

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Trojfaktorový konvergenčný model úrokových mier

Diplomová práca

2014

Bc. Michal JÁNOŠI

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

## Trojfaktorový konvergenčný model úrokových mier

### Diplomová práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika  
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
Vedúci práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.  
Evidenčné číslo: 689978a5-524a-4153-9d1d-7eb8a377652c



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Bc. Michal Jánoši  
**Študijný program:** ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 9.1.9. aplikovaná matematika  
**Typ záverečnej práce:** diplomová  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Trojfaktorový konvergenčný model úrokových mier  
*Three-factor convergence model of interest rates*

**Cieľ:** Trojfaktorový konvergenčný model [Stehlíková, Zíková, 2012] predpokladá, že európska short rate je súčtom dvoch nepozorovateľných faktorov a domáca short rate je ovplyvňovaná európskou. Cieľom diplomovej práce je pokračovať v analýze tohto modelu:  
- zistiť rád presnosti aproximácie navrhutej v uvedenom článku (zatiaľ bol rád presnosti určený len v prípade CIR modelu)  
- dokázať vybrané vlastnosti výnosových kriviek,  
- navrhnúť metódu kalibrácie a aplikovať ju na trhové dáta.

**Vedúci:** RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.  
**Katedra:** FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky  
**Vedúci katedry:** prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
**Dátum zadania:** 04.02.2013

**Dátum schválenia:** 04.02.2013

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.  
garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

**Pod'akovanie** Touto cestou by som sa rád pod'akoval svojej vedúcej diplomovej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za pomoc, trpezlivosť, ochotu a cenné odborné rady, ktoré mi pomáhali pri písaní tejto práce. Ďakujem aj svojej rodine a kamarátom za ich podporu a trpezlivosť.

**Čestné prehlásenie** Čestne prehlasujem, že na diplomovej práci som pracoval samostatne na základe vlastných teoretických poznatkov, konzultácií a odbornej literatúry uvedenej v Zozname použitej literatúry.

**Miesto, Dátum**

**Meno Priezvisko**

## Abstrakt v štátnom jazyku

JÁNOŠI Michal: *Trojfaktorový konvergenčný model úrokových mier* [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Vedúci diplomovej práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava 2014, 68 s.

Diplomová práca sa zaoberá kalibráciou trojfaktorového konvergenčného modelu úrokových mier, a nakoľko vo všeobecnom CKLS modeli nie je známe presné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu, zaoberá sa aj zistením rádu presnosti aproximácie ceny dlhopisu v CKLS modeli. Ide o trojfaktorový model popisujúci dynamiku európskej úrokovej miery (úrokovej miery v rámci eurozóny) a domácej úrokovej (úrokovej miery krajiny, ktorá sa má onedlho stať členským štátom eurozóny). O európskej úrokovej miere v tomto modeli predpokladáme, že ovplyvňuje vývoj tej domácej, ako bolo navrhnuté v článku B. Stehlíkovej a Z. Zíkovej [9]. Podľa aproximácie ceny dlhopisu v tomto modeli navrhujeme metódu, ktorá na základe pozorovaných výnosových kriviek odhadne parametre CKLS modelu, ako aj priebeh okamžitej európskej a domácej úrokovej miery. Kalibráciu modelu vykonávame na vygenerovaných a reálnych (trhových) dátach.

**Kľúčové slová:** dlhopisy, časová štruktúra úrokových mier, okamžitá úroková miera, trojfaktorové modely, konvergenčný model, model Vašíčkovho typu, model CIR typu, model CKLS typu, kalibrácia, aproximácia, rád presnosti

## Abstract

JÁNOŠI Michal: *Three-factor convergence model of interest rates* [Master's Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics, Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD., Bratislava, 2014, 68 p.

In this work we deal with the calibration of three-factor convergence model of interest rates and since exact solution of partial differential equation for the bond price in general CKLS model is not known, we also derive order of accuracy of approximation of bond price in CKLS model. This model is a three-factor interest rate model that describes dynamics of european interest rate (i.e. interest rate within eurozone) and dynamics of domestic interest rate (i.e. interest rate of country entering the eurozone). It is assumed that european interest rate affects development of domestic interest rate, as was proposed by B. Stehlíková and Z. Zíková in [9]. Using approximation of bond price in CKLS model, we propose method, that, based on term-structure of interest rates, calibrates the model, estimates its parameters and estimates european and domestic short rate. We use generated and real (market) data in the process of calibration.

**Keywords:** bonds, term structure of interest rates, short rate, three-factor models, convergence models, Vasicek type model, CIR type model, CKLS type model, calibration, approximation, order of accuracy

# Obsah

Úvod	10
<b>1 Úvod do problematiky modelovania úrokových mier</b>	<b>12</b>
1.1 Dlhopis a časová štruktúra úrokových mier . . . . .	12
1.2 Okamžitá úroková miera . . . . .	13
1.3 Iné deriváty úrokovej miery . . . . .	14
<b>2 Modely úrokových mier</b>	<b>14</b>
2.1 Konvergenčné modely úrokových mier . . . . .	14
2.2 Trojfaktorový konvergenčný model Vašíčkovho typu . . . . .	16
2.2.1 Pojem reálnej a rizikovo neutrálnej miery . . . . .	17
2.2.2 Korelácia faktorov . . . . .	18
2.3 Trojfaktorový konvergenčný model CIR typu . . . . .	20
2.4 Trojfaktorový konvergenčný model CKLS typu . . . . .	20
<b>3 Odvodenia cien dlhopisov</b>	<b>22</b>
3.1 Ceny dlhopisov pre model Vašíčkovho typu . . . . .	22
3.2 Ceny dlhopisov pre model CIR typu s nulovou koreláciou . . . . .	25
3.3 Časová štruktúra úrokových mier pre model Vašíčkovho typu . . . . .	28
3.3.1 Prípád nulovej korelácie faktorov . . . . .	29
<b>4 Aproximácia ceny dlhopisu v trojfaktorovom konvergenčnom modeli</b>	<b>30</b>
4.1 Aproximácia a jej prenosť pre CIR model s nulovou koreláciou . . . . .	33
4.2 Presnosť aproximácie pre všeobecný CKLS model . . . . .	35
<b>5 Kalibrácia trojfaktorového modelu úrokových mier</b>	<b>42</b>
5.1 Odhad parametrov modelu európskej úrokovej miery . . . . .	42
5.1.1 Odhad faktorov dvojfaktorového CIR modelu s nulovou koreláciou	43
5.1.2 Odhad parametrov dvojfaktorového CIR modelu s nulovou ko-	
reláciou . . . . .	49
5.1.3 Porovnanie odhadnutých a vygenerovaných výnosov v dvojfak-	
torovom CIR modeli . . . . .	50



---

5.1.4	Odhady pre CKLS model . . . . .	51
5.2	Odhad parametrov modelu domácej úrokovej miery . . . . .	52
5.2.1	Odhad parametrov tretieho faktora v trojfaktorovom CIR modeli s nulovou koreláciou . . . . .	52
5.2.2	Odhady pre CKLS model . . . . .	56
5.3	Simulačná analýza . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Kalibrácia modelu na reálnych dátach</b>	<b>59</b>
6.1	Výnosy na európskom trhu . . . . .	59
6.2	Výnosy na domácom trhu . . . . .	60
	<b>Záver</b>	<b>62</b>
	<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>63</b>
	<b>Príloha</b>	<b>65</b>

## Úvod

Finančné trhy by sa v dnešnej dobe nezaobišli bez používania matematického modelovania a sofistikovaných matematických algoritmov. Správne nástroje finančnej matematiky nám umožňujú skúmať zrejme najzákladnejšiu oblasť vo svete finančných trhov, ktorou je vývoj úrokových mier. Korektné ocenenie ktoréhokoľvek aktíva je závislé od informácie práve o hodnotách úrokových mier.

Základným problémom pri modelovaní úrokových mier je správne zachytenie dynamiky okamžitej úrokovej miery, ktorú môžeme interpretovať ako teoretický začiatok výnosovej krivky. Tvary výnosových kriviek sú závislé od typu modelu použitého pri opisovaní tejto dynamiky. Modely úrokových kriviek sú definované stochastickými diferenciálnymi rovnicami a podľa ich počtu potom hovoríme o jedno-, dvoj-, alebo viac-faktorových modeloch. Čím komplexnejší model zvolíme, tým dostávame väčšiu množinu prípustných tvarov výnosových kriviek, avšak odhadovanie parametrov v komplexnejších modeloch je vzhľadom na väčší počet parametrov náročnejšie. Preto je dôležité pri zedefinovaní modelu dbať aj na toto hľadisko.

V tejto práci sa budeme zaoberať trojfaktorovým konvergenčným modelom úrokových mier, ktorý bol sformulovaný v práci B. Stehlíkovej a Z. Zíkovej [9]. Oboznámime sa so základným modelom Vašíčkovho typu s konštantnou volatilitou úrokových mier a jeho zovšeobecneniami: modelom typu Cox–Ingersoll–Ross (CIR), ktorého volatilita je úmerná odmocnine úrokovej miery a typu Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders (CKLS), kde volatilita závisí od nejakej zvolenej mocniny úrokovej miery. Pre najkomplexnejší model z týchto troch, t.j. pre model typu CKLS, však neexistuje explicitné vyjadrenie pre cenu dlhopisu, a preto budeme musieť odvodiť aproximačnú formulu pre túto cenu. Toto nás vedie k hlavným cieľom tejto práce: Prvým je odvodenie aproximačnej formuly v CKLS modeli a odvodenie rádu presnosti aproximácie. Druhým je navrhnutie metódy, ktorou budeme vedieť efektívne odhadovať parametre modelu a hodnoty faktorov okamžitej úrokovej miery na základe výnosových kriviek.

Práca je rozdelená na 6 častí. V prvej časti sa oboznámime s problematikou a

pojmy používanými v práci. V druhej kapitole sa pozrieme na konvergenčné modely úrokových mier, poukážeme na to, čím sú zaujímavé a bližšie si predstavíme tri základné špecifikácie modelov (Vašíčkova, CIR a CKLS). V tretej kapitole, pre modely Vašíčkovho a CIR typu s nulovou koreláciou faktorov, odvodíme formuly pre ceny dlhopisov. Tieto formuly sú základom pri odhadovaní parametrov modelov. Formula pre cenu dlhopisu v CKLS modeli neexistuje, čo nás vedie k obsahu štvrtej časti. V tejto odvodíme aproximáciu pre cenu dlhopisu a pozrieme sa aj na rád jej presnosti. Túto aproximáciu potom budeme používať ako vstup do kalibrácie modelu typu CKLS. V piatej časti prejdeme na samotnú kalibráciu modelov. Kalibrovať budeme model typu CIR s nulovou koreláciou a pozrieme sa aj na možnosti kalibrácie modelu typu CKLS. Efektívnosť kalibrácie budeme testovať na vygenerovaných dátach. V záverečnej kapitole budeme kalibrovať model aj pre reálne (trhové) dáta a zhodnotíme vhodnosť použitia tohto modelu.

# 1 Úvod do problematiky modelovania úrokových mier

V úvode práce zdefinujeme základné pojmy používané pri modelovaní úrokových mier. A to konkrétne pojem dlhopisu, časovej štruktúry úrokových mier a okamžitej úrokovej miery. Spomenieme krátkodobé úrokové miery, ukážeme si priebehy reálnych výnosových kriviek. Viac informácií vie čitateľ nájsť napríklad v [4] a [5].

## 1.1 Dlhopis a časová štruktúra úrokových mier

Dlhopis je najjednoduchší derivát úrokovej miery. Je to cenný papier, v ktorom sa dlžník zaväzuje, že v stanovenej lehote (čase splatnosti) vyplatí jeho vlastníčkovi dlžnú sumu (nominálnu hodnotu) a v dohodnutých obdobiach z nej bude vyplácať výnosy (kupóny). Bezakupónový dlhopis s nominálnou hodnotou 1 sa nazýva diskontný dlhopis. Ďalej budeme pod dlhopisom rozumieť práve diskontný dlhopis. Nech  $P(t, T)$  označuje cenu dlhopisu v čase  $t$  so splatnosťou v čase  $T$ . Označme  $R(t, T)$  úrokovú mieru v čase  $t$  so splatnosťou v čase  $T$ . Potom pre cenu dlhopisu platí

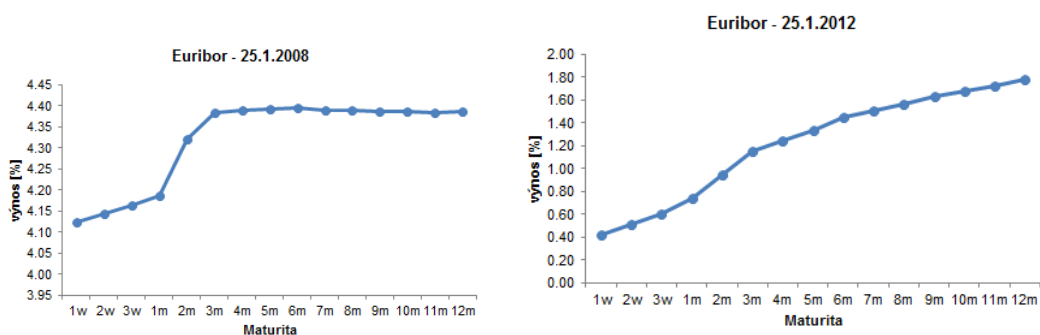
$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}. \quad (1.1)$$

Zo vzťahu (1.1) môžeme vyjadriť  $R(t, T)$ , čím dostávame vyjadrenie pre časovú štruktúru úrokových mier:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t}. \quad (1.2)$$

Časová štruktúra úrokových mier vyjadruje závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu. Niekedy sa nazýva aj výnosová krivka. Táto je zvyčajne rastúca (keďže na dlhšiu dobu požičiavame s vyšším úrokom), ale pri očakávaní poklesu úrokovej miery môže byť aj klesajúca. Príkladmi úrokových mier sú napríklad Euribor (Euro Interbank Offered Rate), Libor (London Interbank Offered Rate), či Bribor (Bratislava Interbank Offered Rate).

Euribor [15] (Euro Interbank Offered Rate) je úroková sadzba, za ktorú si na medzibankovom trhu banky v rámci eurozóny požičiavajú finančné prostriedky. Upravovaná je na dennej báze a ráta sa ako aritmetický priemer sadziieb za ktoré si referenčné



**Obr. 1.1:** Časová štruktúra úrokových mier dňa 25.1. pre roky 2008 a 2012. Dňa 25.1.2008 vidíme pre vyššie maturity klesajúci trend výnosovej krivky. Zdroj: [15].

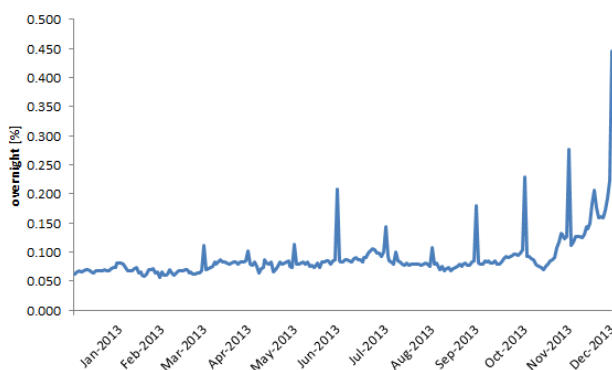
európske banky navzájom práve tieto finančné prostriedky požičiavajú. Do 1.11.2013 bola počítaná pre rôzne doby splatnosti a to 1,2 a 3 týždne a 1 až 12 mesiacov. Od tohto dátumu sa počíta už len pre doby splatnosti 1 a 2 týždne a 1,2,3,6,9 a 12 mesiacov.

## 1.2 Okamžitá úroková miera

Okamžitá (krátkodobá) úroková miera (short-rate)  $r(t)$  je začiatkom výnosovej krivky a dostávame ju ako limitu vzťahu (1.2) pre  $T \rightarrow \tau^+$  :

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T). \quad (1.3)$$

Predstavuje úrokovú mieru platnú na veľmi krátke obdobie. Táto veličina však na trhu priamo neexistuje a preto ju musíme nahradiť sadzbou, ktorá k nej má časovo najbližšie. Jednou z možností je použiť sadzbu na jeden deň, napríklad sadzbu EONIA (Euro Overnight Index Average).



**Obr. 1.2:** Vývoj sadzby EONIA počas roku 2013. Zdroj: [15].

### 1.3 Iné deriváty úrokovej miery

Existujú ďalšie obchodovateľné deriváty, ktoré závisia od hodnoty úrokovej miery. Patria medzi ne okrem dlhopisov aj opcie na dlhopisy, swapy, forwardy, futurity, capy alebo floory. Mnohé sa používajú na zaistenie voči fluktuáciám vo vývoji úrokovej miery. Popis a oceňovanie týchto derivátov vie čitateľ nájsť v [4, 5].

## 2 Modely úrokových mier

Modely krátkodobých úrokových mier popisujú časovú štruktúru úrokových mier a zvyčajne sú modelované pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice:

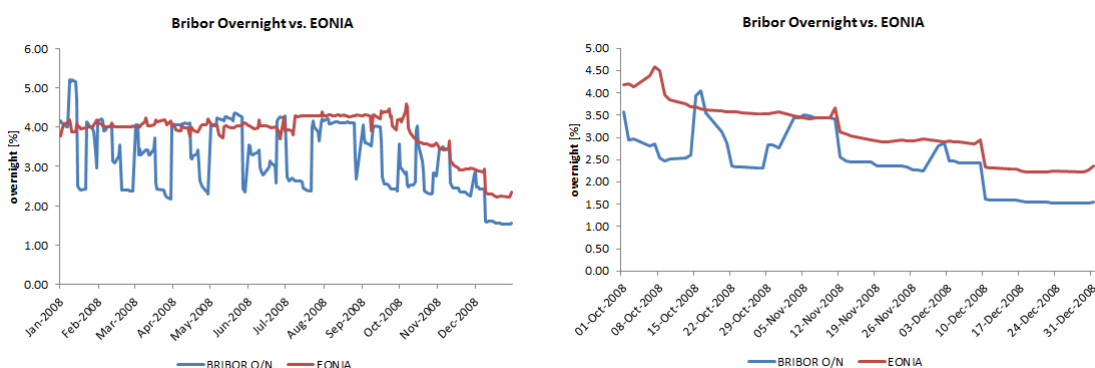
$$dX = \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dW, \quad (2.1)$$

kde  $W$  je Wienerov proces [5]. Funkcia  $\mu(X, t)$  znázorňuje drift (vychýlenie) a funkcia  $\sigma(X, t)$  znázorňuje fluktuácie v okolí driftu. Riešením rovnice (2.1) je proces  $X$ , ktorý opisuje správanie sa okamžitej úrokovej miery. Rozličnou voľbou funkcií  $\mu(X, t)$ ,  $\sigma(X, t)$  dostávame rôzne jednofaktorové (ak  $X$  je skalár), alebo viacfaktorové (ak  $X$  je vektor) modely úrokových mier. Prehľadné spracovanie jednotlivých špecifikácií modelov môže čitateľ pre jedno a dvojfaktorové modely nájsť v [5, 12, 2].

V našej práci sa budeme zaoberať trojfaktorovými konvergenčnými modelmi úrokovej miery (Vašíčkovho, CIR a CKLS typu). Modely budeme špecifikovať, odvodíme uzavreté formuly pre ceny dlhopisov a v prípade, kedy to nebude možné, odvodíme aproximačnú formulu pre cenu dlhopisu a aj rád presnosti.

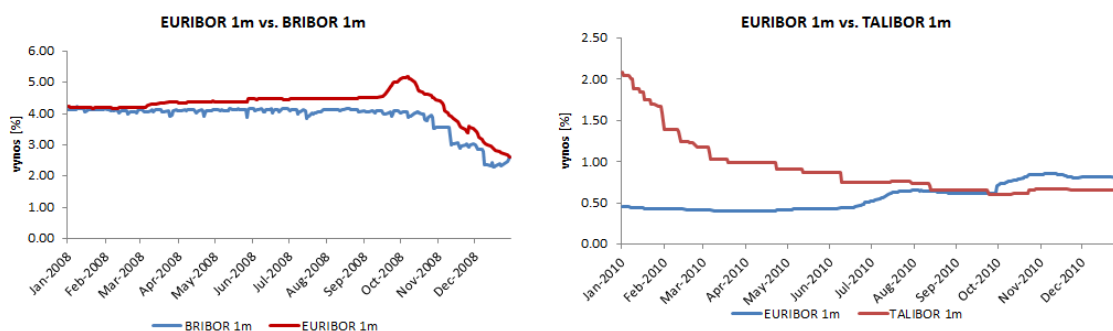
### 2.1 Konvergenčné modely úrokových mier

Konvergenčné modely su špeciálnym prípadom modelov úrokových mier. Popisujú správanie sa úrokovej miery krajiny, ktorá sa chystá vstúpiť do eurozóny. Na obrázku 2.1 je znázornený vývoj jednodňovej úrokovej miery Eonia a vývoj slovenskej jednodňovej úrokovej miery Bribor (Bratislava Interbank Offered Rate). Je si možné všimnúť konvergenciu úrokovej miery Bribor k miere Eonia. Konvergencia je zjavná najmä 3 mesiace, teda veľmi tesne, pred vstupom Slovenska do eurozóny. Na obrázku 2.2 vidíme porovnanie jednomesačných sadzieb Euribor a Bribor posledný rok pred



**Obr. 2.1:** Porovnanie jednodňových sadzieb (overnight) úrokových mier počas roku 2008. V pravom grafe je znázornený výsek pre posledné 3 mesiace pred vstupom Slovenska do eurozóny. Zdroj: [15, 16].

vstupom Slovenska do eurozóny a porovnanie sadzby Euribor s mesačnou sadzbou Talibor (Tallinn Interbank Offered Rate) rovnako rok predtým, ako eurozónu obohatilo Estónsko. V oboch prípadoch vieme pozorovať konvergenciu domácich (Bribor,



**Obr. 2.2:** Vývoj jednomesačných úrokových mier Euribor a Bribor, respektíve Talibor rok pred vstupom oboch krajín do eurozóny. Zdroj: [15, 16, 14].

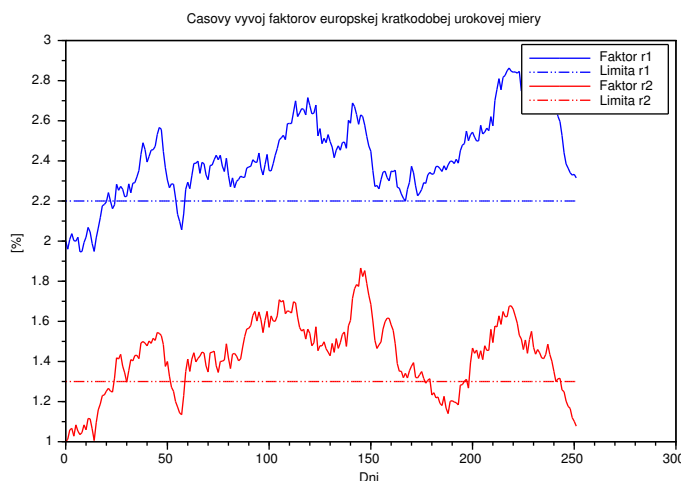
Talibor) úrokových mier k tej európskej (Euribor). Odteraz budeme pod pojmom domáca úroková miera rozumieť úrokovú mieru, ktorá sa časom priťahuje (konverguje) k európskej úrokovej miere. V konvergenčných modeloch tento predpoklad zabezpečíme špeciálnym tvarom stochastických diferenciálnych rovníc popisujúcich správanie sa oboch úrokových mier. Nasleduje predstavenie vybraných konvergenčných modelov.

## 2.2 Trojfaktorový konvergenčný model Vašíčkovho typu

Článok [9] predpokladá nasledovný model vývoja európskej  $r_e$  a domácej  $r_d$  okamžitej úrokovej miery. Európska úroková miera je modelovaná ako súčet dvoch faktorov  $r_e = r_1 + r_2$  s vlastnosťou návratu k strednej hodnote (proces má tendenciu sa priťahovať k danej strednej hodnote; ak je jeho aktuálna hodnota vyššia ako táto stredná hodnota, očakávame pokles hodnôt procesu a naopak). Domáca úroková miera je v tomto prípade modelovaná procesom, ktorý konverguje k vývoju európskej krátkodobej úrokovej miery. Vašíčkov konvergenčný model predpokladá konštantné volatility všetkých faktorov a môžeme ho zapísať nasledovným systémom stochastických diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1 dw_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2 dw_2, \\ dr_d &= \kappa_d((r_1 + r_2) - r_d)dt + \sigma_d dw_d, \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde  $\Sigma = Cov(dw) = dt\rho$  a  $dw = (dw_1, dw_2, dw_3)^T$  je vektor Wienerových procesov s korelačnou maticou  $\rho$ , ktorej prvky  $\rho_{ij}$  vyjadrujú korelácie medzi faktormi  $r_i$  a  $r_j$ .



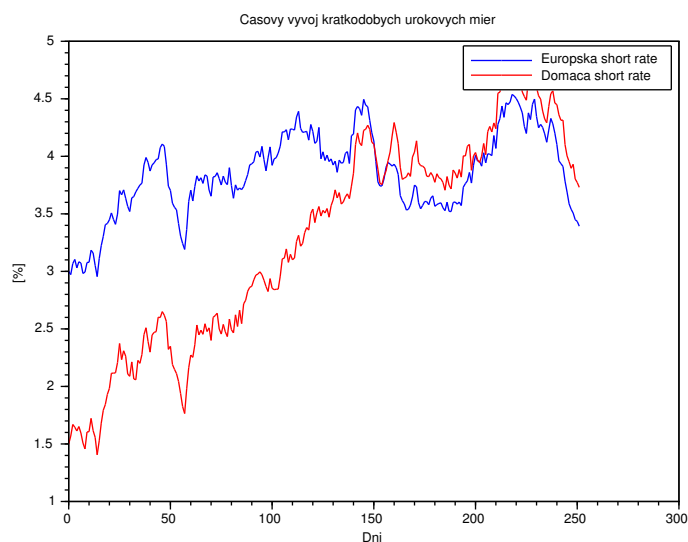
**Obr. 2.3:** Porovnanie vývoja faktorov európskej krátkodobej úrokovej miery s parametrami  $r_{10} = 0.02$ ,  $\kappa_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = 0.022$ ,  $\sigma_1 = 0.005$ ,  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $r_{20} = 0.01$ ,  $\kappa_2 = 1.5$ ,  $\theta_2 = 0.013$ ,  $\sigma_2 = 0.005$ ,  $\lambda_2 = 0.1$  a  $\rho_{12} = 0.7$ .

Na obrázku 2.3 je znázornený vývoj oboch faktorov európskej krátkodobej úrokovej miery. Vidíme, že oba sa snažia vrátiť k strednej hodnote, v našom prípade k parametrom  $\theta_1$  a  $\theta_2$ . Korelačný koeficient medzi oboma faktormi je pomerne vysoký a teda



vidíme príbuznosť v zmenách vývoja oboch faktorov.

V ďalšom grafe porovnáваме vývoj európskej a domácej úrokovej miery. Na obrázku



**Obr. 2.4:** Porovnanie vývoja faktorov európskej krátkodobej úrokovej miery a vývoja samotnej európskej a domácej úrokovej miery s parametrami  $r_{10} = 0.02$ ,  $\kappa_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = 0.022$ ,  $\sigma_1 = 0.005$ ,  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $r_{20} = 0.01$ ,  $\kappa_2 = 1.5$ ,  $\theta_2 = 0.013$ ,  $\sigma_2 = 0.005$ ,  $\lambda_2 = 0.1$ ,  $r_{d0} = 0.015$ ,  $\kappa_d = 1$ ,  $\sigma_d = 0.01$ ,  $\lambda_d = 0.1$  a koreláciami  $\rho_{12} = 0.7$ ,  $\rho_{1d} = 0.7$ ,  $\rho_{2d} = 0.8$ .

2.4 vidíme potvrdenie predpokladu o konvergencii domácej úrokovej miery k európskej. Podobné výkyvy vo vývoji úrokových mier sú následkom vysokých korelácií.

### 2.2.1 Pojem reálnej a rizikovo neutrálnej miery

Priebeh úrokovej miery charakterizovanej stochastickou diferenciálnou rovnicou môžeme analyzovať pomocou dvoch prístupov: v reálnej a rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere. Formulácia modelu v reálnej miere (napr. (2.2)) nám dovoľuje zachytiť napríklad vlastnosť návratu k strednej hodnote (mean-reversion). Rizikovo neutrálna miera pravdepodobnostná miera je definovaná ako miera, pri ktorej sa súčasná hodnota derivátu rovná očakávanej budúcej výplate vyplývajúcej z držania derivátu, diskontovanej bezrizikovou úrokovou mierou až do súčasnosti. Používa sa pri oceňovaní derivátov úrokových mier. Bolo by vhodné mať teda prevod medzi jednotlivými zápismi procesu. Uvedieme len okrajovú myšlienku, podrobnosti o zmene miery sa čitateľ dozvie

v [4, 12]. Dá sa ukázať, že ak formulujeme model v reálnej miere, musí existovať taká funkcia  $\lambda(r, t)$ , ktorá vyjadruje nárast výnosu dlhopisu na jednotku rizika. Nazývame ju trhovú cenu rizika a treba poznamenať, že je spoločná pre všetky dlhopisy a teda nezávisí od maturity dlhopisu.

Model úrokovej miery vieme teda zadať dvomi spôsobmi:

- v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice v reálnej miere s trhovou cenou rizika,
- v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice v rizikovo neutrálnej miere.

Platí, že volatily sú v oboch mierach rovnaké a pre drift platí nasledujúci vzťah:

$$(\text{rizikovo neutrálny drift}) = (\text{reálny drift}) - (\text{trhová cena rizika}) \times (\text{volatilita}). \quad (2.3)$$

Napríklad trojfaktorový Vašíčkov model definovaný v reálnej miere (2.2) vyzerá v rizikovo neutrálnej miere pri voľbe konštantných trhových cien rizika nasledovne:

$$\begin{aligned} dr_1 &= (\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1)dt + \sigma_1dw_1, \\ dr_2 &= (\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2)dt + \sigma_2dw_2, \\ dr_d &= (\kappa_d((r_1 + r_2) - r_d) - \lambda_d\sigma_d)dt + \sigma_d dw_d, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Analogicky sa dajú upraviť aj ostatné špecifikácie modelov. Nové tvary v rizikovo neutrálnej miere budeme využívať pri oceňovaní dlhopisov v kapitole 3.

### 2.2.2 Korelácia faktorov

Keďže v modeli predpokladáme korelácie medzi Wienerovými náhodnými procesmi, v krátkosti ukážeme, ako sa dajú generovať korelované náhodne premenné. Objasníme aj to, prečo nemôžeme zvoliť korelácie medzi jednotlivými faktormi ľubovoľné z intervalu  $(-1, 1)$ .

Pre vytvorenie korelovaných náhodných premenných, v našom prípade korelovaných Wienerových procesov s korelačnou maticou  $\rho$ , postupujeme nasledovne.

Najskôr vygenerujeme, v našom prípade 3, vektory nekorelovaných Wienerových procesov. Každý z vektorov je tvorený náhodným výberom z normálneho rozdelenia  $dw_i^{\text{nekor}} \sim \mathcal{N}(0, dt)$ . Následne nájdeme maticu  $\Sigma^{1/2}$ , ktorú označíme  $C$ , spĺňajúcu

$CC^T = \Sigma$ , kde matica  $\Sigma$  je daná vzťahom  $\Sigma = dt\rho$ . Vektor korelovaných Wienerových procesov je potom daný ako

$$\begin{pmatrix} dw_1^{kor} \\ dw_2^{kor} \\ dw_d^{kor} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} dw_1^{nekor} \\ dw_2^{nekor} \\ dw_d^{nekor} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Jednou z možností ako nájsť maticu  $C$  je Choleského rozklad v tvare  $\Sigma = CC^T$ , kde  $C$  je dolná trojuholníková matica s reálnymi, kladnými prvkami na diagonále. Podmienkou je, aby bola matica  $\Sigma$  kladne definitná. Toto je splnené ak je to kovariančná matica nedegerovaného náhodného vektora. V prípade simulácii na obrázkoch 2.3 a 2.4 je použitá nasledovná korelačná matica  $\rho$ :

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{1d} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{2d} \\ \rho_{d1} & \rho_{d2} & \rho_{dd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 1 & 0.8 \\ 0.7 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Zisťovanie definitnosti matice  $\rho$  je ekvivalentné so zisťovaním definitnosti matice  $\Sigma$ , keďže jedna je kladný násobok druhej. Na zistenie definitnosti matice použijeme Sylvestrovo kritérium [13], ktoré vraví, že matica je kladne definitná práve vtedy keď každý jej subdeterminant je kladný. V našom prípade skúmame tri subdeterminanty:

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{vmatrix} = 0.51 > 0, \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 1 & 0.8 \\ 0.7 & 0.8 & 1 \end{vmatrix} = 0.164 > 0. \end{aligned}$$

Keďže sú všetky tri subdeterminanty kladné, korelačná matica je kladne definitná a teda bolo použitie Choleského rozkladu možné. Kladná definitnosť korelačnej matice zaručuje možnosť rozkladu tejto matice na tvar  $\Sigma = CC^T$ . Treba si teda uvedomiť, že korelácie teda nemôžu byť ľubovoľné z intervalu  $(-1, 1)$ , lebo ľubovoľný výber týchto korelácií nezaručuje kladnú definitnosť korelačnej matice. Príklad korelačnej matice,

ktorá nie je kladne definitná je matica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.7 \\ 0.9 & 1 & 0.3 \\ 0.7 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jej subdeterminanty dosahujú hodnoty  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 0.19$ ,  $D_3 = -0.012$  a teda Choleského rozklad v tomto prípade nie je možný.

### 2.3 Trojfaktorový konvergenčný model CIR typu

Predpoklady o faktoroch a konvergencii sú rovnaké ako v časti 2.2, resp. článku [9]. Európska úroková miera je modelovaná ako súčet dvoch faktorov a domáca úroková miera konverguje k európskej. CIR (Cox–Ingersoll–Ross) na rozdiel od Vašíčkovho modelu (2.2) nepredpokladá konštantné volatility všetkých faktorov. V reálnej miere je tento model definovaný ako:

$$\begin{aligned} dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1\sqrt{r_1}dw_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2\sqrt{r_2}dw_2, \\ dr_d &= \kappa_d((r_1 + r_2) - r_d)dt + \sigma_d\sqrt{r_d}dw_d, \end{aligned} \tag{2.7}$$

kde  $\Sigma = Cov(dw) = dt\rho$  a  $dw = (dw_1, dw_2, dw_3)^T$  je vektor Wienerových procesov s korelačnou maticou  $\rho$ , ktorej prvky  $\rho_{ij}$  vyjadrujú korelácie medzi faktormi  $r_i$  a  $r_j$ . V článku [1] sa autori zaoberajú Vašíčkovým modelom a tvrdia, že výsledky sa dajú rozšíriť pre CIR model. V práci [3] je však ukázané, že ocenenie dlhopisu je možné len v prípade, ak sú diferenciály Wienerových procesov vstupujúce do (2.7) nekorelované. Preto budeme v ďalších častiach uvažovať len CIR model s nulovou koreláciou.

### 2.4 Trojfaktorový konvergenčný model CKLS typu

Predpoklady sú aj v tomto prípade rovnaké ako v časti 2.2, resp. v [9]. Európska úroková miera je modelovaná ako súčet dvoch faktorov a domáca úroková miera konverguje k európskej. CKLS (Chan, Karolyi, Longstaff a Sanders) model je všeobecnejší ako CIR

model (2.7) a v reálnej miere je daný systémom diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned}dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1 r_1^{\gamma_1} dw_1, \\dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2 r_2^{\gamma_2} dw_2, \\dr_d &= \kappa_d((r_1 + r_2) - r_d)dt + \sigma_d r_d^{\gamma_d} dw_d,\end{aligned}\tag{2.8}$$

kde  $\Sigma = Cov(dw) = dt\rho$  a  $dw = (dw_1, dw_2, dw_3)^T$  je vektor Wienerových procesov s korelačnou maticou  $\rho$ , ktorej prvky  $\rho_{ij}$  vyjadrujú korelácie medzi faktormi  $r_i$  a  $r_j$ . Ocenenie dlhopisu v tomto prípade nebude mať presné analytické riešenie. Preto navrhujeme aproximáciu a budeme zisťovať jej rád presnosti.

### 3 Odvodenia cien dlhopisov

Na vývoj úrokových mier sú úzko naviazané ceny a výnosy dlhopisov. Ak by sme mali analytické alebo numerické vyjadrenie cien a výnosov dlhopisov, mohli by sme ich porovnávať so skutočnými cenami a výnosmi na trhu. V prípade Vašíčkovho modelu sa ceny oboch dlhopisov v trojfaktorovom modeli dajú vyjadriť analyticky. V prípade CIR modelu vieme numericky vyjadriť cenu a výnos dlhopisu len v prípade nulovej korelácie. Pre každý z modelov budeme odvádzať cenu európskeho a cenu domáceho dlhopisu. Nasledujú odvodenia.

#### 3.1 Ceny dlhopisov pre model Vašíčkovho typu

##### Cena európskeho dlhopisu

Odvodenie ceny európskeho dlhopisu je ľahšie, lebo vychádza z odvodenia pre dvojfaktorový model. Pri odvodení budeme vychádzať z publikácií [2, 5]. Ak uvážime konštantné trhové ceny rizika a označíme tieto ceny ako  $\lambda_1(t, r_1, r_2) = \lambda_1$ ,  $\lambda_2(t, r_1, r_2) = \lambda_2$  dostávame pre európsky dlhopis parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu  $P = P(\tau, r_1, r_2)$ , kde  $\tau$  je ostávajúci čas do maturity ( $\tau = T - t$ ) v tvare:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial P}{\partial \tau} + [\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1]\frac{\partial P}{\partial r_1} + [\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2]\frac{\partial P}{\partial r_2} \\ & + \frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2}{\partial r_1\partial r_2} - (r_1 + r_2)P = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Cena dlhopisu v čase maturity (t.j.  $\tau = 0$ ) je rovná 1, a preto má počiatočná podmienka tvar  $P(0, r_1, r_2) = 1$  pre všetky  $r_1, r_2 > 0$ . Tento model je v rizikovo neutrálnej miere len redukciou systému (2.4):

$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_2, \\ dr_1 &= (\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1)dt + \sigma_1dw_1, \\ dr_2 &= (\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2)dt + \sigma_2dw_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (3.1) sa dá vyjadriť v tvare:

$$P(r_1, r_2, \tau) = P_1(r_1, \tau)P_2(r_2, \tau), \quad (3.3)$$

kde  $P_i$  je v tvare  $P_i = A_i(\tau)e^{-B_i(\tau)r_t}$ ,  $i = 1, 2$ .

Dosadením výrazu (3.3) do PDR (3.1), označením  $A = A_1A_2$  a následným derivovaním dostávame:

$$\begin{aligned} & -\dot{A} + \dot{B}_1Ar_1 + \dot{B}_2Ar_2 - [\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1]AB_1 - [\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2]AB_2 \\ & + \frac{\sigma_1^2}{2}AB_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2}AB_2^2 + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2AB_1B_2 - r_1A - r_2A = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Aby bola rovnica (3.4) splnená, musí platiť pre všetky  $r_1, r_2$  a teda

$$\begin{aligned} \dot{A} &= (\lambda_1\sigma_1 - \kappa_1\theta_1)AB_1 + (\lambda_2\sigma_2 - \kappa_2\theta_2)AB_2 + \frac{\sigma_1^2}{2}AB_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2}AB_2^2 + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2AB_1B_2, \\ \dot{B}_1 &= 1 - \kappa_1B_1, \\ \dot{B}_2 &= 2 - \kappa_2B_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Riešenie pre  $B_i$  ( $i = 1, 2$ ) vieme vyjadriť v tvare

$$B_i(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa_i\tau}}{\kappa_i}. \quad (3.6)$$

Ak využijeme počiatočnú podmienku  $A(0) = 1$  dostávame, že platí

$$\begin{aligned} \ln A(\tau) &= \int_0^\tau (\lambda_1\sigma_1 - \kappa_1\theta_1)B_1 + (\lambda_2\sigma_2 - \kappa_2\theta_2)B_2 + \frac{\sigma_1^2}{2}B_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2}B_2^2 \\ &+ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2B_1B_2 ds. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Po dosadení výrazu (3.6) do rovnice (3.7) pre funkciu  $\ln A(\tau)$  platí

$$\begin{aligned} \ln A(\tau) &= -\tau R_\infty - \frac{\sigma_1^2}{4\kappa_1^3}(1 - e^{-\kappa_1\tau})^2 - \frac{\sigma_2^2}{4\kappa_2^3}(1 - e^{-\kappa_2\tau})^2 \\ &+ (1 - e^{-\kappa_1\tau})\frac{1}{\kappa_1} \left( R_{\infty 1} \frac{\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\kappa_1\kappa_2} \right) + (1 - e^{-\kappa_2\tau})\frac{1}{\kappa_2} \left( R_{\infty 2} \frac{\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\kappa_1\kappa_2} \right) \\ &+ \frac{\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\kappa_1\kappa_2} \frac{(1 - e^{-(\kappa_1+\kappa_2)\tau})}{\kappa_1 + \kappa_2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

kde

$$R_{\infty i} = \theta_i - \frac{\lambda_i\sigma_i}{\kappa_i} - \frac{\sigma_i^2}{2\kappa_i^2} \quad \text{a} \quad R_\infty = R_{\infty 1} + R_{\infty 2} - \frac{\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\kappa_1\kappa_2}. \quad (3.9)$$

Pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli potom platí

$$P(r_1, r_2, \tau) = A(\tau)e^{-B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2}. \quad (3.10)$$

### Cena domáceho dlhopisu

Budeme vychádzať z článku [9], ktorý je logickým rozšírením odvodení v predchádzajúcej podkapitole. Označme trhové ceny rizika rovnako ako v prvom prípade  $\lambda_1(t, r_1, r_2, r_d) = \lambda_1$ ,  $\lambda_2(t, r_1, r_2, r_d) = \lambda_2$ ,  $\lambda_d(t, r_1, r_2, r_d) = \lambda_d$ . Model má v rizikovo neutrálnej miere tvar:

$$\begin{aligned} dr_1 &= (\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1)dt + \sigma_1dw_1, \\ dr_2 &= (\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2)dt + \sigma_2dw_2, \\ dr_d &= (\kappa_d((r_1 + r_2) - r_d) - \lambda_d\sigma_d)dt + \sigma_d dw_d, \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pre domáci dlhopis má parciálna diferenciálna rovnica pre cenu  $P = P(\tau, r_1, r_2, r_d)$  tvar:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + \mu_d \frac{\partial P}{\partial r_d} + \mu_2 \frac{\partial P}{\partial r_1} + \mu_3 \frac{\partial P}{\partial r_2} + \frac{\sigma_d^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} \\ + \rho_{1d}\sigma_d\sigma_1 \frac{\partial^2 P}{\partial r_d\partial r_1} + \rho_{2d}\sigma_d\sigma_2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_d\partial r_2} + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_1\partial r_2} - r_d P = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

kde

$$\mu_d = a_1 + a_2 r_d + a_3 r_1 + a_4 r_2, \mu_2 = b_1 + b_2 r_1, \mu_3 = c_1 + c_2 r_2, \quad (3.13)$$

pričom pre rizikovo neutrálne drifts (3.13) platí:

$$a_1 = -\lambda_d\sigma_d, a_2 = -\kappa_d, a_3 = a_4 = \kappa_d, b_1 = \kappa_1\theta_1 - \lambda_1\sigma_1, b_2 = -\kappa_1, c_1 = \kappa_2\theta_2 - \lambda_2\sigma_2, c_2 = -\kappa_2. \quad (3.14)$$

Riešenie tejto parciálnej diferenciálnej rovnice sa dá vyjadriť v tvare

$$P(r_d, r_1, r_2, \tau) = e^{A(\tau)r_d + B(\tau)r_1 + C(\tau)r_2 + D(\tau)}. \quad (3.15)$$

Vo Vašíčkovom modeli sa dajú funkcie  $A, B, C, D$  napísať v tvare explicitných riešení sústavy obyčajných diferenciálnych rovníc. Dosadením tvaru riešenia (3.15) a driftov (3.13) do PDR (3.12) dostávame:

$$\begin{aligned} r_d(-\dot{A} + a_2 A - 1) + r_1(-\dot{B} - a_3 A + b_2 B) + r_2(-\dot{C} + a_4 A + c_2 C) \\ + (-\dot{D} + a_1 A + b_1 B + c_1 C + \frac{\sigma_d^2}{2} A^2 + \frac{\sigma_1^2}{2} B^2 + \frac{\sigma_2^2}{2} C^2) \\ + \rho_{1d}\sigma_1\sigma_d AB + \rho_{2d}\sigma_2\sigma_d AC + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 BC = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$



Aby bola rovnica (3.16) splnená musíme každý výraz v zátvorkách položiť rovný 0. Dostávame tak systém obyčajných diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned}
 \dot{A} &= a_2A - 1, \\
 \dot{B} &= a_3A + b_2B, \\
 \dot{C} &= a_4A + c_2C, \\
 \dot{D} &= a_1A + b_1B + c_1C + \frac{\sigma_d^2}{2}A^2 + \frac{\sigma_1^2}{2}B^2 + \frac{\sigma_2^2}{2}C^2 + \rho_{1d}\sigma_1\sigma_dAB + \rho_{2d}\sigma_2\sigma_dAC \\
 &\quad + \rho_{12}\sigma_1\sigma_2BC.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Cena dlhopisu v čase maturity  $\tau = 0$  je rovná 1, a preto sú počiatočné podmienky sústavy ODR (3.17)  $A(0) = B(0) = C(0) = D(0) = 0$ . Riešenie sústavy sa dá vyjadriť nasledovne. Predpokladajme ale, že  $a_2 \neq b_2$  a  $a_2 \neq c_2$ ; teda sa nebudeme zaoberať špeciálnym prípadom, kedy sú koeficienty rovnaké.

$$\begin{aligned}
 A(\tau) &= \frac{1 - e^{a_2\tau}}{a_2}, \\
 B(\tau) &= \frac{a_3(b_2(1 - e^{a_2\tau}) - a_2(1 - e^{b_2\tau}))}{a_2b_2(a_2 - b_2)}, \\
 C(\tau) &= \frac{a_4(c_2(1 - e^{a_2\tau}) - a_2(1 - e^{c_2\tau}))}{a_2c_2(a_2 - c_2)}, \\
 D(\tau) &= \int_0^\tau \dot{D}(s)ds.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Funkciu D vieme explicitne vyjadriť integrovaním. Výpočet integrálu je zdĺhavý a preto ho uvádzame v prílohe.

## 3.2 Ceny dlhopisov pre model CIR typu s nulovou koreláciou

### Cena európskeho dlhopisu

Aj v tomto prípade budeme postupovať podľa publikácie [5]. Pre trhové ceny rizika v tvare  $\lambda_1(t, r_1, r_2) = \lambda_1\sqrt{r_1}$ ,  $\lambda_2(t, r_1, r_2) = \lambda_2\sqrt{r_2}$  má model v rizikovo neutrálnej miere špecifikáciu:

$$\begin{aligned}
 r &= r_1 + r_2, \\
 dr_1 &= (\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1r_1)dt + \sigma_1\sqrt{r_1}dw_1, \\
 dr_2 &= (\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2r_2)dt + \sigma_2\sqrt{r_2}dw_2.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

PDR pre tento typ dlhopisu je v tvare:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial P}{\partial \tau} + [\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1r_1]\frac{\partial P}{\partial r_1} + [\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2r_2]\frac{\partial P}{\partial r_2} \\
 & + \frac{\sigma_1^2}{2}r_1\frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}r_2\frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} - (r_1 + r_2)P = 0
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

so začiatočnou podmienkou  $P(r_1, r_2, 0) = 1$  pre každé  $r_1, r_2 > 0$ . Pre trhové ceny rizika v tvare  $\lambda_1(t, r_1, r_2) = \lambda_1\sqrt{r_1}$ ,  $\lambda_2(t, r_1, r_2) = \lambda_2\sqrt{r_2}$  hľadáme rovnako riešenie v tvare

$$P(r_1, r_2, \tau) = P_1(r_1, \tau)P_2(r_2, \tau), \tag{3.21}$$

kde  $P_i = A_i(\tau)e^{-B_i(\tau)r_i}$ ,  $i = 1, 2$ , pričom funkcie  $A, B$  splňajú začiatočné podmienky  $A(0) = 1$ ,  $B(0) = 1$ . Dosadením tohto tvaru do (3.20) dostávame rovnosti

$$\begin{aligned}
 & (-\dot{A}_1 - \kappa_1\theta_1A_1B_1) + (\dot{B}_1 + (\kappa_1 + \lambda_1\sigma_1)B_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}B_1^2 - 1)A_1r_1 = 0, \\
 & (-\dot{A}_2 - \kappa_2\theta_2A_2B_2) + (\dot{B}_2 + (\kappa_2 + \lambda_2\sigma_2)B_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}B_2^2 - 1)A_2r_2 = 0,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

ktoré musia platiť pre všetky  $r_1, r_2 > 0, \tau > 0$ . Keďže riešenia pre obe rovnice sú analogické, odvodíme riešenie len pre prvý faktor. Riešime systém rovníc, ktorý spoločne s počiatočnými podmienkami tvorí systém obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned}
 & -\dot{A}_1 - \kappa_1\theta_1A_1B_1 = 0, \\
 & \dot{B}_1 + (\kappa_1 + \lambda_1\sigma_1)B_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}B_1^2 - 1 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Po separácii, integrovaní, ďalšom postupe rovnako ako v [5] a označení  $\psi_1 = \kappa_1 + \lambda_1\sigma_1$ ,  $\phi_1 = \sqrt{(\kappa_1 + \lambda_1\sigma_1)^2 + 2\sigma_1^2}$  dostaneme, že

$$\begin{aligned}
 A_1(\tau) &= \left( \frac{2\phi_1 e^{(\phi_1 + \psi_1)\tau/2}}{(\psi_1 + \phi_1)(e^{\phi_1\tau} - 1) + 2\phi_1} \right)^{\frac{2\kappa_1\theta_1}{\sigma_1^2}}, \\
 B_1(\tau) &= \frac{2(e^{\phi_1\tau} - 1)}{(\psi_1 + \phi_1)(e^{\phi_1\tau} - 1) + 2\phi_1}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Dosadením funkcií do vyjadrenia (3.21) dostávame požadovanú cenu dlhopisu opäť v tvare (3.10), pričom  $A(\tau) = A_1(\tau)A_2(\tau)$ .

### Cena domáceho dlhopisu

Postup tiež preberáme z publikácie [9]. Označme trhové ceny rizika  $\lambda_1(t, r_1, r_2, r_d) = \lambda_1\sqrt{r_1}$ ,  $\lambda_2(t, r_1, r_2, r_d) = \lambda_2\sqrt{r_2}$ ,  $\lambda_d(t, r_1, r_2, r_d) = \lambda_d\sqrt{r_d}$ . Model má v rizikovo ne-

utrálnej miere tvar:

$$\begin{aligned} dr_1 &= (\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1r_1)dt + \sigma_1\sqrt{r_1}dw_1, \\ dr_2 &= (\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2r_2)dt + \sigma_2\sqrt{r_2}dw_2, \\ dr_d &= (\kappa_d((r_1 + r_2) - r_d) - \lambda_d\sigma_dr_d)dt + \sigma_d\sqrt{r_d}dw_d, \end{aligned} \quad (3.25)$$

pričom pre domáci dlhopis má parciálna diferenciálna rovnica pre cenu  $P = P(\tau, r_1, r_2, r_d)$

tvar:

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + \mu_d \frac{\partial P}{\partial r_d} + \mu_2 \frac{\partial P}{\partial r_1} + \mu_3 \frac{\partial P}{\partial r_2} + \frac{\sigma_d^2}{2} r_d \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_1^2}{2} r_1 \frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} r_2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} - r_d P = 0, \quad (3.26)$$

kde

$$\mu_d = a_1 + a_2 r_d + a_3 r_1 + a_4 r_2, \mu_2 = b_1 + b_2 r_1, \mu_3 = c_1 + c_2 r_2, \quad (3.27)$$

a kde pre rizikovo neutrálne driftы(4.3) platí

$$a_1 = 0, a_2 = -\kappa_d - \sigma_d \lambda_d, a_3 = a_4 = \kappa_d, b_1 = \kappa_1 \theta_1, b_2 = -\kappa_1 - \lambda_1 \sigma_1, c_1 = \kappa_2 \theta_2, c_2 = -\kappa_2 - \lambda_2 \sigma_2. \quad (3.28)$$

Po dosadení riešenia v predpokladanom tvare (3.15) do (3.26) dostávame rovnicu:

$$\begin{aligned} r_d(-\dot{A} + a_2 A + \frac{\sigma_d^2}{2} A^2 - 1) + r_1(-\dot{B} + a_3 A + b_2 B + \frac{\sigma_1^2}{2} B^2) \\ + r_2(-\dot{C} + a_4 A + c_2 C + \frac{\sigma_2^2}{2} C^2) + (-\dot{D} + a_1 A + b_1 B + c_1 C) = 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

ktorá implikuje systém obyčajných diferenciálnych rovníc

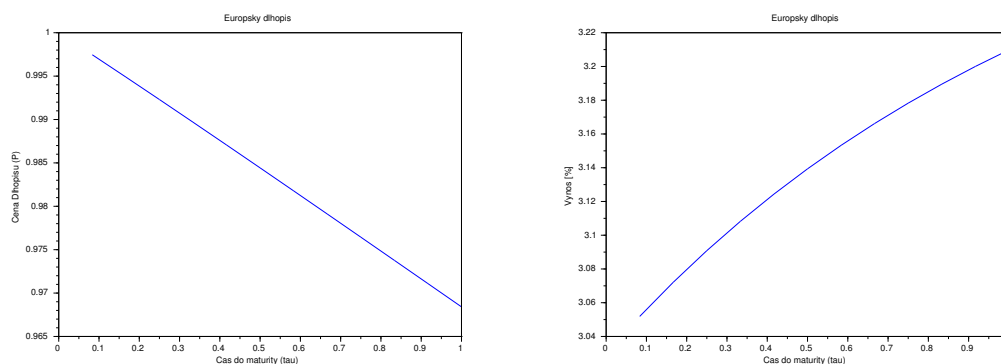
$$\begin{aligned} \dot{A} &= a_2 A + \frac{\sigma_d^2}{2} A^2 - 1, \\ \dot{B} &= a_3 A + b_2 B + \frac{\sigma_1^2}{2} B^2, \\ \dot{C} &= a_4 A + c_2 C + \frac{\sigma_2^2}{2} C^2, \\ \dot{D} &= a_1 A + b_1 B + c_1 C, \end{aligned} \quad (3.30)$$

s počiatočnou podmienkou  $A(0) = B(0) = C(0) = D(0) = 0$ . Tento systém vieme riešiť numericky pomocou príkazu *ode* [19] v programe Scilab. Solver automaticky vyberá vhodnejšiu z nasledovných metód: Adamsova metóda prediktor-korektor a viackroková metóda spätných diferencií.

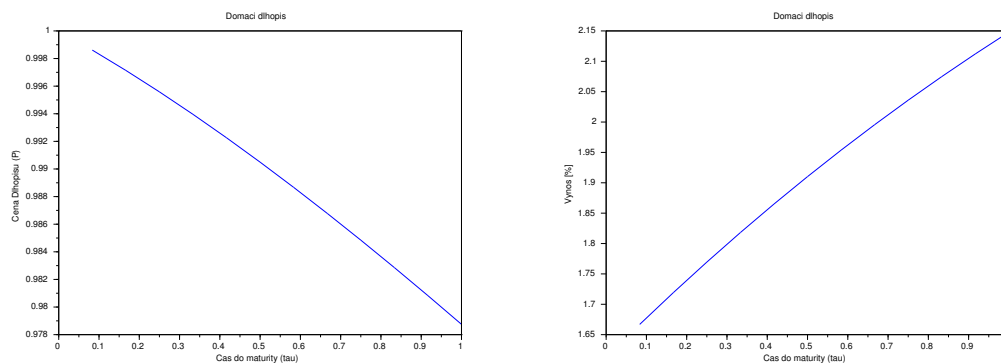
### 3.3 Časová štruktúra úrokových mier pre model Vašíčkovho typu

Keďže sme v predchádzajúcej časti odvodili vzorce pre ceny dlhopisov, pozrieme sa na priebehy cien v čase a vývoj im prislúchajúcich výnosových kriviek a budeme skúmať, ako sa tieto krivky zmenia, ak by sme zvolili nulové korelácie medzi jednotlivými faktormi vo Vašíčkovom modeli.

Parametre sú zvolené rovnako ako v kapitole 2.2 t.j.  $\kappa_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = 0.022$ ,  $\sigma_1 = 0.005$ ,  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $r_{20} = 0.01$ ,  $\kappa_2 = 1.5$ ,  $\theta_2 = 0.013$ ,  $\sigma_2 = 0.005$ ,  $\lambda_2 = 0.1$ ,  $r_{d0} = 0.015$ ,  $\kappa_d = 1$ ,  $\sigma_d = 0.01$ ,  $\lambda_d = 0.1$  a  $\rho_{12} = 0.7$ ,  $\rho_{1d} = 0.7$ ,  $\rho_{2d} = 0.8$ . Ceny a výnosy európskych a domácich dlhopisov pre okamžitú úrokovú mieru v prvý a piaty deň sú znázornené na obrázkoch 3.1 a 3.2.



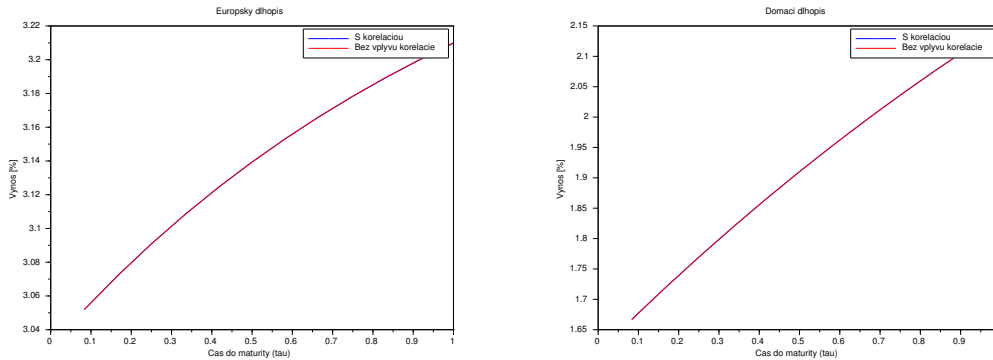
**Obr. 3.1:** Cena a výnos európskeho dlhopisu pre okamžitú úrokovú mieru v piaty deň.



**Obr. 3.2:** Cena a výnos domáceho dlhopisu pre okamžitú úrokovú mieru v piaty deň.

### 3.3.1 Prípád nulovej korelácie faktorov

Na grafoch v obrázku 3.3 vidíme porovnanie výnosov európskeho a domáceho dlhopisu v prítomnosti korelácie a bez nej. V tabuľke 3.1 vidíme porovnanie jednotlivých výnosov.



**Obr. 3.3:** Výnosy európskeho a domáceho dlhopisu pre okamžitú úrokovú mieru v piaty deň s koreláciou a bez jej vplyvu.

Rozdiely sú však v absolútnej hodnote rádu až  $10^{-6}$ , čo by sme mohli považovať za

Maturita	Európsky dlhopis			Domáci dlhopis		
	Výnos [%] (kor.)	Výnos [%] (Bez kor.)	Rozdiel [%]	Výnos [%] (kor.)	Výnos [%] (Bez kor.)	Rozdiel [%]
$\frac{1}{12}$	3.0518817	3.0518854	- 0.037E-04	1.6668848	1.6668853	- 0.005E-04
$\frac{2}{12}$	3.0721208	3.0721346	- 0.137E-04	1.7190598	1.7190635	- 0.037E-04
$\frac{3}{12}$	3.0908661	3.0908946	- 0.285E-04	1.76945	1.7694617	- 0.116E-04
$\frac{4}{12}$	3.1082436	3.1082905	- 0.469E-04	1.8180791	1.8181047	- 0.256E-04
$\frac{5}{12}$	3.1243679	3.1244357	- 0.678E-04	1.8649765	1.8650228	- 0.463E-04
$\frac{6}{12}$	3.1393428	3.1394335	- 0.906E-04	1.9101766	1.9102509	- 0.743E-04
$\frac{7}{12}$	3.1532631	3.1533777	- 1.146E-04	1.9537179	1.9538276	- 1.097E-04
$\frac{8}{12}$	3.1662149	3.1663542	- 1.393E-04	1.9956421	1.9957944	- 1.523E-04
$\frac{9}{12}$	3.1782765	3.1784408	- 1.643E-04	2.0359931	2.0361949	- 2.018E-04
$\frac{10}{12}$	3.1895195	3.1897088	- 1.893E-04	2.0748167	2.0750745	- 2.578E-04
$\frac{11}{12}$	3.200009	3.200223	- 2.14E-04	2.1121599	2.1124796	- 3.198E-04
1	3.2098044	3.2100428	- 2.384E-04	2.1480703	2.1484575	- 3.873E-04

**Tabuľka 3.1:** Porovnanie výnosov dlhopisov v prípade korelácie  $\rho_{12} = 0.7$ ,  $\rho_{1d} = 0.7$ ,  $\rho_{2d} = 0.8$  a bez jej vplyvu.

zanedbateľné. Pri samotnej kalibrácii modelu sa budeme na tento poznatok odvolávať. Odhadovanie parametrov korelácie nemá v konečnom dôsledku žiaden vplyv na ostatné parametre a robili by kalibráciu zložitejšou.

## 4 Aproximácia ceny dlhopisu v trojfaktorovom konvergenčnom modeli

V nasledujúcej časti odvodíme aproximáciu CKLS modelu. Pre CIR model s nulovou koreláciou poznáme analyticky presné riešenie, takže porovnaním s aproximáciou pre CKLS model zistíme presnosť aproximácie pre tento prípad. Odvodíme aj presnosť aproximácie pre všeobecný CKLS model. CKLS model je v rizikovo neutrálnej miere je daný nasledovným systémom stochastických diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} dr_1 &= (b_1 + b_2 r_1)dt + \sigma_1 r_1^{\gamma_1} dw_1, \\ dr_2 &= (c_1 + c_2 r_2)dt + \sigma_2 r_2^{\gamma_2} dw_2, \\ dr_d &= (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_1 + a_4 r_2)dt + \sigma_d r_d^{\gamma_d} dw_d, \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde  $\Sigma = Cov(dw) = dt\rho$  a  $dw = (dw_1, dw_2, dw_d)^T$  je vektor Wienerových procesov s korelačnou maticou  $\rho$ , ktorej prvky  $\rho_{ij}$  vyjadrujú korelácie medzi faktormi  $r_i$  a  $r_j$ . Parciálna diferenciálna rovnica, ktorú musí spĺňať riešenie pre cenu dlhopisu v tomto modeli, má tvar:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial P}{\partial \tau} + \mu_d \frac{\partial P}{\partial r_d} + \mu_2 \frac{\partial P}{\partial r_1} + \mu_3 \frac{\partial P}{\partial r_2} + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d^2} + \frac{\sigma_1^2 r_1^{2\gamma_1}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_2^2 r_2^{2\gamma_2}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} \\ & + \rho_{1d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d \partial r_1} + \rho_{2d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_d \partial r_2} \\ & + \rho_{12} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_1 \partial r_2} - r_d P = 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

pričom pre rizikovo neutrálne drifts platí:

$$\mu_d = a_1 + a_2 r_d + a_3 r_1 + a_4 r_2, \mu_2 = b_1 + b_2 r_1, \mu_3 = c_1 + c_2 r_2. \tag{4.3}$$

Na rozdiel od Vašíčkovho modelu v tomto prípade však uvedená PDR pre cenu dlhopisu nemá presné analytické riešenie. Z toho dôvodu by sme radi toto riešenie aproximovali. V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať aproximáciou riešenia a rádom jej presnosť v tvare  $\ln P^{approx} - \ln P^{presne}$ . Tento rád presnosti bol pre CIR model s nulovou koreláciou odvodený v [9]. Ako základ posluží aproximácia ceny dlhopisu v jednofaktorovom CKLS modeli, ktorú autorka navrhla v [7]. Pre trojfaktorový model budeme postupovať analogicky. Aproximáciu navrhujeme tak, že členy  $\sigma_d, \sigma_1, \sigma_2$  v riešení pre

trojfaktorový model Vašíčkovho typu (3.17) nahradíme členmi  $\sigma_d r_d^{\gamma_d}, \sigma_1 r_1^{\gamma_1}, \sigma_2 r_2^{\gamma_2}$ . Aproximované riešenie pre cenu dlhopisu bude mať tvar

$$P(r_d, r_1, r_2, \tau) = e^{A(\tau)r_d + B(\tau)r_1 + C(\tau)r_2 + D(\tau)}, \quad (4.4)$$

kde

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \frac{1 - e^{a_2\tau}}{a_2}, \\ B(\tau) &= \frac{a_3(b_2(1 - e^{a_2\tau}) - a_2(1 - e^{b_2\tau}))}{a_2 b_2 (a_2 - b_2)}, \\ C(\tau) &= \frac{a_4(c_2(1 - e^{a_2\tau}) - a_2(1 - e^{c_2\tau}))}{a_2 c_2 (a_2 - c_2)}, \\ D(\tau) &= \int_0^\tau a_1 A(s) + b_1 B(s) + c_1 C(s) + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} A^2(s) + \frac{\sigma_1^2 r_1^{2\gamma_1}}{2} B^2(s) + \frac{\sigma_2^2 r_2^{2\gamma_2}}{2} C^2(s) \\ &\quad + \rho_{1d} \sigma_1^{\gamma_1} \sigma_d^{\gamma_d} A(s) B(s) + \rho_{2d} \sigma_2^{\gamma_2} \sigma_d^{\gamma_d} A(s) C(s) + \rho_{12} \sigma_1^{\gamma_1} \sigma_2^{\gamma_2} B(s) C(s) ds. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Teraz vypočítame jednotlivé derivácie funkcií  $A(\tau), B(\tau), C(\tau), D(\tau)$ , daných predpisom (4.5), aby sme mohli vyjadriť Taylorov rozvoj logaritmu aproximatívnej ceny dlhopisu.

i-ta derivacia	0	1	2	3	4
$A^i(0)$	0	-1	$-a_2$	$-a_2^2$	$-a_2^3$
$B^i(0)$	0	0	$-a_3$	$-a_3(a_2 + b_2)$	$-a_3 b_2 (a_2 + b_2) - a_2^2 a_3$
$C^i(0)$	0	0	$-a_4$	$-a_4(a_2 + c_2)$	$-a_4 c_2 (a_2 + c_2) - a_2^2 a_4$
$D^i(0)$	0	0	$-a_1$	$-a_4 c_1 - a_3 b_1 - a_1 a_2 + r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2$	$-a_4 c_1 (a_2 + c_2) - a_3 b_1 (a_2 + b_2) - a_1 a_2^2 + 3a_2 r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 + 3a_4 \rho_{2d} \sigma_2^{\gamma_2} \sigma_d^{\gamma_d} r_d^{\gamma_d} + 3a_3 \rho_{1d} \sigma_1^{\gamma_1} \sigma_d^{\gamma_d} r_d^{\gamma_d}$

**Tabuľka 4.1:** i-te derivácie funkcií  $A, B, C, D$  (4.5) pre aproximáciu CKLS modelu

Zlogaritmovaním oboch strán rovnice (3.15) dostávame, že logaritmus ceny dlhopisu je  $\ln P = A(\tau)r_d + B(\tau)r_1 + C(\tau)r_2 + D(\tau)$ . Taylorov rozvoj štvrtého rádu sa dá vyjadriť

nasledovne:

$$\begin{aligned}
 \ln P &= A(\tau)r_d + B(\tau)r_1 + C(\tau)r_2 + D(\tau) \\
 &= (A(0)r_d + B(0)r_1 + C(0)r_2 + D(0)) + (\dot{A}(0)r_d + \dot{B}(0)r_1 + \dot{C}(0)r_2 + \dot{D}(0))\tau \\
 &\quad + \frac{1}{2}(A^{(2)}(0)r_d + B^{(2)}(0)r_1 + C^{(2)}(0)r_2 + D^{(2)}(0))\tau^2 \\
 &\quad + \frac{1}{6}(A^{(3)}(0)r_d + B^{(3)}(0)r_1 + C^{(3)}(0)r_2 + D^{(3)}(0))\tau^3 \\
 &\quad + \frac{1}{24}(A^{(4)}(0)r_d + B^{(4)}(0)r_1 + C^{(4)}(0)r_2 + D^{(4)}(0))\tau^4 + o(\tau^4)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dosadením hodnôt z tabuľky 4.1 do vyjadrenia (4.6) dostávame:

$$\begin{aligned}
 \ln P^{apr} &= -r_d\tau - \frac{1}{2}(a_1 + a_2r_d + a_3r_1 + a_4r_2)\tau^2 \\
 &\quad - \frac{1}{6}(a_2^2r_d + a_3(a_2 + b_2)r_1 + a_4(a_2 + c_2)r_2 + a_4c_1 + a_3b_1 + a_1a_2 - r_d^{2\gamma_d}\sigma_d^2)\tau^3 \\
 &\quad - \frac{1}{24}(a_2^3r_d + (a_3b_2(a_2 + b_2) + a_2^2a_3)r_1 + (a_4c_2(a_2 + c_2) + a_2^2a_4)r_2 + a_4c_1(a_2 + c_2) \\
 &\quad + a_3b_1(a_2 + b_2) + a_1a_2^2 - 3a_2r_d^{2\gamma_d}\sigma_d^2 - 3a_4\rho_{2d}\sigma_2r_2^{\gamma_2}\sigma_dr_d^{\gamma_d} - 3a_3\rho_{1d}\sigma_1r_2^{\gamma_1}\sigma_dr_d^{\gamma_d})\tau^4 \\
 &\quad + o(\tau^4)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Pre úrokovú mieru platí

$$\begin{aligned}
 R^{apr}(t, T) &= -\frac{\ln P^{apr}}{\tau} = r_d + \frac{1}{2}(a_1 + a_2r_d + a_3r_1 + a_4r_2)\tau \\
 &\quad + \frac{1}{6}(a_2^2r_d + a_3(a_2 + b_2)r_1 + a_4(a_2 + c_2)r_2 + a_4c_1 + a_3b_1 + a_1a_2 - r_d^{2\gamma_d}\sigma_d^2)\tau^2 \\
 &\quad + \frac{1}{24}(a_2^3r_d + (a_3b_2(a_2 + b_2) + a_2^2a_3)r_1 + (a_4c_2(a_2 + c_2) + a_2^2a_4)r_2 + a_4c_1(a_2 + c_2) \\
 &\quad + a_3b_1(a_2 + b_2) + a_1a_2^2 - 3a_2r_d^{2\gamma_d}\sigma_d^2 - 3a_4\rho_{2d}\sigma_2r_2^{\gamma_2}\sigma_dr_d^{\gamma_d} - 3a_3\rho_{1d}\sigma_1r_2^{\gamma_1}\sigma_dr_d^{\gamma_d})\tau^3 \\
 &\quad + o(\tau^3)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Aproximácia výnosovej krivky začína po správnosti z  $r_d$ . Pre  $\tau = 0$  ide o okamžitú domácu úrokovú mieru.



## 4.1 Aproximácia a jej prenosť pre CIR model s nulovou ko-reláciou

Presné riešenie pre cenu dlhopisu v CIR modeli je dané systémom (3.30). Pre zistenie vyjadrenia aproximácie CIR modelu nám stačí do vyjadrenia (4.7) dosadiť parametre  $\gamma_i = \frac{1}{2}$  a  $\rho_{ij} = 0$ . Táto aproximácia bola urobená v článku [9].

### Rozvoj presného riešenia pre CIR model

Cena dlhopisu pre tento model je v tvare  $P = e^{A(\tau)r_d + B(\tau)r_1 + C(\tau)r_2 + D(\tau)}$ , kde funkcie  $A, B, C, D$  sú dané ako riešenia nasledovnej sústavy obyčajných diferenciálnych rovníc (3.30):

$$\begin{aligned} \dot{A} &= a_2A + \frac{\sigma_d^2}{2}A^2 - 1 \\ \dot{B} &= a_3A + b_2B + \frac{\sigma_1^2}{2}B^2 \\ \dot{C} &= a_4A + c_2C + \frac{\sigma_2^2}{2}C^2 \\ \dot{D} &= a_1A + b_1B + c_1C \end{aligned} \tag{4.9}$$

s počiatočnými podmienkami  $A(0) = B(0) = C(0) = D(0) = 0$ . Pomocou týchto vieme iteratívne dosadzovaním do sústavy (4.9) vypočítať potrebné derivácie.

$$\begin{aligned} A^{(1)}(0) &= a_2A(0) + \frac{\sigma_d^2}{2}A^2(0) - 1 = -1 \\ B^{(1)}(0) &= a_3A(0) + b_2B(0) + \frac{\sigma_1^2}{2}B^2(0) = 0 \\ A^{(2)}(0) &= a_2A^{(1)}(0) + \sigma_d^2(A(0)A^{(1)}(0)) = -a_2 \\ B^{(2)}(0) &= a_3A^{(1)}(0) + b_2B^{(1)}(0) + \sigma_1^2(B(0)B^{(1)}(0)) = -a_3 \\ A^{(3)}(0) &= a_2A^{(2)}(0) + \sigma_d^2(2A^{(1)}(0) + A(0)A^{(2)}(0)) = -a_2 + \sigma_d^2 \\ B^{(3)}(0) &= a_3A^{(2)}(0) + b_2B^{(2)}(0) + \sigma_1^2(2B^{(1)}(0) + B(0)B^{(2)}(0)) = -a_3a_2 - a_3b_2 \\ A^{(4)}(0) &= a_2A^{(3)}(0) + \sigma_d^2(2A^{(2)}(0) + A^{(1)}(0)A^{(2)}(0) + A^{(1)}(0)A^{(3)}(0)) = -a_2^3 + 4a_2\sigma_d^2 \\ B^{(4)}(0) &= a_3A^{(3)}(0) + b_2B^{(3)}(0) + \sigma_1^2(2B^{(2)}(0) + B^{(1)}(0)B^{(2)}(0) + B^{(1)}(0)B^{(3)}(0)) \\ &= -a_2^2a_3 - a_2a_3b_2 - a_3b_2^2 - \sigma_1^2a_3 = -a_3b_2(a_2 + b_2) - a_2^2a_3 + a_3\sigma_1^2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Derivácie pre funkciu  $C$  sú analogické s výpočtom pre funkciu  $B$ . Pre funkciu  $D$  sa dajú ľahko dorátať pomocou  $A, B, C$ . Všetky derivácie sú zhrnuté v tabuľke 4.2. Dosadením

4 APROXIMÁCIA CENY DLHOPISU V TROJFAKTOROVOM  
KONVERGENČNOM MODELI

i-ta derivacia	0	1	2	3	4
$A^i(0)$	0	-1	$-a_2$	$-a_2^2 + \sigma_d^2$	$-a_2^3 + 4a_2\sigma_d^2$
$B^i(0)$	0	0	$-a_3$	$-a_3(a_2 + b_2)$	$-a_3b_2(a_2 + b_2) - a_2^2a_3 + a_3\sigma_d^2$
$C^i(0)$	0	0	$-a_4$	$-a_4(a_2 + c_2)$	$-a_4c_2(a_2 + c_2) - a_2^2a_4 + a_4\sigma_d^2$
$D^i(0)$	0	0	$-a_1$	$-a_4c_1 - a_3b_1 - a_1a_2$	$-a_4c_1(a_2 + c_2) - a_3b_1(a_2 + b_2) - a_1a_2^2 + a_1\sigma_d^2$

**Tabuľka 4.2:** i-te derivácie funkcií  $A, B, C, D$  daných systémom (4.9) pre CIR model s nulovou koreláciou

do vyjadrenia Taylorovho rozvoja (4.6) dostávame výraz pre rozvoj presného riešenia CIR modelu s nulovou koreláciou  $\ln P^{CIR, \rho=0}$ .

$$\begin{aligned}
 \ln P^{CIR, \rho=0} &= -r_d\tau + \frac{1}{2}(-a_1 - a_2r_d - a_3r_1 - a_4r_2)\tau^2 \\
 &+ \frac{1}{6}((-a_2^2 + \sigma_d^2)r_d + (-a_4c_1 - a_3b_1 - a_1a_2) + (-a_3(a_2 + b_2))r_1 + (-a_4(a_2 + c_2))r_2)\tau^3 \\
 &+ \frac{1}{24}((-a_2^3 + 4a_2\sigma_d^2)r_d + (-a_3b_2(a_2 + b_2) - a_2^2a_3 + a_3\sigma_d^2)r_1 + (-a_4c_2(a_2 + c_2) - a_2^2a_4 + a_4\sigma_d^2)r_2 \\
 &- a_4c_1(a_2 + c_2) - a_3b_1(a_2 + b_2) - a_1a_2^2 + a_1\sigma_d^2)\tau^4 + o(\tau^4)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

### Rozvoj aproximatívneho riešenia pre CIR model

Na zistenie tvaru jednotlivých členov rozvoja nám stačí do tabuľky 4.1 dosadiť parametre  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_d = \frac{1}{2}$  a  $\rho_{1d} = \rho_{2d} = \rho_{12} = 0$ . Upravené členy sa nachádzajú v tabuľke 4.3

i-ta derivacia	0	1	2	3	4
$A^i(0)$	0	-1	$-a_2$	$-a_2^2$	$-a_2^3$
$B^i(0)$	0	0	$-a_3$	$-a_3(a_2 + b_2)$	$-a_3b_2(a_2 + b_2) - a_2^2a_3$
$C^i(0)$	0	0	$-a_4$	$-a_4(a_2 + c_2)$	$-a_4c_2(a_2 + c_2) - a_2^2a_4$
$D^i(0)$	0	0	$-a_1$	$-a_4c_1 - a_3b_1 - a_1a_2 + r_d\sigma_d^2$	$-a_4c_1(a_2 + c_2) - a_3b_1(a_2 + b_2) - a_1a_2^2 + 3a_2r_d\sigma_d^2$

**Tabuľka 4.3:** i-te derivácie funkcií  $A, B, C, D$  pre aproximáciu CIR modelu s nulovou koreláciou

Podobne, dosadením do rozvoja (4.6) dostávame rozvoj aproximatívneho riešenia CIR modelu s nulovou koreláciou  $\ln P^{CIR, \rho=0, apr}$ :

$$\begin{aligned} \ln P^{CIR, \rho=0, apr} &= -r_d \tau + \frac{1}{2}(-a_1 - a_2 r_d - a_3 r_1 - a_4 r_2) \tau^2 \\ &+ \frac{1}{6}((-a_2^2) r_d + (-a_4 c_1 - a_3 b_1 - a_1 a_2 + r_d \sigma_d^2) + (-a_3(a_2 + b_2)) r_1 + (-a_4(a_2 + c_2)) r_2) \tau^3 \\ &+ \frac{1}{24}(-a_2^3 r_d + (-a_3 b_2(a_2 + b_2) - a_2^2 a_3) r_1 + (-a_4 c_2(a_2 + c_2) - a_2^2 a_4) r_2 - a_4 c_1(a_2 + c_2) \\ &- a_3 b_1(a_2 + b_2) - a_1 a_2^2 + 3a_2 r_d \sigma_d^2) \tau^4 + o(\tau^4) \end{aligned} \quad (4.12)$$

## Presnosť aproximácie pre CIR model s nulovou koreláciou

Porovnaním členov v tabuľkách 4.2 a 4.3, respektíve v rovniciach (4.7) a (4.12), dostávame podobne ako v [9]

$$\ln P^{CIR, \rho=0, apr} - \ln P^{CIR, \rho=0} = -\frac{1}{24} \sigma_d^2 (a_1 + a_2 r_d + a_3 r_1 + a_4 r_2) \tau^4 + o(\tau^4) \quad (4.13)$$

## 4.2 Presnosť aproximácie pre všeobecný CKLS model

V predchádzajúcej časti sme aproximovali CIR model s nulovou koreláciou na základe výsledkov pre Vašíčkov model. Zistili sme aj presnosť tejto aproximácie. Jedným z hlavných prínosov tejto práce je odvodenie presnosti aproximácie pre všeobecný CKLS model. V nasledujúcej časti sa na toto odvodenie pozrieme. Postup bude zložitejší, možnosť porovnania dvoch Taylorových rozvojev odpadá. Budeme postupovať podobne ako v prípade jednofaktorových [8] a dvojfaktorových [12, 2] modelov.

Nech  $f^{pr}(\tau, r_1, r_2, r_d) = \ln P^{pr}(\tau, r_1, r_2, r_d)$  označuje logaritmus presného riešenia ceny dlhopisu a nech  $f^{apr}(\tau, r_1, r_2, r_d) = \ln P^{apr}(\tau, r_1, r_2, r_d)$  označuje logaritmus približného riešenia ceny dlhopisu (4.4),(4.5) trojfaktorovom CKLS modeli. Potom platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^{pr}}{\partial \tau} &= P^{pr} \frac{\partial f^{pr}}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial P^{pr}}{\partial r_i} &= P^{pr} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_i}, \\ \frac{\partial^2 P^{pr}}{\partial r_i \partial r_j} &= P^{pr} \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_i} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_j} + \frac{\partial^2 f^{pr}}{\partial r_i \partial r_j} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Pobodne vyrátame parciálne derivácie aj pre  $P^{apr}$ . Keďže  $P^{pr}$  vyhovuje rovnici (4.2), tak po dosadení z (4.14) nadobúda táto rovnica nový tvar

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial f^{pr}}{\partial \tau} + \mu_d \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} + \mu_2 \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} + \mu_3 \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} + \frac{\sigma_d r_d^{2\gamma_d}}{2} \left( \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{pr}}{\partial r_d^2} \right) \\
 & + \frac{\sigma_1 r_1^{2\gamma_1}}{2} \left( \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{pr}}{\partial r_1^2} \right) + \frac{\sigma_2 r_2^{2\gamma_2}}{2} \left( \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{pr}}{\partial r_2^2} \right) \\
 & + \rho_{1d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 f^{pr}}{\partial r_d \partial r_1} \right) + \rho_{2d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 f^{pr}}{\partial r_d \partial r_2} \right) \\
 & + \rho_{12} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 f^{pr}}{\partial r_1 \partial r_2} \right) - r_d = 0.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Pre  $f^{apr}(\tau, r_1, r_2, r_d) = \ln P^{apr}(\tau, r_1, r_2, r_d)$  dostávame podobné vyjadrenie, avšak s netriviálnou pravou stranou:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial f^{apr}}{\partial \tau} + \mu_d \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} + \mu_2 \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} + \mu_3 \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_2} + \frac{\sigma_d r_d^{2\gamma_d}}{2} \left( \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{apr}}{\partial r_d^2} \right) \\
 & + \frac{\sigma_1 r_1^{2\gamma_1}}{2} \left( \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{apr}}{\partial r_1^2} \right) + \frac{\sigma_2 r_2^{2\gamma_2}}{2} \left( \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{apr}}{\partial r_2^2} \right) \\
 & + \rho_{1d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 f^{apr}}{\partial r_d \partial r_1} \right) + \rho_{2d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 f^{apr}}{\partial r_d \partial r_2} \right) \\
 & + \rho_{12} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 f^{apr}}{\partial r_1 \partial r_2} \right) - r_d = h(\tau, r_1, r_2, r_d).
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Ďalej definujeme funkciu  $g(r_d, r_1, r_2, \tau) = f^{apr} - f^{pr} = \ln P^{apr} - \ln P^{pr}$ . Je teda rozdielom medzi logaritmom približnej a presnej ceny dlhopisu.

Pre funkciu  $g(r_d, r_1, r_2, \tau)$  ďalej platí nasledovné:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial g}{\partial r_i} \right)^2 &= \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_i} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_i} \right)^2 = \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_i} \right)^2 - 2 \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_i} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_i} \\
 \frac{\partial g}{\partial r_i} \frac{\partial g}{\partial r_j} &= \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_i} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_i} \right) \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_j} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_j} \right), \\
 &= \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_i} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_j} - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_i} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_j} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_j} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_i} + \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_j} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_i}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Teda môžeme písať

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial g}{\partial \tau} + \mu_d \frac{\partial g}{\partial r_d} + \mu_2 \frac{\partial g}{\partial r_1} + \mu_3 \frac{\partial g}{\partial r_2} + \frac{\sigma_d r_d^{2\gamma_d}}{2} \left( \left( \frac{\partial g}{\partial r_d} \right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial r_d^2} \right) \\
& + \frac{\sigma_1 r_1^{2\gamma_1}}{2} \left( \left( \frac{\partial g}{\partial r_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial r_1^2} \right) + \frac{\sigma_2 r_2^{2\gamma_2}}{2} \left( \left( \frac{\partial g}{\partial r_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial r_2^2} \right) \\
& + \rho_{1d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \left( \frac{\partial g}{\partial r_d} \frac{\partial g}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 g}{\partial r_d \partial r_1} \right) + \rho_{2d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \left( \frac{\partial g}{\partial r_d} \frac{\partial g}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 g}{\partial r_d \partial r_2} \right) \\
& + \rho_{12} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \left( \frac{\partial g}{\partial r_1} \frac{\partial g}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 g}{\partial r_1 \partial r_2} \right) = \\
& = - \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial \tau} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial \tau} \right) + \mu_d \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} \right) + \mu_2 \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \right) + \mu_3 \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_2} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} \right) \\
& + \frac{\sigma_d r_d^{2\gamma_d}}{2} \left( \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} \right)^2 - 2 \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} + \frac{\partial^2 f^{apr}}{\partial r_d^2} - \frac{\partial^2 f^{pr}}{\partial r_d^2} \right) \\
& + \frac{\sigma_1 r_1^{2\gamma_1}}{2} \left( \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \right)^2 - 2 \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 f^{apr}}{\partial r_1^2} - \frac{\partial^2 f^{pr}}{\partial r_1^2} \right) \\
& + \frac{\sigma_2 r_2^{2\gamma_2}}{2} \left( \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} \right)^2 - 2 \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_2} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 f^{apr}}{\partial r_2^2} - \frac{\partial^2 f^{pr}}{\partial r_2^2} \right) \\
& + \rho_{1d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} + \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} + \frac{\partial^2 f^{apr}}{\partial r_d \partial r_1} - \frac{\partial^2 f^{pr}}{\partial r_d \partial r_1} \right) \\
& + \rho_{2d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_2} - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} + \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} + \frac{\partial^2 f^{apr}}{\partial r_d \partial r_2} - \frac{\partial^2 f^{pr}}{\partial r_d \partial r_2} \right) \\
& + \rho_{12} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \left( \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_2} - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} + \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 f^{apr}}{\partial r_1 \partial r_2} - \frac{\partial^2 f^{pr}}{\partial r_1 \partial r_2} \right).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Z porovnania (4.15), (4.16) a (4.18) vyplýva, že funkcia  $g(r_d, r_1, r_2, \tau)$  vyhovuje nasledovnej parciálnej diferenciálnej rovnici:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial g}{\partial \tau} + \mu_d \frac{\partial g}{\partial r_d} + \mu_2 \frac{\partial g}{\partial r_1} + \mu_3 \frac{\partial g}{\partial r_2} + \frac{\sigma_d r_d^{2\gamma_d}}{2} \left( \left( \frac{\partial g}{\partial r_d} \right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial r_d^2} \right) \\
& + \frac{\sigma_1 r_1^{2\gamma_1}}{2} \left( \left( \frac{\partial g}{\partial r_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial r_1^2} \right) + \frac{\sigma_2 r_2^{2\gamma_2}}{2} \left( \left( \frac{\partial g}{\partial r_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial r_2^2} \right) \\
& + \rho_{1d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \left( \frac{\partial g}{\partial r_d} \frac{\partial g}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 g}{\partial r_d \partial r_1} \right) + \rho_{2d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \left( \frac{\partial g}{\partial r_d} \frac{\partial g}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 g}{\partial r_d \partial r_2} \right) \\
& + \rho_{12} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \left( \frac{\partial g}{\partial r_1} \frac{\partial g}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 g}{\partial r_1 \partial r_2} \right) = h(\tau, r_1, r_2, r_d) + \frac{\sigma_d r_d^{2\gamma_d}}{2} \left[ \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} \right)^2 - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} \right] \\
& + \frac{\sigma_1 r_1^{2\gamma_1}}{2} \left[ \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \right)^2 - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \right] + \frac{\sigma_2 r_2^{2\gamma_2}}{2} \left[ \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} \right)^2 - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_2} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} \right] \\
& + \rho_{1d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \left[ 2 \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \right] \\
& + \rho_{2d} \sigma_d r_d^{\gamma_d} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \left[ 2 \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_2} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \right] \\
& + \rho_{12} \sigma_1 r_1^{\gamma_1} \sigma_2 r_2^{\gamma_2} \left[ 2 \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_2} \right]
\end{aligned} \tag{4.19}$$

a ďalej, že pre funkciu  $h(r_d, r_1, r_2, \tau)$  platí

$$h(r_d, r_1, r_2, \tau) = k_3(r_d, r_1, r_2) \tau^3 + k_4(r_d, r_1, r_2) \tau^4 + o(\tau^4),$$

kde

$$\begin{aligned}
k_3(r_d, r_1, r_2) &= \frac{1}{6} \sigma_d^2 \gamma_d r_d^{2\gamma_d-2} (2\gamma_d r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 - r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 + 2a_2 r_d^2 + 2a_4 r_2 r_d + 2a_3 r_1 r_d + 2a_1 r_d) \\
k_4(r_d, r_1, r_2) &= \frac{1}{48} \sigma_d r_d^{\gamma_d-2} (-16\gamma_d r_d^{3\gamma_d+1} \sigma_d^3 + 12a_2 \gamma_d^2 r_d^{3\gamma_d} \sigma_d^3 - 6a_2 \gamma_d r_d^{3\gamma_d} \sigma_d^3 + 3a_4 \gamma_d^2 r_2^{\gamma_2} r_d^{2\gamma_d} \rho_{2d} \sigma_2 \sigma_d^2 \\
& - 3a_4 \gamma_d r_2^{\gamma_2} r_d^{2\gamma_d} \rho_{2d} \sigma_2 \sigma_d^2 + 3a_3 \gamma_d^2 r_1^{\gamma_1} r_d^{2\gamma_d} \rho_{1d} \sigma_1 \sigma_d^2 - 3a_3 \gamma_d r_1^{\gamma_1} r_d^{2\gamma_d} \rho_{1d} \sigma_1 \sigma_d^2 \\
& + 6a_4 \gamma_2 \gamma_d r_2^{2\gamma_2-1} r_d^{\gamma_d+1} \rho_{2d}^2 \sigma_2^2 \sigma_d + 6a_3 \gamma_1 \gamma_d r_1^{2\gamma_1-1} r_d^{\gamma_d+1} \rho_{1d}^2 \sigma_1^2 \sigma_d + 12a_2^2 \gamma_d r_d^{\gamma_d+2} \sigma_d \\
& + 12a_2 a_4 \gamma_d r_2 r_d^{\gamma_d+1} \sigma_d + 12a_2 a_3 \gamma_d r_1 r_d^{\gamma_d+1} \sigma_d + 12a_1 a_2 \gamma_d r_d^{\gamma_d+1} \sigma_d \\
& + 6a_4 \gamma_2 \gamma_d r_1^{\gamma_1} r_2^{2\gamma_2-1} r_d \rho_{12} \rho_{2d} \sigma_1 \sigma_2^2 + 6a_2 a_4 \gamma_d r_2^{\gamma_2} r_d^2 \rho_{2d} \sigma_2 + 6a_4 c_2 r_2 \gamma_2 r_2^{\gamma_2-1} r_d^2 \rho_{2d} \sigma_2 \\
& + 6a_4 c_1 \gamma_2 r_2^{\gamma_2-1} r_d^2 \rho_{2d} \sigma_2 + 6a_4^2 \gamma_d r_2^{\gamma_2+1} r_d \rho_{2d} \sigma_2 + 6a_3 a_4 \gamma_d r_1 r_2^{\gamma_2} r_d \rho_{2d} \sigma_2 \\
& + 6a_1 a_4 \gamma_d r_2^{\gamma_2} r_d \rho_{2d} \sigma_2 + 3a_3 \gamma_1^2 r_1^{3\gamma_1-2} r_d^2 \rho_{1d} \sigma_1^3 - 3a_3 \gamma_1 r_1^{3\gamma_1-2} r_d^2 \rho_{1d} \sigma_1^3 \\
& + 6a_2 a_3 \gamma_d r_1^{\gamma_1} r_d^2 \rho_{1d} \sigma_1 + 6a_3 b_2 r_1 \gamma_1 r_1^{\gamma_1-1} r_d^2 \rho_{1d} \sigma_1 + 6a_3 b_1 \gamma_1 r_1^{\gamma_1-1} r_d^2 \rho_{1d} \sigma_1 \\
& + 6a_3 a_4 \gamma_d r_1^{\gamma_1} r_2 r_d \rho_{1d} \sigma_1 + 6a_3^2 \gamma_d r_1^{\gamma_1+1} r_d \rho_{1d} \sigma_1 + 6a_1 a_3 \gamma_d r_1^{\gamma_1} r_d \rho_{1d} \sigma_1).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

4 APROXIMÁCIA CENY DLHOPISU V TROJFAKTOROVOM  
KONVERGENČNOM MODELI

Predchádzajúce tvrdenie je možné dokázať dosadením  $f^{apr}$  rovnice (4.16) a výpočtom Taylorovho rozvoja získanej pravej strany  $h$ . Budeme pokračovať podobne ako v prípade rovnice (4.7) a využijeme členy z tabuľky 4.1, ktoré budeme postupne derivovať. Potrebné členy rozvoja pri mocninách  $\tau$  pre všetky parciálne derivácie, ktoré vystupujú v rovnici (4.16), je možné nájsť v tabuľkách 4.4 a 4.5. Po úpravách dostávame žiadaný

mocnina $\tau$	0	1	2	3	4
$\frac{\partial f}{\partial r_d}$	0	-1	$-\frac{a_2}{2}$	$\frac{1}{6}(2\gamma_d r_d^{2\gamma_d-1} \sigma_d^2 - a_2^2)$	$\frac{1}{24}(6a_2\gamma_d r_d^{2\gamma_d-1} \sigma_d^2 + 3a_4\gamma_d r_2^{\gamma_2} r_d^{\gamma_d-1} \rho_{2d} \sigma_2 \sigma_d + 3a_3\gamma_d r_1^{\gamma_1} r_d^{\gamma_d-1} \rho_{1d} \sigma_1 \sigma_d - a_2^3)$
$\frac{\partial f}{\partial r_1}$	0	0	$-\frac{a_3}{2}$	$-\frac{1}{6}a_3(a_2 + b_2)$	$\frac{1}{24}(3a_3\gamma_1 r_1^{\gamma_1-1} r_d^{\gamma_d} \rho_{1d} \sigma_1 \sigma_d - a_3 b_2^2 - a_2 a_3 b_2 - a_2^2 a_3)$
$\frac{\partial f}{\partial r_2}$	0	0	$-\frac{a_4}{2}$	$-\frac{1}{6}a_4(a_2 + c_2)$	$\frac{1}{24}(3a_4\gamma_2 r_2^{\gamma_2-1} r_d^{\gamma_d} \rho_{2d} \sigma_2 \sigma_d - a_4 c_2^2 - a_2 a_4 c_2 - a_2^2 a_4)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial r_d^2}$	0	0	0	$\frac{1}{3}(\gamma_d(2\gamma_d - 1)r_d^{2\gamma_d-2} \sigma_d^2)$	$\frac{1}{24}(6a_2\gamma_d(2\gamma_d - 1)r_d^{2\gamma_d-2} \sigma_d^2 + 3a_4(\gamma_d - 1)\gamma_d r_2^{\gamma_2} r_d^{\gamma_d-2} \rho_{2d} \sigma_2 \sigma_d + 3a_3(\gamma_d - 1)\gamma_d r_1^{\gamma_1} r_d^{\gamma_d-2} \rho_{1d} \sigma_1 \sigma_d)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial r_1^2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{8}(a_3(\gamma_1 - 1)\gamma_1 r_1^{\gamma_1-2} r_d^{\gamma_d} \rho_{1d} \sigma_1 \sigma_d)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial r_2^2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{8}(a_4(\gamma_2 - 1)\gamma_2 r_2^{\gamma_2-2} r_d^{\gamma_d} \rho_{2d} \sigma_2 \sigma_d)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial r_d \partial r_1}$	0	0	0	0	$\frac{1}{8}(a_3\gamma_1\gamma_d r_1^{\gamma_1-1} r_d^{\gamma_d-1} \rho_{1d} \sigma_1 \sigma_d)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial r_d \partial r_2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{8}(a_4\gamma_2\gamma_d r_2^{\gamma_2-1} r_d^{\gamma_d-1} \rho_{2d} \sigma_2 \sigma_d)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial r_1 \partial r_2}$	0	0	0	0	0

**Tabuľka 4.4:** Koefficienty v rozvoji funkcií  $\frac{\partial f}{\partial r_d}, \frac{\partial f}{\partial r_1}, \frac{\partial f}{\partial r_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial r_d^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial r_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial r_2^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial r_d \partial r_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial r_d \partial r_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial r_1 \partial r_2}$

tvár funkcie  $h(r_d, r_1, r_2, \tau)$ . Vyjadrenie tvaru tejto funkcie je dôležité pre zistenie rádu pravej strany rovnice (4.19).

Rozviňme teraz funkciu  $g(r_d, r_1, r_2, \tau)$  do Taylorovho rozvoja. Nech

$$g(r_d, r_1, r_2, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r_d, r_1, r_2) \tau^k = \sum_{k=\omega}^{\infty} c_k(r_d, r_1, r_2) \tau^k, \quad (4.21)$$

To znamená, že prvý nenulový člen rozvoja je  $c_\omega(r_d, r_1, r_2) \tau^\omega$ . Treba dodať, že  $\omega \neq 0$ , keďže pre  $\tau = 0$  sa  $g(r_d, r_1, r_2, 0) = \ln P^{apr}(r_d, r_1, r_2, 0) - \ln P^{pr}(r_d, r_1, r_2, 0) = 0$ , koeficient  $c_0$  sa teda identicky rovná 0. V tomto prípade je na ľavej strane rovnice

4 APROXIMÁCIA CENY DLHOPISU V TROJFAKTOROVOM  
KONVERGENČNOM MODELI

mocnina $\tau$	$\frac{\partial f^{ap}}{\partial \tau}$
0	$-r_d$
1	$-(a_1 + a_2 r_d + a_3 r_1 + a_4 r_2)$
2	$\frac{1}{2}(r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 - a_2^2 r_d - (a_4 c_2 + a_2 a_4) r_2 - (a_3 b_2 + a_2 a_3) r_1 - a_4 c_1 - a_3 b_1 - a_1 a_2)$
3	$\frac{1}{6}(3a_2 r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 + (3a_4 r_2^{\gamma_2} r_d^{\gamma_d} \rho_{2d} \sigma_2 + 3a_3 r_1^{\gamma_1} r_d^{\gamma_d} \rho_{1d} \sigma_1) \sigma_d - a_2^{3r_d} - (a_4 c_2^2 + a_2 a_4 c_2 + a_2^2 a_4) r_2 - (a_3 b_2^2 + a_2 a_3 b_2 + a_2^2 a_3) r_1 - a_4 c_1 c_2 - a_2 a_4 c_1 - a_3 b_1 b_2 - a_2 a_3 b_1 - a_1 a_2^2)$
4	$\frac{1}{24}(7a_2^2 r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 + ((4a_4 c_2 + 10a_2 a_4) r_2^{\gamma_2} r_d^{\gamma_d} \rho_{2d} \sigma_2 + (4a_3 b_2 + 10a_2 a_3) r_1^{\gamma_1} r_d^{\gamma_d} \rho_{1d} \sigma_1) \sigma_d + 3a_4^2 r_2^{2\gamma_2} \sigma_2^2 + 6a_3 a_4 r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 3a_3^2 r_1^{2\gamma_1} \sigma_1^2 - a_2^4 r_d - (a_4 c_2^3 + a_2 a_4 c_2^2 + a_2^2 a_4 c_2 + a_2^3 a_4) r_2 - (a_3 b_2^3 + a_2 a_3 b_2^2 + a_2^2 a_3 b_2 + a_2^3 a_3) r_1 - a_4 c_1 c_2^2 - a_2 a_4 c_1 c_2 - a_2^2 a_4 c_1 - a_3 b_1 b_2^2 - a_2 a_3 b_1 b_2 - a_2^2 a_3 b_1 - a_1 a_2^3)$

**Tabuľka 4.5:** Koefficienty v rozvoji funkcie  $\frac{\partial f^{ap}}{\partial \tau}$

(4.19) člen s najnižším rádom  $c_\omega(r_d, r_1, r_2)\omega\tau^{\omega-1}$ . Ďalej vyjadríme rády jednotlivých členov pravej strany spomínanej rovnice.

Vieme, že  $f^{pr}(r_d, r_1, r_2, 0) = 0$ , teda rád tejto funkcie je  $O(\tau)$ . Rovnaký rád majú teda aj parciálne derivácie  $\frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d}, \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1}, \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2}$ . Z tabuľky 4.4 vieme vyčítať, že  $\frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} = O(\tau), \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} = O(\tau^2)$  a  $\frac{\partial f^{apr}}{\partial r_2} = O(\tau^2)$ . Keď sa pozrieme na tvar pravej strany rovnice (4.19) vidíme, že jej rád je aspoň  $\tau^2$ . Rád ľavej strany je, ako už bolo spomenuté,  $\tau^{\omega-1}$ , teda vieme povedať, že  $\omega - 1 \geq 2$ , t.j.  $\omega \geq 3$ . Vieme aj, že

$$f^{apr}(r_d, r_1, r_2, \tau) - f^{pr}(r_d, r_1, r_2, \tau) = O(\tau^3).$$

Pokračujme vo vyjadrovaní rádov všetkých členov na pravej strany rovnice.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} &= O(\tau^3) - \frac{f^{apr}}{\partial r_1} = O(\tau^3) - O(\tau^2) = O(\tau^2) \\ \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_2} &= O(\tau^3) - \frac{f^{apr}}{\partial r_2} = O(\tau^3) - O(\tau^2) = O(\tau^2) \\ \left(\frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d}\right)^2 - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} &= \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} \left(\frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d}\right) = O(\tau)O(\tau^3) = O(\tau^4) \end{aligned} \tag{4.22}$$



Analogicky vyjadríme rády pre  $r_1$  a  $r_2$ :

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} &= \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_d} \right) + \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_d} \left( \frac{\partial f^{pr}}{\partial r_1} - \frac{\partial f^{apr}}{\partial r_1} \right) = \\ &= O(\tau)O(\tau^3) + O(\tau)O(\tau^3) = O(\tau^4) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Opäť analogicky vyjadríme rády pre zvyšné členy. Podľa (4.20) je  $h(r_d, r_1, r_2, \tau)$  rádu  $o(\tau^3)$  a teda celá pravá strana rovnice (4.19) je rádu  $O(\tau^3)$  a koeficient pri  $\tau^3$  je koeficient  $h(r_d, r_1, r_2, \tau)$  pri  $\tau^3$ , teda  $k_3(r_d, r_1, r_2)$ .

Teda, aby bol rád ľavej strany  $O(\tau^{\omega-1})$  rovný rádu  $O(\tau^3)$  pravej strany, musí  $\omega = 4$ . Porovnaním členov ľavej aj pravej strany dostávame  $-4c_4(r_d, r_1, r_2)\tau^3 = k_3(r_d, r_1, r_2)\tau^3$ , t.j.

$$c_4(r_d, r_1, r_2) = -\frac{1}{4}k_3(r_d, r_1, r_2),$$

a teda

$$g(r_d, r_1, r_2, \tau) = \ln P^{apr}(r_d, r_1, r_2, \tau) - \ln P^{pr}(r_d, r_1, r_2, \tau) = -\frac{1}{4}k_3(r_d, r_1, r_2)\tau^4 + o(\tau^4).$$

Toto tvrdenie zhrnieme v tvare vety.

**Veta 4.1.** *Nech  $P^{apr}$  je aproximujúca a  $P^{pr}$  presná cena dlhopisu v CKLS modeli. Potom pre  $\tau \rightarrow 0^+$*

$$\ln P^{apr}(r_d, r_1, r_2, \tau) - \ln P^{pr}(r_d, r_1, r_2, \tau) = c_4(r_d, r_1, r_2)\tau^4 + o(\tau^4)$$

kde

$$c_4(r_d, r_1, r_2) = -\frac{1}{24}\sigma_d^2\gamma_d r_d^{2\gamma_d-2} (2\gamma_d r_d^{2\gamma_d}\sigma_d^2 - r_d^{2\gamma_d}\sigma_d^2 + 2a_2 r_d^2 + 2a_4 r_2 r_d + 2a_3 r_1 r_d + 2a_1 r_d)$$

Poznamenajme, že dosadením  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_d = \frac{1}{2}$  a  $\rho_{1d} = \rho_{2d} = \rho_{12} = 0$  dostávame rovnaký výraz ako pre prípad CIR modelu s nulovou koreláciou, odvodený v kapitole 4.1.

## 5 Kalibrácia trojfaktorového modelu úrokových mier

Trojfaktorový model úrokových mier opisuje správanie európskej úrokovej miery pomocou dvoch faktorov, pričom tretí faktor slúži na modelovanie správania sa domácej úrokovej miery. Preto je predpoklad, že pridaním tretieho faktora, ktorý by mohol lepšie dovysvetliť správanie sa európskej úrokovej miery, by mohla aproximácia priniesť zaujímavejšie výsledky ako v prípade jedno, či dvojfaktorových modelov. V prvej časti kapitoly sa budeme snažiť kalibrovať model pre európsku krátkodobú úrokovú mieru jednoznačne určenú súčtom dvoch faktorov. Kalibrácia bude prebiehať na jednak simulovaných dátach so známymi parametrami, čo bude výhodné pri porovnaní odhadnutých parametrov a následne aj na skutočných výnosoch (Euribor, Bribor). Odhady pre dvojfaktorový model boli predmetom aj diplomovej práce J. Halgašovej [2]. V našom prípade však použijeme pozmenený postup, kedy budeme transformovať účelovú funkciu optimalizácie na kvadratickú formu. Kalibrácia modelov môže prebiehať viacerými spôsobmi. Spomeňme napríklad možnosť minimalizácie odchýlok teoretických (aproximovaných) výnosov od reálnych hodnôt výnosov na trhu [10, 11, 1]. V prípade, že poznáme rozdelenie hodnôt stochastického procesu, môžeme využiť metódu maximálnej vierohodnosti, pomocou ktorej odhadujeme parametre modelu. Odvodenie pre Vašíčkov model je možné nájsť v [5].

### 5.1 Odhad parametrov modelu európskej úrokovej miery

Ako sme spomenuli v predchádzajúcej časti, prvým krokom je kalibrácia dvojfaktorového modelu pre európsku krátkodobú úrokovú mieru. Nech je dvojfaktorový CKLS model špecifikovaný nasledovnou sústavou stochastických diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned}
 r &= r_1 + r_2 \\
 dr_1 &= (\alpha_1 + \beta_1 r_1)dt + \sigma_1 r_1^\gamma dw_1, \\
 dr_2 &= (\alpha_2 + \beta_2 r_2)dt + \sigma_2 r_2^\gamma dw_2, \\
 Cov[dw_1, dw_2] &= \rho dt.
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Výhoda CKLS modelu, teda jeho všeobecnosť, nie je veľmi praktická pri oceňovaní s ňou spojených derivátov. Rovnica pre cenu dlhopisu v tomto prípade nemá analytické riešenie. Aproximácia by teda mala byť vhodná pri modelovaní aj pri kalibrácii. V

[7] autorka uvádza aproximáciu ceny dlhopisu pre jednofaktorový CKLS model, ktorá vychádza z presného odvodu pre Vašíčkov model:

$$\ln P^{vas}(\tau, r) = \left( \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \right) \left( \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right) + \frac{\sigma^2}{4\beta^3} (1 - e^{\beta\tau})^2 + \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} r \quad (5.2)$$

Ak nahradíme konštantnú volatilitu  $\sigma$  novou volatilitou  $\sigma r^\gamma$  dostávame aproximatívnu cenu dlhopisu pre jednofaktorový CKLS model:

$$\ln P^{ap}(\tau, r) = \left( \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{2\beta^2} \right) \left( \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right) + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{4\beta^3} (1 - e^{\beta\tau})^2 + \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} r \quad (5.3)$$

Nás ale zaujíma dvojfaktorový model. Cena dlhopisu sa dá vypočítať ako súčin jednotlivých cien dlhopisov, čo sme ukázali pri výpočte cien európskych dlhopisov v kapitole 3. Logaritmus ceny dlhopisu v dvojfaktorovom modeli sa potom dá pomocou (5.3) prepísať do nasledujúceho tvaru:

$$\ln P^{ap}(\tau, r_1, r_2) = \ln A^{ap}(\tau, r_1, r_2) - B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2, \quad (5.4)$$

kde

$$\begin{aligned} \ln A^{ap} = & \left( \tau - \frac{1}{\beta_1} (e^{\beta_1\tau} - 1) \right) \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\sigma_1^2 r_1^{2\gamma}}{2\beta_1^2} \right) + \frac{\sigma_1^2 r_1^{2\gamma}}{4\beta_1^3} (1 - e^{\beta_1\tau})^2 \\ & + \left( \tau - \frac{1}{\beta_2} (e^{\beta_2\tau} - 1) \right) \left( \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\sigma_2^2 r_2^{2\gamma}}{2\beta_2^2} \right) + \frac{\sigma_2^2 r_2^{2\gamma}}{4\beta_2^3} (1 - e^{\beta_2\tau})^2 \\ & + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2(r_1r_2)^\gamma}{\beta_1\beta_2} \left( \tau + \frac{1}{\beta_1} (1 - e^{\beta_1\tau}) + \frac{1}{\beta_2} (1 - e^{\beta_2\tau}) - \frac{1 - e^{(\beta_1+\beta_2)\tau}}{\beta_1 + \beta_2} \right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$B_i(\tau) = \frac{e^{\beta_i\tau} - 1}{\beta_i}, \quad i = 1, 2.$$

Tento výraz bude vhodný pre použitie kalibrácie spôsobom minimalizácie odchýlok teoretických výnosov od reálnych výnosov na trhu.

### 5.1.1 Odhad faktorov dvojfaktorového CIR modelu s nulovou koreláciou

Pre získanie tohto modelu volíme  $\gamma = 0.5$  a koreláciu medzi faktormi  $\rho = 0$ . Pre tento špecifický model sa rozhodujeme z nasledujúcich dôvodov: pri simulovaných dátach z CIR modelu s nulovou koreláciou vieme vyjadriť uzavretú formulu pre cenu dlhopisu. Teda sme schopní porovnávať odhadnuté výnosy so skutočnými (v tomto prípade simulovanými) výnosmi a sledovať tak presnosť aproximácie. Rozdiely vo výnosoch v

korelovanom a nekorelovanom prípade sme zhrnuli v časti 3.3.1.

Kalibráciu zakladáme na minimalizácii odchýlok teoretických od reálnych výnosov. Nech  $n$  je počet dní v ktorých odhadujeme krátkodobú úrokovú mieru a  $m$  je počet maturít, pre ktoré odhadujeme výnos dlhopisov. Nech  $R_{ij}$  označuje výnos pozorovaný v  $i$ -ty ( $i = 1, \dots, n$ ) deň s maturitou  $\tau_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Nech  $R(\tau_j, r_{1i}, r_{2i})$  označuje výnos vypočítaný z aproximácie dvojfaktorového modelu (5.5) pomocou vzťahu  $R^{ap} = -\frac{\ln P^{ap}}{\tau}$ . Jednotlivé faktory teda označíme ako  $r_{1i}$  a  $r_{2i}$  a váhy  $w_{ij}$ , ktoré volíme ako  $w_{ij} = \tau_j^2$  podľa [11]. Teda hľadáme také hodnoty parametrov  $\alpha, \beta, \sigma, \gamma, \rho$  a realizácie faktorov  $r_1, r_2$  tak, aby minimalizovali účelovú funkciu

$$F(\alpha, \beta, \sigma, \gamma, r, \rho) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} (R(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}) - R_{ij})^2. \quad (5.6)$$

Budeme teda používať aproximačnú formulu (5.5) s parametrami pre nekorelovaný CIR model ( $\gamma = 0.5, \rho = 0$ ). Túto formulu vieme upraviť na tvar vhodný na použitie pri kalibrácii:

$$\begin{aligned} \ln P^{ap}(\tau, r_1, r_2) = & c_{01}(\tau, r_1, r_2) + c_{02}(\tau, r_1, r_2) + c_1^\alpha(\tau, r_1, r_2)\alpha_1 \\ & + c_2^\alpha(\tau, r_1, r_2)\alpha_2 + c_1^\sigma(\tau, r_1, r_2)\sigma_1^2 + c_2^\sigma(\tau, r_1, r_2)\sigma_2^2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

kde

$$\begin{aligned} c_{0i} &= \frac{1 - e^{\beta_i \tau}}{\beta_i} r_i \quad \text{pre } i = 1, 2, \\ c_i^\alpha &= \frac{1}{\beta_i} \left( \frac{1 - e^{\beta_i \tau}}{\beta_i} + \tau \right) \quad \text{pre } i = 1, 2, \\ c_i^\sigma &= \frac{r_i}{2\beta_i^2} \left( \frac{1 - e^{\beta_i \tau}}{\beta_i} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta_i \tau})^2}{2\beta_i} \right) \quad \text{pre } i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Po dosadení do účelovej funkcie táto nadobúda nový tvar:

$$F(\alpha, \beta, \sigma, \gamma, r, \rho) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_{01}r_1 + c_{02}r_2 + c_1^\alpha\alpha_1 + c_2^\alpha\alpha_2 + c_1^\sigma\sigma_1^2r_{1i} + c_2^\sigma\sigma_2^2r_{2i} + R_{ij}\tau_j)^2 \quad (5.9)$$

Táto účelová funkcia bohužiaľ nie je lineárna vo všetkých členoch. Optimalizačný problém by sa dal riešiť pomocou metód nelineárneho programovania, ale radi by sme

našli jednoduchší spôsob. Použijeme substitúciu pre jednofaktorový model z práce [6], kde autor označil  $y_i = \sigma^2 r_i$ . V našom prípade budeme substituovať oba členy  $\sigma_1^2 r_{1i}$  a  $\sigma_2^2 r_{2i}$ . Účelová funkcia nadobudne nový tvar

$$F(\alpha, \beta, \sigma, \gamma, r, \rho) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (c_{01}r_1 + c_{02}r_2 + c_1^\alpha \alpha_1 + c_2^\alpha \alpha_2 + c_1^\sigma y_{1i} + c_2^\sigma y_{2i} + R_{ij}\tau_j)^2 \quad (5.10)$$

Tentokrát ide o kvadratickú funkciu s premennými  $\alpha_1, \alpha_2, r_{11}, \dots, r_{1n}, r_{21}, \dots, r_{2n}, y_{11}, \dots, y_{1n}, y_{21}, \dots, y_{2n}$ . Ich optimálne hodnoty vieme vyjadriť explicitne pre každé hodnoty parametrov  $\beta_1, \beta_2$ . Hodnoty  $\sigma_i^2$  získame ako priemer, alebo medián podielov  $y_{1i}/r_{1i}$  respektíve  $y_{2i}/r_{2i}$ . Medián poslúži dobre v prípade extrémov.

Následne pre dvojice parametrov  $\beta_1, \beta_2$  zistíme optimálnu minimálnu hodnotu účelovej funkcie. Minimalizáciu si uľahčíme prepísaním sústavy do maticového tvaru  $x'Qx - 2p'x + k$ , kde  $Q$  je kladne definitná symetrická bloková matica, nasledovne. Nech  $x$  je  $(4n + 2)$ -rozmerný vektor obsahujúci vyššie uvedené premenné:

$$x = [\alpha_1, \alpha_2, r_{11}, \dots, r_{1n}, r_{21}, \dots, r_{2n}, y_{11}, \dots, y_{1n}, y_{21}, \dots, y_{2n}]'$$

Nech je ďalej  $Q$  bloková matica zložená z nasledovných blokov:

$$Q = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b' & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ c' & A_3 & A_6 & A_7 & A_8 \\ d' & A_4 & A_7 & A_9 & A_{10} \\ e' & A_5 & A_8 & A_{10} & A_{11} \end{bmatrix}_{(4n+2) \times (4n+2)}$$

Nech bloky sú dané ako:

$$\begin{aligned}
 a &= \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m (c_1^\alpha)^2 & \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_1^\alpha c_2^\alpha \\ \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_1^\alpha c_2^\alpha & \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m (c_2^\alpha)^2 \end{bmatrix}, \\
 b &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_{01} c_1^\alpha & \cdots & \sum_{j=1}^m c_{01} c_1^\alpha \\ \sum_{j=1}^m c_{01} c_2^\alpha & \cdots & \sum_{j=1}^m c_{01} c_2^\alpha \end{bmatrix}, \\
 c &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_{02} c_1^\alpha & \cdots & \sum_{j=1}^m c_{02} c_1^\alpha \\ \sum_{j=1}^m c_{02} c_2^\alpha & \cdots & \sum_{j=1}^m c_{02} c_2^\alpha \end{bmatrix}, \\
 d &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_1^\alpha c_1^\sigma & \cdots & \sum_{j=1}^m c_1^\alpha c_1^\sigma \\ \sum_{j=1}^m c_2^\alpha c_1^\sigma & \cdots & \sum_{j=1}^m c_2^\alpha c_1^\sigma \end{bmatrix}, \\
 e &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_1^\alpha c_2^\sigma & \cdots & \sum_{j=1}^m c_1^\alpha c_2^\sigma \\ \sum_{j=1}^m c_2^\alpha c_2^\sigma & \cdots & \sum_{j=1}^m c_2^\alpha c_2^\sigma \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_{01}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m c_{01}^2 \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_{01} c_{02} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m c_{01} c_{02} \end{bmatrix}, \\
 A_4 &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_{01} c_1^\sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m c_{01} c_1^\sigma \end{bmatrix}, \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_{01} c_2^\sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m c_{01} c_2^\sigma \end{bmatrix}, \\
 A_6 &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_{02}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m c_{02}^2 \end{bmatrix}, \\
 A_7 &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_1^\sigma c_{02} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m c_1^\sigma c_{02} \end{bmatrix}, \\
 A_8 &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_{02} c_2^\sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m c_{02} c_2^\sigma \end{bmatrix}, \\
 A_9 &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_1^{\sigma 2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m c_1^{\sigma 2} \end{bmatrix}, \\
 A_{10} &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_1^\sigma c_2^\sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m c_1^\sigma c_2^\sigma \end{bmatrix}, \\
 A_{11} &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m c_2^{\sigma 2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m c_2^{\sigma 2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Nech  $p = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5]$ , kde

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_1^\alpha R_{ij} \tau_j \right], \\
 p_2 &= \left[ \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_2^\alpha R_{ij} \tau_j \quad , \cdots , \quad \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_2^\alpha R_{ij} \tau_j \right], \\
 p_3 &= \left[ \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_{01} R_{ij} \tau_j \quad , \cdots , \quad \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_{01} R_{ij} \tau_j \right], \\
 p_4 &= \left[ \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_1^\sigma R_{ij} \tau_j \quad , \cdots , \quad \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_1^\sigma R_{ij} \tau_j \right], \\
 p_5 &= \left[ \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_2^\sigma R_{ij} \tau_j \quad , \cdots , \quad \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_2^\sigma R_{ij} \tau_j \right]
 \end{aligned}$$

a nech ďalej  $k = [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}^2 \tau^2]$ . Účelovú funkciu (5.10) môžeme opäť prepísať do nového tvaru:

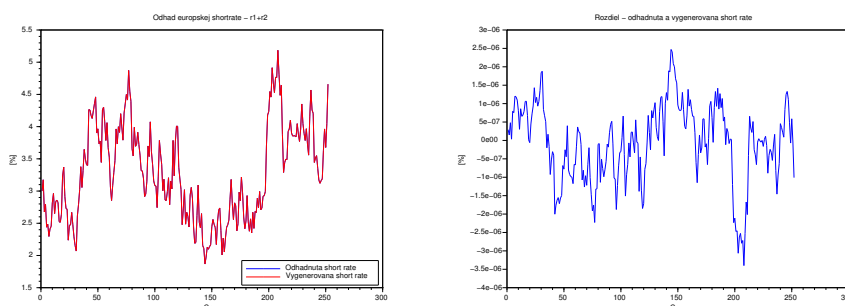
$$F(x) = \frac{1}{mn}(x'Qx + 2p'x + k) \quad (5.11)$$

Hľadať vektor  $x$  minimalizujúci túto funkciu môžeme rôznymi spôsobmi. Program Scilab obsahuje solver pre minimalizáciu funkcie v kvadratickej forme (príkaz *qld*, [17]), prípadne môžeme použiť niektorú z iteračných metód na riešenie sústavy rovníc. V našej práci používame prvý spôsob. Faktory európskej úrokovej miery generujeme s nasledujúcimi parametrami  $r_{10} = 0.02$ ,  $\kappa_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = 0.022$ ,  $\sigma_1 = 0.05$ ,  $\lambda_1 = -0.1$ ,  $r_{20} = 0.01$ ,  $\kappa_2 = 0.5$ ,  $\theta_2 = 0.013$ ,  $\sigma_2 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = -0.1$ ,  $\rho_{12} = 0$  a  $\gamma = 1/2$ . Teda po prepočítaní na parametre priamo vstupujúce do (5.1)  $\alpha_1 = 0.0264$ ,  $\alpha_2 = 0.0065$ ,  $\beta_1 = -1.195$ ,  $\beta_2 = -0.495$ ,  $\sigma_1 = 0.05$ ,  $\sigma_2 = 0.05$ .

Odhadneme parametre a realizácie faktorov pomocou popísaného postupu. Optimálne hodnoty parametrov  $\beta_1, \beta_2$  dostaneme minimalizáciou funkcie  $G$  danou vzťahom

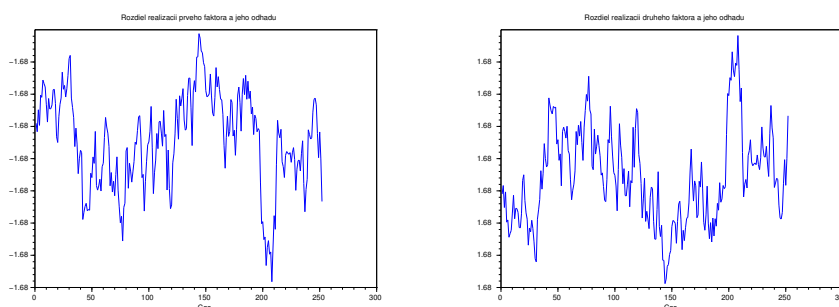
$$G(\beta_1, \beta_2) = \min_x \frac{1}{mn}(x'Qx + 2p'x + k) \quad (5.12)$$

Minimalizáciu vykonávame v Scilabe príkazom *optim* [18], ktorý slúži na minimalizáciu funkcie viacerých premenných. Rozdiel medzi odhadnutou a vygenerovanou európskou



**Obr. 5.1:** Porovnanie vygenerovanej a odhadnutej európskej úrokovej miery.

úrokovou mierou je v percentách rádu  $10^{-6}$ , čo považujeme za veľmi dobrý odhad. Na obrázku 5.2 vidíme rozdiel medzi odhadnutými faktormi. Napriek tomu, že v súčte faktory aproximujú úrokovú mieru dostatočne dobre, samostatne aproximujú veľmi zle. Vidíme, že rozdiely medzi faktormi sú približne 1.7. V diplomovej práci [2] boli oba odhadnuté faktory vychýlené, ale rádovo len o jedno percento. Možno to pripísať



Obr. 5.2: Odhad faktorov.

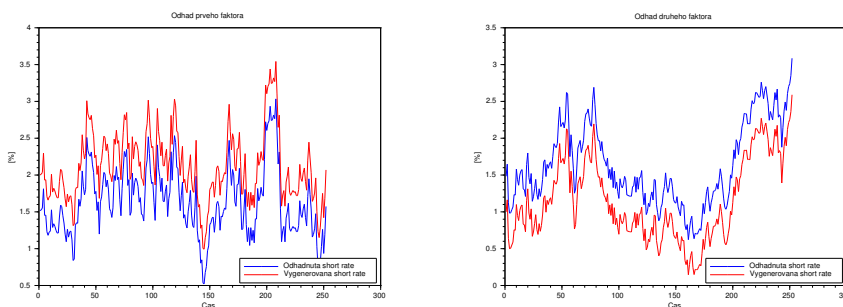
tomu, že pri optimalizácii autorka nezavádzala substitúciu tvaru  $y_i = \sigma r_i$ , ale využila iný postup. V našom prípade nás to vedie k úvahe o možnosti posunu jednotlivých faktorov o rovnakú konštantu, čím by sme ich mohli porovnávať s vygenerovanými faktormi s tým, že ich súčet by sa nezmenil. Pozrime sa, ako ovplyvní rôzny posun faktorov medzi reálnymi a odhadnutými výnosmi. Označme  $d$  maximálnu vzdialenosť o ktorú môžeme k sebe faktory priblížiť. Posun  $d$  má takú hodnotu, aby bol výraz  $\sum_{i=1}^n (r_1^{odhad} - r_2^{odhad} - d)^2$  minimálny, čiže minimalizujeme vzdialenosť medzi odhadom prvého a druhého faktora. Treba si uvedomiť, že každý z faktorov posúvame o polovicu tejto vzdialenosti. Minimálnu vzdialenosť medzi faktormi  $r_1, r_2$  v našom prípade získame posunom každého faktora k tomu druhému o vzdialenosť 1.675. V nasledujúcej tabuľke porovnávame absolútny rozdiel medzi reálnymi a odhadnutými výnosmi (t.j. suma rozdielov pre každú maturitu v každý deň). Podľa očakávania je rozdiel naj-

spoločný posun	$0d$	$0.1d$	$0.2d$	$0.3d$	$0.4d$	$0.5d$	$0.6d$	$0.7d$	$0.8d$	$0.9d$	$1d$
abs. rozd.	0.338	0.367	0.374	0.361	0.369	0.364	0.365	0.357	0.359	0.357	0.341

Tabuľka 5.1: Vplyv posunu na absolútny rozdiel medzi reálnymi a odhadnutými výnosmi.

menší pre nulový posun, pretože takto sme získali faktory prvotnou optimalizáciou. Avšak, aby boli hodnoty faktorov reálne a hlavne nezáporné, budeme ich posúvať o druhú najlepšiu vzdialenosť. Tou je  $1d$ , teda maximálny posun, kde bol absolútny rozdiel 0.341. Porovnaním posunutých vygenerovaných faktorov dostávame presvedčivejšie odhady jednotlivých faktorov. V prípade prvotného odhadu vychýlených faktorov sme z optimalizácie dostali aj optimálne hodnoty ostatných parametrov. Tieto však nie sú presné, nakoľko neboli v tejto fáze odhadnuté faktory reálne. Navrhujeme teda postup,





**Obr. 5.3:** Porovnanie posunutých odhadov faktorov s realizáciou vygenerovaných faktorov.

ako vypočítať odhady, keď budeme faktory už považovať ako známe. V účelovej funkcii (5.9) teda vzniknú konštanty  $c_{01}r_1$  a  $c_{02}r_2$ .

### 5.1.2 Odhad parametrov dvojfaktorového CIR modelu s nulovou koreláciou

Postupovať budeme podobne ako v predchádzajúcej kapitole. V účelovej funkcii (5.10) budeme mať vzhľadom na pevné  $\beta_1, \beta_2$  dve nové konštanty  $c_{01}r_1$  a  $c_{02}r_2$ . Túto funkciu rovnako prepíšeme do kvadratickej formy nasledovne. Nech

$$x_2 = [\alpha_1, \alpha_2, y_{11}, \dots, y_{1n}, y_{21}, \dots, y_{2n}]'$$

Označme

$$Q_2 = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d' & A_9 & A_{10} \\ e' & A_{10} & A_{11} \end{bmatrix}_{(2n+2) \times (2n+2)},$$

kde samotné bloky tejto matice sú rovnaké ako v časti 5.1.1.

Nech  $r = [r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4 \ r_5]$ , kde

$$\begin{aligned} r_1 &= \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_1^\alpha (R_{ij}\tau_j - (c_{01}r_1 + c_{02}r_2)) \right], \\ r_2 &= \left[ \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_2^\alpha (R_{ij}\tau_j - (c_{01}r_1 + c_{02}r_2)) \ , \dots \ , \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_2^\alpha (R_{ij}\tau_j - (c_{01}r_1 + c_{02}r_2)) \right], \\ r_3 &= \left[ \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_{01} (R_{ij}\tau_j - (c_{01}r_1 + c_{02}r_2)) \ , \dots \ , \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_{01} (R_{ij}\tau_j - (c_{01}r_1 + c_{02}r_2)) \right], \\ r_4 &= \left[ \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_1^\sigma (R_{ij}\tau_j - (c_{01}r_1 + c_{02}r_2)) \ , \dots \ , \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_1^\sigma (R_{ij}\tau_j - (c_{01}r_1 + c_{02}r_2)) \right], \\ r_5 &= \left[ \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_2^\sigma (R_{ij}\tau_j - (c_{01}r_1 + c_{02}r_2)) \ , \dots \ , \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m c_2^\sigma (R_{ij}\tau_j - (c_{01}r_1 + c_{02}r_2)) \right], \end{aligned}$$

a nech ďalej  $k_2 = [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}^2 \tau^2]$ . Účelovú funkciu (5.10) teda prepisujeme do tvaru:

$$F_2(x_2) = \frac{1}{mn} (x_2' Q_2 x_2 - 2r' x_2 + k_2) \quad (5.13)$$

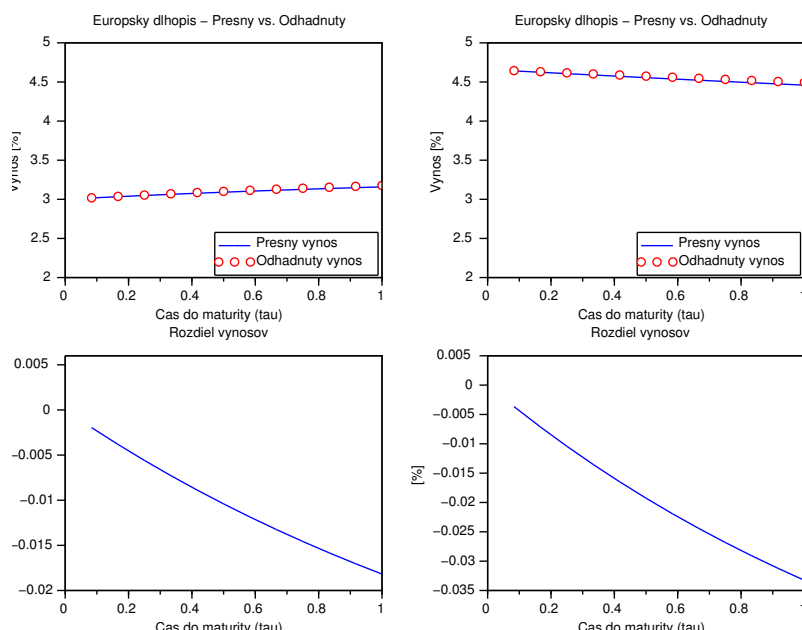
Optimálny vektor  $x_2$  získame rovnako ako v predchádzajúcej časti, pomocou príkazu *gld* v Scilabe. V tabuľke 5.2 vidíme presné a odhadnuté hodnoty parametrov pomocou tohto postupu. Ďalej použijeme tieto hodnoty na vygenerovanie výnosových kriviek, ktoré budeme provnávať.

parameter	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
presná hodnota	0.0264	0.0065	-1.195	-0.495	0.05	0.05
odhadnutá hodnota	0.0208	0.0089	-1.200	-0.490	0.0612	0.081

**Tabuľka 5.2:** Porovnanie presných parametrov a parametrov odhadnutých pomocou popísanej metódy.

### 5.1.3 Porovnanie odhadnutých a vygenerovaných výnosov v dvojfaktorovom CIR modeli

Po dosadení odhadnutých parametrov do systému diferenciálnych rovníc (3.29), výpočte funkcií  $A, B, C, D$  a dosadení do (3.15) dostávame presné a odhadnuté výnosy pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom CIR modeli. Na obrázku 5.4 vidíme grafické porovnanie rozdielov vo výnosových krivkách.



**Obr. 5.4:** Porovnanie skutočných a odhadnutých výnosov. V ľavej časti pre úrokovú mieru v prvý deň, vpravo pre 252. deň, teda o rok neskôr.

Vidíme, že rozdiely vo výnosoch v absolútnych hodnotách sú rádu  $10^{-4}$ . Odhadnuté výnosové krivky sú v oboch prípadoch o niečo málo vyššie ako vygenerované výnosy. S aproximáciou sme rovnako ako pri odhadovaní krátkodobej úrokovej miery spokojní.

#### 5.1.4 Odhady pre CKLS model

V predchádzajúcej časti sme sa zaoberali kalibráciou CIR modelu, do ktorej vstúpili dáta generované CIR modelom s nulovou koreláciou. Tento typ kalibrácie je výhodný z dôvodu, že existuje uzavretá formula na výpočet ceny dlhopisu, a teda vieme výsledky kalibrácie dobre porovnávať s reálnymi výnosmi. V prípade CKLS modelu toto možné nie je. Napriek tomu sa v nasledujúcej časti pokúsime tento model kalibrovať pre vhodný rozsah parametrov  $\gamma_1, \gamma_2$  porovnávaním hodnôt účelových funkcií, ktoré musíme počas kalibrácie minimalizovať. Najnižšia hodnota bude teda znamenať najlepšiu voľbu tohto parametra. Dáta, na ktorých budeme model kalibrovať sú rovnaké ako boli použité v kapitole 5.1.2, a teda očakávame, že optimálna voľba parametrov bude v konečnom dôsledku  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$ .

$\gamma_1/\gamma_2$	0	0.25	0.5	0.75	1
0	0.02	0.047	0.099	0.2	0.365
0.25	0.015	0.043	0.095	0.196	0.36
0.5	0.012	0.04	0.093	0.194	0.359
0.75	0.012	0.04	0.094	0.197	0.363
1	0.014	0.043	0.097	0.201	0.368

**Tabuľka 5.3:** Hodnoty účelovej funkcie ( $\times 10^{-10}$ ) pre rôzne hodnoty  $\gamma_1, \gamma_2$ .

Predpoklady sa pri pohľade na výsledky nespĺnili, optimálna hodnota podľa tabuľky a grafu vychádza  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0.75$ . Mohli by sme to pripísať spôsobu, akým odhadujeme faktorový rozklad, kde v účelovej funkcii substituujeme  $y_i = r_i^{2\gamma} \sigma_i^2$ . Keďže pri kalibrácii odhadujeme  $y_i$ , v tejto fáze parametre  $\gamma_1, \gamma_2$  nevystupujú a využijeme ich až pri dopočítaní hodnoty  $\sigma_i^2$ . Preto samotný odhad parametrov  $\gamma_1, \gamma_2$  nie je presný.

## 5.2 Odhad parametrov modelu domácej úrokovej miery

Po kalibrácii dvojfaktorového modelu pre európsku krátkodobú úrokovú mieru sa v nasledujúcej podkapitole budeme venovať kalibrácii modelu popisujúceho domácu úrokovú mieru. Táto časť je ďalším z hlavných prínosov práce. Budeme postupovať podobne ako pri predošlej kalibrácii a to konkrétne minimalizáciou odchýlok aproximovaných od reálnych výnosov. Odvodíme účelovú funkciu a jej transformáciu na kvadratickú formu.

V kapitole 5.1 sme ukázali ako odhadnúť parametre pre faktory popisujúce európsku úrokovú mieru. V nasledujúcej časti budeme odhadovať parametre tretieho faktora popisujúceho vývoj domácej úrokovej miery. Vstupom do kalibrácie budú reálne (vygenerované) domáce výnosy a parametre odhadnuté pri kalibrácii modelu európskej úrokovej miery. V kalibrácii tohto modelu použijeme aproximáciu ceny dlhopisu pre CKLS model v tvare

$$\ln P^{ap}(\tau, r) = A(\tau)r_d + B(\tau)r_1 + C(\tau)r_2 + D(\tau), \quad (5.14)$$

pričom funkcie  $A, B, C, D$  sú definované v (4.4) ako:

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \frac{1 - e^{a_2\tau}}{a_2}, \\ B(\tau) &= \frac{a_3(b_2(1 - e^{a_2\tau}) - a_2(1 - e^{b_2\tau}))}{a_2b_2(a_2 - b_2)}, \\ C(\tau) &= \frac{a_4(c_2(1 - e^{a_2\tau}) - a_2(1 - e^{c_2\tau}))}{a_2c_2(a_2 - c_2)}, \\ D(\tau) &= \int_0^\tau a_1A(s) + b_1B(s) + c_1C(s) + \frac{\sigma_d^2 r_d^{2\gamma_d}}{2} A^2(s) + \frac{\sigma_1^2 r_1^{2\gamma_1}}{2} B^2(s) + \frac{\sigma_2^2 r_2^{2\gamma_2}}{2} C^2(s) \\ &\quad + \rho_{1d}\sigma_1^{\gamma_1}\sigma_d^{\gamma_d} A(s)B(s) + \rho_{2d}\sigma_2^{\gamma_2}\sigma_d^{\gamma_d} A(s)C(s) + \rho_{12}\sigma_1^{\gamma_1}\sigma_2^{\gamma_2} B(s)C(s) ds. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Výpočet integrálu funkcie  $D$  je zdĺhavý a uvádzame ho v prílohe.

### 5.2.1 Odhad parametrov tretieho faktora v trojfaktorovom CIR modeli s nulovou koreláciou

Na získanie logaritmu ceny domáceho dlhopisu stačí do sústavy (5.15) dosadiť za  $\rho_{1d} = \rho_{2d} = \rho_{12} = 0$  a  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_d = 1/2$ .

Nech  $n$  je opäť počet dní, v ktorých odhadujeme krátkodobú úrokovú mieru a nech

je  $m$  počet maturít, pre ktoré odhadujeme výnos dlhopisov. Nech  $R_{ij}$  označuje tentokrát výnos domáceho dlhopisu pozorovaný v  $i - ty$  deň s maturitou  $\tau_j$ . Ďalej nech  $R(\tau_j, r_1, r_2, r_d)$  označuje výnos vypočítaný pomocou aproximácie (5.14) a vyjadrenia  $R^{ap} = -\frac{\ln P^{ap}}{\tau}$ . Váhy volíme opäť rovnako ako v publikácii [11] ako  $w_{ij} = \tau_j^2$ . Do kalibrácie vstupujú parametre odhadnuté pri kalibrácii modelu európskej úrokovej miery a to konkrétne  $b_1, b_2, c_1, c_2, \sigma_1, \sigma_2$ . Parametre, ktorých optimálnu hodnotu musíme nájsť sú parametre  $a_1, a_2, a_3, a_4, \sigma_d$ . Treba si uvedomiť, že pre CIR model platí z (3.28)  $a_1 = 0, a_3 = a_4 = \kappa_d$ . Hľadáme teda také hodnoty parametrov  $\kappa_d, a_2, \sigma_d$  a realizáciu domácej úrokovej miery  $r_d$  tak, aby tentokrát minimalizovali funkciu:

$$F_d(\kappa_d, a_2, \sigma_d, r_d) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} (R(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}, r_{di}) - R_{ij})^2. \quad (5.16)$$

Po dosadení aproximačnej formuly (5.14) dostávame účelovú funkciu v tvare:

$$F_d(\kappa_d, a_2, \sigma_d, r_d) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (A(\tau)r_d + B(\tau)r_1 + C(\tau)r_2 + D(\tau) + R_{ij}\tau_j^2)^2. \quad (5.17)$$

Túto funkciu vieme transformovať na nasledovný tvar:

$$F_d(\kappa_d, a_2, \sigma_d, r_d) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{w_{ij}}{\tau_j^2} (K_{1ij}\kappa_d^2 + K_{2ij}\kappa_d + K_{3ij}r_d + K_{4ij}\sigma_d^2 r_d + K_{5ij} + R_{ij}\tau_j^2)^2. \quad (5.18)$$

Kvôli prehľadnosti uvádzame tvary koeficientov  $K_{1ij}, K_{2ij}, K_{3ij}, K_{4ij}, K_{5ij}$  v prílohe. Rovnako ako pri kalibrácii modelu pre európsku úrokovú mieru aj tu zavádzame podľa [6] substitúciu v tvare  $y_d = \sigma_d^2 r_d$ . Stále však nejde o účelovú funkciu v kvadratickej forme a to kvôli výskytu premennej  $\kappa_d$  a aj jej štvorca  $\kappa_d^2$  vo vnútri výrazu umocňovaného na druhú. Jednou z možností ako sa tomuto problému vyhnúť, je minimalizovať túto funkciu nielen vzhľadom na parameter  $a_2$ , ale zároveň aj vzhľadom na parameter  $\kappa_d$ , čím sa v účelovej funkcii (5.18) stanú premenné  $\kappa_d$  a  $\kappa_d^2$  konštantami a budeme túto funkciu teda môcť písať v kvadratickej forme. Teda pôjde o kvadratickú funkciu s premennými  $r_{d1}, \dots, r_{dn}, y_{d1}, \dots, y_{dn}$ . Ich optimálne hodnoty teda vieme vyjadriť pre každú zvolenú dvojicu parametrov  $\kappa_d, a_2$ . Hodnoty  $\sigma_d^2$  dostaneme ako priemer, alebo v prípade extrémov medián, podielov  $y_{di}/r_{di}$ . Opäť sa budeme snažiť prepísať sústavu

do maticového tvaru, s ktorým sa pracuje lepšie.

Nech

$$x_d = [r_{d1}, \dots, r_{dn}, y_{d1}, \dots, y_{dn}]'$$

Označme

$$Q_d = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}_{(2n \times 2n)},$$

kde bloky tejto matice sú nasledovné:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m K_{31}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m K_{3n}^2 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m K_{3n}K_{4n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m K_{3n}K_{4n} \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m K_{41}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{j=1}^m K_{4n}^2 \end{bmatrix},$$

Nech  $p_d = [p_{d1} \quad p_{d2}]$ , kde

$$p_{d1} = \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m K_{3ij}(R_{ij}\tau_j + K_{1ij}\kappa_d^2 + K_{2ij}\kappa_d + K_{5ij}) \times [1, \dots, 1]_{n \times 1},$$

$$p_{d2} = \sum_{n=1}^n \sum_{j=1}^m K_{4ij}(R_{ij}\tau_j + K_{1ij}\kappa_d^2 + K_{2ij}\kappa_d + K_{5ij}) \times [1, \dots, 1]_{n \times 1},$$

a nech ďalej  $k_d = [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (R_{ij}\tau_j + K_{1ij}\kappa_d^2 + K_{2ij}\kappa_d + K_{5ij})^2]$ . Potom nadobudne účelová funkcia z (5.18) tvar:

$$F_d(x_d) = \frac{1}{mn}(x_d'Q_d x_d + 2p_d'x_d + k_d) \quad (5.19)$$

Optimálny vektor získame minimalizáciou tejto účelovej funkcie. V prostredí programu Scilab opäť použijeme príkaz *gld* [17]. Dáta sú generované použitím nasledovných parametrov  $r_{10} = 0.02$ ,  $\kappa_1 = 1.2$ ,  $\theta_1 = 0.022$ ,  $\sigma_1 = 0.05$ ,  $\lambda_1 = -0.1$ ,  $r_{20} = 0.01$ ,  $\kappa_2 = 0.5$ ,  $\theta_2 = 0.013$ ,  $\sigma_2 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = -0.1$ ,  $r_{d0} = 0.01$ ,  $\kappa_d = 1$ ,  $\sigma_d = 0.01$ ,  $\lambda_d = -0.1$ ,  $\rho_{12} = 0$ ,  $\rho_{1d} = 0$ ,  $\rho_{2d} = 0$  a  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_d = 1/2$ . Teda po prepočítaní na parametre v rizikovo neutrálnej miere  $b_1 = 0.0264$ ,  $c_1 = 0.0065$ ,  $b_2 = -1.195$ ,  $c_2 = -0.495$ ,

$a_3 = a_4 = \kappa_d = -0.999$ ,  $\sigma_1 = 0.05$ ,  $\sigma_2 = 0.05$ ,  $\sigma_d = 0.01$ . Optimálne hodnoty parametrov  $\kappa_d, a_2$  dostaneme minimalizáciou účelovej funkcie  $G_d$  danou vzťahom

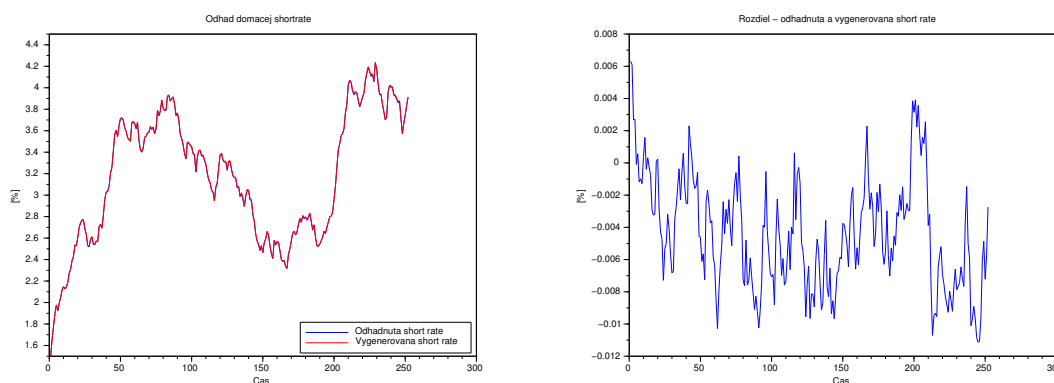
$$G(\kappa_d, a_2) = \min_{x_d} \frac{1}{mn} (x_d' Q_d x_d + 2p_d' x_d + k_d) \quad (5.20)$$

Minimalizáciu tejto funkcie vykonáme pomocou funkcie *optim* [18] pre minimalizáciu funkcie viacerých premenných. Pri výpočte ceny dlhopisu použijeme krátkodobú úrokovú mieru a parametre odhadnuté v prvej fáze kalibrácie.

parameter	$b_1$	$c_1$	$b_2$	$c_2$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
odhadnutá hodnota	0.0208	0.0089	-1.200	-0.490	0.0612	0.0081

**Tabuľka 5.4:** Odhadnuté parametre modelu európskej krátkodobej úrokovej miery.

Na obrázku 5.5 vidíme porovnanie odhadnutej a vygenerovanej domácej krátkodobej úrokovej miery. Rozdiel v absolútných hodnotách je rádu  $10^{-5}$ . S touto aproximáciou môžeme byť spokojní.



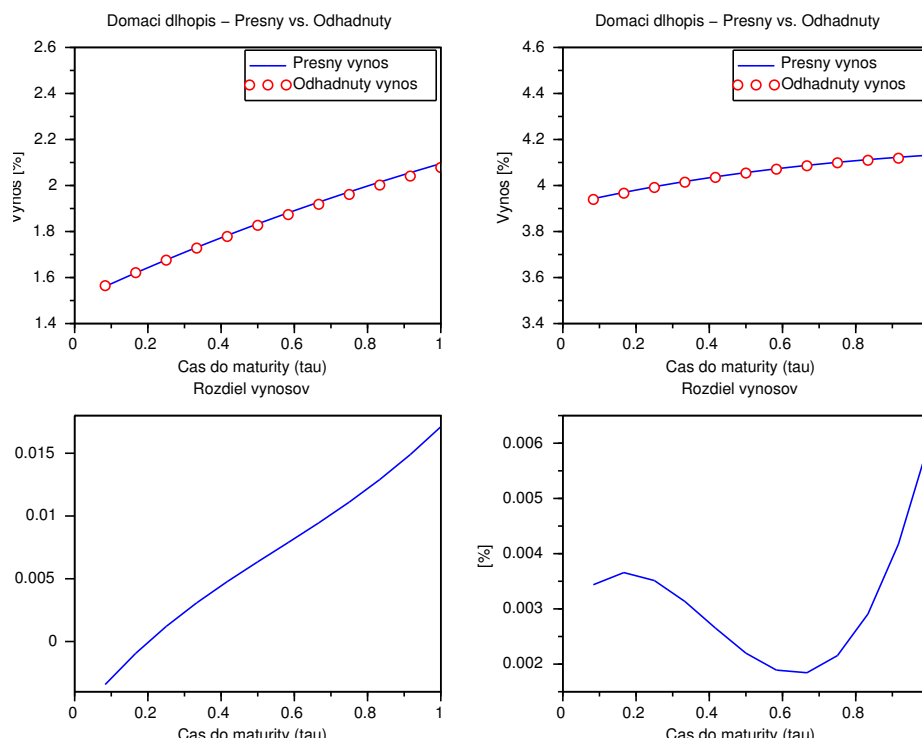
**Obr. 5.5:** Porovnanie vygenerovanej a odhadnutej domácej úrokovej miery.

Po spustení kalibrácie pre krátkodobú domácu úrokovú mieru dostávame nasledujúce odhadnuté parametre. Ceny rátame numericky pomocou systému diferenciálnych rovníc

parameter	$\kappa_d$	$a_2$	$\sigma_d$
reálna hodnota	1	-0.999	0.01
odhadnutá hodnota	0.952	-0.948	0.034

**Tabuľka 5.5:** Odhadnuté parametre modelu domácej krátkodobej úrokovej miery.

(3.30). Po preskúmaní grafov na obrázku 5.6 môžeme súdiť, že kalibrácia bola aj napriek



**Obr. 5.6:** Porovnanie skutočných a odhadnutých domácich výnosov. V ľavej časti pre úrokovú mieru z prvého a vpravo z 252. dňa, teda o rok neskôr.

nepresnému odhadu parametra  $\sigma_d$  dostatočne presná. Rozdiely medzi výnosmi sú v absolútnych hodnotách rádu  $10^{-5}$ .

### 5.2.2 Odhady pre CKLS model

Rovnako ako v prípade kalibrácie modelu európskej úrokovej miery sa budeme snažiť nájsť optimálny odhad parametra  $\gamma_d$ . Porovnáme hodnoty účelových funkcií, ktoré



musíme počas kalibrácie minimalizovať. Najnižšia hodnota bude teda znamenať najlepšiu voľbu tohto parametra. Dáta, na ktorých budeme model kalibrovať sú rovnaké ako boli použité v kapitole 5.2.1 a opäť očakávame, že optimálna voľba parametrov bude v konečnom dôsledku  $\gamma_d = 1/2$ . Parametre  $\gamma_1, \gamma_2$  sú rovné  $1/2$ .

$\gamma_d$	Opt.
0	$1.8 \cdot 10^{-6}$
0.25	$4.252 \cdot 10^{-8}$
0.5	$5.405 \cdot 10^{-10}$
0.75	$1.556 \cdot 10^{-9}$
1	$2.018 \cdot 10^{-9}$

**Tabuľka 5.6:** Hodnoty účelovej funkcie pre rôzne hodnoty  $\gamma_d$ .

Predpoklady sa pri pohľade na výsledky splnili, optimálna hodnota podľa tabuľky a grafu vychádza  $\gamma_d = 1/2$ . V prípade kalibrácie domácej úrokovej miery model dobre odhadol optimálny parameter  $\gamma_d$ .

### 5.3 Simulačná analýza

Kalibráciu trojfaktorového modelu sme opakovali 400 krát a v tabuľke 5.7 zhrnuli výsledky. Jedna iterácia spočívala vo vygenerovaní domácej a európskej krátkodobej úrokovej miery s fixnými parametrami, vygenerovaní výnosov a následným výpočtom odhadu parametrov z týchto vygenerovaných výnosov. Pri tvorení súhrnných výsledkov musíme skontrolovať, či sa v niektorých prípadoch faktory a parametre pri kalibrácii európskeho modelu úrokovej miery neodhadli v opačnom poradí. Túto kontrolu sme spravili manuálne, skontrolovaním hodnôt parametrov graficky a v histograme. Pre naše simulácie sme nemuseli vykonať žiadne úpravy.

Kalibráciu trojfaktorového modelu hodnotíme ako úspešnú. Zvolená metodika, aj napriek niektorým nie úplne presným odhadom jednotlivých parametrov, aproximuje domáce aj európske výnosové krivky dostatočne presne. Je zaujímavé si všimnúť, že odhadnutá variancia druhého faktora bola vo viac ako 30% prípadoch záporná. Neskôr

Param.	$b_1$	$c_1$	$a_2$	$b_2$	$c_2$	$\kappa_d$	$\sigma_1^{2priem}$	$\sigma_2^{2priem}$	$\sigma_d^{2priem}$	$\sigma_1^{2med}$	$\sigma_2^{2med}$	$\sigma_d^{2med}$
Min	0.012	- 0.005	- 0.978	- 1.195	- 0.523	0.951	- 0.009	- 0.093	0.004	- 0.011	- 0.287	- 0.041
Max	0.031	0.017	- 0.994	- 1.085	- 0.462	1.13	0.02	0.117	0.013	0.015	0.305	0.037
Priemer	0.021	0.009	- 0.985	- 1.169	- 0.503	0.983	0.006	0.006	0.008	0.004	0.005	0.009
Medián	0.021	0.009	- 0.984	- 1.179	- 0.505	0.981	0.005	0.005	0.008	0.004	0.004	0.009
Štd. od.	0.002	0.002	0.003	0.026	0.007	0.036	0.004	0.026	0.002	0.004	0.061	0.006
% záp.	-	-	-	-	-	-	5.136	33.837	0.	6.949	36.512	5.45

**Tabuľka 5.7:** Výsledky simulačnej analýzy.

budeme skúmať, či sa tento model hodí aj na aplikáciu na reálne dáta, a či sa dajú dosatočne dobre aproximovať výnosy na domácom (Bribor) a Európskom trhu (Euribor).

## 6 Kalibrácia modelu na reálnych dátach

V predchádzajúcej časti sme videli, že kalibrácia modelu na simulovaných dátach dáva uspokojivé výsledky. V nasledujúcej časti budeme kalibrovať trojfaktorový CIR model s nulovou koreláciou na základe výnosov pozorovaných na domácom a európskom trhu. Zhodnotíme, či vieme tieto výnosy dostatočne dobre aproximovať pomocou odhadnutých parametrov a krátkodobých úrokových mier.

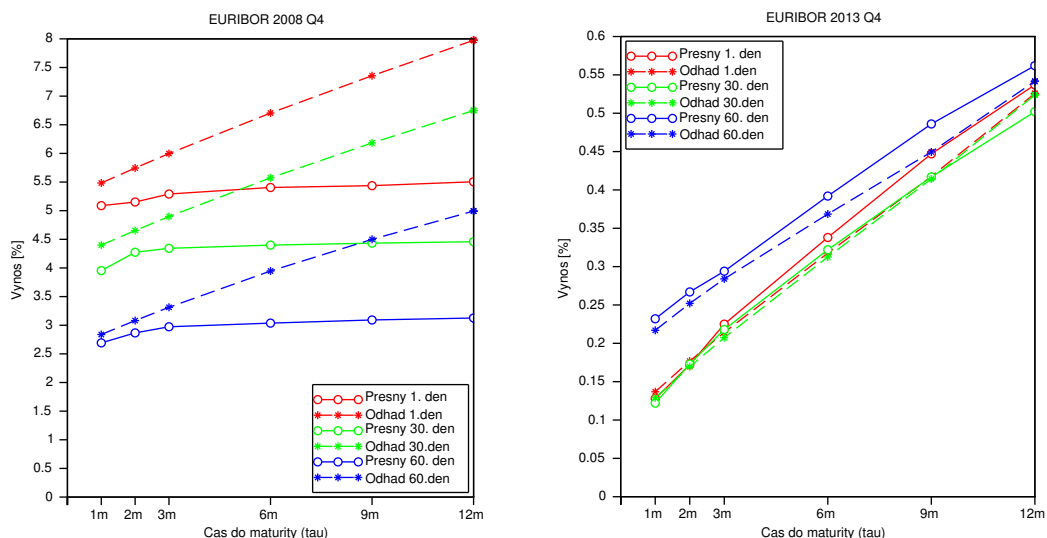
Kalibráciu modelu a odhad krátkodobej úrokovej miery, ktoré používame na výpočet aproximácie výnosov na európskom trhu, budeme zakladať na historických dátach sadzby Euribor [15]. Budeme používať výnosy zo štvrtých kvartálov v rokoch 2008 a 2013 (t.j. obdobie od 1.10.-31.12.2008 resp. 2013). Na aproximáciu výnosov na domácom trhu budeme používať historické hodnoty sadzby Bribor [16] z doby 1.10.-31.12.2008 a samozrejme už odhadnuté parametre a krátkodobú úrokovú mieru z aproximácie výnosov na európskom trhu (Euribor).

### 6.1 Výnosy na európskom trhu

Odhady parametrov modelu sú zhrnuté v nasledovnej tabuľke:

parameter	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$
Euribor 2013 Q4	0.021	-0.092	-1.01	-0.98	2.246	-1.789
Euribor 2008 Q4	0.046	0.013	-1.00	-0.99	1.013	0.966

Na obrázku 6.1 vidíme presné a odhadnuté európske výnosové krivky pre 1. 30. a 60. deň kvartálu. Odhad pre rok 2013 je celkom presný rozdiely vo výnosoch sú v percentách rádu  $10^{-1}$  pre všetky 3 dni pozorovania. Pre rok 2008 však odhady už tak presné nie sú. Model nedokázal zachytiť konštantnosť výnosov pre vyššie maturity. Pri porovnaní začiatkov výnosových kriviek vidíme, že model neodhadol presne priebeh okamžitej úrokovej miery. V roku 2013 tento jav nenastáva.



Obr. 6.1: Porovnanie aproximácie výnosov s reálnymi hodnotami z trhu.

Odhadnuté parametre pre rok 2008 poslúžia ako vstup pre aproximáciu výnosov na domácom trhu.

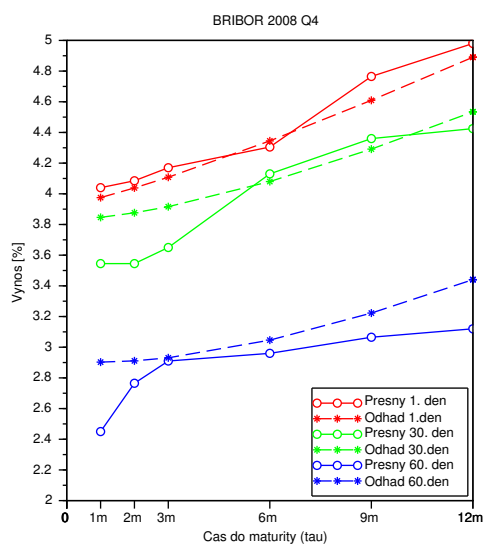
## 6.2 Výnosy na domácom trhu

Odhad parametrov pre tretí faktor popisujúci správanie sa domácej úrokovej miery sú zhrnuté v nasledovnej tabuľke: Na obrázku 6.2 vidíme opäť porovnanie aproximovaných

parameter	$\kappa_d$	$a_2$	$\sigma_d^2$
Bribor 2008 Q4	0.95	0.949	-1.142

a reálnych výnosov pre 3 dni z pozorovaného obdobia. Aj napriek tomu, že aproximácia výnosov sadzby Euribor pre štvrtý kvartál roku 2008 nie je dostatočne presná sa podarilo aproximovať výnosy na domácom trhu presnejšie. Rozdiely vo výnosoch sú v priemere 0.2%. Presnejšie výsledky by sme mohli dostať zmenou špecifikácie modelu.

Podobné výsledky, avšak pre dvojfaktorový model, je možné nájsť v diplomovej práci Z. Zíkovej [12].



Obr. 6.2: Porovnanie aproximácie výnosov s reálnymi hodnotami z trhu.

## Záver

V diplomovej práci sme sa zaoberali trojfaktorovým konvergenčným modelom úrokových mier. Model popisuje vývoj európskej úrokovej miery a úrokovej miery krajiny, ktorá sa chystá na vstup do menovej únie. Európska úroková miera je modelovaná ako súčet dvoch faktorov a navyše o nej predpokladáme, že ovplyvňuje vývoj tej domácej.

Predstavili sme si model Vašíčkovho typu a jeho zovšeobecnenia - modely typov CIR a CKLS. Na rozdiel od modelov Vašíčkovho a CIR typu neexistuje v prípade CKLS modelu explicitný vzorec na výpočet ceny dlhopisov. Preto sme navrhli aproximáciu pre cenu tohto dlhopisu odvodenú z riešenia pre cenu dlhopisu v trojfaktorom modeli Vašíčkovho typu a odvodili sme aj rád chyby tejto aproximácie.

V ďalších častiach práce sme sa zaoberali kalibráciou CIR modelu s nulovou koreláciou. Túto špecifikáciu modelu sme zvolili z dôvodu, že pre ňu existuje explicitné vyjadrenie pre cenu dlhopisu. Navrhli sme aj spôsob, akým by sa dal kalibrovať aj model špecifikácie CKLS. Súčasťou kalibrácie je aj odhad krátkodobej úrokovej miery na domácom a európskom trhu, nakoľko používať hodnoty overnightu nemusí byť korektné. V prípade simulovaných dát sme ukázali, že model dokáže výnosy a krátkodobú úrokovú mieru odhadovať s veľkou presnosťou.

V závere práce sme testovali kalibráciu modelu na reálnych dátach. Ako výnosy na európskom trhu poslúžili dáta sadzby Euribor (Euro Interbank Offered Rate), v prípade domáceho trhu sme využili historické dáta sadzby Bribor (Bratislava Interbank Offered Rate). Model dokázal veľmi dobre aproximovať výnosy Euribor z obdobia 1.10.2013-31.12.2013, avšak pre rovnaké obdobie roku 2008 už aproximácia nebola taká presná. Aj napriek tomu však model pomocou odhadnutých parametrov a krátkodobej úrokovej miery na európskom trhu dokázal aproximovať výnosy na domácom trhu relatívne presne.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] Corzo, T., Schwartz, E.S.: *Convergence within the European Union: Evidence from Interest Rates*, Economic Notes, Vol. 29 (2000), pp. 243-268
- [2] Halgašová, J.: *Aproximácia cien dlhopisov v dvojfaktorových modeloch úrokových mier*, Diplomová práca, FMFI UK, 2011.
- [3] Lacko, V.: *Two-Factor Convergence model of Cox-Ingersoll-Ross Type*, Master's Thesis, FMFI UK, 2010.
- [4] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Nakladateľstvo EPOS, 2005, Bratislava
- [5] Mikula, K., Stehlíková, B., Ševčovič, D.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU, 2009, Bratislava
- [6] Mosný, V.: *Odhadovanie okamžitej úrokovej miery v CSKL modeli*, Diplomová práca, FMFI UK, 2012.
- [7] Stehlíková, B.: *A simple analytic approximation formula for the bond price in the Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders model*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Series B, Volume 4, Number 3 (2013) pp. 224-234
- [8] Stehlíková, B., Ševčovič, D.: *Approximate formulae for pricing zero-coupon bonds and their asymptotic analysis*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 6(2) 2009, pp. 274-283
- [9] Stehlíková, B., Zíková, Z.: *A three-factor convergence model of interest rates.*, Proceedings of Algoritmy 2012, pp. 95-104
- [10] Sutóris, I.: *Odhady parametrov modelov časovej štruktúry úrokových mier*, Diplomová práca, FMFI UK, 2009.
- [11] Ševčovič, D., Urbánová Csajková, A.: *On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll and Ross interest rate model*, Central European Journal of Operations Research 13, 2005, pp. 169-188

- [12] Zíková, Z.: *Konvergenčné modely úrokových mier*, Diplomová práca, FMFI UK, 2011.
- [13] Zlatoš, P.: *Lineárna algebra a geometria*, Nakladateľstvo EPOS, 2010, Bratislava
- [14] Eesti Pank, Bank of Estonia, 25.4.2014  
<http://statistika.eestipank.ee>
- [15] Euribor, 25.4.2014  
<http://www.euribor-ebf.eu>
- [16] Národná banka Slovenska, 25.4.2014  
<http://www.nbs.sk>
- [17] Scilab Online Help, Linear quadratic programming solver, 25.4.2014  
[https://help.scilab.org/docs/5.3.3/en\\_US/qlld.html](https://help.scilab.org/docs/5.3.3/en_US/qlld.html)
- [18] Scilab Online Help, Non-linear optimization routine, 25.4.2014  
[https://help.scilab.org/docs/5.3.3/en\\_US/optim.html](https://help.scilab.org/docs/5.3.3/en_US/optim.html)
- [19] Scilab Online Help, Ordinary differential equation solver, 25.4.2014  
[https://help.scilab.org/docs/5.3.2/en\\_US/ode.html](https://help.scilab.org/docs/5.3.2/en_US/ode.html)



## Príloha

### Výpočet integrálov

#### Kapitola 3.1

$$\begin{aligned}
D(\tau) = & (a_4^2 \sigma_2^2 (a_2^2 (e^{2c_2 \tau} / (2c_2) - (2e^{c_2 \tau}) / c_2 + \tau) - 2a_2 c_2 ((a_2 c_2 e^{a_2 \tau} - a_2 c_2 - a_2^2) e^{c_2 \tau} \\
& + (-c_2^2 - a_2 c_2) e^{a_2 \tau}) / (a_2 (c_2^2 + a_2 c_2)) + \tau) + c_2^2 (e^{2a_2 \tau} / (2a_2) \\
& - (2e^{a_2 \tau} / a_2 + \tau))) / (2a_2^2 (a_2 c_2)^2 c_2^2) + (a_3 a_4 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 (((a_2^4 (2b_2 c_2^2 + 2b_2^2 c_2) \\
& + 2a_2^3 b_2^2 c_2^2 + 2a_2^5 b_2 c_2) e^{b_2 \tau} + (a_2^2 ((-2) b_2^3 c_2^2 - 2b_2^4 c_2) \\
& + a_2^3 ((-2) b_2^2 c_2^2 - 2b_2^3 c_2)) e^{a_2 \tau} + a_2^2 (2b_2^3 c_2^2 + 2b_2^4 c_2) \\
& + a_2^4 ((-2) b_2 c_2^2 - 2b_2^2 c_2) + a_2^3 (2b_2^3 c_2 + 2b_2^4) + a_2^5 ((-2) b_2 c_2 - 2b_2^2)) e^{c_2 \tau} \\
& + ((a_2^2 ((-2) b_2 c_2^4 - 2b_2^2 c_2^3) + a_2^3 ((-2) b_2 c_2^3 - 2b_2^2 c_2^2)) e^{a_2 \tau} \\
& + a_2^2 (2b_2 c_2^4 + 2b_2^2 c_2^3) + a_2^3 (2c_2^4 + 2b_2 c_2^3) + a_2^4 ((-2) b_2 c_2^2 - 2b_2^2 c_2) + a_2^5 ((-2) c_2^2 - 2b_2 c_2)) e^{b_2 \tau} \\
& + (a_2 (b_2^2 c_2^4 + 2b_2^3 c_2^3 + b_2^4 c_2^2) + b_2^3 c_2^4 + a_2^2 (b_2^2 c_2^3 + b_2^3 c_2^2) + b_2^4 c_2^3) e^{2a_2 \tau} \\
& + (a_2 ((-2) b_2^2 c_2^4 - 4b_2^3 c_2^3 + (-2) b_2^4 c_2^2) + a_2^2 (2b_2 c_2^4 + 2b_2^2 c_2^3 + 2b_2^3 c_2^2 + 2b_2^4 c_2) \\
& + (-4) b_2^3 c_2^4 + a_2^3 (2b_2 c_2^3 + 4b_2^2 c_2^2 + 2b_2^3 c_2) + (-4) b_2^4 c_2^3) e^{a_2 \tau}) / (a_2 (a_2 (2b_2 c_2^3 + 4b_2^2 c_2^2 + 2b_2^3 c_2) \\
& + 2b_2^2 c_2^3 + a_2^2 (2b_2 c_2^2 + 2b_2^2 c_2) + 2b_2^3 c_2^2)) + (b_2 c_2 + a_2 (-c_2 - b_2) + a_2^2 \tau) / (a_2^2 (a_2 - b_2) b_2 (a_2 c_2) c_2) \\
& + (a_4 \rho_{2d} \sigma_2 \sigma_d ((c_2 a_2) \tau - ((2a_2^2 c_2 e^{a_2 \tau} - 2a_2^2 c_2 + (-2) a_2^3) e^{c_2 \tau} \\
& + (-c_2^3 - a_2 c_2^2) e^{2a_2 \tau} + (4c_2^3 + 2a_2 c_2^2 + (-2) a_2^2 c_2) e^{a_2 \tau}) / (a_2 (2c_2^2 + 2a_2 c_2))) / (a_2^2 (a_2 - c_2) c_2) \\
& + (a_4 c_1 (c_2 (\tau - e^{a_2 \tau} / a_2) - a_2 (\tau - e^{c_2 \tau} / c_2))) / (a_2 (a_2 - c_2) c_2) \\
& + (a_3^2 \sigma_1^2 (a_2^2 (e^{2b_2 \tau} / (2b_2) - (2e^{b_2 \tau}) / b_2 + \tau) - 2a_2 b_2 ((a_2 b_2 e^{a_2 \tau} \\
& - a_2 b_2 - a_2^2) e^{b_2 \tau} + (-b_2^2 - a_2 b_2) e^{a_2 \tau}) / (a_2 (b_2^2 + a_2 b_2)) + \tau) + b_2^2 (e^{2a_2 \tau} / (2a_2) - \\
& (2e^{a_2 \tau} / a_2 + \tau))) / (2a_2^2 (a_2 - b_2)^2 b_2^2) + (a_3 \rho_{1d} \sigma_1 \sigma_d ((b_2 - a_2) \tau \\
& - ((2a_2^2 b_2 e^{a_2 \tau} - 2a_2^2 b_2 + (-2) a_2^3) e^{b_2 \tau} + (-b_2^3 - a_2 b_2^2) e^{2a_2 \tau}) \\
& + (4b_2^3 + 2a_2 b_2^2 + (-2) a_2^2 b_2) e^{a_2 \tau}) / (a_2 (2b_2^2 + 2a_2 b_2))) / (a_2^2 (a_2 - b_2) b_2) \\
& + (a_3 b_1 (b_2 (\tau - e^{a_2 \tau} / a_2) - a_2 (\tau - e^{b_2 \tau} / b_2))) / (a_2 (a_2 - b_2) b_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\sigma_d^2(e^{2a_2\tau}/(2a_2) - (2e^{a_2\tau})/a_2 + \tau))/(2a_2^2) \\
& + (a_1(\tau - e^{a_2\tau}/a_2))/a_2 - ((-3\sigma_d^2)/(4a_2^3) - (a_4(3c_2^3 + a_2c_2^2 + \\
& (-2)a_2^2c_2 + (-2)a_2^3)\rho_{2d}\sigma_2\sigma_d)/(a_2^3(a_2 - c_2)c_2(2c_2^2 + 2a_2c_2)) \\
& + (-a_3(3b_2^3 + a_2b_2^2 + (-2)a_2^2b_2 + (-2)a_2^3)\rho_{1d}\sigma_1\sigma_d)/(a_2^3(a_2 - b_2)b_2(2b_2^2 + 2a_2b_2)) \\
& + (a_4^2((-2c_2(-c_2^2 - a_2c_2 - a_2^2)))/(c_2^2 + a_2c_2) - (3c_2^2)/(2a_2) \\
& + (-3a_2^2)/(2c_2))\sigma_2^2)/(2a_2^2(a_2c_2)^2c_2^2) + (a_3a_4(a_2(b_2^2c_2^4 + 2b_2^3c_2^3 + b_2^4c_2^2) \\
& + a_2((-2)b_2^2c_2^4 - 4b_2^3c_2^3 + (-2)b_2^4c_2^2) + a_2^2(2b_2c_2^4 + 2b_2^2c_2^3 + 2b_2^3c_2^2 + 2b_2^4c_2) \\
& + a_2^2(2b_2c_2^4 + 2b_2^2c_2^3) + a_2^2((-2)b_2c_2^4 - 2b_2^2c_2^3) + a_2^3(2c_2^4 + 2b_2c_2^3) \\
& + (-3)b_2^3c_2^4 + a_2^2(b_2^2c_2^3 + b_2^3c_2^2) + a_2^3(2b_2c_2^3 + 4b_2^2c_2^2 + 2b_2^3c_2) \\
& + a_2^3((-2)b_2c_2^3 - 2b_2^2c_2^2) + (-3)b_2^4c_2^3 + a_2^2(2b_2^3c_2^2 + 2b_2^4c_2) + a_2^2((-2)b_2^3c_2^2 - 2b_2^4c_2) \\
& + a_2^3((-2)b_2^2c_2^2 - 2b_2^3c_2) + a_2^4(2b_2c_2^2 + 2b_2^2c_2) + 2a_2^4((-2)b_2c_2^2 - 2b_2^2c_2) + 2a_2^3b_2^2c_2^2 \\
& + a_2^5((-2)c_2^2 - 2b_2c_2) + a_2^3(2b_2^3c_2 + 2b_2^4) + a_2^5((-2)b_2c_2 - 2b_2^2) + 2a_2^5b_2c_2)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2) \\
& / (a_2^3(a_2 - b_2)b_2(a_2 - c_2)c_2(a_2(2b_2c_2^3 + 4b_2^2c_2^2 + 2b_2^3c_2) + 2b_2^2c_2^3 + a_2^2(2b_2c_2^2 + 2b_2^2c_2) + 2b_2^3c_2^2)) \\
& + (a_3^2((-2b_2(-b_2^2 - a_2b_2 - a_2^2)))/(b_2^2 + a_2b_2) - (3b_2^2)/(2a_2) + (-3a_2^2)/(2b_2))\sigma_1^2)/(2a_2^2(a_2 - b_2)^2b_2^2) \\
& + (a_4c_1(a_2/c_2 - c_2/a_2))/(a_2(a_2 - c_2)c_2) + (a_3b_1(a_2/b_2 - b_2/a_2))/(a_2(a_2 - b_2)b_2) + (-a_1)/a_2^2)
\end{aligned}$$

## Kapitola 5.2

$$\begin{aligned}
 D(\tau) = & (a_4^2 r_2^{2\gamma_2} \sigma_2^2 (a_2^2 (e^{2c_2\tau} / (2c_2) - (2e^{c_2\tau}) / c_2 + \tau) - 2a_2 c_2 ((a_2 c_2 e^{a_2\tau} - a_2 c_2 - a_2^2) e^{c_2\tau} \\
 & + (-c_2^2 - a_2 c_2) e^{a_2\tau}) / (a_2 (c_2^2 + a_2 c_2)) + \tau) \\
 & + c_2^2 (e^{2a_2\tau} / (2a_2) - (2e^{a_2\tau}) / a_2 + \tau)) / (2a_2^2 (a_2 - c_2)^2 c_2^2) \\
 & + (a_4 c_1 (c_2 (\tau e^{a_2\tau} / a_2) a_2 (\tau e^{c_2\tau} / c_2))) / (a_2 (a_2 c_2) c_2) \\
 & + (a_3^2 r_1^{2\gamma_1} \sigma_1^2 (a_2^2 (e^{2b_2\tau} / (2b_2) - (2e^{b_2\tau}) / b_2 + \tau) - 2a_2 b_2 ((a_2 b_2 e^{a_2\tau} a_2 b_2 a_2^2) e^{b_2\tau} \\
 & + (b_2^2 a_2 b_2) e^{a_2\tau}) / (a_2 (b_2^2 + a_2 b_2)) + \tau) + b_2^2 (e^{2a_2\tau} / (2a_2) \\
 & - (2e^{a_2\tau}) / a_2 + \tau)) / (2a_2^2 (a_2 b_2)^2 b_2^2) + (a_3 b_1 (b_2 (\tau e^{a_2\tau} / a_2) a_2 (\tau e^{b_2\tau} / b_2))) / (a_2 (a_2 b_2) b_2) \\
 & + (r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2 (e^{2a_2\tau} / (2a_2) - (2e^{a_2\tau}) / a_2 + \tau)) / (2a_2^2) + (a_1 (\tau e^{a_2\tau} / a_2)) / a_2 - ((-3r_d^{2\gamma_d} \sigma_d^2) / (4a_2^3)) \\
 & + (a_4^2 ((-2c_2 (c_2^2 a_2 c_2 a_2^2)) / (c_2^2 + a_2 c_2) - (3c_2^2) / (2a_2) + (-3a_2^2) / (2c_2)) r_2^{2\gamma_2} \sigma_2^2) / (2a_2^2 (a_2 - c_2)^2 c_2^2) \\
 & + (a_3^2 ((-2b_2 (-b_2^2 - a_2 b_2 - a_2^2)) / (b_2^2 + a_2 b_2) - (3b_2^2) / (2a_2) \\
 & + (-3a_2^2) / (2b_2)) r_1^{2\gamma_1} \sigma_1^2) / (2a_2^2 (a_2 - b_2)^2 b_2^2) + (a_4 c_1 (a_2 / c_2 - c_2 / a_2)) / (a_2 (a_2 - c_2) c_2) \\
 & + (a_3 b_1 (a_2 / b_2 - b_2 / a_2)) / (a_2 (a_2 - b_2) b_2) + (-a_1) / a_2^2)
 \end{aligned}$$

## Koeficienty

### Kapitola 5.2.1

$$\begin{aligned}
K_{1ij} &= (r_{2i}^{2\gamma_2} \sigma_2)^2 (a_2^2 (e^{2c_2\tau_j} / (2c_2) - (2e^{c_2\tau_j}) / c_2 + \tau_j) - 2a_2c_2 ((a_2c_2e^{a_2\tau_j} - a_2c_2a_2^2) e^{c_2\tau_j} \\
&\quad + (-c_2^2 - a_2c_2) e^{a_2\tau_j}) / (a_2(c_2^2 + a_2c_2)) + \tau_j) \\
&\quad + c_2^2 (e^{2a_2\tau_j} / (2a_2) - (2e^{a_2\tau_j}) / a_2 + \tau_j) / (2a_2^2 (a_2c_2)^2 c_2^2) \\
&\quad + (r_{1i}^{2\gamma_1} \sigma_1^2 (a_2^2 (e^{2b_2\tau_j} / (2b_2) - (2e^{b_2\tau_j}) / b_2 + \tau_j) \\
&\quad - 2a_2b_2 ((a_2b_2e^{a_2\tau_j} a_2b_2a_2^2) e^{b_2\tau_j} + (b_2^2 a_2b_2) e^{a_2\tau_j}) / (a_2(b_2^2 + a_2b_2)) + \tau_j) \\
&\quad + b_2^2 (e^{2a_2\tau_j} / (2a_2) - (2e^{a_2\tau_j}) / a_2 + \tau_j) / (2a_2^2 (a_2b_2)^2 b_2^2) \\
&\quad - ((((-2c_2(c_2^2 a_2c_2a_2^2)) / (c_2^2 + a_2c_2) - (3c_2^2) / (2a_2) \\
&\quad + (-3a_2^2) / (2c_2)) r_{2i}^{2\gamma_2} \sigma_2^2) / (2a_2^2 (a_2c_2)^2 c_2^2) - ((((-2b_2(b_2^2 a_2b_2a_2^2)) / (b_2^2 + a_2b_2) \\
&\quad - (3b_2^2) / (2a_2) + (-3a_2^2) / (2b_2)) r_{1i}^{2\gamma_1} \sigma_1^2) / (2a_2^2 (a_2 - b_2)^2 b_2^2)) \\
K_{2ij} &= (c_1 (c_2 (\tau_j - e^{a_2\tau_j} / a_2) - a_2 (\tau_j - e^{c_2\tau_j} / c_2))) / (a_2 (a_2 - c_2) c_2) \\
&\quad + (b_1 (b_2 (\tau_j - e^{a_2\tau_j} / a_2) - a_2 (\tau_j - e^{b_2\tau_j} / b_2))) / (a_2 (a_2 - b_2) b_2) \\
&\quad - ((c_1 (a_2 / c_2 - c_2 / a_2)) / (a_2 (a_2 - c_2) c_2)) - ((b_1 (a_2 / b_2 - b_2 / a_2)) / (a_2 (a_2 - b_2) b_2)) \\
&\quad + (a_3 (b_2 (1 - e^{a_2\tau_j}) - a_2 (1 - e^{b_2\tau_j}))) / (a_2 b_2 (a_2 - b_2)) r_{1i} + (a_4 (c_2 (1 - e^{a_2\tau_j}) \\
&\quad - a_2 (1 - e^{c_2\tau_j}))) / (a_2 c_2 (a_2 - c_2)) r_{2i} \\
K_{3ij} &= (1 - e^{a_2\tau_j}) / a_2 \\
K_{4ij} &= ((e^{2a_2\tau_j} / (2a_2) - (2e^{a_2\tau_j}) / a_2 + \tau_j) / (2a_2^2) - ((-3) / (4a_2^3))) \\
K_{5ij} &= (a_1 (\tau_j - e^{a_2\tau_j} / a_2)) / a_2 - ((-a_1) / a_2^2)
\end{aligned}$$

(6.1)