

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

**DELTA HEDGING
EXOTICKÝCH OPCÍ**

Diplomová práca

Jakub HAVELKA

1114 Aplikovaná matematika

Ekonomická a finančná matematika

Školiteľ:

RNDr. Tomáš BOKES, PhD.

BRATISLAVA 2014

DELTA HEDGING EXOTICKÝCH OPCÍ

Bc. Jakub Havelka

E-mail: *jakubhav@gmail.com*

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Univerzita Komenského v Bratislave

Mlynská dolina

842 48 Bratislava

Slovenská republika

©2014 Jakub Havelka

Diplomová práca v odbore 1114 Aplikovaná matematika

Dátum kompilácie: 27. apríla 2014

Typeset in $\text{\LaTeX}$



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jakub Havelka
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Delta hedging exotických opcií

Cieľ: Štatistická a analytická analýza dynamickej delta hedgeing stratégie pre exotické opcie (napr. ázijské, lookback,...) vyplývajúcej z odvodenia parciálnej diferenciálnej rovnice.

Vedúci: RNDr. Tomáš Bokes, PhD.

Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 25.01.2013

Dátum schválenia: 04.02.2013

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Abstrakt

V našej práci sa zaoberáme delta hedgingom exotických finančných derivátov a hlavne výpočtom parametra delta pre ázijské a lookback opcie. Delta počítame klasickým spôsobom ako deriváciu explicitného vzorca ceny opcie podľa ceny akcie a novým spôsobom pomocou Malliavinovho kalkulu. Tento nový spôsob umožňuje počítanie delty opcie bez poznania explicitného vzorca pre jej cenu. Takto vypočítaná delta je v tvare diskontovanej podmienenej strednej hodnoty zo súčinu výplatnej funkcie opcie a nejakej váhy určenej pomocou vzorca Malliavinovho kalkulu. Pre konkrétne typy exotických derivátov uvádzame výpočet ich delty.

Kľúčové slová: delta • hedging • Malliavinov kalkul • exotické finančné deriváty • ázijské opcie • lookback opcie • derivácia ceny opcie

Abstract

In our work we investigate delta hedging of exotic financial derivatives and mainly computation of parameter delta for asian and lookback options. Delta is computed in a traditional way as derivation of explicit formula for option price according to stock price and through new approach via Malliavin calculus. The latter approach enables us to compute delta of option without knowing its explicit price formula. In this manner computed delta is in the form of discounted conditional expected value of product of option payoff function and some weight given by Malliavin calculus. For specific types of financial derivatives, the computation of its delta is introduced.

Key words: delta • hedging • Malliavin calculus • exotic financial derivatives • asian options • lookback options • option price derivation

Pod'akovanie

Ďakujem Tomášovi za vedenie pri písaní diplomovej práce, ako aj jej dôkladné odborné posúdenie a vecné pripomienky, ktoré významne pomohli jej skvalitneniu.

Obsah

Zoznam symbolov a skratiek	iii
1 Základy stochastického kalkulu	1
1.1 Stochastické procesy	1
1.2 Itôv integrál, izometria a Itôva lema	4
1.3 Martingaly	9
2 Opcie	13
3 Úvod do oceňovania opcií	17
3.1 Black-Scholesov vzorec	18
3.2 Oceňovanie pomocou martingalov	21
4 Exotické opcie	25
4.1 Ázijské opcie	25
4.1.1 PDR pre ázijské opcie	26
4.2 Lookback opcie	29
4.2.1 PDR pre lookback opcie	30
5 Hedging	33
5.1 Delta hedging	35
5.1.1 Delta opcie	36
5.1.2 Delta pre exotické opcie	38
6 Malliavinov kalkul a delta opcie	45
6.1 Operátor derivácie	46
6.2 Skorohodov integrál	47

6.3	Malliavinova vážená schéma	48
6.4	Delta pre exotické opcie	49
	Záver	59
	Bibliografia	61
	Listing programov	63

Zoznam symbolov a skratiek

$\mathbb{R}$	množina reálnych čísiel
$\mathbf{b}$	vektor
$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$	náhodný vektor
$\mathbf{X}(t, \omega), \mathbf{X}(t), \mathbf{X}_t$	t-parametrizovaný náhodný vektor
$\exp(x)$	e^x
$E[X]$	stredná hodnota náhodnej premennej X
$\text{Var}[X]$	variancia náhodnej premennej X
$\text{Cov}[X, Y]$	kovariancia náhodnej premennej X a Y
$X Y$	náhodná premenná X podmienená Y
$\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$	normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a kovariančnou maticou Σ
$f(\cdot)$	funkcia
$df(t), df_t, df$	diferenciál f vzhľadom na t
$\frac{\partial f}{\partial x}$	derivácia f podľa x
$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$	druhá derivácia f podľa x
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$	parciálna derivácia f podľa x a y
PDR	parciálna diferenciálna rovnica
SDR	stochastická diferenciálna rovnica
S, S_t	cena akcie v čase t
V, V_t	cena opcie v čase t
E	expiračná cena opcie
T	expiračný čas opcie, maturita opcie v rokoch
Q -martingal	martingal vzhľadom na prevdepodobnostnú mieru Q

Úvod

*As for everything else, so for a mathematical theory:
beauty can be perceived but not explained.*

Arthur Cayley

Na finančnom trhu sa bežne obchoduje s aktívami, ako sú akcie, dlhopisy alebo komodity. Okrem týchto existujú aj finančné deriváty, ktoré sa nazývajú derivátmi, pretože ich hodnota závisí, resp. je odvodená (z angl. derive – odvodiť) od hodnoty bežných aktív. Je zaujímavé, že v súčasnosti objem trhu s týmito finančnými derivátmi niekoľkonásobne prevyšuje objem trhu s bežnými finančnými aktívami. Tento fakt môže byť dôsledkom toho, že na jedno aktívum môže byť vypísané veľké množstvo derivátov ako aj veľkej popularity derivátov u investorov, ktorí ich hojne používajú ako nástroj na zabezpečenie (angl. hedging) svojich investícií, alebo aj ako prostriedok na dosiahnutie špekulatívneho zisku.

Táto práca sa zaoberá finančnými derivátmi, konkrétne opciami a delta hedgingom, t.j. delta zaistovaním. Hlavným prínosom práce je počítanie parametra delta pre exotické opcie pomocou Malliavinovho kalkulu, ktorý poskytuje účinný nástroj na derivovanie stochastických procesov.

V prvej kapitole sú popísané základné elementy stochastického kalkulu ako Brownov pohyb, Itôva lema, Itôv integrál a martingaly. Tieto pojmy sú stavebným kameňom a budú často vystupovať v ďalších častiach práce.

Druhá kapitola je venovaná všeobecnému úvodu do problematiky o opciách. Je tu vysvetlený pojem opcie a ich základná klasifikácia. Ďalej sú popísané atribúty

opcií ako maturita, expiračná cena a výplata.

Obsahom tretej kapitoly je oceňovanie opcií pomocou klasického Black-Scholesovho vzorca, ktorý dostaneme vyriešením príslušnej parciálnej diferenciálnej rovnice. Ďalej je vysvetlené o trochu náročnejšie oceňovanie opcií cez martingaly, ktoré nám poskytnú dôležitú oceňovaciu formulu.

Vybrané exotické opcie sú popísané vo štvrtej kapitole. Konkrétne sa jedná o ázijské a lookback opcie. Pre ceny týchto opcií sú odvodené PDR, z ktorých vyplýva delta hedging.

Piata kapitola je o hedgingu, teda o zaisťovaní vo všeobecnosti a ďalej so zameraním na delta hedging. Podstatná časť je venovaná parametru delta pre rôzne typy opcií.

V šiestej kapitole uvádzame Malliavinov kalkul a jeho základné elementy ako Malliavinov operátor derivácie a Skorohodov integrál. Je tu uvedený alternatívny postup na výpočet delty pomocou tohto kalkulu spolu s názornými príkladmi pre rôzne typy opcií.

Základy stochastického kalkulu

1.1 Stochastické procesy

Definícia 1.1. [9] *Stochastický proces je t -parametrický systém náhodných premenných X_t na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$. Pre ľubovoľné, ale pevné t je zobrazenie*

$$\omega \rightarrow X_t(\omega), \omega \in \Omega,$$

náhodná premenná. Na druhej strane pre pevné $\omega \in \Omega$, sa zobrazenie

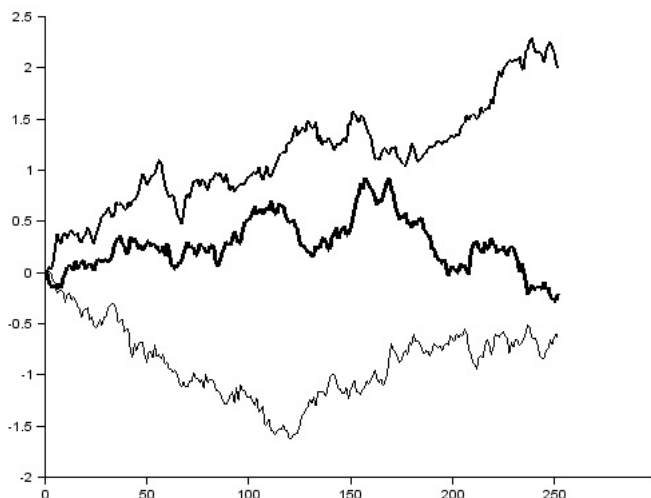
$$t \rightarrow X_t(\omega), 0 \leq t < \infty,$$

nazýva trajektória procesu X_t .

Stochastický proces je teda funkciou dvoch premenných: t a ω .

Definícia 1.2. [9] *Wienerov proces je stochastický proces $\{W_t(\omega) \mid 0 \leq t\}$ s nasledujúcimi vlastnosťami:*

- i) $P[\{\omega : W_0(\omega) = 0\}] = 1$,
- ii) $W_{t+\Delta}(\omega) - W_t(\omega) \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$,
- iii) *pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sú prírastky $W_{t_1}(\omega) - W_{t_0}(\omega)$, $W_{t_2}(\omega) - W_{t_1}(\omega)$, $\dots$, $W_{t_n}(\omega) - W_{t_{n-1}}(\omega)$ nezávislé.*



Obr. 1.1: 3 náhodné realizácie Wienerovho procesu

Náhodnosť Wienerovho procesu je ilustrovaná pomocou jeho troch realizácií na obrázku (1.1)

Z definície Wienerovho procesu dostávame nasledujúce vzťahy pre jeho strednú hodnotu a disperziu:

$$E[W_t] = E[W_t - W_0] = 0,$$

$$\text{Var}[W_t] = \text{Var}[W_t - W_0] = t.$$

V nasledujúcej definícii zavedieme pojem, ktorý je zovšeobecnením Wienerovho procesu.

Definícia 1.3. *Nech $\{W_t(\omega) \mid 0 \leq t\}$ je Wienerov proces a σ, μ sú konštanty, pričom $\sigma > 0$. Potom stochastický proces definovaný ako*

$$X_t(\omega) = \mu t + \sigma W_t(\omega)$$

sa nazýva Brownov pohyb s parametrami μ, σ .

Z uvedeného vyplýva, že Wienerov proces je vlastne Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0$ a $\sigma = 1$. Ľahko sa dá nahliadnuť, že prírastky Brownovho pohybu $X_{t+\Delta}(\omega) - X_t(\omega)$ sú, rovnako ako prírastky Wienerovho procesu, nezávislé nor-

málne rozdelené náhodné premenné, avšak so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a disperziou $\sigma^2\Delta$.

V nasledujúcej definícii zavedenie tzv. geometrický Brownov pohyb, ktorým, ako sa neskôr ukáže, budeme modelovať vývoj ceny podkladového aktíva.

Definícia 1.4. [10] *Nech $\{X_t \mid 0 \leq t\}$ je Brownov pohyb a parametrami μ, σ a Y_0 je kladná konštanta. Potom stochastický proces $\{Y_t \mid 0 \leq t\}$*

$$Y_t(\omega) = Y_0 e^{X_t}, \quad 0 \leq t,$$

sa nazýva geometrický Brownov pohyb.

V nasledujúcom poukážeme na ďalšiu dôležitú vlastnosť Wienerovho procesu, a to nediferencovateľnosť jeho trajektórií skoro všade. Najprv však zavedieme pojem kvadratickej variácie funkcie.

Definícia 1.5. [7] *Nech množina $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ je delenie intervalu $[0, T]$, také, že $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$. Normu delenia Π označme*

$$\|\Pi\| = \max_{k=0, \dots, n-1} (t_{k+1} - t_k).$$

Potom kvadratická variácia funkcie f na intervale $[0, T]$ je

$$\langle f \rangle [0, T] = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k))^2.$$

Pre funkcie, ktoré sú po častiach diferencovateľné, platí že ich kvadratická variácia je rovná nule, čo je možné nahliadnuť pomocou Lagrangeovej vety o strednej hodnote. Táto veta zaručuje pre ľubovoľnú diferencovateľnú funkciu f na intervale (a, b) existenciu bodu $c \in (a, b)$, pre ktorý platí:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Nech bod $\hat{t}_k \in \langle t_k, t_{k+1} \rangle$. Potom pre kvadratickú variáciu diferencovateľnej funkcie na intervale $[a, b]$ dostávame:

$$\begin{aligned} \langle f \rangle [a, b] &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k))^2 = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (f'(\hat{t}_k))^2 (t_{k+1} - t_k)^2 \\ &\leq \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \|\Pi\| \sum_{k=0}^{n-1} (f'(\hat{t}_k))^2 (t_{k+1} - t_k) = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \|\Pi\| \int_0^T (f'(t))^2 dt = 0 \end{aligned}$$

Keďže kvadratická variácia na intervale $[a, b]$ je nezáporné číslo, potom z nerovnosti vyplýva, že sa musí rovnať nule. Potom kvadratická variácia funkcie je tiež nulová, pretože sa rovná súčtu kvadratických variácií na intervaloch.

A však pre trajektórie Wienerovho procesu platí, že majú nenulovú kvadratickú variáciu, z čoho vyplýva že nie sú ani len po častiach diferencovateľné. Ich kvadratická variácia je totiž rovná dĺžke časového úseku. Toto tvrdenie je sformulované v nasledujúcej leme, ktorej dôkaz je možné nájsť v knihe [7].

Lema 1.6. [7]

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 = T,$$

kde konvergencia je v zmysle $L^2(\Omega, P)$, čo je priestor merateľných funkcií s konečnou normou definovanou takto

$$\|f\| := \sqrt{\int_{\Omega} f^2 dP} = \sqrt{E[f^2]}.$$

Z toho vidíme, že sa tu akoby stráca náhodnosť, keďže súčty štvorcov prírastkov Wienerovho procesu konvergujú k dĺžke časového úseku, na ktorom prírastky sčítujeme. To môžeme teda v limite zapísať ako

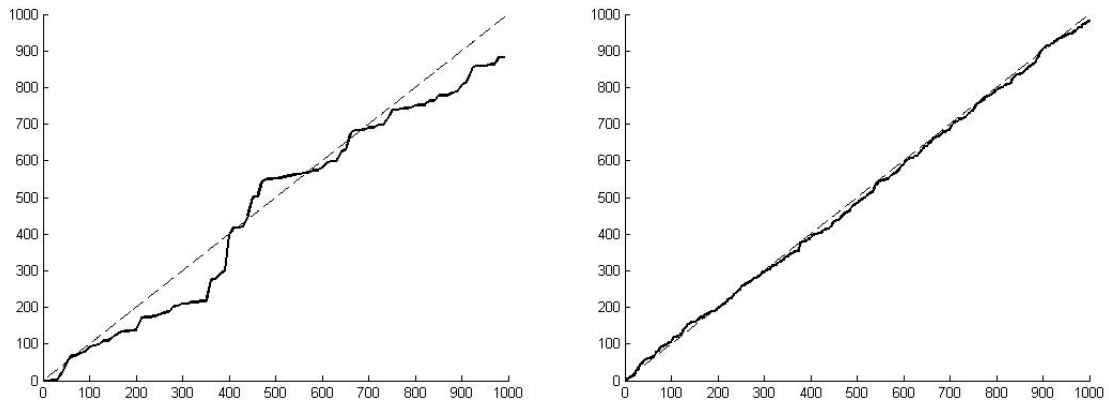
$$(dW_t)^2 = dt. \quad (1.1)$$

Na obrázku (1.2) je znázornená táto konvergencia súčtu druhých mocnín prírastkov Wienerovho procesu pri postupnom zjemňovaní časového delenia. Na ľavom obrázku je časový interval rozdelený na 100 častí a vidíme, že odchýlky od lineárnej funkcie prislúchajúcej pribúdaniu času sú väčšie ako na obrázku vpravo s jemnejším delením na 1000 častí.

1.2 Itôv integrál, izometria a Itôva lema

Itôv integrál je základným elementom stochastického kalkulu a môžeme ho zapísať, pre merateľnú funkciu $f : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, ako

$$\int_0^T f(t) dW(t).$$



Obr. 1.2: Konvergencia súčtu druhých mocnín prírastkov Wienerovho procesu pri zjemňovaní časového delenia. Vľavo je hrubšie delenie (na 100 častí) a vpravo jemnejšie delenie (na 1000 častí)

Avšak tento integrál nemôžeme definovať analogicky ako Riemannov integrál pre hladké funkcie reálnej premennej pomocou derivácie

$$\int_0^T f(t) dW(t) = \int_0^T f(t) W'(t) dt,$$

pretože funkcia $W(t)$ je nediferencovateľná s pravdepodobnosťou 1 v každom bode. Itôv integrál teda zavedieme inak a najprv začneme s definíciou pre funkcie, ktoré sú z jeho hľadiska elementárne.

Nech $f(t) \equiv C$ je konštantná funkcia, potom Itôv integrál je rovný

$$\int_0^T f(t) dW(t) = C \int_0^T dW(t) = CW(T) - CW(0) = CW(T)$$

a má teda normálne rozdelenie

$$\mathcal{N}(0, C^2 T) = \mathcal{N}\left(0, \int_0^T f^2(t) dt\right)$$

Teraz môžeme prejsť k definícii Itôvho integrálu pre merateľné funkcie reálnej premennej

Definícia 1.7. [9] Nech $f : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ je merateľná funkcia a platí $\int_0^T f^2(t) dt < \infty$. Potom Itôv integrál $\int_0^T f(t) dW(t)$ definujeme takto:

$$\int_0^T f(t) dW(t) := \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)). \quad (1.2)$$

Ak zrátame strednú hodnotu vo výraze (1.2) dostaneme

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \mathbb{E}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0,$$

pretože stredná hodnota prírastkov Wienerovho procesu je nulová. Pri výpočte disperzie využijeme, že prírastky $dW(t_i)$ sú nezávislé normálne rozdelené náhodné veličiny, a dostávame

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] &= \sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i) \text{Var}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f^2(t_i) (t_{i+1} - t_i), \end{aligned}$$

a ak prejdeme k limite, pre $\|\Pi\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, dostávame rovnosť, ktorá sa nazýva *Itôva izometria*:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T f(t) dW(t) \right)^2 \right] = \int_0^T f(t)^2 dt \quad (1.3)$$

Pre rozdelenie Itôvho integrálu teda môžeme sformulovať nasledujúcu lemu.

Lema 1.8. [9] *Itôv integrál $\int_0^T f(t) dW(t)$ má normálne rozdelenie*

$$\mathcal{N} \left(0, \int_0^T f^2(t) dt \right).$$

Teraz sa posunieme ešte o krok ďalej a to k funkciám $\mathbf{X}_t(\omega)$, ktoré sú samy o sebe stochastickým procesom a zavedieme pre ne Itôv integrál. To môžeme urobiť tak, že ich aproximujeme funkčnou hodnotou v nejakom bode deliaceho intervalu. Uvažujme dve voľby tohto bodu a to ľavý a pravý krajný bod tohto intervalu. Nech $\mathbf{1}_{(i/n, (i+1)/n)}(t)$ je charakteristická funkcia intervalu $\langle i/n, (i+1)/n \rangle$, t.j.

$$\mathbf{1}_{(i/n, (i+1)/n)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{ak } t \in \langle i/n, (i+1)/n \rangle \\ 0 & \text{ak } t \notin \langle i/n, (i+1)/n \rangle \end{cases}$$

Potom pre ľavý krajný bod máme aproximačnú funkciu

$$L_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{i/n}(\omega) \mathbf{1}_{(i/n, (i+1)/n)}(t)$$

a pre pravý kraný bod

$$R_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{(i+1)/n}(\omega) \mathbf{1}_{(i/n, (i+1)/n)}(t)$$

Teraz môžeme vypočítať, pre oba výbery bodov, integrál $\int_0^T X_t(\omega) dW_t(\omega)$ ako limitu súčtov

$$\sum_{i=0}^{n-1} L_{t_i}(\omega)(W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)) \quad \text{resp.} \quad \sum_{i=0}^{n-1} R_{t_i}(\omega)(W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega))$$

Pri zjemňovaní delenia by nás intuícia mohla viesť k tomu, že oba integrály k sebe konvergujú, tak ako v prípade Riemannovho integrálu. To však nie je pravda, pretože, ako je ukázané v knihe [7][str.142], stredné hodnoty integrálov k sebe nekonvergujú:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T L_t(\omega) dW_t(\omega) \right] &= 0 \\ \mathbb{E} \left[\int_0^T R_t(\omega) dW_t(\omega) \right] &= T \end{aligned} \tag{1.4}$$

Z toho vyplýva že ani integrály samotné nemôžu k sebe konvergovať a teda pre rôzne voľby bodov môžeme dostať rôzne výsledky. Daný integrál je teda závislý od voľby tohto bodu, pričom štandardnými voľbami z deliaceho intervalu $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$ je ľavý bod t_i , pre ktorý dostávame *Itôv integrál*

$$\int_0^T X_t(\omega) dW_t(\omega),$$

a stredný bod $(t_i + t_{i+1})/2$, pre ktorý dostávame *Stratonovichov integrál*

$$\int_0^T X_t(\omega) \circ dW_t(\omega).$$

Poznamenajme, že pre Stratonovichov integrál platia integračné formulky podobne ako v prípade Riemannovho integrálu.

Od Itôvho integrálu teraz prejdeme k definícii stochastickej diferenciálnej rovnice, ktorá sa bude často objavovať vo zvyšku práce.

Definícia 1.9. [9] *Stochastická diferenciálna rovnica (SDR) je diferenciálna rovnica, v ktorej jeden alebo viacero členov je stochastickým procesom. SDR môžeme zapísať pomocou Itôvho integrálu ako*

$$X_{t+s} - X_t = \int_t^{t+s} \mu(X_u, u) du + \int_t^{t+s} \sigma(X_u, u) dW_u,$$

čo možno ekvivalentne zapísať v diferenciálnom tvare ako

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t.$$

Vidíme, že SDR pozostáva z deterministickej zložky $\mu(X_t, t)dt$ a náhodnej zložky $\sigma(X_t, t)dW_t$. Vyriešením SDR dostávame opäť stochastický proces. Obzvlášť dôležité v teórii oceňovania finančných derivátov sú SDR pre funkcie, v ktorých je jedna alebo viacero náhodných premenných, určených nejakou inou SDR. V tomto prípade vyvstáva otázka ako bude vyzeráť SDR pre vývoj funkcie $f(X_t, t)$, ak poznáme SDR pre X_t . Tým sa dostávame k slávnej a dôležitej leme stochastického kalkulu - Itôva lema.

Veta 1.10 (Itôva lema [4]). *Nech $f(x, t)$ je dostatočne hladká funkcia dvoch premenných, pričom X_t je riešením SDR*

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t,$$

kde W_t je Wienerov proces. Potom

$$df(X_t, t) = \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje SDR

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(X_t, t)\frac{\partial f}{\partial x}dW_t.$$

Itôva lema sa dá intuitívne dokázať cez Taylorov rozvoj funkcie f :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dX_t^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}dX_tdt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}dt^2 \right) + o(dt),$$

kde $o(dt)$ sú ostatné členy vyššieho rádu. Ďalej sa budeme zaoberať výrazmi dX_t^2 , dX_tdt a dt^2 . Z predpokladu pre dX_t platí

$$dX_t^2 = \sigma^2 dW_t^2 + 2\mu\sigma dW_tdt + \mu^2 dt^2$$

Tu využijeme vzťah (1.1) pre dW_t , čím dostávame

$$dX_t^2 \approx \sigma^2 dt + O(dt^{3/2}) + O(dt^2)$$

a

$$dX_tdt = \mu dt^2 + \sigma dW_tdt = O(dt^2) + O(dt^{3/2}).$$

Členy, ktoré obsahujú dt vyššieho rádu ako jedna, idú k nule. To znamená, že členy s dX_tdt a dt^2 môžeme zanedbať a teda diferenciál funkcie f je:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt.$$

Nakoniec stačí za dX_t dosadiť $\mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$ a dostavane SDR pre funkciu f z Itôvej lemy.

1.3 Martingaly

Definícia 1.11. [9] Stochastický proces $\omega \rightarrow \mathbf{X}_t(\omega)$; $\omega \in \Omega$ na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$, sa nazýva $\mathcal{F}$ -merateľný, ak

$$\mathbf{X}_t^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega; \mathbf{X}_t(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$$

pre všetky otvorené množiny $U \in \mathbb{R}^n$.

Definícia 1.12. [7] Nech na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pre náhodnú premennú $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ platí $E[|X|] < \infty$. Nech $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ je σ -algebra ($\mathcal{H}$ je teda menej bohatá ako $\mathcal{F}$). Potom podmienená stredná hodnota $E[X|\mathcal{H}]$ je náhodná premenná s nasledujúcimi vlastnosťami:

i) $E[X|\mathcal{H}]$ je $\mathcal{H}$ -merateľná

ii) $\int_h E[X|\mathcal{H}]dP = \int_h XdP$, pre všetky $h \in \mathcal{H}$.

Vidíme teda, že podmienená stredná hodnota závisí od príslušnej σ -algebry, t.j. od informácie o realizovaných hodnotách v danom čase. Základné vlastnosti podmienenej strednej hodnoty sú zhrnuté v nasledujúcej vete.

Veta 1.13. [7] Nech X a Y sú náhodné veličiny s konečnou strednou hodnotou na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ďalej nech $a, b \in \mathbb{R}$ a $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ sú σ -algebry, pre ktoré platí

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$$

Potom platí:

i) $E[aX + bY|\mathcal{H}] = aE[X|\mathcal{H}] + bE[Y|\mathcal{H}]$

ii) $E[E[X|\mathcal{H}]] = E[X]$

iii) $E[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}]$

iv) ak X je $\mathcal{H}$ -merateľná, potom $E[X|\mathcal{H}] = X$

v) ak Y je $\mathcal{H}$ -merateľná, potom $E[YX|\mathcal{H}] = YE[X|\mathcal{H}]$

Teraz už môžeme zdefinovať pojem filtrácia a martingal.

Definícia 1.14. [9] Filtráciou na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je systém σ -algebier $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, takých, že

$$s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

Stochastický proces $\{\mathbf{X}_t\}_{t \geq 0}$ na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa nazýva martingal vzhľadom k miere P a filtrácii $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, ak

- i) $\mathbf{X}_t$ je $\mathcal{F}_t$ -merateľný pre všetky t ,
- ii) $E[|\mathbf{X}_t|] < \infty$ pre všetky t ,
- iii) $E[\mathbf{X}_s|\mathcal{F}_t] = \mathbf{X}_t$ pre všetky $s \geq t$.

Z definície martingalu vidíme, že sa vždy vzťahuje k nejakej pravdepodobnostnej miere P a filtrácii $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Táto filtrácia zvyčajne predstavuje prirodzený systém do seba zapadajúcich σ -algebier.

Pre lepšie pochopenie pojmu martingal, si ho môžeme predstaviť ako sekvenciu náhodných premenných, alebo model hry v ktorom očakávanie ďalšej hodnoty je rovnaké ako súčasná známa hodnota. To znamená akoby sa zabúdala minulosť a predošlé hodnoty nemajú vplyv na očakávanie nasledujúcich. Takouto hrou je napr. typovanie čísla pri hode kockou. Príkladom hry, ktorá nie je martingalom môže byť typovanie vytiahnutej karty z balíčka bez jej vrátenia, pretože vedomosť o už vytiahnutých kartách zvyšuje šancu na uhádnutie.

Ďalej uvedieme vetu, ktorá nám pomôže pri určovaní martingalu.

Veta 1.15. Nech $\{\mathbf{X}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ a $\{\mathbf{Y}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ sú stochastické procesy na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a nech pre $t \in [0, T]$ platí

$$\mathbf{Y}_t = E(\mathbf{X}_T|\mathcal{F}_t).$$

Potom $\{\mathbf{Y}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ je martingalom vzhľadom k miere P a filtrácii $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$.

Dôkaz: Z iii) vlastnosti podmienenej strednej hodnoty (veta (1.13))

a pre $0 \leq t \leq s \leq T$ dostaneme

$$\mathbf{Y}_t = E(\mathbf{X}_T | \mathcal{F}_t) = E(E(\mathbf{X}_T | \mathcal{F}_s) | \mathcal{F}_t) = E(\mathbf{Y}_s | \mathcal{F}_t),$$

a teda $\{\mathbf{Y}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ je martingal. $\square$

Na záver tejto časti uvedieme vetu, ktorá hovorí o zmene pravdepodobnostnej miery.

Veta 1.16. [Girsanova veta [7]] *Nech $W_t(\omega)$, $0 \leq t \leq T$, je Wienerov proces na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $\gamma_t(\omega)$ je $\mathcal{F}_t^W$ -adaptovaný proces, pričom platí*

$$E_P \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2(\omega) dt \right) \right] < \infty.$$

Potom existuje miera Q na $(\Omega, \mathcal{F})$ taká, že

- i) P a Q su ekvivalentné, teda platí $P(x) > 0 \Leftrightarrow Q(x) > 0$,
- ii) $\frac{dQ}{dP}(\omega) = \exp(-\int_0^T \gamma_t(\omega) dW_t(\omega) - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2(\omega) dt)$,
- iii) $\tilde{W}_t(\omega) = W_t(\omega) + \int_0^t \gamma_s(\omega) ds$ je Wienerov proces na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

Výraz $\frac{dQ}{dP}(\omega)$ v Girsanovej vete sa nazýva Radon-Nikodymova derivácia miery Q vzhľadom na mieru P .

Opcie

V tejto kapitole sa budeme zaoberať opciami, ktoré patria medzi základné a najpoužívanjšie finančné deriváty. Najprv uvedieme ich klasickú definíciu.

Definícia 2.1. *Opcia je finančný kontrakt uzavretý medzi dvoma stranami - vypisovateľ a držiteľ opcie. Tento kontrakt dáva držiteľovi opcie právo na kúpu alebo predaj podkladového aktíva, ktorým je akcia, vo vopred dohodnutý čas a cenu.*

Opcie patria medzi základné a najpoužívanjšie finančné deriváty. Poznamenajme, že opcie predstavujú len možnosť predaja alebo kúpy danej akcie za vopred dohodnutú cenu v stanovenom čase, zatiaľ čo pri forwardovom kontrakte sa zmluvné strany dohodnú na povinnosti predaja alebo kúpy daného aktíva. Podľa toho či ide o právo na kúpu alebo predaj akcie rozlišujeme kúpne (angl. call) resp. predajné (angl. put) opcie.

Pre názornosť uvedieme nasledujúci príklad:

Príklad 2.2. *Predpokladajme, že vlastníme kúpnu opciu (call opciu) na akciu IBM s expiračnou cenou 40 EUR a expiráciou o mesiac, t.j. $T = 1/12$. Máme teda právo kúpiť si o mesiac akciu IBM za 40 EUR. Predpokladajme, že dnešná cena akcie IBM je 40 EUR. Keďže vývoj cien akcií na trhu je náhodný, nevieme povedať koľko bude stáť akcia o mesiac. Uvažujme 3 prípady: cena akcie je väčšia ako 40 (napr. 50), rovná 40 a menšia ako 40 (napr. 30). V prvom prípade opciu uplatníme, pretože akciu môžeme mať za 40, zatiaľ čo na trhu sa predáva za 50, čím vlastne získame na rozdiel 10 EUR. V tomto prípade hovoríme, že opcia je in the money, teda jej uplatnenie nám*

prináša zisk. V druhom prípade, pri cene akcie 40 opciu nazývame at the money a zisk máme nulový v danom momente, či už opciu uplatníme alebo nie. V poslednom prípade je opcia out off the money a teda ju neuplatníme, keďže trhovú hodnotu akcie je 30 a opcia nám neprináša žiaden zisk.

Z toho vidíme, že držanie opcie nám prináša určitú výhodu, keďže ju môžeme ale nemusíme uplatniť. Táto výhoda alebo právo je teda samo o sebe nejaká hodnota, ktorá by mala byť zaplatená pri uzatváraní kontraktu vypisovateľovi opcie. Otázka, koľko by malo stáť toto právo aby ani jedna zo strán nebola poškodená, je základným problémom teórie finančných derivátov.

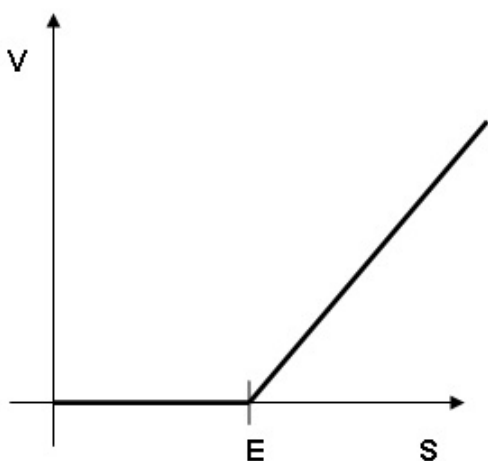
Pod výplatou alebo *payoffom* opcie budeme rozumieť hodnotu opcie v čase expirácie rozdiel medzi trhovou cenou akcie v čase expirácie a expiračnou cenou opcie v prípade call opcie a opačný rozdiel v prípade put opcie. Ak je tento rozdiel záporný, potom výplata je nulová. Teda výplatu pre call opciu môžeme napísať ako

$$V_T = \max(S_T - E, 0)$$

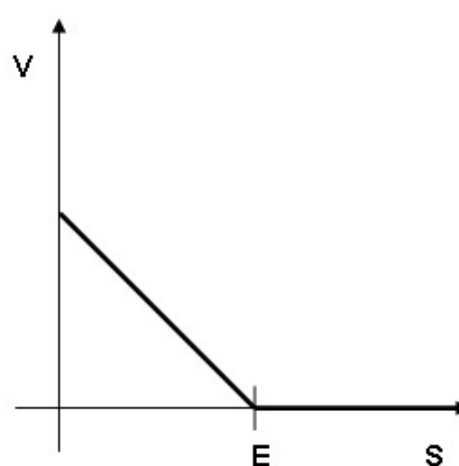
a pre put opciu ako

$$V_T = \max(E - S_T, 0).$$

Na obrázkoch (2.1) a (2.2) je táto výplata graficky znázornená.



Obr. 2.1: Výplata pre call opciu (hrubá krivka).



Obr. 2.2: Výplata pre put opciu (hrubá krivka).

Úlohou bude určiť “férovú” cenu danej opcie v čase $t = 0$, ktorá sa skladá z dvoch častí, a to z vnútornej hodnoty a prémie za riziko. Vnútoraná hodnota sa dá

ľahko vypočítať ako

$$\max(S_0 - E, 0)$$

pre call opciu a

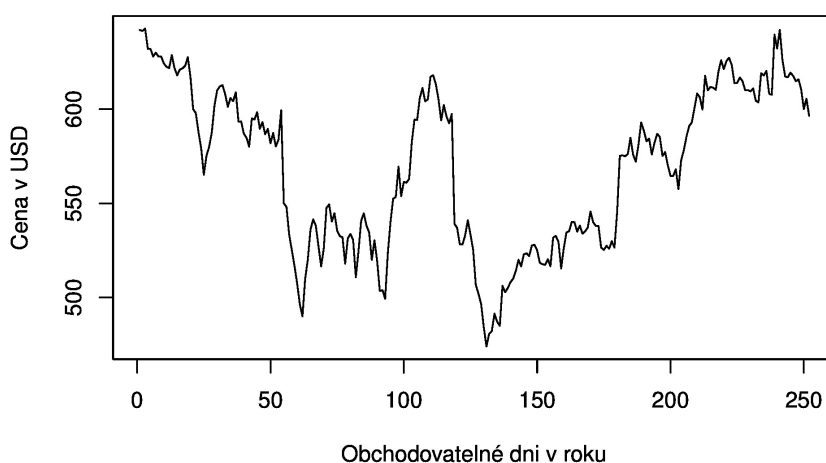
$$\max(E - S_0, 0)$$

pre put opciu. Je to teda rozdiel medzi trhovou cenou príslušnej akcie v čase $t = 0$ a expiračnou cenou opcie pre call opciu, ak je tento rozdiel nezáporný, inak je táto hodnota nulová (analogicky pre put opciu). Určiť druhú zložku ceny opcie je ale o dosť náročnejšie a bude vyžadovať aplikáciu stochastického kalkulu, ako uvidíme v ďalších častiach práce.

Opcie môžeme rozdeliť na *vanilla* opcie, ktoré predstavujú jednoduché opcie (tak ako v príklade vyššie) a exotické opcie s vlastnosťami, ktoré ich robia viac komplexnejšími ako bežne obchodované vanilla opcie. Vieme, že výplata vanilla opcií závisí len od rozdielu trhovej ceny akcie a expiračnou cenou opcie v čase expirácie. Oproti tomu je výplata exotických opcií závislá od viacerých faktorov, pričom vo väčšine z týchto derivátov je zohľadnený historický vývoj podkladového aktíva (akcie). Takéto opcie sa nazývajú dráhovo-závislé (tzv. *path-dependent*) a patria medzi ne napr. ázijske, lookback a bariérové opcie. Pri exotických opciách sa môžeme tiež stretnúť s inými typmi podkladového aktíva ako sú akcie (napr. zložené opcie na opcie, opcie na index) a tiež s väčším počtom podkladových aktív (napr. košíkové opcie). Jednotlivé typy opcií podrobnejšie rozoberieme vo štvrtej kapitole.

Úvod do oceňovania opcií

Oceňovanie opcií, alebo vo všeobecnosti finančných derivátov, je predmetom súčasného výskumu vo finančníctve. Finančný derivát je cenný papier, ktorého hodnota závisí od podkladového aktíva, ktorého cena má stochastický charakter. Príkladom podkladového aktíva môže byť napr. akcia spoločnosti Google. Náhodný vývoj ceny tejto akcie za rok 2011 je zobrazený na obrázku (3.1). V spojitosti so stochastickým kalkulom môžeme cenu akcie v čase t označiť ako stochastický proces $X_t(\omega)$ a množinu historických cien akcie $\{X_t; t \in T\}$ za časové obdobie T ako trajektóriu tohto procesu.



Obr. 3.1: Cena akcie Google Inc.

Základný princíp oceňovania vanilla opcií je možné ukázať pomocou binárneho stromového modelu. Je to jednoduchý model s diskretným časom, ktorý môže čitateľ nájsť v knihe [7]. My prejdeme rovno k oceňovaniu so spojitým časom, ktorým je klasický Black-Scholesov model a oceňovanie pomocou martingalov.

3.1 Black-Scholesov vzorec

Black-Scholesov model je matematickým modelom finančného trhu, z ktorého bol odvodený tzv. Black-Scholesov vzorec na ocenenie vanilla opcií. Tento populárny vzorec bol publikovaný v roku 1973 Fisherom Blackom a Myronom Scholesom (publikácia [1]) a znamenal prelom v oceňovaní a obchodovaní opcií. Black a Scholes odvodili parciálnu diferenciálnu rovnicu určujúcu cenu opcie použitím zaistovacieho bezrizikového princípu. Riešením tejto PDR je Black-Scholesov vzorec, ktorého najväčšou prednosťou je zrejme fakt, že je funkciou niekoľkých priamo pozorovateľných parametrov. Tento model, hoci má viacero nedostatkov, ako uvidíme neskôr, je považovaný za základ pre oceňovanie finančných derivátov.

V nasledujúcom texte ukážeme odvodenie Black-Scholesovho vzorca, ktoré môžeme tiež nájsť napr. v známej knihe od Kwoka [5]. Odvodenie urobíme pre európsku kúpnu opciu použitím priebežného zaistovania. Povedzme, že niekto vypíše (predá) kúpnu opciu na akciu. Vypisovateľ opcie sa takto vystaví riziku že cena akcie stúpne vysoko nad realizačnú cenu a spôsobí mu veľkú stratu. Avšak vypisovateľ sa môže poistiť voči takejto situácii kúpením príslušnej akcie. Potom stratu spôsobenú vypísaním opcie kompenzuje držanie akcie, ktorej cena rastie. Takáto zaistená pozícia sa teda dá dosiahnuť nákupom a predajom určitého množstva akcií a opcií tak, aby prípadný pokles v jednej položke bol vyvážený nárastom v druhej položke. Tento princíp zaisteného portfólia bol známy už predtým, ale narozdiel od svojich predchodcov si Black a Scholes uvedomili, že výnos z tohto portfólia by sa mal rovnať bezrizikovej úrokovej miere.

Predpokladajme, že cena akcie sa riadi podľa stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (3.1)$$

kde parametre μ a σ sú očakávaný výnos a volatilita ceny akcie. Ďalším predpo-

kladom na cenu akcie je, že jej vývoj predstavuje náhodný výber z lognormálneho rozdelenia, t.j. $C_t = S_t/S_{t-1}$, $t = 1, 2, \dots, T$, sú nezávislé, rovnako rozdelené náhodné premenné s lognormálnym rozdelením a parametrami μ a σ^2 . Ak označíme $Y_t = \ln C_t$, $t = 1, 2, \dots, T$, potom táto náhodná premenná má normálne rozdelenie s rovnakými parametrami μ a σ^2 a aplikáciou Itôvej lemy pre jej diferenciál dostávame

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt, \end{aligned}$$

a teda

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \\ \ln S_t &= \ln S_0 + \mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t, \end{aligned}$$

z čoho dostávame riešenie rovnice pre cenu akcie (3.1) v podobe geometrického Wienerovho procesu:

$$S_t = S_0 \exp \left(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right). \quad (3.2)$$

Teraz prejdeme k vytvoreniu zaisteného portfólia, ktoré bude pozostávať z predaja jednej vanilla call opcie a nákupu α_t akcií (počet akcií sa bude priebežne meniť). Nech $V = V(S_t, t)$ je cena kúpnej opcie v závislosti od ceny akcie. Potom hodnotu tohto zaisteného portfólia $H(S_t, t)$ v čase t môžeme zapísať ako

$$H(S_t, t) = -V + \alpha_t S_t.$$

Opäť použijeme Itôvu lemu, tentoraz pre stochastickú funkciu $V(S_t, t)$, čím dostávame jej diferenciál

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt.$$

Potom diferenciál hodnoty portfólia môžeme napísať ako

$$\begin{aligned} -dV + \alpha_t dS_t &= \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt + \left(\alpha_t - \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) dS_t \\ &= \left[-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \left(\alpha_t - \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) \mu S_t \right] dt + \left(\alpha_t - \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t, \end{aligned}$$

a teda zisk Π z tohto portfólia v čase t je

$$\begin{aligned}\Pi(H(S_t, t)) &= \int_0^t -dV + \int_0^t \alpha_u dS_u \\ &= \int_0^t \left[-\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_u^2} + \left(\alpha_u - \frac{\partial V}{\partial S_u} \right) \mu S_u \right] du \\ &\quad + \int_0^t \left(\alpha_u - \frac{\partial V}{\partial S_u} \right) \sigma S_u dW_u.\end{aligned}$$

Vidíme, že náhodnosť zisku je spôsobená členom

$$\int_0^t \left(\alpha_u - \frac{\partial V}{\partial S_u} \right) \sigma S_u dW_u.$$

Našou snahou pri tvorbe bezrizikového portfólia je, aby tento stochastický člen vypadol a zisk sa tak stal deterministickým. To sa nám podarí ak v každom čase $u < t$ zvolíme počet akcií rovný $\alpha_u = \frac{\partial V}{\partial S_u}$. Tento zisk by sa mal rovnať zisku z držania bezrizikového portfólia (bezarbitrážny princíp), ktorého hodnota H^* je $-V + \frac{\partial V}{\partial S_u} S_u$ a jeho výnos je rovný bezrizikovej úrokovej miere r . Potom zisk z tohto portfólia v čase t je

$$\Pi(H^*(S_t, t)) = \int_0^t r \left(-V + \frac{\partial V}{\partial S_u} S_u \right) du.$$

Keďže deterministické zisky $\Pi(H(S_t, t))$ a $\Pi(H^*(S_t, t))$ sa rovnajú, dostávame

$$-\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_u^2} = r \left(-V + \frac{\partial V}{\partial S_u} S_u \right), \quad 0 < u < t,$$

a teda cena opcie $V(S_t, t)$ je daná rovnicou

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0.$$

Poznamenajme, že rovnakú rovnicu by sme dostali aj v prípade vanilla put opcie. Ak teda označíme cenu vanilla opcie ako $V = V(S_t, t)$ a pridáme ešte predpoklad, že akcia priebežne vypláca dividendu, ktorej ročná miera je D , potom cena opcie je daná rovnicou

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + (r - D) S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV = 0, \quad S_t > 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3.3)$$

Dostali sme tak Black-Scholesovu parabolickú parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu vanilla opcie. Pre európske opcie sa k tejto rovnici ešte pridáva terminálová

(koncová) podmienka, ktorá hovorí o cene opcie v čase expirácie. Pre vanilla call opciu s realizačnou cenou E je táto podmienka resp. koncová cena zrejme

$$V(S_T, T) = \max(S_T - E, 0) \quad (3.4)$$

a pre vanilla put opciu

$$V(S_T, T) = \max(E - S_T, 0). \quad (3.5)$$

Black scholesova rovnica (3.3) má riešenie v tvare nasledujúceho vzorca, tzv. Black-Scholesovho vzorca:

$$V(S_t, t) = S_t e^{-D(T-t)} \Phi \left(\frac{\ln \frac{S_t}{E} + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \quad (3.6)$$

$$- E e^{-r(T-t)} \Phi \left(\frac{\ln \frac{S_t}{E} + (r - D - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right). \quad (3.7)$$

Prechod od Black-Scholesovej parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice k tomuto vzorcu spočíva v postupnosti niekoľkých transformácií na základný tvar parabolickej rovnice a aplikovaní Greenovej funkcie. Kompletný postup je možné nájsť v učebnici [10].

Nakoniec ešte spomenieme nedostatky Black-Scholesovho modelu, ktorými sú predovšetkým tieto nereálne predpoklady na finančný trh:

- i) trh bez transakčných nákladov a daní
- ii) možnosť obchodovať ľubovoľné množstvo cenných papierov
- iii) existencia konštantnej bezrizikovej úrokovej miery
- iv) ceny akcie sa vyvíjajú podľa rovnice (4.2) v podobe geometrického Wienerovho procesu
- v) konštantná volatilita akcií.

3.2 Oceňovanie pomocou martingalov

V tejto časti odvodíme všeobecnejší vzorec pre cenu opcie, ktorý narozdiel od Black-Scholesovho vzorca, bude platiť aj pre zložitejšie typy opcií. Ako uvidíme ďalej,

tento vzorec bude v tvare strednej hodnoty z diskontovanej výplaty opcie pri určitej bezrizikovej pravdepodobnostnej miere, ktorá zaručí bezarbitrážnu cenu opcie.

Ukážeme, že pre určenie bezarbitrážnej ceny opcie je nutné aby diskontovaný proces vývoja ceny akcie bol martingalom pri určitej pravdepodobnostnej miere Q . Túto mieru Q , pri ktorej je daný proces martingalom, budeme nazývať rizikovo neutrálna miera. Poznamenajme, že miera Q je odlišná od pôvodnej miery P spojenej s pravdepodobnostným popisom budúceho vývoja ceny akcie, ktorý je popísaný Brownovým pohybom. Problém ako nájsť a zaručiť existenciu rizikovo neutrálny miery Q rieši Girsanovova veta a Radon-Nikodymova derivácia. Týmto sa ale nebudeme zaoberať a postúpime ďalej k bezarbitrážnemu oceneniu opcie pomocou martingalov. Girsanovej veta a existencia miery Q je popísaná v knihe [7].

Cez samofinancovanú obchodnú stratégiu ukážeme ako existencia miery Q , pri ktorej sú diskontované ceny akcií a derivátov martingalmi, zaručuje správnu cenu opcie. Ak označíme cenu peňažného dlhopisu (angl. *bond*) ako $B_t = e^{rt}$, potom diskontovaná cena opcie $e^{-rt}V_t$ je vlastne relatívna cena opcie vzhľadom na cenu dlhopisu, t.j.

$$e^{-rt}V_t = \frac{V_t}{B_t}.$$

Takéto aktívum (dlhopis v tomto prípade), ku ktorému sa vzťahujú ceny ostatných aktív sa nazýva *numeraire*.

Uvažujme model finančného trhu, na ktorom sa obchoduje s $k + 1$ cennými papiermi v časovom intervale $[0, T]$. Náhodný vývoj na trhu budeme modelovať pomocou pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s filtráciou $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$, pričom ceny daných cenných papierov S^i , $i = 0, 1, \dots, k$ sú $\mathcal{F}_t$ -adaptované stochastické procesy. Obchodná stratégia bude vektor stochastických procesov $(x_0(t), x_1(t), \dots, x_k(t))^T$, kde $x_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, k$ udáva počet jednotiek i -teho cenného papiera v portfóliu v čase t . To znamená, že hodnota takejto stratégie, alebo portfólia v čase t je

$$H(t) = \sum_{i=0}^k x_i(t) S_t^i, \quad 0 \leq t \leq T,$$

a zisk z neho je

$$\Pi(t) = \sum_{i=0}^k \int_0^t x_i(u) dS_u^i, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Potom samofinancovanosť tohto portfólia môžeme zapísať ako

$$H(t) = H(0) + \Pi(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

čo znamená, že do portfólia neprichádzajú a ani z neho neodchádzajú finančné prostriedky, a teda zmena jeho hodnoty je závislá len od zmeny pôvodných cenných papierov.

Za numeraire zvolíme peňažný dlhopis $B_t = e^{rt}$, a teda relatívna cena i -teho cenného papiera je potom

$$S_t^{i*} = S_t^i / B_t, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

Ďalej vieme, že existuje určitá bezriziková pravdepodobnostná miera Q , pri ktorej sú tieto relatívne ceny cenných papierov Q -martingalmi. To znamená, že aj hodnota celého diskontovaného portfólia $H^*(t) = H(t)/B_t$ je tiež Q -martingal. Poznamenajme ešte, že samofinancovanosť portfólia sa zachová aj pri diskontácii. Pre diskontovanú hodnotu portfólia teda platí $H_0^* = E_Q(H_T^*)$.

Teraz ukážeme neexistenciu arbitráže sporom. Predpokladajme preto, že na začiatku máme nulovú hodnotu portfólia $H_0 = H_0^* = 0$ a zároveň tvrdíme, že na konci je $H_T^* \geq 0$, čo teda predstavuje arbitráž. Z platnosti $0 = H_0^* = E_Q(H_T^*)$ a $Q(\omega) > 0$ potom dostávame, že H_T^* sa musí rovnať nule. Ak by platilo $H_T^* \geq 0$, pričom pri niektorých realizáciách je $H_T^* > 0$, potom $E_Q(H_T^*) > 0$ a tým sa dostávame k sporu. Z toho vyplýva, že $H_T^* = 0$ a existencia arbitráže je teda vylúčená.

Namiesto hodnoty portfólia H_t teraz môžeme zobrať cenu opcie V_t s koncovou výplatom V_T . Potom výplata V_T generovaná samofinancovanou stratégiou je $\mathcal{F}_T$ -merateľná náhodná premenná. Cena opcie V_t je potom Q -martingal a pre jej bezarbitrážnu cenu dostávame

$$V_t = B_t V_t^* = B_t E_Q[V_T^* | \mathcal{F}_t] = B_t E_Q[V_T / B_T | \mathcal{F}_t].$$

Keďže $B_t = e^{rt}$, pre všeobecnú cenu opcie (derivátu) v čase t dostávame dôležitý vzťah

$$V_t = E_Q[e^{-r(T-t)} V_T | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} E_Q[V_T | \mathcal{F}_t] \quad (3.8)$$

Na záver ešte poznamenajme, že oceňovanie opcií pomocou martingalov a Black-Scholsovej PDR je konzistentné a táto súvislosť sa dá ukázať pomocou Feynman-Kacovej formuly, ktorá hovorí o vzťahu medzi stochastickými procesmi a PDR. Viac o tomto je napísané v knihe [5].

Exotické opcie

V tejto kapitole sa budeme venovať oceňovaniu exotických opcií, akými sú napr. ázijské a lookback opcie. Tieto opcie sa nazývajú exotické, kvôli geografickej polohe opčných búrz, na ktorých sa s nimi začalo obchodovať. Exotické opcie, ktorými sa budeme následne zaoberať, zohľadňujú historický vývoj podkladového aktíva - akcie, kvôli čomu dostali prívlastok dráhovo závislé (tzv. path-dependent). Hlavný význam týchto dráhovo závislých opcií spočíva v tom, že umožňujú investorom znížiť riziko spojené s výkyvmi ceny podkladového aktíva v blízkosti času expirácie, ktoré môžu mať aj špekulatívny charakter (cenová manipulácia zo strany vypisovateľa).

4.1 Ázijské opcie

Pri výplate ázijských opcií je zohľadnená aktuálna cena akcie a tiež jej historický vývoj. V tomto prípade sa historický vývoj ceny akcie zohľadňuje pomocou jeho priemeru počas platnosti príslušnej opcie. Tento priemer sa môže rátať viacerými spôsobmi, napr. ako aritmetický alebo geometrický priemer, a vo všeobecnosti ho budeme označovať ako A_t pre nejaký čas t . Ďalej môžeme priemer počítať buď z diskrétnych dát, alebo spojitou cez integrál. Vidíme teda, že existuje viacero typov ázijských opcií a ich klasifikáciu spravíme na základe týchto kritérií:

1. základné delenie : a) call opcia b) put opcia

2. *typ spriemerovania podkladového aktíva :*

	aritmetický priemer	geometrický priemer
spojitý prípad	$A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau$	$\ln A_t = \frac{1}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau$
diskrétny prípad	$A_{t_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}$	$\ln A_{t_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln S_{t_i},$

pričom v diskretnom prípade je $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ nejaké delenie časového intervalu platnosti opcie.

3. *pozícia spriemerovnej veličiny vo výplatnej funkcii :*

a) v pozícii ceny aktíva - tzv. *average rate call resp. put opcia*, t.j. výplata pre

$$\text{call opciu: } V^{arc}(S_T, A_T, T) = \max(A_T - E, 0)$$

$$\text{put opciu: } V^{arp}(S_T, A_T, T) = \max(E - A_T, 0)$$

b) v pozícii expiračnej ceny opcie - tzv. *average strike call resp. put opcia*, t.j. výplata pre

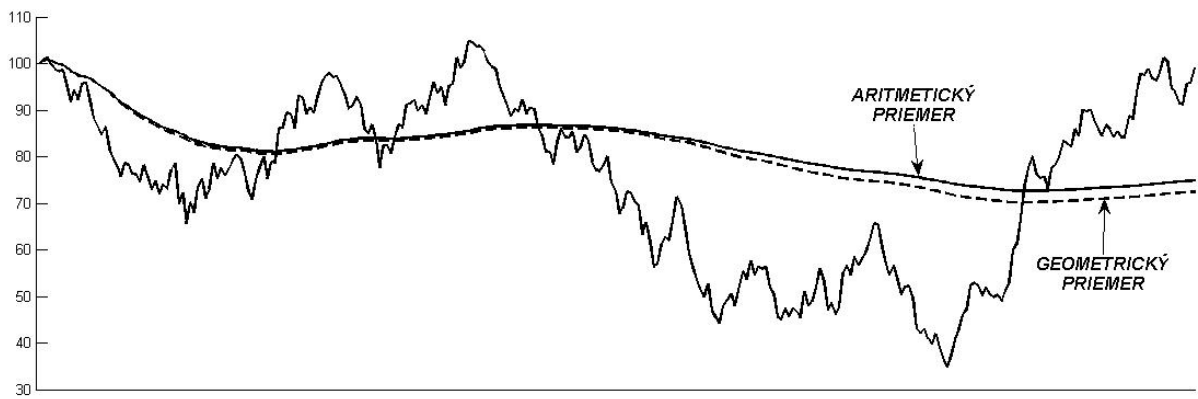
$$\text{call opciu: } V^{asc}(S_T, A_T, T) = \max(S_T - A_T, 0)$$

$$\text{put opciu: } V^{asp}(S_T, A_T, T) = \max(A_T - S_T, 0)$$

Vídime, že celkovo tak môžeme dostať rôzne typy ázijských opcií s relatívne dlhými názvami, napr. ázijská spojitá geometricky spriemerovaná average strike call opcia. Na obrázku (4.1) je zobrazený príklad vývoja ceny akcie a príslušného aritmetického a geometrického priemera vypočítaného z diskretných dát.

4.1.1 **PDR pre ázijské opcie**

V tejto časti odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre ázijské opcie, podobne ako sme dostali Black-Scholesovu PDR pre vanilla opcie v predchádzajúcej časti. Avšak hodnota ázijskej opcie $V = V(S, A, t)$ závisí nielen od ceny akcie S a času $t \in [0, T]$, ale aj od priemernej ceny akcie A . Preto pri výpočte diferenciálu ceny opcie dV budeme potrebovať poznať diferenciál priemernej ceny akcie dA .



Obr. 4.1: Vývoj ceny akcie spolu s aritmetickým a geometrickým priemerom

Pre aritmetický priemer dostávame

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{t} S_t - \frac{1}{t^2} \int_0^t S_\tau d\tau = \frac{S_t - A_t}{t},$$

a pre geometrický priemer

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{d \ln A}{dt} = \frac{1}{t} \ln S_t - \frac{1}{t^2} \int_0^t \ln S_\tau d\tau = \frac{\ln S_t - \ln A_t}{t}.$$

Odtiaľ dostávame diferenciál dA pre aritmetický a geometrický priemer v tvare

$$dA = \frac{S - A}{t} dt \quad \text{a} \quad dA = A \frac{\ln S - \ln A}{t} dt.$$

To môžeme pre oba prípady zapísať pomocou funkcie $f(x, t)$ ako

$$dA = A f\left(\frac{S}{A}, t\right) dt, \quad (4.1)$$

kde $f(x, t) = (x - 1)/t$ pre aritmetický priemer a $f(x, t) = (\ln x)/t$ pre geometrický priemer. Podstatné je, že v oboch prípadoch je diferenciál priemeru dA v prvom ráde aproximácie rádu dt .

Teraz môžeme prejsť k výpočtu diferenciálu $dV(S, A, t)$. Použitím Itôvej lemy, vzťahu (4.1) a faktu, že dA a dt sú rovnakého rádu, dostávame

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial A} dA + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \\ &= \frac{\partial V}{\partial S} dS + \left(\frac{\partial V}{\partial A} f\left(\frac{S}{A}, t\right) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \end{aligned}$$

PDR pre ázijské opcie odvodíme pomocou zaisteného portfólia, podobne ako v predchádzajúcej časti. Pre cenu akcie budeme opäť uvažovať SDR

$$dS_t = (\mu - D)S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (4.2)$$

kde μ a σ je drift a volatilita ceny akcie a D je miera spojite vyplácanej dividendy. Zaistené portfólio vytvoríme predajom jednej ázijskej call opcie a nákupom α_t akcií, a teda jeho hodnota $H(S_t, t)$ v čase t je $H(S_t, t) = -V + \alpha_t S_t$. Potom pre diferenciál hodnoty tohto portfólia dostávame

$$\begin{aligned} -dV + \alpha_t dS_t &= \left(-\frac{\partial V}{\partial A_t} f\left(\frac{S_t}{A_t}, t\right) - \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt + \left(\alpha_t - \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) dS_t \\ &= \left[\frac{\partial V}{\partial A_t} f\left(\frac{S_t}{A_t}, t\right) - \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \left(\alpha_t - \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) \mu S_t \right] dt \\ &\quad + \left(\alpha_t - \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t, \end{aligned}$$

a pre zisk Π z tohto portfólia v čase t máme

$$\begin{aligned} \Pi(H(S_t, t)) &= \int_0^t -dV + \int_0^t \alpha_u dS_u \\ &= \int_0^t \left[\frac{\partial V}{\partial A_u} f\left(\frac{S_u}{A_u}, u\right) - \frac{\partial V}{\partial u} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_u^2} + \left(\alpha_u - \frac{\partial V}{\partial S_u} \right) \mu S_u \right] du \\ &\quad + \int_0^t \left(\alpha_u - \frac{\partial V}{\partial S_u} \right) \sigma S_u dW_u. \end{aligned}$$

Pri voľbe počtu akcií $\alpha_u = \frac{\partial V}{\partial S_u}$ v každom čase $u < t$, stochastický člen vypadne a zisk sa stane deterministickým. Z bezarbitrážneho princípu vyplýva, že tento zisk by sa mal rovnať zisku z bezrizikového portfólia, ktorého hodnota H^* je $-V + \frac{\partial V}{\partial S_u} S_u$ a jeho výnos je rovný bezrizikovej úrokovej miere r . Keďže deterministické zisky $\Pi(H(S_t, t))$ a $\Pi(H^*(S_t, t)) = \int_0^t r \left(-V + \frac{\partial V}{\partial S_u} S_u \right) du$ sa rovnajú, dostávame

$$-f\left(\frac{S_u}{A_u}, u\right) \frac{\partial V}{\partial A_u} - \frac{\partial V}{\partial u} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_u^2} = r \left(-V + \frac{\partial V}{\partial S_u} S_u \right), \quad 0 < u < t,$$

a teda cena ázijskej opcie $V(S, A, t)$ pre aritmetické alebo geometrické spriemerovanie ceny akcie je daná rovnicou

$$f\left(\frac{S}{A}, t\right) \frac{\partial V}{\partial A} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (4.3)$$

Riešenie tejto rovnice $V(S, A, t)$ je definované na množine $(S, A, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, T)$ a s terminálovou podmienkou (výplatnou funkciou) podľa príslušného typu opcie (napr. $V(S_T, A_T, T) = \max(A_T - S_T, 0)$).

Všimnime si, že v rovnici (4.3) vystupuje len prvá parciálna derivácia V podľa premennej A , a teda táto PDR nie je až tak vhodná pri aplikovaní numerickej aproximácie. Tento problém sa však dá vyriešiť zavedením transformácie

$$x = \frac{S}{A}, \quad x \in (0, \infty) \quad \text{a} \quad V(S, A, t) = AW(x, t).$$

Po dosadení transformovaných premenných do rovnice (4.3) a terminálovej podmienky pre príslušnú opciu, dostávame po krátkych úpravách transformovanú PDR pre $W(x, t)$

$$f(x, t) \left(W - x \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (r - D)x \frac{\partial W}{\partial x} - rW = 0, \quad (4.4)$$

ktorej riešenie $W(x, t)$ je definované na oblasti $(x, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$ a terminálová podmienka (výplatná funkcia) pre napr. average strike put opciu má tvar $W(x, T) = \max(1 - x, 0)$ (pre ostatné typy ázijských opcií analogicky).

4.2 Lookback opcie

Lookback opcie patria tiež medzi dráhovo závislé opcie. Pri týchto derivátoch je historický vývoj ceny podkladového aktíva zohľadnený pomocou maximálnej (M) a minimálnej (m) ceny tohto aktíva, nadobudnutej počas životnosti opcie (t.j. od vypísania opcie do jej expirácie). Na obrázku (4.2) je znázornený príklad vývoja ceny akcie spolu s maximálnou (horná) a minimálnou (dolná) nadobudnutou cenou.

Lookback opcie môžeme, podobne ako ázijské opcie, rozdeliť podľa výplatnej funkcie na dva základné typy:

- a) lookback opcie s pevnou expiračnou cenou E - tzv. *extreme rate call resp. put opcia*, kde v pozícii aktíva je buď maximum $M = M_{T_0}^T = \max(S_t, t \in [T_0, T])$, alebo ako minimum $m = m_{T_0}^T = \min(S_t, t \in [T_0, T])$ ceny aktíva v časovom intervale $[T_0, T]$. To znamená, že výplatná funkcia je v prvom prípade pre maximum a pre

$$\text{call opciu: } V_M^{erc} = \max(M - E, 0)$$

$$\text{put opciu: } V_M^{erp} = \max(E - M, 0)$$

a v druhom prípade je pre minimum a pre

$$\text{call opciu: } V_m^{erc} = \max(m - E, 0)$$

$$\text{put opciu: } V_m^{erp} = \max(E - m, 0)$$

- b) lookback opcie s pohyblivou expiračnou cenou - tzv. *extreme strike call resp. put opcia*, kde maximum M alebo minimum m ceny aktíva je v pozícii expiračnej ceny (strike), teda výplatná funkcia je pre

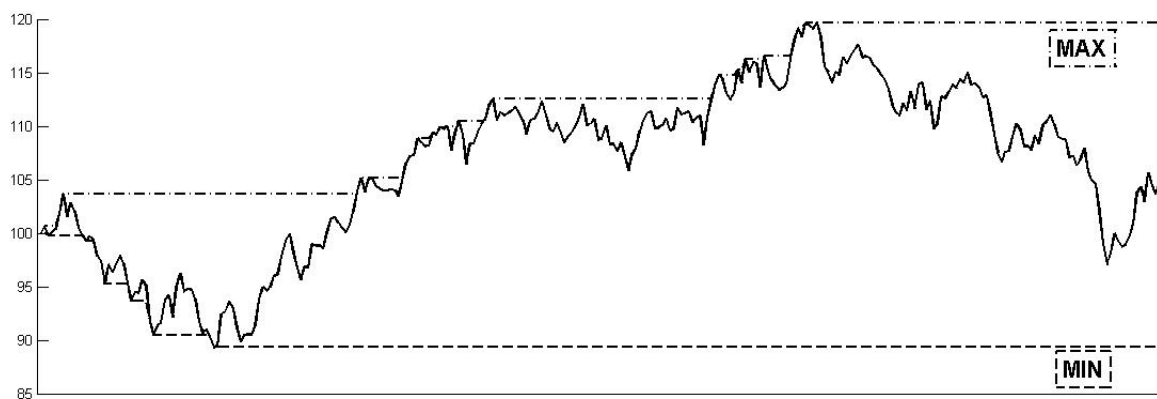
$$\text{call opciu: } V_m^{esc} = \max(S - m, 0)$$

$$\text{put opciu: } V_M^{esp} = \max(M - S, 0)$$

Poznamenajme, že pre extreme strike opciu máme len dva uvedené typy, pretože nemá zmysel mať extreme strike put opciu pre minimálnu cenu a call opciu pre maximálnu cenu, keďže ich výplatné funkcie $V_m^{esp} = \max(m - S, 0)$ a $V_m^{esc} = \max(S - M, 0)$ sú vždy nulové.

4.2.1 PDR pre lookback opcie

V tejto časti odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre look back, podobným spôsobom ako sme dostali PDR pre ázijské opcie. Odvodenie spravíme pre extreme strike lookback put opciu, ktorej cena $V(S, M, t)$ je závislá okrem ceny akcie S a



Obr. 4.2: Vývoj ceny akcie spolu s priebežným maximom a minimom

času $t \in [T_0, T]$ aj od maximálnej nadobudnutej ceny akcie M . Teda v tomto prípade budeme pri výpočte diferenciálu ceny opcie dV potrebovať poznať diferenciál maximálnej ceny akcie dM .

Najprv zavedieme novú premennú

$$M_n = \left[\int_{T_0}^t (S_\tau)^n d\tau \right]^{1/n}, \quad t > T_0,$$

ktorá bude aproximovať maximálnu cenu akcie M . Platí totiž, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \max_{T_0 \leq \tau \leq t} S_\tau = M.$$

Derivovaním premennej M_n dostávame

$$\frac{dM_n}{dt} = \frac{1}{n} \left[\int_{T_0}^t (S_\tau)^n d\tau \right]^{\frac{1}{n}-1} S^n = \frac{1}{n} \left[\int_{T_0}^t (S_\tau)^n d\tau \right]^{\frac{1-n}{n}} S^n = \frac{1}{n} \frac{S^n}{(M_n)^{n-1}},$$

a teda pre diferenciál tejto premennej máme

$$dM_n = \frac{1}{n} \frac{S^n}{(M_n)^{n-1}} dt. \quad (4.5)$$

Diferenciál $dV(S, M, t)$ potom dostaneme použitím Itôvej lemy a pomocou vzťahu (4.5) a faktu, že dM_n a dt sú rovnakého rádu, následovne:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial M_n} dM_n + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \\ &= \frac{\partial V}{\partial S} dS + \left(\frac{1}{n} \frac{S^n}{(M_n)^{n-1}} \frac{\partial V}{\partial M_n} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \end{aligned}$$

Ďalšie kroky pri odvádzaní PDR pre lookback opcie sú takmer rovnaké ako pre ázijské opcie, a teda niektoré z nich preskočíme. Pomocou bezarbitrážneho princípu a konštrukcie zaisteného portfólia, ktoré bude pozostávať z kúpy jednej extreme strike lookback put opcie a predaja α akcií, sa dostaneme, rovnakým postupom ako pri ázijských opciách, k rovnici:

$$\frac{1}{n} \frac{S^n}{(M_n)^{n-1}} \frac{\partial V}{\partial M_n} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (4.6)$$

Teraz prejdeme k limite pre $n \rightarrow \infty$, pričom vieme že $S \leq M$. V prípade $S < M$ dostávame

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{S^n}{(M_n)^{n-1}} = 0$$

a pre $S = M$ platí, že cena tejto lookback put opcie je nezávislá od aktuálne realizovanej maximálnej ceny, a teda $\frac{\partial V}{\partial M} = 0$ (bližšie vysvetlenie v knihe [5], str. 206).

Z toho vyplýva, že prvý člen v rovnici (4.7) vypadne, čím sa dostávame k rovnici

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad 0 < S < M, \quad T_0 < t, \quad (4.7)$$

čo je vlastne klasická Black-Scholesova PDR pre vanilla opcie, až nato, že táto obsahuje horné ohraničenie M na cenu akcie S . Príslušná terminálová podmienka má tvar $V(S, M, T) = M - S$.

Hedging

Pojem *hedging*, teda zaist'ovanie je vo finančníctve zaužívaný ako vytváranie investičnej pozície, ktorá vyrovnáva (kompenzuje) potenciálne straty alebo zisky spojené s investovaním. Hlavnou úlohou tohto zaistenia, ktoré môžeme nazvať aj menežment rizika, je teda eliminácia rizika straty, ktorému sú vystavený účastníci finančného trhu.

Ako príklad uvažujme finančnú inštitúciu, ktorá vypíše (predá) vanilla call opciu na 100 000 akcií bez dividend za 250 000 EUR. Táto opcia má expiračnú cenu 90 EUR a maturitu o 3 mesiace, pričom súčasná hodnota jednej akcie je 86 EUR. Očakávaný výnos akcie je 10%, jej volatilita je 20% a bezriziková úroková miera je 2% *per annum*. Potom cena opcie na jednu akciu vypočítaná pomocou Black-Scholesovho vzorca je 2 EUR, a teda teoretická Black-Scholesova cena opcie, ktorú vypísala inštitúcia je 200 000 EUR. Inštitúcia teda predala túto opciu za cenu o 50 000 EUR vyššiu ako je jej teoretická, avšak vystavila sa riziku straty, ktoré chce eliminovať.

Jednou z možností pre inštitúciu je nerobiť nič, teda zaujať tzv. *naked position*. Táto pozícia je výhodná, ak cena akcie v dobe expirácie neprekročí 90 EUR, pretože v tomto prípade call opcia nebude uplatnená a teda inštitúcia bude mať zisk z predaja tejto opcie 250 000 EUR. V druhom prípade, ak cena akcie prekročí 90 EUR sa ale táto pozícia stáva nevýhodnou. Ak by bola cena akcie v dobe expirácie napr. 100 EUR, potom call opcia bude uplatnená a inštitúcia stratí rozdiel medzi

touto cenou a expiračnou cenou, vynásobený počtom akcií, čo je 1 000 000 EUR. Táto pozícia teda neposkytuje spoľahlivé zaistenie.

Druhou možnosťou je zaujať tzv. *covered position*, teda pokrytú pozíciu, ktorá pozostáva z nákupu 100 000 akcií pri predaji opcie. Táto pozícia je naopak výhodná ak cena akcie v dobe expirácie bude vyššia ako expiračná cena 90 EUR, pretože opcia bude v tom prípade uplatnená a inštitúcia predá 100 000 akcií držiteľovi opcie, ktoré si na začiatku kúpila a dosiahne tak zisk z predaja opcie 250 000 EUR. Ak by však cena akcie klesla o 8 na 78 EUR, potom opcia nebude uplatnená, ale inštitúcia stratí na poklese ceny akcie 800 000 EUR, čo je oveľa viac ako 250 000 EUR, ktoré získa za predaj opcie. To znamená, že ani táto alternatívna pozícia neposkytuje uspokojivé zaistenie.

Dômyselnejšou pozíciou by mohlo byť skombinovanie predošlých dvoch. Takáto pozícia, alebo stratégia, tzv. *stop-loss strategy* je založená na tom, že akonáhle stúpne cena akcie nad expiračnú cenu, tak vypisovateľ call opcie si kúpi príslušnú akciu, resp. množstvo akcií na ktoré je vypísaná opcia. Naopak pri poklese ceny akcie pod expiračnú cenu vypisovateľ call opcie predá príslušné množstvo akcií. Ide teda o striedanie *naked* a *covered* pozície, v závislosti od ceny akcie a expiračnej ceny. Táto stratégia má ale tiež viacero neýhod (podrobnejšie v knihe [3]) ako napr. rozdiel medzi cenou za ktorú sa kupuje a predáva. Čím viac krát by cena akcie prešla expiračnú cenu, tým vyššie by boli transakčné náklady. To znamená, že náklady na takéto zaistenie sú závislé od priebehu ceny akcie.

Vidíme, že pri zaisťovaní pomocou uvedených pozícií sú náklady na toto zaistenie závislé od konkrétneho vývoja ceny akcie a teda nepredvídateľné. V uvedenom príklade s call opciou majú náklady na zaistenie vysokú volatilitu, môže to byť 0 alebo aj 1 000 000 EUR a viac. V ideálnom prípade by mala byť volatilita nákladov nulová, teda náklady by boli deterministické a výška týchto nákladov pre tzv. *perfektné* zaistenie by mala byť rovná Black-Scholesovej cene opcie. Vyplýva to z odvodenia Black-Scholesovho vzorca, kde sme použili bezarbitrážny princíp, ktorý zaručuje "férovú" cenu opcie, t.j. ani jedna zo strán by nemala byť zvýhodnená. V našom príklade by to znamenalo, že náklady na zaistenie opcie by boli vždy 200 000 EUR. Avšak takéto perfektné zaistenie na reálnom finančnom trhu neexistuje.

Existujú ale rôzne pokročilé metódy, ktoré môžeme v zásade rozdeliť na dve skupiny:

- tzv. *preference-free* metódy, ktoré nezávisia od subjektívnych očakávaní a preferencií. Tieto metódy, alebo stratégie sú časovo lokálne v tom zmysle, že závisia len na zložení zaist'ovacieho portfólia a na podkladovom aktíve v danom čase, bez ohľadu na minulý a budúci vývoj.
- metódy optimalizujúce nejakú veličinu, napr. maximalizácia očakávaného úžitku alebo minimalizovanie rizika. Tieto metódy naopak závisia na subjektívnom pohľade účastníka finančného trhu na budúci vývoj aktíva.

Vyvstáva prirodzená otázka, že ktorá zaist'ovacia metóda je najlepšia. Samozrejme jednoduchá odpoveď na túto otázku neexistuje, keďže rôzni ľudia majú rôzne názory na to čo znamená "najlepšia". Základnou myšlienkou je však to, že investor vie, že zaist'ovanie je nákladné a musí si ex-ante zvoliť svoju úžitkovú funkciu, ktorá čo najlepšie charakterizuje jeho preferencie.

5.1 Delta hedging

V tejto časti sa budeme bližšie zaoberať tzv. *delta hedgingom*, teda delta zaist'ovaním. S týmto zaist'ovaním sme sa už stretli v predchádzajúcej kapitole pri odvádzaní Black-Scholesovej parabolickej PDR pre cenu vanilla opcie, kde množstvo akcií Δ v zaistenom portfóliu bolo rovné derivácii ceny opcie podľa ceny akcie. Písmeno Δ patrí do skupiny tzv. "greeks", čo sú grécke písmená zaužívané pre meranie citlivosti ceny opcie na rôzne parametre. Každé z týchto písmen meria odlišnú časť rizika v opčnej pozícii a úlohou investora je ich menežment tak aby boli všetky riziká preňho priateľné. Medzi greeks patrí:

- Δ - Delta, t.j. závislosť zmeny ceny opcie na zmene ceny akcie:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

- Γ - Gama, t.j. závislosť zmeny faktora Δ na zmene ceny akcie:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

- Θ - Théta, t.j. závislosť zmeny ceny opcie na zmene expiračnej doby T , resp. času do expirácie $T-t$:

$$\Theta = -\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\partial V}{\partial t}$$

- Υ - Vega, t.j. závislosť zmeny ceny opcie na zmene volatility ceny akcie:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

- ρ - Ró, t.j. závislosť zmeny ceny opcie na zmene bezrizikovej úrokovej miery:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial r}$$

5.1.1 Delta opcie

Tu sa budeme bližšie zaoberať parametrom Δ , ktorý je azda najdôležitejším z pomiedzi spomenutých parametrov pri analýze trhových dát. Ako už bolo spomenuté, Δ opcie meria citlivosť ceny opcie na zmenu ceny akcie. Pre názornosť, ak by Δ call opcie na akciu bolo 0.8, potom zmena ceny akcie o malú hodnotu x bude mať za následok zmenu ceny opcie o približne 80% tejto hodnoty x .

V nasledujúcom odvodíme explicitný vzorec pre Δ vanilla opcie a pre Δ vybraných exotických opcií. Postup je jednoduchý a spočíva v derivovaní explicitného vzorca pre cenu daných opcií podľa ceny akcie.

Pre odvodenie Δ pre vanilla call a put opciu stačí ak zderivujeme Black-Scholesov vzorec pre ceny týchto opcií podľa ceny akcie. Pre úspornosť zápisov napíšeme Black-Scholesov vzorec pre call opciu v tvare

$$V^{call}(S, t) = Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

a pre put opciu v tvare

$$V^{put}(S, t) = Ee^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - Se^{-D(T-t)}\Phi(-d_1),$$

kde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \frac{S_t}{E} + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_2 &= \frac{\ln \frac{S_t}{E} + (r - D - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}. \end{aligned}$$

V ďalšom budeme potrebovať deriváciu kumulatívnej distribučnej funkcie normalizovaného normálneho rozdelenia $\Phi(x)$, čo vieme že je hustota tohto rozdelenia a budeme ju označovať

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Následujúca lema hovorí o rovnostiach, ktoré platia pre veličiny v Black-Scholesovom vzorci.

Lema 5.1. *Platí:*

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T - t}} \quad (5.1)$$

$$Se^{-D(T-t)}\phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\phi(d_2) = 0 \quad (5.2)$$

Dôkaz: Rovnosť (5.1) sa dá ľahko nahliadnuť, a preto prejdeme k druhej rovnosti. (5.2) platí práve vtedy keď:

$$Se^{-D(T-t)}\phi(d_1) = Ee^{-r(T-t)}\phi(d_2)$$

$$\frac{S}{E}e^{(T-t)(r-D)} = \frac{\phi(d_2)}{\phi(d_1)}$$

$$\ln \frac{S}{E} + (T - t)(r - D) = \frac{d_1^2 - d_2^2}{2},$$

pričom pravá strana poslednej rovnice je:

$$\begin{aligned} \frac{d_1^2 - d_2^2}{2} &= \frac{1}{2}(d_1 + d_2)(d_1 - d_2) = \frac{1}{2}(2d_1 - \sigma\sqrt{T - t})\sigma\sqrt{T - t} \\ &= \ln \frac{S}{E} + (r - D + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T - t) \\ &= \ln \frac{S}{E} + (T - t)(r - D) \end{aligned} \quad \square$$

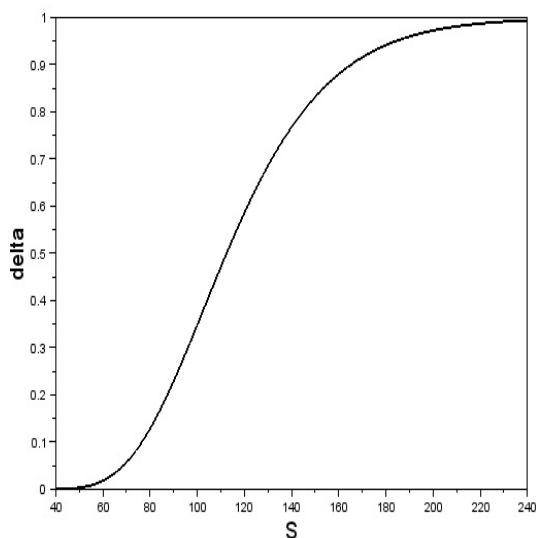
Pre deltu call opcie potom dostávame

$$\begin{aligned} \Delta^{call} = \frac{\partial V^{call}}{\partial S} &= Se^{-D(T-t)}\phi(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} + e^{-D(T-t)}\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\phi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &= e^{-D(T-t)}\Phi(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial S}[Se^{-D(T-t)}\phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\phi(d_2)] \\ &= e^{-D(T-t)}\Phi(d_1), \end{aligned}$$

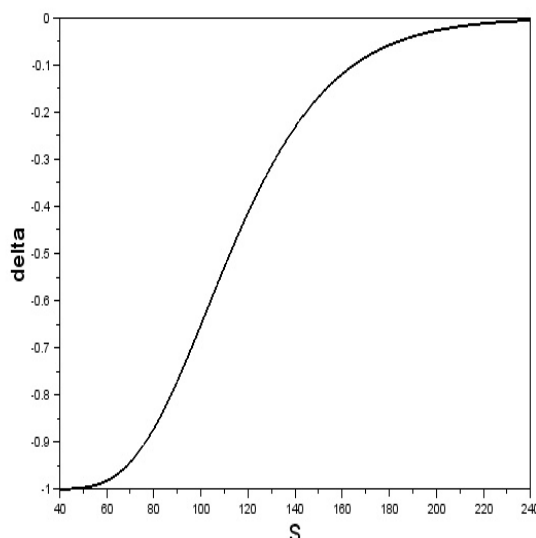
kde sme pri posledných dvoch úpravách využili lemu (5.1).

Analogicky pre deltu put opcie máme

$$\begin{aligned}\Delta^{put} = \frac{\partial V^{put}}{\partial S} &= (-1) - Se^{-D(T-t)}\phi(-d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - e^{-D(T-t)}\Phi(-d_1) \\ &\quad + (-1)Ee^{-r(T-t)}\phi(-d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &= -e^{-D(T-t)}\Phi(-d_1).\end{aligned}$$



Obr. 5.1: Delta pre call opciu



Obr. 5.2: Delta pre put opciu

Na obrázku (5.1) a (5.2) je zobrazený priebeh Δ^{call} a Δ^{put} v závislosti od ceny akcie pre vanilla call a put opciu s parametrami $E = 120$, $D = 0$, pričom bezriziková úroková miera je 2%, volatilita akcie 30% a čas do expirácie je jeden rok. Vidíme, že Δ^{put} je vlastne Δ^{call} o 1 posunuté nadol. To vyplýva zo základnej vlastnosti kumulatívnej distribučnej funkcie normalizovaného normálneho rozdelenia $\Phi(x)$:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

5.1.2 Delta pre exotické opcie

V tejto časti uvedieme výpočet Δ pre rôzne typy exotických opcií. Začneme príkladom pre ázijskú aritmeticky spriemerovanú opciu, ktorej cenu a Δ vypočítame nu-

mericky, pretože explicitný vzorec pre tento typ derivátu nepoznáme. Ďalej budeme počítat Δ exotických opcií derivovaním ich explicitných vzorcov cien.

Ázijská diskkrétne aritmeticky spriemerovaná average rate opcia

Na výpočet Δ tejto opcie použijeme numerickú metódu Monte Carlo. Touto metódou budeme simulovať vývoj ceny akcie, z ktorej vypočítame cenu opcie a následne Δ , teda závislosť zmeny ceny opcie od zmeny počiatočnej ceny akcie.

Pre vývoj ceny akcie budeme opäť uvažovať stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (5.3)$$

ktorej riešenie vieme, že je

$$S_t = S_0 \exp \left(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right).$$

Podľa tohto vzťahu budeme generovať ceny akcie až do času expirácie. Potom vyčíslime koncové ceny opcie V_T podľa vzťahu

$$V_T = \max(A - E, 0)$$

kde A je aritmetický priemer z cien akcie počas danej simulácie a E je expiračná cena. Ďalej vypočítame cenu opcie v čase $t = 0$ ako diskontovanú strednú hodnotu z koncových cien, pričom túto strednú hodnotu aproximujeme aritmetickým priemerom (vychádzame zo zákona veľkých čísel). Očakávaný výnos akcie μ nahradíme bezrizikovou úrokovou mierou r , aby sme tak dostali bezarbitrážnu cenu opcie (v rizikovo neutrálnom svete sa výnos musí rovnať bezrizikovej úrokovej miere). Potom rovnica na postupné generovanie cien akcie bude

$$S_{t_2} = S_{t_1} \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_2 - t_1) + \sigma Z_{t_1} \right), \quad (5.4)$$

kde

$$Z_{t_1} = W_{t_2} - W_{t_1}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \quad (5.5)$$

má rozdelenie $\mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$.

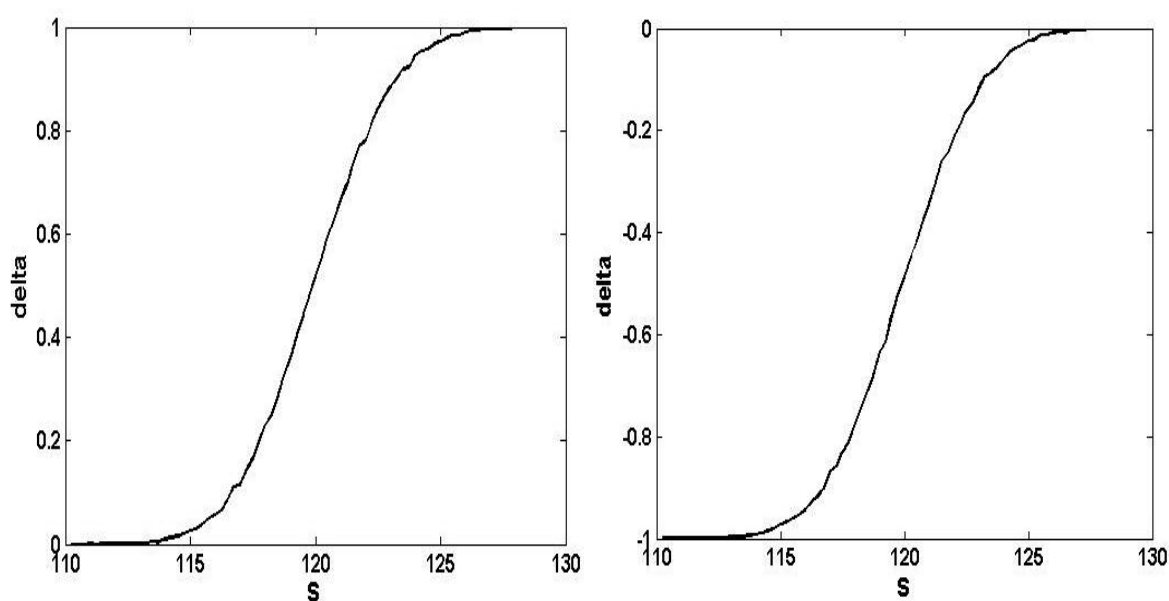
Na koniec vypočítame Δ z cien opcií pomocou aproximácie derivácie ako

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_0} = \frac{V(S_0 + \epsilon) - V(S_0)}{\epsilon},$$

pre ϵ dostatočne malé.

Na obrázku (5.3) je znázorený priebeh Δ pre aritmetickú ázijskú call a put opciu v závislosti od počiatočnej ceny akcie. V tomto príklade majú opcie expiračnú cenu $E = 120$ a maturitu $T = 10$ dní, pričom podkladovým aktívom je akcia s volatilitou $\sigma = 0.2$ a bezriziková úroková miera je $r = 0.02$. Za ϵ sme zvolili 0.01 (menšie hodnoty už nemali vplyv na presnosť riešenia, t.j. veľkosť odchýliek sa už nemenila) a počet simulácií pre každú cenu opcie bol 5000.

Program na výpočet Δ tejto opcie je nakonci v Listingu programov (6.1).



Obr. 5.3: Delta vypočítaná simuláciou pre aritmetickú ázijskú call opciu (vľavo) a put opciu (vpravo)

Z týchto grafov vidíme, že Δ aritmetických ázijských opcií ma veľmi podobný priebeh ako Δ vanilla opcií. Avšak vidíme, že grafy pre ázijské opcie majú drobné výchylky, ktoré sú spôsobené nepresnosťami použitej Monte Carlo metódy. V zásade mohli vzniknúť dve rôzne chyby v dôsledku:

- diskretizácie derivácie na výpočet Δ
- nepresného odhadnutia cien opcií $V(S_0 + \epsilon)$, $V(S_0)$

Ázijská spojitá geometricky spriemerovaná average rate call opcia

Podľa oceňovacej formuly (3.8) vieme, že cena tejto opcie je

$$V^{arc}(S, A, t) = e^{-r(T-t)} E_Q[\max(A - E, 0)], \quad (5.6)$$

kde E je expiračná cena, $S = S_t$ a

$$A = A_t = \exp\left(\frac{1}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau\right).$$

Odvodenie explicitného vzorca pre cenu tejto opcie z formuly (5.6) je ukázané v knihe [5] a my teda prejdeme rovno k tomuto vzorcu:

$$V^{arc}(S, A, t) = e^{-r(T-t)} [A^{t/T} S^{(T-t)/T} e^{\bar{\mu} + \bar{\sigma}^2/2} \Phi(d_1) - E\Phi(d_2)], \quad (5.7)$$

kde

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \left(r - D - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{(T-t)^2}{2T} \\ \bar{\sigma} &= \frac{\sigma}{T} \sqrt{\frac{(T-t)^3}{3}} \\ d_2 &= \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(\frac{t}{T} \ln A + \frac{T-t}{T} \ln S + \bar{\mu} - \ln E\right) \\ d_1 &= d_2 + \bar{\sigma} \end{aligned}$$

Zderivovaním vzorca (5.7) podľa ceny akcie dostávame Δ pre danú opciu v tvare

$$\begin{aligned} \Delta^{arc} &= e^{-r(T-t)} A^{t/T} \frac{\partial S^{(T-t)/T}}{\partial S} e^{\bar{\mu} + \bar{\sigma}^2/2} \Phi(d_1) \\ &+ e^{-r(T-t)} \left(A^{t/T} S^{(T-t)/T} e^{\bar{\mu} + \bar{\sigma}^2/2} \phi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - E\phi(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S} \right) \end{aligned}$$

Toto môžeme ďalej zjednodušiť - ukážeme, že výraz

$$A^{t/T} S^{(T-t)/T} e^{\bar{\mu} + \bar{\sigma}^2/2} \phi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - E\phi(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S}$$

je nulový. Zrejme platí

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S}$$

a ak upravíme druhú zložku

$$\begin{aligned} E\phi(d_2) &= E\phi(d_1 - \bar{\sigma}) = E \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-(d_1 - \bar{\sigma})^2/2} \\ &= E \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-d_1^2/2} e^{(2d_1\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^2)/2} = E\phi(d_1) e^{(2d_1\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^2)/2} \\ &= E\phi(d_1) e^{t/T \ln A + (T-t)/T \ln S - \ln E + \bar{\mu} - \bar{\sigma}^2/2} = E\phi(d_1) e^{\bar{\mu} - \bar{\sigma}^2/2} A^{t/T} S^{(T-t)/T} E^{-1} \\ &= \phi(d_1) e^{\bar{\mu} - \bar{\sigma}^2/2} A^{t/T} S^{(T-t)/T}, \end{aligned}$$

tak vidíme, že sa rovná prvej zložke, a teda daný výraz je nulový. Z toho dostávame

$$\begin{aligned}\Delta^{arc} &= e^{-r(T-t)} A^{t/T} \frac{\partial S^{(T-t)/T}}{\partial S} e^{\bar{\mu} + \bar{\sigma}^2/2} \Phi(d_1) \\ &= e^{-r(T-t)} \left(\frac{A}{S}\right)^{t/T} \frac{T-t}{T} e^{\bar{\mu} + \bar{\sigma}^2/2} \Phi(d_1)\end{aligned}$$

Ázijská spojitě geometricky spriemerovaná average strike call opcia

Podobne ako v predošlom bude cena tejto opcie daná oceňovacou formulou (3.8) ako

$$V^{asc}(S, A, t) = e^{-r(T-t)} E_Q[\max(S - A, 0)]. \quad (5.8)$$

Opäť uvedieme už priamo explicitný vzorec pre cenu danej opcie (prechod od formuly (5.8) k explicitnému vzorcu je uvedený v knihe [5]).

$$V^{asc}(S, A, t) = S e^{-D(T-t)} \Phi(\hat{d}_1) - A^{t/T} S^{(T-t)/T} e^{-D(T-t)} e^{-\hat{Q}} \Phi(\hat{d}_2) \quad (5.9)$$

kde

$$\begin{aligned}\hat{d}_1 &= \frac{t \ln(S/A) + \left(r - D + \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{T^2 - t^2}{2}}{\sigma \sqrt{\frac{T^3 - t^3}{3}}} \\ \hat{d}_2 &= \hat{d}_1 - \frac{\sigma}{T} \sqrt{\frac{T^3 - t^3}{3}} \\ \hat{Q} &= \frac{\left(r - D + \frac{\sigma^2}{2}\right) T^2 - t^2}{2} \frac{1}{T} - \frac{\sigma^2}{6} \frac{T^3 - t^3}{T^2}\end{aligned}$$

Zderivovaním vzorca (5.9) podľa ceny akcie dostávame Δ pre danú opciu v tvare

$$\begin{aligned}\Delta^{asc} &= e^{-D(T-t)} \left[\Phi(\hat{d}_1) - A^{t/T} \frac{\partial S^{(T-t)/T}}{\partial S} e^{-\hat{Q}} \Phi(\hat{d}_2) \right] \\ &+ e^{-D(T-t)} \left[S \phi(\hat{d}_1) \frac{\partial \hat{d}_1}{\partial S} - A^{t/T} S^{(T-t)/T} e^{-\hat{Q}} \phi(\hat{d}_2) \frac{\partial \hat{d}_2}{\partial S} \right]\end{aligned}$$

Toto môžeme ďalej zjednodušiť, podobne ako v predchádzajúcom prípade, pretože výraz

$$S \phi(\hat{d}_1) \frac{\partial \hat{d}_1}{\partial S} - A^{t/T} S^{(T-t)/T} e^{-\hat{Q}} \phi(\hat{d}_2) \frac{\partial \hat{d}_2}{\partial S} = 0,$$

a teda nakoniec dostávame

$$\begin{aligned}\Delta^{asc} &= e^{-D(T-t)} \left[\Phi(\hat{d}_1) - A^{t/T} \frac{\partial S^{(T-t)/T}}{\partial S} e^{-\hat{Q}} \Phi(\hat{d}_2) \right] \\ &= e^{-D(T-t)} \left[\Phi(\hat{d}_1) - \left(\frac{A}{S}\right)^{t/T} \frac{T-t}{T} e^{-\hat{Q}} \Phi(\hat{d}_2) \right]\end{aligned}$$

Lookback extreme rate call opcia

Vieme, že výplata takejto opcie je $\max(M_{T_0}^T - E, 0)$, kde $M_{T_0}^T = \max(S_t, t \in [T_0, T])$. Pre cenu opcie v čase t potom platí

$$V^{erc}(S, M, t) = e^{-r(T-t)} E_Q[\max(\max(M, M_t^T) - E, 0)],$$

kde $S = S_t$ a $M = M_{T_0}^t$ je priebežné maximum nadobudnuté do času t . Tento vzťah môžeme rozpísať podľa toho či je väčšie priebežné maximum alebo expiračná cena následovne:

pre $M \leq E$ platí

$$V^{erc}(S, M, t) = e^{-r(T-t)} E_Q[\max(M_t^T - E, 0)],$$

a pre $M > E$ platí

$$V^{erc}(S, M, t) = e^{-r(T-t)} ((M - E) + E_Q[\max(M_t^T - M, 0)])$$

V druhom prípade pre $M > E$ vidíme, že výplata bude minimálne $M - E$. Táto výplata potom predstavuje novú vyššiu expiračnú hodnotu pre časový interval $[t, T]$, a teda výplata sa môže ešte zvýšiť ak cena akcie stúpne nad $M - E$.

Ak definujeme funkciu

$$H(S, t, K) = e^{-r(T-t)} E_Q[\max(M_t^T - K, 0)],$$

kde K je konštanta (predstavuje expiračnú cenu), potom cenu danej opcie môžeme napísať ako

$$V^{erc}(S, M, t) = \begin{cases} H(S, t, E) & \text{ak } M \leq E \\ e^{-r(T-t)}(M - E) + H(S, t, M) & \text{ak } M > E \end{cases}$$

V knihe [5] je uvedený postup na výpočet explicitného vzorca pre $H(S, t, K)$. Na tomto mieste uvedieme už priamo daný vzorec:

$$\begin{aligned} H(S, t, K) &= S\Phi(d) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d - \sigma\sqrt{T-t}) \\ &+ e^{-r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2r}S \left[e^{r(T-t)}\Phi(d) - \left(\frac{S}{K}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\Phi\left(d - \frac{2r}{\sigma}\sqrt{T-t}\right) \right] \end{aligned}$$

kde

$$d = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

Na výpočet Δ opcie teda potrebujeme deriváciu funkcie $H(S, t, K)$ podľa S , ktorú získame zderivovaním vyššie uvedeného vzorca:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(S, t, K)}{\partial S} &= \Phi(d) + S\phi(d) \frac{\partial d}{\partial S} - e^{-r(T-t)} K \phi(d - \sigma \sqrt{T-t}) \frac{\partial(d - \sigma \sqrt{T-t})}{\partial S} \\ &+ \frac{\sigma^2}{2r} \Phi(d) - e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} \left(\frac{S}{K} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi \left(d - \frac{2r}{\sigma} \sqrt{T-t} \right) \\ &+ \frac{\sigma^2}{2r} S \phi(d) \frac{\partial d}{\partial S} - e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} S \left(\frac{S}{K} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \phi \left(d - \frac{2r}{\sigma} \sqrt{T-t} \right) \\ &+ e^{-r(T-t)} \left(\frac{S}{K} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi \left(d - \frac{2r}{\sigma} \sqrt{T-t} \right) \end{aligned}$$

Toto môžeme zjednodušiť, tak ako v predchádzajúcich prípadoch, pretože výrazy

$$S\phi(d) \frac{\partial d}{\partial S} - e^{-r(T-t)} K \phi(d - \sigma \sqrt{T-t}) \frac{\partial(d - \sigma \sqrt{T-t})}{\partial S} = 0$$

a

$$\frac{\sigma^2}{2r} S \phi(d) \frac{\partial d}{\partial S} - e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} S \left(\frac{S}{K} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \phi \left(d - \frac{2r}{\sigma} \sqrt{T-t} \right) = 0.$$

Teda nakoniec dostávame

$$\frac{\partial H(S, t, K)}{\partial S} = \Phi(d) \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r} \right) + e^{-r(T-t)} \left(\frac{S}{K} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \Phi \left(d - \frac{2r}{\sigma} \sqrt{T-t} \right) \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r} \right)$$

Potom Δ tejto lookback opcie je

$$\Delta^{erc} = \begin{cases} \frac{\partial H(S, t, E)}{\partial S} & \text{ak } M \leq E \\ \frac{\partial H(S, t, M)}{\partial S} & \text{ak } M > E \end{cases}$$

Malliavinov kalkul a delta opcie

Malliavinov kalkul sa tiež nazýva stochastický kalkul variácií, pretože rozširuje kalkul variácií pre funkcie na kalkul variácií pre stochastické procesy. Z hľadiska finančnej matematiky je tento kalkul zaujímavý kvôli tomu, že umožňuje derivovanie a integrovanie po častiach náhodných veličín, čo sa využíva pri počítaní parametrov citlivosti finančných derivátov. Môžeme teda takto vypočítať parametre greeks - Delta, Gama, Théta, Vega, Ró a ďalšie, keďže sú to derivácie ceny opcie podľa príslušných premenných.

V tejto časti uvedieme základné elementy Malliavinovho kalkulu, ktoré potom využijeme pri počítaní parametrov greeks. Obširnejšie o Malliavinom kalkule je napísané v knihe [8].

Hlavnou výhodou tohto kalkulu je, že nám poskytne účinný nástroj na derivovanie cien opcí v tvare strednej hodnoty

$$V_t = e^{-r(T-t)} E_Q[V_T],$$

a teda na výpočet parametrov greeks opcie nebudeme potrebovať poznať explicitné vzorce pre ich ceny a ani vzorce pre greeks. Toto nám umožní odhadovať resp. simulovať priamo deriváciu ceny opcie, teda greeks, bez toho aby sme najprv odhadovali resp. simulovali cenu opcie a z nej potom počítali dané greeks. Takýmto postupom dostaneme greeks opcie v podobnom tvare ako je cena opcie:

$$greek = e^{-r(T-t)} E_Q[V_T \cdot \mathbf{w}],$$

kde w je určitá váha, ktorú vypočítame. Tento výsledok znamená, že parameter *greek* môže byť vypočítaný priamo (výsledný vzorec môže byť kľudne jednoduchší ako pôvodný problém) alebo simuláciou (Monte Carlo) spolu s cenou opcie pri rovnakej pravdepodobnostnej miere Q .

6.1 Operátor derivácie

Na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s filtráciou $\mathcal{F}_t$ generovanou Wienerovým procesom W_t a pre deterministické funkcie $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in L^2([0, T])$ definujeme náhodnú premennú

$$W(h) = \int_0^T h(t) dW_t,$$

teda $W(h)$ je Itôv integrál. Ďalej nech C_n^∞ je množina hladkých funkcií $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a S je množina náhodných premenných v tvare

$$F = f(W(h_1), W(h_2), \dots, W(h_n)),$$

kde $f \in C_n^\infty$ a $h_1, h_2, \dots, h_n \in L^2([0, T])$. Potom operátor derivácie D môžeme definovať nasledovne:

Definícia 6.1. [8] Pre $F \in S$ definujeme stochastický proces $D_t F$ ako

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), W(h_2), \dots, W(h_n)) h_i(t)$$

Malliavinova derivácia je teda lineárny operátor $D : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega \times [0, T])$. Definičný obor operátora D môžeme ďalej rozšíriť, ak uvažujeme normu

$$\|F\|_{1,2} = \|F\|_{L^2(\Omega)} + \|F\|_{L^2(\Omega \times [0, T])}$$

a $D^{1,2}$ definujeme ako uzáver množiny S v norme $\|\cdot\|_{1,2}$, potom $D^{1,2}$ je definičný obor operátora D .

Pre názornosť uvažujme jednoduchú funkciu $F = W(h) = \int_0^T h(t) dW_t$. Potom jej Malliavinova derivácia je jednoducho $D_t W(h) = h(t)$, čo je vlastne integrand Itôvho integrálu.

V nasledujúcej vete uvedieme vlastnosti tohto operátora.

Veta 6.2. [8] Malliavinov operátor derivácie má nasledujúce vlastnosti:

1. linearita: $D_t(cF + G) = cD_t(F) + D_t(G), \quad \forall F, G \in D^{1,2}$
2. pravidlo reťazenia: $D_t(f(F)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} D_t F, \quad \forall f \in \mathbf{C}_n^\infty, F \in D^{1,2}$
3. súčinové pravidlo: $D_t(FG) = GD_t(F) + FD_t(G), \quad \forall F, G \in D^{1,2} \text{ a } \|DF\| < \infty$

6.2 Skorohodov integrál

Kedže Malliavinov operátor derivácie je lineárny, musí k nemu existovať opačný operátor: $\delta : L^2(\Omega \times [0, T]) \rightarrow L^2(\Omega)$. Operátor δ sa nazýva Skorohodov integrál a definujeme ho nasledovne:

Definícia 6.3. [8] Skorohodov integrál je operátor

$$\delta : df(\delta) \subset L^2(\Omega \times [0, T]) \rightarrow L^2(\Omega)$$

s definičným oborom

$$df(\delta) = \{u \in L^2(\Omega \times [0, T]), \exists C \in \mathbb{R} : |E[\int_0^T D_t F u_t dt]| \leq C \|F\|_{L^2(\Omega)}, \forall F \in D^{1,2}\},$$

pre ktorý platí

$$E \left[\int_0^T D_t F u_t dt \right] = E[F \delta(u)]$$

Poznamenajme, že pre adaptované procesy je Skorohodov integrál totožný s Itôvim integrálom, a teda platí rovnosť

$$E \left[\int_0^T D_t F u_t dt \right] = E[F \delta(u)] = E \left[F \int_0^T u_t dW_t \right]$$

Následujúca veta hovorí o integrácii po častiach v Malliavinovom kalkule.

Veta 6.4. [8] Nech $u \in df(\delta)$, $F \in D^{1,2}$, $Fu \in L^2(\Omega \times [0, T])$, potom platí

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \int_0^T D_t F u_t dt$$

Dôkaz: Z definície Skorohodovho integrálu a použitím súčinového pravidla pre $F, G \in D^{1,2}$ máme

$$\begin{aligned} E[FG\delta(u)] &= E \left[\int_0^T D_t(FG)u_t dt \right] \\ &= E \left[G \int_0^T D_t(F)u_t dt \right] + E \left[F \int_0^T D_t(G)u_t dt \right] \\ &= E \left[G \int_0^T D_t(F)u_t dt \right] + E[G\delta(Fu)] \quad \square \end{aligned}$$

6.3 Malliavinova vážená schéma

V tejto časti ukážeme ako vypočítať greek opcie pomocou váhy $\mathbf{w}$, ktorá hovorí čomu sa rovná príslušná derivácia v rovnici

$$greek = e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial P} E_Q[V_T(S_T)] = e^{-r(T-t)} E_Q \left[\frac{\partial V_T(S_T)}{\partial S_T} \frac{\partial S_T}{\partial P} \right] = e^{-r(T-t)} E_Q[V_T \cdot \mathbf{w}],$$

kde P je parameter podľa ktorého derivujeme (napr. pre Δ je to cena akcie S a pre ρ je to úroková miera r).

Chceme teda vypočítať, čomu sa rovná $E[\phi'(X)G]$, kde X je podkladové aktívum - akcia, $\phi(\cdot)$ je výplata a $\frac{X(t+h)-X(t)}{h} \rightarrow G$ pre $h \rightarrow 0$, je derivácia procesu X .

Uvažujme ľubovľný proces h_s , pre ktorý podľa pravidla reťazenia platí

$$Gh_s D_s \phi(X) = Gh_s \phi'(X) D_s X$$

a po integrácii máme

$$\int_0^T Gh_s D_s \phi(X) ds = G\phi'(X) \int_0^T h_s D_s X ds$$

a po úprave dostávame

$$G\phi'(X) = \frac{\int_0^T Gh_s D_s \phi(X) ds}{\int_0^T h_s D_s X ds}.$$

Označme $u_s = \frac{Gh_s}{\int_0^T h_s D_s X ds}$. Potom platí

$$E[\phi'(X)G] = E \left[\int_0^T D_s \phi(X) u_s ds \right] = E[\phi(X)\delta(u)],$$

z čoho dostávame nasledujúci vzorec:

$$E[\phi'(X)G] = E[\phi(X)\mathbf{w}], \quad (6.1)$$

kde váha w je

$$w = \delta \left(\frac{Gh_s}{\int_0^T h_s D_s X ds} \right).$$

V nasledujúcom príklade je ukázaný výpočet Δ pre vanilla opciu pomocou vzorca (6.1).

Príklad 6.5. Predpokladajme, že cena akcie je daná geometrickým Brownovým pohybom ako

$$S_T = S_t e^{(r-D-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma \int_t^T dW_\tau},$$

kde $T \geq t$ a D je ročná miera priebežne vyplácanej dividendy. Chceme vypočítať Δ vanilla opcie, teda deriváciu ceny opcie podľa počiatočnej ceny akcie S_0 . Potom

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial}{\partial S_0} e^{-rT} E_Q[\phi(S_T)] \\ &= e^{-rT} E_Q \left[\phi'(S_T) \frac{\partial S_T}{\partial S_0} \right] \\ &= \frac{e^{-rT}}{S_0} E_Q[\phi'(S_T) S_T], \end{aligned}$$

pričom sme využili rovnosť $\frac{\partial S_T}{\partial S_0} = e^{(r-D-\sigma^2/2)T + \sigma W_T} = \frac{S_T}{S_0}$.

Teraz použijeme vzorec (6.1) na výpočet váhy w pre $h_s = 1$:

$$\begin{aligned} w &= \delta \left(\frac{S_T}{\int_0^T D_s S_T ds} \right) \\ &= \delta \left(\frac{S_T}{\sigma S_T \int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq T\}} ds} \right) \\ &= \delta \left(\frac{1}{\sigma T} \right) \\ &= \frac{W_T}{\sigma T} \end{aligned}$$

a teda nakoniec dostávame

$$\Delta = \frac{e^{-rT}}{S_0} E_Q \left[\phi(S_T) \frac{W_T}{\sigma T} \right]$$

6.4 Delta pre exotické opcie

V tejto časti ukážeme ako vypočítať parameter Δ pre vybrané typy exotických opcií pomocou Malliavinovho kalkulu.

Ázijská spojitě aritmeticky spriemerovaná average rate call opcia

Pre túto opciu vypočítame Δ ako deriváciu ceny opcie V_t podľa počiatočnej ceny akcie S_0 a výsledok porovnáme s Δ z predchádzajúcej časti.

Vieme, že cena tejto opcie je

$$V(S, A, t) = e^{-r(T-t)} E_Q[\max(A - E, 0)],$$

kde E je expiračná cena a

$$A = A_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt.$$

Potom Δ vypočítame ako

$$\begin{aligned} \Delta &= e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial S_0} E_Q[V_T(A)] \\ &= e^{-r(T-t)} E_Q \left[\frac{\partial V_T(A)}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial S_0} \right] \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{S_0} E_Q \left[\frac{\partial V_T(A)}{\partial A} A \right] \end{aligned}$$

a použitím vzorca (6.1) dostaneme Δ ako

$$\Delta = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_0} E_Q \left[\frac{\partial V_T(A)}{\partial A} A \right] = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_0} E_Q[V_T(A) \mathbf{w}],$$

kde váha $\mathbf{w}$ je Skorohodov integrál

$$\mathbf{w} = \delta \left(\frac{AS_t}{\int_0^T S_t D_t A dt} \right).$$

V následujúcom výpočte Δ využijeme rovnosť

$$D_t A = \frac{1}{T} \int_0^T D_t S_\tau d\tau = \frac{\sigma}{T} \int_t^T S_\tau d\tau \quad (6.2)$$

a túto lemu:

Lema 6.6. *Pre cenu akcie S_t danú geometrickým Brownovým pohybom ako*

$$S_T = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma W_T}$$

platí rovnosť

$$\frac{\int_0^T S_t \int_t^T S_\tau d\tau dt}{\left(\int_0^T S_t dt \right)^2} = \frac{1}{2}$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^T S_t \int_t^T S_\tau d\tau dt &= \int_0^T S_t \int_t^T S_\tau d\tau dt + \int_0^T S_\tau \int_0^\tau S_t dt d\tau \\
 &= \int_0^T S_t \left(\int_t^T S_\tau d\tau + \int_0^t S_\tau d\tau \right) dt \\
 &= \int_0^T S_t \int_0^T S_\tau d\tau dt \\
 &= \left(\int_0^T S_t dt \right)^2 \quad \square
 \end{aligned}$$

Teraz môžeme vypočítať váhu ako

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} = \delta \left(\frac{AS_t}{\int_0^T S_t D_t A dt} \right) &= \frac{2}{\sigma} \delta \left(\frac{S_t}{\int_0^T S_t dt} \right) \\
 &= \frac{2}{\sigma} \left(\frac{\int_0^T S_t dW_t}{\int_0^T S_t dt} + \frac{\int_0^T S_t (\int_t^T \sigma S_\tau d\tau) dt}{(\int_0^T S_t dt)^2} \right) \\
 &= \frac{2}{\sigma} \frac{\int_0^T S_t dW_t}{\int_0^T S_t dt} + 1,
 \end{aligned}$$

pričom sme využili vzťah (6.2), lemu (6.6) a vetu (6.4). To môžeme ďalej upraviť, pretože platí

$$\int_0^T S_t dW_t = \frac{1}{\sigma} \left(S_T - S_0 - r \int_0^T S_t dt \right)$$

a teda

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} = \delta \left(\frac{AS_t}{\int_0^T S_t D_t A dt} \right) &= \frac{2}{\sigma^2} \frac{S_T - S_0 - r \int_0^T S_t dt}{\int_0^T S_t dt} + 1 \\
 &= \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{S_T - S_0}{\int_0^T S_t dt} - r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \\
 &= \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{S_T - S_0}{TA} - r + \frac{\sigma^2}{2} \right).
 \end{aligned}$$

To znamená, že Δ tejto opcie je

$$\Delta = \frac{2e^{-rT}}{\sigma^2 S_0} E_Q \left[V_T(A) \left(\frac{S_T - S_0}{TA} - r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right], \quad (6.3)$$

kde

$$V_T(A) = \max \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - E, 0 \right).$$

Ázijská spojite geometricky spriemerovaná average rate call opcia

Vieme, že cena tejto opcie je

$$V^{arc}(S, A, t) = e^{-r(T-t)} E_Q[\max(A - E, 0) | \mathcal{F}_t], \quad (6.4)$$

kde E je expiračná cena a

$$A = A_T = \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_\tau d\tau\right),$$

t.j. geometrický priemer.

Potom Δ vypočítame ako

$$\begin{aligned} \Delta &= e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial S_t} E_Q[V_T(A_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} E_Q \left[\frac{\partial V_T(A_T)}{\partial A_T} \frac{\partial A_T}{\partial S_t} | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Najprv vypočítame čomu sa rovná výraz $\frac{\partial A_T}{\partial S_t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_T}{\partial S_t} &= \frac{\partial}{\partial S_t} \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_u du\right) \\ &= \frac{A_T}{T} \frac{\partial}{\partial S_t} \int_0^T \ln S_u du \\ &= \frac{A_T}{T} \int_0^T \frac{1}{S_u} du \\ &= \frac{T-t}{T} \frac{A_T}{S_t} \end{aligned}$$

To znamená, že Δ má tvar

$$\Delta = \frac{e^{-r(T-t)}(T-t)}{T S_t} E_Q \left[\frac{\partial V_T(A_T)}{\partial A_T} A_T | \mathcal{F}_t \right]$$

a použitím vzorca (6.1) môžeme Δ vypočítať ako

$$\Delta = \frac{e^{-r(T-t)}(T-t)}{T S_t} E_Q [V_T(A_T) \mathbf{w} | \mathcal{F}_t],$$

kde váha $\mathbf{w}$ je

$$\mathbf{w} = \delta \left(\frac{A_T}{\int_t^T D_s A_T ds} \right).$$

Pre túto váhu dostávame:

$$\begin{aligned}
 \delta \left(\frac{A_T}{\int_t^T D_s A_T ds} \right) &= \delta \left(\frac{A_T}{\int_t^T A_T \frac{1}{T} \int_s^T \frac{1}{S_t} \sigma S_t dt ds} \right) \\
 &= \delta \left(\frac{1}{\int_t^T \frac{\sigma}{T} (T-s) ds} \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma} \delta \left(\frac{2T}{(T-t)^2} \right) \\
 &= \frac{2T(W_T - W_t)}{\sigma(T-t)^2}
 \end{aligned}$$

a teda nakoniec pre Δ danej opcie v čase t máme vzťah:

$$\Delta = \frac{2e^{-r(T-t)}}{(T-t)\sigma S_t} E_Q [V_T(A_T)(W_T - W_t) | \mathcal{F}_t]$$

Ázijská spojitá geometricky spriemerovaná average strike call opcia

Cena tejto opcie je daná vzorcom

$$V^{asc}(S, A, t) = e^{-r(T-t)} E_Q [\max(S_T - A_T, 0) | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} E_Q [V_T(S_T - A_T) | \mathcal{F}_t],$$

kde $S = S_t$ a

$$A = A_T = \exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_\tau d\tau \right).$$

Vidíme, že vo výplatnej funkcii vystupujú dve premenné: S_T a A_T . Túto komplikáciu môžeme vyriešiť znížením dimenzie problému, t.j. prejdeme k novej premennej $X_T = \frac{A_T}{S_T}$, ktorú získame prejdením k novej pravdepodobnostnej miere Q^* , pri ktorej má výplatná funkcia tvar:

$$V^{asc}(S, A, t) = e^{-D(T-t)} S_t E_{Q^*} [V_T(1 - X_T) | \mathcal{F}_t]. \quad (6.5)$$

Kompletný postup zníženia dimenzie problému je uvedený v práci [2] (str. 51). Prejdenie od pravdepodobnostnej miery Q k Q^* sa dá spraviť pomocou Girsanovej vety (1.16), v ktorej za proces $\gamma_t(\omega)$ zoberieme konštantu $-\sigma$, teda zápornú volatilitu. Potom podľa spomenutej vety (1.16) platí, že Radon-Nikodymova derivácia je

$$\frac{dQ^*}{dQ} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t^Q} = e^{-(r-D)t} S_t / S_0 = \eta_t,$$

kde η_t je martingal a

$$W_t^{Q^*} = W_t^Q - \sigma t,$$

kde $W_t^{Q^*}$ je Wienerov proces spojený s pravdepodobnostnou mierou Q^* a W_t^Q je Wienerov proces na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

To znamená, že cena akcie pri miere Q daná ako

$$S_t = S_0 e^{(r-D-\sigma^2/2)t + \sigma W_t^Q}$$

sa zmení pri miere Q^* na

$$S_t = S_0 e^{(r-D+\sigma^2/2)t + \sigma W_t^{Q^*}}$$

Z bezarbitrážneho princípu vieme, že diskontované ceny všetkých aktív sú martin-
galmi, t.j. pri miere Q :

$$e^{-rt} V_t = E_Q[e^{-rT} V_T | \mathcal{F}_t]$$

a pri novej miere Q^* :

$$\begin{aligned} V_t &= E_{Q^*}[e^{-r(T-t)} V_T | \mathcal{F}_t] \\ &= E_{Q^*}\left[\frac{\eta_t}{\eta_T} e^{-r(T-t)} V_T | \mathcal{F}_t\right] \\ &= E_{Q^*}\left[\frac{S_t}{S_T} e^{-D(T-t)} V_T | \mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

Potom pre cenu aktív pri miere Q^* platí

$$\frac{V_t}{e^{Dt} S_t} = E_{Q^*}\left[\frac{V_T}{e^{DT} S_T} | \mathcal{F}_t\right],$$

a teda pre mieru Q^* sme dostali nový numeraire $e^{Dt} S_t$, t.j. cena akcie vrátane dividend.

Zvyšok postupu zníženia dimenzie problému je uvedený v spomínanej práci [2].

Na tomto mieste prejdeme rovno k rovnici (6.5) a výpočtu Δ .

Pre ázijskú average strike call opciu vypočítame Δ ako

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial}{\partial S_t} e^{-D(T-t)} S_t E_{Q^*}[V_T(1 - X_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-D(T-t)} E_{Q^*}[V_T(1 - X_T) | \mathcal{F}_t] + e^{-D(T-t)} S_t E_{Q^*}\left[\frac{\partial V_T(1 - X_T)}{\partial(1 - X_T)} \frac{\partial(1 - X_T)}{\partial S_t} | \mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-D(T-t)} \left(E_{Q^*}[V_T(1 - X_T) | \mathcal{F}_t] - S_t E_{Q^*}\left[\frac{\partial V_T(1 - X_T)}{\partial(1 - X_T)} \frac{\partial X_T}{\partial S_t} | \mathcal{F}_t\right] \right) \end{aligned}$$

Najprv spočítame čomu sa rovná výraz $\frac{\partial X_T}{\partial S_t}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_T}{\partial S_t} &= \frac{\partial \frac{A_T}{S_T}}{\partial S_t} = \frac{\frac{\partial A_T}{\partial S_t} S_T - A_T \frac{\partial S_T}{\partial S_t}}{S_T^2} \\ &= \frac{\frac{T-t}{T} \frac{A_T}{S_t} S_T - A_T \frac{S_T}{S_t}}{S_T^2} \\ &= \frac{1}{S_t} \left(\frac{T-t}{T} - 1 \right) \frac{A_T}{S_T} \\ &= -\frac{t}{TS_t} X_T\end{aligned}$$

To znamená, že Δ tejto opcie je

$$\Delta = e^{-D(T-t)} \left(E_{Q^*}[V_T(1 - X_T)|\mathcal{F}_t] + \frac{t}{T} E_{Q^*} \left[\frac{\partial V_T(1 - X_T)}{\partial(1 - X_T)} X_T | \mathcal{F}_t \right] \right)$$

a použitím vzorca (6.1) môžeme Δ vypočítať ako

$$\Delta = e^{-D(T-t)} \left(E_{Q^*}[V_T(1 - X_T)|\mathcal{F}_t] + \frac{t}{T} E_{Q^*} [V_T(1 - X_T)\mathbf{w} | \mathcal{F}_t] \right),$$

kde váha $\mathbf{w}$ je

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \delta \left(\frac{X_T}{\int_t^T D_s(1 - X_T) ds} \right) \\ &= \delta \left(\frac{X_T}{\int_t^T \frac{(D_s A_T) S_T - (D_s S_T) A_T}{S_T^2} ds} \right) \\ &= \delta \left(\frac{X_T}{\int_t^T \frac{\sigma A_T (1-s/T) S_T - \sigma S_T A_T}{S_T^2} ds} \right) \\ &= \delta \left(\frac{X_T}{\int_t^T \frac{s}{T} \sigma X_T ds} \right) \\ &= \delta \left(\frac{2T}{\sigma(T^2 - t^2)} \right) \\ &= \frac{2T}{\sigma(T^2 - t^2)} (W_T - W_t)\end{aligned}$$

a teda nakoniec dostávame Δ ako

$$\Delta = e^{-D(T-t)} E_{Q^*} \left[V_T(1 - X_T) \left(1 + \frac{2t(W_T - W_t)}{\sigma(T^2 - t^2)} \right) | \mathcal{F}_t \right].$$

Lookback extreme rate call opcia

Vieme, že pre cenu tejto opcie v čase t platí

$$V^{erc}(S, M, t) = e^{-r(T-t)} E_Q[\max(\max(M, M_t^T) - E, 0)],$$

kde $M = M_{T_0}^t$ je priebežné maximum nadobudnuté do času t a výplata je $V_T = \max(M_{T_0}^T - E, 0)$. Tento vzorec môžeme ďalej rozpísať ako

$$V^{erc}(S, M, t) = \begin{cases} e^{-r(T-t)} E_Q[\max(M_t^T - E, 0)] & \text{ak } M \leq E \\ e^{-r(T-t)} ((M - E) + E_Q[\max(M_t^T - M, 0)]) & \text{ak } M > E \end{cases}$$

a teda Δ je

$$\begin{aligned} \Delta &= e^{-r(T-t)} E_Q \left[\frac{\partial \max(M_t^T - E, 0)}{\partial S_t} \frac{\partial (M_t^T - E)}{\partial S_t} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} E_Q \left[\frac{\partial \max(M_t^T - E, 0)}{\partial S_t} \frac{\partial M_t^T}{\partial S_t} \middle| \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

ak $M \leq E$ a

$$\begin{aligned} \Delta &= e^{-r(T-t)} \left(\frac{\partial}{\partial S_t} (M - E) + E_Q \left[\frac{\partial \max(M_t^T - M, 0)}{\partial S_t} \frac{\partial (M_t^T - M)}{\partial S_t} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right) \\ &= e^{-r(T-t)} E_Q \left[\frac{\partial \max(M_t^T - M, 0)}{\partial S_t} \frac{\partial M_t^T}{\partial S_t} \middle| \mathcal{F}_t \right], \end{aligned}$$

ak $M > E$.

To znamená, že pre oba prípady potrebujeme vypočítať $\frac{\partial M_t^T}{\partial S_t}$. Za maximum M_t^T zoberieme, tak ako v predchádzajúcej časti, výraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \max_{t \leq u \leq T} S_u = M_t^T,$$

kde

$$M_n = \left[\int_t^T (S_u)^n du \right]^{1/n}, \quad T > t.$$

Potom dostávame:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_t^T}{\partial S_t} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial M_n}{\partial S_t} \\ &= \frac{\partial}{\partial S_t} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_t^T (S_u e^{(r-\sigma^2/2)(u-t)+\sigma(W_u-W_t)})^n du \right]^{1/n} \\ &= \frac{\partial}{\partial S_t} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(S_t)^n \int_t^T e^{n(r-\sigma^2/2)(u-t)+n\sigma(W_u-W_t)} du \right]^{1/n} \\ &= \frac{\partial}{\partial S_t} S_t \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_t^T e^{n(r-\sigma^2/2)(u-t)+n\sigma(W_u-W_t)} du \right]^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_t^T e^{n(r-\sigma^2/2)(u-t)+n\sigma(W_u-W_t)} du \right]^{1/n} \\ &= \frac{M_t^T}{S_t} \end{aligned}$$

a teda Δ tejto opcie je v tvare

$$\Delta = \begin{cases} \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t} E_Q \left[\frac{\partial \max(M_t^T - E, 0)}{\partial S_t} M_t^T | \mathcal{F}_t \right] & \text{ak } M \leq E \\ \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t} E_Q \left[\frac{\partial \max(M_t^T - M, 0)}{\partial S_t} M_t^T | \mathcal{F}_t \right] & \text{ak } M > E \end{cases}$$

Potom Δ môžeme vypočítať pomocou vzorca (6.1) ako

$$\Delta = \begin{cases} \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t} E_Q [\max(M_t^T - E, 0) \mathbf{w} | \mathcal{F}_t] & \text{ak } M \leq E \\ \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t} E_Q [\max(M_t^T - M, 0) \mathbf{w} | \mathcal{F}_t] & \text{ak } M > E, \end{cases}$$

kde váha $\mathbf{w}$ je

$$\mathbf{w} = \delta \left(\frac{M_t^T}{\int_t^T D_s M_s^T ds} \right)$$

Najprv vypočítame výraz $D_s M_t^T$:

$$\begin{aligned} D_s M_t^T &= D_s \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_t^T (S_u)^n du \right]^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\int_t^T (S_u)^n du \right]^{1/n-1} D_s \int_t^T (S_u)^n du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\int_t^T (S_u)^n du \right]^{1/n-1} \int_t^T n \sigma(S_u)^n du \\ &= \sigma \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_t^T (S_u)^n du \right]^{1/n} \\ &= \sigma M_t^T \end{aligned}$$

Váha $\mathbf{w}$ je potom

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \delta \left(\frac{M_t^T}{\int_t^T D_s M_s^T ds} \right) \\ &= \delta \left(\frac{M_t^T}{\int_t^T \sigma M_s^T ds} \right) \\ &= \delta \left(\frac{1}{\sigma(T-t)} \right) \\ &= \frac{W_T - W_t}{\sigma(T-t)} \end{aligned}$$

a teda nakoniec dostávame Δ tejto lookback opcie ako

$$\Delta = \begin{cases} \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma S_t(T-t)} E_Q [\max(M_t^T - E, 0)(W_T - W_t) | \mathcal{F}_t] & \text{ak } M \leq E \\ \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma S_t(T-t)} E_Q [\max(M_t^T - M, 0)(W_T - W_t) | \mathcal{F}_t] & \text{ak } M > E \end{cases}$$

Záver

V predloženej diplomovej práci sme sa zaoberali delta hedgingom exotických opcií. Hlavným cieľom bolo počítanie parametra delta, teda derivácie ceny opcie podľa ceny akcie počas životnosti danej opcie.

Jadrom ako aj prínosom práce je využitie Malliavinovho kalkulu, ktorý predstavuje účinný nástroj na derivovanie stochastických procesov. Týmto prístupom sa nám podarilo vypočítať parameter delta bez toho, aby sme poznali explicitný vzorec pre cenu opcie. Stačilo poznať všeobecný oceňovací vzorec pre finančné deriváty v tvare diskontovanej podmienenej strednej hodnoty z výplatnej funkcie derivátu. Výsledný parameter delta je rovnako ako oceňovací vzorec v tvare podmienenej strednej hodnoty pri rovnakej pravdepodobnostnej miere.

Pre konkrétne exotické typy opcií sme vypočítali ich parameter delta. Výpočty boli menej náročné ako klasický postup, pri ktorom sa odvodzuje a následne derivuje vzorec pre cenu opcie. Ďalšia výhoda nášho postupu spočíva v možnosti vypočítania parametra delta komplikovanejších finančných derivátov, ktorých oceňovací vzorec nepoznáme.

Bibliografia

- [1] Black F., Scholes M.: *The pricing of options and corporate liabilities*, The Journal of Political Economy 81, 637-654, 1973.
- [2] Bokes T.: *Probabilistic and analytic methods for pricing American style of Asian options*, Dissertation Thesis, Bratislava, 2011.
- [3] Hull J.C.: *Options, Futures & Other Derivatives*, 5th edition, Prentice Hall, New Jersey, 2003.
- [4] Itô, K.: *On a Formula Concerning Stochastic Differentials*, Nagoya Math. Journal 3, 55–65, 1951.
- [5] Kwok Y.K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [6] McLeish L.: *Monte Carlo Simulation & Finance*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2005.
- [7] Melicherčík I., Olšárová L., Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, Bratislava, 2005.
- [8] Nualart D.: *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [9] Oksendal B.: *Stochastic Differential Equations*, 6th edition, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [10] Ševčovič D.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, STU, Bratislava, 2009.

Listing programov

Naprogramovane v Matlabe 7.12

Listing 6.1: Výpočet Δ pre ázijskú aritmeticky spriemerovanú average rate call opciu pomocou Monte Carlo metódy

```
sim=5000;          % počet simulácií
e=exp(1);          % euler. číslo
vol=0.2;           % volatilita
r=0.02;            % úroková miera
5 dt=1/252;        % časový krok
dni=10;
T=dni*dt;          % maturita
K=120;             % expiračná cena
poc=80;            % počet cien opcií
10 S01=[1:poc]; S02=[1:poc]; % V(S+eps), V(S)
eps=0.01;          % epsilon
%-----inicializácia-----
for i=1:poc
    S01(i)=i/4+110; S02(i)=i/4+110+eps;
15 end
S1=zeros(poc,dni); S2=zeros(poc,dni);
V1=zeros(poc,sim); V2=zeros(poc,sim);
for i=1:poc
    S1(i,1)=S01(i); S2(i,1)=S02(i);
20 end
%-----simulácia-----
for p=1:sim
```

```

    for j=1:poc
        for i=2:dni
            nah=randn*sqrt(dt);
            expon=(r-1/2*vol^2)*dt + vol*nah;
            S1(j,i)=S1(j,i-1)*e^expon;
            S2(j,i)=S2(j,i-1)*e^expon;
        end
        A1=sum(S1(j,1:dni))/dni;
        A2=sum(S2(j,1:dni))/dni;
        V1(j,p)=A1-K; V2(j,p)=A2-K;
        if V1(j,p)<0 V1(j,p)=0; end
        if V2(j,p)<0 V2(j,p)=0; end
        V1(j,p)=e^(-r*T)*V1(j,p);
        V2(j,p)=e^(-r*T)*V2(j,p);
    end
end
Sz1=[1:poc]; Sz2=[1:poc];
40 for j=1:poc
    Sz1(j)=0; Sz2(j)=0;
    for p=1:sim
        Sz1(j)=Sz1(j)+ V1(j,p);
        Sz2(j)=Sz2(j)+ V2(j,p);
    end
    Sz1(j)=Sz1(j)/sim; % koncové ceny opcii získané
    Sz2(j)=Sz2(j)/sim; % simuláciou
end
delta=(Sz2-Sz1)/eps; % vypočítaná delta
50 plot(S01,delta); % graf

```