UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

CGE BEZ GAMS

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2014 Bc. Emil HAAS

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

CGE BEZ GAMS

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

Bratislava 2014

Bc. Emil HAAS

39206817

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Emil Haas
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: CGE bez GAMS

Cieľ: Naprogramovať a otestovať nový postup na počítanie modelov všeobecnej vypočítateľnej rovnováhy

Vedúci: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 25.01.2013

Dátum schválenia: 04.02.2013 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že na diplomovej práci som pracoval samostatne na základe vlastných teoretických poznatkov, konzultácií a odbornej literatúry uvedenej v Zozname použitej literatúry.

Bratislava, 28.4.2014 **Emil Haas**

Poďakovanie

Touto cestou sa chcem poďakovať vedúcemu diplomovej práce prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za jeho ochotu, cenné rady, podnetné pripomienky a množstvo času, ktorý mi venoval pri vypracovaní tejto práce. Ďakujem aj Mgr. Lucii Fašungovej za konzultácie a pomoc pri kontrole vytvoreného programu.

Abstrakt

HAAS, Emil: CGE bez GAMS [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; Vedúci práce: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc., Bratislava, 2014, 50 s.

Cieľom tejto práce je ukázať nový postup riešenia modelov vypočítateľnej všeobecnej rovnováhy - CGE. Tento postup sa zakladá na úprave sústavy nelineárnych rovníc CGE modelu na sústavu lineárnych rovníc a jednej nelineárnej rovnice. Využíva predpoklad CES produkčnej funkcie a funkcie užitočnosti, ktoré sú použité v ich normovanom tvare. Pre tento normovaný tvar CES funkcie a jej limitných prípadov (Cobb-Douglas, Leontief) tiež odvodíme kalibračné formuly a dopytové funkcie. Pre rozšírený CGE model, kde sa nepodarilo sústavu rovníc upraviť do žiadaného tvaru, použijeme samostatný postup, ktorý hľadá riešenie iteračne. Oba postupy naprogramujeme v prostredí MATLAB

Kľúčové slová: CGE model, Normovaná CES funkcia, Linearizácia rovníc CGE modelu

Abstract

HAAS, Emil: CGE without GAMS [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc., Bratislava, 2014, 50p.

The purpose of this thesis is to show a new approach for solving Computable General Equilibrium (CGE) models. The method we use is based on simplification of a system of non-linear equations that defines CGE model into a system of linear equations and one non-linear equation. The method uses an assumption of the CES production function and the CES utility function that are used in a normalized form. For this normalized form of the CES function and its limit cases (Cobb-Douglas, Leontief) we derive calibrating formulas and demand functions. For the extended CGE model, where we weren't able to symplify the system into desired form, we use a different approach, using iterations. We programme the both methods in the MATLAB software.

Keywords: CGE model, Normalized CES function, Linearization of CGE model equations

Obsah

Úvod

Modely vypočítateľnej všeobecnej rovnováhy (Computable General Equilibrium - CGE) sú rozšíreným nástrojom na analýzu dosahov ekonomických a politických zmien na ekonomiku ako celok. Hoci sa tešia veľkej obľube minimálne od osemdesiatych rokov minulého storočia, s výnimkou viet o existencií riešenia (napr. [7]) bola u nich len malá pozornosť venovaná teoretickým otázkam.

Na výpočet riešenia sa štandardne používa programovacie prostredie GAMS (General Algebraic Modelling Software) ktoré je neprehľadné a tak neumožnuje bližšiu analýzu výsledkov modelu, ako napríklad citlivosť riešenia na exogénne parametre. Aby sme mohli tento spôsob riešenia obísť, ukážeme v práci spôsob, ktorým možno systém nelineárnych rovníc modelu upraviť na systém lineárnych rovníc a jednej nelineárnej rovnice. Takýto systém by bolo možné riešiť jednoduchšie a následne podrobiť ďalšej analýze. Riešenie upraveného systému naprogramujeme v prostredí MATLAB. Táto linearizácia sa zakladá na predpoklade produkčných funkcií a funkcií užitočnosti tvaru CES funkcie alebo jej limitných prípadov (Cobb-Douglas, Leontief). Tento predpoklad však nie je veľkou reštrikciou, nakoľko sa vo väčšine prác používajú práve tieto tvary funkcií. Zvyknú sa uvádzať v normovanom tvare, pre ktorý uvádzame odvodenie koeficientov a dopytových funkcií nakoľko nám nie je známa literatúra, ktorá by obsahovala ich kompletný popis.

Práca je rozdelená do šiestich kapitol. V prvej kapitole uvedieme stručný popis CGE modelov vo všeobecnosti. V druhej kapitole bližšie popíšeme základný tvar CGE modelu. Použité tvary produkčných funkcií a funkcií užitočnosti rozoberieme v tretej kapitole. Štvrtá kapitola uvádza postup linearizácie pre základný tvar CGE modelu pre dva prípady použitých funkcií. V piatej kapitole uvedieme rozšírený CGE model, ktorý s miernym zjednodušením linearizujeme v šiestej kapitole. Uvedieme tu tiež alternatívny spôsob výpočtu riešenia rozšíreného modelu. Príloha obsahuje odvodenie kalibračných formúl a dopytových funkcií pre použité tvary funkcií a zdrojový kód riešenia uvedených modelov.

1 Modely vypočítateľnej všeobecnej rovnováhy

Modely vypočítateľnej všeobecnej rovnováhy sú makroekonomické modely používané na analýzu dôsledkov zmien zavedených v ekonomike krajiny alebo regiónu. Spájajú v sebe mikroekonomickú teóriu optimálneho správania sa ekonomických subjektov s makroekonomickými predpokladmi rovnováhy. CGE modely fungujú na komparatívnom princípe, čo znamená, že porovnávajú ako sa po zavedení exogénneho zásahu zmenia vzťahy v ekonomike oproti pôvodnému stavu.

Statické CGE modely, ktorými sa budeme v práci zaoberať, sa vôbec nezaoberajú časovým hľadiskom. Sú založené na predpoklade, že sa ekonomika spočiatku nachádza v rovnováhe. Po zavedení šoku sa ekonomika z rovnováhy načas vychýli a potom sa dostane do novej rovnováhy. Statické CGE modely teda neskúmajú vývoj, ktorým sa ekonomika do rovnováhy dostávala, ale iba samotnú novú rovnováhu.

Výhodou oproti ekonometrickým modelom je, že na použitie CGE modelu nie sú potrebné dáta za dlhé časové obdobie. Tieto sú nahradené predpokladmi z mikroekonomickej teórie. Potrebujeme však podrobný prehľad finančných tokov v ekonomike v rámci jedného roka. Tieto dáta sú zahrnuté v tzv. matici spoločenských účtov (Social Accounting Matrix - SAM).

CGE modely sa väčšinou používajú na modelovanie výraznejších zmien politík v strednodobom až dlhodobom horizonte. Najčastejšie v oblasti daní, sociálnych vecí, poľnohospodárstva, či zahraničného obchodu.

1.1 Použitie CGE modelu

V prvej fáze sa zostavia rovnice modelu. Podľa miery substituovateľnosti vstupných faktorov sa zvolia produkčné funkcie a funkcie užitočnosti. Z nich sa odvodia, za predpokladu racionálneho správania sa všetkých subjektov, ich dopytové funkcie. Ďalšie rovnice vyplynú z predpokladu rovnováhy ponuky a dopytu na jednotlivých trhoch v ekonomike. Následne sa pridajú rovnice nulového zisku firiem, ktorý vyplýva z dokonalej konkurencie na trhu a posledné rovnice sa odvodia z rozpočtových ohraničení spotrebiteľov.

V druhej fáze je potrebná vhodná SAM matica. Jej štruktúra by mala byť vhodne agregovaná pre ciele danej analýzy. Musí však spĺňať dva základné princípy:

- Príjmy jedného subjektu sú zároveň výdavkami iných subjektov.
- Príjmy a výdavky každého subjektu sa musia rovnať.

Jednotlivé výdavky každého subjektu zvyknú byť znázornené v jednom stĺpci a jeho jednotlivé príjmy v jednom riadku. Tieto hodnoty sa použijú na kalibráciu parametrov produkčných funkcií a funkcií užitočnosti. SAM matica neobsahuje konkrétne množstvá výrobných faktorov, ale iba ich finančné toky. Preto sa používa predpoklad, že všetky výrobné faktory majú v počiatočnom stave jednotkové ceny. Toto je možné tak, že ako jednotku množstva pre daný faktor budeme uvažovať práve také množstvo, ktorého cena je rovná jednej. Navyše, z Walrasovho zákona vyplýva závislosť rovníc rovnováhy (pozri [6]) a preto môžeme jednu z cien v modeli označiť ako "numeraire" a ostatné ceny následne počítať ako relatívne voči nej.

Poslednou fázou použitia modelu je zavedenie exogénneho "šoku", vypočítanie nových rovnovážnych hodnôt a ich porovnanie s pôvodnými hodnotami.

Pri výpočte nových rovnovážnych hodnôt sa riešia veľké systémy nelineárnych rovníc, na čo sa väčšinou používa programovacie prostredie GAMS. Hlavnou nevýhodou GAMS-u je, že nie je možné vidieť ako presne funguje. To je problémom napr. pri analýze citlivosti modelu alebo v prípadoch keď ponúka riešenie, hoci systém rovníc daného CGE modelu riešiteľný nie je (pozri [3]). V našej práci sa pokúsime upraviť spomenutý veľký systém nelineárnych rovníc na systém lineárnych rovníc a malé množstvo nelineárnych rovníc. Riešenie modelu touto metódou následne naprogramujeme v prostredí MATLAB. To by pomohlo väčšej prehľadnosti výpočtu a lepším možnostiam na ďalšiu analýzu modelu.

2 Jednoduchý CGE model

Analýza CGE modelu pre skutočnú ekonomiku je veľmi zložitá a preto budeme pracovať s jeho zjednodušeným variantom (inšpirovaným prácou [6]). Tento je však jadrom pre takmer všetky používané CGE modely.

V jednoduchom modeli predpokladáme uzavretú ekonomiku. Tvoria ju racionálne konajúce firmy a domácnosti, ktoré sa snažia maximalizovať svoj zisk, resp. úžitok. Prítomnosť vlády, či investícii v tomto modely nebudeme uvažovat. Ďalej predpokladáme, že na všetkých trhoch vládne dokonalá konkurencia a teda jednotlivé subjekty nemôžu priamo ovplyvniť ceny na trhu.

2.1 Produkčné sektory

Firmy pôsobiace v ekonomike agregujeme podľa druhov vyrábaných komodít a podľa cieľov analýzy do n produkčných sektorov. Každý z týchto produkčných sektorov pritom vyrába práve jednu komoditu. Produkcia každého zo sektorov je vyjadrená produkčnou funkciou s konštantnými výnosmi z rozsahu. Vstupmi produkčných funkcií sú práca, kapitál a komodity jedlotlivých produkčných sektorov. Predpokladáme, že každý zamestnanec je rovnako produktívny a dostáva rovnakú mzdu. Podobne, každá jednotka kapitálu je rovnako efektívna a aj náklady na ňu sú rovnaké. Produkciu i-teho sektoru označíme ako:

$$Y_i = f_i\left(L_i, K_i, X_{1i}, \ldots, X_{ni}\right),$$

kde:

f_i - produkčná funkcia i-teho produkčného sektoru,

L_i - množstvo ľudskej práce využitej i-tym produkčným sektorom,

K_i - množstvo kapitálu spotrebovaného i-tym produkčným sektorom,

X_{ji} - množstvo komodity j spotrebovanej i-tym produkčným sektorom,

Konkrétny tvar produkčnej funkcie f_i, závisí od miery nahraditeľnosti jednotlivých vstupných faktorov, ktorá je vyjadrená ich elasticitou substitúcie. Táto je pre model exogénnym parametrom a určuje sa expertným alebo ekonometrickým odhadom.

Pokiaľ sú vstupné faktory dokonale nezameniteľné, použijeme Leontiefovu produkčnú funkciu. Ak sú vstupné faktory zameniteľné, použijeme, podľa miery nahraditeľnosti, buď Cobb-Douglassovu alebo CES (Constant Elasticity of Substitution) produkčnú funkciu.

Vzhľadom na predpoklad racionality firiem sa aj celé produkčné sektory správajú racionálne. Volia si spotrebu vstupných faktorov tak, aby maximalizovali svoj zisk pri danej produkcii Y_i, cenách komodít $\mathbf{p} = (p_i, \ldots, p_n)$, cene práce w a cene kapitálu r. Riešením tejto maximalizačnej úlohy sú podmienené dopytové funkcie:

$$X_{ji} = X_{ji}(Y_i, \mathbf{p}, w, r)$$

$$L_i = L_i(Y_i, \mathbf{p}, w, r)$$

$$K_i = K_i(Y_i, \mathbf{p}, w, r)$$

Nakoľko sa ekonomika nachádza v rovnováhe a produkčné sektory maximalizujú svoj zisk v podmienkach dokonalej konkurencie, musí optimálny výstup spĺňať podmienku nulového zisku:

$$p_i Y_i = wL_i + rK_i + \sum_{j=1}^{n} p_j X_{ji} \tag{2.1}$$

Vzhľadom na konštantnosť výnosov z rozsahu, by totiž pri kladnom zisku bolo pre sektor vždy výhodné výrobu zvýšiť. Naopak pri zápornom zisku by výrobu ukončil.

2.2 Sektor domácností

Všetky domácnosti v ekonomike agregujeme do jednej reprezentatívnej domácnosti. Preferencie tejto domácnosti charakterizujeme funkciou užitočnosti s konštantnými výnosmi z rozsahu, v tvare:

$$U = u(H_1, \ldots, H_n),$$

kde H_i je množstvo i-tej komodity, ktoré agregovaná domácnosť spotrebuje. Podľa predpokladaného typu preferencií volíme Leontiefovu, Cobb-Douglasovu alebo CES funkciu užitočnosti. Na základe predpokladu racionality, maximalizuje agregovaná domácnosť svoj úžitok za podmienky svojho príjmu M a danej cenovej hladiny $\mathbf{p}$. Riešením tejto maximalizačnej úlohy sú Marshallovské podmienené dopytové funkcie, ktoré majú tvar:

$$H_i = H_i(M, \mathbf{p})$$

Predpokladáme, že kapitál a práca sú vlastnené iba domácnosťami a teda ich príjem je rovný sume výdavkov produkčných sektorov na prácu a kapitál:

$$M = \sum_{i=1}^{n} wL_i + \sum_{i=1}^{n} rK_i \tag{2.2}$$

2.3 Rovnováhy na trhoch

Nakoľko predpokladáme, že ekonomika je v rovnováhe, nemôže v nej existovať nenasýtený dopyt a teda musí platiť rovnosť ponuky a dopytu na trhu s komoditami:

$$Y_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ji} + H_j \tag{2.3}$$

na trhu práce:

$$TL = \sum_{i=1}^{n} L_i \tag{2.4}$$

aj na kapitálovom trhu:

$$TK = \sum_{i=1}^{n} K_i, \tag{2.5}$$

kde:

TL - celková ponuka práce v ekonomike

TK - celková ponuka kapitálu v ekonomike

2.4 Voľba numeraire

Z Walrasovho zákona vyplýva, že uvedené rovnice CGE modelu sú lineárne závislé (pozri [6]). Preto je možné z neho vypočítať iba vzájomné pomery cien. Zvolíme teda, pre celý zvyšok práce, cenu práce $w = 1$ za numeraire a ostatné ceny vyjadríme v pomere k nej.

Na kompletizáciu modelu ostáva určiť konkrétne produkčné funkcie a funkciu užitočnosti a na ich základe príslušné podmienené dopytové funkcie.

3 Produkčné funkcie a funkcie užitočnosti

V teoretických prácach aj praktických aplikáciach, sa pri produkčných funkciách aj funkciách užitočnosti spravidla používa CES funkcia, alebo jej limitné prípady - Cobb-Douglasova a Leontiefova funkcia.

3.1 CES produkčná funkcia

CES produknčná sa používa ak elasticita substitúcie vstupných faktorov patrí do intervalu $\sigma \in (0,1)$. Tradičný tvar CES funkcie vyzerá nasledovne:

$$Y_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} {X_{ji}}^{\rho} + \delta_{K_i} {K_i}^{\rho} + \delta_{L_i} {L_i}^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}},$$

kde:

Y_i - produkcia i-teho sektoru

X_{ji} - množstvo komodity j spotrebovanej i-tym produkčným sektorom,

L_i - množstvo ľudskej práce využitej i-tym produkčným sektorom,

K_i - množstvo kapitálu spotrebovaného i-tym produkčným sektorom,

$a_{ji}, \delta_{K_i}, \delta_{L_i}, \rho$ - parametre modelu, pre ktoré platí:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} + \delta_{K_i} + \delta_{L_i} = 1$

$\sigma = \frac{1}{1-\rho}$

Presná hodnota elasticity substitúcie sa určí exogénnym odhadom. Hodnoty ostatných parametrov môžeme vypočítať explicitnými vzorcami pomocou hodnôt v SAM matici. Nakoľko je však odvodenie týchto kalibračných vzorcov pre základný tvar CES funkcie zložité a parametre sú ťažko interpretovateľné, zvykne sa používať normovaný tvar CES funkcie, ktorý uviedol [5] ako "calibrated share form". Tento vyjadruje vstupné argumenty ako pomer k ich pôvodným (tzv. benchmarkovým) hodnotám:

$$Y_i = \overline{Y_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \left(\frac{X_{ji}}{\overline{X_{ji}}} \right)^{\rho} + \delta_{K_i} \left(\frac{K_i}{\overline{K_i}} \right)^{\rho} + \delta_{L_i} \left(\frac{L_i}{\overline{L_i}} \right)^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}}, \tag{3.1}$$

kde:

$\overline{Y_i}$ - pôvodné množstvo produkcie i-teho sektoru

$\overline{X_{ji}}$ - pôvodné množstvo komodity j spotrebovanej i-tym produkčným sektorom,

$\overline{L_i}$ - pôvodné množstvo ľudskej práce využitej i-tym produkčným sektorom,

$\overline{K_i}$ - pôvodné množstvo kapitálu spotrebovaného i-tym produkčným sektorom.

Parametre a_{ji}, δ_{K_i} a δ_{L_i} teraz vyjadrujú podiel daného vstupu na nákladoch sektora. Môžeme ich teda vypočítať ako:

$$\begin{aligned} a_{ji} &= \frac{\overline{p_j}\,\overline{X_{ji}}}{\sum_{k=1}^n \overline{p_k}\,\overline{X_{ki}} + \overline{L_i} + \overline{r}\,\overline{K_i}} \\ \delta_{K_i} &= \frac{\overline{r}\,\overline{K_i}}{\sum_{k=1}^n \overline{p_k}\,\overline{X_{ki}} + \overline{L_i} + \overline{r}\,\overline{K_i}} \\ \delta_{L_i} &= \frac{\overline{L_i}}{\sum_{k=1}^n \overline{p_k}\,\overline{X_{ki}} + \overline{L_i} + \overline{r}\,\overline{K_i}}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde:

$\overline{p_j}$ - pôvodná cena j-tej komodity,

$\overline{r}$ - pôvodná cena kapitálu,

Tieto hodnoty parametrov vieme vypočítať na základe finančných tokov $\overline{p_j}\,\overline{X_{ji}}$, $\overline{r}\,\overline{K_i}$ a $\overline{L_i}$, obsiahnutých v SAM matici.

Postupom uvedeným v prílohe odvodíme z produkčných funkcií podmienené dopyty výrobných odvetví ako funkcie cien a produkcie:

$$X_{ji} = \overline{X_{ji}}\frac{Y_i}{\overline{Y_i}}\left(\frac{\overline{p_j}}{p_j}\right)^{\sigma} Q_i \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

$$K_i = \overline{K_i}\frac{Y_i}{\overline{Y_i}}\left(\frac{\overline{r}}{r}\right)^{\sigma} Q_i \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

$$L_i = \overline{L_i}\frac{Y_i}{\overline{Y_i}} Q_i \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

kde

$$Q_i = \left(\sum_{k=1}^n a_{ki}\left(\frac{p_k}{\overline{p_k}}\right)^{1-\sigma} + \delta_{K_i}\left(\frac{r}{\overline{r}}\right)^{1-\sigma} + \delta_{L_i}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}, \qquad \forall i = 1, \ldots, n,$$

$\sigma = \frac{1}{1-\rho}$.

Keďže v počiatočnej rovnováhe predpokladáme jednotkové pôvodné ceny a platnosť vzťahu (2.1), môžeme parametre produkčnej funkcie vyjadriť ako $a_{ji} = \frac{\overline{X_{ji}}}{\overline{Y_i}}$, $\delta_{K_i} = \frac{\overline{K_i}}{\overline{Y_i}}$ a $\delta_{L_i} = \frac{\overline{L_i}}{\overline{Y_i}}$. Následne môžeme zjednodušiť podmienené dopytové funkcie:

$$X_{ji} = a_{ji} Y_i p_j^{-\sigma} Q_i \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

$$K_i = \delta_{K_i} Y_i r^{-\sigma} Q_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$L_i = \delta_{L_i} Y_i Q_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

kde:

$$Q_i = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} p_k^{1-\sigma} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma} + \delta_{L_i}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}, \qquad \forall i = 1, \ldots, n,$$

3.2 Cobb-Douglassova produkčná funkcia

Cobb-Douglassova produkčná funkcia je limitným prípadom CES funkciu, pre elasticitu substitúcie rovnú jednej. Tradičný tvar Cobb-Douglassovej produkčnej funkcie vyzerá nasledovne:

$$Y_i = \prod_{j=1}^{n} X_{ji}{}^{a_{ji}} K_i{}^{\delta_{K_i}} L_i{}^{\delta_{L_i}},$$

Podobne ako CES funkcie sa však aj Cobb-Douglassova funkcia zvyčajne uvádza v normovanom tvare:

$$Y_i = \overline{Y_i} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{X_{ji}}{\overline{X_{ji}}}\right)^{a_{ji}} \left(\frac{K_i}{\overline{K_i}}\right)^{\delta_{K_i}} \left(\frac{L_i}{\overline{L_i}}\right)^{\delta_{L_i}},$$

Parametre a_{ji}, δ_{K_i} a δ_{L_i} opäť vyjadrujú podiel daného vstupu na nákladoch sektora. Môžeme ich teda vypočítať rovnako ako v prípade CES funkcie (viď (3.2))

Postupom uvedeným v prílohe odvodíme z produkčných funkcií podmienené dopyty výrobných odvetví ako funkcie cien a produkcie:

$$X_{ji} = \overline{X_{ji}} \frac{\overline{p_j} Y_i}{p_j \overline{Y_i}} Q_i \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

$$K_i = \overline{K_i} \frac{\overline{r} Y_i}{r \overline{Y_i}} Q_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$L_i = \overline{L_i} \frac{Y_i}{\overline{Y_i}} Q_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

kde:

$Q_i = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{\overline{p_k}}\right)^{a_{ki}} \left(\frac{r}{\overline{r}}\right)^{\delta_{K_i}}, \qquad \forall i = 1, \ldots, n,$

Podobne ako pri CES funkcií, môžeme pomocou vzťahov $a_{ji} = \frac{\overline{X_{ji}}}{\overline{Y_i}}$, $\delta_{K_i} = \frac{\overline{K_i}}{\overline{Y_i}}$ a $\delta_{L_i} = \frac{\overline{L_i}}{\overline{Y_i}}$, zjednodušiť podmienené dopytové funkcie nasledovne:

$$X_{ji} = \frac{a_{ji}}{p_j} Y_i Q_i \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

$$K_i = \frac{\delta_{K_i}}{r} Y_i Q_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$L_i = \delta_{L_i} Y_i Q_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

kde

$Q_i = \prod_{k=1}^{n} p_k^{a_{ki}} r^{\delta_{K_i}}, \qquad \forall i = 1, \ldots, n,$

3.3 Leontiefova produkčná funkcia

Leontiefova produkčná funkcia je limitným prípadom CES funkcie pre elasticitu substitúcie vstupných faktorov rovnú nule. Tradičný tvar Leontiefovej produkčnej funkcie vyzerá nasledovne:

$$Y_i = \min\left(\frac{X_{ji}}{a_{ji}}, \frac{K_i}{\delta_{K_i}}, \frac{L_i}{\delta_{L_i}}\right),$$

Aj Leontiefova funkcia sa však zvyčajne používa v normovanom tvare:

$$Y_i = \overline{Y_i} \min\left(\frac{X_{ji}}{\overline{X_{ji}}}, \frac{K_i}{\overline{K_i}}, \frac{L_i}{\overline{L_i}}\right),$$

Postupom uvedeným v prílohe odvodíme z produkčných funkcií podmienené dopyty výrobných sektorov ako funkcie cien a produkcie:

$$X_{ji} = \overline{X_{ji}} \frac{Y_i}{\overline{Y_i}} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

$$K_i = \overline{K_i} \frac{Y_i}{\overline{Y_i}} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$L_i = \overline{L_i} \frac{Y_i}{\overline{Y_i}} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

Aj v tomto prípade predpokladáme platnosť vzťahov $a_{ji} = \frac{\overline{X_{ji}}}{\overline{Y_i}}$, $\delta_{K_i} = \frac{\overline{K_i}}{\overline{Y_i}}$, resp. $\delta_{L_i} = \frac{\overline{L_i}}{\overline{Y_i}}$ a preto môžeme podmienené dopytové funkcie vyjadriť nasledovne:

$$X_{ji} = a_{ji} Y_i \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

$$K_i = \delta_{K_i} Y_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$L_i = \delta_{L_i} Y_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

3.4 CES funkcia užitočnosti

CES funkcia užitočnosti sa používa ak elasticita substitúcie vstupných komodít patrí do intervalu $\sigma \in (0, 1)$. Normovaný tvar CES funkcie užitočnosti je odvodený podobne ako pri produkčnej funkcií:

$$U = \overline{U_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\frac{H_i}{\overline{\overline{H_i}}} \right)^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}}, \tag{3.3}$$

kde:

$\overline{H_i}$ - spotreba komodity i agregovanou domácnosťou

$\overline{H_i}$ - pôvodná spotreba komodity i agregovanou domácnosťou

$\beta_i = \frac{\overline{p_i}\overline{H_i}}{\sum_{j=1}^{n} \overline{p_j}\overline{H_j}}$.

Postupom uvedeným v prílohe odvodíme z funkcie užitočnosti Marshalovský dopyt domácnosti v závislosti od jej príjmu domácnosti M a cenovej hladiny $\mathbf{p}$:

$$H_i = \frac{\beta_i}{p_i^{\sigma}} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j p_j^{1-\sigma}} M$$

3.5 Cobb-Douglassova funkcia užitočnosti

Cobb-Douglassova funkcia užitočnosti sa používa ak je elasticita substitúcie komodít pre agregovanú domácnosť rovná jednej. Normovaný tvar Cobb-Douglassovej funkcie užitočnosti vyzerá nasledovne:

$$U_i = \overline{U_i} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{H_i}{\overline{\overline{H_i}}} \right)^{\beta_i} \tag{3.4}$$

kde:

$\overline{H_i}$ - spotreba komodity i agregovanou domácnosťou

$\overline{H_i}$ - pôvodná spotreba komodity i agregovanou domácnosťou

$\beta_i = \frac{\overline{p_i}\overline{H_i}}{\sum_{j=1}^{n} \overline{p_j}\overline{H_j}}$.

Postupom uvedeným v prílohe odvodíme z funkcie užitočnosti Marshalovský dopyt domácnosti v závislosti od jej príjmu domácnosti M a cenovej hladiny $\mathbf{p}$:

$$H_i = \frac{\beta_i}{p_i} M$$

4 Riešenie jednoduchého modelu linearizáciou

CGE model, uvedený v kapitole 2, je definovaný sústavou nelineárnych rovníc. V tejto kapitole uvedieme spôsob, ktorým môžeme tieto rovnice, pre produkčné funkcie a funkcie užitočnosti tvaru CES funkcie a jej limitných prípadov, upraviť na sústavu lineárnych rovníc a jednej nelineárnej rovnice. Vďaka tomu budeme lepšie rozumieť riešeniu sústavy.

Postup tejto linearizácie závisí od konkrétnej voľby produkčných funkcií a funkcie užitočnosti. Pre Cobb-Douglasove produkčné funkcie a Cobb-Douglasovu funkciu užitočnosti tento postup vypracovala Šmátralová (pozri [7]). Inšpirovaný jej prístupom, v tejto kapitole uvedieme postup pre CES produkčnú funkciu, pričom ako funkciou užitočnosti použijeme v jednom prípade CES funkciu a následne aj Cobb-Douglasovu funkciu.

Ukazuje sa, že ak je produkčná funkcia rovnakého tvaru ako funkcia užitočnosti, dostaneme sústavu lineárnych rovníc, z ktorej vieme riešenie vypočítať explicitne. Ak je elasticita substitúcie produkčnej funkcie iná ako pri funkcií užitočnosti, systém možno zjednodušiť, avšak okrem sústavy lineárnych rovníc dostaneme aj jednu nelineárnu rovnicu, ktorú musíme riešiť numericky.

4.1 Model s CES produkčnou funkciou a CES funkciou užitočnosti

V tomto prípade budú mať výrobné odvetvia CES produkčné funkcie aj funkcie užitočnosti v normovanom tvare ((3.1), resp. (3.3)). Podmienené dopytové funkcie a Marshallovský dopyt teda vyzerajú nasledovne:

$$X_{ji} = a_{ji} Y_i p_j^{-\sigma} Q_i \qquad \forall i, j = 1, \dots, n$$

$$K_i = \delta_{K_i} Y_i r^{-\sigma} Q_i \qquad \forall i, j = 1, \dots, n$$

$$L_i = \delta_{L_i} Y_i Q_i \qquad \forall i, j = 1, \dots, n$$

$$H_i = \frac{\beta_i}{p_i^\sigma} \frac{1}{\sum_{j=1}^n \beta_j p_j^{1-\sigma}} (TL + rTK) \qquad \forall i, j = 1, \dots, n$$

kde

$Q_i = \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} p_k^{1-\sigma} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma} + \delta_{L_i}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}, \qquad \forall i = 1, \ldots, n,$

Dosadíme tieto vzťahy do rovníc (2.3), (2.4), (2.5) a (2.1) a dostaneme:

$$Y_i = \sum_{j=1}^n Y_j a_{ij} p_i^{-\sigma} Q_j + \frac{\beta_i}{p_i^\sigma \sum_{k=1}^n \beta_k p_k^{1-\sigma}}(TL + rTK) \qquad \forall i = 1, \ldots, n \tag{4.1}$$

$$TK = \sum_{i=1}^n Y_i \delta_{K_i} r^{-\sigma} Q_i \tag{4.2}$$

$$TL = \sum_{i=1}^n Y_i \delta_{L_i} Q_i \tag{4.3}$$

$$p_i Y_i = \sum_{j=1}^n p_j Y_i Q_i a_{ji} p_j^{-\sigma} + Y_i Q_i \delta_{L_i} + r Y_i Q_i \delta_{K_i} r^{-\sigma} \qquad \forall i = 1, \ldots, n \tag{4.4}$$

Úpravou rovnice (4.4) ďalej dostaneme:

$$p_i = \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} p_j^{1-\sigma} + \delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma}\right) Q_i = Q_i^{\frac{1}{\sigma}} \qquad \forall i = 1, \ldots, n \tag{4.5}$$

$$p_i^{1-\sigma} = \sum_{j=1}^n a_{ji} p_j^{1-\sigma} + \delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma} = Q_i^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \qquad \forall i = 1, \ldots, n \tag{4.6}$$

Rovnicu (4.1) môžeme pomocou vzťahu (4.6) upraviť na:

$$p_i^\sigma Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j^\sigma Y_j + \frac{\beta_i}{\sum_{k=1}^n \beta_k p_k^{1-\sigma}}(TL + rTK) \qquad \forall i = 1, \ldots, n \tag{4.7}$$

Označíme teraz $\phi_i = p_i^{1-\sigma}$ a $\psi_i = p_i^\sigma Y_i$. Rovnice (4.6) a (4.7) prepíšeme do maticového tvaru:

$$(\mathbf{I} - \boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\delta_L} + \boldsymbol{\delta_K} r^{1-\sigma} \tag{4.8}$$

$$(\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\beta}\frac{(TL + rTK)}{\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\phi}} \tag{4.9}$$

kde $\boldsymbol{A} = ((a_{11}, \ldots, a_{n1})^T, \ldots, (a_{1n}, \ldots, a_{nn})^T)$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_n)^T$, $\boldsymbol{\delta_L} = (\delta_{L_1}, \ldots, \delta_{L_n})^T$, $\boldsymbol{\delta_K} = (\delta_{K_1}, \ldots, \delta_{K_n})^T$ a $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_n)^T$.

Nakoľko používame produkčné funkcie a funkciu užitočnosti s konštantnými výnosmi z rozsahu, platia vzťahy:

$$0 \leq a_{ij} \leq 1, \qquad \sum_i a_{ij} < 1.$$

Preto sú matice $(I - \boldsymbol{A})$ a $(I - \boldsymbol{A}^T)$ invertovateľné a platí:

$$(\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \mathbf{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \dots$$

Teda matice $(I - \boldsymbol{A})^{-1}$ a $(I - \boldsymbol{A}^T)^{-1}$ majú kladné prvky. Tieto inverné matice označíme ako $\widehat{\boldsymbol{A}} = (I - \boldsymbol{A})^{-1}$, resp. $\widehat{\boldsymbol{A}}^T = (I - \boldsymbol{A}^T)^{-1}$, ich prvky ako $\widehat{\boldsymbol{A}} = \{\gamma_{ij}\}$, resp. $\widehat{\boldsymbol{A}}^T = \{\gamma_{ji}\}$ a prenásobíme nimi rovnice (4.8), resp. (4.9):

$$\phi_i = \sum_j \gamma_{ji} \left(\delta_{L_j} + \delta_{K_j} r^{1-\sigma} \right) \tag{4.10}$$

$$\psi_i = \sum_j \gamma_{ij} \beta_j \frac{(TL + rTK)}{\sum_{k=1}^n \beta_k \phi_k} \tag{4.11}$$

Tieto rovnosti prepíšeme do tvaru s pôvodnými premennými:

$$p_i = \left(\sum_j \gamma_{ji} \left(\delta_{L_j} + \delta_{K_j} r^{1-\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{4.12}$$

$$p_i^\sigma Y_i = \sum_j \gamma_{ij} \beta_j \frac{(TL + rTK)}{\sum_{k=1}^n \beta_k p_k^{1-\sigma}} \tag{4.13}$$

Ak dosadíme rovnicu (4.13) do vzťahu (4.3) s použitím rovnosti $p_i^\sigma = Q_i$, dostaneme:

$$TL = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{L_i}^\sigma \gamma_{ij} \beta_j \frac{(TL + rTK)}{\sum_{k=1}^n \beta_k p_k^{1-\sigma}} \tag{4.14}$$

Výslednú rovnosť prenásobíme menovateľom a za p_k dosadíme zo vzťahu (4.12):

$$TL \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} \left(\delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma} \right) = (TL + rTK) \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^n \delta_{L_i} \gamma_{ij} \tag{4.15}$$

Úpravou tohto výrazu dostaneme postupne explicitný vzorec na výpočet ceny kapitálu r:

$$TL \sum_{i=1}^n \delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma} = (TL + rTK) \sum_{i=1}^n \delta_{L_i} \tag{4.16}$$

$$r = \left(\frac{TL \sum_{i=1}^n \delta_{K_i}}{TK \sum_{i=1}^n \delta_{L_i}} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \tag{4.17}$$

Hodnoty ostatných premenných následne vieme dopočítať dosadením.

4.2 Model s CES produkčnou funkciou a Cobb-Douglasovou funkciou užitočnosti

V tomto prípade budú mať výrobné odvetvia CES produkčné funkcie, v normovanom tvare (viď (3.1)) a agregovaná domácnosť bude mať Cobb-Douglasovu funkciu užitočnosti taktiež v normovanom tvare (viď (3.4)).

Podmienené dopytové funkcie teda ostané rovnakú ako v časti 4.1 a Marshallovský dopyt agregovaných domácností bude vyzerať nasledovne:

$$H_i = \frac{\beta_i}{p_i}(TL + rTK) \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

Dopytové funkcie dosadíme aj v tomto prípade do rovníc (2.3), (2.4), (2.5) a (2.1) a dostaneme sústavu rovníc (4.2) až (4.4) a rovnice:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j p_i^{-\sigma} Q_j + \frac{\beta_i}{p_i}(TL + rTK) \qquad \forall i = 1, \ldots, n \tag{4.18}$$

Aj v tomto prípade platí rovnica (4.6), ktoré dosadíme do vzťahu (4.18):

$$p_i^\sigma Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j^\sigma Y_j + \beta_i p_i^{\sigma-1}(\overline{L} + rTK) \qquad \forall i = 1, \ldots, n \tag{4.19}$$

Označíme teraz $\psi_i = p_i^\sigma Y_i$, $\chi_i = \beta_i p_i^{\sigma-1}$ a podobne ako v kapitole 4.1 prepíšeme rovnicu (4.19) do maticového tvaru:

$$(\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\chi}(TL + rTK) \tag{4.20}$$

Podobne ako v kapitole 4.1, prenásobíme teraz rovnicu (4.20) maticou $(\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$a dostaneme:

$$\psi_i = \sum_j \gamma_{ij} \chi_j (TL + rTK) \tag{4.21}$$

Tento vzťah prepíšeme do tvaru s pôvodnými premennými:

$$p_i^\sigma Y_i = \sum_j \gamma_{ij} \beta_j p_j^{\sigma-1}(TL + rTK) \tag{4.22}$$

Ak dosadíme rovnicu (4.22) do vzťahu (4.3) s použitím rovnosti $p_i^\sigma = Q_i$, dostaneme:

$$TL = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{L_i} \gamma_{ij} \beta_j p_j^{\sigma-1}(TL + rTK) \tag{4.23}$$

A nakoniec dosadíme za p_j z rovnice (4.12):

$$TL = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_{L_i} \gamma_{ij} \beta_j}{\sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} \left(\delta_{L_k} + \delta_{K_k} r^{1-\sigma} \right)} (TL + rTK) \tag{4.24}$$

Takto sme dostali jednu nelineárnu rovnicu s jednou neznámou r, ktorú musíme vyriešiť numericky. Hodnoty ostatných premenných následne vieme dopočítať priamo.

Nakoniec ešte dokážeme existenciu kladného riešenia rovnice (4.24). Definujme funkciu $F(r)$ ako:

$$F(r) = TL - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_{L_i} \gamma_{ij} \beta_j}{\sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} \left(\delta_{L_k} + \delta_{K_k} r^{1-\sigma} \right)} (TL + rTK) \tag{4.25}$$

Rovnosť (4.24) je teda ekvivalentná rovnosti $F(r) = 0$. Najprv ukážeme, že $r = 0$ je jedným jej riešením:

$$F(0) = TL - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_{L_i} \gamma_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} \delta_{L_k} \gamma_{kj}} TL \tag{4.26}$$

$$F(0) = TL \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \right) = 0 \tag{4.27}$$

Vypočítame teraz deriváciu funkcie F:

$$\begin{aligned} F'(r) = -TK \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} & \frac{\delta_{L_i} \gamma_{ij} \beta_j}{\sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} \left(\delta_{L_k} + \delta_{K_k} r^{1-\sigma} \right)} - \\ -(TL + rTK) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} & \left(\frac{\delta_{L_i} \gamma_{ij} \beta_j}{\sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} \delta_{L_k} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} \delta_{K_k} r^{1-\sigma}} \right)' \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} F'(r) = -TK \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} & \frac{\delta_{L_i} \gamma_{ij} \beta_j}{\sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} \left(\delta_{L_k} + \delta_{K_k} r^{1-\sigma} \right)} - \\ -(TL + rTK) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} & (\sigma - 1) r^{-\sigma} \frac{\gamma_{ij} \beta_j \sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} \delta_{K_k}}{\left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} \delta_{L_k} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj} \delta_{K_k} r^{1-\sigma} \right)^2} \end{aligned} \tag{4.29}$$

Môžeme si všimnúť, že derivácia funkcie F v bode $r = 0$ neexistuje. Jej limita sprava je však rovná $+\infty$, pretože $\sigma \in (0, 1)$ a koeficienty δ_{L_i}, γ_{ij} aj β_i sú kladné pre $\forall i, j = 1, \ldots, n$. Keďže je navyše táto derivácia na množine kladných čísel spojitá, existuje taký interval $(0, \tau)$, kde $F'(r) > 0$, pre $\forall r \in (0, \tau)$. Z toho vďaka spojitosti funkcie F vyplýva, že $F(r) > 0$ pre $\forall r \in (0, \tau)$. Taktiež platí $\lim_{r \to +\infty} F(r) = -\infty$. Z toho, opäť kvôli spojitosti funkcie F, vyplýva, že rovnica (4.24) musí mať riešenie aj na intervale $(\tau, +\infty)$ a teda v obore kladných čísel.

5 Rozšírený model

Závery, ktoré sme ukázali pre jednoduchý model sa pokúsime zovšeobecniť aj pre jeho rozšírený variant (inšpirovaný prácou [6]), ktorý je bližší modelom používaným v aplikovaných prácach (napr. [4]).

5.1 Vnorená produkčná funkcia

V jednoduchom modeli sme predpokladali, že všetky vstupné faktory sú pre produkčné sektory rovnako substituovateľné. V realite však tento predpoklad nebýva splnený. Budeme preto uvažovať vnorené produkčné funkcie, ktoré umožňujú rôznu elasticitu substitúcie pre rôzne vstupné faktory:

$$Y_i = f_i \left(g_i \left(L_i, K_i \right), h_i \left(X_{1i}, \ldots, X_{ni} \right) \right),$$

kde:

f_i - produkčná funkcia i-teho produkčného sektoru,

g_i - produkčná funkcia agregátu pridanej hodnoty v i-tom produkčnom sektore,

h_i - produkčná funkcia agregátu medzispotreby v i-tom produkčnom sektore,

L_i - množstvo ľudskej práce využitej i-tym produkčným sektorom,

K_i - množstvo kapitálu spotrebovaného i-tym produkčným sektorom,

X_{ji} - množstvo komodity j spotrebovanej i-tym produkčným sektorom,

Výroba teda bude teda fiktívne rozdelená do dvoch fáz. V prvej sa vyrobí zo vstupných komodít akýsi agregát medzispotreby a z práce a kapitálu sa vyrobí agregát pridanej hodnoty. Elasticita substitúcie vstupov agregátu medzispotreby pritom môže byť odlišná od elasticity substitúcie vstupov agregátu pridanej hodnoty. V druhej fáze sa potom z týchto dvoch agregátov vyrobí finálny produkt.

Vzhľadom na predpoklad racionality, riešia produkčné sektory úlohu minimalizácie nákladov pri danej úrovni produkcie. Túto úlohu možno vďaka dvojstupňovým produkčným funkciám rozdeliť do dvoch úrovní. V spodnej úrovni minimalizuje fiktívny sektor medzispotreby i-teho odvetvia svoje náklady pri danej úrovni svojho výstupu (agregátu medzispotreby). Podobne fiktívny sektor pridanej hodnoty i-teho odvetvia minimalizuje svoje náklady na výrobu daného množstva svojho výstupu (agregátu pridanej hodnoty). V hornej úrovni potom samotný sektor minimalizuje svoje náklady na nákup agregátov medzispotreby a pridanej hodnoty, pri danej úrovni svojej produkcie. Výsledkom tejto optimalizácie sú funkcie podmieneného dopytu po jednotlivých faktoroch:

$$\begin{aligned} IC_i &= IC_i(Y_i, p_i^{IC}, p_{VA}^i) \qquad \forall i = 1, \ldots, n \\ VA_i &= VA_i(Y_i, p_i^{IC}, p_{VA}^i) \qquad \forall i = 1, \ldots, n \\ X_{ji} &= X_{ji}(IC_i, p_1^A, \ldots, p_n^A) \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \\ K_i &= K_i(VA_i, r, w) \qquad \forall i = 1, \ldots, n \\ L_i &= L_i(VA_i, r, w) \qquad \forall i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Vďaka predpokladu rovnováhy a produkčným funkciám s konštantnými výnosmi z rozsahu, musia fiktívne sektory medzispotreby a pridanej hodnoty dosahovať nulový zisk rovnako ako samotný sektor:

$$p_i^Y Y_i = p_i^{IC} IC_i + p_i^{VA} VA_i \tag{5.1}$$

$$p_i^{IC} IC_i = \sum_{j=1}^{n} p_j^A X_{ji} \tag{5.2}$$

$$p_i^{VA} VA_i = wL_i + rK_i \tag{5.3}$$

5.2 Produkcia rôznych komodít v jednom sektore

V jednoduchom modeli sme tiež predpokladali, že každý sektor vyrába práve jednu komoditu. V praxi však často jednotlivé sektory vyrábajú viacero druhov komodít, čo chceme zachytiť aj do nášho rozšíreného modelu. Predpokladáme, že každý sektor má rozdelenú produkciu medzi komodity v ustálenom pomere. Produkciu j-tej komodity i-tym sektorom, teda môžeme vyjadriť ako:

$$Y_{ji} = \alpha_{ji} Y_i, \tag{5.4}$$

kde $\alpha_{ji} \geq 0$ a $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} = 1$. Priemernú cenu produkcie i-teho sektora p_i potom môžeme vypočítať ako:

$$p_i^Y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} p_j^A, \tag{5.5}$$

kde p_j^A je cena komodity j.

V teórií môže byť celkový počet komodít j rôzny od počtu produkčných sektorov i. V praxi sa však SAM matice zostavujú tak, že počet komodít a produkčných sektorov je rovnaký. Navyše každému produkčnému sektoru prislúcha jedna, pre neho typická, komodita.

5.3 Investície

V jednoduchom modeli sme predpokladali, že domácnosti všetky svoje príjmy míňajú na spotrebu. V skutočnosti však zvyknú časť príjmov usporiť a investovať. V statických CGE modeloch sa tento fakt vyjadruje dopytom po investičných statkoch. V našom modeli budeme predpokladať, že podiel príjmov vyčlenených na investície, resp. spotrebu je konštantný:

$$M^{INV} = (1 - \kappa) M, \tag{5.6}$$

kde

M^{INV} - objem investícii,

M - príjmy domácností,

$0 < \kappa < 1$

Dopyt po investiciách je podobne ako pri spotrebe riadený funkciou užitočnosti:

$$U^{INV} = u^{INV}(INV_1, \ldots, INV_n),$$

kde INV_j je množstvo, ktoré sa investovalo do j-tej komodity. Podľa predpokladaného typu preferencií volíme medzi Leontiefovou, Cobb-Douglasovou a CES funkciou užitočnosti. Vzhľadom na predpoklad racionality, maximalizuje agregovaná domácnosť svoju užitočnosť z investícií v závislosti od sumy vyčlenenej na investície M^{INV} a cenovej hladiny $\mathbf{p}^A$. Riešením tejto optimalizačnej úlohy sú dopytové funkcie v tvare:

$$INV_i = INV_i(M^{INV}, \mathbf{p}^A)$$

Rovnováha na trhu s komoditami v rozšírenom modeli teda nadobudne tvar:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_{ji} = \sum_{i=1}^{n} X_{ji} + H_j + INV_j \tag{5.7}$$

6 Riešenie rozšíreného modelu linearizáciou

V tejto kapitole uvedieme spôsob, ktorým môžeme sústavu nelineárnych rovníc rozšíreného modelu linearizovať. Budeme uvažovať dvojstupňové produkčné funkcie, ktorých jedlotlivé zložky (agregát medzispotreby, agregát pridanej hodnoty aj konečná produkcia) budú vyjadrené CES funkciami v normovanom tvare s rôznymi elasticitami substitúcie:

$$Y_i = \overline{Y_i}\left(a_i^{IC}\left(\frac{IC_i}{\overline{IC_i}}\right)^{\rho^Y} + a_i^{VA}\left(\frac{VA_i}{\overline{VA_i}}\right)^{\rho^Y}\right)^{\frac{1}{\rho^Y}},$$

kde:

$$IC_i = \overline{IC_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\left(\frac{X_{ji}}{\overline{X_{ji}}}\right)^{\rho^{IC}}\right)^{\frac{1}{\rho^{IC}}}$$

$$VA_i = \overline{VA_i}\left(\delta_{K_i}\left(\frac{K_i}{\overline{K_i}}\right)^{\rho^{VA}} + \delta_{L_i}\left(\frac{L_i}{\overline{L_i}}\right)^{\rho^{VA}}\right)^{\frac{1}{\rho^{VA}}}$$

Ako funkciu užitočnosti zo spotreby budeme uvažovať takisto CES funkciu v normovanom tvare:

$$U^H = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^H\left(\frac{H_i}{\overline{H_i}}\right)^{\rho^H}\right)^{\frac{1}{\rho^H}}$$

A ako funkciu užitočnosti z investícií budeme uvažovať rovnako CES funkciu v normovanom tvare:

$$U^{INV} = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^{INV}\left(\frac{INV_i}{\overline{INV_i}}\right)^{\rho^{INV}}\right)^{\frac{1}{\rho^{INV}}}$$

Postupom uvedeným v prílohe odvodíme z produkčných funkcií a funkcie užitočnosti podmienené dopyty výrobných odvetví, resp. Marshallovský dopyt agregovaných domácností ako funkcie cien a objemu produkcie, resp. veľkosti príjmov:

$$
\begin{aligned}
IC_i &= a_i^{IC} p_i^{IC^{-\sigma^Y}} Y_i Q_i^Y \\
VA_i &= a_i^{VA} p_i^{VA^{-\sigma^Y}} Y_i Q_i^Y \\
X_{ji} &= a_{ji} p_j^{A^{-\sigma^{IC}}} IC_i Q_i^{IC} = a_{ji} a_i^{IC} p_i^{IC^{-\sigma^Y}} p_j^{A^{-\sigma^{IC}}} Y_i Q_i^Y Q_i^{IC} \\
K_i &= \delta_{K_i} r^{-\sigma^{VA}} VA_i Q_i^{VA} = \delta_{K_i} a_i^{VA} p_i^{VA^{-\sigma^Y}} r^{-\sigma^{VA}} Y_i Q_i^Y Q_i^{VA} \\
L_i &= \delta_{L_i} VA_i Q_i^{VA} = \delta_{L_i} a_i^{VA} p_i^{VA^{-\sigma^Y}} Y_i Q_i^Y Q_i^{VA} \\
H_i &= \frac{\beta_i^H}{p_i^{A^{\sigma^H}}} \frac{1}{\sum_{j=1}^n \beta_j^H p_j^{A^{1-\sigma^H}}} \kappa M \\
INV_i &= \frac{\beta_i^{INV}}{p_i^{A^{\sigma^{INV}}}} \frac{1}{\sum_{j=1}^n \beta_j^{INV} p_j^{A^{1-\sigma_{INV}}}} (1-\kappa) M
\end{aligned}
$$

kde:

$Q_i^Y = \left(a_i^{IC} p_i^{IC^{1-\sigma^Y}} + a_i^{VA} p_i^{VA^{1-\sigma^Y}}\right)^{\frac{\sigma^Y}{1-\sigma^Y}}$,

$Q_i^{IC} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} p_k^{A^{1-\sigma^{IC}}}\right)^{\frac{\sigma^{IC}}{1-\sigma^{IC}}}$,

$Q_i^{VA} = \left(\delta_{K_i} r^{1-\sigma^{VA}} + \delta_{L_i}\right)^{\frac{\sigma^{VA}}{1-\sigma^{VA}}}$,

$\sigma^Y = \frac{1}{1-\rho^Y}$,

$\sigma^{IC} = \frac{1}{1-\rho^{IC}}$,

$\sigma^{VA} = \frac{1}{1-\rho^{VA}}$,

$\sigma^H = \frac{1}{1-\rho^H}$,

$\sigma^{INV} = \frac{1}{1-\rho^{INV}}$,

$M = TL + rTK$.

Tieto vzťahy dosadíme do rovníc rovnováh na trhoch komodít, práce a kapitálu (5.7), (2.4), resp. (2.5) a do rovníc nulového zisku (5.1) - (5.3):

$$
\begin{aligned}
\sum_i Y_{ji} = \sum_{i=1}^n a_{ji} a_i^{IC} p_i^{IC^{-\sigma^Y}} p_j^{A^{-\sigma^{IC}}} Y_i Q_i^Y Q_i^{IC} + \frac{\beta_j^H p_j^{A^{-\sigma_H}}}{\sum_{k=1}^n \beta_k^H p_k^{A^{1-\sigma_H}}} \kappa M + \\
+ \frac{\beta_j^{INV} p_j^{A^{-\sigma_{INV}}}}{\sum_{k=1}^n \beta_k^{INV} p_k^{A^{1-\sigma^{INV}}}} (1-\kappa) M
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

$$TK = \sum_{i=1}^{n} \delta_{K_i} a_i^{VA} p_i^{VA^{-\sigma^Y}} r^{-\sigma^{VA}} Y_i Q_i^Y Q_i^{VA} \tag{6.2}$$

$$TL = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^L a_i^{VA} p_i^{VA^{-\sigma^Y}} Y_i Q_i^Y Q_i^{VA} \tag{6.3}$$

$$p_i^Y Y_i = p_i^{IC} a_i^{IC} p_i^{IC^{-\sigma^Y}} Y_i Q_i^Y + p_i^{VA} a_i^{VA} p_i^{VA^{-\sigma^Y}} Y_i Q_i^Y \tag{6.4}$$

$$p_i^{IC} IC_i = \sum_{j=1}^{n} p_j^A a_{ji} p_j^{A^{-\sigma^{IC}}} IC_i Q_i^{IC} \tag{6.5}$$

$$p_i^{VA} VA_i = \delta_{L_i} VA_i Q_i^{VA} + r\delta_{K_i} r^{-\sigma^{VA}} VA_i Q_i^{VA} \tag{6.6}$$

Úpravou rovnice (6.4) teraz dostaneme postupne:

$$p_i^Y = \left(a_i^{IC} p_i^{IC^{1-\sigma^Y}} + a_i^{VA} p_i^{VA^{1-\sigma^Y}} \right) Q_i^Y = Q_i^{Y^{\frac{1}{\sigma^Y}}} \tag{6.7}$$

$$p_i^{Y^{1-\sigma^Y}} = a_i^{IC} p_i^{IC^{1-\sigma^Y}} + a_i^{VA} p_i^{VA^{1-\sigma^Y}} = Q_i^{Y^{\frac{1-\sigma^Y}{\sigma^Y}}} \tag{6.8}$$

Podobne úpravou rovnice (6.5) dostaneme:

$$p_i^{IC} = \left(\sum_{j=1}^{n} a^{ji} p_j^{A^{1-\sigma^{IC}}} \right) Q_i^{IC} = Q_i^{IC^{\frac{1}{\sigma^{IC}}}} \tag{6.9}$$

$$p_i^{IC^{1-\sigma_{IC}}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} p_j^{A^{1-\sigma^{IC}}} = Q_i^{IC^{\frac{1-\sigma^{IC}}{\sigma^{IC}}}} \tag{6.10}$$

A takisto úpravou rovnice (6.6) dostaneme:

$$p_i^{VA} = \left(\delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma^{VA}} \right) Q_i^{VA} = Q_i^{VA^{\frac{1}{\sigma^{VA}}}} \tag{6.11}$$

$$p_i^{VA^{1-\sigma^{VA}}} = \delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma^{VA}} = Q_i^{VA^{\frac{1-\sigma^{VA}}{\sigma^{VA}}}} \tag{6.12}$$

Rovnice (6.8) a (6.12) teraz dosadíme do vzťahov (6.2) a (6.3):

$$TK = \sum_{i=1}^{n} \delta_{K_i} a_i^{VA} \left(\delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma^{VA}} \right)^{\frac{\sigma^{VA}-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}} r^{-\sigma^{VA}} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} p_j^A \right)^{\frac{\sigma^Y}{1-\sigma^Y}} Y_i \tag{6.13}$$

$$TL = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^L a_i^{VA} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} p_j^A \right)^{\frac{\sigma^Y}{1-\sigma^Y}} \left(\delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma^{VA}} \right)^{\frac{\sigma^{VA}-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}} Y_i \tag{6.14}$$

Dosadením vzťahov (6.10), (6.12) a (5.5) do rovnosti (6.8) dostaneme:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} p_j^A \right)^{1-\sigma^Y} = a_i^{IC} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} {p_j^A}^{1-\sigma^{IC}} \right)^{\frac{1-\sigma^Y}{1-\sigma^{IC}}} + a_i^{VA} \left(\delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma^{VA}} \right)^{\frac{1-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}} \tag{6.15}$$

Rovnicu (6.1) môžeme pomocou vzťahov (6.10), (6.8), (5.5) a (5.4) upraviť na:

$$\begin{aligned} {p_j^A}^{\sigma^{IC}} \sum_i \alpha_{ji} Y_i = & \sum_{i=1}^{n} a_{ji} a_i^{IC} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} {p_k^A}^{1-\sigma^{IC}} \right)^{\frac{\sigma^{IC}-\sigma^Y}{1-\sigma^{IC}}} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} p_k^A \right)^{\sigma^Y} Y_i + \\ & + \frac{\beta_j^H {p_j^A}^{\sigma^{IC}-\sigma^H}}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k^H {p_k^A}^{1-\sigma^H}} \kappa M + \frac{\beta_j^{INV} {p_j^A}^{\sigma^{IC}-\sigma^{INV}}}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{INV} {p_k^A}^{1-\sigma^{INV}}} (1-\kappa) M \end{aligned} \tag{6.16}$$

Takto sme dostali systém rovníc (6.15), (6.16), (6.13) a (6.14), ktorý nám úplne opisuje ekonomiku. Vo všeobecnom prípade je to však nelineárna sústava rovníc, ktorú nevieme linearizovať.

6.1 Linearizácia zjednodušenia rozšíreného modelu

Na rozdiel od jednoduchého modelu, riešeného v kapitole 4, sú v tomto prípade exponenty cien p_i^A na pravých stranách rovníc (6.15) a (6.16) iné ako na ich ľavých stranách. Navyše umocnené nie sú len ceny p_i^A, ale aj ich vážené súčty $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} p_j^A$, resp. $\sum_{j=1}^{n} a_{ji} {p_j^A}^{1-\sigma^{IC}}$. Preto, aby sme mohli sústavu rovníc linearizovať, musíme prijať dva zjednodušujúce predpoklady.

Budeme opäť predpokladať, že každý sektor produkuje práve jednu komoditu, teda $\alpha_{ji} = 1$ ak $i = j$; $\alpha_{ji} = 0$ ak $i \neq j$. Rovnice (6.15) a (6.16) sa tak zjednodušia nasledovne:

$${p_i^A}^{1-\sigma^Y} = a_i^{IC} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} {p_j^A}^{1-\sigma^{IC}} \right)^{\frac{1-\sigma^Y}{1-\sigma^{IC}}} + a_i^{VA} \left(\delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma^{VA}} \right)^{\frac{1-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}} \tag{6.17}$$

$${p_j^A}^{\sigma^{IC}} Y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} a_i^{IC} {p_i^{IC}}^{\sigma^{IC}-\sigma^Y} {p_i^A}^{\sigma^Y} Y_i + \frac{\beta_j^H {p_j^A}^{\sigma^{IC}-\sigma^H}}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k^H {p_k^A}^{1-\sigma^H}} \kappa M + \frac{\beta_j^{INV} {p_j^A}^{\sigma^{IC}-\sigma^{INV}}}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{INV} {p_k^A}^{1-\sigma^{INV}}} (1-\kappa) M \tag{6.18}$$

Navyše budeme predpokladať, že elasticita substitúcie medzi jednotlivými komoditami σ_{IC} je rovnaká ako elasticita substitúcie medzi agregátmi medzispotreby a pridanej hodnoty σ_Y. Rovnice (6.17) a (6.18) môžeme potom zjednodušiť nasledovne:

$$p_i^{A\,1-\sigma^Y} = a_i^{IC}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} p_j^{A\,1-\sigma^Y} + a_i^{VA}\left(\delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma^{VA}}\right)^{\frac{1-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}} \tag{6.19}$$

$$p_j^{A^\sigma} Y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} a_i^{IC} p_i^{A^{\sigma^Y}} Y_i + \frac{\beta_j^H p_j^{A^{\sigma^Y-\sigma^H}}}{\sum_{k=1}^n \beta_k^H p_k^{A^{1-\sigma^H}}}\kappa M + \frac{\beta_j^{INV} p_j^{A^{\sigma^Y-\sigma^{INV}}}}{\sum_{k=1}^n \beta_k^{INV} p_k^{A^{1-\sigma^{INV}}}}(1-\kappa)M \tag{6.20}$$

Označíme teraz $\phi_i = p_i^{A^{1-\sigma^Y}}$,$\phi_i^H = p_i^{A^{1-\sigma^H}}$,$\phi_i^{INV} = p_i^{A^{1-\sigma^{INV}}}$, $\psi_i = p_i^{A^{\sigma^Y}} Y_i$, $\chi_i^H = \beta_i^H p_i^{A^{\sigma^Y-\sigma^H}}$, $\chi_i^{INV} = \beta_i^{INV} p_i^{A^{\sigma^Y-\sigma^{INV}}}$ a $\lambda_i = a_i^{VA}\left(\delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma^{VA}}\right)^{\frac{1-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}}$. Rovnice (6.19) a (6.20) prepíšeme do maticového tvaru:

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^T)\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\lambda} \tag{6.21}$$

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\psi} = \frac{\boldsymbol{\chi^H}}{\boldsymbol{\beta^{H^T}}\boldsymbol{\phi^H}}\kappa M + \frac{\boldsymbol{\chi^{INV}}}{\boldsymbol{\beta^{INV^T}}\boldsymbol{\phi^{INV}}}(1-\kappa)M \tag{6.22}$$

kde $\boldsymbol{A} = ((a_{11}a_1^{IC}, \dots, a_{n1}a_1^{IC})^T, \dots, (a_{1n}a_n^{IC}, \dots, a_{nn}a_n^{IC})^T)$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$ a $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_n)^T$.

Súčin koeficientov $a_{ji}a_i^{IC}$ vyjadruje v tomto modeli, rovnako ako koeficient a_{ji} v jednoduchom modeli, podiel j-tej komodity na nákladoch i-teho sektora. Preto aj v tomto prípade existujú matice $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ a $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^T)^{-1}$, ktorými prenásobíme rovnice (6.21), resp. (6.22):

$$\phi_i = \sum_j \gamma_{ji}\lambda_j \tag{6.23}$$

$$\psi_i = \sum_j \gamma_{ij}\left(\frac{\chi_j^H}{\sum_{k=1}^n \beta_k^H \phi_k^H}\kappa M + \frac{\chi_j^{INV}}{\sum_{k=1}^n \beta_k^{INV}\phi_k^{INV}}(1-\kappa)M\right) \tag{6.24}$$

Tieto vzťahy prepíšeme do tvaru s pôvodnými premennými:

$$p_i^A = \left(\sum_j \gamma_{ji} i a_j^{VA}\left(\delta_{L_j} + \delta_{K_j} r^{1-\sigma^{VA}}\right)^{\frac{1-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{6.25}$$

$$p_i^{A^\sigma} Y_i = M \cdot \sum_j \gamma_{ij}\left(\frac{\beta_j^H p_j^{A^{\sigma^Y-\sigma^H}}}{\sum_{k=1}^n \beta_k^H p_k^{A^{1-\sigma^H}}}\kappa + \frac{\beta_j^{INV} p_j^{A^{\sigma^Y-\sigma^{INV}}}}{\sum_{k=1}^n \beta_k^{INV} p_k^{A^{1-\sigma^{INV}}}}(1-\kappa)\right) \tag{6.26}$$

Ak dosadíme rovnicu (6.26) do vzťahu (6.3) s použitím rovností (6.8) a (2.2), dostaneme:

$$TL = (TL + rTK) \sum_{i=1}^{n} \delta_{L_i} a_i^{VA} p_i^{VA^{\sigma^{VA}-\sigma^Y}} \cdot \\ \cdot \sum_j \gamma_{ij} \left(\frac{\beta_j^H p_j^{A^{\sigma^Y-\sigma^H}}}{\sum_{k=1}^n \beta_k^H p_k^{A^{1-\sigma^H}}} \kappa + \frac{\beta_j^{INV} p_j^{A^{\sigma^Y-\sigma^{INV}}}}{\sum_{k=1}^n \beta_k^{INV} p_k^{A^{1-\sigma^{INV}}}} (1-\kappa) \right) \tag{6.27}$$

Nakoniec dosadíme z rovníc (6.25) a (6.12):

$$TL = (TL + rTK) \sum_{i=1}^{n} \delta_{L_i}^i a_i^{VA} \left(\delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma^{VA}} \right)^{\frac{\sigma^{VA}-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}} \cdot \\ \cdot \sum_j \gamma_{ij} \left(\frac{\beta_j^H \left(\sum_s \gamma_{sj} a_s^{VA} \left(\delta_{L_s} + \delta_{K_s} r^{1-\sigma^{VA}} \right)^{\frac{1-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}} \right)^{\frac{\sigma^Y-\sigma^H}{1-\sigma^Y}} \kappa}{\sum_{k=1}^n \beta_k^H \left(\sum_s \gamma_{sk} a_s^{VA} \left(\delta_{L_s} + \delta_{K_s} r^{1-\sigma^{VA}} \right)^{\frac{1-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}} \right)^{\frac{1-\sigma^H}{1-\sigma^Y}}} + \right. \\ \left. + \frac{\beta_j^{INV} \left(\sum_s \gamma_{sj} a_s^{VA} \left(\delta_{L_s} + \delta_{K_s} r^{1-\sigma^{VA}} \right)^{\frac{1-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}} \right)^{\frac{\sigma^Y-\sigma^{INV}}{1-\sigma^Y}} (1-\kappa)}{\sum_{k=1}^n \beta_k^{INV} \left(\sum_s \gamma_{sk} a_s^{VA} \left(\delta_{L_s} + \delta_{K_s} r^{1-\sigma^{VA}} \right)^{\frac{1-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}} \right)^{\frac{1-\sigma^{INV}}{1-\sigma^Y}}} \right) \tag{6.28}$$

Takto sme dostali jednu nelineárnu rovnicu s jednou neznámou r, ktorú môžeme vypočítať numericky. Ostatné premenné potom vieme dopočítať priamo. Riešiteľnosť rovnice (6.28) na množine kladných čísel sa nám však vo všeobecnosti dokázať nepodarilo.

6.2 Iteračná metóda riešenia rozšíreného modelu

Vo všeobecnom prípade rozšíreného modelu sa nám nepodarilo upraviť zadaný systém nelineárnych rovníc na systém lineárnych rovníc a malého počtu nelineárnych rovníc. Podarilo sa nám však zjednodušenie pôvodného veľkého systému na sústavu rovníc (6.15), (6.16) a (6.14). Táto je síce stále nelineárnym systémom, avšak vzhľadom na menší rozmer ($2n+1$ rovníc s $2n+1$ neznámimi) a vhodný tvar, umožňuje prehľadnejší spôsob výpočtu riešenia.

Použitá iteračná metóda pozostáva z dvoch stupňov: V prvom stupni sa pre zadanú cenu kapitálu počítajú ceny komodít. V druhom stupni sa z ich cien vypočíta cena kapitálu, ktorá sa následne použije pre výpočet presnejších cien komodít v prvom stupni. Tento postup sa opakuje, až kým nedosiahneme stabilné riešenie.

Na výpočet cien komodít použijeme rovnosť (6.15), spolu s rovnosťou (5.5), ktorých úpravou dostaneme nasledovnú sústavu rovníc:

$$p_i = \left(a_i^{IC} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} {p_j^A}^{1-\sigma^{IC}} \right)^{\frac{1-\sigma^Y}{1-\sigma^{IC}}} + a_i^{VA} \left(\delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma^{VA}} \right)^{\frac{1-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}} \right)^{\frac{1}{1-\sigma^Y}} \tag{6.29}$$

$$p_i^A = \sum_{j=1}^{n} \grave{\alpha}_{ji} p_j^Y, \tag{6.30}$$

kde $\grave{\alpha}_{ji}$ sú členy matice $\grave{\mathbf{A}}$, pre ktorú platí $\grave{\mathbf{A}}^{-1} = \widetilde{\mathbf{A}} = \{\alpha_{ji}\}_{i,j=1}^{n}$. Táto inverzná matica spravidla existuje, nakoľko, ako uvedieme neskôr, pôvodná matica $\widetilde{\mathbf{A}}$ býva v praxi diagonálne dominantná. Pre následný výpočet ceny kapitálu r upravíme rovnicu (6.16) do maticového tvaru:

$$\mathbf{CY} = \frac{\boldsymbol{\chi}^{\boldsymbol{H}}}{{\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{H}}}^T \boldsymbol{\phi}^{\boldsymbol{H}}} \kappa M + \frac{\boldsymbol{\chi}^{\boldsymbol{INV}}}{{\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{INV}}}^T \boldsymbol{\phi}^{\boldsymbol{INV}}} (1-\kappa) M, \tag{6.31}$$

kde pre členy matice $\mathbf{C}$ platí:

$$\{c_{ji}\} = {p_j^A}^{\sigma^{IC}} \alpha_{ji} - a_{ji} a_i^{IC} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} {p_k^A}^{1-\sigma^{IC}} \right)^{\frac{\sigma^{IC}-\sigma^Y}{1-\sigma_{IC}}} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} p_k^A \right)^{\sigma^Y}.$$

Ak je matica $\mathbf{C}$ invertovateľná, označíme členy matice $\mathbf{C}^{-1}$ ako $\{\check{c}_{ij}\}$ a prenásobíme ňou rovnicu 6.31:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} \check{c}_{ij} \left(\frac{\chi_j^H}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k^H \phi_k^H} \kappa M + \frac{\chi_j^{INV}}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{INV} \phi_k^{INV}} (1-\kappa) M \right) \tag{6.32}$$

Po prepísaní do tvaru s pôvodnými premennými dostávame:

$$Y_i = M \cdot \sum_{j=1}^{n} \check{c}_{ij} \left(\frac{\beta_j^H {p_j^A}^{\sigma^Y - \sigma^H}}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k^H {p_k^A}^{1-\sigma^H}} \kappa + \frac{\beta_j^{INV} {p_j^A}^{\sigma^Y - \sigma^{INV}}}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{INV} {p_k^A}^{1-\sigma^{INV}}} (1-\kappa) \right) \tag{6.33}$$

Nakoniec dosadíme rovnice (6.33) a (2.2) do vzťahu (6.14)

$$TL = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^L a_i^{VA} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} p_j^A \right)^{\frac{\sigma^Y}{1-\sigma^Y}} \left(\delta_{L_i} + \delta_{K_i} r^{1-\sigma^{VA}} \right)^{\frac{\sigma^{VA}-\sigma^Y}{1-\sigma^{VA}}} \cdot$$
$$\cdot \sum_{j=1}^{n} \check{c}_{ij} \left(\frac{\beta_j^H {p_j^A}^{\sigma^Y-\sigma^H}}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k^H {p_k^A}^{1-\sigma^H}} \kappa + \frac{\beta_j^{INV} {p_j^A}^{\sigma^Y-\sigma^{INV}}}{\sum_{k=1}^{n} \beta_k^{INV} {p_k^A}^{1-\sigma^{INV}}} (1-\kappa) \right) (TL + rTK) \tag{6.34}$$

Iteračný spôsob riešenia sa teda bude skladať z nasledovných krokov:

1. Za počiatočnú hodnotu ceny kapitálu zvolíme $r = 1$ a cien komodít $p_i^A = 1$.

2. Z cien komodít p_i^A a ceny kapitálu r, pomocou rovnosti (6.29), vypočítame ceny produkcie p_i^Y.

3. Z cien produkcie p_i^Y vypočítame pomocou rovnosti (6.30) cenu komodít p_i^A. Pokiaľ sa táto hodnota nelíši od predošlých hodnôt cien komodít p_i^A, prejdeme na bod 4. Inak prejdeme na bod 2.

4. Dosadíme ceny komodít p_i^A do rovnosti (6.34) a pomocou prostredia MATLAB zistíme numericky cenu kapitálu r. Ak sa táto hodnota nelíši od predošlej hodnoty ceny kapitálu r, našli sme riešenie a tak ukončíme program. Inak prejdeme na bod 2.

Ostatné premenné modelu môžeme následne vypočítať dosadením.

Uvedený iteračný postup však nemusí viesť k cieľu vždy. Na to aby sme pomocou neho našli kladné riešenie musia byť splnené tri podmienky:

- Iteračný postup pre výpočet cien komodit p_i^A a cien produkcie p_i^Y pri zadanej cene kapitálu r konverguje.

- Matica $\mathbf{C}$ je invertovateľná a existuje riešenie nelineárnej rovnice (6.34) pre cenu kapitalu r pri daných cenách komodít p_i^A.

- Druhý stupeň iterácie (kroky 2-4) konverguje.

Presné podmienky konvergencie sa nám odvodiť nepodarilo. Ukazuje sa však, že na to aby konvergoval postup pre výpočet cien komodit p_i^A a cien produkcie p_i^Y, je potrebné aby bola matica prerozdelenia produkcie sektorov medzi komodity $\widetilde{\mathbf{A}} = \{\alpha_{ji}\}_{i,j=1}^{n}$ blízka jednotkovej matici. Toto je v praxi zvyčajne splnené, nakoľko počet agregovaných komodít zvykne byť v praxi rovnaký ako počet agregovaných sektorov a každému sektoru prislúcha jeho typický produkt. Ako veľmi môže byť matica $\widetilde{\mathbf{A}}$ odchýlená od jednotkovej matice pritom závisí od koeficientov a_i^{IC} vyjadrujúcich podiel nákladov sektora i spotrebovaných na komodity. Čím sú tieto koeficienty menšie, tým viac môže byť matica $\widetilde{\mathbf{A}}$ odchýlená od jednotkovej matice. Konvergencia takisto závisí od jednotlivých elasticít substitúcie.

Ak by sa elasticity substitúcie limitne blížili nule (rovnosť nemôže nastať, lebo elasticita substitúcie CES funkcie $\sigma \in (0, 1)$), mohli by sme prvý stupeň našej iteračnej schémy prepísať nasledovne:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & \grave{\mathbf{A}} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^A(t) \\ p^Y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \\ R_{n\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^A(t+1) \\ p^Y(t+1) \end{bmatrix} \tag{6.35}$$

kde vektor R je pre danú cenu kapitálu r konštantný. Ceny komodít p^A, resp. produkcie p^Y, teda budú konvergovať v prípade, že vlastné hodnoty matice $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & \grave{\mathbf{A}} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{bmatrix}$ budú menšie ako 1 (pozri [1]). Navyše, ak je matica $\mathbf{I} - \mathcal{A}$ invertovateľná, tak ceny komodít a produkcie budú konvergovať k hodnote:

$$\begin{bmatrix} \hat{p}^A \\ \hat{p}^Y \end{bmatrix} = (\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \\ R_{n\times 1} \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

V skutočnosti však elasticita substitúcie CES funkcie $\sigma \in (0, 1)$, kvôli čomu sa táto podmienka konvergencie do istej miery modifikuje.

O podmienkach riešiteľnosti rovnice (6.34), či konvergencií celého systému vieme povedať ešte menej. Počas testovania rôznych vstupných hodnôt sme si však všimli, že prostredie MATLAB nedokázalo nájsť riešenie rovnice (6.34) v prípade scenárov s výrazným poklesom celkového množstva kapitálu a nárastom celkového množstva práce. Celý systém pri testovaných vstupných hodnotách a scenároch konvergoval vždy ak konvergoval prvý stupeň iterácie a zároveň rovnica (6.34) mala riešenie.

Záver

Cieľom práce bolo nájsť alternatívny spôsob riešenia CGE modelov, ktorý by obišiel použitie prostredia GAMS a umožnil ďalšiu analýzu výsledkov modelu. Pre tento nový spôsob riešenia sme navrhli postup úpravy systému nelineárnych rovníc, ktorými je model definovaný, na jednoduchší systém lineárnych rovníc a jednej nelineárnej rovnice.

Toto riešenie sme úspešne použili pre jednoduchý CGE model. Pre CES produkčnú funkciu a funkciu užitočnosti s rovnakou elasticitou substitúcie sme odvodili aj explicitný vzťah na výpočet riešenia. Pri rozšírenom modeli sme na aplikáciu uvedeného postupu museli prijať predpoklad, že každý produkčný sektor vyrába iba jednu komoditu. Takisto sme museli obmedziť triedu vhodných produkčných funkcií tak, aby elasticita substitúcie vstupných komodít bola rovnaká, ako elasticita substitúcie medzi agregátmi medzispotreby a pridanej hodnoty.

Pre model, s viacerými produkovanými komoditami a dvojstupňovou CES produkčnou funkciou bez obmedzení na elasticitu substitúcie, už uvedený postup nebolo možné aplikovať. Ukázali sme však iný postup, pri ktorom sa riešenie po úprave systému rovníc počíta iteračne. Všetky uvedené spôsoby riešenia sme naprogramovali v prostredí MATLAB.

Výstupy tejto práce je možné využiť na bližšiu analýzu CGE modelov napr. v oblasti citlivosti výsledkov na exogénne parametre. Takisto môže slúžiť na porovnanie výsledkov získaných prostredím GAMS. Nakoľko však aj náš rozšírený model abstrahuje od častých súčastí CGE modelov, akými sú zahraničie, či vláda, bolo by vhodné rozšíriť naše postupy aj pre komplexnejšie modely.

Zoznam použitej literatúry

[1] Brunovský, P.: *Diferenčné a diferenciálne rovnice*, učebné texty, dostupné na internete (25.4.2014):
www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky/ddrtext.pdf

[2] Brunovský, P.: *Mikroekonómia*, učebné texty, dostupné na internete (25.4.2014):
www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky2/mikro.pdf

[3] Pániková L.: *Alternatívne uzávery CGE modelov*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2007, dostupné na internete (25.4.2014):
www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2007/panikova/diplomovka.pdf

[4] Kotov, M., Páleník, V. : *Konštrukcia modelu všeobecnej ekonomickej rovnováhy*, Združenie pre ekonomické modelovanie, prognózy a analýzy, 2003

[5] Rutherford, T. F.: *Lecture Notes on Constant Elasticity Functions*, University of Colorado, 2002, dostupné na internete (25.4.2014):
www.gamsworld.eu/mpsge/debreu/ces.pdf

[6] Sekereš S.: *Teória statických a dynamických CGE modelov*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2006, dostupné na internete (25.4.2014):
www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2006/sekeres/diplomovka.pdf

[7] Šmátralová L.: *Riešiteľnosť rovníc CGE modelov*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2008, dostupné na internete (25.4.2014):
www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2008/smatralova/diplomovka.pdf

Príloha A - Odvodenie dopytových funkcií a ich parametrov pre normovaný tvar funkcií

Ak sa subjekt na trhu charakterizovaný produkčnou funkciou $Y = f(X_1, \ldots, X_n)$ správa racionálne, bude voliť svoje vstupy X_j tak, aby minimalizoval svoje náklady $\sum_{j=1}^{n} p_j X_j$ pri danej produkcií Y a cenách na trhu p_j. Rieši teda úlohu:

$$\min_{X_j} \sum_{j=1}^{n} p_j X_j \tag{A.1}$$

za podmienky

$$Y = f(\mathbf{X})$$

Ak funkcia je f spojitá a množstvá X_j sú kladné, podľa Lagrangeovej vety existuje také $\lambda \geq 0$, že platí:

$$p_j = \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j X_j\right) = \lambda \frac{\partial f}{\partial X_j}(\hat{\mathbf{X}}), \tag{A.2}$$

kde $\hat{\mathbf{X}}$ je optimálne riešenie.

CES produkčná funkcia

Normovaný tvar CES produkčnej funkcie vyzerá vo všeobecnosti nasledovne:

$$Y = \overline{Y}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \left(\frac{X_j}{\overline{X_j}}\right)^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} \tag{A.3}$$

Pre optimálny dopyt teda podľa (A.2) platí:

$$p_j = \lambda \overline{Y}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \left(\frac{X_j}{\overline{X_j}}\right)^{\rho}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} a_j \frac{\hat{X}_j^{\rho-1}}{\overline{X_j}^{\rho}} \tag{A.4}$$

Z toho môžeme vyjadriť:

$$\frac{p_j \overline{X_j}^{\rho}}{a_j \hat{X}_j^{\rho-1}} = \lambda \overline{Y}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \left(\frac{X_j}{\overline{X_j}}\right)^{\rho}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} = \frac{p_i \overline{X_i}^{\rho}}{a_i \hat{X}_i^{\rho-1}} \tag{A.5}$$

$$a_j \left(\frac{\hat{X}_j}{\overline{X_j}}\right)^{\rho} = p_j \hat{X}_j \frac{a_i \hat{X}_i^{\rho-1}}{p_i \overline{X_i}^{\rho}} \tag{A.6}$$

Dosadíme tento vzťah do produkčnej funkcie (A.3):

$$Y = \overline{Y} \left(\frac{a_i \hat{X}_i^{\rho-1}}{p_i \overline{X_i}^{\rho}} \sum_{j=1}^{n} p_j \hat{X}_j \right)^{\frac{1}{\rho}} \tag{A.7}$$

Táto rovnosť musí platiť aj pre benchmarkové hodnoty. Po ich dosadení a následnej úprave, dostávame vzťah pre parametre a_i:

$$a_i = \frac{\overline{p_i}\overline{X_i}}{\sum_{j=1}^{n} \overline{p_j}\overline{X_j}} \tag{A.8}$$

Tento vzťah dosadíme do rovnosti (A.5) a postupne dostaneme:

$$\frac{p_j \overline{X_j}^{\rho-1}}{\overline{p_j} \hat{X}_j^{\rho-1}} \sum_{k=1}^{n} \overline{p_k}\overline{X_k} = \frac{p_i \overline{X_i}^{\rho-1}}{\overline{p_i} \hat{X}_i^{\rho-1}} \sum_{k=1}^{n} \overline{p_k}\overline{X_k} \tag{A.9}$$

$$\frac{\hat{X}_j}{\overline{X_j}} = \left(\frac{p_j \overline{p_i}}{\overline{p_j} p_i} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} \frac{\hat{X}_i}{\overline{X_i}} \tag{A.10}$$

Nakoniec dosadíme do produkčnej funkcie (A.3) a vyjadríme dopyt $\hat{X}_i$:

$$Y = \overline{Y} \frac{\hat{X}_i}{\overline{X_i}} \left(\frac{\overline{p_i}}{p_i} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \left(\frac{p_j}{\overline{p_j}} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{1}{\rho}} \tag{A.11}$$

$$\hat{X}_i = \overline{X_i} \frac{Y}{\overline{Y}} \left(\frac{\overline{p_i}}{p_i} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \left(\frac{p_j}{\overline{p_j}} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{1}{-\rho}} \tag{A.12}$$

$$\hat{X}_i = \overline{X_i} \frac{Y}{\overline{Y}} \left(\frac{\overline{p_i}}{p_i} \right)^{\sigma} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \left(\frac{p_j}{\overline{p_j}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}, \tag{A.13}$$

kde $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$ je elasticita substitúcie medzi vstupnými faktormi.

Cobb-Douglassova produkčná funkcia

Normovaný tvar Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie vyzerá vo všeobecnosti nasledovne:

$$Y = \overline{Y} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{X_j}{\overline{X_j}} \right)^{a_j} \tag{A.14}$$

Pre optimálny dopyt podľa (A.2) teda platí:

$$p_j = \lambda Y \frac{a_j}{\hat{X}_j} \tag{A.15}$$

Z toho môžeme vyjadriť:

$$\frac{p_j \hat{X}_j}{a_j} = \lambda Y = \frac{p_i \hat{X}_i}{a_i} \tag{A.16}$$

$$a_j = p_j \hat{X}_j \frac{a_i}{p_i \hat{X}_i} \tag{A.17}$$

Ak predpokladáme funkciu s konštantnými výnosmi z rozsahu, dostaneme vzťah pre parametre a_i:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{a_i}{p_i \hat{X}_i} \sum_{j=1}^{n} p_j \hat{X}_j \tag{A.18}$$

$$a_i = \frac{p_i \hat{X}_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j \hat{X}_j} \tag{A.19}$$

Tento vzťah s použitím benchmarkových hodnôt dosadíme do rovnosti (A.16) a postupne dostaneme:

$$\frac{p_j \hat{X}_j}{\overline{p_j}\overline{X_j}} \sum_{k=1}^{n} \overline{p_k}\overline{X_k} = \frac{p_i \hat{X}_i}{\overline{p_i}\overline{X_i}} \sum_{k=1}^{n} \overline{p_k}\overline{X_k} \tag{A.20}$$

$$\frac{\hat{X}_j}{\overline{X_j}} = \frac{\overline{p_j} p_i \hat{X}_i}{p_j \overline{p_i}\overline{X_i}} \tag{A.21}$$

Nakoniec dosadíme do produkčnej funkcie (A.14) a vyjadríme dopyt $\hat{X}_i$:

$$Y = \overline{Y} \frac{p_i \hat{X}_i}{\overline{p_i}\overline{X_i}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\overline{p_j}}{p_j}\right)^{a_j} \tag{A.22}$$

$$\hat{X}_i = \overline{X_i} \frac{\overline{p_i} Y}{p_i \overline{Y}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{p_j}{\overline{p_j}}\right)^{a_j} \tag{A.23}$$

Leontiefova produkčná funkcia

Normovaný tvar Leontiefovej produkčnej funkcie vyzerá vo všeobecnosti nasledovne:

$$Y = \overline{Y} \min_j \left(\frac{X_j}{\overline{X_j}}\right) \tag{A.24}$$

Z tohto tvaru možno vidieť, že náklady budu minimálne ak sa všetky vstupy využijú a teda platí

$$\frac{Y}{\overline{Y}} = \min_j \left(\frac{\hat{X}_j}{\overline{X_j}}\right) = \frac{\hat{X}_i}{\overline{X_i}} \qquad \forall i = 1, \ldots, n \tag{A.25}$$

Preto optimálny dopyt $\hat{X}_i$ bude:

$$\hat{X}_i = \overline{X_i} \frac{\overline{Y}}{Y} \tag{A.26}$$

CES funkcia užitočnosti

Ak sa subjekt na trhu charakterizovaný funkciou užitočnosti $U = f(X_1, \ldots, X_n)$ správa racionálne, bude voliť svoje vstupy X_j tak, aby boli riešením úlohy:

$$\max_{X_j} f(\mathbf{X}) \tag{A.27}$$

za podmienky

$$M = \sum_{j=1}^{n} p_j X_j,$$

kde M je rozpočtové ohraničenie daného subjektu. Aj v tomto prípade pre optimálne riešenie platí rovnosť (A.2).

Normovaný tvar CES funkcie užitočnosti vyzerá vo všeobecnosti nasledovne:

$$U = \overline{U_i} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{X_i}{\overline{\overline{X_i}}} \right)^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}}, \tag{A.28}$$

Vzťah (A.8) vieme odvodiť rovnako ako pri produkčnej funkcií. Takisto vzťah (A.10), ktorý dosadíme do rovnice rozpočtového ohraničenia a dostaneme Marshalovský dopyt:

$$M = \frac{\hat{X}_i}{\overline{\overline{X_i}}} \left(\frac{\overline{p_i}}{p_i} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} \sum_{j=1}^{n} p_j \overline{X_j} \left(\frac{p_j}{\overline{p_j}} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} \tag{A.29}$$

$$\hat{X}_i = \overline{X_i} \left(\frac{\overline{p_i}}{p_i} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \overline{p_j} \overline{X_j} \left(\frac{p_j}{\overline{p_j}} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}} M \tag{A.30}$$

$$\hat{X}_i = a_i \left(\frac{\overline{p_i}}{p_i} \right)^{\sigma} \frac{1}{\overline{p_i} \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\frac{p_j}{\overline{p_j}} \right)^{1-\sigma}} M \tag{A.31}$$

Cobb-Douglasova funkcia užitočnosti

Normovaný tvar Cobb-Douglasovej funkcie užitočnosti vyzerá vo všeobecnosti nasledovne:

$$U = \overline{U} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{X_j}{\overline{\overline{X_j}}} \right)^{a_j} \tag{A.32}$$

Vzťahy (A.19) a (A.21) vieme odvodiť rovnako ako pri produkčnej funkcií, z čoho po dosadení do rovnice rozpočtového ohraničenia dostaneme Marshalovský dopyt:

$$M = \frac{p_i \hat{X}_i}{\overline{p_i} \overline{\overline{X_i}}} \sum_{j=1}^{n} \overline{p_j} \overline{X_j} \tag{A.33}$$

$$\hat{X}_i = \frac{\overline{p_i}\,\overline{X_i}}{p_i} \sum_{j=1}^{n} \overline{p_j}\,\overline{X_j} M \tag{A.34}$$

$$\hat{X}_i = \frac{a_i}{p_i} M \tag{A.35}$$

Príloha B - Zdrojový kód riešenia v prostredí MATLAB

```
function [noveY,noveL,noveK,noveX,noveH,novep,nover]=CGEvypocet( SAM,nasobKap,nasobPrace,...
produkcia, uzitocnost,sigmazad,sigmazadIC,sigmazadVA,sigmazadH,sigmazadINV,viacKomodit )

global n a aVA aIC beta betaINV deltaK deltaL praca kapital B medziY pecko sigma sigmaH ...
sigmaVA sigmaINV sigmaIC
%nacitanie vstupnych hodnot
if isempty(sigmazadINV)      %overenie, ci su v modeli investicie
    investicie=false;
else
    investicie=true;
    sigmaINV=sigmazadINV;
end
if isempty(sigmazadVA)       %overenie ci je 2stupnova produkcia
    dvaStupne=false;
else
    dvaStupne=true;
    sigmaVA=sigmazadVA;
    if isempty(sigmazadIC)
        sigmaIC=sigmazad;   %ak chyba sigmaIC, bude rovna sigmaY
    else
        sigmaIC=sigmazadIC;
    end
end
sigma=sigmazad;
sigmaH=sigmazadH;

[mko,nko]=size(SAM);
n=(nko-3-investicie)/(1+viacKomodit);
Y=SAM(:,(viacKomodit*n+1):(n*(1+viacKomodit)))'*ones(mko,1);
X=SAM(1:n,(viacKomodit*n+1):(n*(1+viacKomodit)));
IC=(ones(1,n)*X)';
K=SAM((1+viacKomodit)*n+1,viacKomodit*n+1:(1+viacKomodit)*n)';
L=SAM((1+viacKomodit)*n+2,viacKomodit*n+1:(1+viacKomodit)*n)';
VA=(ones(1,2)*[K';L'])';
H=SAM(1:n,nko-investicie);
INV=SAM(1:n,nko);
praca=sum(L)*nasobPrace;
kapital=sum(K)*nasobKap;
r=1;
p=ones(n,1);

%vypocet koeficientov
beta=H/(ones(1,n)*H);
```

```
betaINV=INV/(ones(1,n)*INV);
B=(ones(1,n)*H)/((ones(1,n)*INV)+(ones(1,n)*H));
if viacKomodit
    Acko=SAM(n+1:2*n,1:n);
    alfa=Acko./(Y*ones(1,n));
end
if dvaStupne
    a=X./(IC*ones(1,n))';
    aIC=IC./Y;
    aVA=VA./Y;
    deltaK=K'./VA';
    deltaL=L'./VA';
else
    a= X./(ones(n,1)*Y');
    deltaK=K'./Y';
    deltaL=L'./Y';
end

%vypocet novych hodnot
if (viacKomodit==0) && (sigma==sigmaIC || dvaStupne==0) %ak nie je potrebna iteracia,
   if dvaStupne                                          %hodnoty sa pocitaju priamo
    if (strcmp(produkcia,'CES')) && (strcmp(uzitocnost,'CES'))
     r0=1;
     %numericky vypocet ceny kapitalu z 6.28
     [nover,val]=fsolve(@myfun2st,r0);
     %vypocet cien komodit z rovnice 6.24
     novep=((eye(n)-(a.*(ones(n,1)*aIC'))')\(aVA.*(nover^(1-sigmaVA)*deltaK'+deltaL')...
     .^((1-sigma)/(1-sigmaVA)))).^(1/(1-sigma));
     pY=(praca+nover*kapital)*((eye(n)-(a.*(ones(n,1)*aIC')))\((beta.*novep.^(sigma-sigmaH))...
     *B/(novep'.^(1-sigmaH)*beta)+(betaINV.*novep.^(sigma-sigmaINV))*(1-B)/...
     (novep'.^(1-sigmaINV)*betaINV)));
     %dopocitanie zvysnych premennych
     noveY=pY./(novep.^(sigma));
     noveX=novep.^(-sigma)*(noveY'.*novep'.^(sigma)).*(a.*(ones(n,1)*aIC'));
     noveL=noveY.*novep.^(sigma).*deltaL'.*aVA.*(deltaL'+deltaK'*nover^(1-sigmaVA))...
     .^((sigmaVA-sigma)/(1-sigmaVA));
     noveK=noveY.*novep.^(sigma)*nover^(-sigmaVA).*deltaK'.*aVA.*(deltaL'+deltaK'*...
     nover^(1-sigmaVA)).^((sigmaVA-sigma)/(1-sigmaVA));
     noveH=beta.*novep.^(-sigmaH)/(novep'.^(1-sigmaH)*beta)*(praca+nover*kapital)*B;
     noveINV=betaINV.*novep.^(-sigmaINV)/(novep'.^(1-sigmaINV)*betaINV)*(praca+nover*kapital)*(1-B);
     end
   else
    if ((strcmp(produkcia,'CD')) && (strcmp(uzitocnost,'CD')))
     %explicitny vypocet zo smatralovej
     R=deltaL*((eye(n)-a)\beta);
     nover=(praca*(1-R))/(R*kapital);
     novep=exp((eye(n)-a')\(deltaK'*log(nover)));
     pY=((eye(n)-a)\beta*(praca+nover*kapital));
```

```
      noveY=pY./novep;
      noveX=diag(novep)\a*diag(pY);
      noveL=deltaL'.*pY;
      noveK=deltaK'.*pY/nover;
      noveH=beta./novep*(praca+nover*kapital);

    elseif strcmp(produkcia,'CES')% & (strcmp(uzitocnost,'CD')))
      r0=1;
      if strcmp(uzitocnost,'CD')
        %numericky vypocet z rovnice 4.32
        [nover,val]=fsolve(@myfun3,r0);
        novep=((eye(n)-a')\(nover^(1-sigma)*deltaK'+deltaL')).^(1/(1-sigma));
        pY=(eye(n)-a)\(beta.*novep.^(1-sigma))*(praca+nover*kapital);
      elseif strcmp(uzitocnost,'CES');
        %explicitny vypocet z rovnice 4.17
        nover=(praca*deltaK*ones(n,1)/(kapital*deltaL*ones(n,1)))^(1/(sigma));
        novep=((eye(n)-a')\(nover^(1-sigma)*deltaK'+deltaL')).^(1/(1-sigma));
        pY=(eye(n)-a)\(beta)*(praca+nover*kapital)/(novep'.^(1-sigma)*beta);
      end
      %dopocitanie zvysnych hodnot
      noveY=pY./(novep.^(sigma));
      noveX=novep.^(-sigma)*(noveY'.*novep'.^(sigma)).*a;
      noveL=noveY.*novep.^(sigma).*deltaL';
      noveK=noveY.*novep.^(sigma)*nover^(-sigma).*deltaK';
      if strcmp(uzitocnost,'CD')
        noveH=beta./novep*(praca+nover*kapital);
      elseif strcmp(uzitocnost,'CES')
        noveH=beta.*novep.^(-sigma)/(novep'.^(1-sigma)*beta)*(praca+nover*kapital);
      end
    end
  end
else
 nover=r;
 novep=p;
 pecko=alfa*novep;
 starer=1.2*nover;
 pocitadlo=0;
 while sum(abs(nover-starer))>0.00001
  pocitadlo=pocitadlo+1;
  starep=1.2*p;
  starer=nover;
  pocitadlo2=0;
  while sum(abs(p-starep))>0.0001 %sum(abs(pecko-starepecko))>0.0001
    starep=p;
    pocitadlo2=pocitadlo2+1;
    %iteracia z rovnic 6.29, 6.30
    pecko=(aIC.*(a'*(p.^(1-sigmaIC))).^((1-sigma)/(1-sigmaIC))+aVA.*...
    (deltaL'+deltaK'*nover^(1-sigmaVA)).^((1-sigma)/(1-sigmaVA))).^(1/(1-sigma));
```

```
    p=alfa\pecko;
    if pocitadlo2 >2000
      break
    end
  end
  %z rovnice 6.34
  medziY=((p.^sigmaIC*ones(1,n)).*alfa'-(a.*(ones(n,1)*(aIC'.*pecko'.^sigma.*...
  (a'*p.^(1-sigmaIC))'.^((sigmaIC-sigma)/(1-sigmaIC))))))\(beta.*p.^(sigmaIC-sigmaH)/...
  (beta'*p.^(1-sigmaH))*B+betaINV.*p.^(sigmaIC-sigmaINV)/(betaINV'*p.^(1-sigmaINV))*(1-B));
  [nover,val]=fsolve(@myfunit,starer);
  if pocitadlo >400
    break
  end
 end
 noveY=medziY*(praca+nover*kapital);
 novepIC=(a'*p.^(1-sigmaIC)).^(1/(1-sigmaIC));
 noveIC=aIC.*noveY.*novepIC.^(-sigma).*pecko.^sigma;
 novepVA=(deltaL'+deltaK'*nover^(1-sigmaVA)).^(1/(1-sigmaVA));
 noveVA=aVA.*noveY.*novepVA.^(-sigma).*pecko.^sigma;
 noveX=a.*(ones(n,1)*noveIC').*(p.^(-sigmaIC)*ones(1,n)).*(ones(n,1)*novepIC'.^sigmaIC);
 noveK=deltaK'.*noveVA*nover^(-sigmaVA).*novepVA.^sigmaVA;
 noveL=deltaL'.*noveVA.*novepVA.^sigmaVA;
 noveH=beta.*p.^(-sigmaH)*B*(praca+nover*kapital)/(beta'*p.^(1-sigmaH));
 noveINV=betaINV.*p.^(-sigmaINV)*(1-B)*(praca+nover*kapital)/(betaINV'*p.^(1-sigmaINV));
 noveAcko=alfa.*(noveY*ones(1,n));
end
%porovnanie oproti starym hodnotam
nasobokY=noveY./Y;
nasobokX=noveX./X;
nasobokL=noveL./L;
nasobokK=noveK./K;
nasobokH=noveH./H;
%zapis novych hodnot do excelu
xlswrite('cge.xls', {'noveY'}, 'scenar', 'a1');
xlswrite('cge.xls', {'noveL'}, 'scenar', 'b1');
xlswrite('cge.xls', {'noveK'}, 'scenar', 'c1');
xlswrite('cge.xls', {'noveH'}, 'scenar', 'd1');
xlswrite('cge.xls', {'noveINV'}, 'scenar', 'e1');
xlswrite('cge.xls', {'novep'}, 'scenar', 'f1');
xlswrite('cge.xls', {'nover'}, 'scenar', 'g1');
xlswrite('cge.xls',  {'noveX'}, 'scenar', 'h1');
xlswrite('cge.xls',  noveY, 'scenar', 'a2');
xlswrite('cge.xls', noveL, 'scenar', 'b2');
xlswrite('cge.xls', noveK, 'scenar', 'c2');
xlswrite('cge.xls', noveH, 'scenar', 'd2');
xlswrite('cge.xls', noveINV, 'scenar', 'e2');
xlswrite('cge.xls', novep, 'scenar', 'f2');
xlswrite('cge.xls', nover, 'scenar', 'g2');
```

```
xlswrite('cge.xls', noveX, 'scenar', 'h2');
end

function [ F ] = myfun2st( x )
 global n a aVA aIC beta betaINV deltaK deltaL praca kapital sigma sigmaH sigmaVA B sigmaINV
 %z rovnice 6.28
 F = praca-(deltaL.*aVA'.*(deltaL+deltaK*x^(1-sigmaVA)).^((sigmaVA-sigma)/(1-sigmaVA)))...
    *((eye(n)-a.*(ones(n,1)*aIC'))\(((beta.*((eye(n)-(a.*(ones(n,1)*aIC'))')\(aVA.*...
    (deltaL'+deltaK'*x^(1-sigmaVA)).^((1-sigma)/(1-sigmaVA)))).^((sigma-sigmaH)/(1-sigma)))*B/...
    (beta'*(((eye(n)-(a.*(ones(n,1)*aIC'))')\(aVA.*(deltaL'+deltaK'*x^(1-sigmaVA)).^((1-sigma)/...
    (1-sigmaVA)))).^((1-sigmaH)/(1-sigma)))))+((betaINV.*((eye(n)-(a.*(ones(n,1)*aIC'))')\...
    (aVA.*(deltaL'+deltaK'*x^(1-sigmaVA)).^((1-sigma)/(1-sigmaVA)))).^((sigma-sigmaINV)/...
    (1-sigma)))*(1-B)/(betaINV'*(((eye(n)-(a.*(ones(n,1)*aIC'))')\(aVA.*(deltaL'+deltaK'*...
    x^(1-sigmaVA)).^((1-sigma)/(1-sigmaVA)))).^((1-sigmaINV)/(1-sigma)))))))*(x*kapital+praca);
end

function [ F ] = myfunit( x )
 global n a aVA aIC beta betaINV deltaK deltaL praca kapital sigma sigmaH sigmaVA B...
  sigmaINV medziY pecko
 F = praca-deltaL*(aVA.*(deltaL'+deltaK'*x^(1-sigmaVA)).^((sigmaVA-sigma)/...
     (1-sigmaVA)).*pecko.^sigma.*medziY)*(praca+x*kapital);
end

function F = myfun3( x)
 global n a beta deltaK deltaL praca kapital sigma
 %z rovnice 4.32
 F = [praca-deltaL*((eye(n)-a)\(beta.*diag(inv(diag((eye(n)-a')\...
    (x^(1-sigma)*deltaK'+deltaL'))))))*(x*kapital+praca)];
end
```