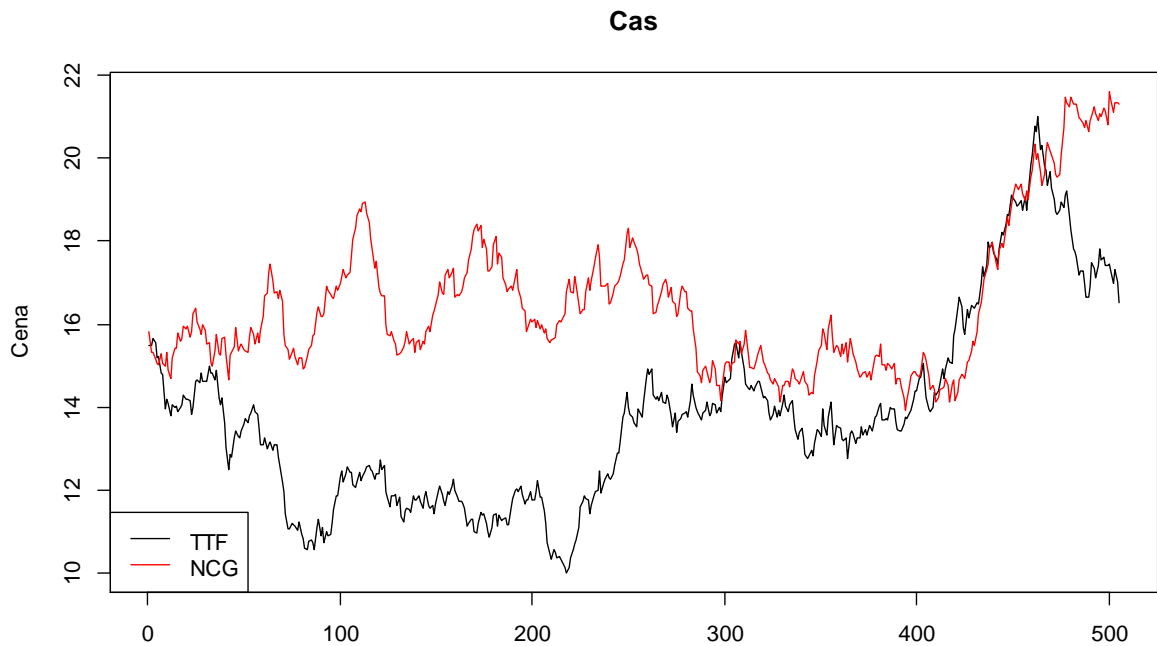
Funkcia ceny pre put opciu sa taktiež dá podobne odvodiť (avšak výplata je v tvare  $\max(E - S_T, 0)$ ), alebo pomocou put – call parity, kedy nákupom call a vypísaním put opcie (s rovnakými parametrami) dostávame forward s expiračnou cenou  $E$ . Teda pre cenu put opcie platí (4.2):

$$V_{ep}(S, t) = E e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S N(-d_1)$$

Opcie majú veľký význam pre distribučné spoločnosti, ktoré sa ich nákupom poisťujú voči nepredvídateľným udalostiam na trhu a z toho vyplývajúcim stratám. Keďže v Európe existuje viacero hubov s vlastným vývojom cien plynu (určených ponukou a dopytom) je možné vytvoriť opcie závislé na cenách plynu určených viacerými trhmi. Teda nákupom (resp. predajom) dohodnutého množstva plynu na trhu s nižšími cenami a následnou prepravou na dohodnuté miesto (hub) by sa znížili náklady na financovanie tohto derivátu (dlžníkom), a tým by nastal pokles ceny (oproti opcie závislej na podkladovom aktíve na jednom trhu), čo by malo za následok pokles ceny zaistenia proti prudkým nárastom (poklesom) cien plynu. Tým by došlo k väčšej ziskovosti distribútorov, ktorý by mal v konečnom dôsledku za následok nižšie ceny plynu. Vlastník tejto opcie by mal právo na nákup jednotkového množstva (objemu) plynu v čase expirácie  $T$  za vopred dohodnutú cenu  $E$ , pričom opcia by bola závislá od podkladového aktíva na viacerých trhoch. Teda pre dva trhy a s nulovými nákladmi na prepravu medzi nimi by výplata call opcie bola rovná:

$$\begin{aligned} \max(\min(S_T^1, S_T^2) - E, 0) &= \max(\min(S_T^1 - E, S_T^2 - E), 0) \\ &= \min(\max(S_T^1 - E, 0), \max(S_T^2 - E, 0)) = \min(V_T^1, V_T^2) \end{aligned}$$

Opciu si majiteľ uplatňuje vtedy, ak všetky ceny podkladových aktív prekročili hranicu  $E$ , v opačnom prípade je výhodnejšie si ju neuplatniť a kúpiť aktívum lacnejšie na inom trhu (pri call opcii tam kde je pod hodnotou  $E$ ). Na obrázku je nakreslený možný priebeh vývoja cien plynov na dvoch trhoch (nemeckom NCG a holandskom TTF) počas obdobia pol roka. Parametre daných procesov boli odhadnuté z dostupných historických dát.



Pri oceňovaní derivátu tohto druhu sa do úvahy musí zahrnúť vplyv cien všetkých  $n$  podkladových aktív, ich vzájomnej korelácie na cenu opcie. Pričom cenu aktív je možné popísať geometrickým Brownovým pohybom, kedy  $\forall i = \{1, \dots, n\}$  platí:

$$dS_t^i = \mu_i S_t^i dt + \sigma_i S_t^i dW_t^i$$

Kde  $\mu_i$  sa označuje ako trend vývoja  $i$ -teho trhu a  $\sigma_i$  je štandardná odchýlka (ročná) vypočítaná z  $m$  historických údajov.<sup>10</sup>

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\tau} \frac{1}{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} \left( \ln \left( \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right) - \gamma \right)^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m-1} \ln \left( \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right)$$

[5]

Pričom vzájomné vplyvy medzi jednotlivými hubmi sú vyjadrené pomocou korelácie medzi prírastkami Weinerových procesov:

<sup>10</sup> Výpočet historickej volatility

$$E(dW_t dW_t^T) = R$$

Kde  $R$  je korelačná matica (na diagonále by mala mať hodnotu  $\sqrt{t}$ , ktorú však teraz neuvažujeme), pričom  $\rho_{ij}$  je korelácia medzi cenami na  $i$ -tom a  $j$ -tom trhu. Avšak aby bolo možné aplikovať Itôvu lemu pre viacrozmerné náhodné premenné musí vo Weinerovom procese  $B$  pre každé  $i \neq j$  platiť  $E(dB_t^i dB_t^j) = 0$ . Teda pôvodný proces  $W_t$  je nutné upraviť pomocou rovnice  $dW_t = AdB_t$ , kde  $A$  je hľadaná matica.

$$E(dW_t dW_t^T) = R, \quad E(dB_t dB_t^T) = I$$

S využitím vzorca na úpravu Weinerovho procesu dostávame:

$$E(AdB_t dB_t^T A^T) = R$$

$$A E(dB_t dB_t^T) A^T = A I A^T = R$$

Matica  $R$  je symetrická, a teda je možné pomocou Choleskeho rozkladu nájsť takú dolnotrojuholníkovú maticu  $A$ , že platí  $AA^T = R$  (za predpokladu, že  $R$  je kladne definitná). Potom hodnoty v matici  $A$  je možné získať vzorcom:

$$a_{ii} = \sqrt{1 - \sum_{m=1}^{i-1} a_{im}^2}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{jj}} \left( \rho_{ij} - \sum_{m=1}^{j-1} a_{im} a_{jm} \right), \quad i > j$$

Následne upravíme pôvodnú diferenciálnu rovnicu opisujúcu pohyb cien plynu na trhoch  $i = \{1, \dots, n\}$ :

$$dS_t^i = \mu_i S_t^i dt + \sigma_i S_t^i \sum_{j=1}^n a_{ij} dB_t^j$$

Pričom z Itôvej lemy sa získa diferenciálna rovnica pre cenu opcie  $V(S^1, \dots, S^n, T)$  v tvare:

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial S_i \partial S_j} \sum_{k=1}^n \sigma_i S_i \sigma_j S_j a_{ik} a_{jk} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial S_i} \mu_i S_i \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial S_i} \sigma_i S_i \sum_{k=1}^n a_{ik} dB_k$$

z čoho možno odvodiť Black - Scholesovu rovnicu oceňovania derivátov. Tá je však príliš zložitá na získanie riešenia už aj pre dva trhy (nie je možné riešiť úlohu pomocou rovnice vedenia tepla, ako to bolo v jednorozmernom prípade). Preto sa na nájdenie riešenia používa Monte Carlo metóda generujúca množstvo scenárov vývoja cien na trhu a následným určením ceny derivátu ako diskontovanej hodnoty výplaty (v začiatočnom čase). V prípade, že uvažujeme opciu závislú od cien na dvoch trhoch dostávame:

$$dS_1 = \mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dB_1$$

$$dS_2 = \mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 (\rho dB_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dB_2)$$

Z týchto rovníc je možné pomocou Itôvej lemy získať vzťah na výpočet ceny aktíva v čase  $T$ . Zavedením pomocnej premennej  $Y_t = \ln(S_t)$  a následným diferencovaním dostaneme:

$$dY = \frac{1}{S}(\mu S dt + \sigma S dB) - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2} \sigma^2 S^2 dt = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right) dt + \sigma dB$$

$$Y_T - Y_0 = \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right) T + \sigma B_T$$

Aplikáciou na diferenciálnu rovnicu ceny na prvom trhu dostávame:

$$S_T^1 = S_0^1 e^{(\mu_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2) T + \sigma_1 B_T^1}$$

Podobne postupujeme aj v druhom prípade, ktorý je však o niečo zložitejší (stochastický člen obsahuje súčet dvoch Weinerových procesov). Hodnotu druhého podkladového aktíva je možné zapísať v tvare:

$$S_T^2 = S_0^2 e^{(\mu_2 - \frac{1}{2} \sigma_2^2) T + \sigma_2 (\rho B_T^1 + \sqrt{1 - \rho^2} B_T^2)}$$

Hodnota trendu cien komodít na trhoch  $\mu_1, \mu_2$  sa určí ako výnos bezrizikovej akcie  $r$ . Prostredníctvom týchto vzťahov sa v každej iterácii vypočíta diskontovaná hodnota výplaty opcie (danej na základe vzorca zo začiatku). Na to sa z týchto hodnôt (cien opcií v danom scenári v čase výpisu opcie) vypočíta priemer, ktorý sa následne určí ako cena opcie (v čase výpisu). V našom prípade bolo zvolených 1 000 000 iterácií.

V praxi sa však často využíva stratégia nákupu najlacnejšej opcie na vybraných trhoch. Vlastník získava právo na kúpu (predaj) jednotkového množstva plynu na danom trhu v expiračnom čase  $T$  za cenu  $E$ . Pri uplatnení opcie sa vlastníčkovi zaručuje transport

zakúpeného množstva plynu do miesta určeného v zmluve (zväčša trh, kde bol derivát zakúpený) pri call opcii (respektíve z daného miesta pri put opciách). Pri podobných začiatkových cenách na trhu (ako je to v prípade cien plynu na európskych huboch) nižšia hodnota opcie znamená menšiu volatilitu trhu, čo sa prejaví v menej výraznom vplyve stochastického člena na vývoj cien aktíva (oproti iným trhom). V prípade, že sa cena plynu na niektorom z volatilnejších trhov v expiračnom čase dostane pod hodnotu ceny trhu, na ktorom je dislokovaná opcia, potom sú náklady na financovanie derivátu väčšie ako v prípade zloženej opcie. Táto skutočnosť sa odrazí na cene, ktorá je vyššia ako pri zloženej opcií. Keďže jej cena je závislá iba od jedného podkladového aktíva, a teda existuje exaktné riešenie Black – Scholesovej rovnice, je možné ju zapísať v tvare:

$$V_c(S, t) = \min(V_{ec}(S^1, t), \dots, V_{ec}(S^n, t))$$

Kde  $V_{ec}(S^i, t)$  je cena európskej opcie závislá na podkladovom aktíve vyvíjajúcom sa na  $i$ -tom trhu, ktorú je možné vyjadriť pomocou vzorca (4.1). Stále je však táto stratégia výhodnejšia ako nákup opcie s podkladovým aktívom vyvíjajúcim sa na jednom trhu.

V predošlých prípadoch sme neuvažovali náklady na prepravu plynu medzi jednotlivými hubmi. Ako bolo spomenuté v teórii, opcia je právo na nákup alebo predaj aktíva za cenu  $E$ , teda ak chceme aby sa pri uplatnení na domovskom trhu zachovala cena  $E$  je nutné do nej zahrnúť aj cenu za prepravu. To znamená, že upravená expiračná cena pre  $i$ -ty trh bude mať tvar:

$$E'_i = E - c(x_{ih})$$

Kde  $c(x_{ih})$  je cena za prepravu jednotkového množstva plynu (v prípade put opcie  $c(x_{hi})$ ) z  $i$ -teho trhu na domovský trh, ktorý je dohodnutý v zmluve (pre put opcie je výsledná expiračná cena súčtom pôvodnej a ceny za prepravu). V prípade, že sa opcia v expiračnom čase uplatní, na  $i$ -tom trhu sa nakúpi jednotkové množstvo plynu za cenu  $E'_i$  a následne sa za cenu  $c(x_{ih})$  prepraví na domovský trh (vlastník opcie pri uplatnení zaplatí cenu  $E$ ).

Pre call opciu s expiračným časom pol roka, realizačnou cenou 20 eur, úrokovou mierou 5% kúpenou na holandskom hube TTF (s možnosťou využitia trhov v okolitých krajinách – NBP vo Veľkej Británii a NCG v Nemecku) sa odhadnú ceny v prípade prepravnej opcie, opčnej stratégie a jednoduchej opcie. Štandardná odchýlka a korelácia

medzi jednotlivými trhmi (v poradí TTF, NCG a NBP) bola určená z historických dát nasledovne:

$$\sigma_{TTF} = 0,593 \quad \sigma_{NCG} = 0,5634 \quad \sigma_{NBP} = 0,627$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,3953 & 0,6906 \\ 0,3953 & 1 & 0,2889 \\ 0,6906 & 0,2889 & 1 \end{pmatrix}$$

Ceny za prepravu jednotkového objemu plynu medzi trhmi sú vypočítané na základe optimalizačného algoritmu:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0,467 & 0,178 \\ 0,418 & 0 & 0,596 \\ 0,178 & 0,645 & 0 \end{pmatrix}$$

Pričom ceny opcií a opčných stratégií boli na základe daných informácií odhadnuté:

- Prepravná opcia:  $V_{po} = 0.2498$
- Opčná stratégia:  $V_{os} = 1.3214$
- Jednoduchá opcia:  $V_{jo} = 1.3214$

Z výsledkov je možné pozorovať, že v prípade prepravnej opcie je cena výrazne nižšia oproti ostatným. Avšak cena opčnej stratégie sa nelíši od obvyčajnej opcie, čo indikuje, že cena na domovskom trhu je najvýhodnejšia z pomedzi ostatných hubov (vzhľadom aj na následnú prepravu). V prípade nulových cien za prepravu by sa hodnota opčnej stratégie znížila, a teda by bola výhodnejšia ako jednoduchá opcia.

- Prepravná opcia:  $V_{po} = 0.2328$
- Opčná stratégia:  $V_{os} = 1.3178$
- Jednoduchá opcia:  $V_{jo} = 1.3214$

## 4.2 Arbitráže medzi trhmi

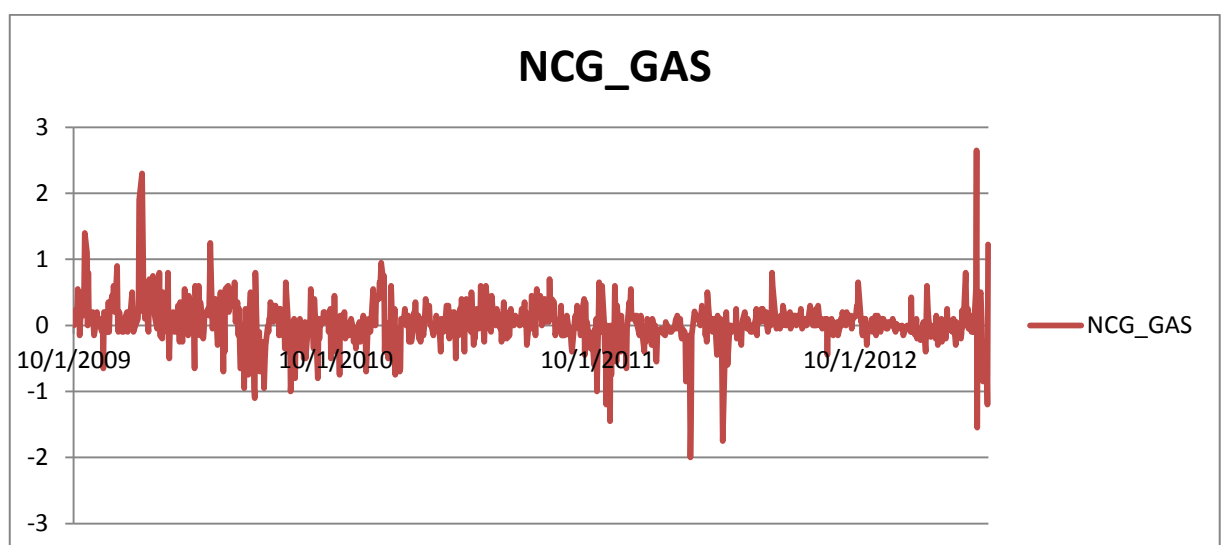
Táto časť je zameraná na hľadanie stratégie využitia arbitrážnych príležitostí vyskytujúcich sa medzi jednotlivými trhmi. S dostupnými údajmi o cenách za prepravu medzi jednotlivými hubmi (z časti tvorby grafu) a historických dát popisujúcich vývoj cien na jednotlivých huboch je možné zistiť počet a obdobie, v ktorom arbitráže nastávajú. Z grafu (2.1) historického vývoja cien (zobrazeného v ekonometrickej časti) bolo možné si

všimnúť periodický výskyt väčších cenových rozdielov (spreadov) medzi jednotlivými trhmi. To môže byť spôsobené viacerými faktormi, ako napríklad rozdielna klíma spôsobená geografickou polohou jednotlivých krajín, čo sa prejavuje hlavne zvýšeným dopytom po plyne domácnosťami (na kúrenie) v prechodných obdobiach. Tie však vzhľadom na polohu hubov nastávajú inokedy, čo vytvára cenové rozdiely medzi trhmi. Vzhľadom na neznámy presný výskyt arbitrážnych príležitostí (dajú sa zistiť iba približné obdobia) sa bude uvažovať s cenami prepravných kapacít rezervovaných na obdobie jedného mesiaca. Avšak pri každej preprave plynu hranicou dochádza k zmene spoločností spravujúcich plynovodnú sieť, čo má za následok navýšenie celkovej ceny za prepravu. Tým sa aj väčšie cenové rozdiely medzi vzdialenými trhmi nebudú môcť využiť (a preto sa budú cenové rozdiely na trhoch aj naďalej vyskytovať). Z tohto dôvodu je výskyt arbitráží pravdepodobnejší medzi susednými než vzdialenými hubmi.

Pomocou optimalizačného algoritmu bola vypočítaná cena za mesačnú rezerváciu jednotky prepraveného objemu plynu (v MWh), ktorý bude možné prepraviť na miesto určenia v priebehu daného dňa.

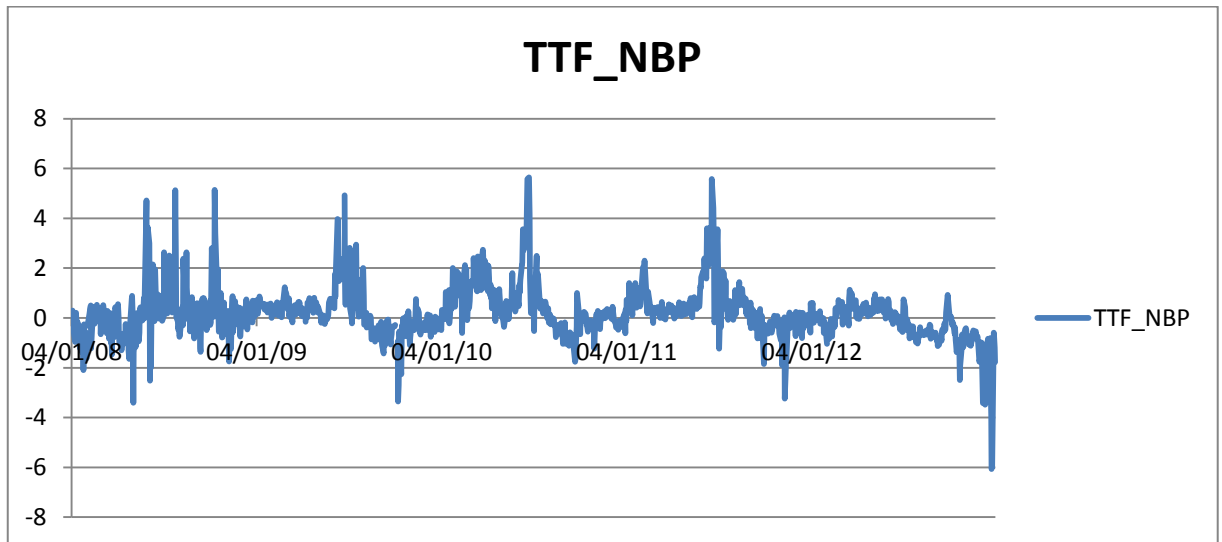
Pre ďalší postup je potrebné vykresliť cenové spready medzi jednotlivými hubmi. Najlacnejšia preprava medzi dvoma hubmi je medzi nemeckým NCG a GASPOOL (z dôvodu, že sa nachádzajú v jednej krajine). Preto sa ako prvý vykreslí graf denných cenových rozdielov medzi hubom NCG a GASPOOL.

Graf cenových rozdielov medzi nemeckými trhmi



Z grafu je vidno, že za daný časový úsek ani raz neprekročil cenový spread hodnotu prepravy, a tým by sa nedala uskutočniť arbitráž. Jedným z dôvodov je podobnosť a blízkosť oboch hubov vzhľadom na to, že pôsobia na jednom trhu. V druhom prípade sa budeme venovať najlikvidnejším hubom v Európe a to Britskému NBP a Holandskému TTF.

Graf cenových rozdielov medzi hubom TTF a NBP



Tu už však zopár krát nastala arbitrážna príležitosť. Tieto veľké cenové rozdiely sa periodicky vyskytujú len v určitých obdobiach. Zaujímá nás preto rozdelenie a pravdepodobnosť výskytu cenových rozdielov presahujúcich určitú hladinu (hodnotu ceny za prepravu medzi hubmi), na základe ktorej by sa dala určiť výhodnosť týchto operácií. V tomto prípade by sa dali využiť metódy na výpočet value at risk, kde sa pomocou teórie extrémnych hodnôt aplikovanej na straty prekračujúce istú hodnotu dokáže relatívne presne určiť hranica, ktorú straty prekročia iba s istou pravdepodobnosťou. Tieto postupy sa dajú podobne využiť aj na dostatočne veľké hodnoty spreadov prekračujúce istú prahovú hodnotu  $u$ . Pričom správanie daných udalostí je možné vyjadriť pomocou podmienenej pravdepodobnosti:

$$F_u(x) = P(X < x + u | X > u) = \frac{P(X < x + u \cap X > u)}{P(X > u)} = \frac{P(X < x + u) - P(X < u)}{1 - P(X < u)}$$

$$= \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}$$



**Veta 4.2.1** (Pickands–Balkema–de Haan):<sup>11</sup> Pre veľkú triedu rozdelení náhodných veličín  $X$  možno nájsť takú funkciu  $\beta(u)$ , že platí:

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq x < x_F - u} \{F_u(x) - GPD_{\xi, \beta(u)}(x)\}$$

[6]

Kde  $x_F$  je pravým krajným bodom rozdelenia,  $u$  je prahovou hodnotou a  $GPD_{\xi, \beta(u)}(x)$  je distribučná funkcia zovšeobecneného Paretovho rozdelenia (General Pareto Distribution) s parametrami  $\xi, \beta(u)$ , pričom platí:

$$GPD_{\xi, \beta(u)}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \\ 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} \end{cases}$$

Predchádzajúca veta tvrdí, že so zvyšujúcou sa prahovou hodnotou je podmienená pravdepodobnosť vyjadrujúca správanie prekročení náhodnej veličiny blízka rozdeleniu zovšeobecneného Paretovho rozdelenia. Jednou z charakteristík zovšeobecneného Paretovho rozdelenia je, že priemerná podmienená veľkosť prekročení nad prahovou hodnotou je lineárna v závislosti od prahovej hodnoty  $u$ .

$$e_u^{GDP} = E(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}$$

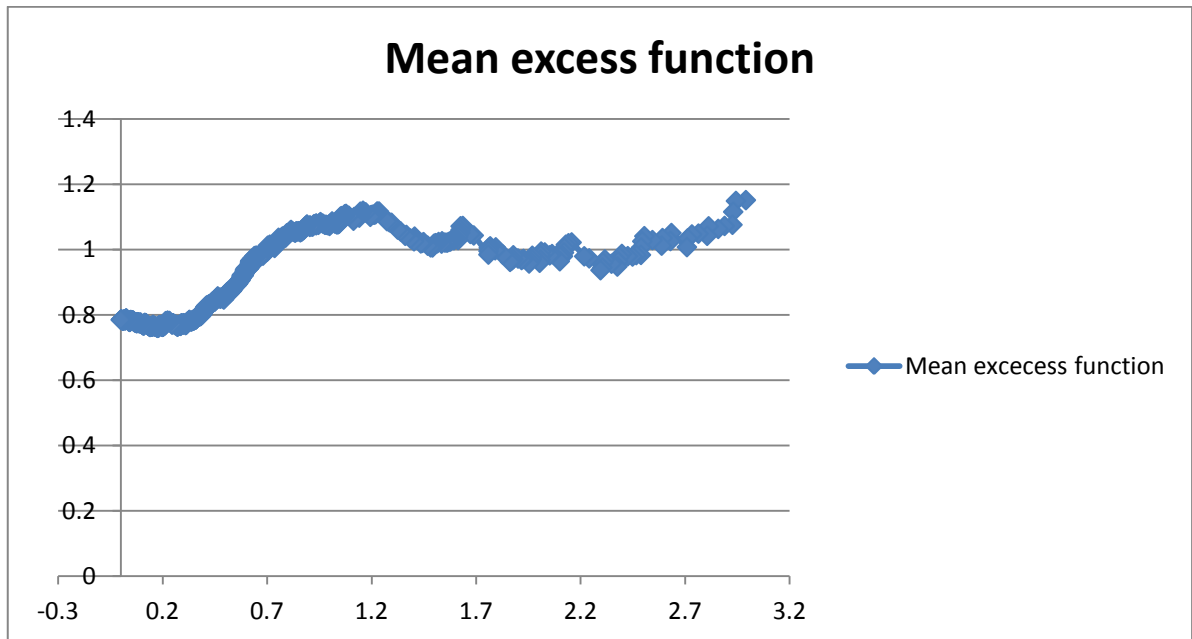
Na základe tohto poznatku je možné určiť prahovú hodnotu  $u$  tak, že podmienené hodnoty prekročení budú mať  $GPD$  rozdelenie. V praxi je však rozdelenie náhodnej premennej  $X$  často neznáme, a preto je možné hodnotu priemernej podmienenej veľkosti prekročení určiť empirickým výpočtom:

$$e_u = \frac{\sum_{i=1}^n \max(X_i - u, 0)}{\sum_{i=1}^n 1_{X_i > u}}$$

Pričom  $u$  sa určí ako hodnota  $X_i$ , od ktorej je funkcia  $e_u$  v závislosti od  $X$  lineárnou.

---

<sup>11</sup> Prednáška EVT 1



Na základe grafu bola prahová hodnota určená:  $u = 2.29553$

Potvrdila sa linearita funkcie priemernej podmienenej veľkosti prekročení od hodnoty spreadov, čo značí, že ich podmienené prekročenia majú *GPD* rozdelenie. Parametre tohto rozdelenia sa odhadnú pomocou metódy maximum likelihood (numerická implementácia sa v matlabe nachádza pod funkciou *gpfir*, ktorý práca využíva v programe *mle.m*). Pričom v našom prípade platí:

$$\xi = 0.0195 \quad \beta = 0.9359$$

Z dostupných informácií je už možné odhadnúť pravdepodobnosť, že nastane taká udalosť, pri ktorej hodnota spreadu prevýši úroveň ceny za prepravu jednotky plynu medzi hubmi (kedy nastáva arbitrážna príležitosť). Pre hodnoty spreadu  $X$  (s neznámym rozdelením, ktoré popisuje distribučná funkcia  $F$ ) prekračujúce prahovú hodnotu  $u$  platí:

$$F_u(x) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)} = F_{GPD}(x)$$

Kde hodnota  $F(u)$  vyjadruje pravdepodobnosť, že spread neprekročí prahovú hodnotu  $u$ , teda je možné odhadnúť:

$$F(u) = P(X < u) = \frac{N - N_u}{N}$$

$N_u$  je počet prekročení prahovej hodnoty spreadom.

$$F(x + u) - \frac{N - N_u}{N} = F_{GPD}(x) \frac{N_u}{N}$$

Hodnota  $x$  sa zvolí tak, aby platilo:  $X = x + u = pr$ , kde  $pr$  je cena prepravy z hubu NBP do TTF. Chceme určiť pravdepodobnosť  $\alpha$  nastátia situácie, kedy  $X > pr$ . (4.2)

$$1 - \alpha = F(pr) = \frac{N_u}{N} F_{GPD}(pr - u) + \frac{N - N_u}{N}$$

$$1 - \alpha = \frac{N_u}{N} \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{\xi}{\beta} (pr - u) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} + \frac{N - N_u}{N} = 1 - \frac{N_u}{N} \left[ 1 + \frac{\xi}{\beta} (pr - u) \right]^{-\frac{1}{\xi}}$$

$$\alpha = \frac{N_u}{N} \left[ 1 + \frac{\xi}{\beta} (pr - u) \right]^{-\frac{1}{\xi}}$$

za predpokladu, že hodnoty  $X_i$  sú nezávislé a rovnako rozdelené. Pri hodnotách spreadov je však prítomná autokorelácia, a teda nie je splnená podmienka nezávislosti. Pre závislé dáta zo zovšeobecneného Paretovho rozdelenia ( $GPD'$ ) platí:

$$F_{GPD'}(x) = (F_{GPD}(x))^\theta$$

Kde  $\theta < 1$  je extrémny index a  $F_{GPD}$  je distribučná funkcia nezávislých dát zovšeobecneného Paretovho rozdelenia.

V prípade jednotkového extrémneho indexu je odhad pravdepodobnostnej úrovne rovný 0.3242%, teda v priebehu jedného roka je stredná hodnota výskytu takýchto prípadov 0.817 krát (v priebehu celého pozorovaného obdobia je stredná hodnota 4.08, čo približne zodpovedá reálnym údajom). To však nič nehovorí o obdobiach, kedy tieto udalosti nastávajú.

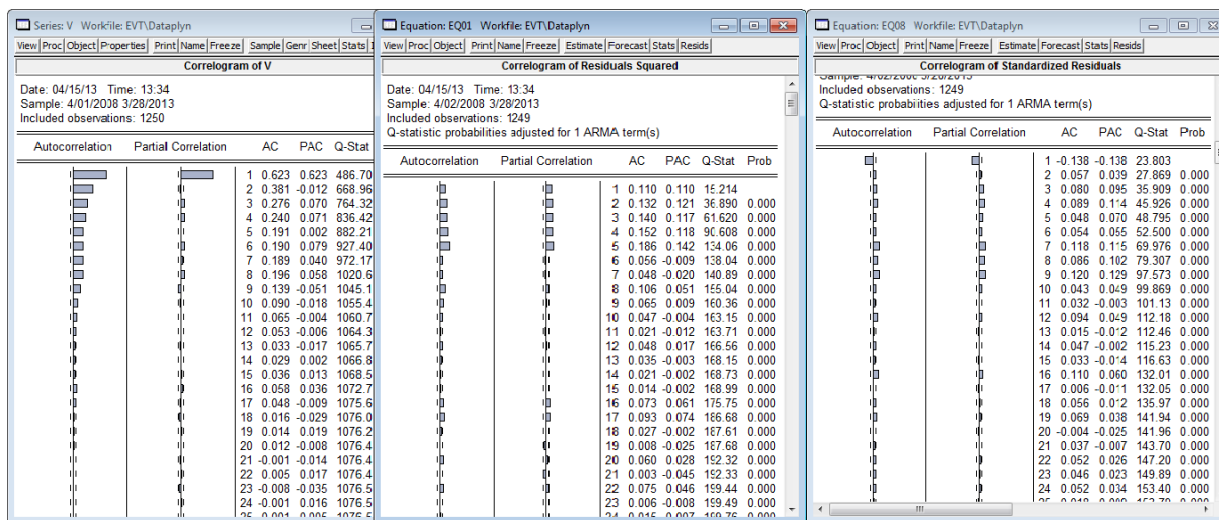
Postupom, ktorým sa budeme teraz zaoberať je možné obísť odhad extrémneho indexu. Z dát cenového spreadu zistujeme prítomnosť autokorelácie (z korelogramu), a teda je možné ich modelovať pomocou AR(1) procesu (4.2.1):

$$spread_t = \alpha_0 + \alpha_1 spread_{t-1} + \varepsilon_t$$

Avšak bola zistená autokorelácia druhých mocnín reziduí, čo spolu s autokoreláciou druhých mocnín spreadov indikuje prítomnosť zhlukovania sa volatility (tzv. volatility clustering – volatility je v čase premenlivá). Je preto vhodné si vytvoriť GARCH(1,1) model cenových spreadov. Pre odhad volatility platí (4.2.2):

$$\sigma_t^2 = c + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_t^2$$

Z ťava: korelogram druhých mocnín spreadov, druhých mocnín reziduí AR(1) modelu a štandardizovaných reziduí GARCH modelu



O štandardizovaných reziduách z GARCH modelu predpokladáme (test vylúčil normálne rozdelenie), že časť prekračujúca istú hranicu  $u$  má GPD rozdelenie. Na určenie prahovej hodnoty sa postupuje podobne ako pri dátach cenových spreadov (pomocou funkcie priemernej podmienenej hodnoty prekročení), pričom hodnota  $u$  bola určená 1.952. Tento poznatok bol následne využitý pri odhade parametrov zovšeobecného Paretoho rozdelenia štandardizovaných reziduí metódou maximálnej vierohodnosti:  $\xi = 0.2368, \beta = 0.7050$

Hodnota straty, ktorú aktívum prekročí s pravdepodobnosťou  $1 - \alpha$  sa nazýva Value at Risk. Považuje sa za najväčšiu hodnotu straty, ktorá by nemala byť s pravdepodobnosťou  $\alpha$  aktívom prekročená v danom časovom období. Tá je určená ako  $\alpha\%$  kvantil z rozdelenia strát. V prípade GPD rozdelenia štandardizovaných reziduí z GARCH modelu strát (ktoré sa dajú modelovať na základe (4.2.1), (4.2.2)) sa tento kvantil resp. hodnota Value at Risk určí nasledovne (4.2.3):

$$VaR_\alpha = \mu + Q(\alpha)\sigma_t$$

Kde je  $\mu$  stredná hodnota spreadov z GARCH modelu a  $Q(\alpha)$  je hodnota, ktorú štandardizované reziduá prekročia s pravdepodobnosťou  $1 - \alpha$  (teda  $\alpha\%$  kvantil z rozdelenia GPD). Túto ideu je možné aplikovať na náš model. Hodnotu ceny za prepravu plynu je možné považovať za Value at risk s hľadanou pravdepodobnostnou úrovňou  $1 - \alpha$ . Vzhľadom na nezávislosť štandardizovaných reziduí je  $(1 - \alpha)\%$  kvantil rozdelenia GPD možno z (4.2) vyjadriť v tvare (4.2.4):

$$Q(1 - \alpha) = u + \frac{\beta}{\xi} \left[ \left( \frac{N}{N_u} \alpha \right)^{-\xi} - 1 \right]$$

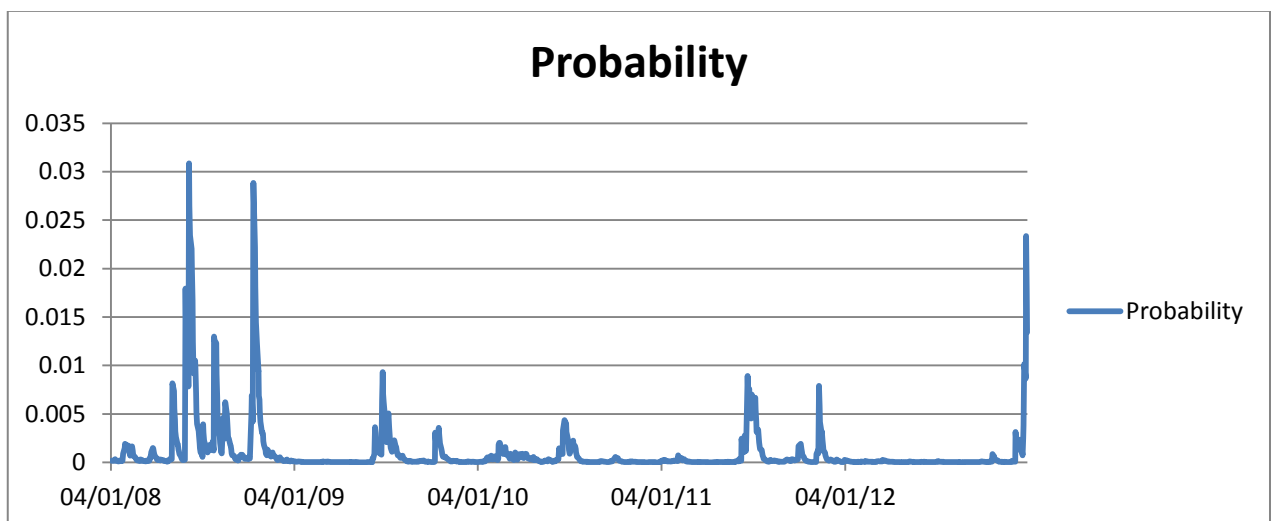
Z čoho je možné vyjadriť hodnotu pravdepodobnosti prekročenia ceny za prepravu spreadom (4.2.5):

$$\alpha = \frac{N_u}{N} \left[ 1 + \frac{\xi}{\beta} \left( \frac{pr - \mu}{\sigma_t} - u \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}}$$

Kde  $u$  je prahová hodnota štandardizovaných reziduí,  $N_u$  je počet štandardizovaných reziduí prekračujúcich prahovú hodnotu a  $N$  je celkový počet štandardizovaných reziduí.

Na obrázku nižšie je zobrazená pravdepodobnosť prekročenia hranice ceny za prepravu spreadom v závislosti od času (resp. štandardných odchýlok v jednotlivých časoch).

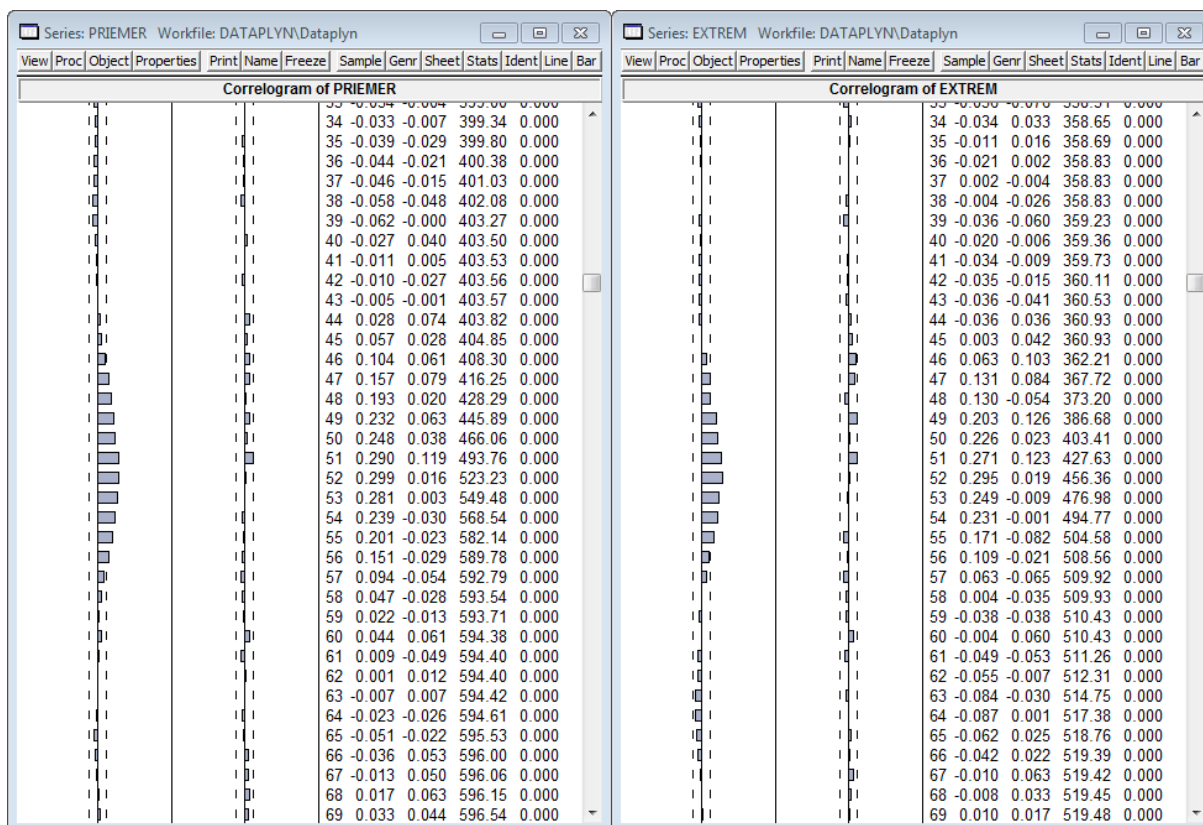
Graf pravdepodobnosti prekročenia



Z obrázku je vidno, že zvýšené pravdepodobnosti korešponujú s obdobiami, kedy k prekročeniu došlo.

Ako bolo už spomenuté, z grafu je možné pozorovať periodicky sa vyskytujúce vzory (pokles a nárast cenových rozdielov) a udalosti, pri ktorých cenový rozdiel trhov prekročil hodnotu prepravy. Tento jav indikuje v dátach prítomnosť sezónnosti. Na jej vyšetrenie najskôr upravíme dáta z denných (pri denných dátach nemá veľmi zmysel hovoriť o sezónnosti) na týždňové (nie je dostatok dát pre analýzu mesačných údajov). Jedným zo spôsobov je, že týždňový údaj vyjadruje extrém denných hodnôt, ktoré nastali v daný týždeň (je rovná najväčšej absolútnej hodnote denných dát cenových rozdielov pri zachovanom znamienku) alebo je priemerom denných hodnôt v danom týždni.

#### Zobrazenie sezónnosti pomocou autokorelačnej funkcie



Autokorelačná funkcia ukázala vplyv medzi dátami v ročných odstupoch (najväčšia hodnota v oboch prípadoch je pri 52. člene, čo je jeden rok). Výskyt arbitrážnych príležitostí bol najčastejší v mesiaci september, kedy bola aj veľmi častá prítomnosť extrémnych cenových rozdielov medzi TTF a NBP (a v okolitých mesiacoch – október a august). Teda v prípade stratégie využitia budúcich arbitrážnych príležitostí je najvýhodnejšie (z dostupných údajov) si zakúpiť prepravné kapacity práve v tomto období.

## Záver

Práca sa zaoberala metódami optimalizácie ceny toku v grafoch a následnou aplikáciou tohto poznatku na určenie stratégie v obchodovaní s plynom a oceňovanie finančných derivátov odvíjajúcich sa od cien plynu na európskych trhoch. Taktiež boli predmetom skúmania účinky istých parametrov na ceny európskych hubov.

Na základe ekonometrických modelov bol preukázaný vplyv trhov v západnej Európe (britský NBP a holandský TTF) na vývoj cien stredoeurópskych hubov, avšak opačná závislosť sa podľa očakávaní až na jednu výnimku (nemecký hub NCG) nepotvrdila. Ďalej bol zistený vplyv dlhodobých zmien v trende vývoja cien ropy na stredoeurópskych huboch v dôsledku ich závislosti na medzištátnych kontraktoch na dodávky plynu, ktorých cena je závislá od svetových cien ropy. Naopak západoeurópske trhy, na ktorých je podiel dlhodobých kontraktov zanedbateľný (ceny sa riadia ponukou a dopytom) sú ovplyvňované aktuálnymi pohybmi cien ropy.

Na výber optimálnej cesty prepravy plynu sa využíval Kleinov algoritmus popísaný v tretej kapitole. Tento poznatok sa ďalej využíval pri konštrukcii opcií závislých od cien plynu na viacerých trhoch a opčnej stratégie najlacnejšej opcie na trhu (vyplácajúcej sa na mieste nákupu – domovský trh). Na ocenenie opcií prvého druhu sa z dôvodu neexistencie exaktného riešenia (založenej na zložitej diferenciálnej rovnici) využívala Monte – Carlo metóda, zatiaľ čo pre opčnú stratégiu existuje jednoduché analytické riešenie (pre európske typy opcií). Ukázalo sa, že tieto deriváty sú lacnejšie (hlavne prvý druh opcií) ako bežne obchodované opcie odvíjajúce sa od ceny plynu na jednom hube. Využívaním uvedených derivátov by klesla hodnota zaistenia pred náhlou zmenou ceny podkladového aktíva (čím by sa znížilo riziko straty distribučným spoločnostiam), čo by v konečnom dôsledku mohlo zapríčiniť pokles cien plynu.

Ďalej sa poznatok o optimálnej preprave plynu využíva v nachádzaní arbitrážnej príležitosti spôsobenej nerovnováhou cien medzi jednotlivými hubmi. Vzhľadom na vysokú cenu prepravnej kapacity bol výskyt arbitráží iba medzi susednými hubmi. Vzhľadom na zriedkavý výskyt udalostí, kedy cenový spread prekročoval hodnotu prepravy, bolo možné tieto prekročenia modelovať využitím teórie extrémnych hodnôt. To umožnilo zistiť pravdepodobnosti nastania arbitrážnych udalostí. V istých periodicky sa

opakujúcich obdobiach sa v dôsledku sezónnosti cenového spreadu objavovala zvýšená pravdepodobnosť prekročenia ceny za prepravu (najmä v jesenných mesiacoch). Príliš zriedkavý výskyt arbitrážnych príležitostí spôsobený vysokou cenou prepravnej kapacity je hlavnou príčinou relatívne veľkých cenových rozdielov plynu na európskom trhu (oproti trhu v Severnej Amerike).



## Zoznam použitej literatúry

- [1] Heather, P., *Continental European Gas Hubs: Are they fit for purpose?*, Oxford, 2012. ISBN: 978-1-907555-51-0.
- [2] Plesník J., *Algoritmy na sieťach, prednášky v letnom semestri 2012*.
- [3] Jungnickel D., *Graphs, Networks and Algorithms (3rd ed.)*, Springer, Berlin, 2008. ISBN: 978-3-540-72779-8.
- [4] Melicherčík, I., Olšárová, L., Úradníček, V., *Kapitoly z finančnej matematiky*, Bratislava: Epos. 2005. ISBN: 80-8057-651-3.
- [5] Mikula, K., Stehlíková, B., Ševčovič, D., *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2009. ISBN: 978-80-227-3014-3.
- [6] Jurča, P., *Prednášky z Kvantitatívnych metód v riadení rizík*
- [7] Danielsson J., *Financial risk forecasting*, John Wiley & Sons, 2011. ISBN: 978-1-119-97710-0.
- [8] Fidrmuc, J., *Prednášky zo Semináru z ekonómie (1)*

## Prilohy

### Test Grangerovej kauzality

Pairwise Granger Causality Tests

Date: 03/25/13 Time: 11:19

Sample: 1/02/2009 12/11/2012

Lags: 1

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Probability
DNCG does not Granger Cause DTF	734	5.10626	0.02413
DTF does not Granger Cause DNCG		196.464	1.0E-39
DGASPOOL does not Granger Cause DTF	734	0.59887	0.43926
DTF does not Granger Cause DGASPOOL		27.1164	2.5E-07
DNBP does not Granger Cause DTF	734	3.31873	0.06890
DTF does not Granger Cause DNBP		2.57103	0.10927
DBAGA does not Granger Cause DTF	734	0.94817	0.33051
DTF does not Granger Cause DBAGA		32.5999	1.6E-08
DGASPOOL does not Granger Cause DNCG	734	203.748	5.9E-41
DNCG does not Granger Cause DGASPOOL		14.2366	0.00017
DNBP does not Granger Cause DNCG	734	128.942	1.2E-27
DNCG does not Granger Cause DNBP		11.6174	0.00069
DBAGA does not Granger Cause DNCG	734	107.028	1.7E-23
DNCG does not Granger Cause DBAGA		26.0137	4.3E-07
DNBP does not Granger Cause DGASPOOL	734	13.7375	0.00023
DGASPOOL does not Granger Cause DNBP		1.4E-05	0.99706
DBAGA does not Granger Cause DGASPOOL	734	3.69150	0.05508
DGASPOOL does not Granger Cause DBAGA		25.8270	4.7E-07
DBAGA does not Granger Cause DNBP	734	0.00158	0.96831
DNBP does not Granger Cause DBAGA		9.99828	0.00163



## Optimalizačný algoritmus

```
function[Tok, fx] = Kleinnew(P, MaxTok, MinTok, zTok, x)

Tok = LB_inic(MaxTok, MinTok, zTok, x);
d = length(MaxTok(1, :));
pomM = zeros(d);
koniec_kl = 0;
fx = 0; %cena toku

%uprava P na pocitanie ceny toku
Pup = zeros(d);
for k=1:d
    for l=1:d
        if P(k,l)~=inf
            Pup(k,l) = P(k,l);
        end
    end
end

while koniec_kl==0
    %pomocna matica G_hat
    for k=1:d
        for l=k:d
            if k==l
                pomM(k,l) = 0;
            else
                if MaxTok(k,l)==MinTok(k,l) && MaxTok(l,k)==MinTok(l,k)
                    pomM(k,l) = inf;
                    pomM(l,k) = inf;
                elseif MaxTok(k,l)~=MinTok(k,l) &&
                    MaxTok(l,k)==MinTok(l,k)
                    if Tok(k,l)==MaxTok(k,l)
                        pomM(k,l) = inf;
                        pomM(l,k) = -P(k,l);
                    elseif Tok(k,l)>MinTok(k,l)
                        pomM(k,l) = P(k,l);
                        pomM(l,k) = -P(k,l);
                    else
                        pomM(k,l) = P(k,l);
                        pomM(l,k) = inf;
                    end
                elseif MaxTok(k,l)==MinTok(k,l) &&
                    MaxTok(l,k)~=MinTok(l,k)
                    if Tok(l,k)==MaxTok(l,k)
                        pomM(l,k) = inf;
                        pomM(k,l) = -P(l,k);
                    elseif Tok(l,k)>MinTok(l,k)
                        pomM(l,k) = P(l,k);
                        pomM(k,l) = -P(l,k);
                    else
                        pomM(l,k) = P(l,k);
                        pomM(k,l) = inf;
                    end
                end
            end
        end
    end
    else
        if MaxTok(k,l)==Tok(k,l) && MaxTok(l,k)==Tok(l,k)
            pomM(k,l) = -P(l,k);
            pomM(l,k) = -P(k,l);
        elseif MaxTok(k,l)~=Tok(k,l) && MaxTok(l,k)==Tok(l,k)
```



```

        end
    end

    for k=1:poc-1
        K(k,1) = MnVrch(1,k);
        K(k,2) = MnVrch(1,k+1);
    end
    K(poc,1) = MnVrch(1,poc);
    K(poc,2) = MnVrch(1,1);

    deltaM = zeros(1,poc);
    for k=1:poc
        if pomM(K(k,1),K(k,2))==P(K(k,1),K(k,2))
            if Tok(K(k,1),K(k,2))~=MaxTok(K(k,1),K(k,2))
                deltaM(1,k) = MaxTok(K(k,1),K(k,2)) -
Tok(K(k,1),K(k,2));
            else
                deltaM(1,k) = MinTok(K(k,2),K(k,1)) -
Tok(K(k,2),K(k,1));
            end
        else
            if pomM(K(k,1),K(k,2))==~P(K(k,2),K(k,1))
                if Tok(K(k,2),K(k,1))~=0
                    deltaM(1,k) = MinTok(K(k,2),K(k,1)) -
Tok(K(k,2),K(k,1));
                else
                    deltaM(1,k) = MaxTok(K(k,1),K(k,2)) -
Tok(K(k,1),K(k,2));
                end
            end
        end
    end
    delta_k = min(abs(deltaM(1,:)));
    for k=1:poc
        if deltaM(1,k)>0
            Tok(K(k,1),K(k,2)) = Tok(K(k,1),K(k,2)) + delta_k;
        else
            Tok(K(k,2),K(k,1)) = Tok(K(k,2),K(k,1)) - delta_k;
        end
    end
    Tok;
end
end

```

### Ford – Fulkersonov algoritmus s dolnými obmedzeniami

```

function [Tok]=LB_inic(B,BL,zTok,x)

Tok = zTok*0;

if x<min(min(BL))
    error('pozadovany tok je priliz maly, musi byt aspon taky ako
najvacsia min hranica')
end

%zistenie ci mame spravne podmienky
if sum(sum(BL>B))>0
    error('zle podmienky, dolna hranica nesmie prekrociť hornu')
end

```

```

end

%zistenie ci pociatocny tok splna vsetky podmienky grafu, ak nie
zostavime
%pripustny zaciatocny tok
if sum(sum(zTok))~=0
    if zTok<BL | zTok>B
        error('zaciatocny tok nesplna podmienky')
    else
        Tok = FF(B,BL,zTok,x);
    end
end
%ak nemame zaciatocny tok, ideme vytvorit pripustny tok
else
    %vytborenie pomocneho grafu A
    %pridanie pomocnych vrcholov s' a t'
    A = zeros(length(B)+2);
    %hrany povodneho grafu zmensime o dolnu hranicu a aby sme zachovali
toky a
    %odtoky do jednotlivych vrcholov, pridame pomocne hrany vedene z
vrchola
    %s' a do t'
    A(2:length(B)+1,2:length(B)+1) = B - BL;
    %pri tvorbe umeleho grafu musi byt zakomponovany povodny graf, t.j.
    %musi byt zachovana podmienka nehromadenia sa toku- medzi zac a kon
    %vrcholom musia byt vytvorene hrany
    A(2,length(A)-1) = inf;
    A(length(A)-1, 2) = inf;
    for j=2:length(B)+1
        A(1,j) = sum(BL(:,j-1));
        A(j,length(A)) = sum(BL(j-1,:));
    end
    %zeros(length(A)) je zaciatocny tok v novom grafe, pTok je pripustny
zaciatocny tok
    pTok = FF(A,zeros(length(A)),zeros(length(A)),x);
    %nasytenost zac a kon hran zabezpecuje prip riesenia
    if pTok(1,:)~=A(1,:)
        Tok = pTok(2:length(B)+1,2:length(B)+1) + BL;
        Tok = FF(B,BL,Tok,x);
    else
        error('neexistuje pripustne riesenie')
    end
end
end

function[Tok] = FF(B,BL,zTok,x)

d = length(B(1,:));
Tok = zTok;

koniec = 0; %technicka konst na FF
%test pripustnosti vstupov
for k=2:(d-1)
    if sum(Tok(:,k))~=sum(Tok(k,:))
        koniec = 1;
    end
end

pomM1 = zeros(d);
pomM2 = pomM1;
pomM = pomM1;

```

```

odtok = sum(Tok(1,:)) - sum(Tok(:,1));

%Ford-Fulkerson alg
while koniec==0
    navV = zeros(1,d);
    Vrcholy = zeros(d,2);
    %vytvaranie pomocnej matice
    for k=1:d
        for l=1:d
            if k==l
                pomM1(k,l) = 0;
                pomM2(k,l) = 0;
            end
            if k < l
                pomM1(k,l) = B(k,l) - Tok(k,l);
                pomM2(k,l) = Tok(l,k) - BL(l,k);
            end
            if k > l
                pomM1(k,l) = Tok(l,k) - BL(l,k);
                pomM2(k,l) = B(k,l) - Tok(k,l);
            end
        end
    end
    pomM = pomM1 + pomM2;

    %maximalizacia toku
    k = 1;
    navV(1,k) = 1;
    stop = 0;
    pom = 1;
    deltaV = ones(1,d)*inf;

    while stop<2
        l = d;
        stop = 0;
        while stop==0
            if pomM(k,l)==0
                l = l-1;
            else
                if navV(1,l)==1
                    l = l-1;
                else
                    navV(1,l) = 1;
                    Vrcholy(pom,:) = [k,l];
                    deltaV(1,pom) = pomM(k,l);
                    pom = pom + 1;
                    stop = 1;
                    k = l;
                end
            end
        end
        %lepsie je to s rezom
        if l == 1
            pom = pom - 1;
            if pom==0
                stop = 2;
                koniec = 1;
            else
                k = Vrcholy(pom,1);
                stop = 1;
            end
        end
    end
end

```



```

        %dorazili sme na koniec
        if navV(1,d)==1
            stop = 2;
        end
    end
end

delta = min(min(deltaV(1,:)), (x-odtok));
%algoritmus zvacsenia toku na polceste
if koniec==0
    for i = 1:d
        if Vrcholy(i,1)~=0
            k = Vrcholy(i,1);
            l = Vrcholy(i,2);
            pom = Tok(k,l) + delta;
            if pom < B(k,l)
                Tok(k,l) = Tok(k,l) + delta;
            else
                Tok(k,l) = B(k,l);
                Tok(l,k) = Tok(l,k) - (pom - B(k,l));
            end
        end
    end
end
%testovanie ohranicenia odtoku zo startovacieho vrchola
odtok = sum(Tok(1,:)) - sum(Tok(:,1));
if x==odtok
    koniec = 1;
end
end
end

```

### Algoritmus hľadania najmenších záporných polocyklov

```

function [mi, MnVrch] = meancycle(W, piv, d)

Fm = zeros(d+2, d+1);
Cesta = zeros(d+2, d+1);
mi = 0; %priemerna dlzka najlacnejšieho cyklu

%vytvorenie pomocnych hran zo zaciatočného vrchola do všetkých vrcholov
%(ak neexistujú) s hodnotou 0
Ws = ones(d+1)*inf;
for i=1:d+1
    Ws(1,i) = 0;
end
Ws(2:d+1, 2:d+1) = W;
W = Ws;
for l=1:d+1
    if l==1
        Fm(1,l) = 0;
    else
        Fm(1,l) = inf;
    end
    Cesta(d+2,l) = l-1;
end

%vytvorenie matic najkratsich ciest a mapovania
pomV = zeros(1, d);

```

```

if piv~=1 %ak nie je zac vrchol sucastou neg
cyklu
    for k=2:d+2
        for l=1:d+1
            pomV = W(:,l)' + Fm(k-1,:);
            pomp = inf;
            if k==2
                pomV(1,l) = inf;
                Fm(k,l) = min(pomV);
                for i=1:d
                    if pomp>pomV(1,i)
                        pomp = pomV(1,i);
                        Cesta(k-1,l) = i-1;
                    end
                end
            else
                pomV(1,l) = inf;
                pomV(1,l) = inf;
                Fm(k,l) = min(pomV);
                for i=1:d+1
                    if pomp>pomV(1,i)
                        pomp = pomV(1,i);
                        Cesta(k-1,l) = i-1;
                    end
                end
            end
        end
    end
end
else
    for k=2:d+1
        for l=1:d+1
            pomV = W(:,l)' + Fm(k-1,:);
            pomp = inf;
            pomV(1,l) = inf;
            Fm(k,l) = min(pomV);
            for i=1:d
                if pomp>pomV(1,i)
                    pomp = pomV(1,i);
                    Cesta(k-1,l) = i-1;
                end
            end
        end
    end
end

CestaN = Cesta(2:d+2,2:d+1);
%najdenie cyklu s najmensiou priemernou dlzkou cyklu metoduou
%M=F(n,v)-F(k,v)/n-k

M = zeros(d,d);%
for k=1:d
    for l=1:d
        M(k,l) = (Fm(d+2,l+1) - Fm(k+1,l+1))/(d+1-k);
    end
end

pomV = zeros(1,d);
pomV = max(M(:,1:d));

pomp = inf;
for i=1:d-1

```

```

    if pomp>pomV(1,i)
        piv = i; %index, v kt je najlacnejsia cesta
        pomp = pomV(1,i);
    end
end
mi = pomp;

if mi>=0
    koniec_kl = 0;
    MnVrch = zeros(1,d);
else
    %najdenie minimalneho cyklu
    CestaP = zeros(1,d+1);
    CestaP(1,d+1) = CestaN(d+1,piv);
    l = piv;
    for k=d:-1:1
        CestaP(1,k) = CestaN(k,l);
        l = CestaN(k,l);
    end

    pomp = 0;
    pocm = 1;
    poc = 2;
    MnVrch = zeros(1,d);
    MnVrch(1,1) = CestaP(1,1);
    while pomp~=CestaP(1,pocm)
        MnVrch(1,poc) = CestaP(1,pocm+poc-2+1);
        poc = poc + 1;
        if pocm+poc-2==d+1
            pocm = pocm + 1;
            if pocm==d+1
                pomp = CestaP(1,d+1);
                if CestaP(1,1)~=CestaP(1,d+1)
                    MnVrch = MnVrch*0;
                end
            else
                poc = 2;
                MnVrch = MnVrch*0;
                MnVrch(1,1) = CestaP(1,pocm);
                pomp = 0;
            end
        else
            pomp = CestaP(1,pocm+poc-2+1);
        end
    end
end
end
end

```

## Opcie

```

function[C] = opcia_call(S0,E,T,r,sigma,R,X)

trials = 1000000;
n = length(R);

%tvorba matice E1 vzhladom na prepravu
h = 1; %domovsky trh
for i=1:n
    E1(i) = E - X(i,h);
end

```

```

%vytvorenie matice A pomocou
A = zeros(n);
for i=1:n
    for j=1:n
        pom = 0;
        if i==j
            for m=1:i-1
                pom = pom + A(i,m)^2;
            end
            A(i,j) = sqrt(R(i,j) - pom);
        elseif i>j
            for m=1:j-1
                pom = pom + A(i,m)*A(j,m);
            end
            A(i,j) = (R(i,j) - pom)/A(j,j);
        end
    end
end

%Monte Carlo metoda
c = zeros(1, trials);
S = zeros(1, n);
for k=1:trials
    z = normrnd(0,1, [n 1]);
    for i=1:n
        pom = 0;
        for m=1:n
            pom = pom + A(i,m)*z(m);
        end
        S(i) = S0(i)*exp( (r - (sigma(i)^2)/2)*T + sigma(i)*sqrt(T)*pom
    );
    end
    if S>E1
        c(k) = min(S-E1)*exp(-r*T);
    end
end

C(1) = mean(c);

%opcna strategija a opcia domovska
V = zeros(1, n);
for i=1:n
    d1 = ( (r + (sigma(i)^2)/2)*T + log(S0(i)/E1(i)) ) / ( sigma(i)*sqrt(T)
    );
    d2 = d1 - sigma(i)*sqrt(T);
    V(i) = S0(i)*(1-qfunc(d1)) - E1(i)*exp(-r*T)*(1-qfunc(d2));
end

C(2) = min(V);
C(3) = V(h);

```

## Výpočet pravděpodobnosti překročení

```
num = xlsread('Dataplyn','resid1');
resid = num(:,1);
var = num(:,3);

resid1 = -sort(-resid);
q = num(1,2);

y = resid1(resid1>q) - q; % exceedances

[parameters,confidence_interval]=gpfit(y);

xi = parameters(1);
beta=parameters(2);

alfa = 1/xi;

%GARCH
mi = 0.066510/(1-0.789369);

for i=1:length(var)
    prep(i) = (5.334 - mi)/sqrt(var(i));
end

Nu = sum(y>0);
N = length(resid);

for i=1:length(var)
    p(i,1) = (Nu/N)*((xi/beta)*(prep(i) - q) + 1)^(-alfa);
end
```