

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



GENERÁTOR EKONOMICKÝCH SCENÁROV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



GENERÁTOR EKONOMICKÝCH SCENÁROV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika  
Vedúci práce: Mgr. Martin Harcek



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Kristína Batmendiňová  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Generátor ekonomických scenárov

**Cieľ:** V práci budeme skúmať problém simulovania bezrizikovej výnosovej krivky v dlhodobom horizonte s použitím jednofaktorového modelu krátkodobej úrokovej miery (napr. Hull Whiteov model), ktorý je kalibrovaný na aktuálne trhové ceny úrokových derivátov, tzv. swaptions. Cieľom práce je vytvorenie metodiky pre spracovanie trhových dát, kalibráciu modelu, simuláciu krátkodobej úrokovej miery a generovanie výnosovej krivky v súlade s rámcovým programom SOLVENCY II. Ďalším cieľom práce je zapracovanie faktora inflácie, zahrnutie kurzového rizika a riešenie problém výberu 'reprezentatívnych trajektórií'.

**Vedúci:** Mgr. Martin Harcek  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 25.01.2013

**Dátum schválenia:** 04.02.2013

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**PodĎakovanie** Touto cestou by som sa chcela poďakovať školiteľovi Mgr. Martinovi Harcekovi za mnoho cenných rád a času, ktorý mi venoval počas písania diplomovej práce.

# Abstrakt

BATMENDIJNOVÁ, Kristína: Generátor ekonomických scenárov [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; Vedúci práce: Mgr. Martin Harcek, Bratislava, 2014

V poslednom desaťročí sa stáva trendom, že poisťovne pristupujú úplne inak k životnému a k neživotnému poisteniu z pohľadu účtovníctva, či organizačnej štruktúry. Dôvodom je, že tieto dva druhy poistenia fungujú na iných princípoch. Životná poisťka je špecifickým produktom životného poistenia.

Dôležitou úlohou poisťovne je odhadnúť súčasnú hodnotu životnej poisťky. Ovplyvnená je predovšetkým výnosovou krivkou a úmrtnosťou. Prudký pokles úrokovej miery, ktorá sa riadi svetovou ekonómiou, má negatívny dopad na poisťovne. To bolo impulzom pre poisťovne snažiť sa nájsť spôsob ako produkovať scenáre ekonomických a demografických modelov, na základe ktorých sa dá pristupovať k oceňovaniu záruk s väčšou presnosťou. Táto práca sa bude zaoberať ekonomickými modelmi.

Potreba ekonomických modelov je zvýraznená v Solvency II. Je to súbor smerníc určený pre poisťovne v Európskej Únii, ktorý by mal začať platiť začiatkom roka 2016. Solvency II sa skladá z niekoľkých pilierov. Súčasťou prvého z nich je požiadavka na trhovo konzistentné oceňovanie aktív a záruk. To je možné dosiahnuť vhodným generátorom ekonomických scenárov.

**Kľúčové slová:** Trhovo konzistentný generátor ekonomických scenárov, Solvency II, Hull-White model

# Abstract

BATMENDIJNOVÁ, Kristína: Economic scenario generator [Master's Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: Mgr. Martin Harcek, Bratislava, 2014

In the last decade there is a trend in the insurance industry to separate life insurance and non-life insurance in accounting and organization. The reason is that these two types of insurance are based on different principles. Life assurance is a specific product of life insurance.

An important task of an insurance company is to estimate the current value of life assurance. It is primarily affected by the yield curve and mortality. A rapid decrease of the interest rate, which follows the world economy, has a negative effect on insurance companies. That was the impulse for them to try to develop a method, which would allow them to produce scenarios of economic and demographic models in order to value guarantees more precisely. In this thesis we focus on economical models.

The need of economical models is emphasized in Solvency II which is a new legislation for insurance companies in European Union scheduled to come into effect at the beginning of the year 2016. The Solvency II consists of several pillars. The first pillar includes a requirement on market consistent valuation of assets and guarantees. This is possible by implementing a suitable economic scenario generator.

**Keywords:** Market consistent economic scenario generator, Solvency II, Hull-White model

---

# OBSAH

|                                                  |           |
|--------------------------------------------------|-----------|
| Úvod . . . . .                                   | 8         |
| <b>1 Riadenie rizík v poisťovníctve</b>          | <b>9</b>  |
| 1.1 Základné delenie rizík . . . . .             | 9         |
| 1.2 Technické rezervy . . . . .                  | 10        |
| 1.3 Riadenie aktív a pasív . . . . .             | 11        |
| 1.4 Trhovo konzistentné oceňovanie . . . . .     | 11        |
| 1.5 Legislatívne rámce . . . . .                 | 13        |
| 1.5.1 Solvency I . . . . .                       | 13        |
| 1.5.2 Solvency II . . . . .                      | 13        |
| <b>2 Generátor ekonomických scenárov</b>         | <b>15</b> |
| 2.1 Teória úrokových mier . . . . .              | 15        |
| 2.2 Deriváty úrokových mier . . . . .            | 17        |
| 2.2.1 Úrokové swapy . . . . .                    | 17        |
| 2.2.2 Opcie . . . . .                            | 18        |
| 2.2.3 Swapcie . . . . .                          | 18        |
| 2.2.4 Caplety . . . . .                          | 19        |
| 2.3 Modely krátkodobých úrokových mier . . . . . | 20        |
| 2.4 Hull-White model . . . . .                   | 21        |
| <b>3 Simulácia ekonomických scenárov</b>         | <b>26</b> |

---

|       |                                  |           |
|-------|----------------------------------|-----------|
| 3.1   | Trhové dáta . . . . .            | 26        |
| 3.1.1 | Implikovaná volatilita . . . . . | 26        |
| 3.1.2 | Swapová úroková krivka . . . . . | 27        |
| 3.2   | Kalibrácia modelu . . . . .      | 28        |
|       | Záver . . . . .                  | 39        |
|       | <b>Literatúra</b>                | <b>40</b> |



---

# ÚVOD

V poslednom čase si ľudia v poisťovníctve začali uvedomovať dôležitosť správneho riadenia záruk zahrnutých v poisťných zmluvách. Úrokové miery boli nízke, čo znamená, že záruky minimálnych úrokových mier sa zmenili z out-of-the money na in-the-money. Dôsledkom toho začalo mať mnoho poisťovní problém so solventnosťou. Ďalšou inšpiráciou pre túto prácu je fakt, že sa pripravujú smernice Solvency II, ktoré budú klásť nové požiadavky na poisťovne v Európskej Únii. Napríklad oceňovanie aktív a pasív musí byť teraz konzistentné s trhom. Jednou z ciest ako dosiahnuť oceňovanie konzistentné s trhom je použitie generátora ekonomických scenárov, ktorý vytvára stochastické scenáre budúcej návratnosti aktív.

Naša práca sa bude zaoberať návrhom Generátora ekonomických scenárov, ktorého výstupom bude trhovo konzistentný odhad budúceho vývoja krátkodobej úrokovej miery. Tá môže napomôcť oceňovaniu záruk v poisťných zmluvách.

---

---

# KAPITOLA 1

---

## RIADENIE RIZÍK V POISTOVNÍCTVE

V tejto kapitole uvedieme niektoré pojmy a pravidlá, ktorými sa riadia poisťovne. Objasníme, čo je to legislatívny rámec Solvency I a Solvency II.

### 1.1 Základné delenie rizík

Aktivity ľudí, firiem, alebo iných ekonomických subjektov sú častokrát vystavené rôznym druhom rizík. Napríklad riadenie automobilového vozidla prináša so sebou riziko nehody, kúpa nehnuteľnosti prináša riziko, že ju postihne prírodná katastrofa, a.i. Podstata poisťovacej činnosti spočíva v tom, že poisťovňa na seba preberá tieto riziká. Má očakávanie, ako sa tieto riziká prejavujú (napríklad môže očakávať, že priemerný počet vyhorených nehnuteľností je 1 z 1000). Potom môžeme o riziku pre poisťovne hovoriť ako o odchýlení skutočných udalostí od očakávaní poisťovne.

V našej práci má dôležitý význam Solvency II. Je to súbor smerníc určený poisťovním v štátoch Európskej únie, ktorý nadobudne platnosť 1.1.2016. Pri klasifikácii rizík sa budeme snažiť priblížiť terminológii, ktorú používa táto pripravovaná legislatíva.

#### Kategórie rizík

Riziká delíme na [1], [7]:

- Upisovacie riziká - sú to riziká nepriaznivej zmeny v hodnote poisťných záväzkov.

Patria tu riziká pre životné a neživotné poistenie.

- Nefinančné riziká - tu patria operačné a podnikateľské riziká.
- Investičné riziká - tu patria trhové a úverové riziká.

Keď hovoríme o rizikách, zaujíma nás hlavne:

- Riadenie rizík - identifikovanie a meranie rizík, opatrenia, ktoré pomáhajú obmedziť straty.
- Financovanie rizík - vyčlenenie kapitálu, zaistenie.
- Redukcia rizík - snaha zastaviť rizikové aktivity, či diverzifikovať.

## 1.2 Technické rezervy

Poistiť sa dajú rôzne udalosti, ktoré sú málo pravdepodobné (napr. prírodná katastrofa, úraz...), ale aj udalosti, ktoré sú síce vysoko pravdepodobné, no nie je jasné, kedy nastanú (napr. úmrtie, dožitie sa istého veku...). Povinnosťou poisťovne je vytvárať tzv. technické rezervy na krytie takýchto udalostí.

Podľa zákona o poisťovníctve na vykonávanie poisťovacej činnosti poisťovňa vytvára v súlade s vymedzeným predmetom podnikania tieto technické rezervy:

1. technickú rezervu na poistné budúcich období,
2. technickú rezervu na poistné plnenie,
3. technickú rezervu na poistné prémie a zľavy,
4. technickú rezervu na úhradu záväzkov voči Slovenskej kancelárii poisťovateľov vznikajúcich z činností podľa osobitného predpisu,
5. technickú rezervu na životné poistenie,
6. technickú rezervu na krytie rizika z investovania finančných prostriedkov v mene poistených,

7. technickú rezervu na vyrovnávanie mimoriadnych rizík v poistnom odvetví neživotného poistenia,
8. ďalšie technické rezervy (tie môže poisťovňa vytvárať, ak záväzky voči poisteným nie je možné uhradiť z niektorej z technických rezerv uvedených v 1 až 7)

Technické rezervy podľa odseku vyššie sa vytvárajú v dostatočnej výške na to, aby bola v každom okamihu zabezpečená schopnosť poisťovne v plnej miere uhradiť všetky záväzky poisťovne vyplývajúce z poistných zmlúv a záväzky poisťovne vznikajúce z činností podľa osobitného predpisu a používajú sa na ich úhradu.

Spôsob umiestnenia prostriedkov technických rezerv je upravený v zákone o poisťovníctve 8/2008 v § 32.

### 1.3 Riadenie aktív a pasív

Finančné produkty poisťovní často zahŕňajú rôzne záruky. Mnoho životných poisťovní napríklad ponúka produkty, v ktorých zaručuje minimálne zhodnotenie. Dá sa povedať, že existujú dva typy takýchto záruk [4]. Záruka splatnosti zabezpečuje poistenému minimálnu mieru návratnosti počas doby platnosti až po vypršanie zmluvy. Druhý typ záruky je, keď je doba trvania zmluvy rozdelená na obdobia (napríklad jeden rok). Potom sa špecifikuje záväzná záruka pre každé obdobie. To znamená, že vyšší zisk v skoršom období sa nestratí aj keď v neskoršom období môže byť zisk nižší. Ide o tzv. vnorené opcie. Takáto záruka je pre poistenca veľmi vzácna a podrobuje poisťovne značnému finančnému riziku.

Poistné zmluvy so sebou prinášajú problémy s oceňovaním a manažmentom záruk. Tieto problémy patria v týchto dňoch medzi najväčšie výzvy poisťovní.

### 1.4 Trhovo konzistentné oceňovanie

Oceňovanie poistných zmlúv, ktoré majú dobu trvania rozdelenú na viac období vyžaduje zložitú matematiku. Ako nástroj pre toto oceňovanie budeme využívať generátor ekonomických scenárov (ďalej GES).

Sú dva typy GES [4]. Taký, ktorý vytvára scenáre odzrkadľujúce očakávaný vývoj

ekonómie v poisťovníctve. Mal by zobrazovať reálny svet, zahŕňať riziká a jeho kalibrácia je založená na historických dátach.

Druhý typ je tzv. trhovo konzistentný GES. Jeho hlavná funkcia je reprodukovanie trhových cien. Často sú tieto scenáre kvôli jednoduchosti rizikovo neutrálne. Treba podotknúť, že cieľom týchto generátorov nie je odzrkadľovať očakávania reálneho sveta; napríklad 10 rokov dlhý trhovo konzistentný generátor neukazuje očakávania poisťovníkov, ako bude vyzeráť svet o 10 rokov. Môže byť skôr využitý na ohodnotenie derivátu so splatnosťou o desať rokov. Trhovo konzistentné scenáre nám pomáhajú vypočítať trhové ceny dnes, zatiaľ čo scenáre založené na historických dátach nám ukazujú, ako môže situácia vo svete vyzeráť zajtra.

Smernice Solvency II majú niekoľko požiadaviek na trhovo konzistentný GES. Po prvé, musí vytvárať ceny aktív, ktoré sú v súlade s likvidným a transparentným finančným trhom a po druhé, nesmie vytvoriť príležitosť pre arbitráž [4]. Pre lepšie pochopenie:

- Likvidný trh znamená, že aktívum sa dá ľahko kúpiť a predáť bez toho, aby to spôsobilo významné zmeny v cene a dá sa presunúť veľké množstvo aktív bez významného ovplyvnenia cien finančných nástrojov.
- Finančný trh je transparentný vtedy, ak sú aktuálne informácie o cenách a obchodovaní na trhu dostupné pre verejnosť.

Pri kalibrácii trhovo konzistentného modelu, treba brať ohľad na nasledujúce požiadavky:

- Model by mal byť kalibrovaný na inštrumenty, ktoré zohľadňujú povahu a trvanie záväzkov (pasív). Má prikladať väčšiu váhu materiálnym derivátom (napr. ak máme viac derivátov, ktorých hodnota je blízka nule a jeden je výrazne hodnotnejší, tak do neho investujeme výrazne viac).
- Ďalej by mal byť kalibrovaný na aktuálnu bezrizikovú výnosovú krivku používanú na diskontovanie finančných tokov.
- Tiež by sa mal kalibrovať na vhodnú mieru volatility. Budeme používať tzv. implikovanú volatilitu, teda trhom očakávanú hodnotu do budúcnosti.

## 1.5 Legislatívne rámce

### 1.5.1 Solvency I

Solvency I je súbor smerníc určený poisťovniam v štátoch Európskej únie, aby si zachovali solventnosť a teda, aby boli schopné zabezpečiť splatenie záväzkov, ktoré vyplývajú z ich činnosti. Miera solventnosti sa vyžaduje osobitne pre životné a osobitne pre neživotné prostredie.

Prvé takéto nariadenia boli vytvorené v sedemdesiatych rokoch a odštartovali tak tri generácie smerníc, pričom tretia je datovaná do roku 1992 [1]. Európsky parlament a Rada schválili v roku 2002 obmedzenú reformu smerníc a nazvali ju práve Solvency I. Tá je záväzná od účtovného roku 2004.

### 1.5.2 Solvency II

Solvency II je nová legislatíva, ktorá ovplyvňuje oblasť poisťovníctva a nadobudne platnosť 1.1.2016 (tento dátum bol už viackrát posunutý). Táto nová séria pravidiel kladie mnoho požiadaviek na poisťovne, napríklad požiadavky na proces riadenia rizík, kapitálové požiadavky, či požiadavky na transparentnosť.

Štruktúra Solvency II sa skladá z troch pilierov [4]. Prvý obsahuje kvantitatívne požiadavky, t.j. ako majú byť ohodnotené aktíva a pasíva a výška kapitálu, ktorý by mala poisťovňa držať. Druhý pilier sa zaoberá kvalitatívnymi požiadavkami, teda udáva ako má byť určované riziko a ako sa na to má dozerieť. Nakoniec, tretí pilier zadáva požiadavky na transparentnosť a otvorenosť, napríklad na podávanie správ dohliadajúcim autoritám.

#### Prvý pilier - kvantitatívne požiadavky

Tu sú zadané dve požiadavky [1]:

- **SCR** (solvency capital requirement) - kapitálová požiadavka na solventnosť. Je to kapitál potrebný na pokrytie najhoršieho možného scenára. Počíta sa pomocou európskeho štandardného vzorca alebo (čiastočným) interným modelom.
- **MCR** (minimal capital requirement) - minimálna kapitálová požiadavka. Pod

tento kapitál nesmie poisťovňa klesnúť.

### **Druhý pilier - kvalitatívne požiadavky**

Tu je vysvetlený proces pre posúdenie dohľadom - **SCR** (supervisory review proces). Tiež sa tu píše, ako odhadnúť vlastné riziko a mieru solventnosti - **ORSA** (own risk and solvency assessment) [1].

### **Tretí pilier - požiadavky pre výkazníctvo a uverejňovanie informácií**

Sú tu požiadavky, ktoré majú zabezpečiť transparentnosť a disciplínovanosť [1].

---

---

## KAPITOLA 2

---

# GENERÁTOR EKONOMICKÝCH SCENÁROV

Táto kapitola objasňuje princípy na základe ktorých bude fungovať náš generátor ekonomických scenárov.

### 2.1 Teória úrokových mier

Úrokové miery sú implikované:

- Cenami štátnych dlhopisov

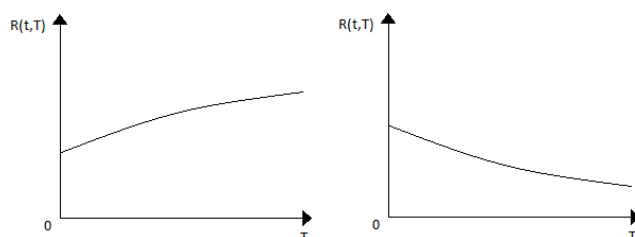
Dlhopis je cenný papier, ktorý so sebou nesie dôležité informácie ako cena dlhopisu, nominálna hodnota, doba splatnosti (resp. maturita), kupón, či interval vyplácania kupónu [8]. Pri obchodovaní s dlhopisom vystupujú dve strany: kupujúci a predajca. Kupujúci kúpi dlhopis, ktorý mu zaručuje, že v dobe splatnosti dostane od predajcu peniaze vo výške nominálnej hodnoty. Okrem toho v intervaloch vyplácania kupónu (polročné, ročné...) bude dostávať od predajcu kupón, ktorý sa určuje ako percentuálna hodnota z nominálnej hodnoty. Takéto dlhopisy sa nazývajú kupónové.

Existujú však aj bezkupónové dlhopisy. Tie sa od kupónových líšia tým, že počas



doby držania dlhopisu kupujúci nedostáva žiadne kupóny. Tieto dlhopisy majú zväčša kratšiu dobu splatnosti (do jedného roka). V čase kúpy bezkupónového dlhopisu máme o dlhopise všetky informácie. Vieme, za koľko ho kupujúci kúpi a akú nominálnu hodnotu dostane po uplynutí známej doby (v čase maturity).

Pomer nominálnej hodnoty a ceny dlhopisu tak môžeme chápať ako okamžitú úrokovú mieru pre dobu splatnosti dlhopisu. Takýmto spôsobom sa dá vytvoriť krivka okamžitých úrokových mier (tzv. spot rates), ktoré definujú tzv. časovú štruktúru úrokových mier. Dá sa chápať ako poplatok za používanie peňazí od súčasnosti až po čas  $T$ . Na obr. 2.1 sú znázornené dva z možných tvarov tejto krivky - klesajúci a rastúci.



**Obr. 2.1:** Časová štruktúra úrokových mier

Pod pojmom *diskontný dlhopis* rozumieme dlhopis s nominálnou hodnotou  $F=1$ . Hovorí sa mu aj diskontný faktor.

Označme cenu diskontného dlhopisu  $P(t, T)$  a časovú štruktúru úrokových mier  $R(t, T)$ , kde  $t$  znamená súčasnosť a  $T$  čas splatnosti dlhopisu. Potom  $R(t, T)$  je definované vzťahom:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}.$$

Odtiaľ

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}. \quad (2.1)$$

(Presné odvodenie nájdeme v [8], str.7, 8, 9.)

Okamžitá úroková miera (tzv. short rate)  $r_t$  je úroková miera, ktorá má okamžitú splatnosť, teda

$$r_t = R(t, t).$$

Úrokové miery sú ďalej implikované

- Obchodmi na peňažnom trhu

Častokrát sa v banke stane, že jej na konci dňa, po obchodovaní, ostane voľná likvidita, resp. jej časť likvidity chýba. Vtedy môže prebytočnú likviditu uložiť na krátky čas do inej banky, resp. si od inej banky požičať. Takto banky medzi sebou obchodujú na uzavretom peňažnom trhu (tzv. Money market) s prislúchajúcou úrokovou mierou. Každé ráno 44 významných bánk na európskom trhu poskytnú údaj o tom, za akú úrokovú mieru je ochotná požičať inej banke v ten deň. Tieto údaje sa vyhodnotia, 15 % najvyšších a najnižších úrokových mier sa vyškrtne a zo zvyšných sa spraví priemer. Toto číslo sa zaokrúhli na tri desatinné miesta a vznikne tak úroková miera, tzv. EURIBOR (Europe Interbank Offered Rate). Táto úroková miera sa určuje na rôzne obdobia. Najkratšie je jeden týždeň, potom dva týždne, tri týždne a jeden až 12 mesiacov.

- Forwardové úrokové miery

Predstavujú úrokové miery medzi dvoma obdobiami v budúcnosti za podmienok, ktoré sú dohodnuté v súčasnosti. Závisia od forwardového kontraktu na diskontný dlhopis. Dve strany - kupujúci a predajca, sa v čase  $t$  dohodnú, že v čase  $T_1 > t$  kúpi kupujúci od predajcu diskontný dlhopis s dobou splatnosti v čase  $T_2 > T_1$ .

Okamžitá forwardová úroková miera  $f(t, T)$  je definovaná:

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T) \quad (2.2)$$

(presné odvodenie je v [8], str. 19, 20.)

## 2.2 Deriváty úrokových mier

### 2.2.1 Úrokové swapy

Úrokový swap (resp. interest rate swap) je finančný derivát, v ktorom sa obe obchodujúce strany zaväzujú, že v dohodnutých intervaloch si navzájom vyplatia určitú sumu. Jedna strana je na konci intervalu povinná vyplatiť druhej strane fixný kupón, ktorý sa zadáva v percentách nominálnej hodnoty swapu. Druhá strana je povinná vyplatiť prvej strane plávajúci kupón. Plávajúci kupón závisí od EURIBORU, ktorý bol platný

na konci predchádzajúceho intervalu. Môže to byť napríklad

$$(\text{trojmesačný EURIBOR} + 3)\%$$

z nominálnej hodnoty swapu. Swapy sa vypisujú na dobu 1 až 15 rokov. Na rozdiel od dlhopisov sa na konci nevypláca nominálna hodnota swapu. Tento kontrakt umožňuje premenenie fixnej sadzby úveru na plávajúcu, alebo naopak. Dĺžka trvania kontraktu sa nazýva tenor.

Fixné kopóny swapov, ktoré sú udávané v percentách nominálnej hodnoty, sú základom pre ďalší spôsob určovania časovej štruktúry úrokových mier [10].

### 2.2.2 Opcie

Ďalší typ kontraktu, ktorý nás v tejto práci bude zaujímať je opcia. Kúpa opcie predstavuje právo, ale nie povinnosť, kúpiť (call opcia), resp. predáť (put opcia) aktívum za vopred dohodnutú expiračnú cenu opcie  $E$  v čase expirácie  $T$  ak ide o typ európskej opcie, alebo kedykoľvek do času expirácie v prípade americkej opcie [9]. Vlastník opcie má tak v čase expirácie možnosť rozhodnúť sa, či chce zrealizovať obchod, na ktorý bola opcia vydaná, alebo nie. Vezmime si ako príklad európsku call opciu na akciu s expiračnou cenou 50 EUR a expiračným časom 3 mesiace. Nech súčasná cena danej akcie je 40 EUR. Ten, kto si takúto opciu kúpi získava právo kúpiť o tri mesiace akciu, na ktorú bola vydaná, za 50 EUR. To, ako sa rozhodne závisí samozrejme od toho, ako sa vyvinie cena akcie. Ak cena akcie o tri mesiace stúpne napr. na 60 EUR, je pre vlastníka opcie výhodné svoje právo uplatniť, pretože ju môže kúpiť za 50 EUR a ušetrí tak 10 EUR. V takejto situácii sa hovorí, že opcia je *In the money*. Ak však cena akcie o tri mesiace bude nižšia ako expiračná cena opcie, napr. 45 EUR, tak nie je výhodné opciu uplatňovať, pretože by vlastník na tom prerobil. Vtedy hovoríme, že opcia je *Out of the money*. Môže sa stať, že cena akcie bude o tri mesiace rovnaká ako expiračná cena opcie. Taká opcia sa nazýva *At the money*.

### 2.2.3 Swapcie

Finančný derivát swapcie môžeme chápať ako opcie na swapy. Držiteľ swapcie má právo, no nie povinnosť, vstúpiť do swapovej dohody niekedy v budúcnosti [10]. Ak

sa jedná o európsky typ swapcie, môže tak urobiť len v čase maturity. Rozoznávame dva typy swapcií. **Swapcia platiteľa** dáva držiteľovi právo vstúpiť do takej swapovej dohody, kde bude vyplácať fixný kupón a prímať plávajúci kupón. Naopak **swapcia prímateľa** dáva držiteľovi právo vstúpiť do takej swapovej dohody, kde bude vyplácať plávajúci kupón a prímať fixný kupón.

### 2.2.4 Caplety

Caplet je taká dohoda medzi dvoma stranami, v ktorej kupujúci dostane platbu vo vopred dohodnutom čase, ak výška úrokovej miery prekročila dohodnutú realizačnú cenu. Príkladom capletu môže byť dohoda dostať platbu o rok, ak LIBOR prekročí hranicu 2,5%. Táto platba je rovná rozdielu medzi aktuálnou hodnotou LIBOR-u a 2,5%-tami. V opačnom prípade sa nezrealizuje žiadna platba.

#### Interest rate cap

Interest rate cap (cap - čiapka) môžeme chápať ako sériu úrokových call opcií - capletov. Caplet reprezentuje jednoperiódovú swapciu platiteľa.

#### Blackov model

Jedným z modelov, ktorým budeme oceňovať swapcie (konkrétne caplety) je Blackov model [4]. Cena swapcie platiteľa v čase  $t = 0$  s maturitou  $T_\alpha$ , tenorom  $S = T_\beta - T_\alpha$ , realizačnou cenou  $K$ , nominálnou hodnotou  $N$  a implikovanou volatilitou  $\sigma$  je daná ako

$$PS(0, T_\alpha, T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta, N, K, \sigma) = N \text{Bl}(K, S_{\alpha,\beta}(0), \sigma\sqrt{T_\alpha}, 1) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i), \quad (2.3)$$

kde  $\tau_i$  predstavuje úsek roka medzi  $T_{i-1}$  a  $T_i$  a  $S_{\alpha,\beta}(0)$  je forwardová swapová miera v čase  $t = 0$  a vyzerá nasledovne

$$S_{\alpha,\beta}(0) = \frac{P(0, T_\alpha) - P(0, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i)}.$$

Blackova formula je daná ako

$$\text{Bl}(K, F, \sigma\sqrt{T}, \omega) = F\omega\Phi(\omega d_1(K, F, \sigma\sqrt{T})) - K\omega\Phi(\omega d_2(K, F, \sigma\sqrt{T})),$$

$$d_1(K, F, \sigma\sqrt{T}) = \frac{\ln(F/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2(K, F, \sigma\sqrt{T}) = \frac{\ln(F/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}},$$

pričom  $\omega = 1$  pre call opciu a  $\omega = -1$  pre put opciu. Vzhľadom k tomu, že kalibrácia je založená na *at the money* swapciach, môžeme položiť  $K = S_{\alpha,\beta}(0)$  pre výpočet trhových cien.

## 2.3 Modely krátkodobých úrokových mier

Teoretický výraz krátkodobá (alebo okamžitá) úroková miera  $r$  sa chápe ako úroková miera na nekonečne krátky čas. V praxi sa nahrádza úrokovou mierou na krátky čas, napríklad 1 alebo 3 mesiace [9]. Určenie krátkodobej úrokovej miery ešte nešpecifikuje celú výnosovú krivku. Modely okamžitej úrokovej miery (tzv. Short rate modely) odhadujú  $r$  pomocou riešenia stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dW. \quad (2.4)$$

Ľavá strana rovnice (2.4) -  $dr$  je zmena úrokovej miery za časový úsek  $dt$ . Táto zmena závisí od takzvaného driftu  $\mu(r, t)$  vo vývoji úrokovej miery (čo je trendová, teda deterministická zložka) a volatility  $\sigma(r, t)$ , ktorá určuje charakter náhodných fluktuácií úrokovej miery v okolí driftu. Ostáva vysvetliť Wienerov proces -  $W$ . Je to proces s nezávislými prírastkami, teda ak  $s < t \leq u < v$ , potom  $W(v) - W(u)$  a  $W(t) - W(s)$  sú nezávislé a  $W(t) - W(s)$  sú z normálneho rozdelenia  $N(0, \sqrt{t-s})$ .

Driftová funkcia sa zvyčajne volí ako  $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r)$ , pričom  $\kappa$  a  $\theta$  sú kladné konštanty. Takéto stochastické procesy sa označujú aj Ornstein - Uhlenbeckov mean reversion procesy. Parameter  $\theta$  sa nazýva limitná úroková miera a parameter  $\kappa$  potom predstavuje rýchlosť návratu k limitnej úrokovej miere. Stredná hodnota úrokovej miery je priťahovaná k rovnovážnej hodnote  $\theta$  silou  $\kappa$ .

V tabuľke 2.1 je prehľad niekoľkých Ornstein - Uhlenbeckových mean reversion procesov.

**Tabuľka 2.1:** Jednofaktorové modely okamžitej úrokovej miery [9].

| Model              | Stochastická rovnica pre $r$                        |
|--------------------|-----------------------------------------------------|
| Vašíček            | $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dW$             |
| Dothan             | $dr = \sigma r dw$                                  |
| Brennan-Schwarz    | $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r dW$           |
| Cox-Ingersoll-Ross | $dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW$      |
| Cox-Ross           | $dr = \beta r dt + \sigma r^\gamma dW$              |
| Hull-White         | $dr(t) = [\theta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)dW(t)$ |

## 2.4 Hull-White model

Aby bola možná trhovo konzistentná kalibrácia, musíme použiť model, do ktorého sa ako vstupný údaj zadáva aktuálna časová štruktúra úrokových mier. Zároveň by to mal byť model, ktorý nie je veľmi komplikovaný a má relatívne nízku výpočtovú náročnosť. Týmto podmienkam výborne vyhovuje Hull-White model.

Očakávania trhu o vývoji úrokovej miery zahŕňajú v niektorých situáciách parametre závisiace od času. V jednofaktorovom Hull-White modeli je zavedený drift závisiaci od času, to znamená, že od času bude závisieť limitná úroková miera  $\theta(t)$ , aj miera  $a$ , ktorou sa  $r(t)$  blíži k očakávanej hodnote. Volatilita je tiež deterministickou funkciou času. To zaručuje, že sa model môže zladiť s aktuálnou časovou štruktúrou úrokovej miery.

Hull a White [4] predpokladajú, že okamžitá úroková miera je modelovaná stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr(t) = [\theta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)dW(t), \quad r(0) = r_0 > 0,$$

kde funkcia  $a(t)$  je miera, ktorou sa  $r(t)$  vracia k očakávanej hodnote,  $\sigma(t)$  je volatilita okamžitej úrokovej miery a  $W$  je Wienerov proces.

Výhodou Hull-White modelu je, že existujú explicitné formuly pre bezkupónové dlhopisy a opcie na ne, čo umožňuje priamu kalibráciu. Hlavnou nevýhodou tohto modelu je, že môže produkovať záporné hodnoty úrokovej miery. Za normálnych trhových podmienok je však pravdepodobnosť, že sa to stane veľmi malá.

Nech  $a(t) = a$  a  $\sigma(t) = \sigma$ . Potom

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0, \quad (2.5)$$

kde  $a$  a  $\sigma$  sú pozitívne konštanty a  $\theta(t)$  zvolíme tak, aby model presne zodpovedal aktuálnej časovej štruktúre úrokovej miery.

Z rovnice 2.5 odvodíme vzťah pre  $r(t)$  aplikovaním Itóovej lemy, ktorá zohráva kľúčovú úlohu v oceňovaní finančných derivátov.

**Lema 2.4.1.** *Itóova lema*

Nech  $f(x, t)$  je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná  $x$  je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw,$$

kde  $w$  je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie  $f$  je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia  $f$  vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t)\frac{\partial f}{\partial x}dw.$$

Intuitívny dôkaz, ako aj celá lema je uvedený v [9], na stranách 27 a 28.

Definujme funkciu

$$g(t, r) = e^{at}r.$$

Pomocou Itóovej lemy vypočítame  $d(g(r, t))$  [13]

$$d(e^{at}r) = e^{at}dr + ae^{at}r dt.$$

Za  $dr$  dosadíme vzťah 2.5

$$d(e^{at}) = \theta(t)e^{at}dt + e^{at}\sigma dw.$$

Integrovaním tejto rovnice získavame

$$e^{at}r(t) = r(0) + \int_0^t \theta(s)e^{as} ds + \sigma \int_0^t e^{as} dw(s),$$

čo ďalšími úpravami vedie k

$$r(t) = r(0)e^{-at} + \int_0^t \theta(s)e^{-a(t-s)} ds + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dw(s).$$

Začiatkový čas je náhodný a tak získavame vzťah pre  $r(t)$ :

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t \theta(\tau)e^{-a(t-\tau)} ds + \sigma \int_s^t e^{-a(t-\tau)} dw(\tau). \quad (2.6)$$

Pozrime sa teraz ako vhodne zvoliť funkciu  $\theta$ . Hull-White model má afínnu časovú štruktúru, to znamená, že vytvára krivku okamžitých úrokových mier pomocou bezkupónových dlhopisov [12]. Tá implikuje

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (2.7)$$

kde  $P(t, T)$  je cena bezkupónového dlhopisu s maturitou  $T$  v čase  $t$  a  $A$  a  $B$  riešia rovnice

$$\begin{cases} A_t - \theta(t)AB + \frac{1}{2}\sigma^2 AB^2 = 0, \\ A(T, T) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_t - aB + 1 = 0, \\ B(T, T) = 0. \end{cases}$$

Riešenie pre  $B$  je

$$B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}). \quad (2.8)$$

Riešenie pre  $A$  závisí od funkcie  $\theta$

$$A(t, T) = e^{-\int_t^T \theta(s)B(s, T) ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4a}B(t, T)^2}. \quad (2.9)$$

Teoretické ceny dlhopisov 2.7 chceme napasovať na pozorované ceny dlhopisov na trhu. Je praktické skúsiť to napasovať na forwardové úrokové miery 2.2. Po dosadení 2.8 a 2.9 do 2.7 dostávame

$$-\ln P(0, T) = \int_0^T \theta(s)B(s, T) ds + \frac{\sigma^2}{2a^2}(B(0, T) - T) + \frac{\sigma^2}{4a}B(0, T)^2 + B(0, T)r_0.$$

Derivovaním a využitím vzťahu  $B(T, T) = 0$  a  $\partial_T B - 1 = -aB$  získame

$$f(0, T) = \int_0^T \theta(s)\partial_T B(s, T) ds - \frac{\sigma^2}{2a}B(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a}B(0, T)\partial_T B(0, T) + \partial_T B(0, T)r_0.$$



Túto rovnicu znova derivujeme, čím sa dostávame k

$$\begin{aligned} \partial_T f(0, T) = & \theta(T) + \int_0^T \theta(s) \partial_{TT} B(s, T) ds - \frac{\sigma^2}{2a} \partial_T B(0, T) \\ & + \frac{\sigma^2}{2a} [(\partial_T B(0, T))^2 + B(0, T) \partial_{TT} B(0, T)] + \partial_{TT} B(0, T) r_0. \end{aligned}$$

Kombinovaním týchto rovníc a využitím toho, že  $a\partial_T B + \partial_{TT} B = 0$  dostávame

$$af(0, T) + \partial_T f(0, T) = \theta(T) - \frac{\sigma^2}{2a} (aB + \partial_T B) + \frac{\sigma^2}{2a} [aB\partial_T B + (\partial_T B)^2 + B\partial_{TT} B].$$

Dosadíme vzťah pre  $B$  a zjednodušíme. Dostávame sa ku nasledujúcemu vzťahu

$$af(0, T) + \partial_T f(0, T) = \theta(T) - \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2aT}),$$

čo je ekvivalentné s

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial T} + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}). \quad (2.10)$$

**Lema 2.4.2.** *Nech trhovú cenu dlhopisov  $p^*(0, T)$ ,  $T > 0$  je dva krát diferencovateľná. Zvolením funkcie  $\theta$  podľa 2.10 vznikne časová štruktúra  $p(0, T)$  taká, že  $p(0, T) = p^*(0, T)$  pre všetky  $T > 0$ .*

Zvolením funkcie  $\theta$  podľa 2.10 pre pevné  $a$  a  $\sigma$  chceme odhadnúť teoretické ceny dlhopisov, preto potrebujeme dosadiť funkciu  $\theta$  do rovnice 2.9. Po integrovaní dosadíme výsledok a rovnicu 2.8 do rovnice 2.7. Po úpravách sa dostávame k nasledujúcej vete [12]:

**Lema 2.4.3.** *Uvažujme Hull-White model s pevnými parametrami  $a$  a  $\sigma$ . Obrátením výnosovej krivky tak, že funkciu  $\theta$  zvolíme podľa 2.10 dostávame vzťah pre ceny dlhopisov*

$$p(t, T) = \frac{p^*(0, T)}{p^*(0, t)} e^{B(t, T)f^*(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t, T)(1 - e^{-2at}) - B(t, T)r(t)}, \quad (2.11)$$

príčom  $B$  je dané rovnicou 2.8 a  $f^*$  je označenie pre pozorovanú forwardovú úrokovú mieru, príčom platí  $f^*(t, T) = \frac{-\partial \ln p^*(t, T)}{\partial T}$ .

Toto explicitné vyjadrenie (2.11) pre ceny bezkupónových dlhopisov je veľmi užitočné a vedie k vzorcu pre Európske opcie a dlhopisy, ktoré zase vedú k explicitnej formule pre ceny swapcií. Tie sú využívané pri kalibrácii modelov úrokových mier [4].

**Veta 2.4.4.** V Hull-White modeli je v čase  $t$  cena európskej call opcie, s expiračnou cenou  $K$  a časom do maturity  $T$ , na dlhopis, ktorý maturuje v čase  $S$  daná vzorcom

$$ZBC(t, T, S, K) = P(t, S)\phi(h) - KP(t, T)\phi(h - \sigma_p), \quad (2.12)$$

kde

$$\sigma_p = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(T-t)}}{2a}} B(T, S),$$

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{P(t, S)}{P(t, T)K} + \frac{\sigma_p}{2}.$$

Pre cenu európskej put opcie na dlhopis s rovnakými parametrami ako v predchádzajúcom prípade podľa HullWhite modelu platí

$$ZBP(t, T, S, K) = KP(t, T)\phi(-h + \sigma_p) - P(t, S)\phi(-h).$$

Pozrime sa na európsku swapciu ako na opciu na kupónový dlhopis. Tento fakt spolu s Jamshidianovým rozkladom [11], ktorý nám dáva cenu európskej opcie na kupónový dlhopis, vedú k nasledujúcemu vzorcu pre cenu swapcií

$$PS(t, T, t_1, \dots, t_n, N, K) = N \sum_{i=1}^n c_i ZBP(t, T, t_i, K_i), \quad (2.13)$$

kde  $PS$  je cena swapcie platiteľa s expiračnou cenou  $K$ , maturitou v čase  $T$  a nominálnou hodnotou  $N$ , ktorá dáva držiteľovi právo vstúpiť v čase  $T$  do interest rate swap dohody. Tento interest rate swap sa vypláca v časoch  $t_1, \dots, t_n$ , kde  $t_1 > T$ , pričom držiteľ platí fixný podiel z  $K$  a dostáva sumu odvíjajúcu sa od LIBOR-u (London Interbank Offered Rate).  $\tau_i$  je časť roka od  $t_{i-1}$  do  $t_i$ , pre  $i = 1, \dots, n$ ,  $c_i = K\tau_i$  pre  $i = 1, \dots, (n-1)$  a  $c_n = 1 + K\tau_n$ .

$K_i = A(T, t_i)e^{-B(T, t_i)r^*}$ , kde  $r^*$  je hodnota okamžitej úrokovej miery v čase  $T$  a platí

$$\sum_{i=1}^n c_i A(T, t_i) e^{-B(T, t_i)r^*} = 1$$

Pri kalibrácii modelu 2.5 hľadáme deterministickú funkciu  $\theta(t)$  tak, aby model presne opisoval aktuálnu časovú štruktúru úrokových mier a parametre  $a$  a  $\sigma$  tak, aby čo najlepšie napasovali model na trhové ceny swapcií. Inými slovami,  $a$  a  $\sigma$  sú hodnoty, pre ktoré je minimalizovaná suma štvorcov rozdielov medzi trhovými cenami a cenami modelu. Pre Hull-White model je modelovaná cena swapcií daná rovnicou 2.13.

---

---

## KAPITOLA 3

---

# SIMULÁCIA EKONOMICKÝCH SCENÁROV

### 3.1 Trhové dáta

Dáta s ktorými budeme pracovať sme získali zo stránky [www.bloomberg.com](http://www.bloomberg.com) a sú zo dňa 27.1.2014.

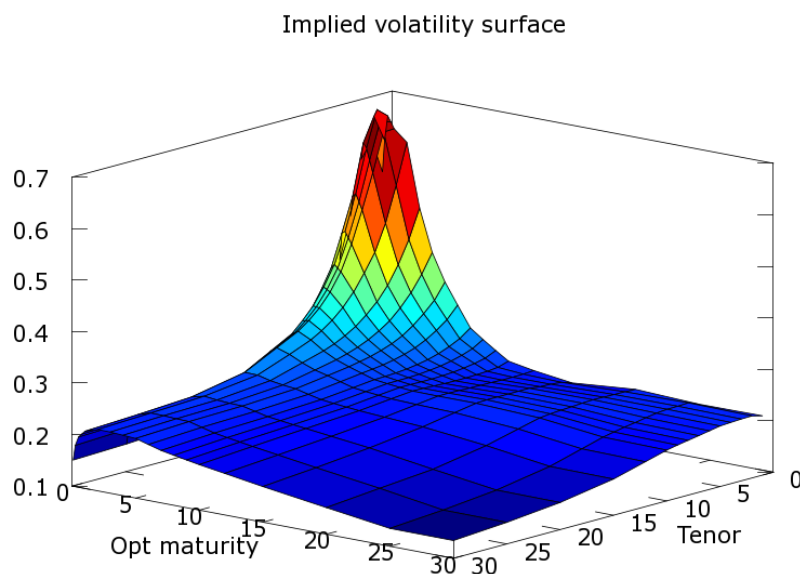
#### 3.1.1 Implikovaná volatilita

Ak chceme zistiť cenu opcie, či swapcie pomocou vybraného modelu (napr. Black-Scholesovho), ako vstupný parameter potrebujeme aj volatilitu. Pre implikovanú volatilitu platí, že teoretická cena európskej opcie  $V(S, t, \sigma)$  je v čase  $t$  a pre danú hodnotu podkladového aktíva  $S$  zhodná s reálnou cenou opcie  $V_{real}(t)$  [9]. Implikovaná volatilita pre danú opciu (so splatnosťou v čase  $T$  a expiračnou cenou  $E$ ) sa hľadá riešením implikovanej rovnice

$$V_{real}(t) = V(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}).$$

K dispozícii máme údaje pre implikované volatility odvodené z trhových cien swapcií s rôznymi tenormi (od jedného roku po 30 rokov) a rôznymi maturitami (od jedného mesiaca po 30 rokov) v mene euro. Tieto údaje vytvárajú maticu implikovaných

volatilit, pričom v každom riadku sú údaje pre swapciu s jednou konkrétnou maturitou a v stĺpcoch tohto riadku sú implikované volatility pre rôzne tenory. Na obr. 3.1 je plošný graf, v ktorom sú vykreslené implikované volatility v závislosti od tenoru a maturity. Môžeme si všimnúť, že s klesajúcim tenorom swapcie rastie implikovaná volatilita.



Obr. 3.1: Implikované volatility

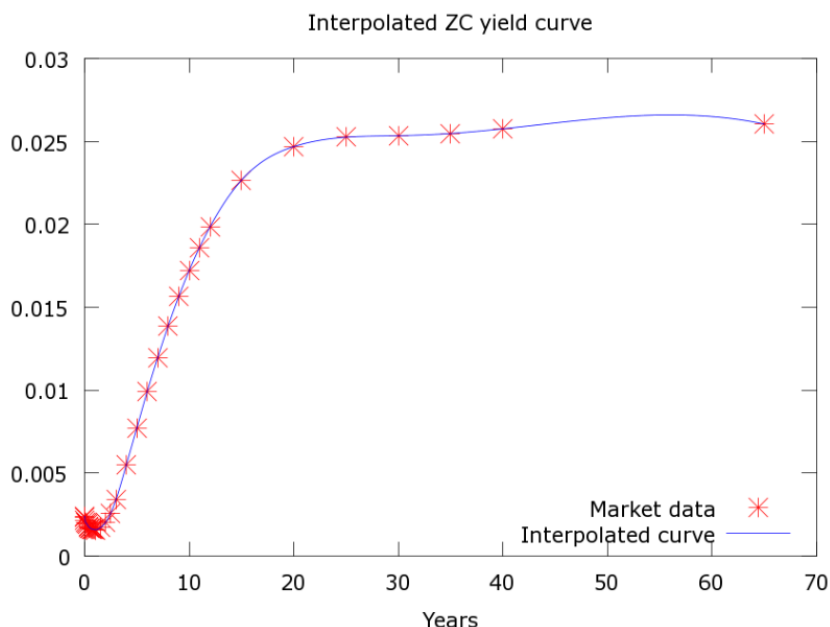
### 3.1.2 Swapová úroková krivka

Druhým potrebným parametrom pre kalibráciu nášho modelu je aktuálna časová štruktúra úrokových mier. Získali sme dáta pre úrokové miery, ktoré sú vyvedené z tzv. OIS swapov (z angl. Overnight indexed swap).

#### Overnight indexed swap

Overnight indexed swap je swap, ktorého plávajúci kupón závisí od geometrického priemeru *overnight* sadzby (mohli by sme to preložiť ako "ceznočná" sadzba) na každý deň platobného obdobia. Takéto sadzby sú typické pre nezaistené požičiavanie si medzi bankami počas noci, napríklad tzv. Federal fund rate pre US doláre, EONIA pre euro, či SONIA pre britskú libru. Výhoda týchto swapov oproti swapom, ktorých plávajúci kupón závisí od EURIBOR-u je, že majú širokú škálu tenorov. Tým pádom máme

k dispozícii údaje pre úrokové miery pre oveľa dlhšie obdobie. V našom prípade sú to úrokové miery, ktoré siahajú až 65 rokov dopredu. Tieto údaje opisujú aktuálnu časovú štruktúru úrokových mier v diskretných bodoch, preto použijeme interpoláciu vhodným splineom a získame tak spojitú časovú štruktúru úrokových mier. Na obrázku 3.2 je znázornený vývoj úrokových mier, s ktorým budeme pracovať.



**Obr. 3.2:** Aktuálna časová štruktúra úrokových mier.

## 3.2 Kalibrácia modelu

Generátor ekonomických scenárov, ktorý sme vytvorili generuje vývoj krátkodobej úrokovej miery s použitím Hull-White (2.4) jednofaktorového modelu kalibrovaného na ceny derivátov úrokovej miery (3.1). Numerické procedúry pracujú s diskretnou verziou stochastickej diferenciálnej rovnice 2.5, parciálne derivácie sú aproximované bodovými centrálnymi konečnými diferenciálmi.

Predmetom kalibrácie modelu je odhad parametrov  $a$  a  $\sigma$ , ktorý je konzistentný s trhom (ide o tzv. rizikovo neutrálny odhad). Táto vlastnosť sa dá zaručiť kalibráciou modelu na ceny derivátov úrokovej miery.

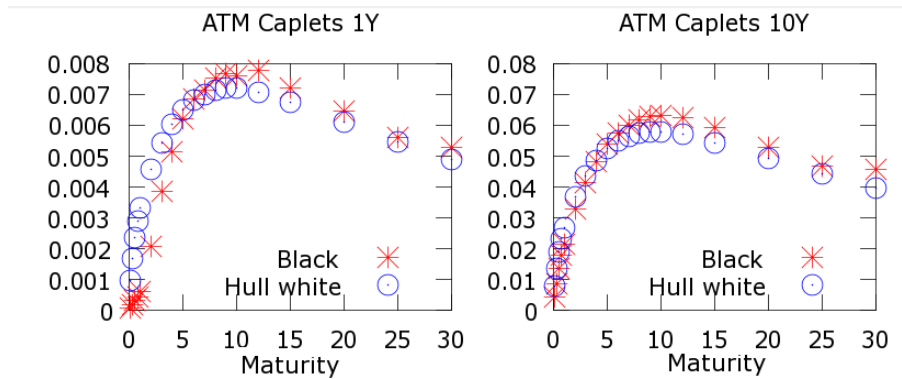
Dáta implikovaných volatilit vyuzijeme na výpočet cien swapcií použitím Blackovho modelu 2.2.4 pre cenu swapcií 2.3. Ceny swapcií, ktoré týmto spôsobom dostaneme

budeme porovnávať s cenami swapcií, ktoré získame použitím Hull-White modelu 2.13. Budeme hľadať také parametre  $a$  a  $\sigma$ , pre ktoré budú ceny swapcií vypočítané Hull-White modelom najbližšie cenám vypočítaným Blackovým modelom. Na hľadanie takýchto cien využijeme metódu najmenších štvorcov a teda riešime minimalizačnú úlohu

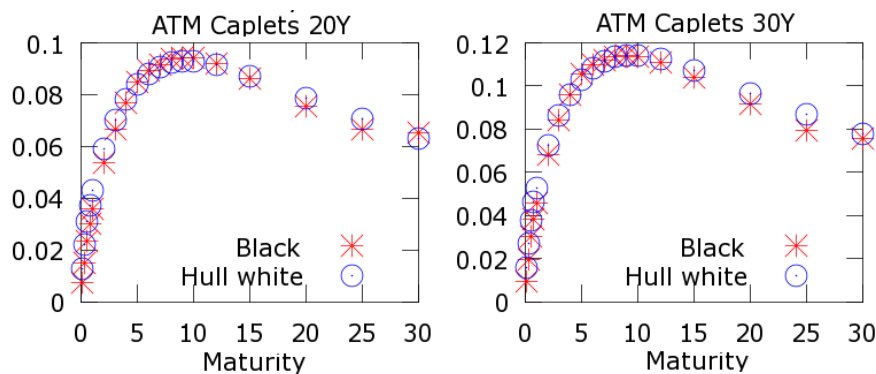
$$\min L(a, \sigma) = \sum_{i=1}^M (PS(0, T_\alpha, T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta, N, K, \sigma) - PS(t, T, t_1, \dots, t_n, N, K))^2,$$

kde  $M$  je počet derivátov na trhu, dostupných pre potreby kalibrácie.

Na obrázkoch 3.3 a 3.4 sú znázornené ceny swapcií vypočítané pomocou oboch modelov pre rôzne tenory - 1, 10, 20 a 30 rokov. Parametre  $a$  a  $\sigma$  sa rovnajú  $a = 0,049835$ ,  $\sigma = 0,0087154$ .



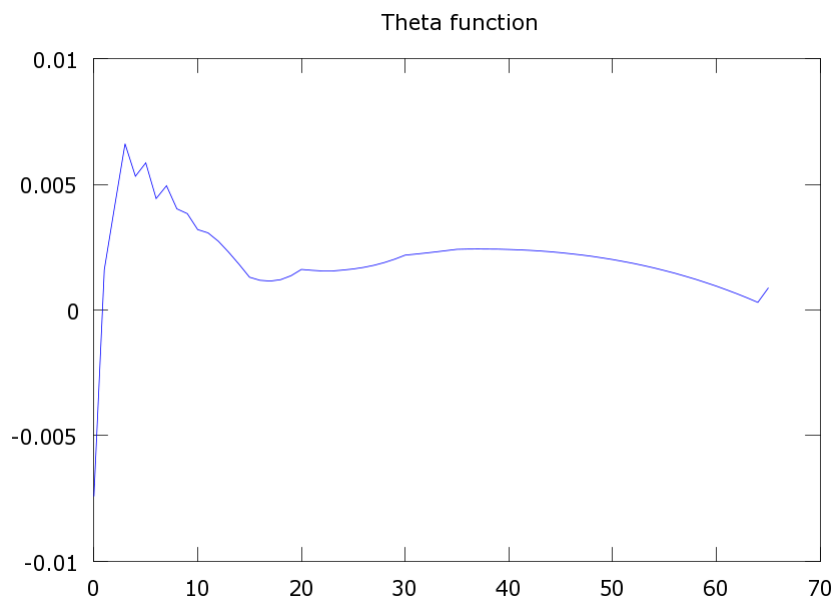
**Obr. 3.3:** Porovnanie cien swapcií pomocou Hull-White modelu (červené hviezdčky) a Blackovho modelu (modré krúžky) s tenormi 1 a 10 rokov.



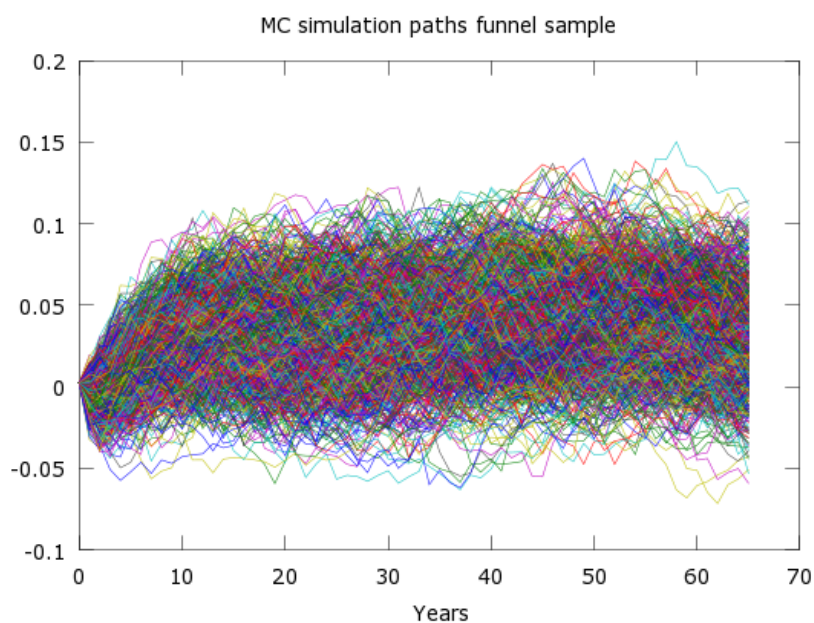
**Obr. 3.4:** Porovnanie cien swapcií pomocou Hull-White modelu a Blackovho modelu s tenormi 20 a 30 rokov.

Tieto parametre ďalej použijeme na simulovanie krátkodobej úrokovej miery Hull-White modelom 2.6. Modelujeme krátkodobú úrokovú mieru na obdobie 65 rokov do-

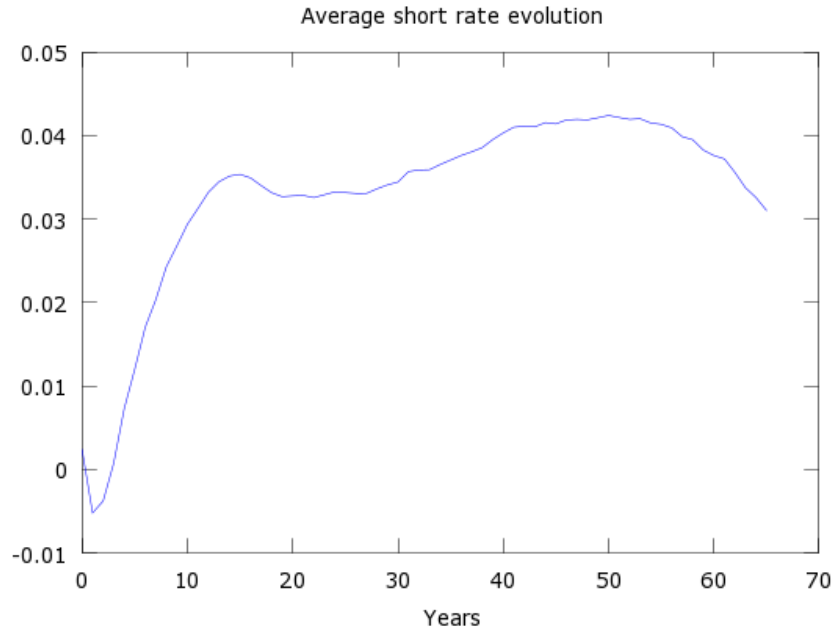
predu, pričom simulácia prebehne 1000 krát a časový krok  $dt$  medzi dvoma obdobiami je jeden rok (obr. 3.6). Z výsledných tisíc trajektórií vypočítame priemernú hodnotu v každom bode a získame tak priemerný možný vývoj krátkodobej úrokovej miery (obr. 3.7). Na obrázku 3.5 je znázornený vývoj funkcie  $\theta$  pre vypočítané parametre.



**Obr. 3.5:** Vývoj funkcie  $\theta$  pre parametre  $a = 0,049835$ ,  $\sigma = 0,0087154$ .



**Obr. 3.6:** Budúce možné vývoje krátkodobej úrokovej miery.



**Obr. 3.7:** Priemerná hodnota krátkodobej úrokovej miery.

Zmysel trhovho konzistentného oceňovania je nájsť hodnotu záruk v poistných zmluvách, ktorá je konzistentná s hodnotou, ktorú by mali, ak by sa s nimi obchodovalo na trhu. Preto by mala byť konzistentná s trhom danými cenami finančných derivátov, ktoré sú podobné zárukám v poistných zmluvách. Pozrime sa, ako blízko sú ceny, ktoré odvodíme pomocou našej simulácie k pozorovaným trhovým cenám použitým na kalibráciu modelu.

V Hull-White modeli sa predpokladá, že budúci vývoj každého bodu výnosovej krivky je úplne opísaný budúcim vývojom krátkodobej úrokovej miery, kde pre rizikovo neutrálne ceny diskontných dlhopisov s rôznymi maturitami (diskontné faktory) platí vzťah

$$P(t, T) = E[e^{-\int_t^T r_s(ds)}], \quad (3.1)$$

pričom  $r_0$  je aktuálna hodnota krátkodobej úrokovej miery.

Simulovaním krátkodobej úrokovej miery sme získali maticu veľkosti 65x1000 (pretože sme simulovali časové obdobie 65 rokov s krokom 1 rok a prebehlo 1000 simulácií), ktorá vyzerá nasledovne:



$$\begin{pmatrix} r_1(1) & r_1(2) & \cdots & r_1(65) \\ r_2(1) & r_2(2) & \cdots & r_2(65) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1000}(1) & r_{1000}(2) & \cdots & r_{1000}(65) \end{pmatrix}$$

Každý riadok tejto matice reprezentuje jednu simuláciu hodnôt krátkodobej úrokovej miery a každý stĺpec reprezentuje jeden rok. Aby sme vedeli porovnať výsledky našej kalibrácie s trhovými dátami, potrebujeme pomocou krátkodobých úrokových mier, ktoré sme odhadli, vytvoriť časovú štruktúru úrokových mier a porovnať ju s dátami, ktoré sme získali z trhu.

Využijeme rovnicu 2.1 pre úrokové miery, v ktorej vystupuje cena diskontného dlhopisu.

Položme  $t$  rovné 0. Cena diskontného dlhopisu odvodená z krátkodobých úrokových mier je potom

$$P(0, T) = E[e^{-\int_0^T r_s(ds)}],$$

vzťah pre úrokovú mieru 2.1

$$r(0, T) = \frac{-\ln P(0, T)}{T} \quad (3.2)$$

a cena diskontného dlhopisu je

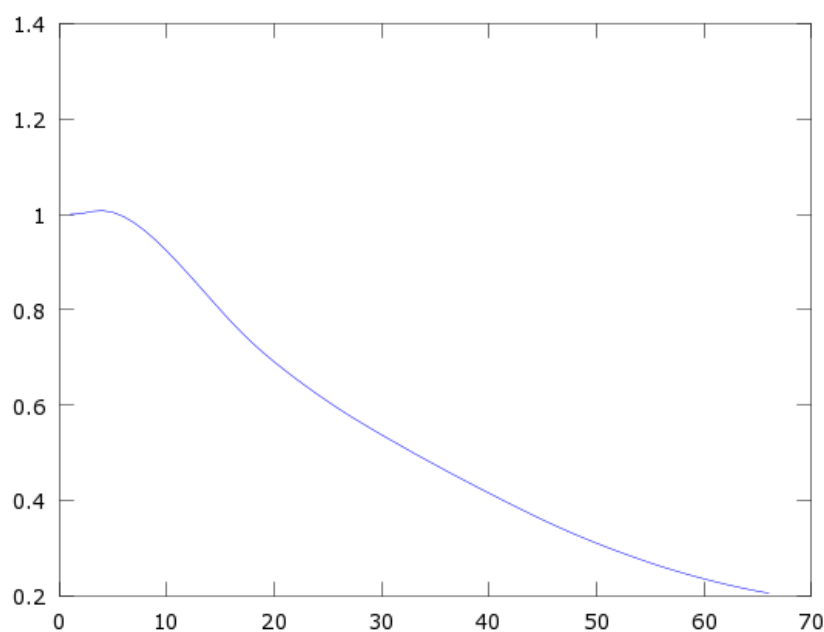
$$P(0, T) = e^{-r(0, T) \cdot T}.$$

Vypočítame diskontné faktory  $e^{-\int_0^T r_s(ds)}$  pre všetky simulácie a pre každý rok, pričom integrál nahradíme sumou a vytvoríme tak maticu diskontných faktorov.

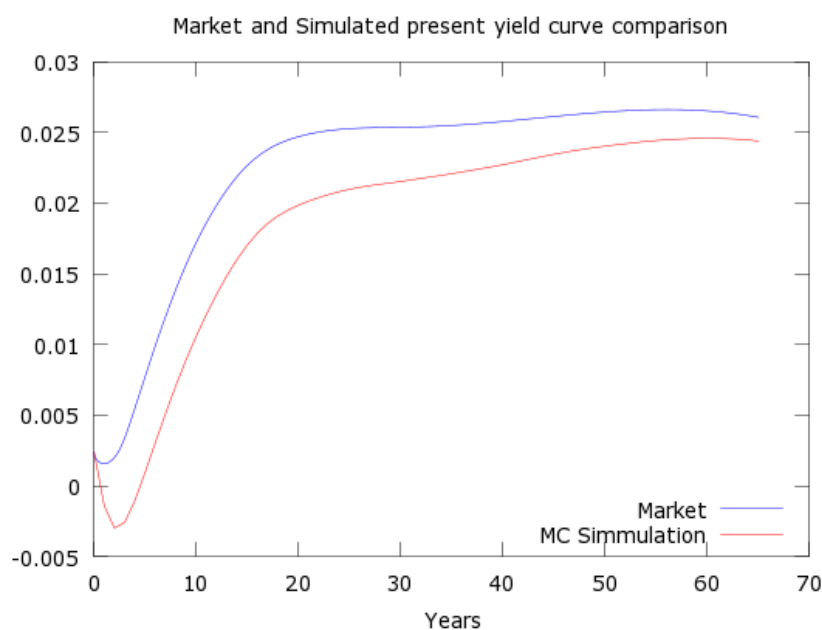
$$\begin{pmatrix} e^{-r_1(1)} & e^{-(r_1(1)+r_1(2))} & \cdots & e^{-\sum_{i=1}^{65} r_1(i)} \\ e^{-r_2(1)} & e^{-(r_2(1)+r_2(2))} & \cdots & e^{-\sum_{i=1}^{65} r_2(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-r_{1000}(1)} & e^{-(r_{1000}(1)+r_{1000}(2))} & \cdots & e^{-\sum_{i=1}^{65} r_{1000}(i)} \end{pmatrix}$$

Priemer z hodnôt tejto matice je vykreslený na obr. 3.8.

Pomocou takto získaného diskontného faktora (jeho priemernej hodnoty) vypočítame dosadením do 3.2 časovú štruktúru úrokových mier a porovnáme ju s trhovými dátami (obr. 3.9).



Obr. 3.8: Priemerná hodnota diskontného faktora.



Obr. 3.9: Porovnanie trhom danej časovej štruktúry úrokových mier (modrá farba) a časovej štruktúry úrokových mier získanej pomocou modelu Hull-White (červená farba).

### Reziduálna suma štvorcov

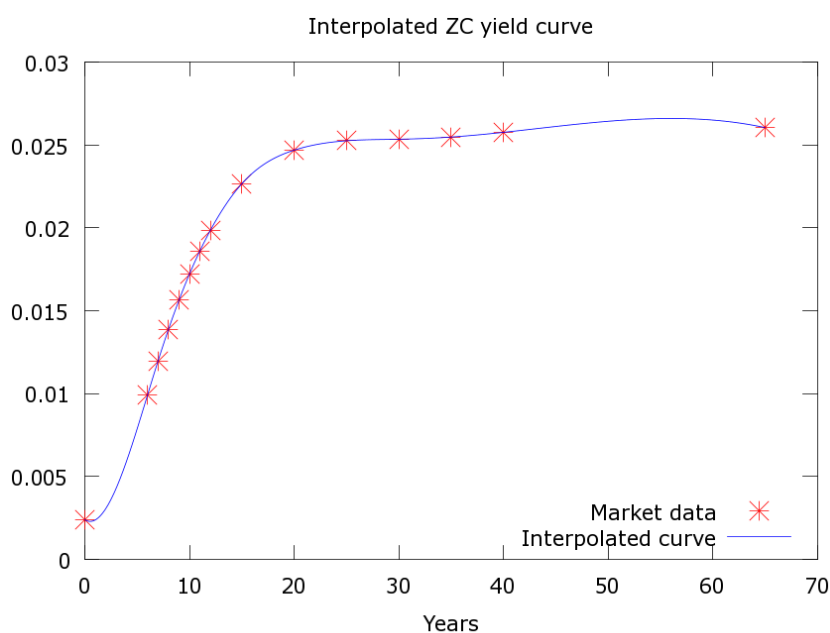
Reziduálna suma štvorcov (RSS) je miera, ktorá ukazuje ako veľmi sa líšia skutočné dáta od odhadnutého modelu. Malá RSS indikuje dobrý odhad. RSS je daná

$$RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2,$$

kde  $y_i$  je  $i$ -ta skutočná hodnota premennej, ktorú odhadujeme a  $f(x_i)$  je odhadnutá hodnota  $i$ -tej premennej.

Vypočítame RSS pre naše dáta. Rozdiel skutočnej a odhadovanej hodnoty budeme počítať v každom roku, teda  $i = 1, 2, \dots, 65$ . V tomto prípade  $RSS=0,00052977$ .

Vidíme, že Hull-White model odhaduje v prvých rokoch zápornú úrokovú mieru, čo je spôsobené tým, že trhová úroková miera je v prvých rokoch veľmi nízka. Aby sme sa vyhli zápornej úrokovej miere vo výsledkoch Hull-White modelu, skúsime vynechať niekoľko údajov z trhových dát tak, aby sme sa zbavili klesania hodnoty úrokovej miery v prvých rokoch (tento fakt môžeme pozorovať na obrázku 3.2, kde sa dá všimnúť "háčik" na začiatku krivky úrokových mier). Takto upravené dáta sú zobrazené na obr. 3.10.

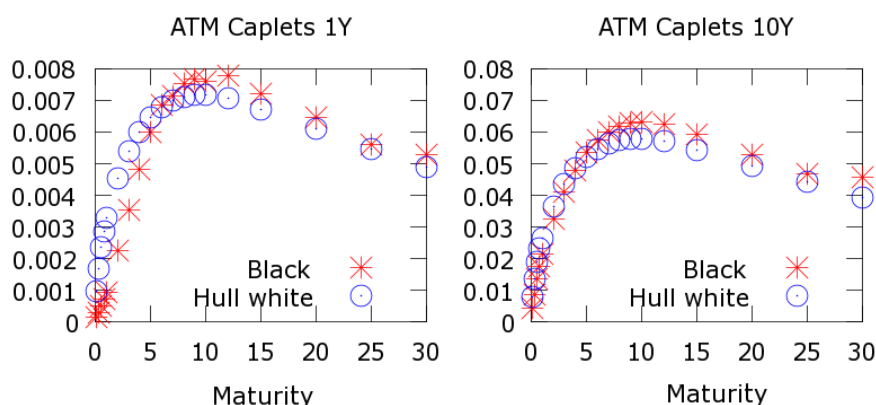


**Obr. 3.10:** Aktuálna časová štruktúra úrokových mier s vynechanými dátami.

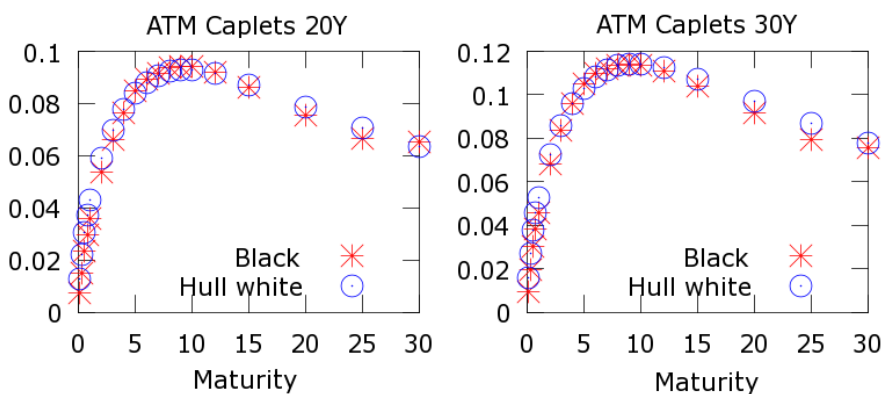
Ako v predošlej časti, aj teraz získame odhad parametrov  $a$  a  $\sigma$  minimalizovaním sumy štvorcov medzi cenami odhadnutými Blackovým a Hull-White modelom (obr. 3.11 a 3.12). Parameter  $a = 0,0495653$  a  $\sigma = 0,0086812$ .

Po 1000 simuláciach krátkodobej úrokovej miery s časovým krokom  $dt$  jeden rok na obdobie 65 rokov (obr. 3.14) získame priemernú hodnotu krátkodobej úrokovej miery (obr. 3.15).

Prepočtom na diskontné faktory získame časovú štruktúru úrokových mier a môžeme



**Obr. 3.11:** Porovnanie cien swapcií pomocou Hull-White modelu (červené hviezdičky) a Blackovho modelu (modré krúžky) s tenormi 1 a 10 rokov.



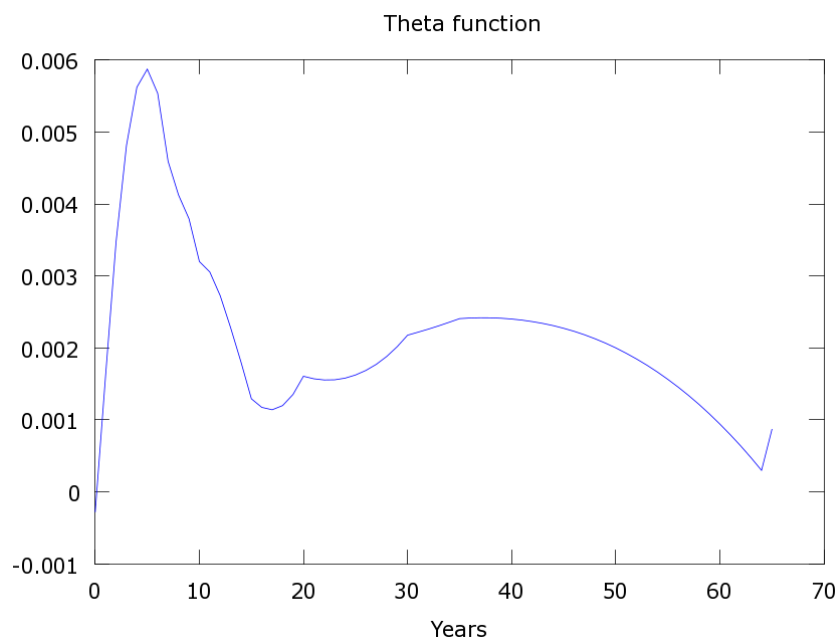
**Obr. 3.12:** Porovnanie cien swapcií pomocou Hull-White modelu (červené hviezdičky) a Blackovho modelu (modré krúžky) s tenormi 20 a 30 rokov.

ju porovnať s trhovými dátami (obr. 3.16).

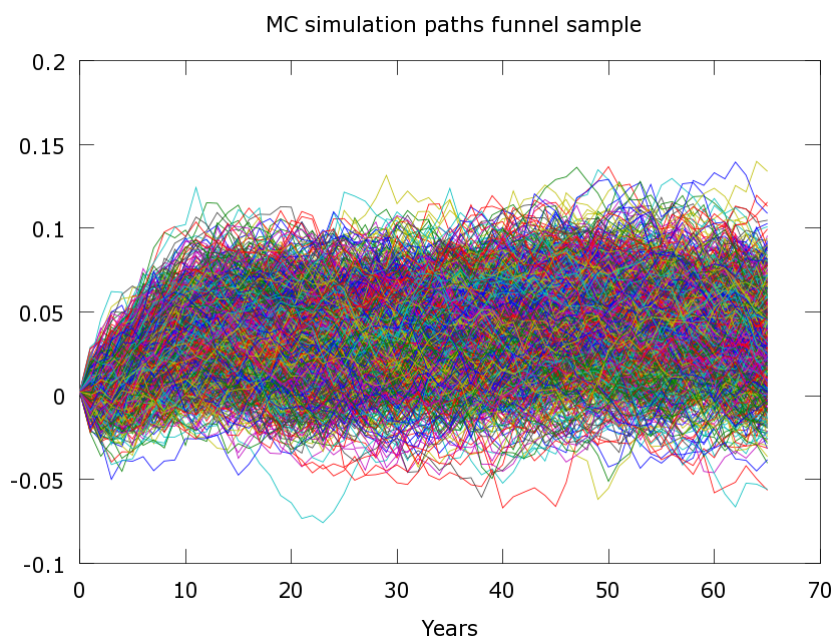
Reziduálna suma štvorcov  $RSS = 0,000023752$ . Môžeme si všimnúť že je to o rád menšie číslo ako v predošlom prípade, čo značí, že takto zvolené dáta ponúkajú lepší odhad budúceho vývoja krátkodobých úrokových mier.

Skúsime ešte menší časový krok  $dt$  rovný pol roku a počet simulácií zvýšime na 1500, aby sme dosiahli väčšiu presnosť (obr. 3.17). Hodnota RSS sa očakávateľne ešte znížila na 0,000016366.

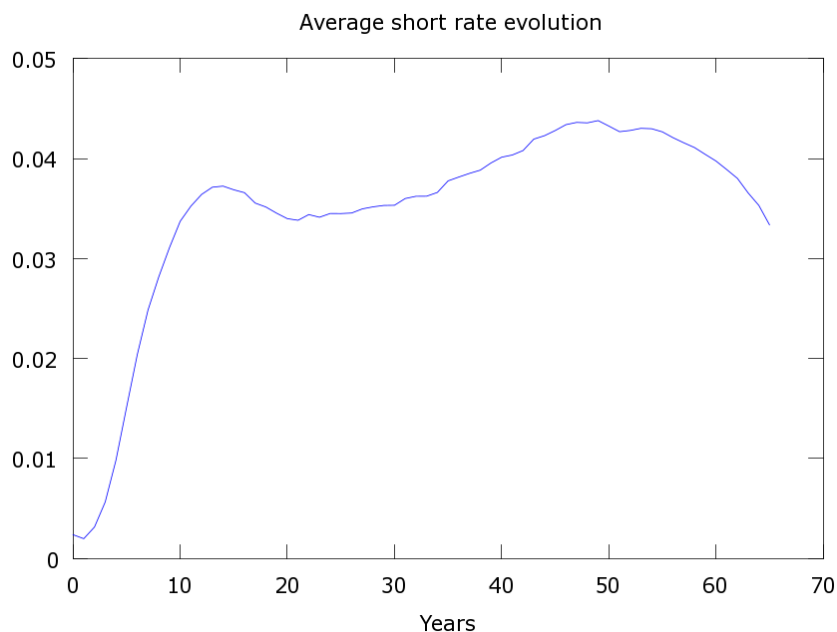
Obrázok, ako aj nízka hodnota RSS naznačujú, že takto nakalibrované parametre ponúkajú pomerne presné napasovanie na trhom určenú časovú štruktúru úrokových mier. Získané hodnoty krátkodobej úrokovej miery môžu poisťovne použiť na ocenenie záruk v poisťných zmluvách, ktoré bude konzistentné s trhom.



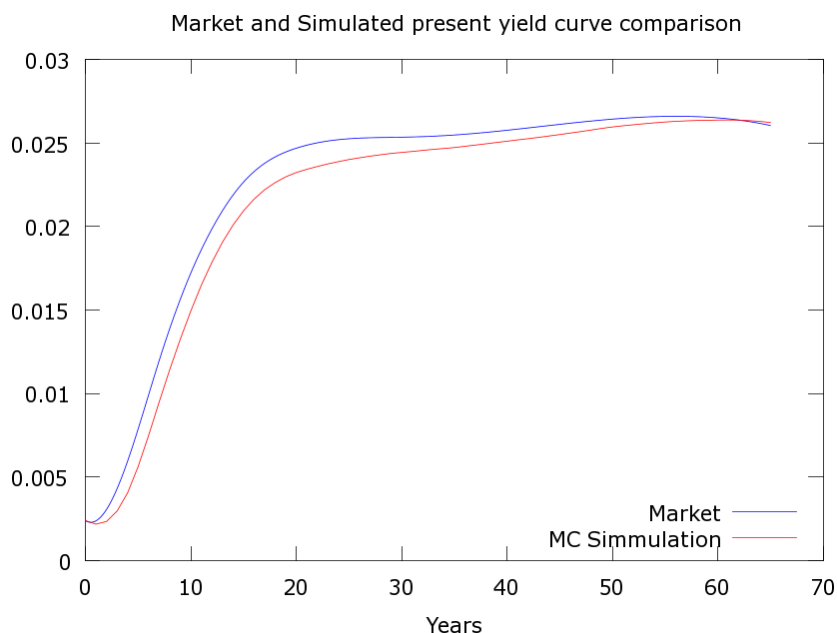
**Obr. 3.13:** Vývoj funkcie  $\theta$  pre parametre  $a = 0,0495653$  a  $\sigma = 0,0086812$ .



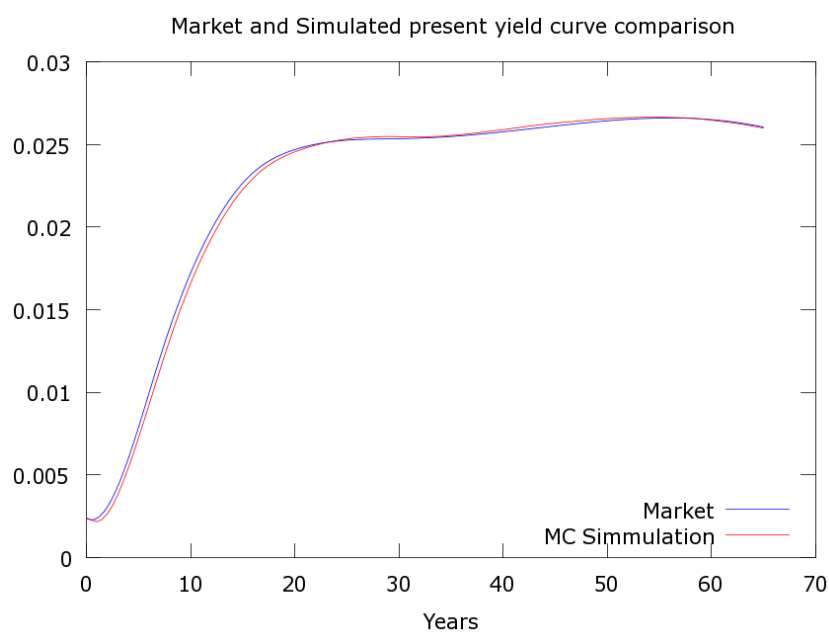
**Obr. 3.14:** Budúce možné vývoje krátkodobej úrokovej miery (1000 simulácií) s časovým krokom  $dt$  jeden rok.



**Obr. 3.15:** Priemerná hodnota krátkodobej úrokovej miery pre 1000 simulácií, s časovým krokom  $dt$  jeden rok.



**Obr. 3.16:** Porovnanie trhom danej časovej štruktúry úrokových mier (modrá farba) a časovej štruktúry úrokových mier získanej pomocou modelu Hull-White (červená farba) pre 1000 simulácií s časovým krokom  $dt$  jeden rok,  $RSS = 0,000023752$ .



**Obr. 3.17:** Porovnanie trhom danej časovej štruktúry úrokových mier (modrá farba) a časovej štruktúry úrokových mier získanej pomocou modelu Hull-White (červená farba) pre 1500 simulácií s časovým krokom  $dt$  pol roka,  $RSS = 0,000016366$

---

## ZÁVER

Cieľom tejto práce bolo spracovanie problematiky riadenia trhových rizík v poisťovníctve v súlade s novou regulatórnou legislatívou Solvency II. Zameriali sme sa na riadenie aktív a pasív životnej poisťovne a riziko plynúce z precenenia úrokovu citlivých zložiek portfólia pri pohybe úrokových mier. Na modelovanie možných scenárov úrokových mier sme použili jednofaktorový Hull-White model.

Podrobne sme opísali sme konštrukciu trhovo konzistentného generátora ekonomických scenárov, ktorý môže byť použitý na oceňovanie záruk v poisťovníctve, špeciálne pre zmluvy s vnorenými opciami. GES bol kalibrovaný na trhové ceny swapcií a trhom danú implikovanú volatilitu.

Pri kalibrácii modelu sme sa stretli s problémom, kedy Hull-White model generoval záporné úrokové miery. To bolo spôsobené nízkymi hodnotami úrokových mier odporovaných na trhu. Problém sme sa snažili vyriešiť a podarilo sa nám vytvoriť pomerne presnú kalibráciu na trhové dáta. Výsledkom kalibrácie sú parametre  $a$  a  $\sigma$ , ktoré vystupujú v Hull-White modeli.

Ďalším cieľom práce bolo zapracovanie faktora inflácie a riešenie problému výberu reprezentatívnych trajektórií. Tento cieľ sme nakoniec nenaplnili a ostáva tak ako vyhládka pre ďalšiu prácu.



---

# LITERATÚRA

- [1] Oriščiková, M.: *Modelovanie ekonomického kapitálu v poisťovni*, Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, diplomová práca.
- [2] Doff, R.: *Risk Management for Insurers: Risk Control, Economic Capital and Solvency II*, Londýn : Risk Books, a Division of Incisive Financial Publishing Ltd, 2007. ISBN 978 1 904339 793.
- [3] Zákon č.8/2008 o poisťovníctve z 28 novembra 2007, Tretia časť: Požiadavky na podnikanie v poisťovníctve, §23 Technické rezervy poisťovne a zaistovne, str. 32 (prístupný na internete 25.1.2014)
- [4] Baldvinsdóttir, E. K., Palmborg, L.: *On Constructing a Market Consistent Economic Scenario Generator*, March 4, 2011.
- [5] Šlahor, Ľ., Žvachová, N.: *Kapitálová primeranosť bánk a poisťovní*, KARTPRINT, 2011. s. 225. ISBN 978-80-88870-94-4.
- [6] Sandström, A. : *Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers: Theory and Practice*, Boca Raton : Chapman and Hall/CRC, 2010. s. 1113. ISBN-13: 978-1439821305.
- [7] Národná banka Slovenska: Piata kvantitatívna dopadová štúdia (QIS 5). [www.nbs.sk](http://www.nbs.sk). Online Jún 2011.

- 
- [8] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, epos, ISBN 80-8057-651-3.
- [9] Ševčovič, D., Stehlíková, B., Mikula, K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2009.
- [10] Kwok, Y.K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer Finance.
- [11] Jamshidian, F.: *An Exact Bond Option Pricing Formula*, The Journal of Finance 44:1,1989, str. 205-209.
- [12] Bjoerk, T.: *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford, ISBN 0-19-877518-0.
- [13] Carb, P.: *Interest Rate Models: Hull-White*, Continuous Time Finance, Bloomberg LP and Courant Institute, NYU.