UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ZAISTENÉ STRATÉGIE PRE SPORENIE S POSTUPNÝMI PRÍSPEVKAMI

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2014 Bc. Marek CIESAR

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ZAISTENÉ STRATÉGIE PRE SPORENIE S POSTUPNÝMI PRÍSPEVKAMI

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2014 **Bc. Marek CIESAR**

59862613

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Marek Ciesar
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Zaistené stratégie pre sporenie s postupnými príspevkami.

Cieľ: Cieľom práce bude návrh stratégií na báze maximalizácie očakávanej užitočnosti majetku na konci sporenia. V tejto oblasti existujú výsledky pre jednorázovú investíciu (vedie to k OBPI stratégiám). V prípade postupného sporenia je však potrebné tieto stratégie modifikovať.

Vedúci: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 25.01.2013

Dátum schválenia: 04.02.2013

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.... študent

.... vedúci práce

Poďakovanie

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať vedúcemu mojej diplomovej práce doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za ochotu, pomoc a cenné pripomienky pri písaní tejto práce. Zároveň sa chcem poďakovať mojej budúcej manželke za podporu a oporu.

Abstrakt

CIESAR, Marek: Zaistené stratégie pre sporenie s postupnými príspevkami [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD., Bratislava 2014, 56s

Táto práca sa zaoberá zaistenými stratégiami s postupnými príspevkami. Téma zaistených stratégií je dobre preskúmaná v prípade jednorazovej investície. Cieľom práce je využiť tieto poznatky a navrhnúť stratégiu pre prípad postupných príspevkov. Navrhnutú stratégiu vylepšíme pridaním opcií, ktoré slúžia na získavanie prostriedkov na nákup rizikového aktíva za bezrizikovú úrokovú mieru. Základom uvedenej stratégie je CPPI metóda. S použitím opcií sa však často stáva príliš rizikovou pre investora s averziou k riziku. V práci je navrhnutá podmienka obmedzujúca využívanie opcií, ktorá pri správne zvolených parametroch stratégie zvyšuje jej kvalitu. Kvalitu stratégie meriame pomocou simulácii v programe Matlab, pričom sa zameriame najmä na určitostný ekvivalent investora s určenou mierou averzie k riziku a na kvantily rozdelenia koncovej hodnoty investície. Navrhnutá stratégia nie je optimálna, ale v práci sú popísané vplyvy jednotlivých parametrov aj spôsob, ako voliť vhodné parametre podľa investorovej averzii k riziku.

Kľúčové slová: CPPI, postupné príspevky, zaistené stratégie, poistenie portfólia, opcie, simulácie

Abstract

CIESAR, Marek: Portfolio insurance strategies with gradual contributions [Master thesis], Comenius University Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics, and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Thesis Consultant: doc. Mgr. Igor Melicherčík, Bratislava 2014, PhD., 56p

This thesis is focused on portfolio insurance in a model with gradual contributions. Portfolio insurance is well explored area of financial mathematics, but only in case of one-shot investment. This thesis aims to use this knowledge and design a strategy for a scenario with gradual contributions. This strategy is further improved by using call options in order to obtain risky asset by borrowing for risk-free interest rate. The core of this strategy is CPPI method. When using options as a leverage, CPPI method often becomes too risky for risk-averse investor. We introduce a simple constraint to limit the option usage, which improves the performance of our strategy under given conditions on CPPI parameters. The performance of the strategy is tested using simulations in Matlab, focusing on the certainty equivalent of investor with a given risk aversion. We also measure quantiles of distribution of investment's terminal value. Strategy introduced in this thesis is not optimal, but we described the influence of individual parameters and also a way to choose proper parameters according to investor's risk-aversion.

Keywords: CPPI, gradual contributions, hedging strategies, portfolio insurance, options, simulations

Obsah

Úvod

Odkedy sa s akciami začalo výraznejšie obchodovať, lákajú investorov na svoj zaujímavý výnos. Skutočne, oproti dlhopisom majú akcie vyšší výnos, ale ich výnos nie je konštantný a iba ťažko sa dá vopred odhadnúť. Obchodovanie s akciami so sebou prináša riziko. Úloha maximalizovať očakávanú užitočnosť investora z rizikovej investície tvorí zaujímavú časť finančnej matematiky. Touto úlohou sa zaoberal ako jeden z prvých aj P.A. Samuelson. Vo svojej práci [1] rieši problém prerozdelenia zdrojov, ktoré investor nespotrebuje, medzi rizikové a bezrizikové aktíva v diskrétnom modeli. Úlohu rieši pomocou optimálneho riadenia a optimálna investícia má pre mocninovú funkciu užitočnosti konštantný pomer medzi zdrojmi investovanými do rizikového a bezrizikového aktíva. Tento pomer navyše nezávisí od výšky počiatočnej investície.

K rovnakému záveru pre spojitý model dospel aj Merton [2]. Vo svojom modeli navyše špecifikoval, že výnosy rizikového aktíva sledujú Brownov pohyb. Vo svojom modeli však predpokladá, že investor môže ísť do krátkych pozícií v rizikovom aj bezrizikovom aktíve. V praxi je však problematické požičať si za bezrizikovú úrokovú mieru a keď v modeli zakážeme požičiavanie za bezrizikovú úrokovú mieru, riešenie sa výrazne zmení. Investor už nebude investovať v konštantnom pomere, ale pomer sa bude časom zvyšovať v prospech bezrizikového aktíva. Melicherčík a Černý uvádzajú vo svojej práci [3] jednoduchšie riešenie, ktoré veľmi dobre aproximuje optimálne riešenie tohto problému.

Mnoho investorov sa chce poistiť pred prípadným poklesom hodnoty rizikového aktíva, no napriek tomu v čo najvyššej miere participovať na vyšších výnosoch rizikových aktív. Jednou z možností poistenia portfólia sú zaistené stratégie. Tie garantujú vopred určenú hodnotu v prípade nepriaznivého vývoja ceny rizikového aktíva výmenou za nižšie zisky v prípade, že hodnota rizikového aktíva stúpa. Jednou zo zaistených stratégií je OBPI metóda, ktorá spočíva v poistení akcie kúpou put opcie. Jej autormi sú Leland a Rubinstein. Vo svojej práci [4] aj riešia problém s nedostupnosťou put opcií ich nahradením akciou a bezrizikovým aktívom. V tejto práci sa však budeme zaoberať najmä CPPI metódou, ktorú v roku 1986 navrhol Perold v práci [5].

Zaistené stratégie štandardne predpokladajú, že investor má všetky peniaze už na začiatku svojej investície. V praxi však prebieha často sporenie vo forme pravidelných príspevkov. Dobrým príkladom je dôchodkové sporenie, kedy investor prispieva spravidla v mesačných intervaloch a jednotlivé príspevky sú malé v porovnaní s celou investíciou. Keď si navyše investor nemôže požičiavať, úloha s postupnými príspevkami sa nedá jednoducho previesť na úlohu s jednou počiatočnou investíciou. V tretej kapitole pokúsime nájsť spôsob využitia zaistených stratégií v prípade sporenia s postupnými príspevkami. Takéto stratégie už majú viacero nepríjemných podmienok, ktoré bránia analytickým výpočtom a preto budeme ich výsledky simulovať.

Problém s požičiavaním za bezrizikovú úrokovú mieru sa dá čiastočne obísť pomocou opcií. Call opcia je derivátom akcie, ktorý môže nahradiť bezrizikovú pôžičku, ktorej účelom je nákup akcie. Túto možnosť sa pokúsime využiť v našom algoritme vo štvrtej kapitole. V piatej kapitole sa potom pozrieme na ďalšie zlepšenia našej stratégie, najmä vo vzťahu k používaniu opcií.

Cieľom práce je teda navrhnúť zaistenú stratégiu, ktorá funguje v prípade postupných príspevkov. Použijeme na to modifikovanú CPPI stratégiu a výsledky budeme skúmať pomocou simulácií v programe Matlab. Jednoduchú stratégiu zlepšíme pridaním opcií a preskúmame ich vplyv na stratégiu pre rôzne hodnoty parametrov CPPI.

1. Optimálne investovanie bez zaistenia

Investor sa snaží investovať peniaze na trhu, ktorý mu ponúka dve možnosti investovania. Prvá možnosť je investícia do dlhopisov, ktorá neprináša žiadne riziko. Cena dlhopisu je jednoznačne určená a je popísaná rovnicou

$$dB_t = rB_t dt$$

kde B_t je cena dlhopisu v čase t a r je ročná úroková miera. Táto rovnica má jednoduché riešenie

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

Druhou možnosťou je nákup akcií. V našom modeli budeme pre zjednodušenie uvažovať len jednu akciu, ktorej výnos má vyššiu strednú hodnotu ako r. Keďže je výnos akcie náhodná premenná, prináša so sebou takáto investícia riziko straty. Akcia sleduje geometrický Brownov pohyb, teda môžeme napísať, že

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

pričom S_t je cena akcie v čase t, W_t je Wienerov proces a μ a σ sú kladné konštanty ($\mu > r$). Investor má k dispozícii príspevky, ktoré chodia v pravidelných intervaloch Δ v hodnote p a snaží sa maximalizovať svoj úžitok z týchto príspevkov na konci investičného obdobia – v čase $t = T$.

Keďže uvažujeme nad investorom, ktorý má averziu k riziku, jeho funkcia užitočnosti musí byť rastúca a konkávna. Takýchto funkcií je veľa, často sa používa napríklad exponenciálna funkcia užitočnosti

$$U(x) = 1 - e^{-cx}$$

My však v práci budeme používať mocninovú funkciu užitočnosti, pretože riešenie optimalizačnej úlohy je pri použití mocninovej funkcie užitočnosti škálovo invariantné (ukážeme neskôr).

$$U(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \gamma > 0, \gamma \neq 1$$

Táto funkcia je pre $\gamma > 0$ rastúca a konkávna. Ak je $\gamma < 1$ ide o odmocninu a ak je $\gamma > 1$ ide o mocninovú funkciu. Prípad, kedy $\gamma = 1$ sa dá vyriešiť limitne pomocou L´hospitalovho pravidla, pričom dostaneme funkciu $U(x) = \ln(x)$, ale pre zjednodušenie budeme uvažovať, že $\gamma \neq 1$. γ reprezentuje investorovu averziu k riziku a aj málo riziko averzný investor bude mať $\gamma > 2$. Úlohou investora je maximalizovať úžitok z hodnoty portfólia v čase $t = T$

$$\max_{\beta} U(E(V_T))$$

kde β_t je podiel majetku investovaný do akcií a V_t je hodnota portfólia v čase t. β_t je dynamická stratégia, to znamená, že sa môže meniť v čase nielen v závislosti od času. Keďže hodnota portfólia je náhodná premenná, maximalizujeme jej strednú hodnotu. Samuelson [1] ukázal, že ak si investor môže požičať ľubovoľné množstvo peňazí za bezrizikovú úrokovú mieru r, potom príspevky nič nemenia na optimálnom riešení tejto úlohy. Optimálna stratégia investuje do rizikového aktíva vždy konštantný podiel

$$\beta = \frac{(\mu - r)}{\sigma^2 \gamma}$$

Takto formulovaná úloha je škálovo invariantná a je teda jedno, či ju počítame v centoch, eurách alebo tisícoch, optimálna stratégia sa nezmení.

$$\max_{\beta} U(E(cV_T)) = \max_{\beta} \frac{E(cV_T)^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \max_{\beta} \frac{c^{1-\gamma} E(V_T)^{1-\gamma}}{1-\gamma} = c^{1-\gamma} \times \max_{\beta} U(E(V_T))$$

Fakt, že v prípade možnosti požičať si za bezrizikovú úrokovú mieru r príspevky nemenia optimálne riešenie oproti situácii s jednou počiatočnou investíciou nie je až taký prekvapivý. Môžeme si totiž na začiatku požičať peniaze a príspevky použijeme na splátku tejto pôžičky. V tom prípade sa ale dostaneme do situácie, kedy máme peniaze už na začiatku. Na začiatku teda investor pracuje s peniazmi, ktoré ma k dispozícii a súčasnou hodnotou všetkých budúcich príspevkov

$$\hat{V}_t = V_t + PV_t$$

pričom V_t je objem peňazí, ktoré už máme v čase t (príspevky, ktoré už prišli do času t a prípadne výnosy alebo straty z investovania) a

$$PV_t = \sum_{i=t/\Delta}^{T/\Delta} e^{-r\tau_i} p_i$$

kde τ_i je čas od t do prijatia i-tej splátky a p_i je hodnota i-tej splátky.

Keďže $\gamma > 0$ a zároveň $\mu > r$, je vidieť, že $\beta > 0$. Rizikové aktíva teda investor nebude nikdy v optimálnej stratégii predávať, vždy ich nakupuje a keďže na β nie je žiadne ohraničenie zhora, môže sa stať, že si investor ešte požičia peniaze navyše a nakúpi za ne akcie. To je možné hlavne v prípade, ak má nízku averziu k riziku a akcia ponúka vysoký výnos oproti dlhopisom.

Takýto prístup má však dva problémy, jeden filozofický a jeden praktický. Človek, ktorý si chce odkladať časť prostriedkov, ktoré nespotrebuje, na dôchodok, môže mať problém hneď na začiatku si požičať a v podstate sa zadlžiť na mnoho rokov. V úlohe totiž predpokladáme, že presne vieme, kedy a aké veľké príspevky budeme mať, no samotný sporiteľ si tým spravidla nie je až taký istý a považuje takúto pôžičku za ďalšie riziko.

Oveľa závažnejší problém ale je, že úroková miera je oveľa vyššia v prípade, že si chce investor požičať než v prípade, keď chce investovať do dlhopisov. V realite by sa mohlo stať, že úroková miera na pôžičku by bola vyššia ako priemerný výnos akcie, alebo by ho svojou výškou aspoň spravila nezaujímavým. Je teda nutná zaoberať sa prípadom, kedy si nemôžeme požičať a môžeme investovať len toľko peňazí, koľko sme získali z doterajších príspevkov. Matematicky môžeme túto úlohu formulovať pomocou podmienky

$$\beta_t < \alpha_t$$

kde

$$\alpha_t = \frac{V_t}{PV_t + V_t}$$

teda nemôžeme investovať do rizikového aktíva viac, ako máme práve k dispozícii.

Toto ohraničenie však úplne zmení optimálnu stratégiu a vzniká tu fenomén s anglickým názvom stochastic lifestyling, ktorý vo svojej práci opísali Cairns, Blake a Dowd [6]. V prvom rade už neplatí, že časť portfólia investovaná do rizikového aktíva je konštantná počas celého investičného obdobia. Na začiatku bude investor odvážnejší a investuje väčšiu časť do rizikového aktíva. S blížiacim sa koncom sporenia, keď rastie celková hodnota investície bude postupne investovať viac a viac do dlhopisov. Optimálne riešenie tejto úlohy je veľmi komplikované, no Melichečík a Černý [3] ukázali, že toto riešenie sa dá veľmi dobre aproximovať pomocou jednoduchšieho riešenia

$$\hat{\beta}(\alpha) = \arg \max_{\beta \geq 0, \beta \leq \alpha} \left[\beta(\mu - r) - \frac{(\gamma)\beta^2}{2\sigma^2} \right]$$

V prípade, že investor nechce svoje sporenie vôbec chrániť pred prípadnou stratou tak vie, ako postupovať aj v prípade, že bude pracovať s postupnými príspevkami. V skutočnosti sa ale väčšina sporiteľov obáva straty a chce si svoju investíciu poistiť. Tento prípad si rozoberieme v ďalších častiach práce, najprv v prípade bez príspevkov a potom aj v prípade s príspevkami.

2. Poistenie portfólia formou zaistených stratégií

Existujú dve hlavné formy zaistených stratégií, metóda CPPI (z anglického constant proportion portfolio insurance) a metóda OBPI (option based portfolio insurance). CPPI metóda je založená na rozdelení investície na dve časti, pričom jedna je investovaná do rizikového aktíva a druhá do bezrizikového aktíva. Vhodným zvolením veľkosti bezrizikovej investície stratégia dosiahne, že na konci investičného obdobia bude mať investícia aspoň hodnotu nami zvolenej hodnoty zaistenia. Naproti tomu OBPI metóda využíva na zaistenie rizika put opciu vypísanú na rizikové aktívum, do ktorého investujeme a tým dosiahne, že hodnota investície je vždy minimálne realizačná cena danej put opcie. Je zaujímavé, že aj keď na prvý pohľad ide o dve nesúvisiace stratégie, majú k sebe prekvapivo blízko. Túto blízkosť si ukážeme, no najskôr si predstavíme jednotlivé stratégie.

2.1. OBPI metóda

Pod anglickou skratkou OBPI sa ukrýva poistenie portfólia založené na opciách. Je to pomerne jednoduchá metóda, ktorá spočíva v investícii do akcie (rizikového aktíva) a súčasne investor kúpi aj put opciu na túto akciu. Put opcia je derivátom akcie a dáva svojmu majiteľovi právo predať podkladovú akciu za vopred dohodnutú realizačnú cenu - K(po anglicky strike price). Je teda zrejmé, že nech už investícia do akcie dopadne akokoľvek, naše portfólio bude mať v čase T hodnotu minimálne K. Hodnotu portfólia môžeme teda zapísať v tvare

$$V_T = K + \max(V_T - K, 0)$$

prípadne pomocou ceny akcie S_T ako

$$V_T = S_T + \max(K - S_T, 0)$$

Veľkou výhodou OBPI metódy je, že si nevyžaduje žiadnu údržbu a teda na začiatku nakúpime akcie a put opcie a počas celého investičného obdobia nemáme žiadne transakčné náklady.

Nevýhodou OBPI metódy je práve to, že pracuje s put opciami. Môže sa stať, že potrebná put opcia neexistuje, alebo sa jej doba splatnosti nekryje s našim investičným obdobím. To sa dá riešiť napríklad tak, že put opciu syntetizujeme pomocou akcie a dlhopisu, čím sa začneme OBPI metóda podobať na CPPI metódu, ktorú si teraz popíšeme.

2.2. CPPI metóda

Na úvod sa oboznámime so základnými pojmami a ich značením.

V_t – hodnota investície (portfólia) v čase t

Dno_t – hodnota dna (z anglického floor) v čase t, ide o hodnotu, pod ktorú nesmie klesnúť hodnota investície

C_t – vankúš (z anglického cushion) v čase t, je to rozdiel medzi hodnotou investície a dnom

m – multiplikátor, jeho hodnota je spravidla konštantná, určuje sa na základe preferencií investora

E_t – vystavenie (z anglického exposure) v čase t, ide o súčin vankúša a multiplikátora

Z – Zaistenie, teda hodnota, pod ktorú nesmie klesnúť hodnota investície v čase T

Kľúčovým pojmom metódy CPPI je dno. Ak chceme mať v čase T časť k z počiatočnej hodnoty investície V_o, tak začneme tým, že nastavíme $Dno_T = Z = kV_0$. Keďže dno musí dosiahnuť túto hodnotu s istotou, časť investície v dne môžeme investovať iba do dlhopisov a teda hodnota dna v každom čase je jednoznačne určená a závisí iba od úrokovej miery a výšky zaistenia. Môžeme napísať

$$dDno_t = Dno_t r dt.$$

Hodnota vankúša v každom čase je teda rovná

$$C_t = V_t - Dno_t$$

Nás však viac ako hodnota vankúša zaujíma vystavenie, teda hodnota, ktorú investujeme do akcií.

$$E_t = mC_t$$

V prípade, že $m > 1$, investujeme do akcií viac peňazí, než je hodnota vankúša a teda si požičiavame aj peniaze z dna. V spojitom modeli to nie je problém, pretože zo znižujúcou sa hodnotou rizikového aktíva sa znižuje aj vystavenie a teda hodnota investície nemôže klesnúť pod hodnotu dna. V prípade diskrétneho modelu, ktorý budeme používať aj pri simuláciách sa však môže stať, že náhly pokles hodnoty rizikového aktíva v kombinácii s príliš vysokým vystavením spôsobí, že hodnota investície klesne pod úroveň dna a nesplníme základnú požiadavku investora – mať v čase T hodnotu aspoň Z. Pravdepodobnosť, že takáto situácia nastane závisí najmä od dĺžky intervalu medzi dvoma rebalancovaniami, hodnoty multiplikátora a volatility akcie. Keďže však zatiaľ aj v diskrétnom prípade rebalancujeme na dennej báze, bližšie sa tejto problematika teraz nebudeme venovať.

Pre hodnotu portfólia teda platí rovnica

$$dV_t = \frac{dS_t}{S_t}E_t + \frac{dB_t}{B_t}(V_t - E_t)$$

a pomocou tejto rovnice dokážeme opísať aj hodnotu vankúša ako

$$dC_t = d(V_t - Dno_t) = \frac{dS_t}{S_t}E_t + \frac{dB_t}{B_t}(V_t - E_t) - dDno_t$$

nahradením $E_t = mC_t$ a $V_t = Dno_t + C_t$ získame

$$dC_t = \frac{dS_t}{S_t}mC_t + \frac{dB_t}{B_t}(Dno_t + C_t - mC_t) - dDno_t = \frac{dS_t}{S_t}mC_t + \frac{dB_t}{B_t}(C_t - mC_t)$$

$$dC_t = C_t[(m(\mu - r) + r)d_t \ + m\sigma dW_t]$$

a riešením tejto rovnice je

$$C_t = C_0 e^{\left[\left(\left(m(\mu-r)+r\frac{m^2\sigma^2}{2}\right)t+m\sigma W_t\right)\right]}$$

Tento vzťah sa dá ešte upraviť využitím rovnosti

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}$$

$$ln\frac{S_t}{S_0} = \sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$$

a z toho vyjadríme

$$W_t = \frac{1}{\sigma}\left[ln\frac{S_t}{S_0} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]$$

Teraz môžeme v pôvodnom vzťahu pre C_t dosadiť takto vyjadrené W_t a po úpravách dostaneme

$$C_t = C_0\left(\frac{S_t}{S_0}\right)^m e^{\left(r - m\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - m^2\frac{\sigma^2}{2}\right)t} = \alpha_t S_t^m$$

pričom

$$\alpha_t = \left(\frac{C_0}{S_0^m}\right) e^{\left(r - m\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - m^2\frac{\sigma^2}{2}\right)t}$$

Hodnotu investície potom už len vyjadríme ako

$$V_t = Dno_0 e^{rt} + \alpha_t S_t^m$$

V prípade, keď nemáme žiadne horné ohraničenie na vystavenie (dolné je vždy 0), môžeme spočítať aj strednú hodnotu a varianciu hodnoty investície. Keďže ale ohraničenie na vystavenie v nejakej forme vždy budeme mať (nedokážeme si požičať neobmedzené množstvo peňazí), viac ako samotný vzorec nás bude zaujímať vzťah medzi týmito hodnotami a multiplikátorom či výškou zaistenia.

So zvyšujúcou sa hodnotou multiplikátora rastie aj množstvo peňazí investovaných do rizikového aktíva. Keďže to má v priemere vyšší výnos ako dlhopisy, tak stredná hodnota investície je rastúcou funkciou multiplikátora. Takisto zvýšením objemu investovaného do rizikového aktíva zvýšime aj volatilitu investície. Podobne funguje aj zníženie zaistenia. Ak znížime hodnotu zaistenia, zníži sa tým dno, teda vzrastie vankúš aj vystavenie a zvýši sa objem investovaný do rizikového aktíva a teda aj stredná hodnota a variancia našej investície.

Keďže v práci budeme skúšať rôzne metódy s rôznymi parametrami a nedokážeme analyticky spočítať vlastnosti týchto stratégii, pomôžeme si simuláciami. Aby sme získali nejaké vedomosti o kvalite a presnosti simulácii, môžeme ich porovnať s analytickými výpočtami v prípade, keď dokážeme analytické výpočty urobiť. Preto si teda vypočítame strednú hodnotu

CPPI metódy bez ohraničenia na vystavenie a porovnáme ju s odhadom strednej hodnoty, ktorý nám vyjde zo simulácií.

Majme teda CPPI metódu bez ohraničenia na vystavenie. Stratégia je samofinancovaná, teda akákoľvek vypožičaná suma je automaticky odpočítaná od hodnoty portfólia za bezrizikovú úrokovú mieru. Takisto, keďže nemáme ohraničenie na vystavenie, predpokladáme, že si môžeme požičať ľubovoľne veľa peňazí za bezrizikovú úrokovú mieru. Stredná hodnota portfólia v čase T je rovná

$$E(V_T) = V_0 + C_0 e^{(m(\mu - r) + r)T}$$

odvodenie sa dá nájsť napríklad v [7].

Pre hodnoty parametrov $m = 2, \mu = 0.12, \sigma = 0.25, r = 0.02, V_0 = 25, T = 20$ a pri hodnote zaistenia $Z = 20$ je stredná hodnota majetku na konci investičného obdobia $E(V_T) = 965.75$.

Pri dostatočnom počte spustení algoritmu s rovnakými parametrami môžeme využiť centrálnu limitnú vetu. Tá hovorí, že ak máme nezávislé, rovnako rozdelené premenné (čo je v našom prípade splnené) tak ich súčet je z normálneho rozdelenia. Keď to platí pre súčet, tak to platí aj pre súčet predelený počtom premenných, teda pre aritmetický priemer.

Nech X je súčtom n nezávislých, rovnako rozdelených premenných $X_1, X_2, \dots, X_n$ s konečnou strednou hodnotou $E(X_i) = \mu$ a konečnou varianciou $D(X_i) = \sigma^2$. Potom normovaná náhodná veličina $U = \frac{X - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0,1), pre\ n \to \infty$.

Strednú hodnotu konečného stavu našej investície vieme odhadnúť priemerom z našich simulácii. Priemer z $X_1, X_2, \dots, X_n$, $\bar{X} = \frac{X}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Potom vieme skonštruovať 95%-ný interval spoľahlivosti pre priemer (dolná , horná), kde

$$dolná = \bar{X} - \alpha_{97,5} * S * \frac{1}{\sqrt{n}}$$

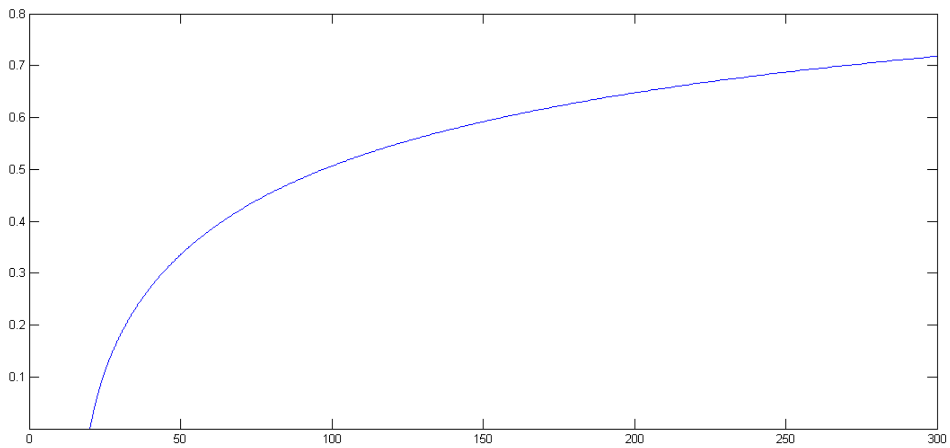
$$horná = \bar{X} + \alpha_{97,5} * S * \frac{1}{\sqrt{n}}$$

pričom S je odhad σ(štandardná odchýlka). Môžeme si všimnúť, že keď zvýšime počet simulácii 100krát, interval spoľahlivosti sa zúži iba 10násobne, teda zužuje sa s odmocninou počtu meraní.

počet simulácií	dolná hranica intervalu spoľahlivosti	priemerná hodnota portfólia	horná hranica intervalu spoľahlivosti	Štandardná odchýlka výslednej hodnoty portfólia
100	222.6876	596.93	971.1724	1909.4
1000	591.0144451	854.99	1118.965555	4259
5000	801.8389185	926.312	1050.785081	4490.6
10000	856.71	1048.3	1239.89	9775
50000	861.3244636	924.295	987.2655364	7184
100000	906.8643649	955.42	1003.975635	7834
500000	941.5015447	967.2	992.8984553	9271.2

Tabuľka 2.1 Šírka intervalu spoľahlivosti

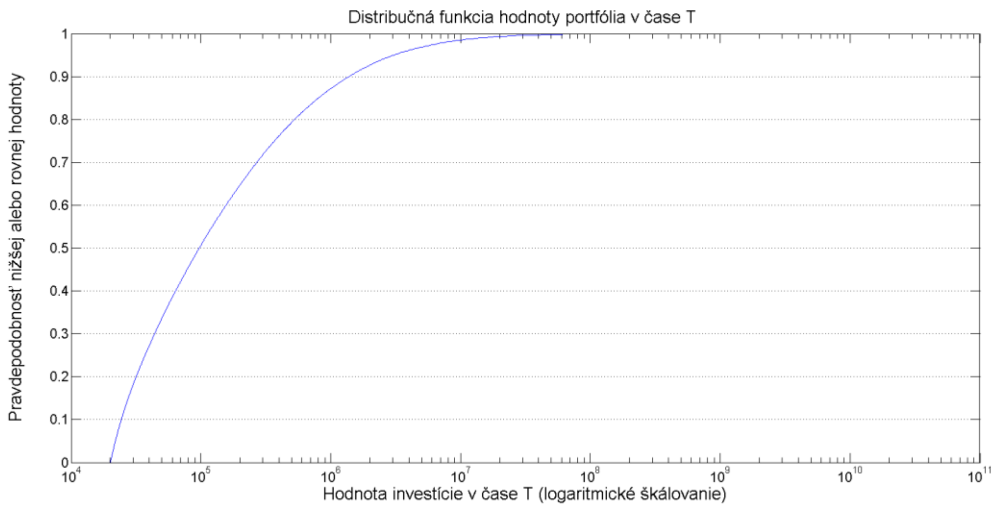
Vidíme, že aj pri vysokom počte simulácii je odhad strednej hodnoty stále veľmi nepresný. Zaujímavejší ako samotná stredná hodnota môže byť graf empirickej distribučnej funkcie (obr 2.1)



Obrázok 2.1 Empirická distribučná funkcia 500000 simulácií

Na obrázku sa nachádza empirická distribučná funkcia rozdelenia hodnoty portfólia v čase T vypočítaná pri 500 000 simuláciách. Na osi x sú hodnoty portfólia a na osi y je pravdepodobnosť, s akou bude hodnota portfólia menšia alebo rovná tejto hodnote. Vidíme teda, že hodnota portfólia je s pravdepodobnosťou približne 1/3 nižšia ako 50. Dokonca vidíme, že priemerná hodnota (967) sa na tomto výseku grafu ani nenachádza. Graf musí byť odseknutý(stratili sme tak viac ako ¼ všetkých simulácií), lebo rozdelenie koncovej hodnoty portfólia má **veľmi ťažký chvost**. Maximálna hodnota spomedzi pol milióna simulácií bola 2 174 600 a teda keby sme ju chceli dať do grafu v tejto mierke, bol by 7200x širší. Práve kvôli tejto vlastnosti nás stredná hodnota rozdelenia nezaujíma a skôr sa budeme zaujímať o kvantily rozdelenia, najmä medián.

Na zobrazenie rozdelení s ťažkými chvostmi si však môžeme pomôcť logaritmickým škálovaním x-ovej osi. Graf funkcie má síce potom iný tvar, ale zmestí sa tam celý a dôležité vlastnosti, ako monotónnosť ostanú zachované. Graf s takýmto škálovaním osí je na obrázku 2.2



Obrázok 2.2 Empirická distribučná funkcia pri logaritmickom škálovaní osi x

Keby sme tých 25 jednotiek na začiatku miesto investovania CPPI metódou len uložili do banky, po 20 rokoch by sme s 2% úrokom získali 37.295 jednotiek. Pozrieme sa teraz na dve pravdepodobnosti. Jednak nás zaujíma, s akou pravdepodobnosťou nám naša metóda priniesla menej peňazí než banka a pre zaujímavosť sa pozrieme aj na to, s akou pravdepodobnosťou dopadne investícia pod strednú hodnotu. Tieto pravdepodobnosti odhadneme jednoducho tak, že sa pozrieme, koľko simulácií dopadlo pod danú hodnotu a tento počet predelíme počtom všetkých simulácii.

$$P(V_T < banka = 37.295) = \frac{počet\ simulácii\ menších\ ako\ banka}{počet\ všetkých\ simulácií} = \frac{125476}{500000}$$
$$= 0.2509$$

$$P\big(V_T < E(V_T)\big) = \frac{434415}{500000} = 0,8688$$

V prípade tejto stratégie dokážeme tieto pravdepodobnosti spočítať aj analyticky a teda môžeme porovnať presnosť simulácií oproti analytickým výpočtom.

$$P\big(V_T < E(V_T)\big) = P\big(Dno_0e^{rT} + \alpha_T S_T^m < E(V_T)\big) = P\left(S_T < \sqrt[m]{\frac{E(V_T) - Dno_0e^{rT}}{\alpha_T}}\right)$$
$$= P\left(S_0e^{\sigma W_T + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T} < \sqrt[m]{\frac{E(V_T) - Dno_0e^{rT}}{\alpha_T}}\right)$$
$$= P\left(e^{\sigma W_T} < \sqrt[m]{\frac{E(V_T) - Dno_0e^{rT}}{\alpha_T S_0^m e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)Tm}}}\right)$$

Označme

$$k_1 = \sqrt[m]{\frac{E(V_T) - Dno_0e^{rT}}{\alpha_T S_0^m e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)Tm}}}$$

keďže

$$W_T \sim N(0,T)$$

tak môžeme pokračovať v úprave

$$P\big(V_T < E(V_T)\big) = P\left(W_T < \frac{\ln(k_1)}{\sigma}\right) = P\left(X < \frac{\ln(k_1)}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(k_1)}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

kde

$$X \sim N(0,1)$$

a Φ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia. Funkcia Φ nemá analytické vyjadrenie pomocou elementárnych funkcií, ale jej hodnotu zistíme napríklad v programe matlab

$$\Phi\left(\frac{\ln(k_1)}{\sigma\sqrt{T}}\right) = 0.8684$$

Vidíme vynikajúcu zhodu medzi simulovanou a skutočnou pravdepodobnosťou, preto môžeme predpokladať, že simulácie budú podobne dobré aj pri ďalších stratégiách, kde už skutočné pravdepodobnosti nebudeme vedieť vypočítať.

Vidíme teda, že stredná hodnota nie je vhodná na charakterizovanie takejto stratégie, keďže štyri z piatich simulácií dopadnú horšie ako stredná hodnota. Na druhej strane charakterizovať takúto stratégiu celým grafom je komplikované, najmä ak by sme chceli porovnávať viacero rôznych nastavení parametrov. Preto si ešte môžeme pomôcť funkciou užitočnosti. Vypočítame si takzvaný „certainty equivalent“(CE), alebo po slovensky určitostný ekvivalent. Ide o sumu, za akú by okamžite vymenil investor túto investíciu a zbavil sa tak rizika. V tabuľke uvedieme hodnotu CE pre rôzne stupne averzie k riziku. Pre averziu k riziku γ vypočítame úžitok investora z každej jednej simulácie ako

$$U(V_i) = \frac{V_i^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

kde V_i je hodnota investície v čase T v i-tej simulácii ($i = 1,2,\dots,n$). Ďalej vypočítame priemernú hodnotu úžitku a označíme ju $\overline{U}$

$$\overline{U} = \frac{\sum_{i=1}^{n} U(V_i)}{n}$$

Certainty equivalent pre danú stratégiu vypočítame ako

$$CE(\gamma) = [(1-\gamma)\overline{U}]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Na ilustráciu CE a mocninovej funkcie užitočnosti použijeme jednoduchý príklad. Investor má možnosť kúpiť si žreb X, ktorý má s 50% pravdepodobnosťou hodnotu 50 000 a s 50% pravdepodobnosťou hodnotu 150 000. Rizikovo neutrálny investor by ocenil takýto žreb strednou hodnotou výhry

$$E(X) = \frac{50000}{2} + \frac{150000}{2} = 100000$$

Investor s mocninovou funkciou užitočnosti má ale CE pre tento žreb rovný

$$CE(\gamma) = \left(\frac{50000^{1-\gamma} + 150000^{1-\gamma}}{2}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Hodnoty CE takéhoto žrebu pre investorov s rôznou averziou k riziku sú uvedené v tabuľke 2.2.

Averzia k riziku	CE žrebu
3	67082
4	62237
6	57388
9	54524

Tabuľka 2.2 CE investora zo žrebu pri rôznej averzii k riziku

CE žrebu je teda aj pre investora s nízkou averziou k riziku oveľa nižší ako stredná hodnota.

Vrátime sa k simulácii CPPI metódy. V tabuľke 2.3 si uvedieme aj rozdiel oproti investorovmu úžitku z bezrizikovej investície v banke, ktorý sa samozrejme rovná hodnote tejto investície. Vidíme, že rizikovo averzný investor nebude chcieť použiť túto stratégiu a rozhodne sa buď zmeniť hodnotu zaistenia a multiplikátora, alebo jednoducho uloží svoje peniaze do banky.

Gama	CE pri m=2	Rozdiel oproti istej investícii v banke pri m=2	CE pri m=1.5	Rozdiel oproti istej investícii v banke pri m=1.5
3	45704	8409	54428	17133
4	38545	1250	45579	8284
5	34663	-2632	40515	3220
6	32218	-5077	37237	-58
9	28337	-8958	31909	-5386

Tabuľka 2.3 Porovnanie oproti investície v banke

2.3. Porovnanie CPPI a OBPI metódy

Aby sme mohli tieto dve metódy porovnať, potrebujeme urobiť niekoľko predpokladov. V prvom rade sa musí rovnať hodnota zaistenia v obidvoch prípadoch, teda

$$K = Dno_T$$

Odvodili sme, že hodnota OBPI investície má v čase T hodnotu

$$V_T^{OBPI} = K + \max(V_T - K, 0)$$

Keďže OBPI stratégia pozostáva z kúpy akcie a put opcie, jej hodnota v každom čase je rovná

$$V_t^{OBPI} = Ke^{-r(T-t)} + Call(t, S_t, K) = S_t + P(t, S_t, K)$$

kde $C(t, S_t, K)$ a $P(t, S_t, K)$ sú hodnoty európskej call a put opcie. Vidíme, že

$$Ke^{-r(T-t)} = Dno_t$$

Zaujímavá je otázka, či sa pri nejakej hodnote multiplikátora môže hodnota CPPI a OBPI rovnať. Treba si uvedomiť, že multiplikátor je kľúčovým prvkom CPPI stratégie a je počas celého obdobia konštantný. Aby sa ale hodnoty investícii rovnali, muselo by platiť

$$V_t^{OBPI} = V_t^{CPPI}$$

$$Dno_t + C(t, S_t, K) = Dno_t + C_t$$

Hodnota Call opcie sa teda musí rovnať vankúšu. Keďže vystavenie je súčin multiplikátoru a vankúša, môžeme zapísať $m = \frac{E_t}{C_t}$. Call opciu môžeme syntetizovať kúpou akcie a predajom dlhopisov, pričom množstvo akcií potrebné na túto syntézu je označované δ a

$$\delta = \Phi(d_1(t, S_t))$$

kde $N(.)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia a

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[ln\frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma}{2})^2(T-t)\right]$$

Vystavenie E_t je celkový objem investovaný do akcií, čo môžeme zapísať ako $E_t = S_t\delta$.

Pre multiplikátor tak máme vyjadrenie, ktoré však nie je konštantné

$$m^{OBPI} = \frac{S_t\Phi(d_1(t, S_t))}{Call(t, S_t, K)}$$

Môžeme teda povedať, že OBPI stratégia je v istom zmysle zovšeobecnením CPPI stratégie, konkrétne je to CPPI stratégia, pri ktorej hodnota multiplikátora nie je konštantná.

3. Zaistené stratégie s postupnými príspevkami

Úlohou investora bude teda maximalizovať úžitok z investície na konci investičného obdobia (napríklad nástup do dôchodku), pričom príspevky chodia v pravidelných intervaloch a majú fixnú veľkosť. Navyše, v čase $t = T$ musí byť hodnota majetku minimálne Z, čo je vopred zvolená minimálna hodnota, s ktorou sa investor uspokojí. V nasledujúcej časti práce sa pokúsime modifikovať CPPI stratégiu na situáciu s postupnými príspevkami.

Problémy s použitím dna tak, ako je zadefinované v klasickej CPPI stratégii si budeme ilustrovať na jednoduchom príklade. Investor bude každý mesiac po dobu 20 rokov prispievať 100€ a chce maximalizovať svoj úžitok po dvadsiatich rokoch. Keby peniaze neinvestoval a iba si ich nechával doma v trezore, za dvadsať rokov by usporil 24 000€. Oveľa lepším riešením je vložiť peniaze do banky s ročným úrokom r, napríklad $r = 0.02$. V takomto prípade by po dvadsiatich rokoch mala jeho investícia hodnotu 29 497€. Investor by rád využil akciové trhy, ktoré ponúkajú vyšší výnos ako banka, ale obáva sa, že príde kríza ale krach burzy a príde o svoje úspory. Chce si teda svoju investíciu poistiť a po dvadsiatich rokoch by chcel mat aspoň tých 24 000, ktoré by mal, keby neinvestoval vôbec.

Ak by použil CPPI metódu, hodnota dna by sa riadila vzťahom

$$Dno_t = 24\,000 e^{-r(T-t)}$$

teda na začiatku by mal svoj prvý príspevok, 100€, ale hodnota dna by bola

$$Dno_0 = 24\,000 * e^{-0.4} = 16\,088$$

Keďže do akcií môžeme investovať len peniaze, ktoré zostanú po odčítaní dna, celá investícia by išla do dlhopisov až pokým hodnota dlhopisov neprevýši dno (čo sa stane v 16. roku investície).

Je jasné, že toto nie je správna cesta ale môžeme vidieť zaujímavú vec. Konkrétne, hodnota investície rastie oveľa rýchlejšie ako dno a pritom je tiež bezriziková. Je dôležité uvedomiť si, že príspevky budú chodiť s istotou a teda sa na ne môžeme spoľahnúť. To teda znamená, že ak chcem mať na konci investičného obdobia 24 000€, v poslednom mesiaci s istotou získam nielen výnos z dlhopisov, ale aj posledný príspevok. Môžeme teda napísať, že ak má V_T spĺňať

$$V_T > 24\,000$$

tak hodnota mesiac predtým V_{T-1} musí spĺňať

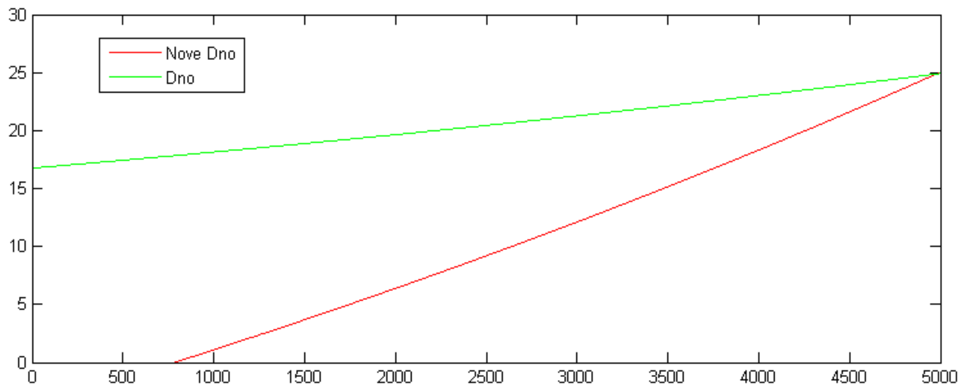
$$V_{T-1} > V_T e^{-\frac{r}{12}} - 100 < Dno_{T-1}$$

Funkcia dna z pôvodnej CPPI metódy bola teda zbytočne vysoká a môžeme vo všeobecnosti napísať

$$Dno_t = Ze^{-r(T-t)} - PV_t$$

Nové dno je teda rozdielom diskontovanej hodnoty zaistenia do času t a súčasnej hodnoty všetkých budúcich príspevkov v čase t. Takéto dno je výrazne nižšie oproti pôvodnému dnu a dokonca zo začiatku nadobúda záporné hodnoty. To je možné interpretovať tak, že aj keby sme začínali so zápornou hodnotou portfólia (dlhom), ešte stále by sme dokázali s istotou získať aspoň Z. Keďže však neuvažujeme nad možnosťou požičať si, hodnota investície nikdy nemôže byť záporná a preto ani nemá zmysel uvažovať záporné dno. Môžeme teda zapísať, že

$$\widetilde{Dno}_t = \max(0, Ze^{-r(T-t)} - PV_t)$$



Obrázok 3.1 Zmena dna zarátaním príspekov

Keď máme zadefinovanú novú funkciu dna, môžeme použiť CPPI stratégiu. Použijeme nasledovný algoritmus – uvedieme si jeho i-tu iteráciu

1. Vypočíta sa hodnota dna $\widetilde{Dno}(i)$
2. Vypočíta sa vankúš $\mathrm{C(i)} = \mathrm{V(i)} - \widetilde{\mathrm{Dno}}\mathrm{(i)}$
3. Vypočíta sa vystavenie $E(i) = \min\big(mC(i), V(i)\big)$

4. Vystavenie investujeme do akcií, zvyšok investujeme do dlhopisov

$$V(i+1) = E(i)\left(\frac{S(i+1)}{S(i)}\right) + (V(i) - E(i)) * e^{rd} + p(i)$$

5. $i = i + 1$

3.1. Vplyv multiplikátora a hodnoty zaistenia

Naša stratégia má rovnako ako klasická CPPI stratégia dva parametre, ktorými môžeme ovplyvňovať jej priebeh. V závislosti od averzie k riziku si investor zvolí multiplikátor a hodnotu zaistenia tak, aby maximalizoval svoj úžitok. Vplyv parametrov nevieme priamo vypočítať, ale z teórie predpokladáme nasledovné

- so zvyšujúcou sa hodnotou multiplikátora vzrastie stredná hodnota aj volatilita hodnoty investície na konci investičného obdobia. Keď má stratégia vyšší multiplikátor, tak bude väčšiu časť majetku investovať do rizikového aktíva, ktoré má vyšší výnos a vyššiu volatilitu, čo sa prenesie aj do vlastností celej stratégie.
- so zvyšujúcou sa hodnotou zaistenia klesá stredná hodnota aj volatilita hodnoty investície na konci investičného obdobia. Tu môžeme použiť rovnakú úvahu ako pri multiplikátore. Ak sa zvýši hodnota zaistenia, zvýši sa dno a investor bude nakupovať viac dlhopisov a menej akcií.

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že pri rozdelení s ťažkými chvostmi je stredná hodnota zavádzajúci údaj, pretože relatívne málo simulácií, ktoré dopadli veľmi dobre vytiahnu strednú hodnotu vysoko nad medián a teda je veľmi ovplyvnená javmi, ktoré nastanú s malou pravdepodobnosťou. Preto sa budeme skôr sústrediť na CE stratégie pri rôznych hodnotách parametrov stratégie, ale aj rôznej averzii k riziku. CE je však iba jedno číslo a ťažko z neho interpretovať protichodné zmeny, napríklad pri zvýšení zaistenia a súčasnom zvýšení hodnoty multiplikátora. Lepší náhľad nám možno poskytne empirická distribučná funkcia vypočítaná zo simulácii. V nasledujúcej tabuľke si uvedieme všeobecné parametre trhu/stratégie, ktoré použijeme do simulácií.

Bezriziková úroková miera	Výnos akcie	Volatilita akcie	Dĺžka investície v rokoch	Každodenný príspevok
0.02	0.12	0.25	20	0.005

Tabuľka 3.1 Parametre stratégie

Predpokladáme teda, že po dobu 20 rokov budú prichádzať príspevky každý deň, pričom počítame iba s dňami, kedy sa obchoduje na burze. Rok ma teda 252 takýchto dní.

3.1.1. Vplyv multiplikátora

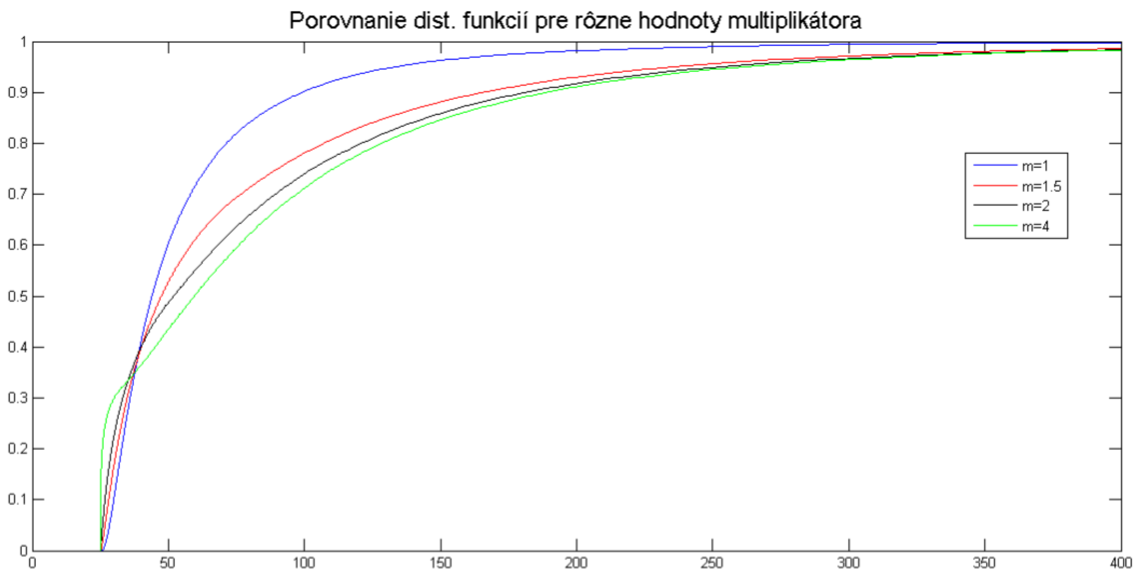
Budeme simulovať stratégiu pri fixnej hodnote zaistenia a troch hodnotách multiplikátora. Zaistenie zvolíme vopred v hodnote $Z = 25$, čo je mierne menej ako suma všetkých príspevkov, ktoré investor za 20 rokov preinvestuje. Hodnoty multiplikátora budú 1,2 a 4. Hodnota multiplikátora 1 znamená, že do akcií investujeme iba vankúš a nepožičiavame si peniaze z dna. Je to veľmi konzervatívna stratégia, naproti tomu multiplikátor 4 investuje 4-násobnú hodnotu vankúša do akcií. Ak teda tvorí dno menej ako 75% hodnoty investície, investujeme do rizikového aktíva všetko.

V tabuľke 3.2 vidíme, že priemerná hodnota skutočne stúpa s multiplikátorom. Zo správania certainty equivalentu ale nepriamo vidíme, že s multiplikátorom stúpa aj variancia investície. Pri fixnej variancii by totiž CE stúpal s priemernou hodnotou a vhodným vysvetlením jeho poklesu je práve zvýšená variancia. V tabuľke je vyznačená najvyššia hodnota certainty equivalentu pre každú hodnotu averzie k riziku a vyzerá to, že menej rizikovo averzný investor by si vybral multiplikátor 1.5 a konzervatívnejší investor by použil multiplikátor 1.

Multiplikátor	Priemer	Medián	CE3	CE6	CE9
1	58.35	44	42.0092	37.1733	34.7769
1.5	79.84	42.4279	42.4866	35.7664	33.104
2	85.89	51.92	41.8911	34.4298	31.8013
4	89.903	59.91	40.3873	32.226	29.7146

Tabuľka 3.2 Vlastnosti stratégie pre rôzne hodnoty multiplikátoru

Aby sme sa dozvedeli niečo viac o rozdelení koncového stavu investície V_T, pozrieme sa na graf empirických distribučných funkcií simulácií.



Obrázok 3.2 EDF pre rôzne hodnoty multiplikátora

Na grafe môžeme pozorovať, čo robí zvyšovanie multiplikátoru s distribučnou funkciou. Čím vyšší je multiplikátor, tým prudšie rastie distribučná funkcia v časti grafu blízko zaistenia. To je pre investora nepriaznivé, pretože to znamená, že rýchlo rastie pravdepodobnosť, s akou skončí jeho investícia tesne nad hranicou zaistenia. S pravdepodobnosťou približne 35% tak dopadne stratégia s najvyšším multiplikátorom najhoršie. Potom sa ale situácia začne otáčať a distribučná funkcia tejto stratégie začne rásť čoraz pomalšie. Pri hodnotách nad 50 je už stratégia s najväčším multiplikátorom najlepšia a môžeme pozorovať výrazný rozdiel oproti stratégii s multiplikátorom 1. Je dôležité uvedomiť si, že zvyšovanie multiplikátora nad istú hranicu už nemá žiadny vplyv na vývoj stratégie v prípade, že akcii sa darí. Takisto so stúpajúcim multiplikátorom stúpa pri diskrétnom modeli aj pravdepodobnosť, že investícia dopadne pod dnom. V tabuľke 3.3 je v treťom stĺpci uvedené, ako často použil investor celý objem dna na nákup akcií pri rôznych hodnotách multiplikátora. V druhom stĺpci je pravdepodobnosť, s akou klesla hodnota portfólia pod hodnotu zaistenia.

m	Počet simulácii pod dnom/počet simulácii	Počet dní, kedy bol celý majetok investovaný do akcií/ počet všetkých dní
1	0	0.1645
2	0	0.6745
4	0.00533	0.8409
8	0.19854	0.868
16	0.31285	0.868

Tabuľka 3.3 Riziko veľkého vystavenia v závislosti od výšky multiplikátora

Vidíme, že pri hodnote multiplikátora menej ako 2 je pravdepodobnosť poklesu pod hodnotu dna pri dennom rebalancovaní portfólia takmer nulová. Aby klesla hodnota portfólia pod dno, musela by cena akcie klesnúť o viac ako 50%, čo je veľmi nepravdepodobné parametroch $\mu = 0.12$ a $\sigma = 0.25$. Naproti tomu pri multiplikátore 16 môže stačiť pokles 6.25% (ak $E(i) = mC(i)$), čo je oveľa reálnejšie.

Takisto pre m=1 investujeme všetko do akcií len vtedy, keď je dno nulové, čo je pri parametroch $T = 20, r = 0.02$ a $Z = 25$ presne 829 dní z 5040. V tabuľke je možné pozorovať aj už predpovedaný trend, že zvyšovanie multiplikátora nad určitú hranicu (v tomto prípade $m = 4$) už nebude výrazne zvyšovať objem peňazí investovaný do akcií (okrem situácie, kedy sa stratégii nedarí a je tesne nad dnom. Vtedy je však aj najvyššie riziko prepadu pod hranicu zaistenia).

3.1.2. Vplyv hodnoty zaistenia

Okrem výšky multiplikátora môže investor meniť aj hodnotu zaistenia. Vo svojej podstate je zaistenie na prvý pohľad oveľa fixnejší parameter ako multiplikátor. Ak totižto investor potrebuje v čase T úspory v hodnote minimálne Z (napríklad je to cena cesty okolo sveta), ťažko sa podvolí znížiť zaistenie pod túto úroveň kvôli lepšiemu výkonu stratégie. Mnoho investorov však nemusí požadovať poistenie svojej investície z takéhoto konkrétneho dôvodu a preto môžu radšej pohnúť s hodnotou zaistenia ako meniť multipklikátor, ak to zvýši ich očakávanú užitočnosť.

Parametre stratégie ponecháme rovnaké ako v predchádzajúcom príklade, multiplikátor necháme konštantný $m = 2$ a budeme meniť hodnotu zaistenia. Spustíme simuláciu pre rôzne hodnoty zaistenia a špeciálne aj pre $Z = 0$. V tomto prípade bude dno celý čas nulové a tak vlastne pôjde o investovanie bez zaistenia. V nasledujúcej tabuľke je prehľad strednej hodnoty, mediánu a CE pri rôznych hodnotách zaistenia. Je užitočné vypočítať pre porovnanie hodnotu investície v prípade, že investujeme všetko do bezrizikového aktíva a v prípade, že vôbec neinvestujeme

Bezriziková investícia má hodnotu

$$V_{rf} = 30.98$$

a

$$\sum p = 25.2$$

Zaistenie	Priemer	Medián	CE3	CE6	CE9
28	72.9249	39.2461	39.8995	34.9737	33.1609
25	86.0577	51.8172	41.8371	34.3786	31.7579
20	94.0861	65.0273	42.8288	32.2046	28.559
0	95.998	67.6927	41.9179	24.1156	16.3013

Tabuľka 3.4 Výsledky stratégie s multiplikátorom m=2

V tabuľke 3.4 vidíme niekoľko zaujímavých vecí. V prvom rade vidíme, že pre rôzne úrovne averzie k riziku je najvyšší CE pri iných hodnotách zaistenia a teda má zmysel meniť zaistenie. V druhom rade vidíme, že CE je vždy vyšší pri použití zaistenej stratégie a teda investor s väčšou averziou k riziku bude chcieť použiť zaistené stratégie. Tieto výsledky však máme len pre konkrétnu hodnotu multiplikátora a je potrebné overiť, či sa nebudú výrazne meniť s multiplikátorom. Preto simulácie zopakujeme pre $m = 1.5$. Výsledky druhej simulácie sú v nasledujúcej tabuľke.

Zaistenie	Priemer	Medián	CE3	CE6	CE9
28	63.1918	39.4347	39.9699	35.8213	34.0642
25	79.9544	47.2025	42.4222	35.7349	33.0847
20	91.6526	59.5328	43.6518	33.7925	30.0736
0	96.5167	68.0793	41.9895	23.1525	13.7849

Tabuľka 3.5 Výsledky stratégie s multiplikátorom m=1.5

Vidíme, že hodnoty v tabuľkách 3.4 a 3.5 sa výrazne líšia, najmä investor s vysokou averziou k riziku má výrazne vyšší CE pri použití nižšieho multiplikátoru. Vzťahy medzi nimi však ostali približne rovnaké a aj najvyššie CE dosiahli rovnaké úrovne zaistenia.

4. Využitie opcií v zaistených stratégiách

V predchádzajúcich kapitolách sme sa venovali zaisteným stratégiám a ich úprave na postupné príspevky. Zaujímala nás predovšetkým situácia, kedy si investor nemôže požičiavať za bezrizikovú úrokovú mieru. Táto situácia aj bežne nastáva, pretože jednotlivec si nie je schopný požičať za bezrizikový úrok (pôžička na také dlhé obdobie má vysoký úrok aj v prípade, keď príjemca pôžičky ručí napríklad nehnuteľnosťou, čo znižuje rizikovú prirážku). Táto podmienka však výrazne mení stratégiu investovania aj jej vlastnosti. V našom algoritme sa prejavuje na dvoch miestach.

$$\widetilde{Dno}_t = \max(0, Ze^{-r(T-t)} - PV_t)$$

Keďže si nemôžeme požičiavať, dno nemôže mať nikdy zápornú hodnotu. Ak by totiž malo dno hodnotu $x, x < 0$, znamenalo by to, že si máme požičať hodnotu x a celý majetok investovať do akcií. Aj keby sme v najhoršom prípade o všetko prišli kvôli poklesu hodnoty akcie, stále ešte príde dostatočne veľa príspevkov, aby sme dosiahli aspoň hodnotu zaistenia.

Druhé miesto, na ktorom vstupuje do algoritmu táto podmienka je

$$E(i) = \min\big(mC(i), V(i)\big).$$

Táto podmienka hovorí, že vystavenie nemôže byť nikdy väčšie ako hodnota portfólia. Aj keby súčin multiplikátoru a vankúša bol väčší ako hodnota majetku, jednoducho máme k dispozícii iba vlastný majetok a viac investovať nemôžeme.

Vidíme teda, že podľa stratégie by mal investor opakovane investovať viac, než má momentálne k dispozícii. Riešením tohto problému by mohli byť call opcie. Kúpou call opcie si investor vytvára páku. Ak sa totiž akcii darí a jej cena stúpa, stúpa aj cena opcie. Opcia je však často rádovo lacnejšia ako akcia a ak investor nakúpi opcie a cena podkladovej akcie stúpne, zarobí oveľa viac, ako keby nakúpil iba akcie. Nevýhodou opcií je, že ak cena podkladovej akcie klesne pod hodnotu strike price, opcia má nulovú hodnotu a investor príde o celú sumu, ktorú investoval do opcií. Opcie sú teda oveľa rizikovejšie ako akcie a práve investor, ktorý sporí na dôchodok často nemôže používať opcie (penzijné fondy majú často obmedzený aj podiel, ktorý môžu investovať do akcií, investícia do opcií vtedy nepripadá do úvahy). Trochu iný pohľad na kúpu call opcie uvedieme v nasledujúcej časti.

4.1. Call opcia ako pôžička

Call opcia je derivátom akcie a dáva držiteľovi právo kúpiť podkladovú akciu za cenu K (strike price) v čase maturity. Na prvý pohľad nie je jasné, ako súvisí call opcia s pôžičkou. Pri oceňovaní call opcie sa však snažíme syntetizovať opciu kúpou akcie a predajom dlhopisu. Vytvoríme tzv. replikačné portfólio a ak bude dávať toto portfólio rovnaké výplaty ako call opcia, tak má aj rovnakú hodnotu a môžeme tak oceniť call opciu. Replikačné portfólio call opcie pozostáva z nákupu φ kusov podkladovej akcie a ψ kusov dlhopisu. Môžeme teda napísať, že

$$Call_t = \varphi_t S_t + \psi_t B_t$$

Pre call opciu európskeho typu platí

$$\varphi_t = \Phi(d_1) = \delta$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[ln\frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma}{2})^2(T-t)\right]$$

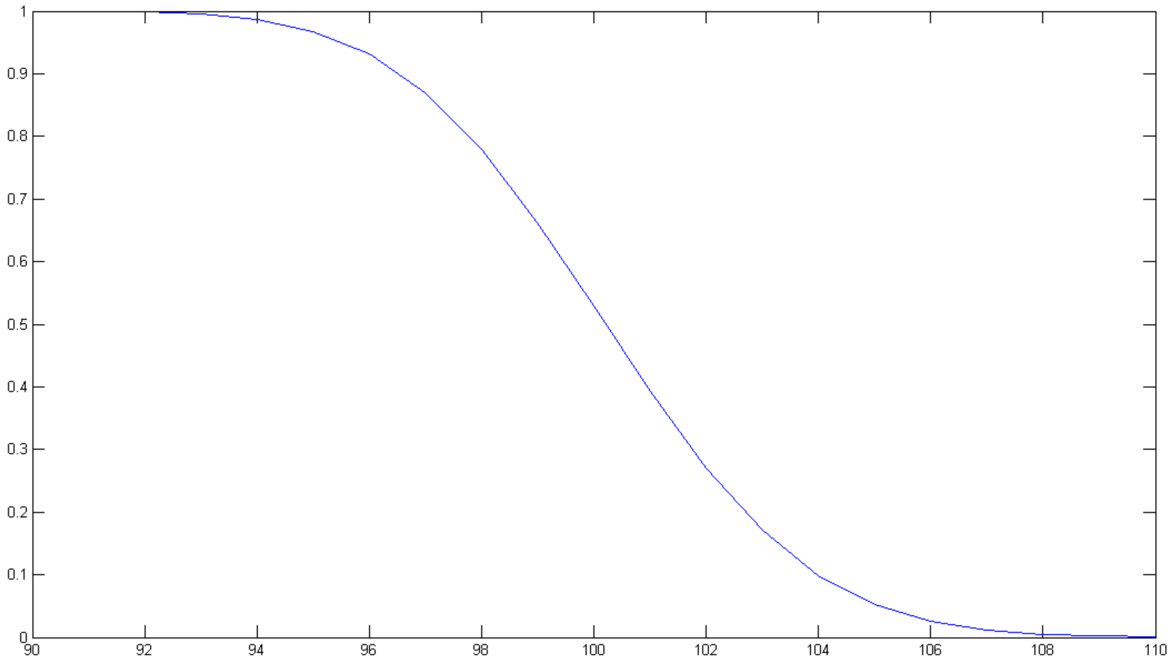
Zároveň platí, že $\psi_t < 0$. To znamená, že dlhopisy budeme predávať, čo je to isté ako požičať si peniaze za bezrizikovú úrokovú mieru. Ak si teda investor nedokáže požičať priamo, môže získať prostriedky pomocou kúpy opcie. Takýmto spôsobom vytvorí spomínaný efekt páky. Treba si ešte uvedomiť, že distribučná funkcia nadobúda hodnoty z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a teda platí, že

$$0 \leq \varphi_t \leq 1$$

Kúpou call opcie teda získame iba nejakú časť akcie, nie celú akciu. Na trhu existuje v ideálnom prípade veľké množstvo call opcií vypísaných na našu akciu, ktoré sa líšia svojou maturitou a realizačnou cenou (strike). Aby sme si medzi nimi vedeli vybrať, pozrieme sa najprv na maturitu opcie. Opcie európskeho typu sú splatné iba v čase maturity (na rozdiel od amerických opcií, ktoré sú splatné aj pred dosiahnutím maturity). Investor však nemusí opciu uplatniť, môže sa ju rozhodnúť predať. Z tohto dôvodu nás maturita opcie veľmi nezaujíma a v simuláciách zvolíme jej hodnotu na jeden mesiac.

4.2. Voľba strike price

Dôležitejším parametrom bude K, pretože výška striku výrazne ovplyvňuje hodnotu φ_t. Obrázok 4.1 zobrazuje φ_t ako funkciu K. Parametre sme zvolili $S = 100, \tau = \frac{1}{12}$, pričom τ je čas do maturity opcie.



Obrázok 4.1 Delta opcie ako funkcia K

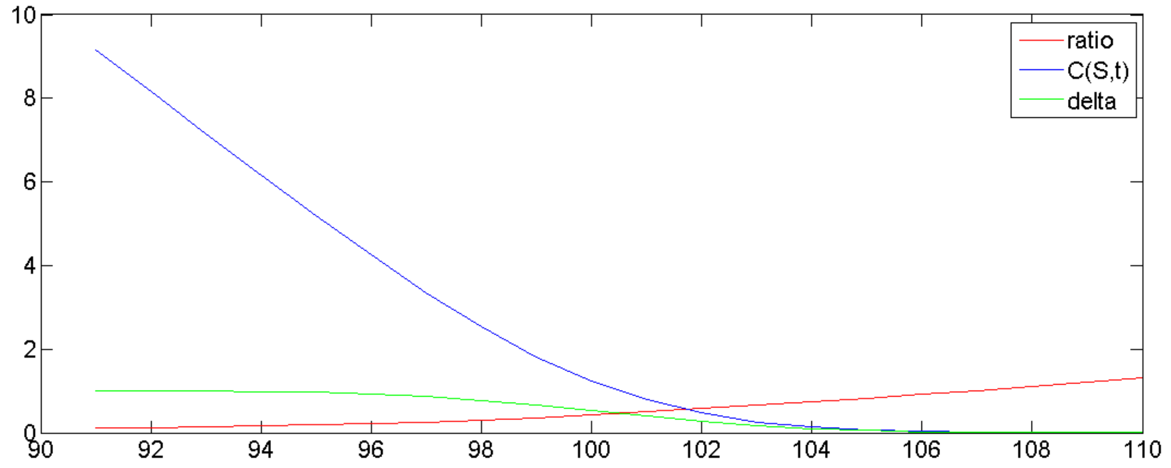
Vidíme, že ak je $K < 90$, tak δ približne 1 a ak je strike vyšší ako 110, tak δ klesá k nule. Podobne sa však správa aj cena opcie. Black-Scholesovu cenu opcie môžeme pri európskej call opcii vypočítať explicitne zo vzorca

$$Call(S_t, t) = \Phi(d_1)S_t - \Phi(d_2)Ke^{-r(T-t)}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Do grafu teda pridáme aj hodnotu opcie a pre lepšie porovnanie aj pomer

$$ratio = \frac{\delta}{C(S_t, t)}$$



Obrázok 4.2 Cena opcie, delta opcie a ich pomer v okolí ceny akcie

Z grafu na obr. 4.2 vyplýva, že pomer δ a ceny opcie je rastúcou funkciou K a teda čím vyššie K zvolíme, tým väčšiu páku si dokážeme vytvoriť. Na druhej strane vidíme, že už pri hodnote $K = 105$ je cena opcie aj delta skoro nulová. Takéto opcie sú spravidla nedostupné na trhu a navyše je obchodovanie s nimi aj neprehľadné – pri veľmi nízkej cene opcie by sme potrebovali nakupovať veľké množstvá opcií. Najčastejšie sa obchodujú opcie, ktoré majú realizačnú cenu blízko samotnej ceny akcie, preto aj v našich simuláciách budeme voliť $K \in (0.95S, 1.05S)$.

4.3. Algoritmus s použitím opcií

Cieľom použitia opcií v tejto modifikovanej stratégii nie je nezodpovedne zvyšovať vystavenie s cieľom zvyšovania strednej hodnoty stratégie, ale uspokojenie dopytu stratégie po akciách v zmysle rovnice

$$E_t = mC_t$$

Preto budeme používať opcie len v prípade, ak

$$E_t > V_t$$

a teda chceme investovať do akcií viac prostriedkov, než máme momentálne k dispozícii. Použitím opcií sa nám môže podariť nasýtiť vystavenie, ale to závisí od vytvorenej páky a teda od zvolenej hodnoty K. Algoritmus, ktorý použijeme môžeme zhrnúť do nasledujúcich krokov

1. Inicializácia – nastaví sa hodnota parametrov $\mu, \sigma, r, T, S_0, Z, m, \Delta, \mathrm{p}, \tau, \mathrm{K}(\mathrm{S_t})$ a vypočíta sa hodnota dna pre všetky iterácie

2. V i-tom kroku sa vypočíta

- $C_i = V_i - dno_i$
- $E_i = \max(mC_i, 0)$

3. Porovná sa hodnota V_i a E_i a ak

- $E_i \leq V_i$, investujeme celú hodnotu vystavenia do akcií a zvyšok do dlhopisov, hodnota portfólia v ďalšej iterácii je potom
$$V_{i+1} = E_i \frac{S_{i+1}}{S_i} + (V_i - E_i)e^{r\Delta} + p$$
- $E_i > V_i$, znamená to, že chceme investovať do akcií viac, ako máme k dispozícii a preto by sme si chceli požičať, teda nakupovať opcie.

4. Vypočítame hodnotu call opcie $Call_i$ a deltu tejto opcie $\delta = \varphi_t = \Phi(d_1)$

5. Do akcií chceme investovať E_i peňazí. Počet akcií, ktoré si chceme kúpiť označíme pomocnou premennou

$$N_i = \frac{E_i}{S_i}$$

6. Ak $N_i > \frac{V_i}{\delta Call_i}$, tak aj keby sme investovali celý majetok do opcií, stále nedokážeme uspokojiť dopyt stratégie po akciách. Pokúsime sa ale aspoň čo najviac priblížiť k dopytu a investujeme všetko do opcií. Počet kúpených opcií označíme k_2.

7. Ak $N_i \leq \frac{V_i}{\delta Call_i}$, budeme investovať do akcií aj do opcií. Počet kúpených akcií označíme k_1. Keďže chceme prioritne nakupovať akcie, aby sme ich kúpili čo najviac, musíme splniť nasledujúce rovnice

$$k_1 + \delta k_2 = N$$

$$k_1 S_i + k_2 Call_i = V_i$$

Takto máme zabezpečené, že kúpime presne toľko opcií, koľko potrebujeme a minieme na to všetky prostriedky, ktoré máme k dispozícii.

8. Počkáme kým uplynie čas Δ a všetky opcie predáme za novú cenu $Call_{i+1}$ a vypočítame novú hodnotu portfólia

$$V_{i+1} = k_1 S_{i+1} + k_2 Call_{i+1} + p$$

9. $i = i + 1$

Najdôležitejšími krokmi tohto algoritmu sú body 6 a 7, kedy sa rozhoduje, koľko opcií bude investor nakupovať. Kľúčovou časťou rozhodovania je v tomto prípade porovnanie počtu akcií, ktoré by sme chceli kúpiť, keby máme dostatok peňazí (N) a množstva akcií, ktoré dokážeme získať, keď investujeme všetko do opcií $\left(\frac{V_i}{\delta Call_i}\right)$. Vieme, že δ aj $Call_i$ závisia od K a zároveň N a V_i nezávisia od K. Preto aj splnenie podmienky v bodoch 6,resp. 7 závisí od nastavenia K. Keďže našou snahou je na jednej strane naplniť vystavenie čo najviac a na druhej strane nepoužívať opcie s vysokým K, ako riešenie sa ponúka nevoliť hodnotu K vopred počas inicializácie, ale priamo vo vnútri algoritmu. Toto riešenie by však značne skomplikovalo a predĺžilo algoritmus, preto si ho necháme ako možné vylepšenie algoritmu a zatiaľ budeme považovať K ako fixný podiel S_t, ktorý určíme už na začiatku.

4.4. Vplyv multiplikátora a hodnoty zaistenia na stratégiu používajúcu opcie

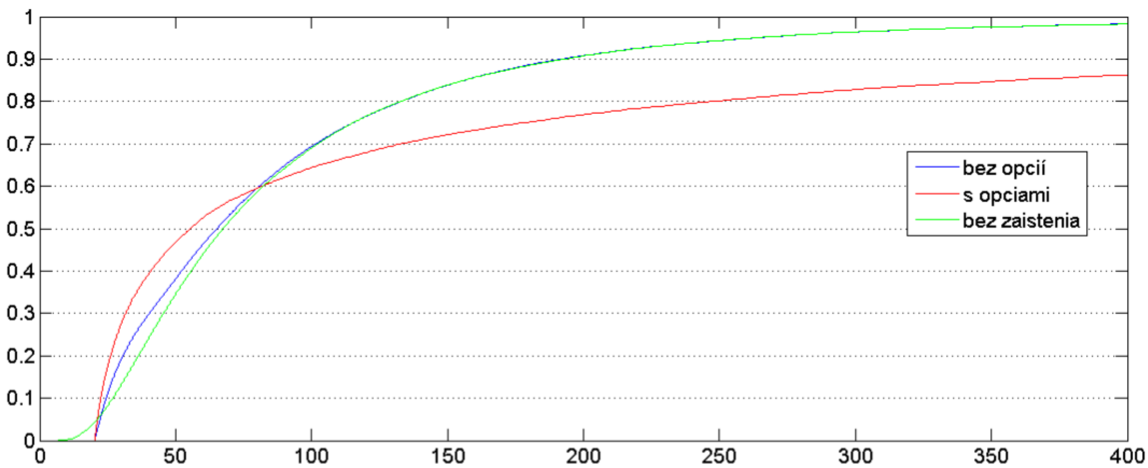
V tomto prípade môžeme skúmať, ako zmena nastavenia vstupných parametrov ovplyvní nielen rozdelenie hodnoty investície v čase T, ale aj vplyv na samotné používanie opcií. Navyše môžeme porovnávať stratégiu používajúcu opcie a stratégiu, ktorá opcie nepoužíva. Pre investora je najlepšia situácia, kedy si môže požičať za bezrizikovú úrokovú mieru. Použitím opcií sa k tomuto cieľu priblížime a teda očakávame, že sa zlepší aj investorov úžitok z takejto stratégie. Na druhej strane ale opcie zvýšia objem investovaný do akcií a teda aj varianciu stratégie, čo môže prekážať investorovi s vysokou averziou k riziku. Aj v jeho prípade by sme však vhodným nastavením parametrov mohli dosiahnuť zlepšenie oproti stratégii nepoužívajúcej opcie.

Pri simuláciách budeme používať 4 rôzne hodnoty multiplikátora a 2 úrovne zaistenia pre stratégie s opciami aj bez opcií. Takto dostaneme 16 rôznych situácií, ktoré sa budeme snažiť navzájom porovnať. To by sa síce s problémami dalo zobraziť do tabuľky, ale grafy distribučných funkcií by sa už zobraziť nedali, preto najprv budeme skúmať iba vplyv multiplikátora a zaistenie ostane konštantné, potom zafixujeme hodnotu multiplikátora a budeme meniť úroveň zaistenia a obidva parametre súčasne budeme meniť iba v niekoľkých prípadoch. Zaujímať nás okrem priemeru, mediánu a CE bude aj to, do akej miery sa používajú opcie. To môžeme sledovať napríklad meraním počtu dní, kedy sme investovali aspoň niečo do opcií a sledovaním počtu dní, kedy sme investovali všetko do opcií.

4.4.1. Porovnanie vplyvu opcií pri zmene multiplikátora

V tejto časti budeme porovnávať tri stratégie. Prvá stratégia je najjednoduchšia a pôjde o metódu bez zaistenia. Druhá stratégia bude so zaistením, ale nebude využívať opcie a tretia stratégia bude so zaistením a s využitím opcií. Tieto tri stratégie si porovnáme pre rôzne nastavenia parametrov CPPI stratégie – multiplikátoru a zaistenia a na základe výsledkov sa pokúsime nastaviť parametre používania opcií tak, aby mal investor pre každú stratégiu čo najvyšší CE.

Keďže chceme vidieť vplyv opcií, potrebujem na začiatok stratégiu, ktorá bude investovať veľa do akcií a málo do dlhopisov. Zvolíme preto nižšiu hodnotu zaistenia $Z = 20$ a strednú hodnotu multiplikátora $m = 2$ (na základe skúseností z kapitol 2 a 3). Ako prvé si načrtneme empirické distribučné funkcie(EDF) týchto troch stratégií (Obrázok 4.3 Empirické distribučné funkcie pre m=2 a Z=20.



Obrázok 4.3 Empirické distribučné funkcie pre m=2 a Z=20

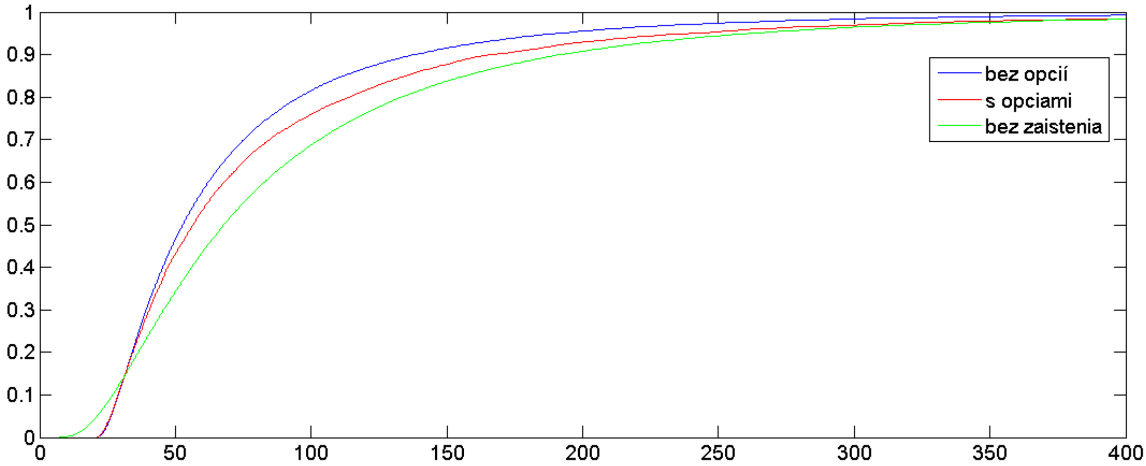
Stratégia používajúca opcie sa od ostatných výrazne odlišuje. EDF stratégie bez zaistenia začne rásť ako prvá, pretože jej hodnota môže klesnúť aj pod 20, čo nastalo v menej ako 10% simuláciách. Potom však rastie najpomalšie a až po hodnotu približne 50 sa javí táto stratégia ako najlepšia. V tejto oblasti sa k nej začne približovať stratégia bez opcií a EDF týchto dvoch stratégií prakticky splynú. Na rozdiel od nich však EDF stratégie používajúcej opcie najprv prudko rastie, čo znamená, že s veľkou pravdepodobnosťou dopadne táto stratégia blízko hodnoty zaistenia. Vidíme, že v približne 60% prípadoch dopadne tretia stratégia najhoršie, no potom sa trend prudko zmení a EDF tejto stratégie je takmer vodorovná (maximálna hodnota bola až 18 000). Z grafu vyplýva, že stratégia s opciami investuje príliš veľa do akcií a ak sa akciám nedarí, s veľkou pravdepodobnosťou dopadne najhoršie, až takmer na zaistenie. Ak sa však akciám darí, takáto stratégia dopadne mnohonásobne lepšia ako stratégia nepoužívajúca opcie. Preto bude takáto investícia lákať iba investora s nízkou averziou k riziku. Aby sme si túto hypotézu overili, pozrieme sa na priemer, medián a CE týchto stratégii, ktoré sú uvedené v tabuľke 4.1.

	mean	median	CE3	CE4	CE6	CE9	podiel dní s investíciou do opcií	podiel dní s investíciou iba do opcií
s opciami	397.6	55.51	38.4	33.92	29.67	26.89	0.807	0.079
bez opcií	94.16	65.19	42.9	37.68	32.21	28.55	-	-
bez zaistenia	96.06	67.47	41.94	34.09	24.23	16.36	-	-

Tabuľka 4.1 pre hodnoty m=2 a Z=20

Stratégia používajúca opcie má veľmi vysokú strednú hodnotu, no aj napriek tomu je jej CE najnižší pre všetky hodnoty averzie k riziku. To znamená, že aj pre investora s pomerne malou averziou k riziku je stále veľmi riziková. Aby sme znížili rizikovosť akcie, môžeme znížiť multiplikátor alebo zvýšiť hodnotu zaistenia. V prvom kroku znížime hodnotu multiplikátoru na $m = 1$. Z tabuľky 4.1 vidíme, že multiplikátor 2 bol nastavený skutočne vysoko, keď vo viac ako 80% prípadoch investovala stratégia do opcií, teda investor chcel kúpiť viac akcií, než si mohol dovoliť. V skoro 8% prípadov dokonca investoval výlučne do opcií, čo viedlo k tomu, že ak cena akcie klesla, stratégia často skončila tesne nad hodnotou zaistenia a ak sa akciám darilo, hodnota investícia sa zvyšovala až do stotisícových hodnôt.

Graf pre hodnotu multiplikátora $m = 1$ je na obr. 4.4



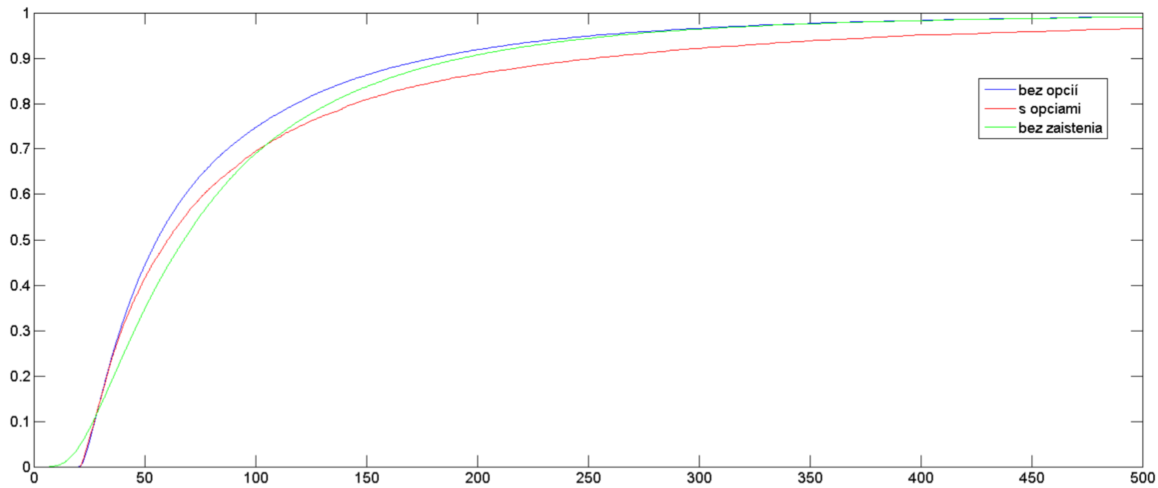
Obrázok 4.4 Empirické distribučné funkcie pre hodnotu m=1 a Z=20

Správanie stratégií sa dramaticky zmenilo. EDF stratégie s opciami je na začiatku takmer identická EDF stratégie bez opcií a od istej hodnoty pri pravdepodobnosti približne $p = 0.3$ sa od nej oddelí a je pre všetky hodnoty pod ňou, teda stratégia s opciami je výhodnejšia. Na druhej strane stratégia s takýmto multiplikátorom nikdy neprináša obrovské výnosy ako pri multiplikátore 2. Aby sme si overili, že je táto stratégia lepšia, pozrieme sa na hodnoty priemeru, mediánu a CE v tabuľke 4.2

m=1,Z=20	mean	median	CE3	CE4	CE6	CE9	podiel dní s investíciou do opcií	podiel dní s investíciou iba do opcií
s opciami	86.4	56.48	45.71	41.51	36.51	32.56	0.302	0.037
bez opcií	74.05	52.72	44.68	41.06	36.51	32.77	-	-
bez zaistenia	96.17	67.89	42.02	34.09	24.01	16.18	-	-

Tabuľka 4.2 pre hodnoty m=1 a Z=20

Z tabuľky 4.2 vyplýva, že stratégia s opciami je skutočne lepšia ako bez opcií a táto výhoda sa stráca s rastúcou averziou k riziku. Investor s najvyššou averziou k riziku dokonca uprednostní stratégiu bez opcií a aj keď to z grafu EDF nie je vidieť, pravdepodobne je stratégia bez opcií mierne lepšia v prípade, že sa akcii nedarí. Vidíme, že pri multiplikátore 1 sa oplatí investovať do opcií, ale pridaná hodnota je pomerne malá. Skúsime preto ešte multiplikátor z intervalu $(1,2)$. EDF stratégie s $m = 1.25$ je na obr. 4.5



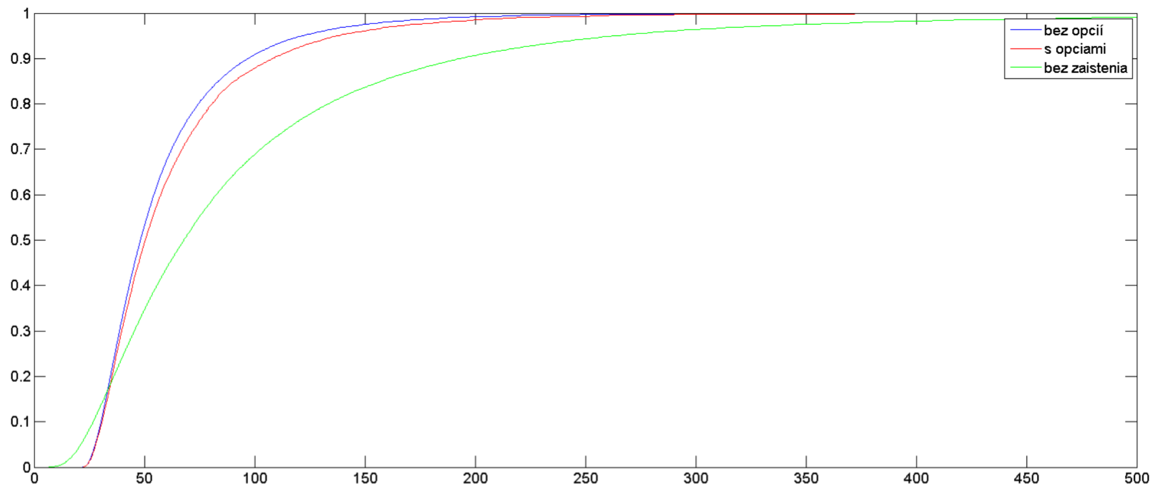
Obrázok 4.5 EDF pre hodnoty parametrov m=1.25 a Z=20

Z grafu vidíme, že aj pri tejto hodnote multiplikátora ostane EDF stratégie využívajúcej opcie napravo od stratégie bez opcií, avšak z tabuľky 4.3 vyplýva, že zvýšením multiplikátora síce stúpol medián, ale CE pokleslo oproti tab. 4.2 pre všetky hodnoty averzie k riziku.

m=1.25,Z=20	mean	median	CE3	CE4	CE6	CE9	podiel dní s investíciou do opcií	podiel dní s investíciou iba do opcií
s opciami	123.39	60.58	45.09	40.19	34.84	30.94	0.591	0.048
bez opcií	87.47	55.56	44.21	39.94	35.01	31.24	-	-
bez zaistenia	96.06	67.47	41.94	34.09	24.23	16.36	-	-

Tabuľka 4.3

Výsledky simulácií naznačujú, že zvyšovanie multiplikátoru nepovedie k zvýšeniu CE. Môžeme ešte vyskúšať použiť multiplikátor menší ako 1. Takáto stratégia je veľmi konzervatívna, ale pri použití opcií môže priniesť zaujímavé výsledky. EDF tejto stratégie vyzerá veľmi podobne ako pre multiplikátor 1, zaujímavejší je pohľad na tabuľku 4.4 prislúchajúcu tejto stratégii.



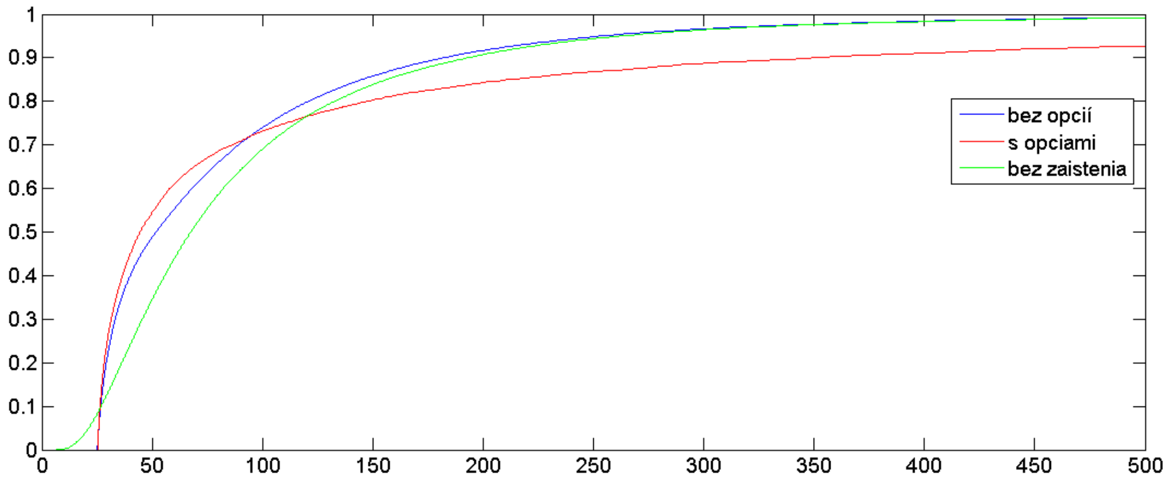
Obrázok 4.6 EDF stratégií pre multiplikátor menší ako 1

m=0.75 Z=20	mean	median	CE3	CE4	CE6	CE9	podiel dní s investíciou do opcií	podiel dní s investíciou iba do opcií
s opciami	62.74	50.43	45.06	42.19	38.27	34.73	0.205	0.026
bez opcií	58.21	48.23	43.73	41.2	37.63	34.31		
bez zaistenia	96.06	67.47	41.94	34.09	24.23	16.36		

Tabuľka 4.4

Táto stratégia používa opcie zatiaľ v najmenšej miere a dá sa predpokladať, že sa tak deje najmä na začiatku, kým je dno záporné. Prejavilo sa to zatiaľ najvyššou hodnotou CE pre hodnoty $\delta = 4{,}6{,}9$. Investor s vysokou averziou k riziku sa teda bojí používať opcie a hodnotu multiplikátora bude voliť veľmi konzervatívne.

Vplyv multiplikátora sme už otestovali, teraz môžeme skúsiť zmeniť hodnotu zaistenia. Použijeme teda parametre $m = 2$ a $Z = 25$. Zvýšením zaistenia o 25% znížime používanie opcií aj investovanie do akcií, stratégia by teda mala mať nižšiu varianciu a teda by mala byť prijateľnejšia aj pre investora s vyššou averziou k riziku. Obrázok 4.7 zobrazuje grafy EDF pre hodnotu zaistenia. Je potrebné uvedomiť si, že grafy s rôznou hodnotou zaistenia nie je možné porovnávať podľa tvaru EDF, keďže ich nenulové hodnoty začínajú v iných bodoch a teda pre vyššie hodnoty zaistenia sú tieto funkcie strmšie, ale zároveň posunuté doprava a preto sa nedá určiť, ktorá je pre investora lepšia. V tomto prípade v 70% prípadov dopadne horšie stratégia využívajúca opcie než stratégia bez opcií, ale môžeme si všimnúť, že ak dopadne stratégia s opciami horšie, je rozdiel v hodnote portfólia v čase T rádovo v jednotkách, kdežto v prípade, že dopadne lepšie stratégia s opciami je rozdiel rádovo v desiatkach až stovkách.



Obrázok 4.7 EDF stratégií s parametrami m=2 a Z=25

Porovnanie týchto stratégií, ale aj frekvenciu používania opcií zobrazuje Tabuľka 4.5

m=2 Z=25	mean	median	CE3	CE4	CE6	CE9	podiel dní s investíciou do opcií	podiel dní s investíciou iba do opcií
s opciami	231.37	44.53	40.12	36.83	33.51	31.23	0.615	0.035
bez opcií	86.48	52.14	41.96	38.28	34.45	31.8	-	-
bez zaistenia	96.06	67.47	41.94	34.09	24.23	16.36	-	-

Tabuľka 4.5

Zvýšením zaistenia sa nám podarilo znížiť používanie opcií, no výrazne klesol aj medián tejto stratégie. CE síce stúpol oproti situácii s $m = 2$, no stále sa viac oplatí nepoužívať opcie. Zdá sa teda, že multiplikátor je efektívnejším nástrojom na ovládanie množstva opcií, ktoré stratégia využíva.

4.4.2. Zhrnutie

Použitím opcií ako spôsobu bezúročnej pôžičky si môže investor požičať za bezrizikovú úrokovú mieru. Môže teda nakupovať toľko akcií, koľko od neho CPPI metóda vyžaduje. Táto možnosť výrazne zvyšuje strednú hodnotu investície v čase T, niekedy dokonca aj medián, no zároveň výrazne zvyšuje rizikovosť stratégie a pravdepodobnosť, že investícia padne na hodnotu zaistenia. Z toho dôvodu je CE u investora s vysokou averziou k riziku často oveľa nižší pri využití opcií, aj keď použitie nízkeho multiplikátora dáva isté zlepšenie. Takáto zhora neohraničená CPPI metóda (nakupuje opcie aj v prípade, že sa investícii veľmi darí) teda nie je pre rizikovo averzného investora lákavá. V ďalšej kapitole sa preto pokúsime vylepšiť algoritmus tak, aby sme zvýšili investorovo CE z našej stratégie.

5. Vylepšenie algoritmu využívajúceho opcie

Využitím opcií si môžeme čiastočne požičiavať a vďaka tomu sa náš algoritmus približuje CPPI metóde bez ohraničenia na vystavenie. S tým sa však objavujú viaceré problémy, ktoré má aj samotná CPPI metóda bez ohraničenia na vystavenie. Pokiaľ sa akcii darí, dno sa stáva nesignifikantné v porovnaní s hodnotou investície. Ďalším problémom je obrovské vystavenie v prípade, ak cena akcie dlhodobo rastie a multiplikátor je vyšší ako 1. V takom prípade sa investor dostane do situácie, v ktorej čím väčší majetok investor má, tým viac si požičiava. To je v rozpore s princípom „stochastic lifestyling", ktorý sme popísali v prvej kapitole a ktorý je optimálny v prípade bez poistenia portfólia. Investor, riadiaci sa týmto princípom bude na začiatku investovať viac do akcií a s blížiacim sa koncom investičného obdobia bude čoraz opatrnejší. Pre náš algoritmus to znamená, že opcie bude nakupovať iba na začiatku a v neskorších fázach bude investor nakupovať iba akcie a dlhopisy.

Prvým krokom teda bude obmedzenie opcií. Zatiaľ sa opcie používajú podľa podmienky

$$E_t > V_t$$

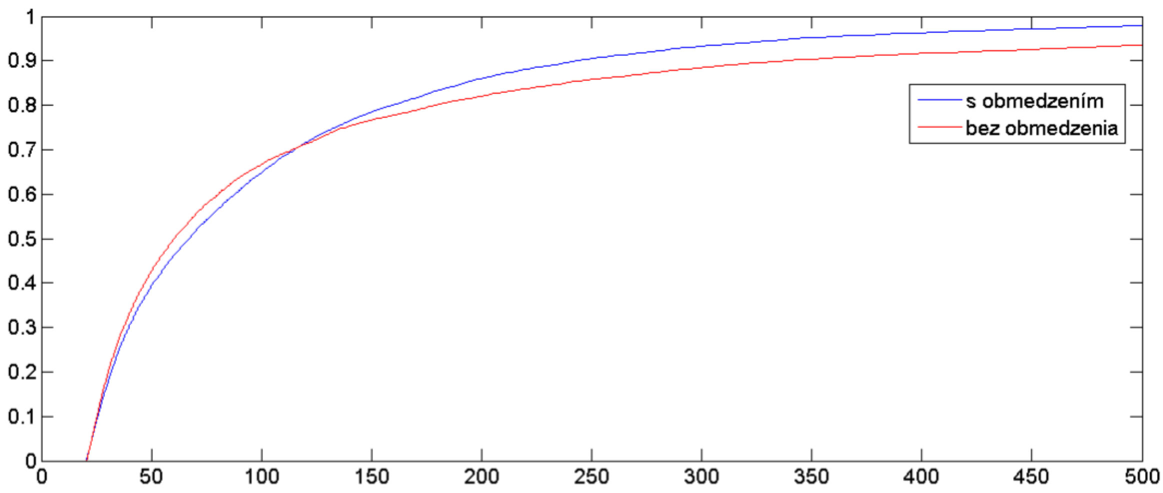
a teda ich používame napríklad aj v prípade, kedy $Dno_t = 20, V_t = 60$ a $E_t = 80$. To je ale v priamom rozpore s princípom „stochastic lifestyling" a aj z tvaru funkcie užitočnosti vidíme, že ďalšie zvyšovanie hodnoty portfólia nám už zvýši úžitok menej v porovnaní s poklesom úžitku v prípade poklesu hodnoty akcie. V praxi tento problém vidíme napríklad na grafe v obr. 4.3 a tab. 4.1. Stratégia tam investovala príliš veľa do opcií a aj keď stredná hodnota majetku v čase T bola veľmi vysoká, CE z tejto stratégie bol veľmi nízky. Zavedieme teda dodatočnú podmienku na používanie opcií v tvare

$$V_t < cZe^{r(T-t)}$$

Pre nízku hodnotu c bude investor používať opcie najmä v čase, keď je hodnota dna ešte nižšia ako nula, teda na začiatku investície. S plynúcim časom sa hodnota dna blíži k hodnote $Ze^{r(T-t)}$, čo môžeme pozorovať aj na obr. 3.1. Ak podmienka funguje správne, zníži sa počet dní, kedy investujeme do opcií, ale počet dní, kedy sa investuje celý majetok do opcií ostane približne zachovaný (toto nastáva iba na začiatku investičného obdobia, kedy nechceme opcie zakazovať). Vyskúšame teda zakomponovať túto podmienku do algoritmu a výsledky porovnáme s pôvodným algoritmom bez obmedzenia na opcie pre rôzne hodnoty multiplikátora a zaistenia. Keďže chceme pozorovať vplyv obmedzenia opcií, vyberieme si takú stratégiu, ktorá používa opcie výraznejšie, teda ma nízke zaistenie a multiplikátor väčší ako 1. Porovnanie nájdeme v tab. 5.1 a obr. 5.1.

m=1.5, Z=20	mean	median	CE3	CE4	CE6	CE9	podiel dní s investíciou do opcií	podiel dní s investíciou iba do opcií
s opciami	170.44	60.36	42.88	37.91	32.83	29.31	0.732	0.059
s obmedzenim na opcie	113.41	67.21	44.24	38.84	33.25	29.43	0.306	0.058

Tabuľka 5.1

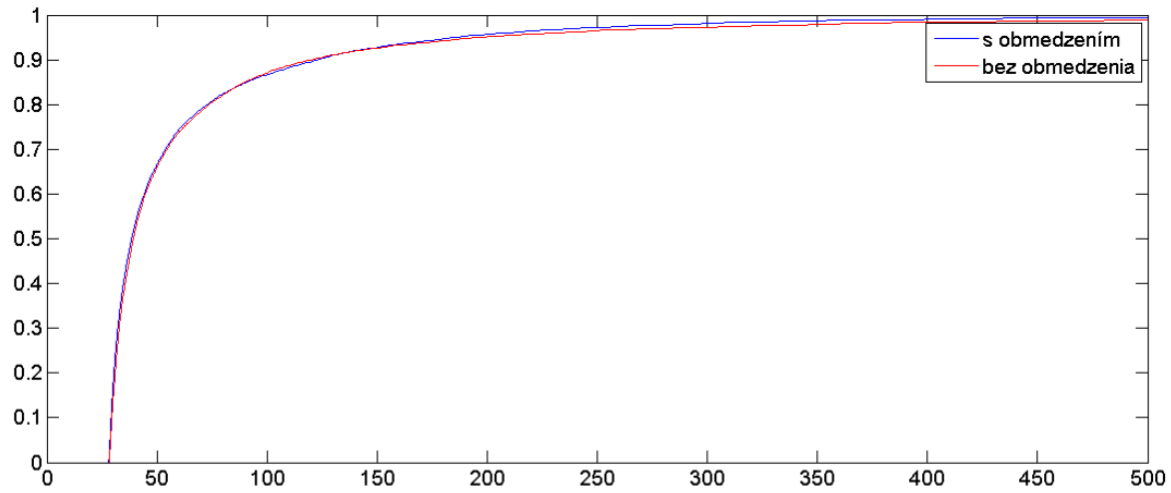


Obrázok 5.1 EDF stratégie s parametrami m=1.5 a Z=20

Vidíme, že obmedzenie na používanie opcií znížilo priemernú hodnotu investície a zvýšilo medián. CE však stúplo pre všetky úrovne averzie k riziku, preto môžeme konštatovať, že stratégia s obmedzením opcií je pre dané hodnoty parametra lepšia. Ohraničenie na opcie navyše znížilo používanie opcií (vo viac ako v 40% dní prestane stratégia nakupovať opcie kvôli ohraničeniu), ale počet dní, kedy sa nakupovali iba opcie ostal takmer nezmenený. S takýmto ohraničením na používanie opcií bude investor nakupovať opcie najmä v čase, keď je ešte dno záporné. Dno však vôbec nezávisí od hodnoty multiplikátora, preto necháme multiplikátor konštantný a zvýšime hodnotu zaistenia na $Z = 28$. Porovnanie takejto stratégie s obmedzením opcií a bez obmedzenia nájdeme v tab. 5.2 a obr. 5.2

m=1.5, Z=28	mean	median	CE3	CE4	CE6	CE9	podiel dní s investíciou do opcií	podiel dní s investíciou iba do opcií
s opciami	73.92	39.24	39.98	38.07	35.87	34.14	0.20972869	0.009840774
s obmedzenim na opcie	64.02	38.45	39.34	37.47	35.32	33.34	0.132534385	0.009956706

Tabuľka 5.2

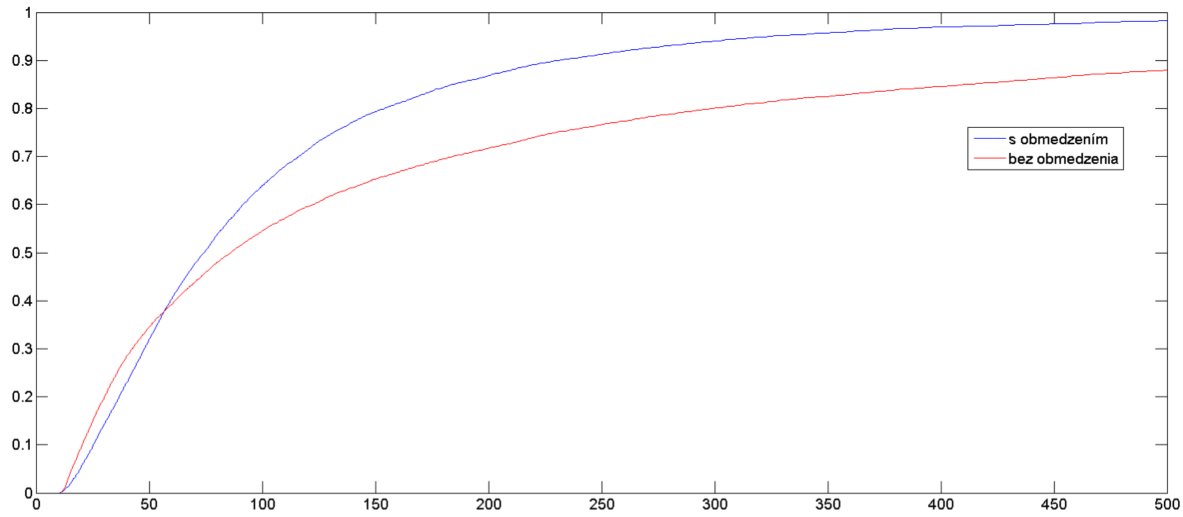


Obrázok 5.2 Porovnanie EDF pri pridaní podmienky pri vysokej hodnote zaistenia Z=28

Pri takomto vysokom zaistení má stratégia obmedzený priestor na nákup akcií. Podmienka na nákup opcií je teda aktívna len v malom počte prípadov (približne 7%). Z pohľadu CE, mediánu aj priemeru stratégiu zhoršuje. To sa dá interpretovať tak, že aj rizikovo averzný investor chce investovať do akcií viac, ako mu dovoľuje nami zvolené ohraničenie na opcie. Rozdiely v CE sú však minimálne a tak môžeme konštatovať, že pri vysokom zaistení nie je potrebné opcie obmedzovať. Môžeme sa teda pozrieť aj na opačnú situáciu a zvoliť veľmi nízku hodnotu zaistenia. V takomto prípade je dno záporné počas veľmi dlhej doby a obchodovanie s opciami bude veľmi časté. Výsledky stratégie s týmito parametrami nájdeme v tab. 5.3 a obr. 5.3

m=1.5, Z=10	mean	median	CE3	CE4	CE6	CE9	podiel dní s investíciou do opcií	podiel dní s investíciou iba do opcií
s opciami	294.51	86.1	36.62	29.41	22.85	18.83	0.961115298	0.137858075
s obmedzenim na opcie	110.98	74.19	41.72	33.84	25.55	20.2	0.198835079	0.126584762

Tabuľka 5.3

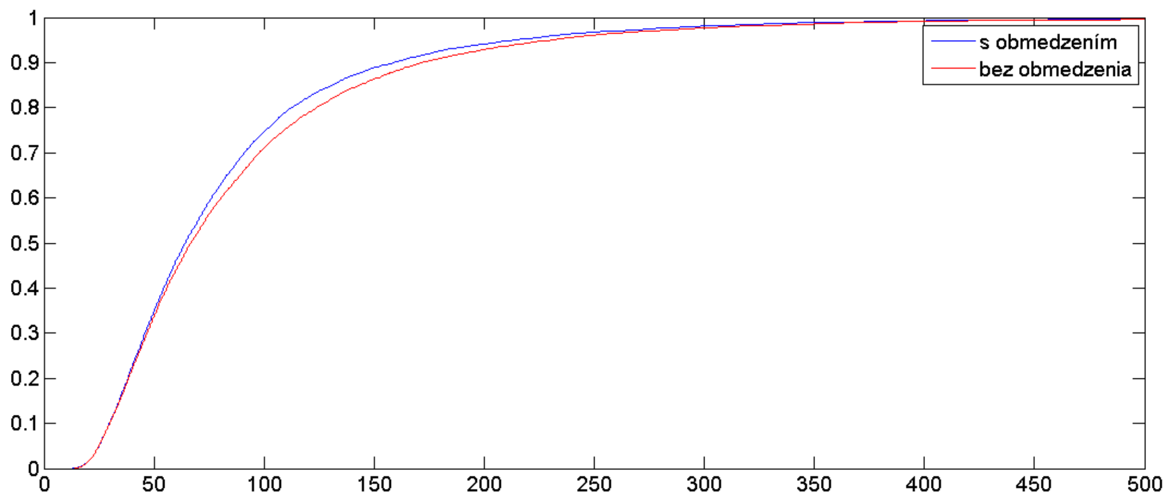


Obrázok 5.3 Porovnanie EDF pri pridaní podmienky pri nízkej hodnote zaistenia Z=10

Situácia je veľmi podobná ako pri strednej hodnote zaistenia. Stratégia je veľmi riziková, do akcií investuje priveľa a investor teda privíta obmedzenie opcií, čo sa prejaví zvýšením CE pre všetky hladiny averzie k riziku. Na záver môžeme skúsiť nízke zaistenie a nízku hodnotu multiplikátora. Výsledky stratégie s $m = 0.75$ a $Z = 10$ sú uvedené v tab. 5.4 a obr. 5.4.

m=0.75, Z=10	mean	median	CE3	CE4	CE6	CE9	podiel dní s investíciou do opcií	podiel dní s investíciou iba do opcií
s opciami	89.55	66.56	47.75	41.54	33.72	27.45	0.381610179	0.063250099
s obmedzením na opcie	84.31	64.14	47.05	41.18	33.52	27.16	0.200502897	0.062754722

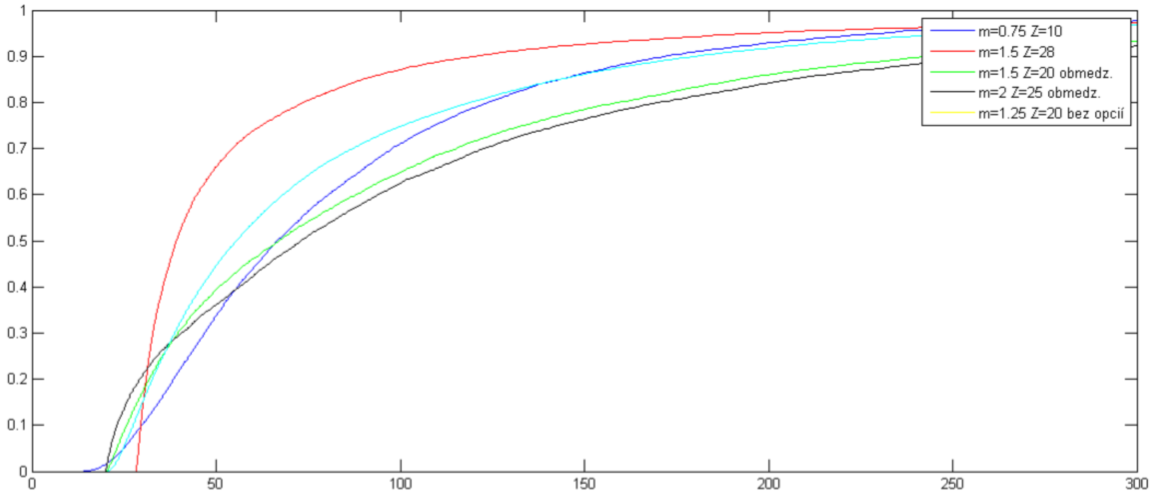
Tabuľka 5.4



Obrázok 5.4 Porovnanie EDF pri pridaní podmienky pri nízkej hodnote zaistenia Z=10 a nízkej hodnote multiplikátora m=0.75

V tomto prípade sa opäť potvrdilo, že ak sa opcie používajú málo, ich obmedzenie zníži strednú hodnotu, medián aj CE investora. Zaujímavým výsledkom je CE3, ktoré je pri tejto stratégii doteraz vôbec najvyššie.

Vidíme, že pre vysoké hodnoty multiplikátora poskytuje obmedzenie používania opcií zlepšenie, no vo všeobecnosti to neplatí. Obmedzenie však vytvára pre investora nové možnosti a vďaka tomu môže stratégiu lepšie prispôsobiť svojim preferenciám. O rôznorodosti stratégií, ktoré dokáže investor vytvoriť zmenou zaistenia, multiplikátora, použitím opcií a obmedzenia opcií sa môžeme presvedčiť na obr.



Obrázok 5.5 Porovnanie EDF rôznych stratégií

Investor s vysokou averziou k riziku bude voliť častejšie nízky multiplikátor a opcie bude používať iba v prípade, ak sa ich používanie obmedzí. Investor s nízkou averziou k riziku môže zvoliť aj vyššiu hodnotu multiplikátora, ale aj on opcie využije len v obmedzenom množstve. Hodnota zaistenia je z tohto pohľadu výnimočný parameter, pretože môže byť určená exogénne. Opcie bez obmedzenia sú dobrou voľbou napríklad v prípade, ak je investor s nízkou averziou k riziku nútený použiť stratégiu s vysokou hodnotou zaistenia.

5.1. Riziko poklesu investície pod hodnotu dna a opcie

V kapitole 3.1.1 sme spomenuli, že v diskrétnom modeli existuje riziko poklesu hodnoty investície pod hranicu zaistenia. Toto riziko vzniká v prípade, keď je multiplikátor väčší ako 1. V takom prípade si investor v CPPI metóde požičiava peniaze z dna na nákup opcií a spolieha sa, že hodnota akcií neklesne tak prudko, aby hodnota majetku klesla pod hodnotu dna. Najvyššie riziko poklesu je v situácii, kedy je vystavenie najväčšie, teda keď platí

$$E_t = mC_t$$

Pokles pod úroveň dna môžeme zapísať nasledovne (pripomeňme, že hodnotu jedného príspevku označujeme p a interval rebalancovania Δ)

$$V_{t+1} < Dno_{t+1}$$

$$E_t \frac{S_{t+\Delta}}{S_t} + (V_t - E_t)e^{r\Delta t} + p < Dno_t e^{r\Delta t} + p$$

$$m(V_t - Dno_t)\frac{S_{t+\Delta}}{S_t} < \ Dno_t e^{r\Delta t} - \ (V_t - m(V_t - Dno_t))e^{r\Delta t}$$

$$\frac{S_{t+\Delta}}{S_t} < \frac{(m-1)e^{r\Delta t}(V_t - Dno_t)}{m(V_t - Dno_t)}$$

$$\frac{S_{t+\Delta}}{S_t} < \frac{(m-1)e^{r\Delta t}}{m}$$

Táto situácia môže nastať iba v prípade, kedy je dno kladné, teda spravidla až po niekoľkých rokoch investície. Hodnota r je relatívne malá, v simuláciách je $r = 0.02$ a pri krátkych intervaloch rebalancovania portfólia ($\Delta = \frac{1}{252}$ alebo $\Delta = \frac{1}{52}$) je úročenie veľmi malé a člen $e^{r\Delta t}$ môžeme považovať za približne rovný 1. Aby teda portfólio spadlo pod hranicu zaistenia, musí cena akcie splniť nasledujúcu podmienku

$$S_{t+\Delta} < \frac{S_t(m-1)}{m}$$

V tab. 5.5 vidíme ako veľmi musí klesnúť akcia počas jedného obdobia rebalancovania na to, aby investícia skončila pod hodnotou zaistenia.

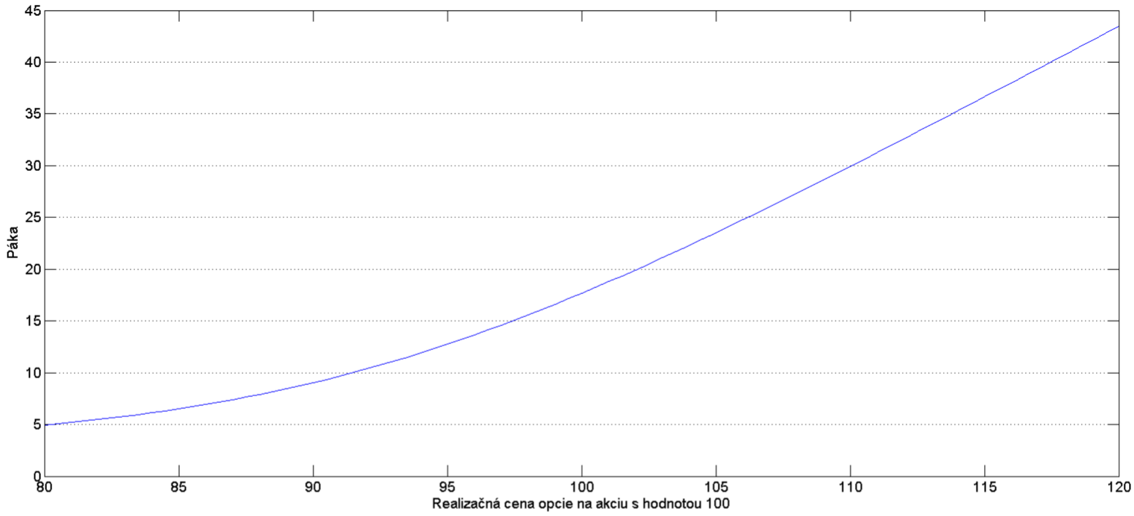
Multiplikátor	1.25	1.5	2	4	6	8
Percentuálny pokles hodnoty akcie nutný na pokles pod dno	80.00%	66.67%	50.00%	25.00%	16.67%	12.50%

Tabuľka 5.5 Pokles akcie (v percentách) potrebný na nesplnenie podmienky zaistenia pre rôzne hodnoty multiplikátora

Vidíme, že aj pri multiplikátore 8 je stále potrebný pokles o 12,5%, čo sa pravdepodobne nestane, ak rebalancujeme na dennej báze. Tejto téme sa venovali aj Balder, Brandl a Mahayni [9] a Lundvik [10]

Podobne ako multiplikátor dokážu páku vytvoriť aj opcie. Výška tejto páky závisí od realizačnej ceny opcie a je zobrazená na obr. 5.6. Označme páku L, potom

$$L = \frac{S_t}{Call_t}\delta$$



Obrázok 5.6 Páka ako funkcia realizačnej ceny opcie

Opcie teda dokážu pri vysokej hodnote K (v simuláciách používame $K = 0.95S$) vytvoriť veľmi vysokú páku, vyššiu ako najvyšší multiplikátor, ktorý používame. Je dôležité si uvedomiť, že opcie sa v algoritme využívajú najviac na začiatku, keď je dno záporné a hodnota portfólia malá. Vtedy je vankúš oveľa väčší ako hodnota investície a teda aj vystavenie prevyšuje hodnotu investície viac ako m-násobne.

$$Dno_t \ll 0$$

$$C_t = V_t - Dno_t \gg V_t$$

V prípade, ak je V_t malé síce opcie vytvárajú veľmi vysokú páku, ale investícia nemôže klesnúť pod nulu a teda ani pod dno. V prípade, ak

$$Dno_t > 0$$

síce stratégia môže klesnúť pod dno, ale maximálna páka, ktorú vytvoria opcie je m. To vyplýva z krokov 5 a 7 v algoritme stratégie (kapitola 4.3), v ktorých kupujeme práve toľko opcií, aby celkové vystavenie bolo $E_t = mC_t$. Vidíme teda, že použitie opcií zvyšuje riziko poklesu investícia pod dno iba tým, že častejšie nastáva situácia, kedy $E_t = mC_t$. Aj keď opcie dokážu vytvoriť vyššiu páku ako m, riziko poklesu sa tým nezvyšuje. Navyše stratégia používajúca opcie často používa nižší multiplikátor, pretože aj pri nižšej hodnote investuje do rizikového aktíva dostatok prostriedkov.

Pri dennom rebalancovaní portfólia je teda pravdepodobnosť prepadu pod dno malá, no za cenu vysokých transakčných nákladov. Tie sú ešte navýšené spôsobom, akým stratégia pracuje s opciami, kedy opcie v každom kroku najprv kúpi a potom všetky predá. Úprava tohto algoritmu však nie je jednoduchá, keďže by sme potrebovali mať naraz viac druhov opcií, s rôznou dobou splatnosti a rôznou realizačnou cenou, čo by výrazne predĺžilo čas simulačného behu. Oceňovanie opcií je výpočtovo najnáročnejšia časť algoritmu, preto ju chceme robiť čo najzriedkavejšie.

Záver

Cieľom práce bolo modifikovať zaistené stratégie pre jednorazové príspevky na situácie s postupnými príspevkami. Potrebné informácie o jednorazovej investícii sú v prvých dvoch kapitolách a modifikovaná stratégia je popísaná v tretej kapitole. Jadrom tejto stratégie je CPPI metóda, ktorá má dva kľúčové parametre, multiplikátor a zaistenie. Vplyv nastavenia týchto parametrov sme skúmali pomocou simulácií a každé nastavenie parametrov je opísané pomocou kvantilov rozdelenia hodnoty investície a určitostných ekvivalentov pre rôzne hodnoty averzie k riziku. Kvantily sú zobrazené najmä v grafoch empirických distribučných funkcií, CE sú uvedené vo forme tabuliek.

V štvrtej kapitole sme do stratégie pridali opcie. Ich pomocou dokáže investor nakúpiť oveľa väčší podiel rizikového aktíva. Tým zvýši strednú hodnotu, ale aj rizikovosť svojej stratégie. Z výsledkov simulácii je zrejmé, že pri správnom nastavení parametrov opcie zvyšujú CE aj kvantily danej stratégie. Problém nastáva najmä pri vysokej hodnote multiplikátora. Stratégia si v takom prípade požičiava priveľa peňazí, ktoré obratom investuje do akcií. Tým sa síce výrazne zvýši stredná hodnota investície a stratégia často prináša mnohonásobne zvýšenie hodnoty investície, často však dopadá na dno, čo nevyhovuje investorovi s averziou k riziku. Tento problém sme čiastočne vyriešili v piatej kapitole, no kvalita riešenia pomocou podmienky na využívanie opcií opäť závisí od nastavenia parametrov CPPI.

Cieľ práce sa podarilo naplniť, aj keď navrhnutá stratégia nie je optimálna. Najväčšia slabina tejto stratégie je nutnosť častého rebalancovania portfólia. V diskrétnom modeli nie je zaistenie pomocou CPPI metódy dokonalé a hodnota portfólia môže pri náhlom prepade ceny rizikového aktíva klesnúť pod úroveň zaistenia. Pri rebalancovaní na dennej báze je toto riziko malé, ale za cenu vysokých transakčných nákladov. Druhý problém spočíva v riešení investície do opcie, kedy sa opcie počas každého rebalancovania predajú a znovu kúpia, čo opäť vedie k zvýšeným transakčným nákladom. V pôvodnom modeli však uvažujeme nulové transakčné náklady, takže riešenie tohto problému nie je našou prioritou.

Investícia do opcií je v bežnom prípade veľmi riziková a preto nie je vhodná na dlhodobé sporenie. V kombinácii so zaistenými stratégiami, ktoré chránia investora pred najhoršími stratami však opcie ponúka možnosť investovať do rizikového aktíva najmä na začiatku investičného obdobia, kedy je hodnota portfólia nízka.

V práci sme videli, že vhodnosť stratégie veľmi závisí od voľby multiplikátora a zaistenia. Aj keď sme popísali vplyv týchto parametrov a spôsob, ako ich voliť, na dosiahnutie čo najvyššieho úžitku je potrebné vyskúšať viac kombinácii parametrov. Spomedzi nich si investor vyberie stratégiu s najvyšším CE, alebo s najvhodnejším tvarom empirickej distribučnej funkcie. Pri používaní CE je najdôležitejším parametrom samotná investorova averzia k riziku. V práci sme používali averziu k riziku $\gamma \in \langle 3{,}9 \rangle$. Takéto hodnoty boli použité aj v práci [3], ale napríklad Janeček v práci [11] tvrdí, že averzia k riziku pre bežného investora môže byť vyššia ako 30. Taká vysoká hodnota averzie k riziku by ale mala nepriaznivý dopad na prehľadnosť simulácií. Pre samotné skúmanie problematiky je teda vhodnejšia averzia k riziku $\gamma < 10$, ale pre správne použitie poznatkov získaných touto prácou je kľúčové správne určiť investorovu averziu k riziku.

Bibliografia

[1] P. Samuelson, „Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming," *The Review of Economics and Statistics ,* %1. vyd.51, pp. 239-246, 1969.

[2] R. C. Merton, „Lifetime Portfolio Selection under Uncertainity : The Countinuous-Time Case," *The Review of Economics and Statistics, 51,* pp. 247-257, 1969.

[3] A. Černý a I. Melicherčík, „Optimal Fund Management with Gradual Contributions".

[4] H. E. Leland a M. Rubinstein, „Replicating Options with Positions in Stock and Cash," *Financial Analyst Journal,* zv. 37, %1. vyd.37, pp. 63-71, 1981.

[5] A. Perold, „Constant Proportion Portfolio Insurance," August 1986.

[6] A. J. G. Cairns, D. Blake a D. Dowd, „Stochastic Lifestyling: Optimal Dynamic Asset Allocation for Defined Contribution Pension Plans," *Journal of Economic Dynamics and Control 30(5),* pp. 843-877, 2006.

[7] V. Mlynarovič, „Portfolio insurance strategies and their applications," *Ekonomický časopis,* pp. 355-367, 2011.

[8] *Zákon č.43/2004 Z. z. o starobnom dôchodkovom sporení a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov.*

[9] S. Balder, M. Brandl a A. Mahayni, „Effectivness of CPPI strategies under discrete-time trading," *Journal of Economic Dynamics and Control,* zv. 33, %1. vyd.1, pp. 204-220, 2009.

[10] A. Lundwik, „Portfolio unsurance methods for index-funds," 2005. [Online]. Available: http://www2.math.uu.se/research/pub/Lundvik1.pdf.

[11] K. Janeček, What is a realistic aversion to risk for real-world individual investors?, Pittsburgh: Carnegie Mellon University, 2004.

[12] C. Krommerová, Dynamic portfolio optimization with risk management and strategy constraints, 2013.

Dodatok

Do prílohy súboru prikladáme funkciu z matlabu, ktorá simuluje investície s obmedzením opcií a funkciu nepoužívajúcu opcie.

Zároveň prikladáme aj výsledky simulácií pre rôzne hodnoty parametrov pri použití opcií. Výsledky nepoužívajúce opcie sa dajú získať rýchlo spustením priloženej funkcie, keďže simulácie trvajú dlho iba v prípade použitia opcií. Výsledky sú uložené v programe MS Excel 2010, parametre jednotlivých stratégií sú v prvom riadku tabuľky.