UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VLASTNOSTI HODNOTOVEJ FUNKCIE ÚLOHY PARAMETRICKÉHO KVADRATICKÉHO PROGRAMOVANIA A ICH VYUŽITIE V OPTIMALIZÁCII PORTFÓLIA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2014 Bc. Ivan Justus

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

VLASTNOSTI HODNOTOVEJ FUNKCIE ÚLOHY PARAMETRICKÉHO KVADRATICKÉHO PROGRAMOVANIA A ICH VYUŽITIE V OPTIMALIZÁCII PORTFÓLIA

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor:	1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce:	prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2014

Bc. Ivan Justus

45228784

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

PRIHLÁŠKA NA ZÁVEREČNÚ PRÁCU

Meno a priezvisko študenta: Bc. Ivan Justus
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Vlastnosti hodnotovej funkcie úlohy parametrického kvadratického programovania a ich využitie v optimalizácii portfólia

Cieľ: Cieľom práce bude analýza hodnotovej funkcie úlohy parametrického kvadratického programovania vzhľadom na parametre. Využitie výsledkov pri kvalitatívnom a kvantitatívnom vyhodnocovaní optimálneho zloženia portfólia.

Vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum schválenia: 04.02.2013

podpis študenta

Abstrakt

JUSTUS, Ivan: Vlastnosti hodnotovej funkcie úlohy parametrického kvadratického programovania a ich využitie v optimalizácii portfólia [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2014, 102 s.

Hlavnou témou tejto práce je parametrické kvadratické programovanie. Motiváciou je problém optimálneho investovania do aktív riadiacich sa geometrickým Brownovým pohybom na konečnom časovom horizonte a jeho riešenie ako úlohy stochastického dynamického programovania, ktorá vedie na Hamilton - Jacobi - Bellmanovú parciálnu diferenciálnu rovnicu. Po použití Riccatiho transformácie vzniká kvázilineárna parciálna diferenciálna rovnica popisujúca vývoj optimálnej averzie k riziku, koeficient ktorej je hodnotová funkcia úlohy parametrického kvadratického programovania. Odvodíme algoritmus pre efektívny výpočet optimálnych riešení takejto úlohy s rýdzokonvexnou minimalizovanou funkciou. Numericky otestujeme jeho presnosť a výpočtová náročnosť. Analyzujeme vlastnosti hodnotovej funkcie takejto úlohy a vyvodíme z nich podmienky pre existenciu a jednoznačnosť riešenia vzniknutej parciálnej diferenciálnej rovnice. Uvedieme možnosti použitia odvodeného algoritmu. Vyriešime uvažovaný problém optimálneho investovania pre vybrané aktíva pre rôzne množiny prípustných riešení, vypočítame pre nich efektívnu hranicu a ukážeme nespojitosť jej derivácie. Ukážeme, ako pomocou odvodeného algoritmu počítať úlohy kvadratického a lineárneho programovania.

Kľúčové slová: parametrické kvadratické programovanie, hodnotová funkcia parametrického kvadratického programovania, optimálne investovanie, Hamilton - Jacobi - Bellmanová rovnica pomocou Riccatiho transformácie, optimalizácia pomocou parametrického kvadratického programovania

Abstract

JUSTUS, Ivan: Properties of the value function of a parametric quadratic programming problem and their applications in portfolio optimization [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; Supervisor: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc., Bratislava, 2014, 102 p.

Main topic of this work is parametric quadratic programming. Motivation is the problem of optimal investment in assets driven by geometric Brownian motion on finite time horizon and its solving as a stochastic dynamic optimization problem, which leads to Hamilton - Jacobi - Bellman partial differential equation. After using Riccati transformation arises quasi - linear partial differential equation describing optimal risk aversion, coefficient of which is the value function of a parametric quadratic programming. We derive an algorithm for efficient computation of optimal solutions of such a problem with strictly convex minimized function. We numerically test its accuracy and computational complexity. We analyse properties of the value function of such a problem and we deduce the conditions for the existence and uniqueness of a solution of the arisen partial differential equation. We mention the possibilities of application of the derived algorithm. We solve considered optimal investment problem for the chosen assets for different feasible sets, we compute the effective frontier for them and we show discontinuousness of its derivation. We show, how to solve quadratic and linear programming problems using the derived algorithm.

Keywords: parametric quadratic programming, value function of parametric quadratic programming, optimal investment, Hamilton - Jacobi - Bellman equation via Riccati transformation, optimization via parametric quadratic programming

Obsah

Zoznam obrázkov 7

Zoznam tabuliek 8

Zoznam použitých symbolov 9

Úvod 10

1 Problém optimálneho investovania 12

2 Algoritmus pre parametrické kvadratické programovanie 21

2.1 Formulácia úlohy 21

2.2 Teória nelineárneho programovania 23

2.3 Lokálne ekvivalentná úloha na viazaný extrém 28

2.4 Lagrangeová duálna úloha 31

2.5 Schéma algoritmu a príklad 34

2.6 Degenerovaná množina prípustných riešení 40

2.7 Numerické vlastnosti algoritmu 43

3 Vlastnosti PDR optimálnej averzie k riziku 48

4 Modifikácie algoritmu pre parametrické kvadratické programovanie 55

5 Využitie algoritmu pre parametrické kvadratické programovanie . . 60

5.1 Optimálne investovanie 60

5.2 Optimalizácia 71

Záver 77

Zoznam použitej literatúry 79

Príloha A 82

Zoznam obrázkov

1 Prienik troch lineárne závislých nadrovín v $\mathcal{R}^3$ 23

2 Geometria a priebeh optimálnych riešení Príkladu 2.6 40

3 Presnosť Algoritmu 1 45

4 Počet iterácií a čas výpočtu Algoritmu 1 v sekundách 46

5 Priebeh odhadnutej mocniny pre závislosť času výpočtu Algoritmu 1 na m 47

6 Graf funkcie $\widetilde{\lambda}\,(\varphi)$ a jej prvej a druhej derivácie z Príkladu 2.6 53

7 Príklad rozdelenia priestoru $[0\,,\,1] \times [0\,,\,1] \subset \mathcal{R}^2$ na regióny $R_1\,,\,R_2\,,\,R_3$ 59

8 Optimálne váhy aktív v závislosti od parametra φ v simplexe 61

9 Nemonotónny priebeh optimálnej váhy aktíva PCLN v závislosti od φ v simplexe 62

10 Priebeh funkcií $\lambda\,(\varphi)\,,\,\lambda'\,(\varphi)\,,\,\lambda''\,(\varphi)$ počítaných z reálnych dát v simplexe 63

11 Priebeh funkcie $\varphi\,(x\,,t)$ počítanej z reálnych dát v simplexe 65

12 Optimálne váhy aktív vzhľadom na dosiahnutý výnos pre rôzne časy v simplexe 66

13 Optimálne váhy v závislosti od φ pre množinu prípustných riešení Ω_2 . 67

14 Optimálne váhy aktív vzhľadom na dosiahnutý výnos pre rôzne časy pre množinu prípustných riešení Ω_2 68

15 Vľavo: Efektívna hranica pre rôzne ohraničenia. Vpravo: Nespojitosť derivácie efektívnej hranice pre ohraničenia Ω_2 70

16 Porovnanie algoritmov pre LP. Vľavo hore: Čas výpočtu v závislosti na m . Vpravo hore: Chyba v optimálnom riešení. Vľavo dole: Čas výpočtu v závislosti na podiele aktívnych nerovností v optime. Vpravo dole: Podiel aktívnych nerovností v priebehu iterácií. 74

17 Porovnanie algoritmov pre KP. Vľavo hore: Čas výpočtu v závislosti na m . Vpravo hore: Chyba v optimálnom riešení. Vľavo dole: Čas výpočtu v závislosti na podiele aktívnych nerovností v optime. Vpravo dole: Podiel aktívnych nerovností v iteráciach. 75

18 Porovnanie algoritmov pre LP a KP 76

Zoznam tabuliek

1 Čas výpočtu v sekundách a počet iterácii Algoritmu 1 46

2 Porovnanie času výpočtu úlohy PKP algoritmom pre PKP a jej riešenia pomocou diskretizácie na úlohy KP v 100 bodoch parametra 60

3 Čiastočná kovariančná matica a výnosy aktív 62

Zoznam použitých symbolov

$\partial_x f\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}$	parciálna derivácia funkcie $f\,(x\,,\dots)$ podľa premennej x
$\nabla_x f\,(x\,,\dots)$	gradient funkcie $f\,(x\,,...)$ podľa vektora x , čiže stĺpcový vektor prvých parciálnych derivácii funkcie $f\,(x\,,...)$ podľa zložiek vektora premenných x
$f'\,(x)\,,\ \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x}$	derivácia funkcie $f\,(x)$
A^T	transponovaná matica alebo vektor A
A^{-1}	inverzná matica k matici A
A_k	$k-$ ty riadok matice A alebo $k-$ ta zložka vektora A
$\vert\vert x\vert\vert$	Euklidovská norma vektora x , teda $\vert\vert x\vert\vert=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$
$cond\,(A)$	číslo podmienenosti matice A
$N\,(A)$	nulový priestor matice A
$rank\,(A)$	hodnosť matice A
I	identická matica
$\vert M\vert$	počet prvkov množiny M alebo absolútna hodnota čísla M
$\mathcal{R}_+^n$	nezáporný ortant v $n-$ rozmernom priestore, teda $x_k\geq 0\,\forall\,k=1\,,\,\dots\,,\,n\Longleftrightarrow x\in\mathcal{R}_+^n$
KKT podmienky	Karush - Kuhn - Tuckerove podmienky
KP	kvadratické programovanie
LP	lineárne programovanie
PDR	parciálna diferenciálna rovnica
PKP	parametrické kvadratické programovanie

Úvod

História investovania je dlhá, datuje sa až k Chamurapiho zákonníku [29]. Za počiatky modernej teórie portfólia sa však považujú 50. roky 20. storočia, kedy bol publikovaný Markowitzov model (Markowitz [17]). Jeho nevýhodou je uvažovanie iba jednej časovej periódy, čo bolo odstránené neskôr publikovanými modelmi, medzi ktorými je známy napríklad Black - Scholes - Mertonov (Black - Scholes [3], Merton [19]). Pri riešení problému optimálnej alokácie investície medzi aktíva riadiace sa geometrickým Brownovým pohybom na konečnom časovom horizonte vychádzajúceho z podobného modelu pomocou stochastického dynamického programovania vzniká Hamilton - Jacobi - Bellmanová parciálna diferenciálna rovnica optimálnej hodnotovej funkcie. Abe a Ishimura (Abe - Ishimura [1]) navrhli pri riešení tejto nelineárnej rovnice použiť Riccatiho transformáciu. Kilianová a Ševčovič (Kilianová - Ševčovič [11]) ukázali, že táto transformácia umožňuje miesto nej riešiť kvázilineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu popisujúcu vývoj Arrow - Prattovho koeficientu absolútnej averzie k riziku tejto funkcie. Jeden z koeficientov tejto rovnice je hodnotová funkcia úlohy parametrického kvadratického programovania s rýdzokonvexnou minimalizovanou funkciou. Vyvodili tiež, že ak uvažujeme váhy pochádzajúce z nezáporného simplexu, potom napriek tomu, že táto funkcia nie je dostatočne hladká, riešenie tejto parciálnej diferenciálnej rovnice existuje a je jediné.

Našim cieľom je analyzovať vlastnosti hodnotovej funkcie úlohy parametrického kvadratického programovania s rýdzokonvexnou minimalizovanou funkciou pre prípad ľubovoľnej polyedrickej množiny prípustných riešení. Na ich základe potom chceme vyvodiť podmienky pre existenciu a jednoznačnosť riešenia tejto rovnice s váhami pochádzajúcimi z ľubovoľnej množiny tohto typu. Za tým účelom odvodíme algoritmus pre parametrické kvadratické programovanie, ktorý vypočíta optimálne riešenie tejto úlohy pre každú hodnotu parametra, pričom nám stačí poznať jediné z týchto optimálnych riešení pre východiskovú hodnotu parametra. Využijeme pritom poznatky z nelineárneho programovania, napríklad Karush - Kuhn - Tuckerove podmienky (Kuhn - Tucker [14]) objavené Karushom a znovuobjavené Kuhnom a Tuckerom v 50. rokoch 20. storočia, čo je éra, kedy nastal vývoj aj v tejto oblasti. Pomocou tohto algoritmu získame všeobecný tvar hodnotovej funkcie a môžme skúmať jej vlastnosti. Okrem toho ním značne znížime výpočtovú náročnosť numerického riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice, lebo použitím tohto algoritmu sa vyhneme riešeniu mnohých úloh kvadratického programovania pre rozličné hodnoty parametra, v ktorých je potrebné poznať hodnotu tejto funkcie.

Práca je členená nasledovne. V prvej kapitole popíšeme niektoré základné pojmy a modely používané v optimálnom investovaní a budeme sa bližšie venovať tomu nami uvažovanému. Ukážeme, ako sa z jeho formulácie s využitím Hamilton - Jacobi - Bellmanovej parciálnej diferenciálnej rovnice dá odvodiť kvázilineárna parciálna diferenciálna rovnica pre optimálnu averziu k riziku. V druhej kapitole odvodíme algoritmus pre parametrické kvadratické programovanie s rýdzokonvexnou minimalizovanou funkciou a ilustrujeme ho na príklade. Na sérii náhodných úloh analyzujeme jeho numerické vlastnosti, ako výpočtová náročnosť a presnosť. V tretej kapitole skúmame vlastnosti hodnotovej funkcie úlohy parametrického kvadratického programovania. Ukážeme, že je to neklesajúca, konkávna funkcia, ktorej prvá derivácia je lokálne Lipschitzovsky spojitá a za istej podmienky aj Lipschitzovsky spojitá, ale jej druhá derivácia môže mať vo všeobecnosti konečný počet bodov nespojitosti. Využijeme to na vyvodenie podmienok pre existenciu a jednoznačnosť riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice pre optimálnu averziu k riziku. V štvrtej kapitole sa venujeme modifikáciam algoritmu pre rôzne parametrizované úlohy kvadratického programovania. V piatej kapitole sa venujeme využitiu tohto algoritmu. Porovnáme jeho rýchlosť s alternatívnym riešením mnohých úloh kvadratického programovania, pre vybrané aktíva vyriešime v prvej kapitole uvažovaný problém optimálneho investovania pre rôzne množiny prípustných riešení a analyzujeme efektívnu hranicu pre váhy z ľubovoľnej polyedrickej množiny. Následne ju zostavíme pre štyri takéto množiny a ukážeme, že pomocou tohto algoritmu je možné riešiť aj samotnú úlohu kvadratického programovania s rýdzokonvexnou minimalizovanou funkciou a aj lineárneho programovania.

1 Problém optimálneho investovania

Dnes býva pre investorov častým problémom, ako investovať svoje peniaze v snahe dosiahnuť čo najvyšší výnos. Hrozba straty sa úplne eliminovať nedá, ale vyvíjajú sa rôzne postupy výberu aktív, do ktorých bude zvolená čiastka rozdelená tak, aby bolo toto rozdelenie optimálne v zmysle dosiahnutia čo najväčšieho zisku pri čo najmenšom riziku. Cieľom tejto kapitoly bude predstaviť jeden z takýchto prístupov a ukázať, že sa dá previesť na problém riešiť parciálnu diferenciálnu rovnicu (PDR), v ktorej ako jeden z koeficientov vystupuje hodnotová funkcia úlohy parametrického kvadratického programovania (PKP).

Predstavme si problematiku neistoty bližšie. Ak investujeme do nejakých aktív v čase t_1 čiastku Y_{t_1} a v čase t_2 ich odpredáme za čiastku Y_{t_2}, hovoríme o výnose

$$\mu = \frac{Y_{t_2} - Y_{t_1}}{Y_{t_1}}, \qquad \text{ak uvažujeme diskrétny čas, prípadne} \qquad \mu = \ln \frac{Y_{t_2}}{Y_{t_1}}, \tag{1}$$

ak uvažujeme spojitý čas. Niekedy sa táto veličina nazýva relatívny výnos na rozlíšenie od totálneho výnosu. Riziko investície je reprezentované možnosťou straty nejakej sumy, ktorá nastane v prípade, ak $Y_{t_1} > Y_{t_2}$, čo zodpovedá zápornému výnosu. Miera kolísania výnosu aktíva je popísaná jeho volatilitou. O relatívnej zmene jeho ceny za nejaké časové obdobie sa niekedy zvykne uvažovať ako o náhodnej premennej. Práve volatilite (alebo štandardnej chybe, prípadne odchýlke), ktorá je odmocninou z variancie (disperzie) tejto náhodnej premennej, sa v týchto úvahách pripisujú nerovnaké výchylky ceny z kurzu daného jej strednou hodnotou.

V súvislosti s prístupom k riziku sa rozlišujú riziko vyhľadávajúci, rizikovo neutrálni a rizikovo averzní investori, ktorí ho v tomto poradí vyhľadávajú, nezáleží im na ňom (sú voči nemu indiferentní) a vyhýbajú sa mu. Rozdiel medzi nimi je možné ilustrovať na nasledovnom príklade: ak by si mal vybrať medzi možnosťami buď istý zisk 1€ alebo s 50% pravdepodobnosťou zisk 2€ a s 50% pravdepodobnosťou žiaden zisk, riziko vyhľadávajúci investor by zvolil druhú možnosť, rizikovo averzný prvú a rizikovo neutrálny by obe hodnotil rovnako. V literatúre sa zvykne uvažovať hlavne po istote prahnúci, neistotu eliminujúci rizikovo averzný investor.

Bolo by samozrejme žiaduce maximalizovať výnos a zároveň minimalizovať riziko straty (alebo príliš malého zisku), avšak tieto dve veci sú takmer vždy protichodné – so zvyšovaním výnosu zvykne rásť riziko. Známy Markowitzov problém rieši túto situáciu hľadaním takej alokácie prostriedkov medzi n aktív, aby bola pri zvolenom očakávanom výnose $\overline{r}$ minimalizovaná volatilita. Táto formulácia predpokladá, že poznáme vektor očakávaných výnosov μ a ich kovariančnú maticu Σ. V takto naformulovanej úlohe je treba nájsť riešenie problému kvadratického programovania (KP) reprezentujúce optimálne váhy $\widehat{\theta}$ (Markowitz [17], Melicherčík – Olšarová – Úradníček [18])

$$\min \theta^T \Sigma \theta \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1 \tag{3}$$

$$\mu^T \theta = \overline{r}\,. \tag{4}$$

Môže sa stať, že si zvolíme váhy $\widehat{\theta}$, ktoré nám neprinesú zisk, ktorý sme si sľubovali, alebo sa naskytne lepšia príležitosť alokácie investície. V takom prípade zoberieme do úvahy nové informácie a preinvestujeme podľa nich použijúc nové optimálne váhy. Existuje veľa prístupov k uvažovaniu investovania na časovom intervale $[0\,,\,T]$ s takouto možnosťou úpravy portfólia. V modeloch sa uvažuje diskrétny alebo spojitý čas, nenulové transakčné náklady (poplatky za obchodovanie) alebo nulové a to vzhľadom rôzne triedy funkcie užitočnosti. Optimalizovať sa dá aj časový interval medzi úpravami optimálnosti váh (Ševčovič – Stehlíková – Mikula [25]). Veľmi známe sú napríklad pionierske práce Blacka, Scholesa a Mertona, alebo novšie Browneho (Black – Scholes [3], Merton [19], [20], Browne [5]).

Vyššie spomenutá funkcia užitočnosti je zobrazenie

$$U : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}\,, \tag{5}$$

ktoré vyjadruje investorovu užitočnosť alebo radosť z množstva peňazí. Používa sa aj na vyjadrenie užitočnosti zo spotrebúvania alebo používania niečoho. Tento pojem odzrkadľuje rozdiely medzi investormi, prípadne spotrebiteľmi. Každý človek má v rôznych situáciách iné preferencie, a teda sa líši miera úžitku, ktorú z vlastníctva alebo spotreby pociťuje. Teda aj funkcie užitočnosti budú pre dvoch ľudí alebo toho istého človeka v rôznej situácii rozdielne. Pri investovaní táto funkcia vyjadruje, nakoľko je investor rizikovo averzný. Na vyjadrenie miery tejto averzie sa dá použiť Arrow –

Prattov koeficient absolútnej averzie k riziku (Pratt [23])

$$ap\,(x) = -\frac{U''\,(x)}{U'\,(x)}\,. \tag{6}$$

Zvyčajne sa ako $U\,(x)$ uvažujú funkcie, ktoré sú rastúce a konkávne. Rastúcosť vyjadruje prirodzenú vlastnosť mať väčší úžitok z väčšieho množstva, kým konkávnosť reprezentuje klesajúcu marginálnu užitočnosť, teda klesanie úžitku z jednotky množstva (napríklad človek s 1000€ sa zisku 1€ poteší viac ako ten s 1000000€). Matematicky sa to dá napísať ako

$$U'\,(x) > 0\,, \qquad U''\,(x) < 0\,. \tag{7}$$

My budeme tiež uvažovať rastúcu a konkávnu funkciu. Typickými príkladmi funkcie užitočnosti sú [18] napríklad

$$U\,(x) = \frac{1}{1-z}\left(x^{1-z} - 1\right)\,, \qquad z > 0\,,\, z \neq 1 \qquad \text{alebo} \qquad U\,(x) = \ln\,(x)\,. \tag{8}$$

Pristúpme k formulácii nami uvažovaného problému optimálnej alokácie finančných aktív investora. K dispozícii je n aktív s cenami $Y^1\,,\, Y^2\,,\, \ldots\,,\, Y^n$. Uvažujeme permanentné – spojité preinvestovanie na časovom intervale $[0\,,\,T]$. Funkcia váh

$$\theta\,(Y^\theta\,,\,t) : \mathcal{R} \times [0\,,\,T) \longrightarrow \mathcal{R}^n \tag{9}$$

vyjadruje rozloženie investície medzi aktíva v čase $t \in [0\,,\,T]$ pri hodnote portfólia Y^θ, ktorej zmena je daná ako $\frac{\mathrm{d}Y^\theta}{Y^\theta} = \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i \frac{\mathrm{d}Y^i}{Y^i}$. Hľadáme optimálnu funkciu váh $\widehat{\theta}\,(Y^\theta\,,\,t)$ vzhľadom k hodnote investorovej funkcie užitočnosti U na konci časového intervalu, teda funkciu váh maximalizujúcu výraz

$$\widehat{\theta} = \arg \max_{\theta|_{[0\,,\,T)}} \left\{\mathbb{E}\left[U\left(Y_T^\theta\right)\right] \,\middle|\, Y_0^\theta = y_0\right\}, \tag{10}$$

kde $\mathbb{E}$ označuje strednú hodnotu Itōovho stochastického procesu $\{Y_t^\theta\}$, o ktorom predpokladáme, že modeluje vývoj portfólia tým, že modeluje vývoj jednotlivých aktív na intervale $[0\,,\,T]$ so známym počiatočným stavom procesu y_0 (hodnotou portfólia) v čase $t = 0$. Na vysvetlenie Itōovho stochastického procesu zavedieme Brownov pohyb.

Definícia 1.1. *Brownov pohyb $\{Z_t\,,\, t \geq 0\}$ je $t-$ parametrický systém náhodných veličín, pričom*

1. *všetky prírastky* $Z_{t+\Delta} - Z_t$ *majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou* $\mu\Delta$ *a varianciou* $\sigma^2\Delta$

2. *pre každé delenie* $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ *sú prírastky* $Z_{t_1} - Z_{t_0}\,,\, Z_{t_2} - Z_{t_1}\,, \ldots\,,\, Z_{t_m} - Z_{t_{m-1}}$ *nezávislé náhodné premenné s parametrami popísanými v bode 1.*

3. $Z_0 = 0$

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0\,,\ \sigma^2 = 1$ *nazývame Wienerov proces [25].*

Brownov pohyb sa veľmi často používa vo finančnej matematike na modelovanie vývoja ceny aktíva alebo úrokovej miery v čase. Keďže nie je známa rovnica popisujúca presný vývoj, ale približne ho vieme predvídať z historických dát, zvykne sa predpokladať, že je daný deterministickou a náhodnou (fluktuačnou) zložkou. Za náhodnú zložku sa často berie práve Brownov pohyb. Presnejšie povedané sa na modelovanie ceny aktíva používa geometrický Brownov pohyb

$$Y_t = y_0\, \mathrm{e}^{Z_t}\,, \tag{11}$$

kde Z_t je Brownov pohyb a $y_0 = Y_0$ je počiatočná hodnota procesu (to jest cena aktíva v čase $t = 0$). Geometrický Brownov pohyb sa často zvykne zapisovať v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice. Ak sa cena akcie Y^i s driftom (výnosom) μ a volatilitou σ riadi procesom (11), potom vyhovuje nasledujúcej rovnici

$$\mathrm{d}Y^i = \mu\, Y^i\, \mathrm{d}t + \sigma\, Y^i\, \mathrm{d}w\,, \tag{12}$$

kde $\mathrm{d}Y^i$ je zmena ceny aktíva za malý časový okamih $\mathrm{d}t$, a $\mathrm{d}w$ označuje prírastok Wienerovho procesu w_t za čas $\mathrm{d}t$ [25], [18]

$$\mathrm{d}w = w_{t+\mathrm{d}t} - w_t\,. \tag{13}$$

Vo všeobecnosti sa proces $\{Y_t\}$ daný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$\mathrm{d}Y = \mu\,(Y\,,\, t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,(Y\,,\, t)\,\mathrm{d}w \tag{14}$$

nazýva Itōov proces podľa matematika Kijoši Itō, ktorý dokázal s týmto procesom súvisiacu slávnu Itōovu lemu. Keďže je vo finančnej matematike často používaná a aj my ju neskôr použijeme, uvedieme ju tu.

Lema 1.2 (Itōova lema [25]). *Nech $f(Y, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná Y je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice (14). Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom*

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial Y}\,\mathrm{d}Y + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\sigma^2(Y, t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\right)\mathrm{d}t\,, \tag{15}$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(Y, t)\,\frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{1}{2}\,\sigma^2(Y, t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma(Y, t)\,\frac{\partial f}{\partial Y}\,\mathrm{d}w\,. \tag{16}$$

Predpokladáme, že je váhy úlohy (10) sú z neprázdnej polyedrickej množiny

$$\Omega = \{\theta \in \mathcal{R}^n \mid A\theta \le b\,,\ C\theta = d\}\,, \tag{17}$$

pričom nejaké ohraničenia vyjadrujú $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$, prípadne niečo podobné (napríklad nerovnosť v tomto vzťahu a nezápornosť váh, ak neinvestujeme nutne všetky prostriedky). Lineárne ohraničenia vyjadrujú potrebu splniť isté obmedzenie na diverzifikáciu aktív. Napríklad situácia

$$A = -I\,, \qquad b = \mathbf{0}\,, \qquad C = (1\,, \ldots\,, 1)\,, \qquad d = 1 \tag{18}$$

zodpovedá nemožnosti držať krátke pozície (vykonávať short − selling) − to jest požičať si aktívum, predať ho, neskôr kúpiť a vrátiť ho.

Ak máme k dispozícii n aktív s driftmi μ_i a volatilitami a vzájomnými kovarianciami σ_{ij}, potom pre procesy $Y^1, Y^2, \ldots, Y^n$ modelujúce vývoj ich cien bude [25] mať stochastická diferenciálna rovnica analogická k (12) tvar

$$\mathrm{d}Y^i = \mu_i\, Y^i\,\mathrm{d}t + Y^i \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\,\mathrm{d}w^j\,, \tag{19}$$

kde $w^1, w^2, \ldots, w^n$ sú Wienerové procesy s navzájom nezávislými prírastkami, čiže

$$\mathbb{E}\,(\mathrm{d}w^i\,\mathrm{d}w^j) = 0\,, \qquad i \ne j\,. \tag{20}$$

Uvažujme navyše parametre ε a r. Kým $r \ge 0$ zastupuje bezrizikovú úrokovú mieru, $\varepsilon \in \mathcal{R}$ vyjadruje konštantný príjem investora. Mnoho Európskych penzijných systémov používa $\varepsilon > 0$, čo vyjadruje príjem pochádzajúci z odvodov na dôchodok od pracujúcich (Koleva − Vulkov [13]). Dá sa ukázať, že stochastická diferenciálna rovnica pre proces Y^θ popisujúca vývoj hodnoty portfólia za týchto podmienok má tvar

$$\mathrm{d}Y^\theta = \left[\varepsilon + (r + \mu(\theta))\,Y^\theta\right]\,\mathrm{d}t + \sigma(\theta)\,Y^\theta\,\mathrm{d}w\,. \tag{21}$$

To je možné použitím transformácie

$$X^{\theta} = f\left(Y^{\theta}, t\right) = \ln Y^{\theta} \tag{22}$$

a aplikovaním Itōovej lemy upraviť na

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X^{\theta} &= \left[0 + \left(\varepsilon + \left(r + \mu\left(\theta\right)\right) Y^{\theta}\right) \frac{1}{Y^{\theta}} - \frac{1}{2} \left(\sigma\left(\theta\right) Y^{\theta}\right)^2 \frac{1}{(Y^{\theta})^2}\right] \mathrm{d}t + \sigma\left(\theta\right) Y^{\theta} \frac{1}{Y^{\theta}} \mathrm{d}w = \\ &= \left(\varepsilon\, \mathrm{e}^{-X^{\theta}} + r + \mu\left(\theta\right) - \frac{1}{2} \sigma^2\left(\theta\right)\right) \mathrm{d}t + \sigma\left(\theta\right) \mathrm{d}w\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Z teórie stochastického dynamického programovania je známe že na riešenie problému (10) je možné použiť hodnotovú funkciu

$$V\left(x, t\right) = \sup_{\theta|_{[t, T)}} \left\{\mathbb{E}\left[U\left(X_T^{\theta}\right) \middle| X_t^{\theta} = x\right]\right\} \tag{24}$$

s koncovou podmienkou $V\left(x, T\right) = U\left(x\right)$. Túto funkciu je možné chápať ako očakávanú strednú hodnotu z hodnoty funkcie užitočnosti v čase T, ak sa nachádzame v čase t a hodnota portfólia je x ([7], [16], Kilianová – Ševčovič [11], Halická – Jurča [8], Abe – Ishimura [1], Macová – Ševčovič [16]), alebo aj ako okamžitú funkciu užitočnosti. Intuitívne, ak v každom časovom okamihu zvolíme za $\widehat{\theta}$

$$\widehat{\theta}\left(x, t\right) = \arg \sup_{\theta|_{[t, T)}} \left\{\mathbb{E}\left[U\left(X_T^{\theta}\right) \middle| X_t^{\theta} = x\right]\right\} \tag{25}$$

takú hodnotu váh, ktorá je optimálna v zmysle prechodu zo stavu x v čase t do stavu v čase T, dostaneme aj optimálnu hodnotu pre riešenie úlohy (10). Podľa Bellmanového princípu optimality bude optimálne riešenie $\widehat{\theta}\left(x, t\right)$ problému (10) optimalizovať aj prechod z každého času t do času $t + \mathrm{d}t$ pre malý okamih $\mathrm{d}t$. Hodnotová funkcia (24) úlohy (10) potom spĺňa

$$V\left(x, t\right) = \sup_{\theta|_{[t, t+\mathrm{d}t]}} \left\{\mathbb{E}\left[V\left(X_{t+\mathrm{d}t}^{\theta}, t + \mathrm{d}t\right) \middle| X_t^{\theta} = x\right]\right\}. \tag{26}$$

Odčítaním $V\left(x, t\right)$ od oboch strán a zahrnutím tohto nenáhodného výrazu do strednej hodnoty dostaneme

$$0 = \sup_{\theta|_{[t, t+\mathrm{d}t]}} \left\{\mathbb{E}\left[V\left(X_{t+\mathrm{d}t}^{\theta}, t + \mathrm{d}t\right) - V\left(x, t\right) \middle| X_t^{\theta} = x\right]\right\} = \sup_{\theta|_{[t, t+\mathrm{d}t]}} \mathbb{E}\left(\mathrm{d}V\right). \tag{27}$$

Ak je proces X^θ daný rovnicou (23), aplikovaním Itōovej lemy získame pre diferenciál $\mathrm{d}V$ stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$\mathrm{d}V = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\varepsilon\,\mathrm{e}^{-x} + r + \mu\left(\theta\right) - \frac{1}{2}\,\sigma^2\left(\theta\right)\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\left(\theta\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma\left(\theta\right)\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}w\,. \tag{28}$$

Ak zoberieme do úvahy, že prírastok $\mathrm{d}w = w_{t+\mathrm{d}t} - w_t$ a X_t^θ sú nezávislé, máme

$$\mathbb{E}\left(\sigma\left(\theta\right)\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}w\right) = 0 \tag{29}$$

a (27) je ekvivalentné s

$$0 = \sup_{\theta\in\Omega}\left\{\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\varepsilon\,\mathrm{e}^{-x} + r + \mu\left(\theta\right) - \frac{1}{2}\,\sigma^2\left(\theta\right)\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\left(\theta\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}t\right]\right\}. \tag{30}$$

Vynechaním zbytočného operátora strednej hodnoty nenáhodného výrazu a diferenciálu $\mathrm{d}t$ nulovej funkcie dostaneme Hamilton – Jacobi – Bellmanovú PDR pre hodnotová funkciu (24) úlohy (10) s procesom X^θ daným rovnicou (23)

$$\partial_t V + \sup_{\theta\in\Omega}\left\{\left(\varepsilon\,\mathrm{e}^{-x} + r + \mu\left(\theta\right) - \frac{1}{2}\,\sigma^2\left(\theta\right)\right)\partial_x V + \frac{1}{2}\,\sigma^2\left(\theta\right)\partial_x^2 V\right\} = 0 \tag{31}$$

$\forall\, x \in \mathcal{R}\,,\; t \in [0\,,\,T)$ s koncovou podmienkou $V\left(x\,,\,T\right) = U\left(x\right)$. Táto PDR je nelineárna (Ševčovič [24]) a jej numerický výpočet je komplikovaný maximalizovaním výrazu. Preto je výhodné použiť Riccatiho transformáciu ([11], [16], [1])

$$\varphi\left(x\,,\,t\right) = 1 - \frac{\partial_x^2 V\left(x\,,\,t\right)}{\partial_x V\left(x\,,\,t\right)}\,, \tag{32}$$

ktorá nám umožní namiesto nej riešiť kvázilineárnu PDR funkcie φ. Všimnime si, že funkcia $\varphi\left(x\,,\,t\right) - 1$ je okamžitým koeficientom absolútnej averzie k riziku. Po úprave

$$-\,\varphi\left(x\,,\,t\right)\partial_x V\left(x\,,\,t\right) = -\partial_x V\left(x\,,\,t\right) + \partial_x^2 V\left(x\,,\,t\right) \tag{33}$$

a jej dosadení do (31) máme

$$\partial_t V + \left(\varepsilon\,\mathrm{e}^{-x} + r + \sup_{\theta\in\Omega}\left\{\mu\left(\theta\right) - \frac{1}{2}\,\sigma^2\left(\theta\right)\varphi\left(x\,,\,t\right)\right\}\right)\partial_x V\left(x\,,\,t\right) = 0\,, \tag{34}$$

pričom si môžme všimnúť, že optimalizovaný výraz v tomto vzťahu už neobsahuje žiadne parciálne derivácie. Ak sú drift $\mu(\theta)$ a variancia $\sigma^2(\theta)$ dané pomocou

$$\mu\left(\theta\right) = \theta^T\mu\,, \qquad \sigma^2\left(\theta\right) = \theta^T\,\Sigma\theta\,, \tag{35}$$

kde μ je vektor očakávaných výnosov a $\Sigma = \Sigma^T \succ 0$ je kovariančná matica uvažovaných aktív, o ktorej predpokladáme, že je symetrická a kladne definitná, potom je maximalizovanie tohto výrazu úlohou KP

$$\min_{\theta \in \Omega} \left\{ \frac{\varphi}{2} \, \theta^T \, \Sigma \, \theta - \mu^T \, \theta \right\} \tag{36}$$

s parametrom φ v účelovej funkcii, lebo maximalizovať funkciu je ekvivalentné jej minimalizovaniu s opačným znamienkom. Označme $\lambda(\varphi)$ hodnotovú funkciu úlohy PKP

$$\lambda \left(\varphi \right) = \min_{\theta \in \Omega} \left\{ \frac{\varphi}{2} \, \theta^T \, \Sigma \, \theta - \mu^T \, \theta \right\} . \tag{37}$$

Keďže po zmene maximalizačnej úlohy na minimalizačnú musíme funkčnú hodnotu v optimálnom riešení opäť prenásobiť -1, aby korešpondovala s maximom pôvodnej funkcie, dostávame

$$\partial_t \, V + \left[\varepsilon \, \mathrm{e}^{-x} + r - \lambda \left(\varphi \left(x \, , \, t \right) \right) \right] \, \partial_x \, V \left(x \, , \, t \right) = 0 \, . \tag{38}$$

Keď teraz (33) prepíšeme ako

$$\partial_x^2 \, V = \left(1 - \varphi \right) \partial_x \, V \, , \tag{39}$$

dostaneme pre vyjadrenie $\partial_t \, \varphi$ z (32)

$$\partial_t \, \varphi = - \, \frac{\partial_t \, \partial_x^2 \, V}{\partial_x \, V} + \frac{\left(\partial_t \, \partial_x \, V \right) \, \left(\partial_x^2 \, V \right)}{\left(\partial_x \, V \right)^2} = - \, \frac{\partial_t \, \partial_x^2 \, V}{\partial_x \, V} + \left(1 - \varphi \right) \frac{\partial_t \, \partial_x \, V}{\partial_x \, V} . \tag{40}$$

Po označení

$$g \left(x \, , \, t \right) = \lambda \left(\varphi \left(x \, , \, t \right) \right) - \varepsilon \, \mathrm{e}^{-x} - r \tag{41}$$

a dosadení do vzťahu (38) máme

$$\partial_t \, V = g \, \partial_x \, V \, , \tag{42}$$

čo spolu s (39) dáva pre vyjadrenie parciálnych derivácii $\partial_t \, \partial_x \, V$, $\partial_t \, \partial_x^2 \, V$ postupne

$$\partial_t \, \partial_x \, V = \partial_x \, g \, \partial_x \, V + g \, \partial_x^2 \, V = \left[\partial_x \, g + g \left(1 - \varphi \right) \right] \, \partial_x \, V \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \, \partial_x^2 \, V &= \left\{ \partial_x^2 \, g + \partial_x \left[g \left(1 - \varphi \right) \right] \right\} \, \partial_x \, V + \left[\partial_x \, g + g \left(1 - \varphi \right) \right] \, \partial_x^2 \, V = \\ &= \left\{ \partial_x^2 \, g + \partial_x \left[g \left(1 - \varphi \right) \right] + \left[\partial_x \, g + g \left(1 - \varphi \right) \right] \, \left(1 - \varphi \right) \right\} \, \partial_x \, V \, . \end{aligned} \tag{44}$$

Dosadením týchto vzťahov do (40) získame

$$\partial_t \, \varphi = - \partial_x^2 \, g - \partial_x \left[g \left(1 - \varphi \right) \right] \tag{45}$$

a spätným dosadením $g\,(x\,,\,t)$ zo (40) dostaneme [11], že funkcia $\varphi\,(x\,,\,t)$ definovaná ako (32) spĺňa nasledovnú kvázilineárnu PDR

$$\begin{aligned} &\partial_t\,\varphi + \partial_x^2\,\lambda\,(\varphi) + \partial_x\,\left[\lambda\,(\varphi)\,(1-\varphi) + \varphi\,\left(\varepsilon\,\mathrm{e}^{-x} + r\right)\right] = 0 \qquad \forall\,x \in \mathcal{R}\,,\; t \in [0\,,\,T) \\ &\varphi\,(x\,,\,T) = 1 - \frac{U''\,(x)}{U'\,(x)}\,, \qquad x \in \mathcal{R}\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Táto PDR vyjadruje, aká averzia k riziku je optimálna pri stave portfólia x v čase t vzhľadom na úlohu (10). Pomocou nej môžeme vypočítať funkciu optimálnych váh $\widehat{\theta}\,(x\,,\,t)$ nasledovne: najprv vypočítame hodnoty funkcie $\lambda\,(\varphi)$, potom pomocou nich vypočítame pre našu známu funkciu užitočnosti $U\,(x)$ hodnoty funkcie $\varphi\,(x\,,\,t)$ a nakoniec tieto hodnoty dosadíme do (36) a odtiaľ získame optimálne rozloženie portfólia.

Prednosť počítania hodnôt $\lambda\,(\varphi)$ dopredu je v tom, že po ich uložení sa nebudeme zdržiavať ich mnohonásobným výpočtom v priebehu riešenia PDR (46). Ak by sme ju však riešili metódou konečných diferencií, máme ešte inú možnosť, a to počítať hodnoty $\lambda\,(\varphi)$ v priebehu jej riešenia. Tak by sme ich mali presne pre tie φ, ktoré nám na časových vrstvách vzniknú. Ale takéto presné počítanie by pri viacnásobnom riešení diferenciálnej rovnice (napríklad pre rôzne funkcie užitočnosti alebo pre rôzne časové intervaly) bolo výpočtovo neúnosné. Nevýhodou počítania $\lambda\,(\varphi)$ dopredu však ostáva nutnosť zaokrúhľovať na časových vrstvách vznikajúce φ na tie, pre ktoré máme $\lambda\,(\varphi)$ vypočítané a používať tieto nepresné hodnoty miesto tých potrebných. To by mohlo byť únosné pre dostatočne jemnú diskretizáciu φ pri výpočte $\lambda\,(\varphi)$. Algoritmus odvodený v nasledujúcej kapitole však vylepší oba tieto postupy. Budeme schopní použiť presné hodnoty $\lambda\,(\varphi)$ a zachovať výpočtovú náročnosť na prijateľnej úrovni.

2 Algoritmus pre parametrické kvadratické programovanie

Predpokladajme, že máme v úmysle spočítať hodnoty funkcie $\varphi\,(x\,,\,t)$ zo (46). Na to je ale nutné poznať hodnoty funkcie $\lambda\,(\varphi)$ v mnohých bodoch. V závislosti od použitej numerickej schémy a diskretizácie sa môže líšiť počet týchto bodov, ale pravdou, samozrejme je, že čím kvalitnejšiu aproximáciu máme v úmysle spočítať, tým viac bodov je potrebné dosadiť za φ a následne vyriešiť vzniknutú úlohu KP. Pri oboch postupoch popísaných na konci predchádzajúcej kapitoly budeme riešiť priveľa problémov KP so stálym lineárnym členom a množinou prípustných riešení a iba malou zmenou v kvadratickom člene na to, aby nás to neprinútilo zamyslieť sa nad inými, efektívnejšími možnosťami. V tejto kapitole jednu takú popíšeme. Odvodíme algoritmus, ktorý vyrieši úlohu (37) pre všetky $\varphi > 0$ s použitím výsledku jedinej úlohy KP.

2.1 Formulácia úlohy

Uvažujme parametrické kvadratické programovanie v štandardnom tvare

$$\min_{\theta\in\Omega}\left\{\frac{\varphi}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta+\mu^T\,\theta\right\}\,,\qquad \varphi>0\,,\tag{47}$$

teda s opačným znamienkom μ oproti (36), kde $\Sigma = \Sigma^T \succ 0$ je symetrická, kladne definitná matica a množina prípustných riešení Ω je neprázdna polyedrická množina popísaná m ohraničeniami typu nerovnosti a r ohraničeniami typu rovnosti

$$\Omega=\{\theta\in\mathcal{R}^n \mid A\theta\le b\,,\;C\theta=d\}\,,\tag{48}$$

kde $A\in\mathcal{R}^{m\times n}$, $C\in\mathcal{R}^{r\times n}$, $b\in\mathcal{R}^m$, $d\in\mathcal{R}^r$. Naším cieľom je vypočítať optimálne riešenia $\widehat{\theta}\,(\varphi)$. Keďže je $\widehat{\theta}\,(\varphi)\,:\,\mathcal{R}\longrightarrow\mathcal{R}^n$ spojitá funkcia, čo vyplýva z geometrickej predstavy o lineárne parametrizovanej rýdzokonvexnej funkcii minimalizovanej cez konvexnú množinu alebo z (Klatte [12]), tieto tvoria krivku, lebo z z kladnej definitnosti Σ vyplýva navyše jednoznačnosť optimálneho riešenia $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ pre všetky $\varphi>0$. Zo známych hodnôt $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ potom ľahko vypočítame hodnotovú funkciu $\widetilde{\lambda}\,(\varphi)$ tejto úlohy.

Definícia 2.1. *Hovoríme, že $k-$ te ohraničenie typu nerovnosti je v bode $\theta\in\Omega$ aktívne, ak $(A\,\theta)_k=b_k$.*

Označme $K(\varphi)$ množinu obsahujúcu indexy aktívnych ohraničení typu nerovnosti v bodoch optimálnych riešení $\widehat{\theta}(\varphi)$

$$K(\varphi) = \left\{ k \in \{1, 2, \ldots, m\} \;\middle|\; \left(A \widehat{\theta}(\varphi) \right)_k = b_k \right\}. \tag{49}$$

Predpoklad 2.2. *Pre každé $\varphi \in (0, \infty)$ sú v bode optimálneho riešenia $\widehat{\theta}(\varphi)$ normálové vektory nadrovín aktívnych ohraničení lineárne nezávislé, čiže matica G zložená z riadkov rovností C a aktívnych nerovností $A_{k \mid k \in K(\varphi)}$*

$$G = \begin{pmatrix} C \\ A_{k \mid k \in K(\varphi)} \end{pmatrix} \tag{50}$$

má plnú riadkovú hodnosť, teda

$$\forall \varphi \in (0, \infty) : rank(G) = |K(\varphi)| + rank(C) = |K(\varphi)| + r. \tag{51}$$

V priebehu odvádzania a používania algoritmu pre PKP budeme potrebovať vyriešiť systém rovníc s maticou $G \Sigma^{-1} G^T$, kde G bude matica, ktorá bola predstavená v (50). Existenciu a jednoznačnosť riešenia nám zaručí práve Predpoklad 2.2. Z lineárnej algebry je totiž známe tvrdenie, ktoré hovorí, že ak majú aj matica G, ktorá má rozmery $p \times n$, $p \leq n$, aj matica Σ^{-1} plnú hodnosť

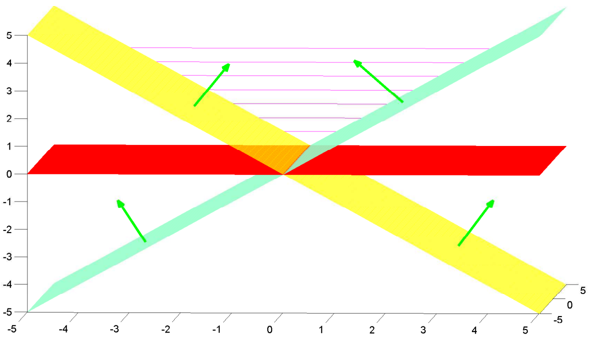
$$rank\left(\Sigma^{-1}\right) = n, \qquad rank(G) = p, \tag{52}$$

potom má plnú hodnosť aj matica $G \Sigma^{-1} G^T$

$$rank\left(G \Sigma^{-1} G^T\right) = p. \tag{53}$$

Dôsledok 2.3. *Za platnosti Predpokladu 2.2 je $G \Sigma^{-1} G^T$ regulárna matica.*

Predpoklad 2.2 je bez ujmy na všeobecnosti, pretože sa netýka samotnej množiny prípustných riešení, iba jej zápisu. Každý polyéder (48) možno vyjadriť ohraničeniami typu rovnosti a nerovnosti "čo najúspornejšie" v zmysle, aby ohraničenia typu nerovnosti implicitne nezahŕňali žiadne ohraničenie typu rovnosti ani žiadne z nich nebolo nadbytočné z hľadiska popisu Ω a aby matica C ohraničení typu rovnosti mala plnú riadkovú hodnosť. V takom prípade by boli normálové vektory aktívnych ohraničení lineárne nezávislé pre všetky body $\theta \in \Omega$, nielen pre tie nachádzajúce sa na krivke optimálnych riešení $\widehat{\theta}(\varphi)$ ako je to v Predpoklade 2.2, avšak to nám postačí. Predstavme



Obr. 1: Prienik troch lineárne závislých nadrovín v $\mathcal{R}^3$

si napríklad situáciu na Obrázku 1, kde sa pretínajú tri lineárne závislé nadroviny v $\mathcal{R}^3$ predstavujúce nerovnosti. Zelené šípky ukazujú, ktorú časť priestoru vymedzujú modrá a žltá nadrovina ako prípustnú. Ak červená nadrovina vymedzuje horný polpriestor, potom je fialovo vyznačená oblasť prípustná a táto nerovnosť je nadbytočná. Ak naopak červená nadrovina vymedzuje spodný polpriestor, potom je prípustná oblasť spoločný prienik všetkých troch nadrovín a táto je vyjadriteľná ako prienik nejakých dvoch lineárne nezávislých rovností.

2.2 Teória nelineárneho programovania

Úloha (47) patrí (Hamala – Trnovská [9]) do triedy úloh nelineárneho programovania

$$\min_{\theta \in \overline{\Omega}} f_0(\theta)\,, \tag{54}$$

kde množina prípustných riešení je popísaná ako

$$\overline{\Omega} = \{\theta \in \mathcal{R}^n \mid f_i(\theta) \le 0\,,\ g_j(\theta) = 0\,,\ i = 1\,, \dots\,, m\,,\ j = 1\,, \dots\,, r\}. \tag{55}$$

Presnejšie patrí do jej časti konvexného programovania, ktoré je charakteristické konvexnou množinou prípustných riešení aj minimalizovanou funkciou. Konvexné úlohy sa vyznačujú veľmi dobrými vlastnosťami:

- každý bod lokálneho optima je zároveň aj bodom globálneho optima
- množina optimálnych riešení je súvislá a konvexná

Úloha (54) je konvexná práve vtedy, ak sú funkcie $f_0(\theta)$, $f_i(\theta)$ konvexné $\forall\, i$ a funkcie $g_j(\theta)$ sú lineárne $\forall\, j$. Úloha (47) je ešte lepší typ úlohy, lebo kvôli rýdzokonvexnosti minimalizovanej funkcie $f_0(\theta) = \frac{\varphi}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta + \mu^T\,\theta$ má jediné optimálne riešenie $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ pre všetky $\varphi > 0$. Hoci niektoré nižšie uvedené pojmy a tvrdenia sa týkajú aj všeobecnej úlohy (54), budeme ďalej predpokladať, že úloha, o ktorej hovoríme, je konvexná.

Pri riešení úloh nelineárneho programovania hrajú dôležitú úlohu Karush – Kuhn – Tuckerove podmienky (KKT podmienky). Za predpokladu splnenia istých podmienok regularity bodu (angl. constraint qualifications) totiž dávajú informáciu o tom, čo tento bod spĺňa, ak je optimálnym riešením. Sú teda nutnými podmienkami. Ale naša úloha je konvexná a v konvexnom programovaní sú nielen nutnými, ale aj postačujúcimi podmienkami, a to aj bez predpokladu regularity. To znamená, že ak ich nejaký bod spĺňa, potom je automaticky optimálnym riešením. Ich tvar pre úlohu (54) sa v prípade diferencovateľnosti všetkých zúčastnených funkcií $f_0(\theta)$, $f_i(\theta)$, $g_j(\theta)$ dá formálne odvodiť z Lagrangeovej funkcie

$$L(\theta\,,\,u\,,\,v) = f_0(\theta) + \sum_{i=1}^{m} f_i(\theta)\,u_i + \sum_{j=1}^{r} g_j(\theta)\,v_j\,, \qquad \theta \in \mathcal{R}^n\,,\ \mathbf{0} \le u \in \mathcal{R}^m\,,\ v \in \mathcal{R}^r \tag{56}$$

derivovanim podľa θ a Lagrangeových multiplikátorov u, v nasledovne ([9], Kuhn – Tucker [14], Boyd – Vandenberghe [4]):

$$\nabla_\theta\, L(\theta\,,\,u\,,\,v) = \nabla_\theta\, f_0(\theta) + \sum_{i=1}^{m} u_i\,\nabla_\theta\, f_i(\theta) + \sum_{j=1}^{r} v_j\,\nabla_\theta\, g_j(\theta) = \mathbf{0}\,, \tag{57}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = f_i(\theta) \le 0\,, \qquad u_i\,\frac{\partial L}{\partial u_i} = u_i\, f_i(\theta) = 0\,, \qquad u_i \ge 0 \qquad \forall\, i = 1\,,\,\ldots\,,\,m\,, \tag{58}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_j} = g_j(\theta) = 0 \qquad \forall\, j = 1\,,\,\ldots\,,\,r\,. \tag{59}$$

Ďalšiu významnú úlohu má Lagrangeová duálna funkcia a Lagrangeová duálna úloha. Lagrangeová duálna funkcia $D(u\,,\,v)$ je dôležitá tým, že každá jej funkčná hodnota dáva spodný odhad pre optimálnu hodnotu primárnej úlohy (tak sa v súvislosti s duálnou úlohou nazýva pôvodná úloha (54))

$$D(u\,,\,v) \le f_0(\widehat{\theta})\,. \tag{60}$$

Vo všeobecnosti je pre úlohu nelineárneho programovania (54) definovaná ako

$$D(u\,,\,v) = \min_{\theta}\, L(\theta\,,\,u\,,\,v)\,, \qquad u \ge \mathbf{0}\,. \tag{61}$$

Najlepší spodný odhad je náplňou Lagrangeovej duálnej úlohy

$$\max_{u \geq \mathbf{0}\,,\, v} D\,(u\,,\, v)\,. \tag{62}$$

Nie vždy je možné hľadanú optimálnu hodnotu primárnej úlohy zdola ohraničiť optimálnou hodnotou duálnej úlohy tak, aby boli obe hodnoty rovnaké. Vtedy hovoríme o slabej dualite (nerovnosť $\leq$ vo vzťahu (63)). V prípade silnej duality platí

$$D\,(\widehat{u}\,,\, \widehat{v}) = f_0\,(\widehat{\theta}) \tag{63}$$

a duálna úloha je ekvivalentná primárnej úlohe v tom zmysle, že optimálne riešenie duálnej úlohy sú Lagrangeové multiplikátory prislúchajúce optimálnemu riešeniu primárnej úlohy. To sa potom dá v prípade rýdzokonvexnosti $f_0\,(\theta)$ získať vyriešením voľnej optimalizačnej úlohy

$$\min_{\theta} L\,(\theta\,,\, \widehat{u}\,,\, \widehat{v})\;. \tag{64}$$

Lagrangeová duálna úloha je konvexná bez ohľadu na konvexnosť primárnej úlohy [4].

Je možné usúdiť, že úloha (47) má parametrizované je nielen optimálne riešenie, ale aj Lagrangeové multiplikátory

$$\widehat{u} = \widehat{u}\,(\varphi)\,, \qquad \widehat{v} = \widehat{v}\,(\varphi)\,. \tag{65}$$

To bude idea algoritmu. Na jednej strane budeme pozorovať zmenu optimálneho riešenia primárnej úlohy $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ a na druhej strane zmenu $(\widehat{u}\,(\varphi)\,,\, \widehat{v}\,(\varphi))^T$ optimálneho riešenia duálnej úlohy, čiže Lagrangeových multiplikátorov prislúchajúcich optimálnemu riešeniu primárnej úlohy, a kombinovaním týchto informácii zostavíme krivku $\widehat{\theta}\,(\varphi)$.

Bude preto potrebné spomenúť ešte jednu úlohu Lagrangeových multiplikátorov. Z nelineárneho programovania je známe, že určiť, či je $k-$ te ohraničenie typu nerovnosti v optimálnom riešení aktívne, je možné z hodnoty jemu prislúchajúceho Lagrangeovho multiplikátora $\widehat{u}_k$. Kladný Lagrangeov multiplikátor indikuje aktívne ohraničenie, kým nulový znamená buď neaktívne alebo také ohraničenie, ktoré je síce aktívne, ale jeho malou perturbáciou rozširujúcou množinu prípustných riešení by sa optimálne riešenie, ktoré je v našom prípade jediné, nezmenilo. Dá sa to vidieť z interpretácie Lagrangeových multiplikátorov ako lokálneho ukazovateľa senzitivity optimálnej hodnoty vzhľadom na perturbáciu ohraničení. Označme

$$F\,(y) = \min_{\theta \in \overline{\Omega}\,(y)} f_0\,(\theta)\,, \qquad y \in \mathcal{R}^m \tag{66}$$

hodnotovú funkciu úlohy konvexného programovania s množinou prípustných riešení

$$\overline{\Omega}\,(y) = \{\theta \in \mathcal{R}^n \mid f_i\,(\theta) \le y_i\,,\ g_j\,(\theta) = 0\,,\ i = 1\,,\,\ldots\,,\,m\,,\ j = 1\,,\,\ldots\,,\,r\}\,. \tag{67}$$

Malá zmena pravej strany k – teho ohraničenia v $y = \widetilde{y}$ potom zodpovedá zmene optimálnej hodnoty veľkosti k – teho optimálneho Lagrangeovho multiplikátora

$$\widehat{u}_k\,(y)|_{y=\widetilde{y}} = -\left.\frac{\partial\,F\,(y)}{\partial\,y_k}\right|_{y=\widetilde{y}}. \tag{68}$$

Podobná interpretácia senzitívnosti platí [4], [9] pre ohraničenia typu rovnosti.

Lema 2.4. *Nech sú dané dve úlohy konvexného programovania s tou istou rýdzokonvexnou minimalizovanou funkciou $f_0\,(\theta)$, pričom úlohou $\mathcal{U}$ je minimalizovať cez konvexnú množinu prípustných riešení*

$$\overline{\Omega} = \{\theta \mid f_i\,(\theta) \le 0\,,\ g_j\,(\theta) = 0\,,\ i = 1\,,\,\ldots\,,\,m\,,\ j = 1\,,\,\ldots\,,\,r\} \tag{69}$$

a úlohou $\widetilde{\mathcal{U}}$ je minimalizovať cez konvexnú množinu prípustných riešení

$$\widetilde{\Omega} = \{\theta \mid f_i\,(\theta) \le 0\,,\ g_j\,(\theta) = 0\,,\ i = 1\,,\,\ldots\,,\,k-1\,,\,k+1\,,\,\ldots\,,\,m\,,\ j = 1\,,\,\ldots\,,\,r\}. \tag{70}$$

Ak je v optimálnom riešení $\widehat{\theta}_{\mathcal{U}}$ úlohy $\mathcal{U}$ Lagrangeov multiplikátor k – teho ohraničenia typu nerovnosti nulový $(\widehat{u}_k)_{\mathcal{U}} = 0$, potom sú optimálne riešenia týchto úloh totožné

$$\widehat{\theta}_{\mathcal{U}} = \widehat{\theta}_{\widetilde{\mathcal{U}}}\,. \tag{71}$$

V prípade konvexnej minimalizovanej funkcie lema platí v takomto tvare: ak existuje také optimálne riešenie $\widehat{\theta}_{\mathcal{U}}$ úlohy $\mathcal{U}$, že jemu prislúchajúci Lagrangeov multiplikátor k – teho ohraničenia typu nerovnosti je nulový $(\widehat{u}_k)_{\mathcal{U}} = 0$, potom každé optimálne riešenie úlohy $\mathcal{U}$ patrí medzi do množiny optimálnych riešení úlohy $\widetilde{\mathcal{U}}$. Nám však postačí jej tvar s rýdzokonvexnou minimalizovanou funkciou. Ponúkame dva alternatívne dôkazy, pričom druhý z nich platí bezo zmeny aj pre prípad konvexnej minimalizovanej funkcie.

Dôkaz 1. Prvým odôvodením je geometria rýdzokonvexnej funkcie. Jedna z jej definícií ju opisuje ako funkciu, ktorej funkčné hodnoty sú medzi akýmikoľvek dvoma bodmi nad úsečkou spájajúcou funkčné hodnoty v týchto bodoch

$$\rho\,f_0\,(\theta^1) + (1-\rho)\,f_0\,(\theta^2) > f_0\,(\rho\,\theta^1 + (1-\rho)\,\theta^2) \quad \forall\,\rho \in (0\,,\,1)\,. \tag{72}$$

Označme

$$\Upsilon = \left\{ \Theta \mid \Theta \in \overline{\Omega}\,,\ f_k\left(\Theta\right) = 0 \right\} \tag{73}$$

časť hranice množiny prípustných riešení úlohy $\mathcal{U}$ vymedzenej $k-$ tym ohraničením typu nerovnosti. Ak je toto ohraničenie v optimálnom riešení neaktívne

$$f_k\,(\widehat{\theta}_{\mathcal{U}}) < 0\,, \tag{74}$$

potom je hodnota minimalizovanej funkcie na tejto časti hranice vyššia ako v optime

$$f_0\left(\Theta\right) > f_0\,(\widehat{\theta}_{\mathcal{U}}) \quad \forall\, \Theta \in \Upsilon\,, \tag{75}$$

lebo tam je najnižšia zo všetkých prípustných riešení a je jediné. Ak sa odstránením tohto ohraničenia množina prípustných riešení rozšíri, každý bod "novo sprípustnenej" oblasti $\widetilde{\Omega} \backslash \overline{\Omega}$ bude dosiahnuteľný úsečkou prechádzajúcou $\widehat{\theta}_{\mathcal{U}}$ a nejakým bodom $\Theta \in \Upsilon$, ktorá celá leží v $\widetilde{\Omega}$ lebo obe množiny $\widetilde{\Omega}\,,\,\overline{\Omega}$ sú konvexné. Pre všetky $\theta \in \widetilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega}$ bude úsečka spájajúca $f_0\left(\theta\right)$ a $f_0\,(\widehat{\theta}_{\mathcal{U}})$ prechádzať nad nejakou hodnotou $f_0\left(\Theta\right)$ z odstránenej hranice $\Theta \in \Upsilon$, ktorá je vyššia ako $f_0\,(\widehat{\theta}_{\mathcal{U}})$. Preto platí

$$f_0\,(\widehat{\theta}_{\mathcal{U}}) < f_0\left(\theta\right) \quad \forall\, \theta \in \widetilde{\Omega} \setminus \overline{\Omega} \Rightarrow \forall\, \theta \in \widetilde{\Omega}\,. \tag{76}$$

Ak je v bode optimálneho riešenia $k-$ te ohraničenie typu nerovnosti aktívne $\widehat{\theta}_{\mathcal{U}} \in \Upsilon$, platí tá istá úvaha. Najprv sa pri malej perturbácii tohto ohraničenia optimálna hodnota nezmení, čo znamená, že optimálne riešenie sa nezmení a teda už neleží na hranici danej týmto ohraničením. Použijeme preto predchádzajúcu úvahu. □

Dôkaz 2. Druhé odôvodnenie je, že ak je nejaký bod optimálnym riešením, potom spĺňa KKT podmienky (57) – (59). Po odstránení hocijakého ohraničenia a k nemu prislúchajúceho Lagrangeovho multiplikátora $\widehat{u}_k$ tento bod neprestane byť prípustný a pozostalé $\widehat{u}\,,\,\widehat{v}$ neprestanú spĺňať podmienky komplementarity s k nim prislúchajúcimi pozostalými ohraničeniami, ani $\widehat{u}$ neprestanú byť nezáporné. Tento bod teda splní posledné dva riadky KKT podmienok (58) – (59). Nulový Lagrangeov multiplikátor pri riešení sústavy rovníc (57) spôsobí, že toto ohraničenie tu nemá žiadnu rolu a teda jeho odstránením neprestane bod spĺňať ani prvý riadok KKT podmienok (57), čím ostáva optimálnym riešením. □

2.3 Lokálne ekvivalentná úloha na viazaný extrém

Napíšeme si KKT podmienky pre úlohu (47). Lagrangeová funkcia má tvar

$$L(\theta\,,\,u\,,\,v) = \frac{\varphi}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta\,+\mu^T\,\theta + u^T\,(A\,\theta - b) + v^T\,(C\,\theta - d)\,, \qquad u \geq \mathbf{0} \tag{77}$$

a jej derivovaním dostaneme

$$\varphi\,\Sigma\,\theta + \mu + A^T\,u + C^T\,v = \mathbf{0}\,, \tag{78}$$

$$u^T\,(A\,\theta - b) = \mathbf{0}\,, \qquad A\,\theta \leq b\,, \qquad u \geq \mathbf{0}\,, \tag{79}$$

$$C\,\theta = d\,. \tag{80}$$

Veta 2.5. *Predpokladajme, že poznáme množinu indexov aktívnych ohraničení optimálneho riešenia úlohy (47) pre nejaké* $\varphi = \varphi_1$

$$K(\varphi_1) = \left\{k\;\Big|\;\left(A\,\widehat{\theta}\,(\varphi_1)\right)_k = b_k\right\}\,. \tag{81}$$

Nech matica G *a vektor* h *vzniknú pre* φ_1 *podobne ako v (50) zložením riadkov matice* C *a aktívnych riadkov matice* A *a vektora* d *a aktívnych zložiek vektora* b

$$G = \begin{pmatrix} C \\ A_{k\,|\,k\in K\,(\varphi_1)} \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} d \\ b_{k\,|\,k\in K\,(\varphi_1)} \end{pmatrix}. \tag{82}$$

Potom je pre $\varphi = \varphi_1$ *optimálne riešenie* $\widehat{\theta}\,(\varphi_1)$ *úlohy (47) zhodné s optimálnym riešením úlohy na viazaný extrém*

$$\min_{G\,\theta=h}\left\{\frac{\varphi_1}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta + \mu^T\,\theta\right\} = \min_{\theta\in\Omega}\left\{\frac{\varphi_1}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta + \mu^T\,\theta\right\}. \tag{83}$$

Dôkaz. Úloha (47) je konvexná s rýdzokonvexnou minimalizovanou funkciou $f_0 = \frac{\varphi_1}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta+\mu^T\,\theta$. Lagrangeové multiplikátory všetkých neaktívnych ohraničení typu nerovnosti $\widehat{u}_{k\,|\,k\notin K\,(\varphi_1)}\,(\varphi_1)$ sú nulové. Môžeme preto použiť Lemu 2.4. Podobnou úvahou ako v Dôkaze 2 tejto lemy je vidno, že s odstránením neaktívneho ohraničenia sa Lagrangeové multiplikátory pozostalých ohraničení nezmenia. Môžeme ju teda postupne použiť na odstránenie všetkých pre φ_1 neaktívnych ohraničení typu nerovnosti. □

Veta 2.5 umožňuje rozložiť úlohu (47) na postupnosť úloh na viazaný extrém

$$\min_{G\,\theta=h}\left\{\frac{\varphi}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta + \mu^T\,\theta\right\} \tag{84}$$

pre nejakú postupnosť φ . Onedlho vyjde najavo, že táto postupnosť je konečná a množina bodov φ , pre ktoré je $K(\varphi)$ rovnaká, je interval. Teraz to zatiaľ predpokladajme a vyriešme úlohu (84). Lagrangeová funkcia má pre ňu tvar

$$L(\theta\,,\,u\,,\,v) = \frac{\varphi}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta + \mu^T\,\theta + v^T\,(G\,\theta - h) \tag{85}$$

a jej derivovaním dostaneme systém rovníc pre neznáme $\theta\,,\,v$

$$\varphi\,\Sigma\,\theta + \mu + G^T\,v = \mathbf{0} \tag{86}$$

$$G\,\theta = h\,, \tag{87}$$

vyriešením ktorého získame optimálne riešenie úlohy (84). Najprv môžeme vyjadriť θ

$$\theta = \frac{1}{\varphi}\,\Sigma^{-1}\,\left(-\mu - G^T\,v\right)\,. \tag{88}$$

ako funkciu Lagrengeových multiplikátorov v . Po dosadení tohto do (87) máme

$$h = -\,\frac{1}{\varphi}\,G\,\Sigma^{-1}\,\mu - \frac{1}{\varphi}\,G\,\Sigma^{-1}\,G^T\,v\,. \tag{89}$$

Dôsledok 2.3 umožňuje jednoznačne vyjadriť vektor Lagrangeových multiplikátorov

$$v = -(G\,\Sigma^{-1}\,G^T)^{-1}\,G\,\Sigma^{-1}\,\mu - \varphi\,(G\,\Sigma^{-1}\,G^T)^{-1}\,h\,, \tag{90}$$

ktorý môžme dosadiť do vyjadrenia optimálneho riešenia (88)

$$\widehat{\theta} = \widehat{\theta}_{lok}\,(\varphi) = \theta^c + \frac{1}{\varphi}\,\theta^s\,, \tag{91}$$

kde sme označili θ^c zložku nezávislú (konštantnú) od φ a θ^s závislú zložku (smer)

$$\theta^c = \Sigma^{-1}\,G^T\,(G\,\Sigma^{-1}\,G^T)^{-1}\,h \tag{92}$$

$$\theta^s = -\Sigma^{-1}\,\mu + \Sigma^{-1}\,G^T\,(G\,\Sigma^{-1}\,G^T)^{-1}\,G\,\Sigma^{-1}\,\mu\,. \tag{93}$$

Úlohu (84) budeme vzhľadom na úlohu (47) nazývať lokálne ekvivalentná úloha na viazaný extrém a množinu bodov φ , na ktorej sú optimálne riešenia týchto úloh rovnaké interval konštantnosti $K(\varphi)$. Všimnime si, že optimálne riešenia lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém (84) tvoria polpriamku $\widehat{\theta}_{lok}\,(\varphi)$ (91) s počiatkom v bode θ^c a smerovým vektorom θ^s , ktorá s rastúcim φ smeruje do θ^c , a navyše platí

$$(\theta_c)^T\,\Sigma\,\theta^s = 0\,. \tag{94}$$

Keďže úloha (47) bude vyriešiteľná postupnosťou lokálne ekvivalentných úloh na viazaný extrém, krivka optimálnych riešení $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ tejto úlohy bude tvorená zjednotením týchto úsečiek a polpriamok. Ostáva zistiť, ako sa môže zmeniť množina aktívnych ohraničení $K\,(\varphi)$. Najprv nech pre nejaké φ_1 platí pre optimálne riešenie

$$A_1\,\widehat{\theta}\,(\varphi_1) = b_1 \tag{95}$$

$$A_2\,\widehat{\theta}\,(\varphi_1) = b_2 \tag{96}$$

$$A_3\,\widehat{\theta}\,(\varphi_1) < b_3 \tag{97}$$

$$A_4\,\widehat{\theta}\,(\varphi_1) < b_4\,, \tag{98}$$

kde A_k , b_k sú nejaké časti matice A a vektora b , pričom niektoré môžu byť aj prázdne. Uvažujme situáciu $\varphi_1 < \varphi_2$ a existenciu jedinej zmeny v $K\,(\varphi)$ na intervale $[\varphi_1\,,\,\varphi_2]$.

Prvou možnosťou pri posune $\varphi_1 \longrightarrow \varphi_2$ je pribudnutie aktívnych ohraničení $K\,(\varphi_1) \subset K\,(\varphi_2)$. To zodpovedá nárazu lokálnej polpriamky $\widehat{\theta}_{lok}\,(\varphi)$ v nejakom bode zmeny φ_z , $\varphi_1 \leq \varphi_z < \varphi_2$ na nejaké doteraz neaktívne nadroviny, napríklad (97), ktoré jej v smere θ^s bránia v ďalšom postupe. Pre všetky $\varphi \in [\varphi_z\,,\,\varphi_2]$ potom platí $A_3\,\widehat{\theta}\,(\varphi) = b_3$.

Druhou možnosťou pri posune $\varphi_1 \longrightarrow \varphi_2$ je ubudnutie aktívnych ohraničení $K\,(\varphi_1) \supset K\,(\varphi_2)$. To zodpovedá opusteniu krivky $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ v nejakom bode zmeny φ_z , $\varphi_1 < \varphi_z \leq \varphi_2$ nejakých doteraz aktívnych nadrovín, napríklad (95). Tieto už potom viac neobmedzujú optimálne riešenie $A_1\,\widehat{\theta}\,(\varphi) < b_1\ \forall\,\varphi \in (\varphi_z\,,\,\varphi_2]$.

Tým sme vyčerpali všetky možnosti. Ďalšou by mohla byť kombinácia prvých dvoch situácií, to sa však nemôže stať, lebo náraz krivky $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ na neaktívne nadroviny a jej opustenie aktívnych nadrovín vytvárajú odlišný charakter delenia hodnôt φ na intervaly konštantnosti $K\,(\varphi)$. Ak krivka $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ narazí na nejakú množinu nadrovín, delenie má charakter $[\varphi_1\,,\,\varphi_z)$, $[\varphi_z\,,\,\varphi_2]$, čiže sprava otvorený prvý interval. V prípade jej opustenia nejakej množiny nadrovín je delenie $[\varphi_1\,,\,\varphi_z]$, $(\varphi_z\,,\,\varphi_2]$, čiže sprava uzavretý prvý interval. Je síce možné, aby krivka $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ na nejakú nadrovinu narazila a okamžite ju alebo nejakú inú opustila, delenie na intervaly konštantnosti $K\,(\varphi)$ však v takom prípade vyzerá $[\varphi_1\,,\,\varphi_z)$, $\{\varphi_z\}$, $(\varphi_z\,,\,\varphi_2]$. To ale zodpovedá kombinácii vyššie uvedených prípadov $-$ *najprv* nárazu na nadroviny a až potom opusteniu množiny nadrovín.

Môžeme preto pozorovať náraz na neaktívne ohraničenia a opustenie aktívnych ohraničení oddelene. Budeme vychádzať zo známeho optimálneho riešenia $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ pre $\varphi = \varphi_0$

a v zvolenom smere φ, buď raste alebo poklese budeme sledovať, kedy krivka $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ opustí nejaké momentálne aktívne ohraničenie a kedy sa nejaké doteraz neaktívne ohraničenie stane aktívnym. Za bod zmeny φ_z zvolíme, čo nastane skôr. Na intervale medzi týmito bodmi φ vypočítame optimálne riešenie $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ úlohy (47) pomocou lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém (84).

Bod nárazu φ_{zn} sa určí ľahko. Ak vychádzame z optimálneho riešenia (91) v smere danom (93), potom nám stačí zobrať posledný bod φ, kedy je splnená nerovnosť

$$A\,\widehat{\theta}_{lok}\,(\varphi) = A\,\left(\theta^c + \frac{1}{\varphi}\,\theta^s\right) \le b\,. \tag{99}$$

Napríklad pri raste φ to bude

$$\varphi_{zn} = \begin{cases} \min\limits_{k\in\mathcal{M}} \dfrac{(A\,\theta^s)_k}{(b - A\,\theta^c)_k} & \text{ak } \mathcal{M} = \{k \mid (A\,\theta^s)_k < 0\,,\ (b - A\,\theta^c)_k < 0\} \text{ je neprázdna} \\ \infty & \text{inak} \end{cases} \tag{100}$$

2.4 Lagrangeová duálna úloha

Bod φ_{zo} opustenia krivky optimálnych riešení $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ nejakých aktívnych ohraničení určíme pomocou Lagrangeovej duálnej úlohy. Postačujúcou podmienkou pre silnú dualitu je linearita ohraničení [4], [9]. Pre úlohu (47) teda máme silnú dualitu a Lagrangeová duálna funkcia má pre ňu tvar

$$D\,(u\,,\,v) = -v^T\,d - u^T\,b + \min_{\theta}\left\{\frac{\varphi}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta + \mu^T\,\theta + v^T\,C\,\theta + u^T\,A\,\theta\right\} \qquad \mathbf{0} \le u\,. \tag{101}$$

Matica Σ je kladne definitná, minimum je teda jednoznačne dané ako

$$\theta = \frac{1}{\varphi}\,\Sigma^{-1}\,\left(-\mu - C^T\,v - A^T\,u\right) \tag{102}$$

a jeho dosadením do (101) dostaneme

$$\begin{aligned} D\,(u\,,\,v) = &- v^T\,d - u^T\,b - \frac{1}{2\varphi}\,\mu\,\Sigma^{-1}\,\mu\, - \frac{1}{2\varphi}\,v^T\,C\,\Sigma^{-1}\,C^T\,v - \frac{1}{2\varphi}\,u^T\,A\,\Sigma^{-1}\,A^T\,u - \\ &- \frac{1}{\varphi}\,v^T\,C\,\Sigma^{-1}\,\mu - \frac{1}{\varphi}\,u^T\,A\,\Sigma^{-1}\,\mu - \frac{1}{\varphi}\,u^T\,A\Sigma^{-1}\,C^T\,v\,, \qquad \mathbf{0} \le u\,. \end{aligned} \tag{103}$$

Keďže teraz nás zaujíma optimálne riešenie Lagrangeovej duálnej úlohy, nie hodnota v ňom, konštantu nezávislú na $u\,,\,v$ nepotrebujeme a Lagrangeová duálna úloha pre úlohu (47) má tvar

$$\max_{v\,,\,\mathbf{0}\leq u}\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} v & u\end{pmatrix} P_{cele}\begin{pmatrix} v \\ u\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v & u\end{pmatrix} q_{cele}\right\}, \tag{104}$$

kde

$$P_{cele}=-\begin{pmatrix} C\,\Sigma^{-1}\,C^T & C\,\Sigma^{-1}\,A^T \\ A\,\Sigma^{-1}\,C^T & A\,\Sigma^{-1}\,A^T\end{pmatrix}, \qquad q_{cele}=-\begin{pmatrix} C\,\Sigma^{-1}\,\mu+\varphi\,d \\ A\,\Sigma^{-1}\,\mu+\varphi\,b\end{pmatrix}. \tag{105}$$

Význam indexov $_{cele}$ objasníme o chvíľu. Keďže má matica $-C\,\Sigma^{-1}\,C^T$ z Predpokladu 2.2 plnú hodnosť, je záporne definitná a $D\,(u\,,\,v)$ je rýdzokonkávna funkcia voľných premenných v . Mohli by sme to využiť, aby sme jednoznačne vyjadrili ich optimálnu hodnotu vzhľadom na úlohu (104)

$$v=-(C\,\Sigma^{-1}\,C^T)^{-1}\,(\varphi\,d+C\,\Sigma^{-1}\,\mu+C\,\Sigma^{-1}\,A^T\,u) \tag{106}$$

a po dlhšej úprave tak získali jej tvar obsahujúci iba premenné u

$$\max_{u\geq\mathbf{0}}\left\{\frac{1}{2}\,u^T\,P_{cele}\,u+u^T\,q_{cele}\right\}, \tag{107}$$

kde

$$P_{cele}=-\,A\,\Sigma^{-1}\,A^T+A\,\Sigma^{-1}\,C^T\,(C\,\Sigma^{-1}\,C^T)^{-1}\,C\,\Sigma^{-1}\,A^T \tag{108}$$

$$\begin{aligned} q_{cele}=&-\,A\,\Sigma^{-1}\,\mu-\varphi\,b+\varphi\,A\,\Sigma^{-1}\,C^T\,(C\,\Sigma^{-1}\,C^T)^{-1}\,d+\\ &+A\,\Sigma^{-1}\,C^T\,(C\,\Sigma^{-1}\,C^T)^{-1}\,C\,\Sigma^{-1}\,\mu\,.\end{aligned} \tag{109}$$

Onedlho ale uvidíme, že nám viac vyhovuje jej tvar (104). Z hľadiska opustenia krivky $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ nejakých aktívnych ohraničení $K\,(\varphi_1)$ v nejakom $\widehat{\theta}\,(\varphi_1)$ nepotrebujeme riešiť Lagrangeovú duálnu úlohu obsahujúcu Lagrangeové multiplikátory pre všetky ohraničenia. Stačí, ak budeme uvažovať ohraničenia, ktoré sú pre toto optimálne riešenie aktívne a ktoré teda vystupujú v lokálne ekvivalentnej úlohe na viazaný extrém pre bod φ_1 . Postačí to aj pre jeho okolie $O\,(\varphi_1)$. Pre ohraničenia, ktoré sú v bode $\widehat{\theta}\,(\varphi_1)$ neaktívne, totiž existuje okolie $O\left(\widehat{\theta}\,(\varphi_1)\right)$ tohto bodu, na ktorom sú tiež neaktívne $A_{k\,|\,k\notin K\,(\varphi_1)}\,\theta\;<\;b_{k\,|\,k\notin K\,(\varphi_1)}\,\forall\,\theta\,\in\,O\left(\widehat{\theta}\,(\varphi_1)\right)$. Z toho, že $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ je spojitá funkcia vyplýva, že existuje taká malá zmenu v hodnote parametra φ , pre ktorú sa bude bod optima pohybovať v tomto okolí a teda žiadne momentálne neaktívne ohraničenia ho neobmedzia. Inými slovami existuje okolie $O(\varphi_1)$ bodu φ_1, kde sa množina $K(\varphi_1)$ nezväčší a pre optimálne riešenie na tomto okolí budú aktívne tie isté ohraničenia ako pre $\widehat{\theta}(\varphi_1)$, alebo niektoré prestanú byť aktívne, žiadne ale nezačnú byť aktívne $A_{k\,|\,k\notin K(\varphi_1)}\,\widehat{\theta}(\varphi) < b_{k\,|\,k\notin K(\varphi_1)}\,\forall\,\varphi \in O(\varphi_1)$. Na tomto okolí budú Lagrangeové multiplikátory ohraničení neaktívnych v $\widehat{\theta}(\varphi_1)$ rovné nule, môžeme teda dedukovať, že z hľadiska opustenia krivky $\widehat{\theta}(\varphi)$ aktívnych ohraničení $K(\varphi_1)$ stačí na okolí $O(\varphi_1)$ zostrojiť Lagrangeovú duálnu úlohu iba pre aktívne ohraničenia typu nerovnosti a pre ohraničenia typu rovnosti použitím iba aktívnych riadkov A a b vo vzťahoch (105) alebo (108), (109), lebo na zvyšných riadkoch a stĺpcoch P_{cele}, q_{cele} nezáleží. Alebo sa na situáciu môžeme pozrieť z hľadiska konštrukcie lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém k Lagrangeovej duálnej úlohe, pričom v nej sa opustením krivky optimálnych riešení $(\widehat{v}(\varphi), \widehat{u}(\varphi))^T$ aktívnych ohraničení nezápornosti nemusíme zaoberať, lebo to zodpovedá narazeniu krivky $\widehat{\theta}(\varphi)$ na momentálne neaktívne ohraničenia v primárnej úlohe. V oboch prípadoch dostaneme úlohu, ktorá má z Predpokladu 2.2 nanajvýš n premenných. Budeme ju nazývať lokálna Lagrangeová duálna úloha a tú so všetkými premennými u, v celá Lagrangeová duálna úloha. Maticu kvadratickej formy lokálnej Lagrangeovej duálnej úlohy označíme P a vektor lineárneho člena q. Lokálna Lagrangeová duálna úloha je teda na nejakom okolí $O(\varphi_1)$ ekvivalentná celej Lagrangeovej duálnej úlohe v tom zmysle, že majú rovnaké riešenia pre premenné $\widehat{u}_{lok} = \widehat{u}_{k\,|\,k\in K(\varphi_1)}$ a $\widehat{v}$ vystupujúce v oboch úlohách a zvyšné $\widehat{u}$ sú nulové $\widehat{u}_{k\,|\,k\notin K(\varphi_1)} = 0$. Lokálna Lagrangeová duálna úloha má v bode φ_1 prípustné voľné optimum, lebo Lagrangeové multiplikátory aktívnych ohraničení sú buď kladné, alebo sú nulové "dobrovoľne", to jest aj bez vynútenia ohraničeniami $u \geq \mathbf{0}$. Navyše je maximalizovaná funkcia tejto úlohy rýdzokonkávna, lebo pre úlohu (104) má matica $P = -G\,\Sigma^{-1}\,G^T$ z Predpokladu 2.2 plnú hodnosť (z toho vyplynie aj plná hodnosť matice P úlohy (107)). Riešenie Lagrangeovej duálnej úlohy pre aktívne ohraničenia je teda v bode φ_1 dané ako

$$\begin{pmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{u}_{lok} \end{pmatrix} = -\varphi\,P^{-1}\,q^s - P^{-1}\,q^c = \begin{pmatrix} \varphi\,v^s + v^c \\ \varphi\,u^s_{lok} + u^c_{lok} \end{pmatrix} \tag{110}$$

s q^s, q^c rovnými

$$q^s = \begin{pmatrix} -d \\ -b_{k\,|\,k\in K(\varphi_1)} \end{pmatrix} = -h\,, \qquad q^c = \begin{pmatrix} -C\,\Sigma^{-1}\,\mu \\ -A_{k\,|\,k\in K(\varphi_1)}\,\Sigma^{-1}\,\mu \end{pmatrix} = -G\,\Sigma^{-1}\,\mu \tag{111}$$

pre $\varphi = \varphi_1$. Týmito vzťahmi môžeme pozorovať, pre akú hodnotu φ sa nejaké ohraničenia typu nerovnosti stanú neaktívnymi. Stane sa to v tom φ_{zo} , keď sa niektorá s týmto parametrom sa meniaca sa zložka $\widehat{u}$ stane nulovou. V tomto bode majú príslušné ohraničenia Lagrangeov multiplikátor nulový a s φ klesajúci, preto budú pre ďalšie φ neaktívne. Pre rastúce φ ho určíme ako

$$\varphi_{zo} = \begin{cases} \min\limits_{k \in \mathcal{M}} \ -\dfrac{(u^c_{lok})_k}{(u^s_{lok})_k} & \text{ak } \mathcal{M} = \{k \mid (u^s_{lok})_k < 0\} \text{ je neprázdna} \\ \infty & \text{inak} \end{cases} \tag{112}$$

Zo vzťahu (110) vyplýva aj to, že množina bodov φ , pre ktoré je $K(\varphi)$ rovnaká množina je interval. Zoberme si prípad rastúceho φ . Ak krivka $\widehat{\theta}(\varphi)$ v nejakom bode φ_{zo} opustí nejakú množinu aktívnych ohraničení, pre všetky $\varphi > \varphi_{zo}$ budú niektoré optimálne $\widehat{u}_{lok}(\varphi)$ tejto lokálnej Lagrangeovej duálnej úlohy záporné, preto už nikdy nebude aktívna táto istá množina ohraničení. Ak krivka $\widehat{\theta}(\varphi)$ v nejakom bode φ_{zn} narazí na nejakú množinu neaktívnych ohraničení, pre všetky $\varphi > \varphi_{zn}$ bude optimálne riešenie $\widehat{\theta}_{lok}(\varphi)$ tejto lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém neprípustné pre úlohu (47). Preto pre všetky $\varphi_1 < \varphi_2$ platí

$$K(\varphi_1) = K(\varphi_2) \Longrightarrow K(\varphi_1) = K(\varphi) \ \ \forall \varphi \in (\varphi_1 \, , \varphi_2) \, . \tag{113}$$

Keďže počet všetkých kombinácii indexov aktívnych ohraničení typu nerovnosti je konečný, je aj počet intervalov konštantnosti $K(\varphi)$ konečný. Algoritmus teda pozostáva z konečného počtu úloh na viazaný extrém.

2.5 Schéma algoritmu a príklad

Nasleduje schéma odvodeného algoritmu. Kvôli jednoduchosti a prehľadnosti uvádzame iba prípad zväčšujúceho sa φ . Jediná zmena v prípade zmenšujúceho sa φ je, že pri určení φ_{zn} a φ_{zo} zoberieme maximum miesto minima a zmenia sa niektoré nerovnosti vo vzťahoch určujúcich $\mathcal{M}$.

Algoritmus 1. *pre úlohu PKP (47)*

Vstup*: matice Σ , A , C , vektory μ , b , d , optimálne riešenie $\widehat{\theta}(\varphi_0)$ úlohy (47) pre hodnotu parametra φ_0 , jeden alebo viac kladných parametrov $eps > 0$ na zohľadnenie potencionálnych zaokrúhľovacích chýb*

Výstup: *optimálne riešenie* $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ *pre* $\varphi \in [\varphi_0\,,\,\infty)$ *v podobe delenia tohto intervalu na intervaly* $[\varphi_z^{iter}\,,\,\varphi_z^{iter+1}]$ *konštantnosti* $K\,(\varphi)$ *a smerov* $(\theta^s)^{iter}$ *a konštantných zložiek* $(\theta^c)^{iter}$ *optimálnych riešení lokálne ekvivalentných úloh na viazaný extrém* $\widehat{\theta}_{lok}^{iter}\,(\varphi)$ *tvoriacich na nich optimálne riešenie podľa vzťahu* $\widehat{\theta}\,(\varphi)\big|_{\varphi\in[\varphi_z^{iter}\,,\,\varphi_z^{iter+1}]} = \widehat{\theta}_{lok}^{iter}\,(\varphi)\big|_{\varphi\in[\varphi_z^{iter}\,,\,\varphi_z^{iter+1}]}$

1. *Položíme* $iter = 0\,,\ \varphi_z^{iter} = \varphi_0$

2. *Vypočítame aktívne ohraničenia typu nerovnosti v bode* $\widehat{\theta}\,(\varphi_z^{iter})$ *podľa vzťahu* $K\,(\varphi_z^{iter}) = \left\{k \;\middle|\; \left(b - A\,\widehat{\theta}\,(\varphi_z^{iter})\right)_k < eps\right\}$ *a zostavíme maticu* G *a vektor* h *podľa vzťahu (82) pre* $K\,(\varphi_z^{iter})$

3. *Pomocou lokálnej Lagrangeovej duálnej úlohy pre Lagrangeové multiplikátory prislúchajúce ohraničeniam z* $K\,(\varphi_z^{iter})$ *a vzťahov (105), (110), (111) vypočítame hodnotu parametra* φ_{zo} *(112), pre ktorú krivka optimálnych riešení opustí nejaké aktívne ohraničenia*

4. *Vypočíme konštantnú zložku* $(\theta^c)^{iter}$ *(92), smer* $(\theta^s)^{iter}$ *(93) a tým aj optimálne riešenie* $\widehat{\theta}_{lok}^{iter}$ *(91) lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém (84) a pomocou nich vypočítame poslednú hodnotu parametra* φ_{zn} *(100), pre ktorú je toto optimum (91) prípustným riešením úlohy (47)*

5. *Porovnáme, ktorá zmena v množine aktívnych ohraničení, ktorá nastane skôr:*

   (a) *Ak* $\varphi_{zo} < \varphi_{zn}$, *potom krivka optimálnych riešení* $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ *najprv opustí nejaké doteraz aktívne ohraničenia, vypočítame bod zmeny v množine indexov aktívnych ohraničení* $K\,(\varphi)$ *ako* $\varphi_z^{iter+1} = \varphi_{zo}$, *zostavíme množinu indexov opúšťajúcich aktívne ohraničenia* $K_o = \left\{k \;\middle|\; (\varphi_{zo}\,u_{lok}^s + u_{lok}^c)_k < eps\,,\ (u_{lok}^s)_k < 0\right\}$ *a zostavíme novú množinu indexov aktívnych ohraničení* $K\,(\varphi_z^{iter+1}) = K\,(\varphi_z^{iter}) \setminus K_o$ *pre ďalší interval konštantnosti* $K\,(\varphi)$

   (b) *Ak* $\varphi_{zo} \geq \varphi_{zn}$, *potom krivka optimálnych riešení* $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ *najprv narazí na nejaké doteraz neaktívne ohraničenia, vypočítame bod zmeny v množine indexov aktívnych ohraničení* $K\,(\varphi)$ *ako* $\varphi_z^{iter+1} = \varphi_{zn}$ *a zostavíme novú množinu indexov aktívnych ohraničení* $K\,(\varphi_z^{iter+1}) = \left\{k \;\middle|\; \left(b - A\,(\theta_{iter}^c + \frac{1}{\varphi_{zn}}\,\theta_{iter}^s)\right)_k < eps\right\}$ *pre ďalší interval konštantnosti* $K\,(\varphi)$

6. *Uložíme* φ_z^{iter+1} , $(\theta^s)^{iter}$, $(\theta^c)^{iter}$ *, položíme* $iter = iter + 1$

7. *ak* $\varphi_z^{iter} = \infty$ *koniec, inak pokračujeme bodom 2.*

V bode 6. ukladáme smerový vektor θ^s vychádzajúci z θ^c a hornú hranicu φ_z intervalu konštantnosti $K(\varphi)$, na ktorom tieto vektory určujú krivku $\widehat{\theta}(\varphi) = \theta^c + \frac{1}{\varphi}\theta^s$. Spodnú hranicu tohto intervalu tvorí φ_z z predchádzajúcej iterácie. Použitím Algoritmu 1 pre rastúce aj pre klesajúce φ získame celú krivku optimálnych riešení úlohy (47), pričom nám stačí poznať riešenie úlohy KP pre jedinú hodnotu φ_0 , ako sme tvrdili na začiatku. Túto hodnotu môžeme získať jednoducho, ak je pre nejaké φ prípustné minimum lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém (84) s $G = C$.

Všimnime si, že v prípade použitia Lagrangeovej duálnej úlohy v tvare (104) riešime vo vzťahu (110) tie isté systémy rovníc ako vo vzťahoch (92), (93). Ak by sme použili Lagrangeovú duálnu úlohu v tvare (107) pre úlohu (47) s nenulovým r , riešili by sme vo vzťahu (110) systém s inou maticou P . Použitím tvaru (104) si teda ušetríme riešenie dvoch systémov rovníc pre každý interval konštantnosti $K(\varphi)$. Navyše sa v prípade riedkej úlohy PKP (47) v prípade použitia duálnej úlohy (107) pri násobení matíc vo vzťahu (108) často stráca ich riedkosť. Ďalej si môžme všimnúť symetriu primárnej a duálnej úlohy v bodoch zmeny φ_z . Obe sú úlohy PKP s lineárne parametrizovanou optimalizovanou funkciou, pričom náraz krivky optimálnych riešení na doteraz neaktívne ohraničenia v jednej úlohe je zodpovedajúci jej opusteniu doteraz aktívnych ohraničení v druhej úlohe, pričom tieto zmeny sa symetricky menia aj podľa toho, či je φ rastúce alebo klesajúce. Vedľajším produktom Algoritmu 1 je krivka optimálnych riešení $(v(\varphi), u(\varphi))^T$ parametrizovanej celej Lagrangeovej duálnej úlohy v podobe jej smerov a konštantných zložiek v^s , v^c , u^s , u^c na intervaloch konštantnosti $K(\varphi)$, ktoré sú zhodné s tými v primárnej úlohe, pričom si môžeme všimnúť, že na jej výpočet sme nepoužili k nej duálnu Lagrangeovú duálnu úlohu.

Ak vypočítame krivku optimálnych riešení, na každom intervale konštantnosti $K(\varphi)$ vypočítame hodnotovú funkciu $\widetilde{\lambda}_{lok}(\varphi)$ úlohy (47) dosadením optimálneho riešenia lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda}_{lok}(\varphi) =& \frac{\varphi}{2}\left(\theta^c + \frac{1}{\varphi}\theta^s\right)^T \Sigma \left(\theta^c + \frac{1}{\varphi}\theta^s\right) + \mu^T \left(\theta^c + \frac{1}{\varphi}\theta^s\right) = \\ =& \frac{1}{2}(\theta^c)^T \Sigma \theta^c \varphi + \left(\frac{1}{2}(\theta^s)^T \Sigma \theta^s + \mu^T \theta^s\right)\frac{1}{\varphi} + (\theta^c)^T \Sigma \theta^s + \mu^T \theta^c = \\ =& \alpha \varphi + \frac{\beta}{\varphi} + \gamma ,\end{aligned} \tag{114}$$

kde α , β , γ je možné s využitím (94) vyjadriť ako

$$\alpha = \frac{1}{2} h^T \left(G \Sigma^{-1} G^T\right)^{-1} h \geq 0 \tag{115}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\mu^T \Sigma^{-1} G^T \left(G \Sigma^{-1} G^T\right)^{-1} G \Sigma^{-1} \mu - \mu^T \Sigma^{-1} \mu\right) \leq 0 \tag{116}$$

$$\gamma = \mu^T \Sigma^{-1} G^T \left(G \Sigma^{-1} G^T\right)^{-1} h . \tag{117}$$

Hodnotovú funkciu $\widetilde{\lambda}(\varphi)$ úlohy (47) dostaneme zjednotením funkcií $\widetilde{\lambda}_{lok}(\varphi)$ na intervaloch konštantnosti $K(\varphi)$. Pre výpočet hodnotovej funkcie $\lambda(\varphi)$ (37) použijeme Algoritmus 1 pre μ prenásobené -1. Samozrejme, že $G = G(\varphi)$ a aj niektoré ďalšie premenné sú nielen tu na rôznych intervaloch konštantnosti $K(\varphi)$ rôzne. Toto značenie sme vypustili, lebo veríme, že význam je z kontextu jasný. Všimnime si, že $\alpha = 0$ len vtedy, ak $K(\varphi) = C = \emptyset$ alebo ak $h = \mathbf{0}$. Na druhej strane $\beta = 0$ len vtedy, ak $\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mu \perp N(\Sigma^{-\frac{1}{2}} G^T)$, čo je ekvivalentné s $\theta^s = \mathbf{0}$. To vyplýva zo vzťahov (93) a (116) vyňatím $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ pred a za zátvorku (v zátvorke bude projekčná matica) alebo zo (114).

Príklad 2.6. *Nech*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mu = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{matrix} C = \emptyset \\ d = \emptyset \end{matrix} \tag{118}$$

Vypočítame krivku optimálnych riešení $\widehat{\theta}(\varphi)$ a hodnotovú funkciu $\widetilde{\lambda}(\varphi)$ úlohy (47) pre všetky $\varphi > 0$. Najprv potrebujeme bod $\widehat{\theta}(\varphi_0)$ na krivke optimálnych riešení. Pozrime sa, či je prípustné nejaké voľné minimum

$$\widehat{\theta}_{vol}(\varphi) = -\frac{1}{\varphi}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varphi}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} . \tag{119}$$

Dosadíme ho do ohraničení typu nerovnosti

$$A\,\widehat{\theta}_{vol}\,(\varphi) = \frac{1}{\varphi}\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\varphi\\\varphi\\\varphi\end{pmatrix} \tag{120}$$

a zistíme, že na intervale $[5\,,\,\infty)$ *je prípustné, použijeme preto Algoritmus 1 pre klesajúce* φ *. Ďalej postupujeme rovnako, ako keby sme dostali* $\widehat{\theta}\,(\varphi_0)$ *pre* $\varphi_0 \in (5\,,\,\infty)$ *. Na tomto intervale zrejme* $K\,(\varphi) = G = h = \emptyset$ *a keďže nie sú aktívne žiadne ohraničenia, ktoré možno opustiť, formálne položíme* $\varphi_{zo} = 0$ *. Vypočítame*

$$(\theta^c)^0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\,, \qquad (\theta^s)^0 = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \widehat{\theta}_{lok}\,(\varphi) = \frac{1}{\varphi}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} \tag{121}$$

$$\alpha = 0\,, \qquad \beta = -5\,, \qquad \gamma = 0 \qquad \Rightarrow \widetilde{\lambda}_{lok}\,(\varphi) = -\,\frac{5}{\varphi} \tag{122}$$

a za bod zmeny v množine aktívnych ohraničení zvolíme $\varphi_{zn} = \varphi_z^1 = 5$ *. V tomto bode*

$$b - A\,\widehat{\theta}\,(5) = \begin{pmatrix}0\\\frac{4}{5}\\\frac{6}{5}\end{pmatrix} \tag{123}$$

je aktívne ohraničenie $K\,(5) = \{1\}$*. Zostavíme*

$$G = A_1 = \begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\,, \qquad h = b_1 = 1\,. \tag{124}$$

Lokálna Lagrangeová duálna úloha teda bude

$$\begin{aligned}&\max_{u_1 \geq 0}\left\{-\,\frac{u_1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\Sigma^{-1}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}u_1 + u_1\left(-\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\Sigma^{-1}\,\mu - \varphi\right)\right\} = \\ &\max_{u_1 \geq 0}\left\{-\,\frac{5\,u_1^2}{2} + (5-\varphi)\,u_1\right\}\end{aligned} \tag{125}$$

a jej voľné optimum

$$\widehat{u}_1 = 1 - \frac{\varphi}{5} \tag{126}$$

je prípustné pre $\varphi < 5$ *, pre všetky menšie* φ *teda bude tento Lagrangeov multiplikátor kladný. Toto ohraničenie bude teda aktívne a formálne položíme* $\varphi_{zo} = 0$ *. Vypočítame*

$$(\theta^c)^1 = \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}\,, \qquad (\theta^s)^1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \widehat{\theta}_{lok}\,(\varphi) = \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix} + \frac{1}{\varphi}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \tag{127}$$

$$\alpha = \frac{1}{10}\,, \qquad \beta = -\frac{5}{2}\,, \qquad \gamma = -1 \qquad \Rightarrow \widetilde{\lambda}_{lok}\,(\varphi) = \frac{\varphi}{10} - \frac{5}{2\,\varphi} - 1 \tag{128}$$

S klesajúcim φ rastie druhá a tretia zložka $A\,\widehat{\theta}\,(\varphi)$

$$A\,\widehat{\theta}\,(\varphi) = A\,(\theta^c)^1 + \frac{1}{\varphi}\,A\,(\theta^s)^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} + \frac{1}{\varphi}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{129}$$

bod nárazu preto určíme z porovnania hodnôt φ, pre ktoré krivka $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ dosiahne tieto ohraničenia

$$\frac{1}{\varphi} \leq \frac{\left(b - A\,(\theta^c)^1\right)_2}{\left(A\,(\theta^s)^1\right)_2} = \frac{2}{5}\,, \qquad \frac{1}{\varphi} \leq \frac{\left(b - A\,(\theta^c)^1\right)_3}{\left(A\,(\theta^s)^1\right)_3} = \frac{7}{5}\,. \tag{130}$$

Druhé ohraničenie bude dosiahnuté skôr ako tretie v bode $\varphi_{zn} = \frac{5}{2} > \frac{5}{7}$. Máme preto $\varphi_z^2 = \varphi_{zn} = \frac{5}{2}$ a $K\left(\frac{5}{2}\right) = \{\,1\,,\,2\,\}$. Zostavíme

$$G = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{131}$$

Z lokálnej Lagrangeovej duálnej úlohy určíme, po ktorú hodnotu φ by prvé a druhé ohraničenie ostali aktívnymi, ak by sme si nevšímali ostatné ohraničenia

$$\begin{aligned} \max_{u_1\,,\,u_2 \geq 0} \Bigg\{ &- \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\left(- \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Sigma^{-1}\mu - \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{132}$$

Tieto ohraničenia budú aktívne, kým je prípustné voľné optimum tejto úlohy

$$\begin{pmatrix} \widehat{u}_1 \\ \widehat{u}_2 \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{133}$$

Jeho druhá zložka s klesajúcim φ rastie, preto za $\varphi_{zo} = 2$ určíme bod, kedy sa prvá zložka sa stáva zápornou. Vypočítame

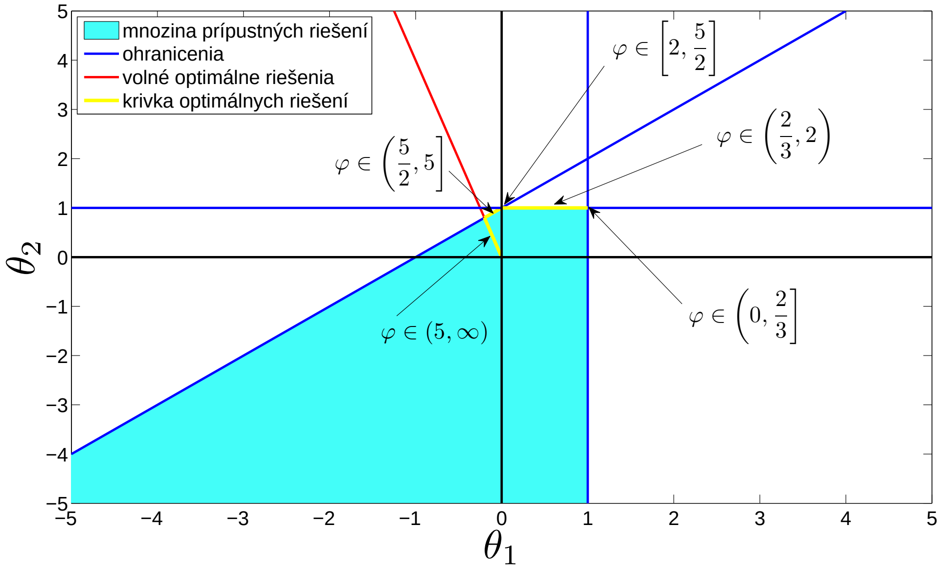
$$(\theta^s)^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (\theta^c)^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \widehat{\theta}_{lok}\,(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{134}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\,, \qquad \beta = 0\,, \qquad \gamma = -3 \qquad \Rightarrow \widetilde{\lambda}_{lok}\,(\varphi) = \frac{\varphi}{2} - 3 \tag{135}$$

Smer je nulový vektor, preto sa $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ sa nemení a formálne položíme $\varphi_{zn} = 0$. Za bod zmeny preto zvolíme $\varphi_z^3 = 2 = \varphi_{zo} > \varphi_{zn} = 0$. Keďže sme už ilustrovali všetky kroky

Algoritmu 1, uvedieme už iba výsledok

$$\varphi \in \begin{cases} (5\,,\,\infty) & K\,(\varphi) = \emptyset & \widehat{\theta}\,(\varphi) = \dfrac{1}{\varphi}\begin{pmatrix} -1 \\ \\ 4 \end{pmatrix} & \widetilde{\lambda}\,(\varphi) = -\,\dfrac{5}{\varphi} \\ \left(\frac{5}{2}\,,\,5\right] & K\,(\varphi) = \{1\} & \widehat{\theta}\,(\varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \dfrac{1}{\varphi}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} & \widetilde{\lambda}\,(\varphi) = \dfrac{\varphi}{10} - \dfrac{5}{2\,\varphi} - 1 \\ \left[2\,,\,\frac{5}{2}\right] & K\,(\varphi) = \{1\,,\,2\} & \widehat{\theta}\,(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} & \widetilde{\lambda}\,(\varphi) = \dfrac{\varphi}{2} - 3 \\ \left(\frac{2}{3}\,,\,2\right) & K\,(\varphi) = \{2\} & \widehat{\theta}\,(\varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{\varphi}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} & \widetilde{\lambda}\,(\varphi) = \dfrac{\varphi}{4} - \dfrac{1}{\varphi} - 2 \\ \left(0\,,\,\frac{2}{3}\right] & K\,(\varphi) = \{2\,,\,3\} & \widehat{\theta}\,(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} & \widetilde{\lambda}\,(\varphi) = \dfrac{5\,\varphi}{2} - 5 \end{cases} \tag{136}$$



Obr. 2: Geometria a priebeh optimálnych riešení Príkladu 2.6

2.6 Degenerovaná množina prípustných riešení

Istou nevýhodou je Predpoklad 2.2, lebo množinu prípustných riešení Ω môžeme mať danú v degenerovanom tvare, teda danú takým jej popisom pomocou ohraničení, ktorý tento predpoklad nespĺňa. Ak by sme použili Algoritmus 1 v takom prípade, v nejakom bode φ_z by matica G nemala plnú riadkovú hodnosť. Lokálna Lagrangeová duálna úloha k (47) potom v tomto bode nemusí mať jednoznačné riešenie, lebo jej matica kvadratickej formy $P = -G\,\Sigma^{-1}\,G^T$ môže byť iba záporne semidefinitná. Použitím tohto postupu preto nevieme jednoznačne určiť hodnotu Lagrangeových multiplikátorov aktívnych ohraničení a teda ani bod φ_{zo} ich opustenia.

Je možné zmeniť vyjadrenie polyédra Ω pomocou ohraničení typu rovnosti a nerovnosti tak, aby boli normálové vektory nadrovín aktívnych ohraničení lineárne nezávislé v akomkoľvek bode $\theta \in \Omega$ bez ohľadu nato, či sa nachádza na krivke optimálnych riešení $\widehat{\theta}\,(\varphi)$. Ohraničenia typu rovnosti sú s Predpokladom 2.2 v rozpore vtedy, ak matica C nemá plnú riadkovú hodnosť. V takom prípade sa dá použiť Gaussová eliminácia a ponechať iba systém rovníc $C\,\theta = d$ s plnou riadkovou hodnosťou C. Ohraničenia typu nerovnosti môžu byť v rozpore s Predpokladom 2.2 z dvoch dôvodov. Buď implicitne zahŕňajú nejaké rovnosti alebo sú niektoré z nich z hľadiska popisu Ω nadbytočné. Riešenie oboch týchto problémov možno nájsť v ([6], Avis $-$ Fukuda $-$ Picozzi [2]). Na vyriešenie prvého problému sa naformuluje úloha LP hľadajúca vnútorný bod polyédra Ω. Ak taký bod nenájdeme, polyéder nemá plnú dimenziu a detekujeme ohraničenia typu nerovnosti, ktoré sú splnené ako rovnosti pre všetky $\theta \in \Omega$. Na vyriešenie druhého problému sa naformulujú úlohy LP, ktoré zistia, či sa perturbáciou jednotlivých ohraničení typu nerovnosti množina Ω rozšíri. Tie ohraničenia, ktorých perturbáciou sa rozšíri nie sú nadbytočné a naopak.

Nás však zaujímajú iba body nachádzajúce sa na krivke optimálnych riešení $\widehat{\theta}\,(\varphi)$. Preto nám tieto problémy stačí riešiť iba vtedy, ak sa v nejakej iterácii vo φ_z vyskytne singulárna matica P, čo zistíme napríklad podľa diagonály jej Choleského rozkladu. Ak sa to stane pre φ_0, preveríme prítomnosť všetkých troch problémov. V ďalších iteráciách sa už môže vyskytnúť iba problém s nadbytočnými ohraničeniami typu nerovnosti. V každej iterácii vrátane prvej nám ho stačí vyriešiť iba pre aktívne ohraničenia z $K\,(\varphi_z)$.

Inou možnosťou je regularizovať Ω malým parametrom δ a vypočítať aproximáciu krivky optimálnych riešení $\widehat{\theta}_\delta\,(\varphi)$. Napríklad je možné miesto krivky optimálnych riešení úlohy (47) počítať krivku optimálnych riešení jej celej Lagrangeovej duálnej úlohy (použitím modifikácie Algoritmu 1 zo 4. kapitoly) s maticou kvadratickej formy

$P_{cele} - \delta\, I\,,\ \delta > 0$ a z priebehu $\left(\widehat{v}_\delta\,(\varphi)\,,\,\widehat{u}_\delta\,(\varphi)\right)^T$ potom pomocou (64), (78) zostaviť $\widehat{\theta}_\delta\,(\varphi)$, pričom tvar (107) je asi menej výpočtovo náročný, ak je použiteľný. Celá Lagrangeová duálna úloha k (47) je nakoniec tiež úloha PKP, ktorej množina prípustných riešení daná obmedzeniami nezápornosti pre premenné $u \geq \mathbf{0}$ spĺňa Predpoklad 2.2. Alebo ak predpokladáme málo bodov φ_z, v ktorých nie je splnený Predpoklad 2.2, môžeme vyriešiť úlohu KP pre ďalšiu hodnotu parametra φ a postupovať z nej.

Máme ešte inú možnosť ako postupovať v prípade, ak v nejakom bode φ_z nie je splnený Predpoklad 2.2. Niektoré z optimálnych riešení lokálnej Lagrangeovej duálnej úlohy je určite niektoré z voľných optím tejto úlohy. To je dané ako riešenie sústavy

$$P \begin{pmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{u}_{lok} \end{pmatrix} = -(\varphi\, q^s + q^c) \tag{137}$$

so singulárnou maticou P. Bod φ_{zo} opustenia krivky $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ tejto množiny ohraničení sa dá určiť ako posledná hodnota φ, pre ktorú existuje riešenie tejto sústavy so všetkými zložkami $\widehat{u}_{lok}$ nezápornými. Hodnota φ_{zo} sa teda napríklad pre rastúce φ dá získať vyriešením nasledovnej úlohy LP

$$\max_{\varphi\,,\,u_{lok}\,,\,v}\ \varphi \tag{138}$$

$$P \begin{pmatrix} v \\ u_{lok} \end{pmatrix} + \varphi\, q^s = -q^c \tag{139}$$

$$u_{lok} \geq \mathbf{0}\,. \tag{140}$$

Optimálne riešenie tejto úlohy $(\widehat{\varphi}\,,\,\widehat{v}\,,\,\widehat{u}_{lok})^T$ je jednoznačné nielen pre premennú $\widehat{\varphi} = \varphi_{zo}$, ale aj pre premenné $\widehat{u}_{lok}$, okrem prípadu, ak pre nejaký vektor štandardnej jednotkovej bázy $e_k = (0\ \ldots\,,0\,,1\,,0\,,\ldots\,,0)^T$ platí $e_k \in N\,(P)$. Aby sme to videli, uvedomme si, že množina optimálnych riešení lokálnej Lagrangeovej duálnej úlohy je daná prienikom nulového priestoru P posunutého o nejaké nehomogénne riešenie $(v^{nehom}\,,\,u_{lok}^{nehom})^T$ a nezáporného ortantu $\mathcal{R}_+^{|K\,(\varphi_z)|}$ prináležiacemu premenným u_{lok}. Žiadne optimálne riešenie $(\widehat{\varphi}\,,\,\widehat{v}\,,\,\widehat{u}_{lok})^T$ úlohy (138) nemôže mať zložku u_{lok} tvorenú vnútorným bodom $\mathcal{R}_+^{|K\,(\varphi_z)|}$, lebo kvôli spojitosti parametrizovaných množín voľných optimálnych riešení lokálnej Lagrangeovej duálnej úlohy $(\widehat{v}\,,\,\widehat{u}_{lok})^T$ môžme hodnotou $\widehat{\varphi}$ ešte možno pohnúť, kým bude nejaká zložka $\widehat{u}_{lok}$ v tejto množine nevyhnutne záporná. To znamená, že toto $\widehat{\varphi}$ nie je hľadané $\widehat{\varphi} = \varphi_{zo}$. Ak teda existuje viac rôznych optimálnych riešení $(\widehat{\varphi}\,,\,\widehat{v}\,,\,\widehat{u}_{lok})^T$ úlohy (138) a ich zložky $\widehat{u}_{lok}$ sa líšia, všetky $\widehat{u}_{lok}$ všetkých optimálnych riešení sa nachádzajú na tej istej časti hranice $\mathcal{R}_+^{|K(\varphi_z)|}$, inak by ich konvexnou kombináciou vznikol vnútorný bod a ten by bol tiež optimom tejto úlohy kvôli konvexnosti jej množiny optimálnych riešení. To znamená, že existuje taká zložka zložka $(\widehat{u}_{lok})_k$, ktorá je nulová $(\widehat{u}_{lok})_k = 0$ pre všetky $(\widehat{\varphi}\,,\,\widehat{v}\,,\,\widehat{u}_{lok})^T$ a nevyhnutne aspoň jeden vektor zo štandardnej jednotkovej bázy spĺňa $e_k \in N(P)$. Ak je toto pravda, potom je celý $k-$ ty stĺpec P a teda aj $k-$ ty diagonálny člen P nulový, z čoho vyplýva nulovosť $k-$ teho riadku G. Na to, aby sme predišli tejto situácii teda stačí, ak z ohraničení odstránime všetky nulové riadky. Získame tak jednoznačné $\widehat{u}_{lok}$ a tým aj informáciu, ktoré aktívne ohraničenia sa v bode φ_{zo} stanú neaktívnymi. V prípade plnej riadkovej hodnosti matice C môžeme opäť použiť lokálnu Lagrangeovú duálnu úlohu s P, q vytvorenými zo (107), aby mala úloha (138) menšie rozmery. Singulárna matica $P = G\,\Sigma^{-1}\,G^T$ vystupuje aj v systémoch rovníc v (92), (93). Pre každé φ z intervalu medzi súčasným φ_z vypočítaným φ_{zo} však môžeme zo systému rovníc $G\,\theta = h$ lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém odstrániť nadbytočné ohraničenia a získať tak jej jednoznačné optimálne riešenia tvorené smerom θ^s a konštantnou zložkou θ^c, ktoré následne použijeme na výpočet bodu nárazu φ_{zn} na neaktívne ohraničenia. Predpoklad 2.2 sa teda s výnimkou odstránenia nulových riadkov z ohraničení dá vypustiť, jeho splnenie nás ale zbavuje nutnosti riešiť tieto výpočty.

Ďalšou možnosťou, ako postupovať v prípade nesplnenia Predpokladu 2.2 je aplikovať myšlienky lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém a lokálnej Lagrangeovej duálnej úlohy priamo na KKT podmienky (Tøndel – Johansen – Bemporad [28]). V prípade úlohy (47) so symetrickou, singulárnou kladne semidefinitnou maticou $\Sigma = \Sigma^T \succeq 0$ sa nám nepodarí pomocou (102) zostaviť Lagrangeovú duálnu úlohu (103) ani použiť vzťahy (92), (93) s inverznou maticou Σ, preto môžeme tiež použiť tento postup.

2.7 Numerické vlastnosti algoritmu

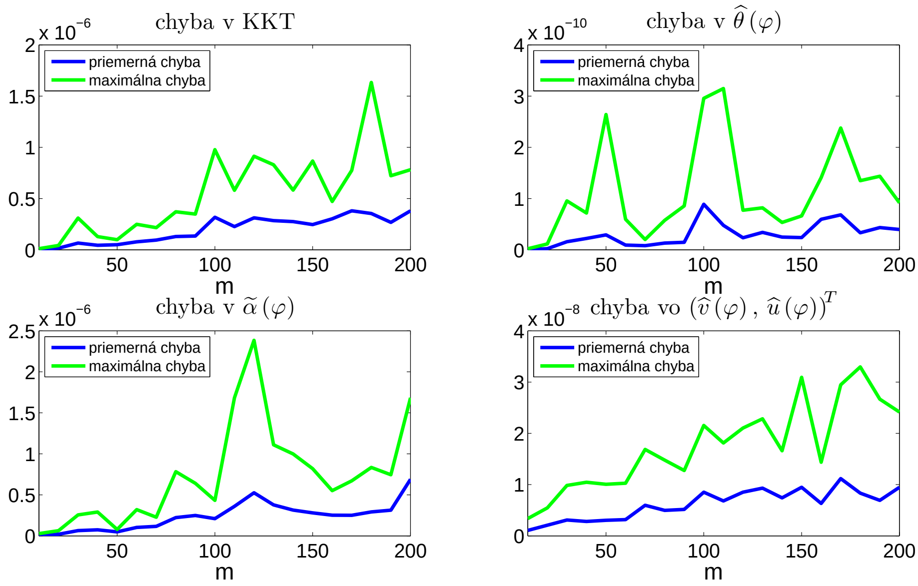
Z numerických vlastností Algoritmu 1 sme najprv otestovali, nakoľko presné údaje dostaneme jeho použitím a následným zostavením optimálneho riešenia $\widehat{\theta}(\varphi) = \theta^c + \frac{1}{\varphi}\,\theta^s$ úlohy (47) pomocou vypočítaných intervalov konštantnosti $K(\varphi)$ a na nich platných smerov a konštantných zložiek optima, podobným zostavením optima celej Lagrangeovej duálnej úlohy a zostavením optimálnej hodnoty $\widetilde{\lambda}(\varphi)$ pomocou jej koeficientov α , β , γ na týchto intervaloch. Za tým účelom sme vygenerovali náhodné úlohy PKP: pre každý počet ohraničení typu nerovnosti $m = 10\,,\, 20\,,\, \ldots\,,\, 200$ sme vygenerovali úlohu KP (hustú, teda v nej vystupujúce matice neboli riedke) so známym optimálnym riešením, ktorú sme považovali za úlohu PKP s $\varphi_0 = 1$, zvolili sme počet premenných $n = 2\,m$, počet ohraničení typu rovnosti $r = m$, číslo podmienenosti $cond\,(\Sigma) = 2000$ a počet aktívnych ohraničení typu nerovnosti vo východiskovom bode $|K\,(\varphi_0)| = \frac{m}{2}$. Aby sme v priebehu každej iterácie zbytočne neopakovali výpočty, niektoré potrebné matice a vektory ako napríklad P_{cele} , $\Sigma^{-1}\,\mu$, $\Sigma^{-1}\,G^T$, q^s , q^c vyskytujúce sa vo vzťahoch (92), (93), (105), (111) sme vypočítali ešte pred začatím iterovania pre všetky ohraničenia typu nerovnosti, čiže použijúc celé A , b a v každej iterácii sme potom použili iba ich aktívne časti, to jest ich riadky a stĺpce s indexmi z $K\,(\varphi_z)$. Pre zjednodušenie sme testovali iba úlohy, v ktorých bol Predpoklad 2.2 splnený. Inverznú maticu sme samozrejme nikdy nepočítali, lebo je to neefektívne, ale využili sme symetriu a kladnú definitnosť P a použili sme Choleského faktorizáciu na vyriešenie systému rovníc.

Keďže v praxi väčšinou nemáme dané presné východiskové optimálne riešenie $\widehat{\theta}\,(\varphi_0)$, napriek tomu, že my sme ho mali, sme namiesto neho zobrali funkciou quadprog v MATLABe vypočítané riešenie s toleranciami $TolX = TolFun = 10^{-13}$. Pre každú vyriešenú úlohu PKP sme vygenerovali po 10 náhodných hodnôt φ z intervalov $(0\,,\,1)\,,\,(1\,,\,10)\,,\,(10\,,\,100)$ a pre každý zo štyroch ukazovateľov presnosti, ktoré sme si zvolili, sme zobrali najväčšiu z dosiahnutých chýb v presnosti pre tieto $\varphi_i\,,\, i = 1\,,\,\ldots\,,\,30$. Pre každé m sme vypočítali 10 náhodných úloh PKP a priemery z týchto najväčších dosiahnutých chýb a maximá z týchto najväčších dosiahnutých chýb sme zobrazili na Obrázku 3. Označme Algoritmom 1 vo φ_i vypočítané optimálne hodnoty a optimálne riešenia nasledovne

$$\widehat{\theta}\,(\varphi_i) = \theta^i\,, \qquad \widehat{u}\,(\varphi_i) = u^i\,, \qquad \widehat{v}\,(\varphi_i) = v^i\,, \qquad \widetilde{\alpha}\,(\varphi_i) = \widetilde{\alpha}^i\,. \tag{141}$$

Keďže vedľajším produktom Algoritmu 1 je krivka optimálnych riešení celej Lagrangeovej duálnej úlohy, za prvý ukazovateľ sme zvolili chybu v KKT podmienkach

$$\text{chyba v KKT} = ||KKT_1|| + ||KKT_2|| + ||KKT_3|| + ||KKT_4|| + ||KKT_5||\,, \tag{142}$$



Obr. 3: Presnosť Algoritmu 1

kde

$$
\begin{gathered}
KKT_1 = \varphi_i \, \Sigma \, \theta^i + \mu + A^T u^i + C^T v^i \,, \qquad KKT_2 = \left(b - A\,\theta^i\right)_{k \,|\, (b - A\,\theta^i)_k < 0} \,, \\
(KKT_3)_k = \left(u^i\right)_k \left(b - A\,\theta^i\right)_k \,, \quad KKT_4 = \left(u^i\right)_{k \,|\, (u^i)_k < 0} \,, \quad KKT_5 = C\,\theta^i - d \,.
\end{gathered} \tag{143}
$$

Ako ďalšie tri ukazovatele sme zvolili

$$
\begin{gathered}
\text{chyba v } \widehat{\theta}(\varphi) = \left\| \theta^i - \overline{\theta^i} \right\| , \qquad \text{chyba v } \widetilde{\alpha}(\varphi) = \left| \widetilde{\alpha}^i - \overline{\widetilde{\alpha}^i} \right| , \\
\text{chyba vo } \left(\widehat{v}(\varphi), \widehat{u}(\varphi)\right)^T = \left\| \left(v^i, u^i\right)^T - \overline{\left(v^i, u^i\right)^T} \right\| ,
\end{gathered} \tag{144}
$$

kde $\overline{\theta^i}$, $\overline{\widetilde{\alpha}^i}$, $\overline{(v^i, u^i)^T}$ sú optimálne riešenia primárnej úlohy, v nich nadobudnuté optimálne hodnoty a optimálne riešenia celej Lagrangeovej duálnej úlohy (tá bola počítaná zvlášť, nebrali sme Lagrangeové multiplikátory primárnej úlohy) pre jednotlivé φ_i tiež vypočítané funkciou quadprog s tými istými toleranciami. Najväčšie chyby boli pre prvý a štvrtý ukazovateľ presnosti dosahované pre niektoré veľké φ_i z intervalu $(10, 100)$, pre tretí aj pre veľmi malé hodnoty $\varphi_i < 0.01$ a pre druhý ukazovateľ presnosti iba pre tieto malé hodnoty φ_i. Zvyšné chyby boli o jeden až tri rády menšie. Chyba v KKT bola tvorená prevažne KKT_1 a KKT_3.

Ďalej sme testovali výpočtovú náročnosť Algoritmu 1 v podobe počtu potrebných iterácii a času výpočtu. Zvolili sme také isté náhodné úlohy PKP, ale tentoraz sme za m brali hodnoty $m = 10, 20, \ldots, 640$, používali sme presné východiskové optimálne riešenia $\widehat{\theta}(\varphi_0)$ a výsledky sme pre každý rozmer spriemerovali zo 100 úloh. Teoreticky

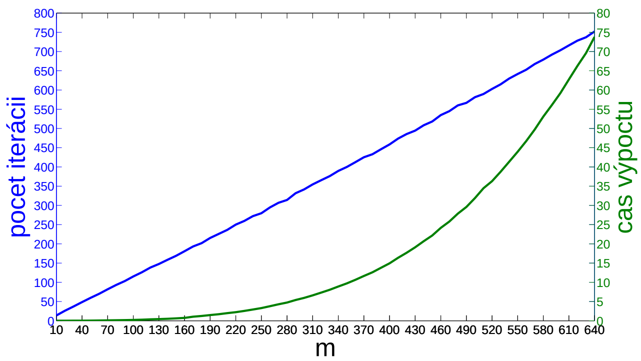
m	Počet iterácií	Čas	m	Počet iterácií	Čas	m	Počet iterácií	Čas
10	13.86	0.0048	110	126.0	0.2756	210	236.3	1.9876
20	26.03	0.0103	120	138.3	0.3636	220	250.1	2.3474
30	37.08	0.0184	130	148.0	0.4235	230	259.6	2.5633
40	48.48	0.0294	140	158.4	0.5150	240	271.9	2.9213
50	59.63	0.0431	150	168.7	0.6248	250	279.6	3.2956
60	70.14	0.0728	160	181.0	0.7445	260	294.7	3.7872
70	81.88	0.0954	170	193.2	1.0550	270	306.8	4.2788
80	93.04	0.1330	180	201.8	1.2435	280	314.1	4.7449
90	103.2	0.1713	190	215.2	1.4729	290	331.6	5.3931
100	115.2	0.2164	200	225.8	1.6971	300	341.5	5.9394

Tabuľka 1: Čas výpočtu v sekundách a počet iterácii Algoritmu 1

je maximálny počet iterácii Algoritmu 1 je zhora ohraničený počtom zmien v $K(\varphi)$. Počet všetkých možných kombinácii ohraničení typu nerovnosti je

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m} = 2^m, \tag{145}$$

a maximálny počet zmien je o jednu menej, ide teda o exponenciálnu náročnosť. V experimente sme pri horeuvedenej fixácii ostatných parametrov na m pozorovali lineárny trend nárastu počtu iterácii v závislosti tejto hodnote zobrazený na Obrázku 4. Hodnoty n a r majú vplyv na čas výpočtu tým, že zvyšujú náročnosť maticových

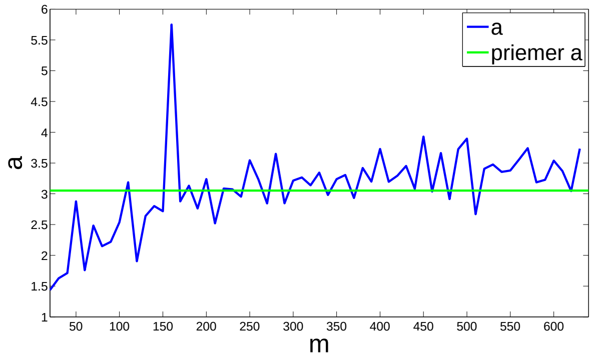


Obr. 4: Počet iterácií a čas výpočtu Algoritmu 1 v sekundách

operácii. Najviac však čas výpočtu ovplyvňuje opäť hodnota m tým, že určuje počet iterácii. Keďže tento sa zdá byť lineárny a teda polynomiálny v závislosti na m, taká závislosť by teda mala byť aj medzi časom výpočtu a m a môžeme sa experimentálne pokúsiť odhadnúť najvyššiu mocninu z členov tohto polynómu. Po zanedbaní všetkých nižších členov máme $t = konst\,.\,m^a$ a pre dve rôzne rozmery m a im prislúchajúce časy výpočtov dostaneme pre odhad mocniny

$$a = \frac{\ln\left(\frac{t_1}{t_2}\right)}{\ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}\,. \tag{146}$$

Po uplatnení tohto odhadu na všetky dvojice po sebe nasledujúcich použitých hodnôt m a im prislúchajúcich časov výpočtu sme dostali hodnoty a, ktoré sú spolu s ich priemerom zobrazené na Obrázku 5. Pre väčšie m sa zdá, že experimentálny čas výpočtu je daný treťou až štvrtou mocninou m, zatiaľ čo pre menšie hodnoty m asi nemožno zanedbať nižšie mocniny.



Obr. 5: Priebeh odhadnutej mocniny pre závislosť času výpočtu Algoritmu 1 na m

Čo sa týka numerickej stability, naším cieľom nebolo vyladiť použité parametre eps_1, eps_2, ... úplne, avšak ich hodnoty v priloženom zdrojovom kóde boli použiteľné pre takmer všetky náhodné úlohy PKP s rozmermi do 1500 spĺňajúce Predpoklad 2.2. Väčších úloh a takých, ktoré ho nespĺňajú sme testovali málo.

V nasledujúcich kapitolách bude uvedená taká modifikácia Algoritmu 1, ktorá umožňuje počítať samotnú úlohu KP, tento algoritmus je teda sebestačný v zmysle zabezpečenia počiatočného $\widehat{\theta}(\varphi_0)$.

3 Vlastnosti PDR optimálnej averzie k riziku

V 1. kapitole sme videli, že pri riešení problému optimálnej alokácie finančných prostriedkov medzi aktíva riadiace sa geometrickým Brownovým pohybom vzniká potreba riešiť kvázilineárnu PDR (46) opisujúcu vývoj optimálnej averzie k riziku vzhľadom na stav portfólia a čas. V nej ako koeficient vystupuje funkcia $\lambda\,(\varphi)$ (37)

$$\lambda\,(\varphi) = \min_{\theta \in \Omega} \left\{ \frac{\varphi}{2}\, \theta^T\, \Sigma\, \theta - \mu^T\, \theta \right\}, \tag{147}$$

ktorá je hodnotovou funkciou úlohy parametrického kvadratického programovania (36) s parametrom φ, o ktorom nateraz predpokladajme, že je kladný $\varphi \in (0\,,\,\infty)$. Podľa klasickej Schauderovej teórie je na existenciu a jednoznačnosť hladkého riešenia takejto PDR postačujúcou podmienkou dostatočná hladkosť jej koeficientov. V tejto kapitole budeme analyzovať, či PDR (46) spĺňa túto podmienku. Ukážeme, že funkcia $\lambda\,(\varphi)$ aj $\lambda'\,(\varphi)$ sú lokálne Lipschitzovsky spojité funkcie, uvedieme podmienku, za ktorej sú Lipschitzovsky spojité a ukážeme, že $\lambda''\,(\varphi)$ nie je vo všeobecnosti spojitá funkcia. Keďže $\lambda\,(\varphi)$ je hodnotovou funkciou parametrizovanej optimalizačnej úlohy, pre jej derivovanie nám príde vhod obálková veta. Tradičné obálkové vety sa týkajú dvoch záležitostí. Poskytujú

1. postačujúce podmienky pre existenciu derivácie takejto funkcie

2. ak táto derivácia existuje, tak jej vyjadrenie

Veta 3.1 (Milgrom – Segal [21]). *Uvažujme úlohu*

$$\min_{\theta \in \Gamma}\, f_0\,(\theta\,,\,\varphi)\,, \tag{148}$$

kde $\varphi \in [0\,,\,1]$ *je parameter a* Γ *je množina prípustných riešení. Označme*

$$V\,(\varphi) = \inf_{\theta \in \Gamma}\, f_0\,(\theta\,,\,\varphi) \tag{149}$$

dolnú obálku funkcií $f_0\,(\theta\,,\,\varphi)$ *na množine* Γ *a množinu optimálnych riešení ako*

$$\widehat{\Gamma}\,(\varphi) = \{\theta \in \Gamma \mid f_0\,(\theta\,,\,\varphi) = V\,(\varphi)\}. \tag{150}$$

Nech $f_0\,(\theta\,,\,\varphi)$ *je absolútne spojitá vo* φ *pre všetky* $\theta \in \Gamma$ *. Predpokladajme, že existuje taká integrovateľná funkcia* $B : [0\,,\,1] \longrightarrow \mathcal{R}$ *, že* $|\partial_\varphi\, f_0\,(\theta\,,\,\varphi)| \leq B\,(\varphi)$ *pre všetky* $\theta \in \Gamma$

a takmer všetky $\varphi \in [0\,,\,1]$ *. Potom* $V(\varphi)$ *je absolútne spojitá. Ak navyše predpokladáme, že* $f_0(\theta\,,\,\varphi)$ *je vo* φ *diferencovateľná pre všetky* $\theta \in \Gamma$ *a* $\widehat{\Gamma}(\varphi) \neq \emptyset$ *pre takmer všetky* $\varphi \in [0\,,\,1]$ *, potom pre akékoľvek* $\widehat{\theta}(\varphi) \in \widehat{\Gamma}(\varphi)$ *platí*

$$V(\varphi) = V(0) + \int_0^{\varphi} \partial_\varphi f_0\left(\widehat{\theta}(s)\,,\,s\right)\,\mathrm{d}s\,. \tag{151}$$

Nasleduje rozšírenie výsledkov z [11] pre všeobecný prípad polyedrickej množiny prípustných riešení Ω .

Veta 3.2. *Nech* $\lambda(\varphi)$ *je definovaná pomocou (147),* $\varphi \in (0\,,\,\infty)$ *. Potom* $\lambda'(\varphi)$ *je spojitá funkcia a platí*

$$\lambda'(\varphi) = \frac{1}{2}\,\widehat{\theta}^T\,\Sigma\,\widehat{\theta}\,, \tag{152}$$

kde $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(\varphi)$ *je optimálne riešenie úlohy (36).*

Dôkaz. Algoritmus 1 ukazuje, že hodnoty φ môžeme rozdeliť na tie, v ktorých zmena v $K(\varphi)$ nenastáva a na tie φ_z , v ktorých nastáva. Ak vo φ táto zmena nenastáva, zo (114) vidno, že $\lambda'_{lok}(\varphi) = \alpha - \frac{\beta}{\varphi^2}$ je spojitá funkcia a (152) získame dosadením optimálneho riešenia $\widehat{\theta}_{lok}(\varphi)$ lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém do definície (147), pričom pri úprave môžeme využiť (94). Označme $f_0(\theta\,,\,\varphi) = \frac{\varphi}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta - \mu^T\,\theta$ minimalizovanú funkciu úlohy (36). Ak vo φ_z zmena v $K(\varphi)$ nastáva, potrebujeme ohraničiť funkciu

$$|\partial_\varphi f_0(\theta,\varphi)| = \frac{1}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta \tag{153}$$

pre všetky $\theta \in \Omega$, aby sme mohli použiť Vetu 3.1. Dosiahneme to tak, že pre každé zafixované φ_z pridáme do Ω nadbytočné ohraničenia. Algoritmus 1 ukazuje, že existuje konečne veľa φ_z . Každé z optimálnych riešení $\widehat{\theta}(\varphi_z)$ teda možno po zložkách ohraničiť zhora aj zdola $\theta_d < \widehat{\theta}(\varphi_z) < \theta_h$. Tieto dolné a horné ohraničenia môžeme zmeniť na neostré a pre zafixované φ_z ich pridať medzi ohraničenia určujúce množinu prípustných riešení úlohy (36) bez toho, aby sme na nejakom okolí $O(\varphi_z)$ zmenili jej optimálne riešenie. Zafixujme φ_z a označme Ω_{dh} množinu prípustných riešení s pridanými nadbytočnými ohraničeniami, čím získame ohraničenú množinu prípustných riešení. Keďže $|\partial_\varphi f_0(\theta\,,\,\varphi)|$ je spojitá funkcia, nadobúda na kompakte Ω_{dh} podľa Weierstrassovej vety maximum. Môžeme ju teda ohraničiť integrovateľnou funkciou $B(\varphi)$

$$\max_{\theta\in\Omega_{dh}} |\partial_\varphi f_0(\theta\,,\,\varphi)| = \max_{\theta\in\Omega_{dh}} \left\{\frac{1}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta\right\} = B(\varphi) < \infty\,, \tag{154}$$

ktorá je v skutočnosti konštantná. Funkcia $f_0(\theta\,,\,\varphi)$ je lineárna a teda aj absolútne spojitá vo φ. Takže môžeme použiť Vetu 3.1, podľa ktorej je aj funkcia $\lambda(\varphi)$ absolútne spojitá vo φ a je teda aj diferencovateľná skoro všade na $(0\,,\,\infty)$, a dá sa napísať ako

$$\lambda(\varphi) = \lambda(1) + \int_1^{\varphi} \partial_\varphi f_0\left(\widehat{\theta}(s)\,,\,s\right) \mathrm{d}s\,. \tag{155}$$

Derivovaním tohto vzťahu dokážeme (152) aj v bodoch φ_z zmeny $K(\varphi)$

$$\lambda'(\varphi) = \partial_\varphi f_0\left(\widehat{\theta}(\varphi)\,,\,\varphi\right) = \frac{1}{2}\,\widehat{\theta}^T\,\Sigma\,\widehat{\theta}\,. \tag{156}$$

□

Spojitosť funkcie $\lambda'(\varphi)$ môžeme dokázať aj pomocou vzťahov (91) – (94), (114) – (117) bez použitia obálkovej vety. Uvažujme nejaký bod φ_1 a bez ohľadu na to, či ide o bod zmeny v $K(\varphi)$, označme θ^c, θ^s indexom $_L$ na ľavom intervale $(\dots\,,\,\varphi_1)$ a indexom $_R$ na pravom intervale $(\varphi_1\,,\,\dots)$ konštantnosti $K(\varphi)$ vzhľadom tento bod. Ak zo vzťahu $\theta^c_L + \frac{1}{\varphi_1}\,\theta^s_L = \theta^c_R + \frac{1}{\varphi_1}\,\theta^s_R$ vyjadríme θ^c_L a dosadíme ho do (94), získame

$$\left(\theta^c_R + \frac{1}{\varphi_1}\,\theta^s_R - \frac{1}{\varphi_1}\,\theta^s_L\right)^T \Sigma\,\theta^s_L = 0\,. \tag{157}$$

Po prenásobení konštantou a roznásobení máme

$$-\,\frac{2}{\varphi_1}\,(\theta^c_R)^T\,\Sigma\,\theta^s_L - \frac{2}{\varphi_1^2}\,(\theta^s_R)^T\,\Sigma\,\theta^s_L + \frac{2}{\varphi_1^2}\,(\theta^s_L)^T\,\Sigma\,\theta^s_L = 0\,. \tag{158}$$

Ak teraz preusporiadame členy, k obom stranám pripočítame $(\theta^c_R)^T\,\Sigma\,\theta^c_R + \frac{2}{\varphi_1}\,(\theta^c_R)^T\,\Sigma\,\theta^s_R + \frac{1}{\varphi_1^2}\,(\theta^s_R)^T\,\Sigma\,\theta^s_R$ a využijeme (94), dostaneme

$$\begin{aligned}&(\theta^c_R)^T\,\Sigma\,\theta^c_R + \frac{2}{\varphi_1}\,(\theta^c_R)^T\,\Sigma\,\theta^s_R + \frac{1}{\varphi_1^2}\,(\theta^s_R)^T\,\Sigma\,\theta^s_R - \frac{2}{\varphi_1}\,(\theta^c_R)^T\,\Sigma\,\theta^s_L - \frac{2}{\varphi_1^2}\,(\theta^s_R)^T\,\Sigma\,\theta^s_L + \\ &+ \frac{1}{\varphi_1^2}\,(\theta^s_L)^T\,\Sigma\,\theta^s_L + \frac{1}{\varphi_1^2}\,(\theta^s_L)^T\,\Sigma\,\theta^s_L = (\theta^c_R)^T\,\Sigma\,\theta^c_R + \frac{1}{\varphi_1^2}\,(\theta^s_R)^T\,\Sigma\,\theta^s_R\,,\end{aligned} \tag{159}$$

čo môžeme upraviť na tvar

$$\begin{aligned}&\left(\theta^c_R + \frac{1}{\varphi_1}\,\theta^s_R - \frac{1}{\varphi_1}\,\theta^s_L\right)^T \Sigma\,\left(\theta^c_R + \frac{1}{\varphi_1}\,\theta^s_R - \frac{1}{\varphi_1}\,\theta^s_L\right) + \frac{1}{\varphi_1^2}\,(\theta^s_L)^T\,\Sigma\,\theta^s_L = \\ &= (\theta^c_R)^T\,\Sigma\,\theta^c_R + \frac{1}{\varphi_1^2}\,(\theta^s_R)^T\,\Sigma\,\theta^s_R\end{aligned} \tag{160}$$

a spätným dosadením θ_L^c získame

$$\left(\theta_L^c\right)^T \Sigma\,\theta_L^c + \frac{1}{\varphi_1^2}\left(\theta_L^s\right)^T \Sigma\,\theta_L^s = \left(\theta_R^c\right)^T \Sigma\,\theta_R^c + \frac{1}{\varphi_1^2}\left(\theta_R^s\right)^T \Sigma\,\theta_R^s\,. \tag{161}$$

Ak využijeme vzťah

$$\left(\theta^s\right)^T \Sigma\,\theta^s = -\mu^T\,\theta^s\,, \tag{162}$$

ktorý vyplynie dosadením do (93), a (161) prenásobíme $\frac{1}{2}$, dostaneme

$$\begin{aligned}\lambda'\left(\varphi_1 -\right) &= \frac{1}{2}\left(\theta_L^c\right)^T \Sigma\,\theta_L^c - \frac{1}{\varphi_1^2}\left(\frac{1}{2}\left(\theta_L^s\right)^T \Sigma\,\theta_L^s + \mu^T\,\theta_L^s\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\theta_R^c\right)^T \Sigma\,\theta_R^c - \frac{1}{\varphi_1^2}\left(\frac{1}{2}\left(\theta_R^s\right)^T \Sigma\,\theta_R^s + \mu^T\,\theta_R^s\right) = \lambda'\left(\varphi_1 +\right)\end{aligned} \tag{163}$$

vzťah pre spojitosť funkcie $\lambda'(\varphi)$.

Zo (152) $\lambda'(\varphi) = \frac{1}{2}\widehat{\theta}^T \Sigma\,\widehat{\theta} \geq 0$ vyplýva, že $\lambda(\varphi)$ je neklesajúca funkcia a konštantná je len pre tie φ, pre ktoré krivka optimálnych riešení $\widehat{\theta}(\varphi)$ stojí v $\mathbf{0}$. Z toho a z $\lambda''_{lok}(\varphi) = 2\,\frac{\beta}{\varphi^3}$ a zo (116) $\beta \leq 0$ vyplýva, že $\lambda(\varphi)$ je konkávna funkcia a lineárna je len pre tie φ, pre ktoré $\beta = 0$, čiže $\theta^s = \mathbf{0}$, čiže krivka optimálnych riešení $\widehat{\theta}(\varphi)$ stojí v nejakom bode. Kombinovaním znalostí $\lambda''(\varphi) \leq 0$, $\lambda'(\varphi) \geq 0$ a $\lambda'(\varphi) = 0 \Longleftrightarrow \widehat{\theta}(\varphi) = \mathbf{0}$ dostaneme, že ak $\widehat{\theta}(\varphi_1) = \mathbf{0}$, potom pre všetky $\varphi > \varphi_1$ platí $\widehat{\theta}(\varphi) = \mathbf{0}$.

Veta 3.3. *Nech $\lambda(\varphi)$ je definovaná pomocou (147), $\varphi \in (0\,, \infty)$. Potom $\lambda'(\varphi)$ je lokálne Lipschitzovsky spojitá funkcia. Ak je limita optimálneho riešenia úlohy (36) do nuly*

$$\lim_{\varphi \to 0} \arg\min_{\theta \in \Omega} \left\{\frac{\varphi}{2}\,\theta^T \Sigma\,\theta - \mu^T\,\theta\right\} = \widehat{\theta}(0) \tag{164}$$

konečná, to jest $\widehat{\theta}(0) \in \mathcal{R}^n$, potom $\lambda'(\varphi)$ je Lipschitzovsky spojitá funkcia.

Dôkaz. Optimálne riešenie $\widehat{\theta}(\varphi) : (0\,, \infty) \longrightarrow \mathcal{R}^n$ úlohy (36) je lokálne Lipschitzovsky spojitá funkcia, čo vyplýva zo vzťahov $\widehat{\theta}(\varphi) = \theta^c + \frac{1}{\varphi}\,\theta^s$ na jednotlivých intervaloch konštantnosti $K(\varphi)$ a z geometrickej predstavy o lineárne parametrizovanej rýdzokonvexnej funkcii minimalizovanej cez konvexnú množinu (spojitosť optimálnych riešení vo φ_z), alebo z [12]. Keďže je podľa vzťahu (152) funkcia $\lambda'(\varphi)$ súčinom lokálne Lipschitzovsky spojitých funkcií $\widehat{\theta}(\varphi)$, je aj ona lokálne Lipschitzovsky spojitá.

Ak sú všetky zložky limity $\widehat{\theta}(0)$ (164) optima úlohy (36) konečné, zo vzťahu $\mathcal{R}^n \ni \widehat{\theta}(\varphi) = \theta^c + \frac{1}{\varphi}\,\theta^s$ pre optimálne riešenie na intervale konštantnosti $K(\varphi)$ s ľavou hranicou tvorenou 0 je vidno, že v tomto vzťahu platí $\theta^s = \mathbf{0}$, teda $\beta = 0$. Na každom intervale konštantnosti $K(\varphi)$ je preto $\lambda'_{lok}(\varphi) = \alpha - \frac{\beta}{\varphi^2}$ Lipschitzovsky spojitá funkcia. Pre zjednotenie týchto funkcií z týchto intervalov stačí za Lipschitzovskú konštantu zobrať maximum z týchto konštánt na týchto intervaloch. □

Pre veľmi malé hodnoty φ sa kvadratický člen úlohy (36) stáva zanedbateľným, preto optimálne riešenie $\widehat{\theta}(\varphi)$ konverguje k nejakému z riešení úlohy LP

$$\lim_{\varphi \to 0} \arg\min_{\theta \in \Omega} \left\{ \frac{\varphi}{2} \theta^T \Sigma \theta - \mu^T \theta \right\} = \widehat{\theta}(0) \in \left\{ \arg\min_{\theta \in \Omega} \left\{ -\mu^T \theta \right\} \right\}. \tag{165}$$

Ak majú všetky optimálne riešenia tejto úlohy LP všetky zložky konečné, potom má túto vlastnosť aj limitné optimálne riešenie $\widehat{\theta}(0)$ (164).

Veta 3.4. *Funkcia $\lambda''(\varphi)$ je v bode φ_1 spojitá vtedy a len vtedy, ak je funkcia $\lambda(\varphi)$ v tomto bode zľava a sprava identická, teda ak sú jej koeficienty α, β, γ na ľavom $(\ldots, \varphi_1)$ a na pravom $(\varphi_1, \ldots)$ intervale konštantnosti $K(\varphi)$ vzhľadom na φ_1 rovnaké.*

Dôkaz. Označme koeficienty α, β, γ funkcie $\lambda(\varphi)$ indexom $_L$ na ľavom intervale $(\ldots, \varphi_1)$ a indexom $_R$ na pravom intervale $(\varphi_1, \ldots)$ konštantnosti $K(\varphi)$ vzhľadom na φ_1. Ak je funkcia $\lambda''(\varphi)$ v bode φ_1 spojitá, potom z

$$2\,\frac{\beta_L}{\varphi_1^3} = \lambda''(\varphi_1-) = \lambda''(\varphi_1+) = 2\,\frac{\beta_R}{\varphi_1^3} \tag{166}$$

vyplýva $\beta_L = \beta_R$. S využitím tohto a zo vzťahu pre spojitosť $\lambda'(\varphi)$ dostaneme

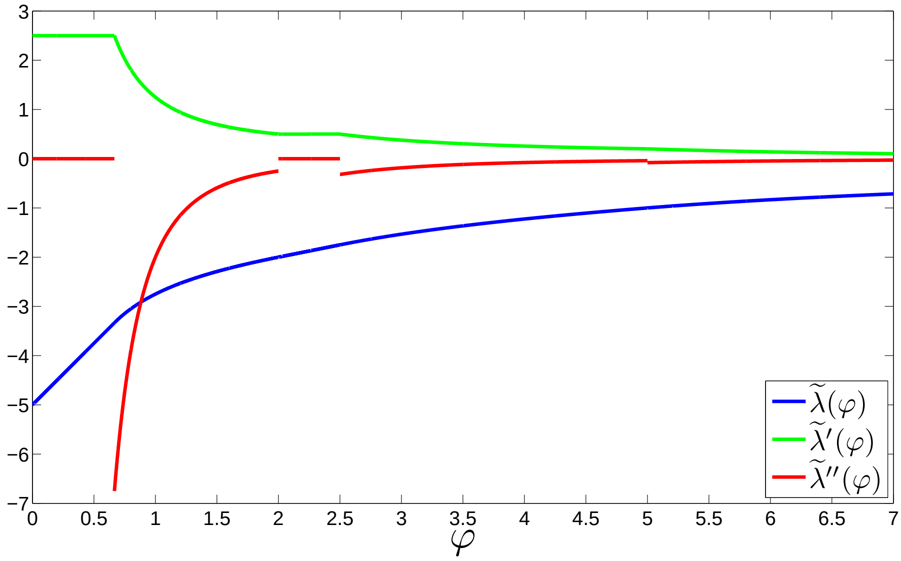
$$\alpha_L - \frac{\beta_L}{\varphi_1^2} = \lambda'(\varphi_1-) = \lambda'(\varphi_1+) = \alpha_R - \frac{\beta_R}{\varphi_1^2}, \tag{167}$$

teda $\alpha_L = \alpha_R$. S využitím tohto a zo vzťahu pre spojitosť $\lambda(\varphi)$ dostaneme

$$\alpha_L \varphi_1 + \frac{\beta_L}{\varphi_1} + \gamma_L = \lambda(\varphi_1-) = \lambda(\varphi_1+) = \alpha_R \varphi_1 + \frac{\beta_R}{\varphi_1} + \gamma_R, \tag{168}$$

teda $\gamma_L = \gamma_R$. Opačná implikácia je zrejmá. □

Jedinými kandidátmi na body nespojitosti $\lambda''(\varphi)$ sú body φ_z zmeny množiny $K(\varphi)$. Napríklad v Príklade 2.6 je druhá derivácia $\lambda(\varphi)$ v bode $\varphi = \frac{2}{3}$ zľava rovná $\lambda''\left(\frac{2}{3}-\right) = 0$ a zprava rovná $\lambda''\left(\frac{2}{3}+\right) = -2\,\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = -\frac{27}{4}$. V numerickom experimente so 100000 náhodne vygenerovanými úlohami rozmerov $n = 100$, $m = 50$, $r = 50$ bol každý bod φ_z zmeny množiny $K(\varphi)$ bodom nespojitosti funkcie $\lambda''(\varphi)$, pričom pri pohľade do Tabuľky 1 vidíme, že týchto bodov bolo takmer 6000000. Je ľahko vidieť, že ak je



Obr. 6: Graf funkcie $\widetilde{\lambda}(\varphi)$ a jej prvej a druhej derivácie z Príkladu 2.6

v nejakom bode nespojitá druhá derivácia $\lambda(\varphi)$, z $\beta_L \neq \beta_R$ vyplýva aj nespojitosť všetkých vyšších derivácii v tomto bode.

Schauderovú teóriu teda nemožno uplatniť. Dá sa však dokázať [11], že za predpokladu ohraničenosti koncovej podmienky PDR (46)

$$0 < \varphi(x, T) \leq \varphi_h \qquad \forall x \in \mathcal{R}, \varphi_h \in \mathcal{R} \tag{169}$$

a ohraničenosti funkcie $\lambda'(\varphi)$

$$0 < \lambda'_d \leq \lambda'(\varphi) \leq \lambda'_h \tag{170}$$

riešenie tejto PDR existuje a je jediné. Navyše je kladné a ohraničené

$$0 < \varphi(x, t) \leq \varphi_h \qquad \forall x \in \mathcal{R}, \forall t \in [0, T]. \tag{171}$$

Veta 3.5. *Nech je koncová podmienka PDR (46) ohraničená (169), nech $\mathcal{R}^n \ni \mathbf{0} \notin \Omega$ a nech limita optimálnych riešení úlohy (36) do nuly (164) je konečná $\widehat{\theta}(0) \in \mathcal{R}^n$. Potom riešenie PDR (46) existuje, je jediné a je ohraničené pre všetky $t \in [0, T]$ (171).*

Dôkaz. Z $\lambda'_{lok}(\varphi) = \alpha - \frac{\beta}{\varphi^2}$ a zo (152) vidno, že nájsť ohraničenia (170) pre $\lambda'(\varphi)$ je problematické iba pre limitné hodnoty φ. Zo (152) je vidno, že spodné ohraničenie nie je kladné iba v prípade, ak sa krivka optimálnych riešení $\widehat{\theta}(\varphi)$ úlohy (36) priblíži ľubovoľne blízko k počiatku súradnicovej sústavy $\mathbf{0}$. Horné ohraničenie pre $\lambda'(\varphi)$ neexistuje iba v prípade, ak $\widehat{\theta}(0) \notin \mathcal{R}^n$ nie je konečné, čo vyplynie rovnakou úvahou ako v 2. časti Dôkazu Vety 3.3. □

Kladnosť koncovej podmienky $\varphi(x, T) = 1 - \frac{U''(x)}{U'(x)}$ je zaručená z predpokladu rastúcosti a konkávnosti funkcie užitočnosti (7). Z funkcií U spĺňajúcich druhú nerovnosť v (169) uvedieme napríklad CARA (constant absolute risk aversion) triedu

$$U(x) = -\frac{1}{z-1}\,\mathrm{e}^{-(z-1)\,x}, \qquad z > 1, \qquad \text{pre ktorú} \quad \frac{U''(x)}{U'(x)} = 1 - z. \tag{172}$$

V praktických problémoch optimálneho investovania môžeme podmienku pre konečnosť (164) považovať za splnenú. Žiadne aktívum nemôžeme nakúpiť ani predať v neobmedzenom množstve, preto je množina prípustných riešení Ω ohraničená a teda každé optimálne riešenie vrátane limitných je konečné. Podmienka pre neprípustnosť $\mathbf{0}$ sa nedá zoslabiť. Ak je totiž tento bod prípustný, potom

$$\lim_{\varphi\to\infty} \arg\min_{\theta\in\Omega} \left\{ \frac{\varphi}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta - \mu^T\,\theta \right\} = \arg\min_{\theta\in\Omega} \left\{ \frac{1}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta \right\} = \widehat{\theta}(\infty) = \mathbf{0}, \tag{173}$$

k nemu limita optimálnych riešení $\widehat{\theta}(\varphi)$ úlohy (36) do nekonečna konverguje, lebo veľmi veľké hodnoty φ spôsobia zanedbateľnosť jej lineárneho člena oproti kvadratickému a $\widehat{\theta}(\varphi)$ konverguje k riešeniu tejto úlohy KP bez lineárneho člena. Funkciu $\lambda'(\varphi)$

$$\lim_{\varphi\to\infty} \lambda'(\varphi) = \lim_{\varphi\to\infty} \frac{1}{2}\,\widehat{\theta}^T(\varphi)\,\Sigma\,\widehat{\theta}(\varphi) = 0 \tag{174}$$

nie je potom možné zdola ohraničiť žiadnym kladným číslom. V praktických problémoch optimálneho investovania preto navrhujeme tento bod zneprípustniť $\mathbf{0} \notin \Omega$. Ak neinvestujeme nutne všetky prostriedky $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$, čo by bolo postačujúce, je prirodzené určiť minimálny podiel p z uvažovanej sumy $1 \geq \sum_{i=1}^{n} \theta_i \geq p$, ktorý nutne investujeme. Tento podiel sa dá zvoliť ľubovoľne malý, pokiaľ je kladný $p > 0$. Potom bude úloha (36) pre výpočet optimálnych váh $\widehat{\theta}(\varphi(x, t))$ s parametrom $\varphi > 0$ konvexnou úlohou, nech sú stav portfólia a čas akékoľvek.

4 Modifikácie algoritmu pre parametrické kvadratické programovanie

V 2. kapitole sme odvodili Algoritmus 1 pre počítanie úlohy PKP (47), v ktorej je parametrizovaný kvadratický člen. V tejto kapitole sa pozrieme na modifikácie tohto algoritmu pre počítanie inak parametrizovaných úloh PKP.

Uvažujme najprv úlohu PKP s parametrizovaným lineárnym členom

$$\min_{\theta\in\Omega}\left\{\frac{1}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta+\theta^T\,\mu^c+\psi\,\theta^T\,\mu^s\right\}\,,\qquad \psi\in\mathcal{R}\,, \tag{175}$$

kde $\Sigma = \Sigma^T \succ 0$ je symetrická, kladne definitná matica, $\mu^c\,,\,\mu^s \in \mathcal{R}^n$ a množina prípustných riešení Ω je neprázdna polyedrická množina

$$\Omega=\{\theta\in\mathcal{R}^n\mid A\theta\leq b\,,\;C\theta=d\}\,, \tag{176}$$

teda rovnaká ako (48). Aj teraz predpokladáme analogicky ako v Predpoklade 2.2, že pre každý bod krivky optimálnych riešení $\widehat{\theta}\,(\psi)$ úlohy (175) sú normálové vektory nadrovín aktívnych ohraničení lineárne nezávislé. Idea výpočtu krivky optimálnych riešení $\widehat{\theta}\,(\psi)$ tejto úlohy je rovnaká ako pre výpočet krivku optimálnych riešení úlohy (47). Bude pre ňu platiť analógia Vety 2.5 pre existenciu lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém, ktorej optimálne riešenia tvoria polpriamku. Opustenie krivky optimálnych riešení $\widehat{\theta}\,(\psi)$ aktívnych ohraničení typu nerovnosti a jej náraz na neaktívne ohraničenia môžeme tiež pozorovať nezávisle, pričom za bod zmeny v $K\,(\psi)$ zvolíme tú zmenu, ktorá nastáva skôr. Opäť môžeme v Lagrangeovej duálnej úlohe uvažovať iba aktívne ohraničenia a zostaviť tak lokálnu Lagrangeovú duálnu úlohu, ktorej voľné optimá tiež tvoria polpriamku. To znamená, že množiny konštantnosti $K\,(\psi)$ budú aj tentoraz intervaly. V skutočnosti je pre kladné hodnoty parametra $\psi > 0$ úloha (47) špeciálnym prípadom úlohy (175), ak v nej položíme $\mu^c = \mathbf{0}\,,\,\mu^s = \mu\,,\,\psi = \frac{1}{\varphi}$. Pre záporné hodnoty $\psi < 0$ v nej treba položiť $\mu^c = \mathbf{0}\,,\,\mu^s = -\mu\,,\,\psi = -\frac{1}{\varphi}$. Ako analógiu k vzťahom (91), (92), (93) dostaneme pre výpočet optimálneho riešenia lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém k úlohe (175) vzťahy

$$\widehat{\theta}_{lok}\,(\psi)=\theta^c+\psi\,\theta^s \tag{177}$$

$$\theta^c = -\Sigma^{-1}\,\mu^c + \Sigma^{-1}\,G^T\,(G\,\Sigma^{-1}\,G^T)^{-1}\,G\,\Sigma^{-1}\,\mu^c + \Sigma^{-1}\,G^T\,(G\,\Sigma^{-1}\,G^T)^{-1}\,h \tag{178}$$

$$\theta^s = -\Sigma^{-1}\,\mu^s + \Sigma^{-1}\,G^T\,(G\,\Sigma^{-1}\,G^T)^{-1}\,G\,\Sigma^{-1}\,\mu^s\,. \tag{179}$$

Matica G a vektor h opäť vznikajú zložením riadkov rovností a aktívnych nerovností. Bod nárazu krivky $\widehat{\theta}_{lok}\,(\psi)$ na neaktívne ohraničenia dostaneme podobne ako v (99) ako posledné ψ, pre ktoré je polpriamka (177) prípustná pre úlohu (175). Pre rastúce ψ to bude

$$\psi_{zn} = \begin{cases} \min\limits_{k\in\mathcal{M}} \dfrac{(b - A\,\theta^c)_k}{(A\,\theta^s)_k} & \text{ak } \mathcal{M} = \{k \mid (A\,\theta^s)_k > 0\} \text{ je neprázdna} \\ \infty & \text{inak} \end{cases} \tag{180}$$

Analógiou k (110) pre výpočet optima lokálnej Lagrangeovej duálnej úlohy k (175) bude

$$\begin{pmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{u}_{lok} \end{pmatrix} = -\psi\,P^{-1}\,q^s - P^{-1}\,q^c = \begin{pmatrix} \psi\,v^s + v^c \\ \psi\,u^s_{lok} + u^c_{lok} \end{pmatrix}, \tag{181}$$

pričom matica $P = -G\,\Sigma^{-1}\,G^T$ bude rovnaká ako pre úlohu (47) (dá sa samozrejme použiť aj úprava duálnej úlohy pomocou (106)) a q^s , q^c budú rovné

$$q^s = -G\,\Sigma^{-1}\,\mu^s\,, \qquad q^c = -G\,\Sigma^{-1}\,\mu^c - h\,. \tag{182}$$

Idea určenia bodu ψ_{zo} opustenia krivky optimálnych riešení $\widehat{\theta}\,(\psi)$ nejakých aktívnych ohraničení sa oproti (112) nezmení. S rastúcim ψ to bude hodnota

$$\psi_{zo} = \begin{cases} min_{k\in\mathcal{M}} \; - \dfrac{(u^c_{lok})_k}{(u^s_{lok})_k} & \text{ak } \mathcal{M} = \{k \mid (u^s_{lok})_k < 0\} \text{ je neprázdna} \\ \infty & \text{inak} \end{cases} \tag{183}$$

Uvažujme teraz úlohu PKP s parametrizovanou množinou prípustných riešení

$$\min_{\theta\in\Omega} \left\{ \frac{1}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta + \mu^T\,\theta \right\}, \tag{184}$$

kde $\Sigma = \Sigma^T \succ 0$ je symetrická, kladne definitná matica, $\mu \in \mathcal{R}^n$ a

$$\Omega = \{\theta \in \mathcal{R}^n \mid A\theta \le b^c + \xi\,b^s\,,\; C\theta = d^c + \xi\,d^s\}\,, \qquad \xi \in \mathcal{R}\,, \tag{185}$$

množina prípustných riešení je parametrizovaná polyedrická množina $\Omega = \Omega\,(\xi)$, pričom existuje také $\xi \in \mathcal{R}$, pre ktoré je neprázdna, a $A \in \mathcal{R}^{m\times n}$, b^c , $b^s \in \mathcal{R}^m$, $C \in$

$\mathcal{R}^{r\times n}$, d^c , $d^s \in \mathcal{R}^r$. V prípade tohto typu úlohy PKP nemôžeme požadovať žiadnu analógiu Predpokladu 2.2, pretože to by nebolo bez ujmy na všeobecnosti. Pre tie body ξ_z zmeny v množine aktívnych ohraničení typu nerovnosti $K(\xi)$, pre ktoré je jeho analógia splnená a normálové vektory nadrovín aktívnych ohraničení sú v optimálnom riešení $\widehat{\theta}(\xi)$ úlohy (184) lineárne nezávislé však môžeme využiť všetky úvahy potrebné pre odvodenie Algoritmu 1 a aplikovať ich na túto úlohu. Maticu G budeme na každom intervale konštantnosti $K(\xi)$ konštruovať analogicky ako pre úlohy (47) a (175), pre vektor h ale tentoraz rozlíšime jeho konštantnú zložku h^c a smer h^s

$$h^c = \begin{pmatrix} d^c \\ b^c_{k\,|\,k\in K(\xi)} \end{pmatrix}, \qquad h^s = \begin{pmatrix} d^s \\ b^s_{k\,|\,k\in K(\xi)} \end{pmatrix}. \tag{186}$$

Na intervaloch konštantnosti $K(\xi)$ potom dostaneme ako analógiu k vzťahom (91), (92), (93) pre výpočet optimálneho riešenia $\widehat{\theta}(\xi)$ úlohy (184)

$$\widehat{\theta}_{lok}(\xi) = \theta^c + \xi\,\theta^s \tag{187}$$

$$\theta^c = -\Sigma^{-1}\mu + \Sigma^{-1}G^T(G\Sigma^{-1}G^T)^{-1}G\Sigma^{-1}\mu + \Sigma^{-1}G^T(G\Sigma^{-1}G^T)^{-1}h^c \tag{188}$$

$$\theta^s = \Sigma^{-1}G^T(G\Sigma^{-1}G^T)^{-1}h^s\,. \tag{189}$$

Pre určenie bod nárazu ξ_{zn} polpriamky (187) na neaktívne ohraničenia potrebujeme určiť posledné ξ , pre ktoré je splnená nerovnosť

$$A\,\widehat{\theta}_{lok}(\xi) = A\,(\theta^c + \xi\,\theta^s) \le b^c + \xi\,b^s \tag{190}$$

pre každú zložku zaručujúca jej prípustnosť pre úlohu (184). Pre rastúce ξ to bude

$$\xi_{zn} = \begin{cases} \min\limits_{k\in\mathcal{M}} \dfrac{(b^c - A\,\theta^c)_k}{(A\,\theta^s - b^s)_k} & \text{ak } \mathcal{M} = \{k \mid (A\,\theta^s - b^s)_k > 0\} \text{ je neprázdna} \\ \infty & \text{inak} \end{cases} \tag{191}$$

Analógiou k (110) pre výpočet optima lokálnej Lagrangeovej duálnej úlohy k (184) je

$$\begin{pmatrix} \widehat{v} \\ \widehat{u}_{lok} \end{pmatrix} = -\xi\,P^{-1}q^s - P^{-1}q^c = \begin{pmatrix} \xi\,v^s + v^c \\ \xi\,u^s_{lok} + u^c_{lok} \end{pmatrix}, \tag{192}$$

pričom matica $P = -G\,\Sigma^{-1}G^T$ bude opäť totožná s tou pre úlohu (47) (dá sa samozrejme použiť aj úprava duálnej úlohy pomocou (106)) a q^s , q^c budú rovné

$$q^s = -h_s\,, \qquad q^c = -G\,\Sigma^{-1}\mu - h_c\,. \tag{193}$$

Bod ξ_{zo} opustenia krivky optimálnych riešení $\widehat{\theta}\,(\xi)$ aktívnych ohraničení určíme identicky ako v (112). Pre rastúce ξ to bude hodnota

$$\xi_{zo} = \begin{cases} \min\limits_{k \in \mathcal{M}} \; - \dfrac{\left(u_c^{lok}\right)_k}{\left(u_s^{lok}\right)_k} & \text{ak } \mathcal{M} = \left\{k \mid \left(u_s^{lok}\right)_k < 0\right\} \text{ je neprázdna} \\ \infty & \text{inak} \end{cases} \tag{194}$$

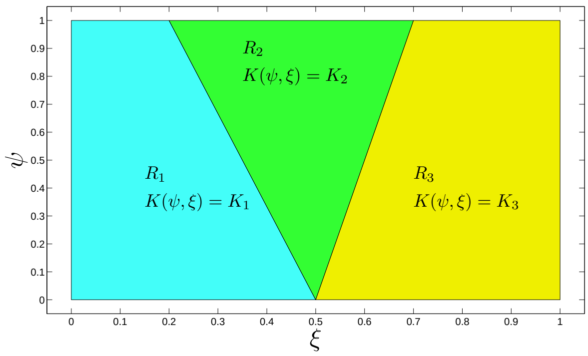
Ak je v nejakom bode ξ_z porušený predpoklad lineárnej nezávislosti normálových vektorov nadrovín aktívnych ohraničení, máme o trochu ťažšiu situáciu ako pri úlohách (47), (175), lebo ohraničenia určujúce Ω nemôžeme kvôli žiaducemu tvaru jej vyjadrenia upraviť tak jednoducho, ako je to popísané na strane 40. Pre každé ξ táto množina iná, môže teda sa meniť aj vhodnosť jej vyjadrenia vzhľadom na tento predpoklad. Môžeme však použiť postup týkajúci sa vzťahov (137) $-$ (140) alebo aproximáciu optimálnych riešení pomocou regularizačného parametra δ popísanú nad týmto postupom. Pre úlohu PKP (184) s parametrizovanou množinou prípustných riešení Ω je oproti úlohám typu (47), (175) navyše potrebné kontrolovať, či sa táto množina nestáva prázdnou.

Ak máme úlohu PKP s viacerými parametrami, ako napríklad

$$\min_{\theta \in \Omega} \left\{ \frac{1}{2}\, \theta^T\, \Sigma\, \theta + \theta\, \mu^c + \psi\, \theta\, \mu^s \right\}, \qquad \psi \in \mathcal{R}, \tag{195}$$

$$\Omega = \{\theta \in \mathcal{R}^n \mid A\,\theta \le b^c + \xi\, b^s \,,\; C\,\theta = d^c + \xi\, d^s\}\,, \qquad \xi \in \mathcal{R}, \tag{196}$$

potom optimálne riešenia tejto úlohy $\widehat{\theta}\,(\psi\,,\,\xi)$ netvoria parametrizovanú krivku, ale parametrizovanú plochu. Ak by sme potrebovali počítať takúto úlohu KP pre veľa hodnôt parametrov $\psi\,,\,\xi$, boli by sme v rovnakej situácii ako pri riešení PDR (46), ktorá bola motiváciou odvodenia Algoritmu 1. Ponúka sa priamočiaro rozšíriť tento algoritmus a miesto počítania mnohých úloh KP rozdeliť uvažovaný parametrický priestor $(\psi\,,\,\xi) \subseteq \mathcal{R}^2$ na konečný počet podpriestorov $-$ regiónov $R_1\,,\,R_2\,\ldots$ tak, aby pre všetky parametre z nejakého z týchto regiónov R_i bola v optimálnom riešení $\widehat{\theta}\,(\psi\,,\,\xi)$ množina aktívnych ohraničení typu nerovnosti K_i rovnaká $\forall\,(\psi\,,\,\xi) \in R_i : K\,(\psi\,,\,\xi) = K_i\,$. Optimálne riešenie pre konkrétne hodnoty parametrov $\psi\,,\,\xi$ potom zostavíme vyriešením úlohy na viazaný extrém. Idea bude podobná ako pre Algoritmus 1. Pre nejakú uvažovanú množinu indexov ohraničení typu nerovnosti K_i využijeme lokálne ekvivalentnú úlohu na viazaný extrém a pomocou všetkých ohraničení typu nerovnosti $A\,\widehat{\theta}_{lok}\,(\psi\,,\,\xi) \le b^c + \xi\, b^s$ určíme oblasť $\{(\psi\,,\,\xi)\} = R_i^{primar}$, v ktorej je optimum tejto úlohy prípustné pre úlohu (195). Využijeme aj lokálnu Lagrangeovú duálnu úlohu a pomocou ohraničení nezápornosti pre jej premenné $\widehat{u}_{lok}(\psi\,,\,\xi) \geq \mathbf{0}$ určíme oblasť $\{(\psi\,,\,\xi)\} = R_i^{dual}$, v ktorej je plocha optimálnych riešení $\widehat{\theta}\,(\psi\,,\,\xi)$ úlohy (195) zhodná s optimálnym riešením tejto lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém $\widehat{\theta}_{lok}\,(\psi\,,\,\xi)$. Hľadaný región $R_i = R_i^{primar} \cap R_i^{dual}$ určíme ako prienik týchto oblastí. Algoritmus



Obr. 7: Príklad rozdelenia priestoru $[0\,,\,1] \times [0\,,\,1] \subset \mathcal{R}^2$ na regióny $R_1\,,\,R_2\,,\,R_3$

hľadajúci rozdelenie parametrického priestoru na regióny $R_1\,,\,R_2\,\ldots,$ na ktorých je množina aktívnych ohraničení typu nerovnosti rovnaká sa dá nájsť v ([28], Tøndel – Johansen – Bemporad [26]). Pre tam uvažovanú úlohu s vektorom parametrov nemusí byť v prípade priveľkého počtu nájdených regiónov R_i jednoduché nájsť pri zostavení optimálneho riešenia pre konkrétne hodnoty parametrov im prislúchajúci región. Postup pre jeho vyhľadanie sa dá nájsť v (Tøndel – Johansen – Bemporad [27]).

Nič nám nebráni aplikovať myšlienku Algoritmu 1 na všeobecnú úlohu parametrického konvexného programovania s diferencovateľnými funkciami. Použitie tohto postupu však nemusí byť výhodné, lebo môžeme dostať zložité vyjadrenia kriviek optimálnych riešení lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém a lokálnej Lagrangeovej duálnej úlohy. Ich riešenie pomocou KKT podmienok totiž vedie na parametrizovaný systém nelineárnych rovníc. Body nárazu φ_{zn} a opustenia φ_{zo} aktívnych ohraničení potom nevieme určiť tak jednoducho, ako pre úlohy parametrizovaného kvadratického programovania (47), (175), (184), čo celému algoritmu uberá na efektivite.

5 Využitie algoritmu pre parametrické kvadratické programovanie

Najprv sa pozrieme, o koľko je výhodnejšie počítanie úlohy PKP Algoritmom 1 miesto počítania veľa úloh KP pre rôzne hodnoty parametra. Pre porovnanie sme otestovali, koľko by trval výpočet náhodne vygenerovanej úlohy PKP (47) s parametrizovaným kvadratickým členom pre 100 hodnôt parametra φ rovnomerne rozmiestnených na intervale $[0.1\,,\,10]$ použitím funkcie quadprog v MATLABe. Použili sme defaultnú presnosť a využívali sme najnovšie nájdené optimum ako štartovací bod pre nasledujúcu úlohu KP. Použili sme také isté úlohy ako v časti 2.7. pri testovaní Algoritmu 1 pre $m = 10\,,\,\ldots\,,\,100$. Po spriemerovaní 10 výsledkov pre každý rozmer sme sa dostali k

m	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
algoritmus pre PKP	0.0050	0.0106	0.0188	0.0299	0.0436	0.07341	0.0961	0.1338	0.1721	0.2173
100 úloh KP	0.8062	1.9498	3.8918	6.5954	10.498	15.0292	20.771	29.618	37.865	62.074

Tabuľka 2: Porovnanie času výpočtu úlohy PKP algoritmom pre PKP a jej riešenia pomocou diskretizácie na úlohy KP v 100 bodoch parametra

časom v Tabuľke 2, pričom pre oba spôsoby sme zostavili optimálne riešenie primárnej úlohy a jej hodnotovú funkciu. Okrem zjavnej výhody vo výpočtovej náročnosti, ktorú možno pozorovať, je pri úlohách PKP niekedy užitočné poznať explicitný tvar optimálneho riešenia v závislosti od hodnoty parametra. Využili sme ho pre vyjadrenie explicitného tvaru funkcie $\lambda(\varphi)$ a pre formuláciu niekoľkých tvrdení v 3. kapitole.

5.1 Optimálne investovanie

Úloha PKP (36)

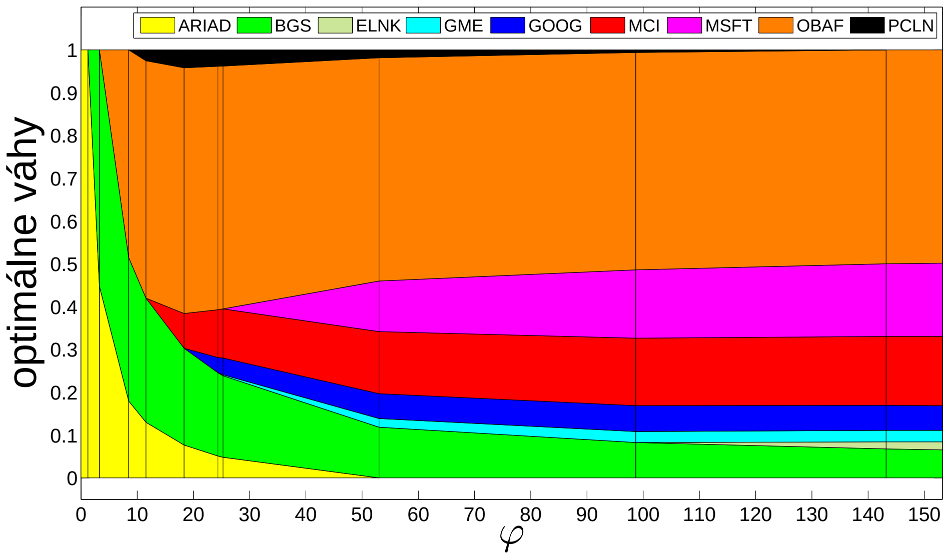
$$\min_{\theta\in\Omega}\left\{\frac{\varphi}{2}\,\theta^T\,\Sigma\,\theta-\mu^T\,\theta\right\},\qquad \varphi\in(0\,,\,\infty) \tag{197}$$

vyskytujúca sa pri počítaní PDR (46) je často používaná aj pri riešení iných formulácií problému optimálneho rozloženia financií medzi aktíva ako (10). Základnou črtou týchto modelov je zvýšiť zisk a znížiť riziko, čo je presne náplňou úlohy (197), pričom preferencie medzi nimi sú regulované kladným parametrom φ reprezentujúcim averziu k riziku. Vyriešili sme túto úlohu pre nasledovné vybraté aktíva: AMZN, ARIAD,

BCPC, BGS, DD, ELNK, GK, GME, GOOG, MCI, MSFT, NFLX, OAS, OBAF, OXY, PCLN, RDN, REE, RLD, SSP. Ich výnosy, variancie a vzájomné kovariancie sme odhadli z ich cien počas rokov 2011 a 2012 . Za množinu prípustných riešení sme zvolili nezáporný simplex (18)

$$\Omega = \Omega_1 = \left\{ \theta \in \mathcal{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1\,,\, \theta \geq \mathbf{0} \right\}, \tag{198}$$

čiže nutne investujeme všetky prostriedky a nemôžeme držať krátke pozície. Priebeh



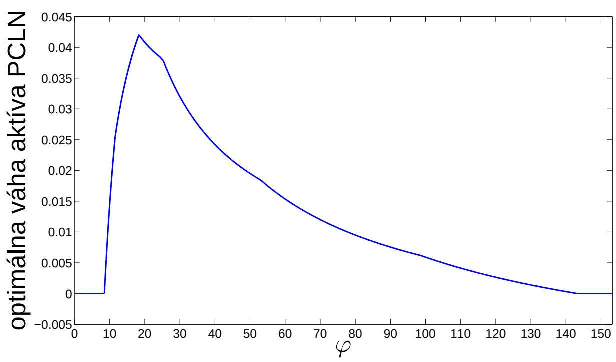
Obr. 8: Optimálne váhy aktív v závislosti od parametra φ v simplexe

optimálnych riešení $\widehat{\theta}\,(\varphi)$ zobrazený na Obrázku 8 nám v tomto prípade hovorí, aké budú optimálne váhy jednotlivých aktív v závislosti od parametra φ . Body zmeny v množine $K\,(\varphi)$ zaznačené vertikálnymi čiarami ukazujú, kedy niektoré aktívum začína alebo prestáva vstupovať do portfólia s nenulovou optimálnou váhou. Všimnime si, že tieto zmeny sú hustejšie rozmiestnené pre menšie hodnoty φ , pričom prvá z nich nastáva približne v bode $\varphi \approx 1.25$ a posledná vo $\varphi \approx 143.21$. Ďalej si môžeme všimnúť, že v priebehu celého intervalu $\varphi \in (0\,,\,\infty)$ iba 9 z 20 uvažovaných aktív iba vstupuje do portfólia aktívne. Ich kovariančná matica a výnosy sú v Tabuľke 3, pričom tučným sú zvýraznené údaje pre aktíva vystupujúce v neskoršej analýze optimálnej skladby portfólia pomocou PDR (46). Túto informáciu môžeme využiť na identifikáciu zvyšných 11 aktív, ktoré do portfólia nevstúpia, nech je investor akokoľvek rizikovo averzný.

	ARIAD	**BGS**	ELNK	GME	GOOG	**MCI**	MSFT	**OBAF**	**PCLN**	μ
ARIAD	**0.3116**	**0.0578**	0.0479	0.0490	0.0531	**0.0207**	0.0484	**0.0093**	**0.0673**	**0.6648**
BGS	**0.0578**	**0.0891**	0.0247	0.0274	0.0221	**0.0118**	0.0221	**0.0047**	**0.0319**	**0.3484**
ELNK	0.0479	0.0247	0.0649	0.0225	0.0257	0.0085	0.0223	0.0059	0.0328	−0.1535
GME	0.0490	0.0274	0.0225	0.1345	0.0183	0.0045	0.0224	0.0056	0.0248	0.0279
GOOG	0.0531	0.0221	0.0257	0.0183	0.0657	0.0070	0.0242	0.0062	0.0418	0.0802
MCI	**0.0207**	**0.0118**	0.0085	0.0045	0.0070	**0.0650**	0.0071	**0.0019**	**0.0105**	**0.0090**
MSFT	0.0484	0.0221	0.0223	0.0224	0.0242	0.0071	0.0436	0.0029	0.0286	−0.0268
OBAF	**0.0093**	**0.0047**	0.0059	0.0056	0.0062	**0.0019**	0.0029	**0.0264**	**0.0062**	**0.1235**
PCLN	**0.0673**	**0.0319**	0.0328	0.0248	0.0418	**0.0105**	0.0286	**0.0062**	**0.1197**	**0.2063**

Tabuľka 3: Čiastočná kovariančná matica a výnosy aktív

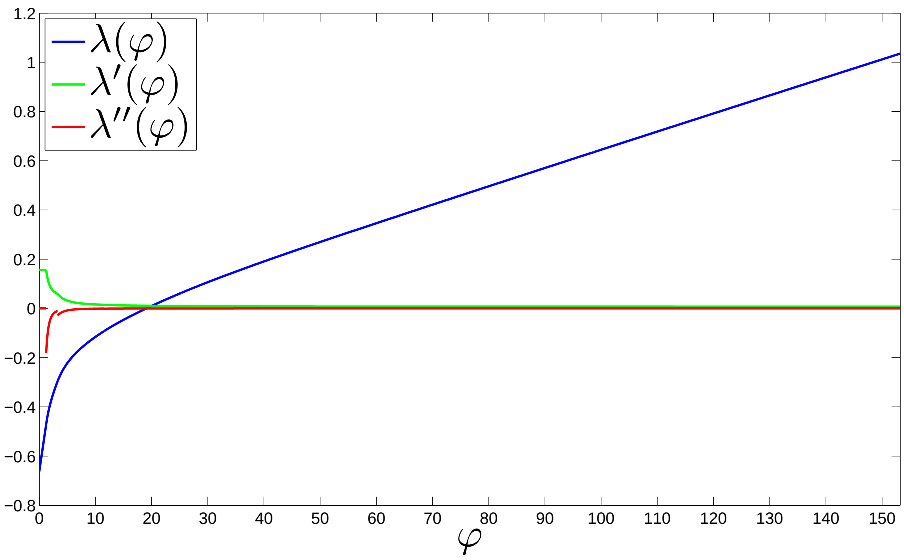
Mohli by sme čakať, že so vzrastajúcou averziou k riziku budú váhy rizikových, výnosných aktív klesať a váhy menej rizikových aktív s relatívne vysokými výnosmi budú stúpať. To je však pravda iba približne. Pre najnižšie hodnoty φ je všetok kapitál investovaný do aktíva ARIAD s najvyšším výnosom zo všetkých uvažovaných aktív, lebo investora zaujíma skoro výlučne výnos bez ohľadu na riziko. Pre veľké hodnoty φ je naopak portfólio diverzifikované použitím dokonca aktív ELNK a MSFT so záporným výnosom, aby bola dosiahnutá veľmi nízka volatilita bez veľkého ohľadu na výnos uspokojujúca veľmi rizikovo averzného investora. Pri pozornom pohľade si však môžeme všimnúť, že váhy aktív BGS a PCLN so vzrastajúcim φ najprv narastajú a potom klesajú, a taktiež váhy aktív GOOG a OBAF, hoci to veľmi nevidno. Váha aktíva PCLN dokonca najprv vstúpi do množiny aktív s nenulovou optimálnou váhou a potom ju opustí. To znamená, že do portfólia priveľmi ani primálo rizikovo averzného



Obr. 9: Nemonotónny priebeh optimálnej váhy aktíva PCLN v závislosti od φ v simplexe

investora nevstúpi, ale do portfólia stredne rizikovo averzného áno. Podiel váhy aktíva OBAF je vysoký od takmer najnižších hodnôt φ až po najvyššie, lebo má najnižšiu varianciu a piaty najvyšší výnos zo všetkých uvažovaných aktív (štvrtý najvyšší výnos z tých, ktoré majú pre nejaké $\varphi \geq 0$ nenulovú váhu).

Po vyriešení úlohy PKP (197) môžme vypočítať aj funkciu $\lambda(\varphi)$ (37) a pomocou nej PDR (46). Jej riešenie je možné (Ishimura – Ševčovič [10]) hľadať v tvare postupujúcej



Obr. 10: Priebeh funkcií $\lambda(\varphi)$, $\lambda'(\varphi)$, $\lambda''(\varphi)$ počítaných z reálnych dát v simplexe

vlny (angl. traveling wave solution)

$$\varphi(x, t) = w(x + c(T - t)), \tag{199}$$

pričom pre výpočet konštanty c a funkcie $w(z)$ je tiež výhodné použiť Algoritmom 1 vypočítanú funkciu $\lambda(\varphi)$. My sme ale použili metódu konečných diferencií so semiimplicitnou numerickou schémou ([11], Kútik – Mikula [15]). Kvôli zachovaniu štandardného značenia používaného v súvislosti s PDR transformujeme (46) pomocou $\widetilde{\varphi}(x, \tau) = \varphi(x, T - t)$ zo spätného času na napredujúci a dostaneme tak PDR

$$\begin{aligned} &\partial_\tau \widetilde{\varphi} = \partial_x^2 \lambda(\widetilde{\varphi}) + \partial_x \left[\lambda(\widetilde{\varphi})(1 - \widetilde{\varphi}) + \widetilde{\varphi}\left(\varepsilon\, \mathrm{e}^{-x} + r\right)\right], \qquad \forall x \in \mathcal{R}, \tau \in [0, T) \\ &\widetilde{\varphi}(x, 0) = 1 - \frac{U''(x)}{U'(x)}, \qquad x \in \mathcal{R}. \end{aligned} \tag{200}$$

Priestor premennej x sme rozdelili na deliace body $x_i = x_L + i\,k$ pre $i = 0, 1, \ldots, N + 1$, pričom $k = \frac{x_R - x_L}{N+1}$, a x_L a x_R sú ľavá a pravá hranica intervalu, na ktorom vypočítame

$\widetilde{\varphi}(x\,,\,\tau)$. Body $x_{i-\frac{1}{2}}\,,\,x_{i+\frac{1}{2}}$ v strede medzi nimi označíme $x_{i-}\,,\,x_{i+}$. Časový interval $[0\,,\,T]$ rozdelíme na body $t^j = j\,\Delta$ pre $j = 0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,M$, pričom $\Delta = \frac{T}{M}$. Označme

$$\widetilde{\varphi}^j_{i\pm} = \widetilde{\varphi}\,\left(x_{i\pm}\,,\,\tau^j\right) \tag{201}$$

$$D^j_{i\pm} = \lambda'\,\left(\widetilde{\varphi}^j_{i\pm}\right) \tag{202}$$

$$B^j_{i\pm} = \lambda\,\left(\widetilde{\varphi}^j_{i\pm}\right)\,\left(1 - \widetilde{\varphi}^j_{i\pm}\right) + \widetilde{\varphi}^j_{i\pm}\,\left(\varepsilon\,\mathrm{e}^{-x_{i\pm}} + r\right)\,. \tag{203}$$

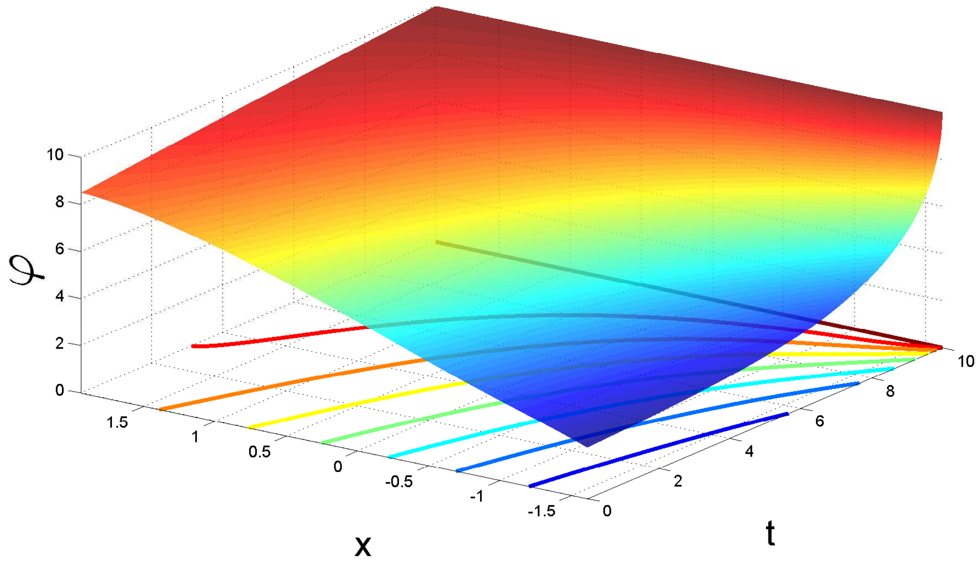
Semiimplicitná iteračná numerická schéma pre riešenie PDR (200) má potom tvar

$$-\frac{k}{\Delta^2}\,D^j_{i+}\,\widetilde{\varphi}^{j+1}_{i+1} + \left(1 + \frac{k}{\Delta^2}\,\left(D^j_{i+} + D^j_{i-}\right)\right)\,\widetilde{\varphi}^{j+1}_i - \frac{k}{\Delta^2}\,D^j_{i-}\,\widetilde{\varphi}^{j+1}_{i-1} = \frac{k}{\Delta}\,\left(B^j_{i+} - B^j_{i-}\right) + \widetilde{\varphi}^j_i\,, \tag{204}$$

čiže riešenie na novej časovej vrstve $\widetilde{\varphi}^{j+1}$ dostaneme vyriešením tridiagonálneho systému rovníc, pričom pri konštrukcii matice a vektora pravej strany využívame riešenie $\widetilde{\varphi}^j$ na starej časovej vrstve. Zvolili sme $\varepsilon = 0.09$ akceptované v Slovenskom penzijnom systéme [13], [16], bezrizikovú úrokovú mieru $r = 0.01$ a funkciu užitočnosti CARA triedy (172) so $z = 10$, čo dáva počiatočnú podmienku $\widetilde{\varphi}(x\,,\,0) = 10$. Za okrajové podmienky sme zvolili

$$\partial_x\,\widetilde{\varphi}(x\,,\,\tau) - \widetilde{\varphi}(x\,,\,\tau) = 0 \qquad \text{ak} \qquad x = x_L\,, \qquad \widetilde{\varphi}(x\,,\,\tau) = 0 \qquad \text{ak} \qquad x = x_R\,. \tag{205}$$

Odôvodnenie je nasledovné [11]: ak $\varepsilon > 0$, potom pre $x \to -\infty$ je dominantný člen rovnice $\partial^2_x\,\lambda\,(\widetilde{\varphi}) + \partial_x\,[\lambda\,(\widetilde{\varphi})\,(1 - \widetilde{\varphi}) + \widetilde{\varphi}\,(\varepsilon\,\mathrm{e}^{-x} + r)] - \partial_\tau\,\widetilde{\varphi} = 0$ rovný $\partial_x\,[\widetilde{\varphi}\,\varepsilon\,\mathrm{e}^{-x}]$. Aby sme ho vybalansovali, musíme predpokladať, že $\lim\limits_{x\to-\infty}\partial_x\,[\widetilde{\varphi}\,\varepsilon\,\mathrm{e}^{-x}] = \varepsilon\,\lim\limits_{x\to-\infty}(\partial_x\,\widetilde{\varphi} - \widetilde{\varphi})\,\mathrm{e}^{-x} = 0$. Ak $x \to \infty$, potom sa PDR (200) stáva rovnicou $\partial^2_x\,\lambda\,(\widetilde{\varphi}) + \partial_x\,[\lambda\,(\widetilde{\varphi})\,(1 - \widetilde{\varphi}) + \widetilde{\varphi}\,r] - \partial_\tau\,\widetilde{\varphi} = 0$, ktorá má konštantné riešenie, a teda $\lim\limits_{x\to\infty}\partial_x\,\widetilde{\varphi} = 0$. Za koniec časového intervalu sme zobrali $T = 10$, pričom časová jednotka je zhodná so zvolenou časovou jednotkou pre odhadnuté $\mu\,,\,\Sigma$, čiže rok. Za priestorový interval sme zobrali $[x_L\,,\,x_R] = \left[\ln\,\left(\frac{1}{5}\right)\,,\,\ln(7)\right]$. Ak v (10) uvažujeme $y_0 = 1$, čo je kvôli možnému preškálovaniu bez ujmy na všeobecnosti, potom tento interval reprezentuje maximálnu uvažovanú $5-$ násobnú stratu a maximálny uvažovaný $7-$ násobný zisk pôvodnej investície na tomto časovom intervale reprezentovaný pôvodnou premennou $Y \in \left[\frac{1}{5}\,,\,7\right]$ pred transformáciou (22). Použili sme $N = 1000$ deliacich bodov pre priestor a $M = 1000000$ pre čas. Majúc k dispozícii Algoritmus 1 sme najprv vypočítali hodnoty φ_z bodov zmeny $K(\varphi)$ úlohy (197) a koeficientov α, β, γ funkcie $\lambda(\varphi)$ na intervaloch konštantnosti $K(\varphi)$. V každej iterácii sme potom určili, do ktorého y týchto intervalov patria hodnoty φ^j na najnovšej časovej vrstve a na výpočet tej ďalšej φ^{j+1} sme použili presné hodnoty $\lambda(\varphi)$ a $\lambda'(\varphi)$, čo je postup, ktorý sme sľúbili na konci 1. kapitoly. Na Obrázku

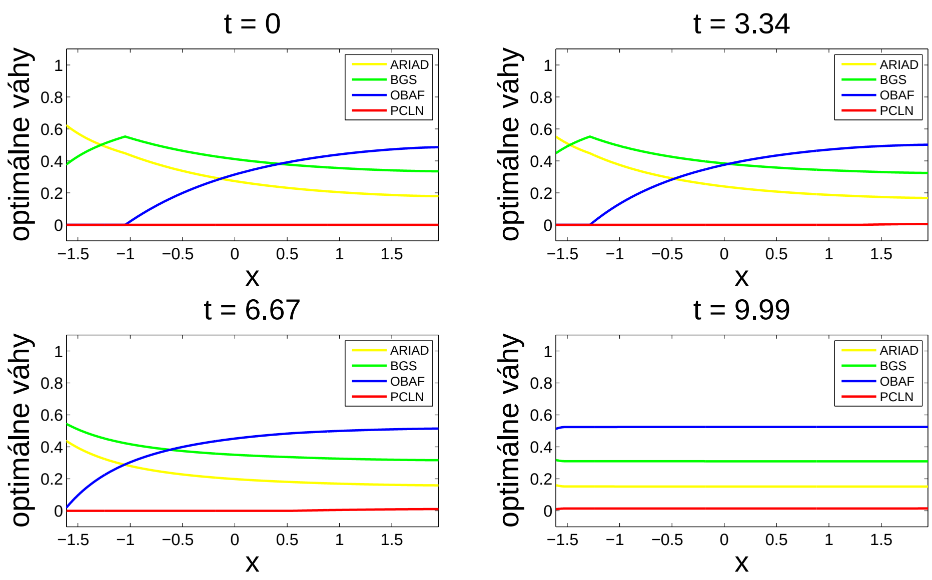


Obr. 11: Priebeh funkcie $\varphi(x, t)$ počítanej z reálnych dát v simplexe

11 vidíme, že vývoj $\varphi(x,t)$ optimálnej averzie k riziku je nasledovný:

- s rastúcim časom stúpa, čo značí, že čím menej času ostáva do konca uvažovaného časového obdobia, tým menej je investor ochotný znášať riziko
- s rastúcou hodnotou portfólia stúpa, čo značí, že čím viac sa investícia od začiatku uvažovaného obdobia zhodnotila, tým menej je investor ochotný znášať riziko
- pri veľkých stratách si investor zachováva ochotu riskovať až takmer do konca uvažovaného časového obdobia
- pri veľkom zisku je investor neochotný riskovať v takmer akomkoľvek čase

Tomu zodpovedá aj priebeh optimálnych váh jednotlivých aktív v závislosti od dosiahnutého výnosu meraného spojitým úrokom v (1) v rôznych časoch zobrazený na Obrázku 12. Na začiatku uvažovaného časového obdobia je v prípade veľkej straty preferované portfólio s majoritným zastúpením aktíva ARIAD s najvyšším výnosom, a



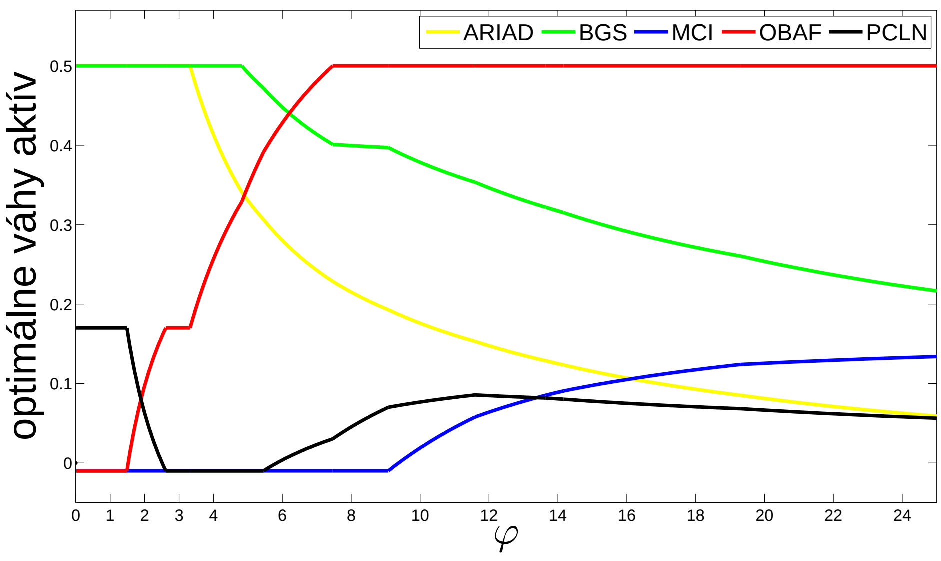
Obr. 12: Optimálne váhy aktív vzhľadom na dosiahnutý výnos pre rôzne časy v simplexe

aj v prípade menšej straty alebo malého zisku je preferované väčšie zastúpenie dvoch najvýnosnejších aktív ARIAD a BGS. S postupujúcim časom sa do popredia dostáva riziko straty investície a tieto aktíva sú postupne nahradzované menej rizikovým aktívom OBAF. Táto zmena je najvýraznejšia v oblasti veľkej straty. Tesne pred koncom uvažovaného obdobia sú optimálne váhy nezávislé na dosiahnutom zisku alebo strate.

Pre porovnanie sme uvažovali ešte inú množinu prípustných riešení

$$\Omega = \Omega_2 = \left\{ \theta \in \mathcal{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1 \,, \; \mathbf{-0.01} \leq \theta \leq \mathbf{0.5} \right\}, \tag{206}$$

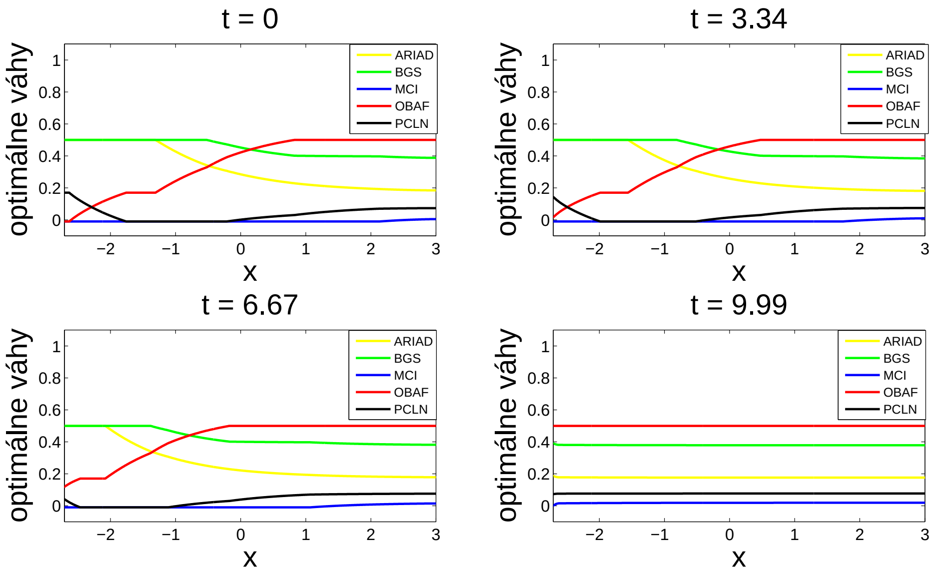
keď investujeme nutne všetko, a každé aktívum môžeme držať v krátkej pozícii maximálne do hodnoty stotiny investície a v dlhej pozícii do hodnoty polovice investície. Po vypočítaní úlohy (197) sme dostali priebeh optimálnych váh jednotlivých aktív zobrazený na Obrázku 13. Pre riešenie PDR (46) sme opäť zvolili koncovú podmienku $\varphi(x\,,\,T) = 10$, preto sme ho zobrazili iba pre tie aktíva, ktorých optimálna váha nie je na celom intervale $\varphi \in [0\,,\,10]$ rovná dolnej hranici -0.01. Priebeh optimálnej váhy aktíva PCLN je tentoraz ešte zaujímavejší, pričom si môžeme všimnúť aj jeho "výmenu" s aktívom OBAF na intervale $\varphi \in [1.49\,,\,2.62]$ a následnú konštantnosť všetkých optimálnych váh až po $\varphi \approx 3.32$. Tentokrát sme pri riešení PDR (46) uvažovali maximálne 15 – násobnú stratu a maximálne $e^3 \approx 20$ – násobný zisk, čo zodpovedá intervalu



Obr. 13: Optimálne váhy v závislosti od φ pre množinu prípustných riešení Ω_2

priestorovej premennej $[x_L\,,\,x_R] = \left[\ln\left(\frac{1}{15}\right)\,,\,3\right]$. Ostatné parametre sme ponechali rovnaké. Priebeh vypočítanej optimálnej averzie k riziku $\varphi\,(x\,,\,t)$ sa nesie v rovnakom duchu ako ten na Obrázku 11. Priebehu optimálnych váh v závislosti od dosiahnutého výnosu pre tie aktíva, ktoré nedosahujú pre všetky vypočítané hodnoty optimálnej averzie k riziku $\varphi\,(x\,,\,t)$ svoje spodné ohraničenie, je pre konkrétne časové okamihy zobrazený na Obrázku 14. Opäť sú v oblastiach veľkej straty okrem krátkeho časového úseku pred ukončením uvažovaného obdobia investície preferované tri najvýnosnejšie aktíva ARIAD, BGS, PCLN, ktoré sú pozvoľna s postupujúcim časom a s rastúcim dosiahnutým výnosom nahradzované aktívom OBAF s výhodnou proporciou volatility a výnosu. Vysvetlenie pre správanie sa optimálnej váhy aktíva PCLN a pre existenciu intervalu s absenciou akejkoľvek zmeny v optimálnych váhach aktív vzhľadom na dosiahnutý výnos nachádzajúci sa medzi intervalmi nemajúcimi túto vlastnosť je treba hľadať vo výsledku úlohy PKP, ktorý je zobrazený na Obrázku 13, teda v konkrétnych hodnotách výnosov, variancií a vzájomných kovariancií aktív.

Ďalšou možnosťou využitia algoritmu pre PKP je výpočet efektívnej hranice. Riešenie Markowitzovho problému $(2) - (4)$ sa dá získať explicitne metódou riešenia úlohy na viazaný extrém, ale v prípade prítomnosti ďalších lineárnych ohraničení typu nerovnosti je vyjadrenie minimálnej hodnoty variancie v závislosti od očakávaného výnosu



Obr. 14: Optimálne váhy aktív vzhľadom na dosiahnutý výnos pre rôzne časy pre množinu prípustných riešení Ω_2

úlohou PKP s parametrizovanou množinou prípustných riešení typu (184)

$$\min_{\theta \in \overline{\Omega}} \theta^T \Sigma \theta \tag{207}$$

$$\overline{\Omega} = \left\{ \theta \in \mathcal{R}^n \,\middle|\, A\theta \le b\,,\ C\theta = d\,,\ \mu^T \theta = \xi\,,\ \sum_{i=1}^n \theta_i = 1 \right\} \tag{208}$$

pre $\xi = \overline{r}$. Túto úlohu však môžeme vyriešiť aj pomocou úlohy PKP typu (197)

$$\min_{\theta \in \widetilde{\Omega}} \left\{ \frac{\varphi}{2} \theta^T \Sigma \theta - \mu^T \theta \right\}, \qquad \varphi > 0 \tag{209}$$

$$\widetilde{\Omega} = \left\{ \theta \in \mathcal{R}^n \,\middle|\, A\theta \le b\,,\ C\theta = d\,,\ \sum_{i=1}^n \theta_i = 1 \right\}, \tag{210}$$

lebo pre každú hodnotu φ je v optimálnom riešení $\widehat{\theta}(\varphi)$ tejto úlohy hodnota výrazu $\frac{\varphi}{2}\left(\widehat{\theta}(\varphi)\right)^T \Sigma \widehat{\theta}(\varphi)$ najnižšia zo všetkých prípustných θ, pre ktoré je druhý sčítanec minimalizovanej funkcie rovný $-\mu^T \widehat{\theta}(\varphi)$. Keby nebola, existoval by bod θ s nižšou hodnotou minimalizovanej funkcie a $\widehat{\theta}(\varphi)$ by nebolo optimálne riešenie. Použitím tejto úlohy môžeme zostaviť efektívnu hranicu trochu jednoduchšie ako z priebehu optimálnych riešení úlohy (207), lebo sa nemusíme zaťažovať kontrolovaním prípustnosti. Úloha (209) navyše vypočíta iba "efektívnu" časť efektívnej hranice, čiže jej hornú vetvu, ak ju zobrazíme štandardným obrázkom variancia – výnos.

V úlohe (2) $-$ (4) je optimálna variancia portfólia kvadratickou funkciou očakávaného výnosu [18]. Krivka optimálnych riešení $\widehat{\theta}(\varphi)$ úlohy (209) je po častiach tvorená polpriamkami optimálnych riešení úloh na viazaný extrém, teda je po častiach daná optimálnymi riešeniami úloh rovnakého typu ako (2). Môžeme teda očakávať, že v úlohe (209) bude optimálna variancia portfólia po častiach kvadratickou funkciou očakávaného výnosu. Po dosadení dostávame pre vyjadrenie variancie a očakávaného výnosu na jednotlivých intervaloch konštantnosti $K(\varphi)$ vzťahy

$$\overline{r}_{lok}(\varphi) = \mu^T \widehat{\theta}_{lok}(\varphi) = \mu^T \theta^c + \frac{1}{\varphi} \mu^T \theta^s \tag{211}$$

$$\sigma^2_{lok}(\varphi) = \left(\widehat{\theta}_{lok}(\varphi)\right)^T \Sigma \widehat{\theta}_{lok}(\varphi) = \frac{1}{\varphi^2} (\theta^s)^T \Sigma \theta^s + \frac{2}{\varphi} (\theta^c)^T \Sigma \theta^s + (\theta^c)^T \Sigma \theta^c . \tag{212}$$

Odtiaľ možno s využitím (94) pre prípad $\mu^T \theta^s \neq 0$, $(\theta^s)^T \Sigma \theta^s \neq 0$ vyvodiť

$$\sigma^2_{lok} = c_1 \overline{r}^2_{lok} + c_2 \overline{r}_{lok} + c_3 , \tag{213}$$

$$c_1 = \frac{(\theta^s)^T \Sigma \theta^s}{(\mu^T \theta^s)^2} = -\frac{1}{2\overline{\beta}} > 0 \tag{214}$$

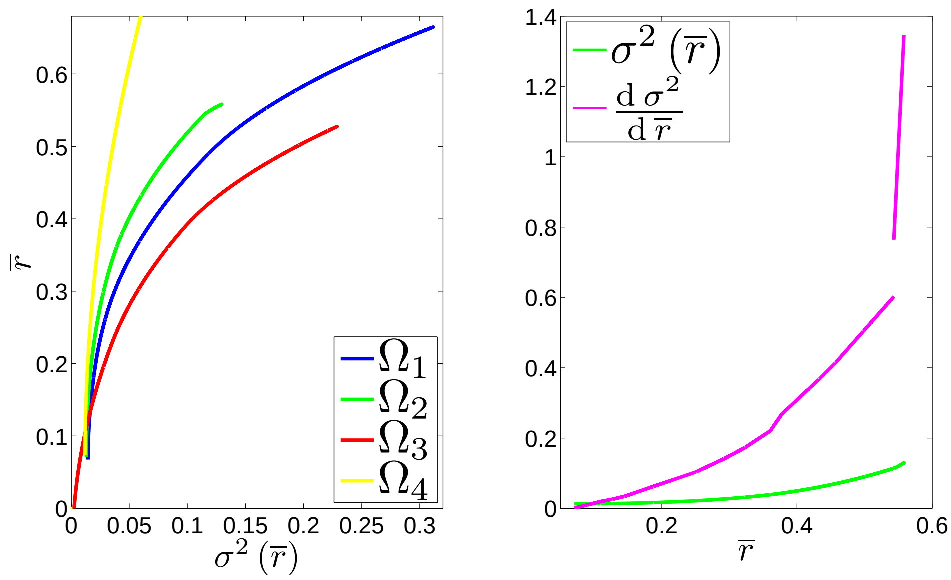
$$c_2 = -2 \frac{(\theta^s)^T \Sigma \theta^s}{(\mu^T \theta^s)^2} \mu^T \theta^c = \frac{\overline{\gamma}}{\overline{\beta}} \tag{215}$$

$$c_3 = \frac{(\theta^s)^T \Sigma \theta^s}{(\mu^T \theta^s)^2} \left(\mu^T \theta^c\right)^2 + (\theta^c)^T \Sigma \theta^c = -\frac{\overline{\gamma}^2}{2\overline{\beta}} + 2\overline{\alpha} > 0 , \tag{216}$$

kde $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ sú koeficienty hodnotovej funkcie $\overline{\lambda}(\varphi) = \overline{\alpha}\varphi + \frac{\overline{\beta}}{\varphi} + \overline{\gamma}$ úlohy (209), ktorých výpočet je podobný ako (115) $-$ (117), musíme si dať pozor iba na opačné znamienko μ. Preto pre úlohu (209) na rozdiel od (162) platí $\mu^T \theta^s = (\theta^s)^T \Sigma \theta^s = 2\overline{\beta}$, z čoho môžme použitím $\overline{\beta} = 0 \iff \theta^s = \mathbf{0}$ vydedukovať, že vzťahy (213) $-$ (216) platia pre všetky intervaly konštantnosti $K(\varphi)$ okrem tých, na ktorých optimálne riešenie $\widehat{\theta}(\varphi)$ stojí v nejakom bode. Vtedy sa však očakávaný výnos ani variancia nemenia. Ďalej by nás mohlo zaujímať, či je $\sigma^2(\overline{r})$ spojite diferencovateľná funkcia. Vo vnútri tých intervalov konštantnosti $K(\varphi)$, na ktorých $\theta^s \neq \mathbf{0}$, vyplýva zo vzťahu (213) jej spojitosť pre zodpovedajúce hodnoty $\overline{r}$. Pre hodnoty $\overline{r}$ zodpovedajúce bodom zmeny φ_z nachádzajúcimi sa medzi takýmito intervalmi konštantnosti môžeme z

$$\frac{\mathrm{d}\,\sigma^2_{lok}}{\mathrm{d}\,\overline{r}_{lok}} = \frac{\frac{\mathrm{d}\,\sigma^2_{lok}(\varphi)}{\mathrm{d}\,\varphi}}{\frac{\mathrm{d}\,\overline{r}_{lok}(\varphi)}{\mathrm{d}\,\varphi}} = \frac{-\frac{2}{\varphi^3} (\theta^s)^T \Sigma \theta^s}{-\frac{1}{\varphi^2} \mu^T \theta^s} = \frac{2}{\varphi} \tag{217}$$

vidieť spojitosť $\frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}\overline{r}}$. Avšak ak existuje taký interval konštantnosti $K(\varphi)$ nenulovej dĺžky, na ktorom platí $\theta^s = \mathbf{0}$ a nachádza sa medzi intervalmi konštantnosti $K(\varphi)$ nemajúcimi túto vlastnosť, ako napríklad interval $[2.62\,,\,3.32]$ na Obrázku 13, potom z (217) vyplýva, že na ľavej a na pravej hranici tohto intervalu je hodnota $\frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}\overline{r}}$ rôzna. Ak φ interpretujeme ako averziu k riziku, potom bod $\overline{r}$ nespojitosti $\frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}\overline{r}}$ môžme vnímať ako bod zlomu, kedy s klesajúcou averziou k riziku prestáva rásť očakávaný výnos aj variancia, a aby začali opäť stúpať, je treba ďalej znížiť φ. S nespojitou zmenou v averzii k riziku sa potom nespojite zmení aj miera nárastu variancie v závislosti od výnosu. Ak vyjadríme efektívnu hranicu ako $\sigma^2(\overline{r})$, potom je to teda vo všeobecnosti podľa (213) – (217) spojitá, rastúca, konvexná, po častiach kvadratická funkcia, ktorej derivácia nemusí byť spojitá, pričom túto poslednú vlastnosť má následne aj hodnotová funkcia úlohy PKP typu (184).



Obr. 15: Vľavo: Efektívna hranica pre rôzne ohraničenia. Vpravo: Nespojitosť derivácie efektívnej hranice pre ohraničenia Ω_2

Vypočítali sme efektívnu hranicu pre vyššie uvedené aktíva pre štyri rôzne ohraničenia. Prvými sú Ω_1 (198) popisujúce nezáporný simplex. Ako druhé sme zvolili Ω_2 (206). Za Ω_3 sme zvolili situáciu, keď neinvestujeme nutne všetky prostriedky

$$\Omega_3 = \left\{ \theta \in \mathcal{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \theta_i \leq 1\,,\, \mathbf{0.01} \leq \theta \right\}, \tag{218}$$

ale do každého aktíva minimálne stotinu uvažovanej sumy. Nakoniec sme za Ω_4 zvolili ohraničenia úlohy na viazaný extrém (2) $-$ (4).

5.2 Optimalizácia

Algoritmus pre PKP počíta úlohu KP pre mnoho hodnôt parametra. To nás privedie k myšlienke počítať pomocou neho túto úlohu pre jednu konkrétnu hodnotu parametra, prípadne jej limitný prípad, čiže úlohu LP. Idea počítania úlohy KP s rýdzokonvexnou minimalizovanou funkciou alebo LP pomocou algoritmu pre PKP je nasledovná. Zoberieme ľubovoľný počiatočný bod θ^0 a vymyslíme k nemu vhodnú úlohu PKP

$$\min_{\theta \in \overline{\Omega}} \left\{ \frac{\varphi}{2}\, \theta^T\, \Sigma\, \theta + \theta^T\, \mu^c + \psi\, \theta^T\, \mu^s \right\}, \qquad \varphi > 0\,,\, \psi \in \mathcal{R} \tag{219}$$

$$\overline{\Omega} = \{\theta \in \mathcal{R}^n \mid A\,\theta \leq b^c + \xi\, b^s\,,\, C\,\theta = d^c + \xi\, d^s\}\,, \qquad \xi \in \mathcal{R} \tag{220}$$

tak, aby bol tento bod jej optimálnym riešením $\theta^0 = \widehat{\theta}\,(\varphi_0\,,\,\psi_0\,,\,\xi_0)$ pre počiatočnú voľbu parametrov $\varphi_0\,,\,\psi_0\,,\,\xi_0$. Vhodná je taká úloha, pre ktorú existujú také parametre $\varphi_{kon}\,,\,\psi_{kon}\,,\,\xi_{kon}$ alebo ich limitné hodnoty, pre ktoré sa (219) $-$ (220) stáva úlohou, ktorú potrebujeme vyriešiť. Ďalej budeme sledovať, ako sa optimálne riešenie $\widehat{\theta}\,(\varphi\,,\,\psi\,,\,\xi)$ mení pre $\varphi \longrightarrow \varphi_{kon}\,,\,\psi \longrightarrow \psi_{kon}\,,\,\xi \longrightarrow \xi_{kon}$, kde končíme. Pre optimálne riešenie lokálne ekvivalentnej úlohy na viazaný extrém k úlohe (219) $-$ (220) máme

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}_{lok}\,(\varphi\,,\,\psi\,,\,\xi) =& \frac{\psi}{\varphi}\,\Sigma^{-1}\,G^T\,\left(G\,\Sigma^{-1}\,G^T\right)^{-1}\,G\,\Sigma^{-1}\,\mu^s - \frac{\psi}{\varphi}\,\Sigma^{-1}\,\mu^s - \frac{1}{\varphi}\,\Sigma^{-1}\,\mu^c + \\ &+ \frac{1}{\varphi}\,\Sigma^{-1}\,G^T\,\left(G\,\Sigma^{-1}\,G^T\right)^{-1}\,G\,\Sigma^{-1}\,\mu^c + \\ &+ \xi\,\Sigma^{-1}\,G^T\,\left(G\,\Sigma^{-1}\,G^T\right)^{-1}\,h^s + \Sigma^{-1}\,G^T\,\left(G\,\Sigma^{-1}\,G^T\right)^{-1}\,h^c\,,\end{aligned} \tag{221}$$

P vystupujúce v lokálnej Lagrangeovej duálnej úlohe bude mať tvar ako v (105), ale

$$q = -G\,\Sigma^{-1}\,\mu^c - \psi\,G\,\Sigma^{-1}\,\mu^s - \varphi\,h^c - \varphi\,\xi\,h^s\,. \tag{222}$$

Vhodnou voľbou úlohy (219) $-$ (220) môžeme znížiť čas výpočtu. Preto sme miesto riešenia troch úloh PKP pre jednotlivé parametre smerujúce ku koncovým hodnotám zobrali jednu spoločnú hodnotu χ pre všetky parametre $\chi = \varphi = \psi = \xi$ a riešili tak iba jednu úlohu PKP pre χ smerujúce z $\chi_0 = 1$ do $\chi_{kon} = 0$. Pre úlohu KP aj LP sme uvažovali dve alternatívne voľby úlohy (219) $-$ (220), ktoré sme nazvali Alternatíva A a Alternatíva B. Porovnali sme ich s v MATLABe zabudovanými funkciami, pričom cieľom je hlavne ukázať možnosti počítania týchto úloh pomocou (219) – (220), nie "férový" test, lebo náš program neobsahuje postup pre vyriešenie úloh s nesplnenou analógiou Predpokladu 2.2.

V Alternatíve A pre úlohu LP

$$\min_{\theta\in\Omega}\left\{\mu^T\theta\right\} \tag{223}$$

$$\Omega=\{\theta\in\mathcal{R}^n \mid A\,\theta\le b\,,\ C\,\theta=d\} \tag{224}$$

sme rozdelili úlohu na dve fázy. V prvej sme hľadali prípustné riešenie tejto úlohy. Na ten účel sme naformulovali [6] pomocnú úlohu LP

$$\min_{\widetilde{\theta}\in\widetilde{\Omega}}\left\{\widetilde{\mu}^T\,\widetilde{\theta}\right\} \tag{225}$$

$$\widetilde{\Omega}=\left\{\widetilde{\theta}\in\mathcal{R}^{n+1} \mid (\mathbf{1}\ A)\ \widetilde{\theta}\le b\,,\ (\mathbf{0}\ C)\ \widetilde{\theta}=d\,,\ \widetilde{\mu}^T\,\widetilde{\theta}\ge -eps\right\}, \tag{226}$$

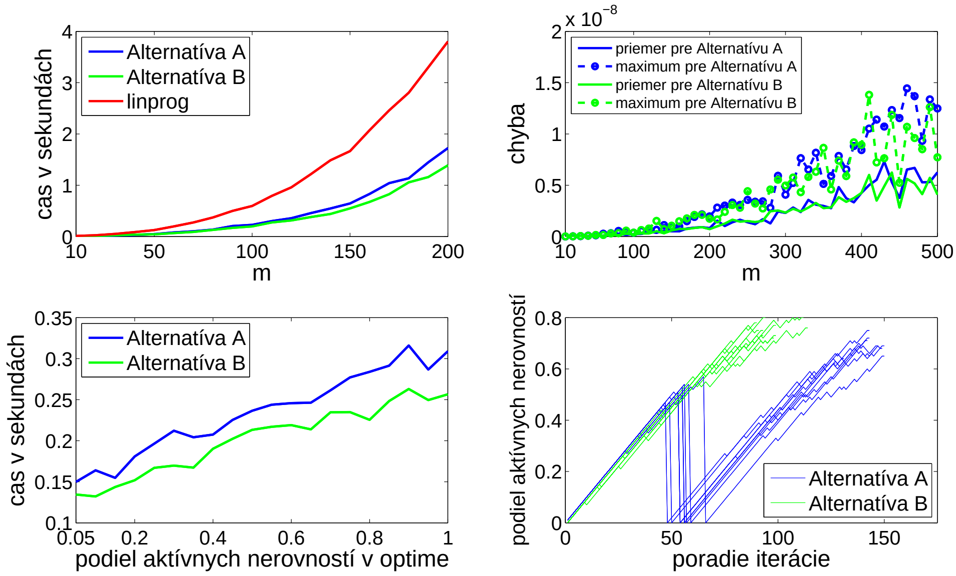
kde $\widetilde{\mu}=(-1\,,0\,,0\,,\ldots\,,0)^T$, $\mathbf{1}=(1\,,1\,,\ldots\,,1)^T$ a $eps>0$ je malé kladné číslo. Prvá zložka vektora $\widetilde{\theta}$ určuje, aké je najväčšie porušenie ohraničení typu nerovnosti úlohy (223) pre vektor zvyšných zložiek $\widetilde{\theta}$. Pokiaľ je $\widetilde{\theta}$ prípustným riešením úlohy (225), potom tento vektor bez prvej zložky spĺňa ohraničenia typu rovnosti úlohy (223), a teda nám stačí skončiť pre bod $\widetilde{\theta}$ s prvou zložkou nezápornou, čo je zaručené kladným eps . Úlohu (225) sme tiež riešili pomocou úlohy (219) – (220). Najprv sme zvolili bod θ_p spĺňajúci $C\,\theta_p=d$, a za počiatočný bod pre túto úlohu sme zobrali $\theta^0=\left(w\,,\ \theta_p^T\right)^T$, kde $w=\min\limits_i\left\{(b-A\,\theta_p)_i\right\}$. Za ďalšie údaje sme pre ňu vzali $\Sigma=I$, $\mu^c=\widetilde{\mu}$, $\mu^s=-\theta^0-\mu^c$, $b^c=b$, $b^s=\mathbf{0}$, $d^c=d$, $d^s=\mathbf{0}$. Parametrizovaný bol teda kvadratický a lineárny člen. Pokiaľ sme našli prípustný bod úlohy (223), prešli sme k druhej fáze, v ktorej sme ju riešili pomocou (219) – (220) rovnakým spôsobom ako (225) tiež parametrizovaním kvadratického a lineárneho člena. Počiatočný bod bol nájdené optimálne riešenie úlohy (225) bez prvej zložky a za zvyšné údaje sme zvolili $\Sigma=I$, $\mu^c=\mu$, $\mu^s=-\theta^0-\mu^c$, $b^c=b$, $b^s=\mathbf{0}$, $d^c=d$, $d^s=\mathbf{0}$.

V Alternatíve B sme sa chceli vyhnúť výpočtom spojeným s delením úlohy na dve fázy a parametrizovali sme aj množinu prípustných riešení. Istou nevýhodou tohto postupu je, že môžeme vyrobiť úlohu (219) – (220) obsahujúcu body χ_z nespĺňajúce analógiu Predpokladu 2.2, ktoré úloha (223) neobsahuje, ale na druhej strane sa môže stať aj presný opak. Závažnejším nedostatkom je, že (221) a (222) nebudú lineárnou funkciou χ , a pre získanie χ_{zn} , χ_{zo} budeme musieť pre jednotlivé zložky riešiť kvadratické nerovnice. To môže byť výpočtovo náročnejšie, ale hlavne to môže viesť k zaokrúhľovacím chybám, kvôli ktorým môže zlyhať výpočet. Napriek tomu sme to skúsili a parametrizovali sme kvadratický aj lineárny člen a aj množinu prípustných riešení. Za potrebné údaje pre úlohu (219) $-$ (220) sme zvolili $\theta^0 = \frac{-1}{||\mu||}\,\mu$, $\Sigma = I$, $\mu^c = \mu$, $\mu^s = -\theta^0 - \mu^c = \left(\frac{1}{||\mu||} - 1\right)\mu$, $b^c = b$, $b^s = A\,\theta^0 - b + z$, $d^c = d$, $d^s = C\,\theta^0 - d$, kde z je ľubovoľný vektor s kladnými zložkami, ktorý sme náhodne generovali. Tento vektor bol potrebný, lebo náš program algoritmu pre PKP zvykne mať problém, pokiaľ nastáva opustenie priveľa aktívnych ohraničení typu nerovnosti v tom istom bode χ_{zo} , čo by sa mohlo stať pre $z = \mathbf{0}$.

Aby sme porovnali naše Alternatívy pre LP, vygenerovali sme náhodné úlohy LP (ktoré neboli riedke) so známym optimálnym riešením. Pre každý počet ohraničení typu nerovností $m = 10\,,\,20\,,\,\ldots\,,\,500$ sme zvolili počet premenných $n = 2\,m$, počet ohraničení typu rovností $r = m$ a počet aktívnych ohraničení typu nerovnosti v známom optimálnom riešení $\frac{m}{2}$ (úlohy mali typicky viac optimálnych riešení) a spriemerovali sme výsledky z riešenia 10 úloh. Na Obrázku 16 vľavo hore vidno, že vypustením hľadania prípustného bodu ušetrí Alternatíva B nejaký čas oproti Alternatíve A (okrem najmenších rozmerov), pričom obe sú rýchlejšie ako active $-$ set algoritmus funkcie linprog v MATLABe. Zároveň je však riešenie kvadratických nerovníc v každej iterácii pre získanie χ_{zo} , χ_{zn} menej presné ako riešenie lineárnych nerovníc. Hodnoty parametra sa zvyknú meniť po veľmi malých krokoch a následne výpočet pre priveľké rozmery pomerne často zlyhá (stalo sa to v 17 z 500 testovaných úloh, čo je 3.4 %), preto sme m zobrazili iba po 200. Vpravo hore sme zobrazili chybu definovanú ako

$$chyba = \left|\widehat{h} - \mu^T\,\widehat{\theta}\right| + \max\left(0\,,\,\min_i \left\{(b - A\,\widehat{\theta})_i\right\}\right) + \left|\left|C\,\widehat{\theta} - d\right|\right| \,, \qquad (227)$$

pričom $\widehat{h}$ je funkčná hodnota minimalizovanej funkcie vo vygenerovanom optimálnom riešení, $\widehat{\theta}$ je nájdený bod optimálneho riešenia a pre Alternatívu B sme zobrali iba úspešne vyriešené úlohy. Vidíme, že pre tie chyba nie je veľká. Čas výpočtu bol veľmi ovplyvnený počtom aktívnych ohraničení typu nerovnosti vo vygenerovanom optimálnom riešení, hoci keďže majú úlohy viac optimálnych riešení, záleží aj na tom, ku ktorému z nich zvolená úloha PKP (219) $-$ (220) skonverguje. Túto závislosť sme pre $m = 100$ zobrazili vľavo dole (ide o priemer z 10 úloh). Lepšie túto závislosť pochopíme



Obr. 16: Porovnanie algoritmov pre LP. Vľavo hore: Čas výpočtu v závislosti na m. Vpravo hore: Chyba v optimálnom riešení. Vľavo dole: Čas výpočtu v závislosti na podiele aktívnych nerovností v optime. Vpravo dole: Podiel aktívnych nerovností v priebehu iterácií.

pri pohľade na obrázok vpravo dole, kde sme pre 10 náhodných úloh LP pre $m = 100$ zobrazili, ako sa v priebehu iterácii vyvíja počet aktívnych nerovností. Ten sa prakticky vždy mení iba po 1, preto zvýšenie počtu aktívnych nerovností v optimálnom riešení zvýši počet iterácii potrebných na dosiahnutie tohto bodu. Tento obrázok vysvetľuje aj vyššiu rýchlosť Alternatívy B, ktorá nestráca čas nabaľovaním a následným zahodením aktívnych nerovností v prvej fáze Alternatívy A. Môžeme na ňom vidieť, že riešenia oboch Alternatív zvyknú mať vyšší počet aktívnych nerovností ako $\frac{m}{2}$. K porušeniu analógie Predpokladu 2.2 v Alternatíve B vymyslením úlohy (219) – (220) ani raz nedošlo.

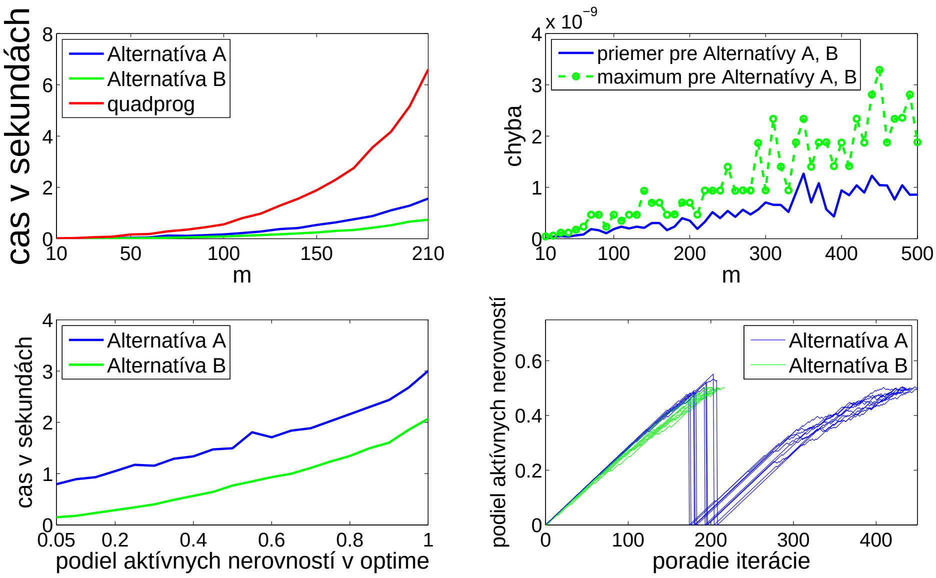
V Alternatíve A pre úlohu KP

$$\min_{\theta \in \Omega} \left\{ \frac{1}{2}\, \theta^T\, \Sigma\, \theta + \mu^T\, \theta \right\} \tag{228}$$

$$\Omega = \{\theta \in \mathcal{R}^n \mid A\,\theta \le b\,,\; C\,\theta = d\} \tag{229}$$

s rýdzokonvexnou, symetrickou maticou $\Sigma = \Sigma^T \succ 0$ sme tiež rozdelili úlohu (228) na dve fázy. Najprv sme v prvej fáze hľadali prípustné riešenie pomocou úlohy (225) tým istým postupom, ako pre úlohu (223). Pokiaľ sme našli prípustné riešenie, pristúpili sme k druhej fáze, teda samotnému riešeniu úlohy (228) pomocou (219) – (220). Za jej počiatočný bod θ^0 sme zobrali nájdený prípustný bod. Tentoraz musí kvadratický člen pre $\chi = \chi_{kon} = 0$ ostať, preto $\varphi \equiv 1$, za maticu Σ sme zobrali Σ úlohy (228) a parametrizovali sme iba lineárny člen. Za zvyšné údaje sme zvolili $\mu^c = \mu$, $\mu^s = -\Sigma\,\theta^0 - \mu^c$, $b^c = b$, $b^s = \mathbf{0}$, $d^c = d$, $d^s = \mathbf{0}$.

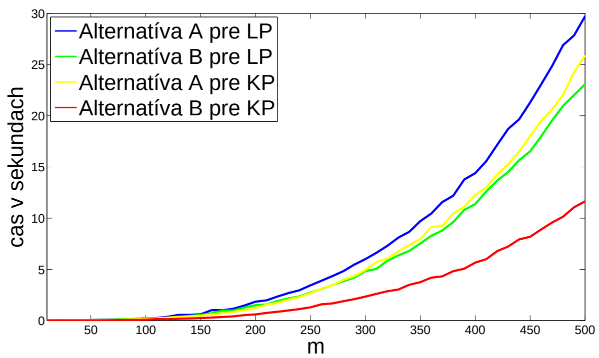
V Alternatíve B sme sa opäť chceli vyhnúť riešeniu prvej fázy, preto sme parametrizovali množinu prípustných riešení. Aj tentoraz môžeme vyrobiť alebo obísť body χ_z, v ktorých nie je splnená analógia Predpokladu 2.2. Aj tentoraz musí kvadratický člen pre $\chi = \chi_{kon} = 0$ ostať, preto $\varphi \equiv 1$ a za maticu Σ sme zobrali Σ úlohy (228). Preto budú (221) a (222) lineárnou funkciou χ. Za počiatočný bod pre úlohu (219) – (220) sme zvolili $\theta^0 = \Sigma^{-1}\mu$ voľné minimum úlohy (228), takže sme parametrizovali ešte aj lineárny člen. Za zvyšné údaje sme zvolili $\mu^c = \mu$, $\mu^s = \mathbf{0}$, $b^c = b$, $b^s = A\,\theta^0 - b + z$, $d^c = d$, $d^s = C\,\theta^0 - d$, pričom z je vektor s náhodne vygenerovanými kladnými zložkami, ktorého účel sme zdôvodnili pri popise Alternatívy B pre úlohu LP.



Obr. 17: Porovnanie algoritmov pre KP. Vľavo hore: Čas výpočtu v závislosti na m. Vpravo hore: Chyba v optimálnom riešení. Vľavo dole: Čas výpočtu v závislosti na podiele aktívnych nerovností v optime. Vpravo dole: Podiel aktívnych nerovností v iteráciach.

Aby sme porovnali tieto Alternatívy, vygenerovali sme náhodné úlohy KP so známym optimálnym riešením. Pre každý počet ohraničení typu nerovností $m = 10, 20, \ldots, 500$

sme zvolili počet premenných $n = 2\,m$, počet rovností $r = m$, číslo podmienenosti $cond\,(\Sigma) = 2000$ a počet aktívnych ohraničení typu nerovnosti v optimálnom riešení $\frac{m}{2}$. Na Obrázku 17 vľavo hore vidno, že opäť je okrem najmenších rozmerov Alternatíva B rýchlejšia ako Altervatíva A, pričom obe sú rýchlejšie ako active $-$ set algoritmus funkcie quadprog v MATLABe. Tentoraz sú aj v Alternatíve B riešené nerovnice pri určovaní χ_{zo}, χ_{zn} lineárne, preto nie je s veľkými rozmermi problém, ale m sme limitovali do 210 kvôli veľkému času quadprogu. Keďže je optimálne riešenie vygenerovaných úloh jediné, obe Alternatívy sa pri poslednej iterácii nachádzajú na tej istej množine ohraničení a preto dajú to isté riešenie, majú teda aj rovnakú chybu definovanú v (227) zobrazenú vpravo hore. Opäť je čas výpočtu veľmi závislý od podielu aktívnych nerovností v optimálnom riešení. Priebeh tejto závislosti je pre $m = 210$ zobrazený vľavo dole (ide o priemer z 10 úloh). Táto závislosť je pre $m = 350$ pomocou 10 náhodných úloh vysvetlená na Obrázku 17 vpravo dole podobným spôsobom ako na Obrázku 16, pričom to opäť vysvetľuje aj vyššiu rýchlosť Alternatívy B. K porušeniu analógie Predpokladu 2.2 v Alternatíve B vymyslením úlohy (219) $-$ (220) ani tentoraz nedošlo.



Obr. 18: Porovnanie algoritmov pre LP a KP

Z porovnania všetkých Alternatív Obrázku 18 (pre Alternatívu B pre úlohu LP sme zobrali iba úspešne vyriešené úlohy) vidno, že použitie algoritmu pre úlohu PKP (219) $-$ (220) je výhodnejšie použiť pri riešení úloh KP ako LP, pretože obe Alternatívy sú pre tento typ úloh okrem najmenších rozmerov rýchlejšie. Najmä Alternatíva B pre úlohu KP, ktorá asi najlepšie kopíruje geometriu pôvodnej úlohy, si zasluhuje pozornosť, lebo je najrýchlejšia od najmenších až po najväčšie úlohy, kde už má veľký náskok. Viac sa o takýchto algoritmoch pre úlohu KP dá nájsť v (Potschka et al. [22]).

Záver

Hlavnou témou tejto práce bolo parametrické kvadratické programovanie. Boli sme motivovaní problémom optimálneho investovania do aktív riadiacich sa geometrickým Brownovým pohybom.

V 1. kapitole sme po zadefinovaní a popísaní niektorých známych pojmov z teórie finančnej matematiky pristúpili k nami uvažovanému modelu. V ňom sme hľadali funkciu optimálnych váh závisiacu od času a od dosiahnutého výnosu portfólia (10). Po aplikácii poznatkov teórie stochastického dynamického programovania a Riccatiho transformácii sme postupne získali Hamilton – Jacobi – Bellmanovú parciálnu diferenciálnu rovnicu (31) a kvázilineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu popisujúcu vývoj optimálnej averzie k riziku (46).

Keďže v nej ako koeficient vystupuje hodnotová funkcia úlohy parametrického kvadratického programovania (37), boli sme v 2. kapitole motivovaní odvodiť algoritmus pre výpočet optimálnych riešení úlohy (47). Najprv sme zadefinovali niekoľko pojmov z teórie nelineárneho programovania. Z nich sme pomocou Lemy 2.4 vo Vete 2.5 vyvodili, že pre túto úlohu existuje pre každú hodnotu parametra úloha (84) na viazaný extrém s rovnakým optimálnym riešením. Táto úloha je rovnaká pre všetky parametre pochádzajúceho z nejakého intervalu, čo sme ukázali pomocou úvahy využívajúcej Lagrangeovú duálnu úlohu. Algoritmus 1 pozostáva z delenia hodnôt parametra na tieto intervaly, a na nich sú optimálne riešenie a hodnotová funkcia úlohy (47) dané vzťahmi (91) – (93) a (114) – (117). Nasledoval numerický test jeho presnosti a výpočtovej náročnosti.

V 3. kapitole sme ho využili k analýze hodnotovej funkcie úlohy parametrického kvadratického programovania (37). Ukázali sme, že je to neklesajúca, konkávna funkcia. Dokázali sme, že jej prvá derivácia je lokálne Lipschitzovsky spojitá a uviedli podmienku, za ktorej je Lipschitzovsky spojitá. Uviedli sme aj podmienku pre spojitosť jej druhej derivácie v nejakom bode a ukázali, že táto funkcia má nanajvýš konečne veľa bodov nespojitosti. Vo Vete 3.5 sme vyvodili podmienky pre existenciu a jednoznačnosť riešenia kvázilineárnej parciálnej diferenciálnej rovnice z 1. kapitoly, čím sme splnili cieľ práce.

V 5. kapitole sme najprv porovnali výpočtovú náročnosť riešenia úlohy (47) pomocou Algoritmu 1 a pomocou diskretizácie na 100 úloh kvadratického programovania. Potom sme vypočítali problém optimálneho investovania (10) pre 2 rôzne polyedrické množiny váh. Nasledoval výpočet efektívnej hranice pre 4 takéto množiny prípustných riešení a pomocou (217) sme ukázali, že jej derivácia $\frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}\bar{r}}$, a teda aj derivácia hodnotovej funkcie úlohy (184) s parametrizovanou množinou prípustných riešení môže byť nespojitá. Ďalej sme ukázali, že pomocou modifikácií Algoritmu 1 zo 4. kapitoly je možné počítať samotné úlohy kvadratického programovania s rýdzokonvexnou minimalizovanou funkciou a aj úlohy lineárneho programovania. Pre oba typy úloh sme uvažovali dve alternatívne spôsoby riešenia, ktoré sme porovnali navzájom aj s v MATLABe zabudovanými funkciami. Zdá sa, že tento spôsob riešenia úloh je vhodnejší pre úlohy kvadratického programovania, pričom najmä Alternatíva B je veľmi rýchla. Pre jednoznačný záver je však potrebný väčší test.

Prínosom tejto práce je ucelený pohľad na možnosti a aplikácie úloh parametrického kvadratického programovania a ich hodnotových funkcií vo financiách, algoritmické spracovanie týchto úloh a Veta 3.5. Práca bola prínosom aj pre samotného autora, pretože k Algoritmu 1 aj k jeho modifikáciam využiteľným v optimalizácii sa dopracoval sám, a až neskôr prišiel na to, že sú už vymyslené.

Zoznam použitej literatúry

[1] ABE, R. - ISHIMURA, N. (2008), Existence of solutions for the nonlinear partial differential equation arising in the optimal investment problem, Proceedings of The Japan Academy vol. 84, no. 1, 11-14.

[2] AVIS, D. - FUKUDA, K. - PICOZZI, S. (2002), On canonical representations of convex polyhedra, Mathematical Software, Proceedings of First International Congress of Mathematical Software, 350-360.

[3] BLACK, F. - SCHOLES, M. (1973), The pricing of options and corporate liabilities, The journal of political economy, 637-654.

[4] BOYD, S. - VANDENBERGHE, L. (2009), Convex optimization. Cambridge: Cambridge University Press, 716 s. ISBN 978-0-521-83378-3. Dostupné na internete (5.12.2013):

`http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf`

[5] BROWNE, S. (2000), Risk-constrained dynamic active portfolio management, Management Science, vol. 46, no. 9, 1188-1199.

[6] FUKUDA, K.: Polyhedral computations. Dostupné na internete (7.3.2014):

`http://www.inf.ethz.ch/personal/fukudak/lect/pclect/notes2014/PolyComp2014.pdf`

[7] HALICKÁ, M. (2013), Optimálne riadenie 2, prednášky.

[8] HALICKÁ, M. - BRUNOVSKÝ, P. - JURČA, P. (2009), Optimálne riadenie. Bratislava: EPOS, 204 s. ISBN 978-80-8057-793-3.

[9] HAMALA, M. - TRNOVSKÁ, M. (2013), Nelineárne programovanie, teória a algoritmy. Bratislava: EPOS, 339 s. ISBN 978-80-8057-986-9.

[10] ISHIMURA, N. - ŠEVČOVIČ, D. (2013), On traveling wave solutions to a Hamilton-Jacobi-Bellman equation with inequality constraints, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics vol. 30, no. 1, 51-67.

[11] KILIANOVÁ, S. - ŠEVČOVIČ, D. (2013), Transformation method for solving Hamilton - Jacobi - Bellman equation for constrained dynamic stochastic optimal allocation problem, The ANZIAM Journal, vol. 55, 14-18.

[12] KLATTE, D. (1985), On the Lipschitz behavior of optimal solutions in parametric problems of quadratic optimization and linear complementarity, Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, vol. 16, no. 6, 819-831.

[13] KOLEVA, M. N. - VULKOV, L. G. (2013), Quasilinearization numerical scheme for fully nonlinear parabolic problems with applications in models of mathematical finance, Mathematical and Computer Modelling, vol. 57, no. 9-10, 2564-2575.

[14] KUHN, H. W. - TUCKER, A. W. (1951), Nonlinear programming, Proceedings of the second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, 481-492.

[15] KÚTIK, P. - MIKULA, K. (2011), Finite volume schemes for solving nonlinear partial differential equations in financial mathematics, Finite Volumes for Complex Applications VI Problems & Perspectives, Springer Proceedings in Mathematics, vol. 4, 643-651.

[16] MACOVÁ, Z. - ŠEVČOVIČ, D. (2010), Weakly nonlinear analysis of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation arising from pension savings management, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, vol. 7, no. 4, 619-638.

[17] MARKOWITZ, H. (1952), Portfolio selection, The journal of finance, vol. 7, no. 1, 77-91.

[18] MELICHERČÍK, I. - OLŠAROVÁ, L. - ÚRADNÍCEK, V (2005), Kapitoly z finančnej matematiky. Bratislava: EPOS, 242 s. ISBN 80-8057-651-3.

[19] MERTON, R. C. (1973), Theory of rational option pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, vol. 4, no. 1, 141-183.

[20] MERTON, R. C. (1976), Lifetime portfolio selection under uncertainity: The continuous-time case, The Review of Economics and Statistic. vol. 51, no. 4, 247-257.

[21] MILGROM, P. - SEGAL, I. (2002), Envelope theorems for arbitrary choice sets, Econometrica, vol. 70, no. 2, 583-601.

[22] POTSCHKA, A. et al. (2010), Reliable solution of convex quadratic programs with parametric active set methods, Interdisciplinary Center for Scientific Computing, Heidelberg University, Im Neuenheimer Feld.

[23] PRATT, J. W. (1964), Risk aversion in the small and in the large, Econometrica, vol. 32, no. 1/2, 122-136.

[24] ŠEVČOVIČ, D. (2008), Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie. Bratislava: Iris, 130 s. ISBN 978-80-89238-14-9.

[25] ŠEVČOVIČ, D. - STEHLÍKOVÁ, B. - MIKULA, K. (2009), Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Bratislava: Slovenská technická univerzita, 200 s. ISBN 978-80-227-3014-3.

[26] TØNDEL, P. - JOHANSEN, T. A. - BEMPORAD, A. (2001), An algorithm for multi-parametric quadratic programming and explicit MPC solutions, Automatica, vol. 39, no. 3, 489-497.

[27] TØNDEL, P. - JOHANSEN, T. A. - BEMPORAD, A. (2002), Computation and approximation of piecewise affine control laws via binary search trees, Proceedings of the 41th IEEE Conference on Decision and Control, vol. 3, 3144-3149.

[28] TØNDEL, P. - JOHANSEN, T. A. - BEMPORAD, A. (2003), Further results on multiparametric quadratic programming, Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control, vol. 3, 3173-3178.

[29] Wikipedia: Investment. Dostupné na internete (5.4.2014):

`http://en.wikipedia.org/wiki/Investment`

Príloha A

Nasledujú zdrojové kódy niektorých použitých programov v jazyku MATLAB. Prvý je kód funkcie generkplp generujúcej náhodnú úlohu KP alebo LP so známym optimálnym riešením. Druhý je skript kódu pre Algoritmus 1, ktorý môže volať túto funkciu. Potom nasleduje skript pre počítanie PDR (200) semiimplicitnou numerickou schémou. Ďalší je skript pre počítanie úlohy KP alebo LP, ktorý môže volať funkciu generkplp. Tento skript volá posledný skript, ktorý obsahuje samotný cyklus pre úlohy KP a LP.

```
function [sigma A b mi x C d] = generkplp( n , m , r , pomer , con , rieds , rieda , riedc , kp)
% Generuje ulohu kvadratickeho alebo linearneho programovania z KKT podmienok. Uloha LP zvykne mat viac rieseni. Pre ulohu
% LP je sigma prazdna. Pre primale pomery riedkosti A, C nemusi dat m, r ohraniceni, lebo vygenerovane nulove riadky sa zmazu.
% n         pocet premennych
% m         pocet nerovnosti
% r         pocet rovnosti
% pomer     pomer aktivnych nerovnosti v optimalnom rieseni = pocet aktivnych nerovnosti / pocet nerovnosti
% con       cislo podmienenosti sigma
% rieds     pomer riedkosti sigma = pocet nenulovych prvkov sigma / sucin rozmerov sigma
% rieda     pomer riedkosti A
% riedc     pomer riedkosti C
% kp        ak true, tak kvadraticke programovanie, ak false, tak linearne
% x         optimalne riesenie ulohy KP                                  alebo LP
%              min        1/2*teta'*sigma*teta + mi'*teta                   min       mi'*teta
%           A*teta <= b                                               A*teta <= b
%           C*teta  = d                                               C*teta  = d

if ( rieda == 1 ) % husta uloha (nie riedka)
  if kp % uloha KP
    sigma = rand(n,n) ; % najprv sa ziska ortogonalna baza ulozena v matici ortog
    sigma = sigma*sigma' + speye(n) ;
    [ortog , E] = qr(sigma) ; % ortogonalna baza
    g = 1 + (con-1)*rand(n,1) ; % teraz sa vytvoria vlastne cisla sigma z intervalu (1 , con)
    g = sparse(g) ;
    sigma = ortog*diag(g)*ortog' ; % cislo podmienenosti tejto symetrickej kladne definitnej matice je priblizne con
    sigma = (sigma + sigma')/2 ; % kvoli zaokruhlovaniu
  else % uloha LP
    sigma = [] ;
  end
    A = 10*rand(m,n) - 5 ; % zlozky z (-5 , 5)
    C = 10*rand(r,n) - 5 ; % zlozky z (-5 , 5)
else % riedka uloha, privela nul v A, C da Omega nesplnajucu Predpoklad 2.2
  if kp % uloha KP
    sigma = sprandsym(n,rieds,1/con,1) ;
  else % uloha LP
    sigma = [] ;
  end
  A = 10*sprand(m,n,rieda) ;
  C = 10*sprand(r,n,riedc) ;
  % zmazanie nulovych riadkov A, C
  hladanie = sum(spones(A),2) ;
  if (( m > 0 ) && (any( hladanie == 0 )))
    nulove = ( hladanie > 0 ) ;
    A = A(nulove,:) ;
    m = size(A,1) ;
  end
  hladanie = sum(spones(C),2);
```

```
  if (( r > 0 ) && (any( hladanie == 0 )))
    nulove = ( hladanie > 0 ) ;
    C = C(nulove,:) ;
    r = size(C,1) ;
  end
  A( A > 0 ) = A( A > 0 ) - 5 ; % zlozky z (-5 , 5)
  C( C > 0 ) = C( C > 0 ) - 5 ; % zlozky z (-5 , 5)
end
plus = 1 + 4*rand(m,1) ; % = b - A*x
v = 1 + 4*rand(r,1) ; % Lagrangeove multiplikatory rovnosti
u = 1 + 4*rand(m,1) ; % Lagrangeove multiplikatory nerovnosti
x = 10*rand(n,1) - 5 ; % zlozky z (-5 , 5)
plus(1:round(pomer*m)) = 0 ; % b - A*x = 0 pre aktivne nerovnosti
d = C*x ;
b = A*x + plus ;
nula = ( (b - A*x) > 0 ) ; % Lagrangeove multiplikatory aktivnych nerovnosti su 0
u(nula) = 0 ;
if kp
  mi = - (A'*u + sigma*x + C'*v) ;
else
  mi = - (A'*u + C'*v) ;
end
end
```

```
% Algoritmus 1 pre rastuce aj klesajuce fi pre ulohu PKP (47) s kladne definitnou, symetrickou maticou sigma.
%    min        fi * teta' * sigma * teta / 2 + mi' * teta
% A*teta <= b
% C*teta  = d
% V pripade nesplnenia Predpokladu 2.2 sa pouziva postup tykajuci sa vztahov (137) - (140). Kod ma problem v pripade, ak
% privela ohraniceni naraz opusta mnozinu aktivnych ohraniceni. Vtedy nevie urcit, ktore to budu. Musi byt aspon jedna nerovnost.
% Treba odkomentovat, ci chceme pocitat nahodnu ulohu alebo nejaku nacitat.

% Vygenerovanie nahodnej ulohy KP, popis parametrov je vo funkcii generkplp. Berieme ju ako ulohu PKP s danym
% optimalnym riesenim pre fi0 = 1 .
n = 100 ;
m = 50 ;
r = 0 ;
pomer = 0.5 ;
con = 2000 ; % pre <10^7 kod funguje, pre vacsie uspesnost postupne klesa
rieds = 1 ;
rieda = 1 ;  % privelka riedkost A, C sposobuje nesplnenie Predpokladu 2.2
riedc = 1 ;
[sigma A b mi x C d] = generkplp(n,m,r,pomer,con,rieds,rieda,riedc,true) ;
ulozit = 'alg.mat' ; % nazov suboru, kam sa ulozia vysledne udaje
m = size(A,1) ;
r = size(C,1) ;

% Nacitanie uloh pouzitych v praci
% %Priklad 2.6
% sigma = [2 1 ; 1 1] ;
% mi = [-2 ; -3] ;
% A = [-1 1 ; 0 1 ; 1 0] ;
% b = [1 ; 1 ; 1] ;
% C = [] ; d = [] ; r = 0 ;
% opt = optimset('Algorithm','active-set') ; % mozne nastavenie algoritmu alebo presnosti
% x = quadprog(sigma,mi,A,b,[],[],[],[],[],opt) ; % vychodiskove optimalne riesenie teta(fi0)
% [m n] = size(A) ;
% ulozit = 'priklad.mat' ; % nazov suboru, kde sa ulozia vysledky

% Uloha s datami realnych akcii pre rozne Omega
% udaje = load('sigma_mi.mat') ; % nacitanie kovariancnej matice a vektora vynosov
% sigma = udaje.sigma ;
```

```
% mi = udaje.mi ;
% mi = - mi ; % tato uloha je (36) s opacnym znamienkom mi ako (47)
% [m n] = size(sigma) ;
% opt = optimset('Algorithm','active-set') ;  % mozne nastavenie algoritmu alebo presnosti

% % Omega1 = simplex
% A = - eye(n) ;
% b = zeros(n,1) ;
% C = ones(1,n) ;
% d = 1 ;
% r = 1 ;
% x = quadprog(sigma,mi,A,b,C,d,[],[],[],opt) ; % vychodiskove optimalne riesenie teta(fi0)
% ulozit = 'Omega1.mat'; % nazov suboru, kde sa ulozia vysledky
% % Omega 2
% A = [- eye(n) ; eye(n)] ;
% b = [0.01*ones(n,1) ; 0.5*ones(n,1)] ;
% [m n] = size(A) ;
% C = ones(1,n) ;
% d = 1 ;
% r = 1 ;
% x = quadprog(sigma,mi,A,b,C,d,[],[],[],opt) ; % vychodiskove optimalne riesenie teta(fi0)
% ulozit = 'Omega2.mat' ; % nazov suboru, kde sa ulozia vysledky
% % Omega 3
% A = [- eye(n) ; ones(1,n)];
% b = [- 0.01*ones(n,1) ; 1] ;
% [m n] = size(A);
% C = [] ;
% d = [] ;
% r = 0 ;
% x = quadprog(sigma,mi,A,b,C,d,[],[],[],opt) ; % vychodiskove optimalne riesenie teta(fi0)
% ulozit = 'Omega3.mat' ; % nazov suboru, kde sa ulozia vysledky

priestor = round(max(15,1.5*m)) ; % horny odhad pre pocet iteracii
% sem sa budu ukladat udaje z iteracii
fiz = zeros(priestor,1) ; % = φ_z^iter body zmeny K(fi); od fi(i) do fi(i+1) su platne tetac(:,i), tetas(:,i)
% zlozky optimalnych rieseni lokalne ekvivalentnych uloh na viazany extrem (84) pre primarnu ulohu
tetas = zeros(n,priestor) ; % smery
tetac = zeros(n,priestor) ; % konstantne zlozky
teta = zeros(n,priestor) ; % optimalne riesenia vo fiz
vus = zeros(m+r,priestor) ; % smery optimalnych rieseni parametrizovanej celej Lagrangeovej dualnej ulohy
vuc = zeros(m+r,priestor) ; % konstantne zlozky optimalnych rieseni parametrizovanej celej Lagrangeovej dualnej ulohy

fi0 = 1 ;
fiz(1) = fi0 ;
teta(:,1) = x ; % teta(fi0)
% parametre eps
const = 100 ; % to sa hodi zmenit pre vacsie cisla vo vstupoch alebo pre vacsi rozmer alebo ked sa stane chyba
eps1 = const*1e-8 ;
eps2 = const*1e-10 ;
eps3 = const*1e-10 ;
eps4 = const*1e-8 ;
eps5 = const*1e-12 ;
eps6 = const*1e-12 ;
eps7 = const*1e-10 ;
eps8 = const*1e-7 ;
eps9 = const*1e-10 ;
eps10 = const*1e-10 ;
% Kod nepocita nutne cely interval φ ∈ (0,∞), da sa nastavit minimalna a maximalna hodnota φ ∈ (minn,maxx)
minn = 0 ;
maxx = inf ;
koniec = false ; % koniec iterovania
i = 0 ; % iteracny index
K = find(b - A*teta(:,1) <= eps1) ; % indexy aktivnych ohraniceni typu nerovnosti
riedke = issparse(sigma) ; % Ci je riedka uloha PKP. V tom pripade sa robi riedky Choleskeho rozklad miesto obycajneho.
```

```
rovnost = ~isempty(C) ; % ci je nejaka rovnost
% priprava na iteracie; vytvoria sa Gcele, Pcele, qscele, qccele, sigma\Gcele', sigma\mi
if rovnost
  Gcele = [C ; A] ;
  qscele = - [d ; b] ;
else
  Gcele = A ;
  qscele = - b ;
end
if riedke
  pom = sigma\[-mi Gcele'] ;
  vol = pom(:,1) ; % volne minima
  SGcele = pom(:,2:end) ;
else % huste
  R = chol(sigma) ;
  pom = R\(R'\[-mi Gcele']) ;
  vol = pom(:,1) ; % volne minima
  SGcele = pom(:,2:end) ;
end
Pcele = Gcele*SGcele ;
Pcele = (Pcele + Pcele')/2 ; % kvoli zaokruhlovacim chybam
qccele = Gcele*vol ;

if ( nnz(Pcele)/numel(Pcele) > 0.1 ) % Teraz sa urci, ci sa viac oplati ''skladovat'' a pouzivat riedke
   Pcele = full(Pcele) ;             % alebo huste matice. Mozno sa da zvoli aj mensie cislo ako 0.1.
else
   Pcele = sparse(Pcele) ;
end
if ( nnz(SGcele)/numel(SGcele) > 0.1 )
   SGcele = full(SGcele) ;
else
   SGcele = sparse(SGcele) ;
end
if ( nnz(Gcele)/numel(Gcele) > 0.1 )
   Gcele = full(Gcele) ;
else
   Gcele = sparse(Gcele) ;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Algoritmus 1 pre klesajuce fi
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
while (~koniec)
i = 1 + i ;
rK = [(1:r)' ; r + K] ; % indexy rovnosti a aktivnych nerovnosti
P = Pcele(rK,rK) ; % vytvorenie P
qs = qscele(rK) ; % vytvorenie qs
qc = qccele(rK) ; % vytvorenie qc

% vyriesime rovnice P^{-1}q^s, P^{-1}q^c
if (( nnz(P)/numel(P) < 0.1 ) && ( length(rK) > 200 )) % teraz sa bude riesit system rovnic s riedkou maticou P
    P = sparse(P) ;
   [ch,p,S] = chol(P) ; % riedka Choleskeho dekompozicia; z riesenia pomocou mldivide nezistime nesplnenie Predpokladu 2.2
   if ( p==0 ) % vtedy by P mala mat plnu hodnost
     vu = S*(ch\(ch'\(S'*[qs qc]))); % smer a konstantna zlozka optimalnych v, u_lok lokalnej Lagrangeovej dualnej ulohy
     zlaOmega = false ; % ci je nesplneny Predpoklad 2.2
   else
     zlaOmega = true ; % ci je nesplneny Predpoklad 2.2
   end
else % teraz sa bude riesit system s hustou maticou P
  if (rovnost || (~isempty(K)))
    P = full(P) ;
    try
```

```
      ch = chol(P) ; % Choleskeho dekompozicia P
      vu = ch\(ch'\[qs qc]) ; % smer a konstantna zlozka optimalnych v, u_lok lokalnej Lagrangeovej dualnej ulohy
      zlaOmega = false ; % ci je nesplneny Predpoklad 2.2
    catch err % ak zlyha Choleskeho rozklad, P nie je kladne definitna - MATLAB ho neurobi pre kladne semidefinitnu
      disp('zla Omega') ;
      zlaOmega = true ; % ci je nesplneny Predpoklad 2.2
    end
  else % ak nie je ziadna rovnost a ziadna nerovnost nie je aktivna, P je prazdna
    zlaOmega = false ; % ci je nesplneny Predpoklad 2.2
  end
end

%teraz urcime fizo a smery a konstantne zlozky optimalnych ries. lokalne ekv. ulohy na viaz. extrem a celej L. dualnej ulohy
if zlaOmega % nesplnenie Predpokladu 2.2
% Postup tykajuci sa vztahov (137) - (140). Tato cast kodu bola skusana iba malo a pre male n < 100 ulohy. Pouzivaju sa P, q zo (105).
  aktt = length(K) ;
  Q = [0 ; -inf(r,1) ; sparse(aktt,1)] ; % spodne ohranicenia pre u_{lok} a fi, vztah (140)
  opti = optimset('TolX',1e-12) ; % mozne nastavenie presnosti, radsej nech je vacsia
  fivu = sparse(1,1,1,aktt + 1 + r,1) ; % optimalizovany vektor pre (138)
  W = [-qs P] ; % matica rovnosti pre linprog (139)
  lm = linprog(fivu,[],[],W,qc,Q,[],[],opti) ; % uloha (138)
  fizo = lm(1) ; % najdeny bod opustenia aktivnych ohraniceni
  opustia = find( abs(lm) < eps8) - (1 + r ) ;
  prec = opustia( opustia > 0 ) ; % tieto ohranicenia vo fizo opustaju aktivne nerovnosti
  if (~(isempty(prec)) && ( abs(fizo - fiz(i)) < eps9 )) % okamzite opustenie aktivnych ohraniceni, aby sa nedelilo velmi
                                                          % malym cislom
    fiz(i+1) = fiz(i) ; % ulozenie udajov z tejto iteracie, v tomto pripade to nemusi byt potrebne
    tetac(:,i) = teta(:,i) ;
    teta(:,i+1) = teta(:,i) ;
    vuc(rK,i) = lm(2:end) ;
    K(prec) = [] ; % indexy ohraniceni, ktore su aktivne v dalsej iteracii
    continue % mozme pokracovat dalsou iteraciou, lebo opustenie nejakych nerovnosti nastava v sucasnom fi
  end
% teraz urcime θ^s,θ^c a aj smer a konstantnu zlozku pre celu Lagrangeovu dualnu ulohu z porovnania 2
% optimalnych teta(fi1), teta(fi2) a dvoch optimalnych v(fi1), u(fi1), v(fi2), u(fi2) pre rozne fi1, fi2
  fi1 = fiz(i) ;
  fi2 = (fizo + fi1)/2 ; % moze byt hocico medzi fiz(i), fizo
% opti = optimset('Algorithm','active-set') ; % mozne nastavenie algoritmu a presnosti, ta nech je radsej vacsia
  [teta2,E1,E2,E3,lam] = quadprog(sigma*fi2,mi,[],[],Gcele(rK,:),-qs,[],[],[],opti) ; % Pre tuto hodnotu fi staci pocitat
% ulohu na viazany extrem. Staci vyriesit system rovnic, ale quadprog sa mi zdal presnejsi.
  vu2 = zeros(m+r,1) ;
  vu2(rK) = lm(2:end) ; % optimalne Lagrangeove multiplikatory pre fizo
  teta1 = teta(:,i) ;
  s = (teta1 - teta2) / (1/fi1 - 1/fi2) ; % smer optimalneho riesenia lok. ekviv. ul. na viaz. extrem θ^s
  c = teta1 - s/fi1 ; % konstantna zlozka optimalneho riesenia optimalneho riesenia lok. ekviv. ul. na viaz. extrem θ^c
  if ( i == 1) % vtedy nemame informaciu o predchadzajucich optimalnych v, u
    vu1 = zeros(m+r,1) ;
    vu1(rK) = [lam.eqlin ; lam.ineqlin];
    vus(:,i) = (vu2 - vu1)/(fizo - fi2) ;
    vuc(:,i) = vu1 - vus(:,i)*fi2 ;
  else % vtedy mame informaciu o predchadzajucich optimalnych v, u
    vu1 = vuc(:,i-1) + vus(:,i-1)*fi1 ;
    vus(:,i) = (vu2 - vu1)/(fizo - fi1) ;
    vuc(:,i) = vu1 - vus(:,i)*fi1 ;
  end

else % Predpoklad 2.2 je splneny

  if (~isempty(K)) % ak su nejake nerovnosti aktivne, urcime pre nich bod fizo
% zlozky u optimalnych rieseni lokalnej Lagrangeovej dualnej ulohy rozdelime na smer us a konstantnu zlozku uc
    us = vu(r+1:end,1) ; % smer P\qs premennych u
    uc = vu(r+1:end,2) ; % konstantna zlozka P\qc premennych u
    lm = uc + fiz(i)*us ; % hodnota Lagrangeovych multiplikatorov aktivnych ohraniceni vo fiz(i)
    klesajuce = ((us > eps5) & (uc < - eps5)) ; % ktore u s fi klesaju a ich uc je zaporne
```

```
    if (any(klesajuce))  % ci nejake u sa stane zapornym pre kladne fi
      hned = ((lm < eps6) & klesajuce) ; % ktore ohranicenie prestane byt aktivne hned; to je kvoli tomu, aby sa
                                % predislo numerickym chybam sposobenym podielom velmi malych cisel
      if (any(hned)) % nejake ohranicenie prestane byt aktivne pre sucasne fi
        fiz(i+1) = fiz(i) ; % ulozenie udajov z tejto iteracie, v tomto pripade to nemusi byt potrebne
        tetac(:,i) = teta(:,i) ;
        teta(:,i+1) = teta(:,i) ;
        vuc(rK,i) = vu(:,1)*fiz(i) + vu(:,2) ;
        K(hned) = [] ; % indexy ohraniceni, ktore su aktivne v dalsej iteracii
        continue % ideme na dalsiu iteraciu
      else % daktore nerovnosti budu opustene, ale nie hned
        kles = find(klesajuce) ;
        pod = - uc(kles)./us(kles) ; % pre ktore fi sa ktore u stava zapornym
        fizo = max(pod) ; % najvacsie fi pre ktore sa nejake u stava zapornym
        opustia = (pod > fizo - eps2) ; % tieto ohranicenia vo fizo prestanu byt aktivne
        prec = kles(opustia) ; % ich spravne indexy pre K
      end
    else
      prec = [] ; % ziadne ohranicenie neprestane byt aktivne v dalsej iteracii
    end
  end
% teraz sa urcia smer a konstantna zlozka lokalne ekvivalentnej ulohy na viazany extrem aj celej Lag. dualnej ulohy
  if isempty(P) % nie je ziadna rovnost a nie je aktivna ziadna nerovnost - volne optima
    s = vol ; % smer primarnej ulohy
    c = sparse(n,1) ; % konstantna zlozka primarnej ulohy = nulovy vektor
    prec = [] ; % ktore ohranicenie prestane byt aktivne v dalsej iteracii
  else
    if isempty(K) % su rovnosti a nie su aktivne ziadne nerovnosti
      prec = [] ; % ktore ohranicenie prestane byt aktivne v dalsej iteracii
      lmvu = [vu ; sparse(m,2)] ; % smer a konstantna zlozka optimalnych rieseni celej Lagrangeovej dualnej ulohy
    else % su rovnosti a su aktivne nejake nerovnosti
      lmvu = [vu(1:r,:) ; sparse([K ; K],[ones(length(K),1) ; 2*ones(length(K),1)],[us ; uc],m,2)] ; % smer a konstantna
    % zlozka optimalnych rieseni celej Lagrangeovej dualnej ulohy
    end
    pom = SGcele*lmvu ;
    vus(:,i) = lmvu(:,1); % smer celej L. dualnej ulohy
    vuc(:,i) = lmvu(:,2); % konstantna zlozka celej L. dualnej ulohy
    s = vol - (pom(:,2)) ; % smer primarnej ulohy, teda (93)
    c = - (pom(:,1)) ; % konstantna zlozka primarnej ulohy, teda (92)
  end
end % koniec urcovania fizo a smerov a konstantnych zloziek optim lokalne ekv. ulohy na viaz extrem a celej L. dualnej ulohy

% urcenie bodu narazu na doteraz neaktivne ohranicenia
As = A*s ;
bminAc = b - A*c ;
priblizujuce = find((As > eps4) & (bminAc > eps4)) ; % tieto ohranicenia sa v sucasnom smere s priblizuju
if ((max(abs(s))<eps3) || isempty(priblizujuce))
  fizn = inf ; % v tomto smere pre kladne fi  nenastane naraz na ziadne ohranicenie
else
  naraz = As./bminAc ; % zisti sa, na ktore ohranicenie sa kedy narazi
  fizn = max(naraz(priblizujuce)) ; % najvacsie fi, pre ktore nastane naraz na ohranicenie
end

% urcenie, ci bude skor naraz alebo opustenie aktivnych nerovnosti
if ((isempty(prec)) && (fizn == inf)) % nebude naraz ani opustenie
  koniec = true ; % koniec iterovania pre klesajuce fi
elseif ((isempty(prec)) && (fizn ~= inf)) % bude naraz a nebude opustenie
  narazenie = true ;
elseif ((~isempty(prec)) && (fizn == inf)) % nebude naraz a bude opustenie
  narazenie = false ;
else % bude naraz aj opustenie
  if (fizn < fizo) % opustenie bude skor ako naraz
    narazenie = false ;
  else % naraz bude skor ako opustenie
```

```
      narazenie = true ;
    end
  end

  % ulozime udaje z tejto iteracie a urcime, ci je koniec
  if koniec
    fiz(i+1) = minn ;
    tetas(:,i) = s ;
    tetac(:,i) = c ;
    nulove = ( abs(s) < eps7 ) ; % ak minn == 0, urcenime, ci je teta(0) konecne
    if (( minn == 0 ) && (any(nulove))) % tu nie je teta(0) konecne
      s(nulove) = 0 ;
      po = zeros(n,1) ;
      po(nulove) = (c(nulove)) ;
      po(~nulove) = sign(s(~nulove))*inf ;
      teta(:,i+1) = po ;
    elseif ( minn == 0 )  % tu je teta(0) konecne
      teta(:,i+1) = c ;
    else
      teta(:,i+1) = c + s/minn ;
    end
  elseif narazenie % tu nastava naraz na neaktivne ohranicenie
    fiz(i+1) = fizn ;
    if ( fiz(i+1) >= fiz(i) )
      disp('chyba') ; % toto sa nema stat
      break          % ale netreba zavrhovat doterajsie udaje
    end
    if ( fizn <= minn )
      koniec = true ; % pre mensie fi nechceme dalej pocitat
      fiz(i+1) = minn ;
    end
    tetas(:,i) = s ;
    tetac(:,i) = c ;
    teta(:,i+1) = c + s/fizn ;
    K = find(bminAc - As/fizn <= eps1) ; % indexy ohraniceni, ktore su aktivne v dalsej iteracii
  else % tu nastava opustenie nejakej momentalne aktivnej nerovnosti
    fiz(i+1) = fizo ;
    if (fiz(i+1) >= fiz(i))
      disp('chyba') ; % toto sa nema stat
      break          % ale netreba zavrhovat doterajsie udaje
    end
    if (fizo <= minn)
      koniec = true ; % pre mensie fi nechceme pocitat
      fiz(i+1) = minn ;
    end
    tetas(:,i) = s ;
    tetac(:,i) = c ;
    teta(:,i+1) = c + s/fizo ;
    K(prec) = [] ; % indexy ohraniceni, ktore su aktivne v dalsej iteracii
  end
  end % koniec Algoritmu 1 pre klesajuce fi
  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
  fiz = [flipud(fiz(1:i+1)) ; zeros(priestor,1)] ; % otocenie udajov a pridanie dalsieho priestoru
  tetac = [fliplr(tetac(:,1:i)) zeros(n,priestor)] ;
  tetas = [fliplr(tetas(:,1:i)) zeros(n,priestor)] ;
  teta = [fliplr(teta(:,1:i+1)) zeros(n,priestor)] ;
  vus = [fliplr(vus(:,1:i)) zeros(m+r,priestor)] ;
  vuc = [fliplr(vuc(:,1:i)) zeros(m+r,priestor)] ;

  koniec = false ;
  K = find(b - A*teta(:,i+1) <= eps1) ; % toto aj chol(P) sa da zobrat aj z prvej iteracie

  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
  % Algoritmus 1 pre rastuce fi
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
while (~koniec)
i = 1 + i ;
rK = [(1:r)' ; r + K] ; % indexy rovnosti a aktivnych nerovnosti
P = Pcele(rK,rK) ; % vytvorenie P
qs = qscele(rK) ; % vytvorenie qs
qc = qccele(rK) ; % vytvorenie qc

% vyriesime rovnice P^{-1}q^s, P^{-1}q^c
if (( nnz(P)/numel(P) < 0.1 ) && ( length(rK) > 200 )) % teraz sa bude riesit system rovnic s riedkou maticou P
    P = sparse(P) ;
   [ch,p,S] = chol(P) ; % riedka Choleskeho dekompozicia; z riesenia pomocou mldivide nezistime nesplnenie Predpokladu 2.2
   if ( p==0 ) % vtedy by P mala mat plnu hodnost
     vu = S*(ch\(ch'\(S'*[qs qc]))); % smer a konstantna zlozka optimalnych v, u_lok lokalnej Lagrangeovej dualnej ulohy
     zlaOmega = false ; % ci je nesplneny Predpoklad 2.2
   else
     zlaOmega = true ; % ci je nesplneny Predpoklad 2.2
   end
else % teraz sa bude riesit system s hustou maticou P
  if (rovnost || (~isempty(K)))
    P = full(P) ;
    try
      ch = chol(P) ; % Choleskeho dekompozicia P
      vu = ch\(ch'\[qs qc]) ; % smer a konstantna zlozka optimalnych v, u_lok lokalnej Lagrangeovej dualnej ulohy
      zlaOmega = false ; % ci je nesplneny Predpoklad 2.2
    catch err % ak zlyha Choleskeho rozklad, P nie je kladne definitna - MATLAB ho neurobi pre kladne semidefinitnu
      disp('zla Omega') ;
      zlaOmega = true ; % ci je nesplneny Predpoklad 2.2
    end
  else % ak nie je ziadna rovnost a ziadna nerovnost nie je aktivna, P je prazdna
    zlaOmega = false ; % ci je nesplneny Predpoklad 2.2
  end
end

% teraz urcime fizo a smery a konstantne zlozky optimalnych ries. lokalne ekv. ulohy na viaz. extrem a celej L. dualnej ulohy
if zlaOmega % nesplnenie Predpokladu 2.2
% Postup tykajuci sa vztahov (137) - (140). Tato cast kodu bola skusana iba malo a pre male n < 100 ulohy. Pouzivaju sa P, q zo (105).
  aktt = length(K) ;
  Q = [0 ; -inf(r,1) ; sparse(aktt,1)] ; % spodne ohranicenia pre u_{lok} a fi, vztah (140)
  opti = optimset('TolX',1e-12) ; % mozne nastavenie presnosti, radsej nech je vacsia
  fivu = sparse(1,1,-1,aktt+1+r,1) ;% optimalizovany vektor pre (138)
  W = [-qs P] ; % matica rovnosti pre linprog (139)
  lm = linprog(fivu,[],[],W,qc,Q,[],[],opti) ; % uloha (138)
  fizo = lm(1) ; % najdeny bod opustenia aktivnych ohraniceni
  opustia = find( abs(lm) < eps8 ) - (1 + r) ;
  prec = opustia( opustia > 0 ) ;  % tieto ohranicenia vo fizo opustaju aktivne nerovnosti
  if (~(isempty(prec)) &&  ( abs(fizo - fiz(i)) < eps9 ))% okamzite opustenie aktivnych ohraniceni, aby sa nedelilo
                                                        % velmi malym cislom
    fiz(i+1) = fiz(i) ; % ulozenie udajov z tejto iteracie, v tomto pripade to nemusi byt potrebne
    tetac(:,i) = teta(:,i) ;
    teta(:,i+1) = teta(:,i) ;
    vuc(rK,i) = lm(2:end) ;
    K(prec) = [] ; % indexy ohraniceni, ktore su aktivne v dalsej iteracii
    continue % mozme pokracovat dalsou iteraciou, lebo opustenie nejakych nerovnosti nastava v sucasnom fi
  end
% teraz urcime θ^s,θ^c a aj smer a konstantnu zlozku pre celu Lagrangeovu dualnu ulohu z porovnania 2
% optimalnych teta(fi1), teta(fi2) a dvoch optimalnych v(fi1), u(fi1), v(fi2), u(fi2) pre rozne fi1, fi2
% opti = optimset('Algorithm','active-set') ; % mozne nastavenie algoritmu a presnosti, ta nech je radsej vacsia
  vu2 = zeros(m+r,1) ;
  fi1 = fiz(i) ;
  vu1 = vuc(:,i-1) + vus(:,i-1)*fi1 ;
  if ( fizo > 1/eps10 ) % toto berieme ako neohranicena uloha LP
    fi2 = fi1*2 ; % moze byt hocico vacsie ako fiz(i)
    [teta2,E1,E2,E3,lambda] = quadprog(sigma*fi2,mi,[],[],Gcele(rK,:),-qs,[],[],[],opti) ;  % Pre tuto hodnotu fi staci
```

```
  % pocitat ulohu na viazany extrem. Staci vyriesit system rovnic, ale quadprog sa mi zdal presnejsi (co je cudne).
    vu2(rK) = [lambda.eqlin ; lambda.ineqlin] ; % optimalne Lagrangeove multiplikatory pre fizo z linprogu nie su spolahlive
    vus(:,i) = (vu2 - vu1)/(fi2 - fi1) ;
  else
    fi2 = (fi1 + fizo)/2 ; % moze byt hocico medzi fiz(i), fizo
    teta2 = quadprog(sigma*fi2,mi,[],[],Gcele(rK,:),-qs,[],[],[],opti) ; % Pre tuto hodnotu fi staci pocitat
  % ulohu na viazany extrem. Staci vyriesit system rovnic, ale quadprog sa mi zdal presnejsi.
    vu2(rK) = lm(2:end) ; % optimalne Lagrangeove multiplikatory pre fizo z linprogu su spolahlive
    vus(:,i) = (vu2 - vu1)/(fizo - fi1) ;
  end
  vuc(:,i) = vu1 - vus(:,i)*fi1 ;
  teta1 = teta(:,i) ;
  s = (teta1 - teta2) / (1/fi1 - 1/fi2) ; % smer optimalneho riesenia lok. ekviv. ul. na viaz. extrem $\theta^s$
  c = teta1 - s/fi1 ; % konstantna zlozka optimalneho riesenia optimalneho riesenia lok. ekviv. ul. na viaz. extrem $\theta^c$

else % Predpoklad 2.2 je splneny

  if (~isempty(K)) % ak su nejake nerovnosti aktivne, urcime pre nich bod fizo
% zlozky u optimalnych rieseni lokalnej Lagrangeovej dualnej ulohy rozdelime na smer us a konstantnu zlozku uc
    us = vu(r+1:end,1) ; % smer P\qs premennych u
    uc = vu(r+1:end,2) ; % konstantna zlozka P\qc premennych u
    lm = uc + fiz(i)*us ; % hodnota Lagrangeovych multiplikatorov aktivnych ohraniceni vo fiz(i)
    klesajuce = (us <- eps5) ;  % ktore u s fi klesaju
    if (any(klesajuce)) % nejake u sa stane zapornym
    hned = ((lm < eps6) & klesajuce) ; % ktore ohranicenie prestane byt aktivne hned; to je kvoli tomu, aby sa
                                        % predislo numerickym chybam sposobenym podielom velmi malych cisel
      if (any(hned))% nejake ohranicenie prestane byt aktivne pre sucasne fi
        fiz(i+1) = fiz(i) ; % ulozenie udajov z tejto iteracie, v tomto pripade to nemusi byt potrebne
        tetac(:,i) = teta(:,i) ;
        teta(:,i+1) = teta(:,i) ;
        vuc(rK,i) = vu(:,1)*fiz(i) + vu(:,2) ;
        K(hned) = [] ; % indexy ohraniceni, ktore su aktivne v dalsej iteracii
        continue % ideme na dalsiu iteraciu
      else % daktore nerovnosti budu opustene, ale nie hned
        kles = find(klesajuce) ;
        pod = - uc(kles)./us(kles) ; % pre ktore fi sa ktore u stava zapornym
        fizo = min(pod) ; % najmensie fi pre ktore sa nejake u stava zapornym
        opustia = (pod < fizo + eps2) ; % tieto ohranicenia vo fizo prestanu byt aktivne
        prec = kles(opustia) ; % ich spravne indexy pre K
      end
    else
      prec = [] ; % ziadne ohranicenie neprestane byt aktivne v dalsej iteracii
    end
  end
% teraz sa urcia smer a konstantna zlozka lokalne ekvivalentnej ulohy na viazany extrem aj celej Lag. dualnej ulohy
  if isempty(P) % nie je ziadna rovnost a nie je aktivna ziadna nerovnost - volne optima
    s = vol ; % smer primarnej ulohy
    c = sparse(n,1) ; % konstantna zlozka primarnej ulohy = nulovy vektor
    prec = [] ; % ktore ohranicenie prestane byt aktivne v dalsej iteracii
  else
    if isempty(K) % su rovnosti a nie su aktivne ziadne nerovnosti
      prec = [] ; % ktore ohranicenie prestane byt aktivne v dalsej iteracii
      lmvu = [vu ; sparse(m,2)] ; % smer a konstantna zlozka optimalnych rieseni celej Lagrangeovej dualnej ulohy
    else % su rovnosti a su aktivne nejake nerovnosti
      lmvu = [vu(1:r,:) ; sparse([K ; K],[ones(length(K),1) ; 2*ones(length(K),1)],[us ; uc],m,2)] ; % smer a konstantna
          % zlozka optimalnych rieseni celej Lagrangeovej dualnej ulohy
    end
    pom = SGcele*lmvu ;
    vus(:,i) = lmvu(:,1) ; % smer celej L. dualnej ulohy
    vuc(:,i) = lmvu(:,2) ; % konstantna zlozka celej L. dualnej ulohy
    s = vol - (pom(:,2)) ; % smer primarnej ulohy, teda (93)
    c = - (pom(:,1)) ; % konstantna zlozka primarnej ulohy, teda (92)
  end
end % koniec urcovania fizo a smerov a konstantnych zloziek optim lokalne ekv. ulohy na viaz extrem a celej L. dualnej ulohy
```

```

% urcenie bodu narazu na doteraz neaktivne ohranicenia
As = A*s ;
bminAc = b - A*c ;
priblizujuce = find((As < - eps4) & (bminAc < - eps4)) ;% tieto ohranicenia sa v sucasnom smere s priblizuju
if ((max(abs(s))<eps3) || isempty(priblizujuce))
  fizn = inf ; % v tomto smere nenastane naraz na ziadne ohranicenie
else
  naraz = As./bminAc ; % zisti sa na ktore ohranicenie kedy narazi
  fizn = min(naraz(priblizujuce)) ; % najmensie fi, pre ktore nastane naraz na ohranicenie
end

% urcenie, ci bude skor naraz alebo opustenie aktivnych nerovnosti
if ((isempty(prec)) && (fizn == inf))  % nebude naraz ani opustenie
  koniec = true ; % koniec iterovania pre rastuce fi
elseif ((isempty(prec)) && (fizn ~= inf)) % bude naraz a nebude opustenie
  narazenie = true ;
elseif ((~isempty(prec)) && (fizn == inf)) % nebude naraz a bude opustenie
  narazenie = false ; % nenarazi a opusti
else % bude naraz aj opustenie
  if (fizn > fizo) % opustenie bude skor ako naraz
    narazenie = false ;
  else % naraz bude skor ako opustenie
    narazenie = true ;
  end
end

% ulozime udaje z tejto iteracie a urcime, ci je koniec
if koniec
  fiz(i+1) = maxx ;
  tetas(:,i) = s ;
  tetac(:,i) = c ;
  teta(:,i+1) = c + s/maxx ; % MATLAB by mal zvladnut aj delenie nekonecnom
elseif % tu nastava naraz na neaktivne ohranicenie
  fiz(i+1) = fizn ;
  if (fiz(i+1) <= fiz(i))
    disp('chyba') ; % toto sa nema stat
    break           % ale netreba zavrhovat doterajsie udaje
  end
  if (fizn >= maxx)
    koniec = true ; % pre vacsie fi nechceme pocitat
    fiz(i+1) = maxx ;
  end
  tetas(:,i) = s ;
  tetac(:,i) = c ;
  teta(:,i+1) = c + s/fizn ;
  K = find(bminAc - As/fizn <= eps1) ; % indexy ohraniceni, ktore su aktivne v dalsej iteracii
else % tu nastava opustenie nejakej momentalne aktivnej nerovnosti
  fiz(i+1) = fizo ;
  if (fiz(i+1) <= fiz(i))
    disp('chyba') ; % toto sa nema stat
    break           % ale netreba nutne zavrhovat doterajsie udaje
  end
  if (fizo >= maxx)
    koniec = true ; % pre vacsie fi nechceme pocitat
    fiz(i+1) = minn ;
  end
  tetas(:,i) = s ;
  tetac(:,i) = c ;
  teta(:,i+1) = c + s/fizo ;
  K(prec) = [] ; % indexy ohraniceni, ktore su aktivne v dalsej iteracii
end
end % koniec Algoritmu 1 pre klesajuce fi
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
fiz = fiz(1:i+1) ; % odstranenie nevyuziteho priestoru
tetac = tetac(:,1:i) ;
tetas = tetas(:,1:i) ;
teta = teta(:,1:i+1) ;
vus = vus(:,1:i) ;
vuc = vuc(:,1:i) ;
% mozne odstranenie nepotrebnych udajov pre tie body fiz, pre ktore niektore ohranicenie okamzite opusta aktivne ohranicenia
os = find(~(diff(fiz))) ;
if (~isempty(os))
  fiz(os) = [] ;
  tetac(:,os) = [] ;
  tetas(:,os) = [] ;
  teta(:,os) = [] ;
  vus(:,os) = [] ;
  vuc(:,os) = [] ;
end
% odstranenie udajov bodu fi0, ak v nom nenastava zmena
jed = find( fiz == fi0 ) ;
if ( norm(tetas(:,jed-1)-tetas(:,jed),2) < 1e-9 )
  fiz(jed) = [] ;
  tetas(:,jed) = [] ;
  tetac(:,jed) = [] ;
  teta(:,jed) = [] ;
  vus(:,jed) = [] ;
  vuc(:,jed) = [] ;
end
% urcenie koeficientov α,β,γ funkcie λ̃(φ) zo vztahu (114)
posled = length(fiz) - 1 ;
alfa = zeros(1,posled) ;
beta = zeros(1,posled) ;
Stetac = sigma*tetac ;
Stetas = sigma*tetas ;
for j=1:posled
  alfa(j) = (tetac(:,j)'*Stetac(:,j))/2 ;
  beta(j) = (tetas(:,j)'*Stetas(:,j))/2 ;
end
beta = beta + mi'*tetas ;
gama = mi'*tetac ;
% ulozenie udajov
save(ulozit,'fiz','tetas','tetac','alfa','beta','gama','teta')
% otestovanie
q = 10*rand(10,1) ;
chyb = zeros(10,3) ;
opt = optimset('Algorithm','active-set') ;
for i=1:10
  ind = find(q(i)<fiz,1,'first') ;
  [xx,fval] = quadprog(sigma*q(i),mi,A,b,C,d,[],[],[],opt) ;
  chyb(i,1) = norm(tetac(:,ind-1) + tetas(:,ind-1)/q(i) - xx,2) ;
  chyb(i,2) = abs(alfa(ind-1)*q(i) + beta(ind-1)/q(i) + gama(ind-1) - fval) ;
  xx = quadprog(Pcele,-qscele*q(i)-qccele,[],[],[],[],[-inf(r,1);zeros(m,1)],[],[],opt) ;
  chyb(i,3) = norm(vuc(:,ind-1) + vus(:,ind-1)*q(i) - xx,2) ;
end
max(chyb)
```

```
% pocitanie PDR (200) alebo (46)
udaje = load('Omega.mat') ; % nacitanie dat z PKP vyriesenej Algoritmom 1
alfa = udaje.alfa ;         % potrebujeme koeficienty α,β,γ funkcie λ(φ)
beta = udaje.beta ;
gama = udaje.gama ;
fiz = udaje.fiz ;           % a body φ_z zmien v K(φ)

epsilon = 0.09 ;
```

```
r = 0.01 ;
N = 100 ;   % N + 1 - pocet deliacich bodov x-ovej premennej
M = 10000 ; % pocet casovych krokov

% Neukladaju sa nutne vsetky vypocitane casove vrstvy ani priestorove uzly. M a N by mali byt nasobok 100, aby sa dobre ulozili.
xx = min(100,N) ; % pocet ulozenych uzlov pre priestorovu premennu - 1
tt = min(100,M) ; % pocet ulozenych uzlov pre casovu premennu - 1

xl = log(1/15) ;
xr = 3 ;
k = (xr - xl)/N ;
x = xl:k:xr ; % delenie intervalu <xl,xr>
T = 10 ;
delta = T/M ;  % velkost casoveho kroku

casrezy = zeros(N + 1,tt + 1) ; % toto sa uklada
z = 10 ;
casrezy(:,1) = z ; % pociatocna podmienka
cas = casrezy(:,1) ; % s tym sa pocita

ro1 = delta/k/k ;
ro2 = delta/k ;
ind = zeros(N + 1,1) ; % indexy intervalu konstantnosti K(fi), z ktoreho su alfa, beta, gama
pcc = 2 ; % pocitadlo pre pocet ulozenych casrezy - ov
Mt = M/tt ;

for q=2:M+1
  minn = min(cas) ; % urcenie indexov intervalov konstantnosti K(fi) pre fi na tejto casovej vrstve
  maxx = max(cas) ;
  minn = find( minn < fiz , 1,'first') - 1 ;
  maxx = find( maxx < fiz ,1,'first') ;
  for p=minn+1:maxx
    ind(( cas <= fiz(p) ) & ( cas > fiz(p - 1) )) = p - 1 ;
  end
  lambda = alfa(ind).*cas' + beta(ind)./cas' + gama(ind) ; % lambda (fi) na tejto casovej vrstve
  D = diff(lambda)/k ;
  B = (epsilon*exp(- x)' + r).*cas + lambda'.*(1 - cas) ;
  naddiag = sparse(2:N,3:N + 1,- D(2:end),N + 1,N + 1) ;
  poddiag = sparse(2:N,1:N - 1,- D(1:end-1),N + 1,N + 1) ;
  diago = sparse(2:N,2:N,D(2:end) + D(1:end-1),N + 1,N + 1) ;
  AA = speye(N + 1) + ro1*(naddiag + poddiag + diago) ; % tridiagonalna matica urcujuca system rovnic
  AA(1,1) = 1 - k ;      % toto
  AA(1,2) = - 1 ;        % vyplyva z
  AA(N + 1,N) = - 1 ;    % podmienok (205)
  AA(N + 1,N + 1) = 1 ; % na okrajoch xl, xr
  b = (B(1:end-1) + B(2:end))/2 ;
  B = diff(b) ;
  cas = AA\([0 ; cas(2:N) ; 0] + [0 ; B ; 0]*ro2) ;
  if ( mod(q,1000) == 0 ) % sledovanie vypoctu
    q
  end
  if ( M == tt )
    casrezy(:,q) = cas ; % ulozenie kazdej casovej vrstvy
  else
    if ( mod(q,Mt) == 0 ) % ulozenie kazdej niekolkej casovej vrstvy
      casrezy(:,pcc) = cas ;
      pcc = pcc + 1 ;
    end
  end
end

Nx = N/xx ;
if ( xx < N ) % vymazanie tych x-ovych suradnic ktore nechceme ulozit
   c = casrezy(1:Nx:N+1,:) ;
```

```
  casrezy = c ;
end

t = 0:T/tt:T ;
X = xl:(xr-xl)/xx:xr ;
casrezy = fliplr(casrezy) ; % otocenie na opacny cas, ak chceme PDR (46)

[t,X] = meshgrid(t,X) ;
surf(t,X,casrezy)
shading interp
xlabel('cas')
ylabel('x')
hold on
contour(t,X,casrezy,'Linewidth',2)
hold off

save('semiimpli.mat','casrezy','xl','xr','M','N','epsilon','r','T','z','xx','tt') % ulozenie udajov
```

```
% Tento skript generuje nahodnu ulohu KP (228) alebo LP (223) a vyriesi ju. Najprv sa rozhodne, o ktory typ ulohy
% pojde a urci sa jedna z Alternativ A, B. Potom sa vymysli vhodna uloha PKP (219) - (220) a urobia sa vypocty matic
% ako Pcele, sigma\Gcele' pred spustenim samotneho iteracneho cyklu. Ten je nasledne pocitany v skripte pkp. Priebezne
% optimalne riesenie je v premennej teta1 a optimalne riesenie z predchadzajucej iteracie v premennej teta2, aby sme mali
% aspon nejaky, mozno aj dobry vysledok, ked sa stane chyba. Neberie sa ziadny ohlad na iiedkost ulohy a ak sa vyskytne
% porusenie analogie Predpokladu 2.2, dalej vypocet neprebieha. Pri hladani pripustneho bodu nie je $\widetilde{\mu}^T\widetilde{\theta} \geq -eps$ zahrnute
% medzi ohranicenia explicitne, ale pre teta1(1) >= eps koncime.

kp = true ;     % tu sa vygeneruje nahodna uloha KP
% kp = false ;  % tu sa vygeneruje nahodna uloha LP
hladanie = false ;  % Alternativa B, nehlada sa pripustny bod
% hladanie = true ; % Alternativa A, hlada sa pripustny bod

n = 800 ;
m = 400 ;
r = 400 ;
pomer = 0.5 ;
con = 2000 ;
rieds = 1 ;
rieda = 1 ;
riedc = 1 ;
[sigma A b mi x C d] = generkplp(n,m,r,pomer,con,rieds,rieda,riedc,kp) ; % vygenerovanie nahodnej ulohy
if kp
  hod = (x'*sigma*x)/2 + mi'*x ; % hodnota minimalizovanej funkcie v optimalnom rieseni
else
  hod = mi'*x ; % hodnota minimalizovanej funkcie v optimalnom rieseni
end

const = 100 ;
eps1 = const*1e-8 ;
eps2 = const*1e-10 ;
eps3 = const*1e-10 ;
eps4 = const*1e-8 ;
eps5 = const*1e-11 ;
eps6 = const*1e-12 ;
eps7 = const*1e-10 ;
eps8 = const*1e-12 ;
eps9 = const*1e-10 ;
eps10 = const*1e-10 ;
eps11 = const*1e-8 ;
eps12 = const*1e-10 ;
eps13 = const*1e-8 ;
eps14 = const*1e-3 ;
eps15 = const*1e-8 ;
```

```
eps16 = const*1e-11 ;
eps17 = const*1e-9 ;
rovnost = ~isempty(C) ;

if hladanie % ideme hladat pripustny bod
  if rovnost
    teta1 = C\d ; % tento bod splna C*teta1 = d, v praci je nazvany $\theta_p$
    kontrola = C*teta1 - d ; % skontrolujeme, ci mame naozaj bod splnajuci C*teta1 = d
    if (any(isnan(kontrola)) || (norm(kontrola,2) > 1e-6))
      disp('nepripustne kvoli rovnostiam') ;
      return
    end
  else
    teta1 = sparse(n,1) ; % = zeros(n,1), ked nie je rovnost, berieme za $\theta_p$ nuly
  end
  minimum = min(b-A*teta1) ; % v praci je nazvane w
  hladat = ( minimum < 0 ) ; % ak mame pripustny bod, nejdeme ho hladat, inak ideme

  if hladat % hladame pripustny bod pomocou ulohy (225)
    teta1 = [minimum ; teta1] ; % pociatocny bod $\theta^0$ pre ulohu (219) - (220)
    Cup = [zeros(r,1) C] ;      % upravene udaje ulohy (225)
    Aup = [ones(m,1) A] ;
    mic = [-1 ; sparse(n,1)] ;
    mis = - (teta1 + mic) ;
    volc = - mic ;              % = $-\Sigma^{-1}\mu^c, \Sigma = I$ konstantna zlozka volnych optim
    vols = - mis ;              % = $-\Sigma^{-1}\mu^c, \Sigma = I$ smer volnych optim

    if rovnost % vytvorime udaje potrebne pre iterovanie
      Gcele = [Cup ; Aup] ;
      qscele = - [d ; b] - Gcele*mis ;
    else
      Gcele = Aup ;
      qscele = - b - Gcele*mis ;
    end
    SGcele = Gcele' ;      % = sigma\Gcele', sigma = I
    Pcele = Gcele*Gcele' ;
    qccele = - Gcele*mic ;
    Pcele = (Pcele + Pcele')/2 ; % kvoli zaokruhlovacim chybam

hladasa = true ; % informacia pre cyklus v skripte pkp, hlada sa pripustny bod
pkp ; % tu je samotne iterovanie pre ulohu (219) - (220) s udajmi, ktore sme pre nu vyrobili

    t1 = teta1(2:end) ; % potencionalny pripustny bod
    nepripustne = (any( (b-A*t1) < -eps13 ) || ( norm(d-C*t1,2) > eps13 )) ; % zistime, ci je pripustny
    if nepripustne       % ak je najdeny bod vytvoreny z teta1 nepripustny, este skusime, ci sa veci nepokazili
      t2 = teta2(2:end) ; % v poslednej iteracii a ci nie je pripustny bod vytvoreny z predchadzajuceho teta1, teda teta2
      if (any( (b-A*t2) < -eps13 ) || ( norm(d-C*t2,2) > eps13 )) nie je pripustny bod vytvoreny z teta2
        disp('nepripustne') ;
        return     % nenasli sme pripustny bod
      else
        teta1 = t2 ; % nasli sme pripustny bod ako druhu az poslednu zlozku teta2
      end
    else
      teta1 = t1 ; % nasli sme pripustny bod ako druhu az poslednu zlozku teta1
    end
  end
end % koniec hladania pripustneho bodu

Aup = A ; % skript pre rozne ulohy (219) - (220) je spolocny, preto tu urcime potrebny udaj
% Teraz vytvorime udaje pre Alternativy B bez hladania pripustneho bodu a pre druhe fazy Alternativ A. Urobime pre ne aj
% vypocty, ktore potrebujeme pri iterovani.
if rovnost
  Gcele = [C ; A] ;
else
```

```
  Gcele = A ;
end
if kp % uloha KP
  if hladanie % Alternativa A pre ulohu KP
    mic = mi ;
    R = chol(sigma) ;
    pomm = R\(R'\[-mic Gcele']) ;
    volc = pomm(:,1) ;
    SGcele = pomm(:,2:end) ;
    mis = - (sigma*teta1 + mic) ;
    vols = teta1 - volc ;
    qscele = Gcele*vols ;
    qccele = Gcele*volc - [d ; b] ;
  else % Alternativa B pre ulohu KP
    R = chol(sigma) ;
    pomm = R\(R'\[-mi Gcele']) ;
    vol = pomm(:,1) ;
    SGcele = pomm(:,2:end) ;
    teta1 = vol ;
    dc = d ;
    ds = C*vol - d ;
    bc = b ;
    bs = A*vol - b + rand(m,1) ; % rand(m,1) je vektor s kladnymi zlozkami v praci nazvany z
    if rovnost
      qscele = - [ds ; bs] ;
      qccele = Gcele*vol - [dc ; bc] ;
    else
      qscele = -  bs ;
      qccele = Gcele*vol - bc ;
    end
  end
else % uloha LP
  if (~hladanie) % Alternativa B pre ulohu LP
    teta1 = -mi/norm(mi,2) ;
    bc = b ;
    bs = A*teta1 - b + rand(m,1) ; % rand(m,1) je vektor s kladnymi zlozkami v praci nazvany z
    if rovnost
      dc = d ;
      ds = C*teta1 - d ;
    end
  end
  mic = mi ;                % tieto udaje maju Alternativy A, B pre LP spolocne
  mis = - (teta1 + mic) ;
  volc = - mic ;
  vols = - mis ;
  if hladanie % Alternativa A pre ulohu LP
    if rovnost
      qscele = - ([d ; b] + Gcele*mis) ;
    else
      qscele = - (b + Gcele*mis) ;
    end
  else % Alternativa B pre ulohu LP
    if rovnost
       qscele1 = - (Gcele*mis + [dc ; bc]) ;
       qscele2 = - ([ds ; bs]) ;
    else
       qscele1 = - (Gcele*mis + bc) ;
       qscele2 = - bs ;
    end
  end
  qccele = - (Gcele*mic) ;
  SGcele = Gcele' ;
end
Pcele = Gcele*SGcele ;
```

```
Pcele = (Pcele + Pcele')/2 ; % kvoli zaokruhlovacim chybam

hladasa = false ; % informacia pre cyklus v skripte pkp, nehlada sa pripustny bod
pkp ; % tu je samotne iterovanie pre ulohu (219) - (220) s udajmi, ktore sme pre nu vyrobili

if (all(isfinite(teta1))) % ak nie je uloha LP neohranicena, porovname funkcnu hodnotu v najdenom bode
  if kp                  % s funkcnou hodnotou pre vygenerovane presne riesenie
    (teta1'*sigma*teta1)/2 + mi'*teta1 - hod
%     norm(x - teta1) % pre ulohu KP s rydzokonvexnou sigma mozme porovnat aj toto, lebo riesenie je jedine
  else
    mi'*teta1 - hod
  end
  min(b - A*teta1)
  norm(C*teta1 - d,2)
end
```

```
% Tento skript obsahuje cyklus pre ulohu PKP (219) - (220). Je volany v predchadzajucom skripte, v ktorom su
% urobene niektore pripravne vypocty a vyhodnotenie vysledkov. Podrobnejsi komentar je v skripte pre Algoritmus 1.

chi1 = 1 ; % tato hodnota parametra je vzdy v sucasnej iteracii a optimum je pre nu teta1
chi2 = inf ; % tato hodnota parametra je vzdy v predchadzajucej iteracii a optimum je pre nu teta2
teta2 = teta1 ; % ich ucelom je zachovat nejaky vysledok pre pripad, ak sa stane chyba
koniec = false ; % koniec iterovania
i = 0 ; % iteracny index
[m nup] = size(Aup) ; % rozmer ulohy, lebo uloha (225) pre hladanie pripustneho riesenia ma o 1 premennu viac

if hladanie % obe fazy oboch Alternativ A maju nemennu mnoz. pripustnych ries.
  K = find( b - Aup*teta1 <= eps1 ) ; % indexy aktivnych ohraniceni typu nerovnosti
else % obe Alternativy B maju meniacu sa mnozinu pripustnych rieseni
  K = find( bc + bs - Aup*teta1 <= eps1 ) ; % indexy aktivnych ohraniceni typu nerovnosti
end

while (~koniec) % cyklus pre klesajuce chi
i = 1 + i ;
rK = [(1:r)' ; r + K] ; % indexy rovnosti a aktivnych nerovnosti
P = Pcele(rK,rK) ; % vytvorenie P
qc = qccele(rK) ; % vytvorenie qc
if (kp || hladanie) % Alternativy A a Alternativa B pre ulohu KP maju qs
  qs = qscele(rK) ; % vytvorenie qs
else % Alternativa B pre ulohu LP ma zlozku q zavislu od chi aj od chi^2, q = qc + qs1*chi + qs2*chi^2
  qs1 = qscele1(rK) ; % vytvorenie qs1, teda zlozky zavislej od chi
  qs2 = qscele2(rK) ; % vytvorenie qs2, teda zlozky zavislej od chi^2
end

if (~isempty(P)) % na riedkost nie je brany ohlad
  try
    ch = chol(P) ;
    if (kp || hladanie) % Alternativy A a Alternativa B pre ulohu KP
      vu = ch\(ch'\[qs qc]) ;
    else % Alternativa B pre ulohu LP
      vu = ch\(ch'\[qs1 qs2 qc]) ;
    end
  catch err
    disp('zla Omega') ; % matica P nema plnu hodnost, analogia Predpokladu 2.2 nie je splnena
    return % pocitat napr. ulohu LP pomocou viacerych uloh LP v kazdej iteracii by mohlo byt zbytocne, hoci
  end % tie by na druhej strane mali v optime typicky iba 1 nerovnost aktivnu
end

if ((~isempty(K)) && (kp || hladanie)) % Ak su nejake nerovnosti aktivne a pocitame cokolvek okrem Alternativy B pre ulohu LP,
  us = vu(r+1:end,1) ;        % urcime, ktore prestanu byt a aj bod chizo podobne ako v Algoritme 1.
  uc = vu(r+1:end,2) ;
  lm = uc + chi1*us ;
```

```
  klesajuce = (( us > eps5 ) & ( uc < - eps5 )) ;
  if (any(klesajuce))
    hned = (( lm < eps6 ) & klesajuce) ; % ktore ohranicenie prestane byt aktivne hned
    if (any(hned)) % ak nejake ohranicenie prestane byt aktivne hned
      teta2 = teta1 ;
      K(hned) = [] ; % indexy ohraniceni, ktore su aktivne v dalsej iteracii
      continue % ideme na dalsiu iteraciu
    end
    kles = find(klesajuce) ;
    pod = - uc(kles)./us(kles) ;
    chizo = max(pod) ;
    opustia = ( pod > chizo - eps2 ) ;
    prec = kles(opustia) ;
  else
    prec = [] ; % ziadne ohranicenie neprestane byt aktivne
  end
end

if ((~isempty(K)) && (~(kp || hladanie))) % Ak su nejake nerovnosti aktivne Alternativu B pre ulohu LP, urcime, ktore
% prestanu byt a aj bod chizo. Budeme kvoli tomu riesit po zlozkach kvadraticke nerovnice uc + us1*chi + us2*chi^2 >= 0.
  uc = vu(r+1:end,3) ;
  us1 = vu(r+1:end,1) ;
  us2 = vu(r+1:end,2) ;
  lm = uc + chi1*us1 + (chi1^2)*us2 ; % Hodnota Lagrangeovych multiplikatorov v chi1, je nezaporna.
  klad = ( us2 > eps16 ) ; % urcime, ktore rovnice maju kvadraticky clen kladny
  zap = ( us2 < -eps16 ) ; % urcime, ktore rovnice maju kvadraticky clen zaporny
  nul = ((~klad) & (~zap)) ; % urcime, ktore rovnice maju kvadraticky clen nulovy
% Teraz urcime pre kladny, zaporny a nulovy koeficient kvadratickych rovnic bod chizo zvlast a potom vyberieme ten najvacsi.
  rast = ( us1 + (2*chi1)*us2 > eps16 ) ; % Podla derivacie urcime, ktore rovnice s klesajucim chi v chi1 klesaju.
  klesajuce1 = (nul & (us1 > eps5) & ( uc < - eps5 )) ; % linearne rovnice pre nulovy kvadr. clen, ktorych u s chi klesa
  klesajuce2 = (klad & rast) ; % kladny kvadraticky clen a u v chi1 klesa
  klesajuce3 = (zap & rast) ; % zaporny kvadraticky clen a u v chi1 klesa
  hned = (( lm < eps6 ) & (klesajuce1 | (klesajuce2 | klesajuce3))) ; % ktore ohranicenie prestane byt aktivne hned
  if (any(hned)) % ak nejake ohranicenie prestane byt aktivne hned
    teta2 = teta1 ;
    K(hned) = [] ; % indexy ohraniceni, ktore su aktivne v dalsej iteracii
    continue % pokracujeme na dalsiu iteraciu
  end
  if any(klesajuce1) % urcime chizo pre nulovy kvadraticky clen rovnako ako pre ostatne ulohy PKP
    kles1 = find(klesajuce1) ;
    pod = - uc(kles1)./us1(kles1) ;
    chizo1 = max(pod) ;
  else % ak sa pre rovnice s nulovym kvadratickym clenom ziadne u nestane zapornym,
    chizo1 = -inf ; % chizo1 dame co najmensie, aby prehralo v kazdom z neskorsich porovnani
  end
  chizo2 = -inf ;
  disk = us1.^2 - 4.*uc.*us2 ; % diskriminant pre kvadraticke rovnice
  if any(klesajuce2) % urcime chizo pre rovnice s kladnym kvadratickym clenom, ktore s klesajucim chi klesaju
    kles = (klesajuce2 & (disk >= 0)) ; % iba rovnice s nezapornym diskriminantom mozu dosiahnut nulu
    if any(kles)
      pod = - ((us1(kles)-sqrt(disk(kles))) ./ us2(kles))/2 ; % pre ktore chi sa ktore u stava zapornym
      chizo2 = max(pod(pod>0)) ; % najvacsie kladne chi, pre ktore sa nejake u stava zapornym
    end
  end
  if isempty(chizo2) % ak je najvacsie chi, pre ktore sa nejake u stava zapornym zaporne,
    chizo2 = -inf ;  % chizo2 dame co najmensie, aby prehralo v kazdom z neskorsich porovnani
  end
  chizo3 = -inf ;
  if any(zap) % urcime chizo pre rovnice so zapornym kvadratickym clenom
      pod = - ((us1(zap)-sqrt(disk(zap))) ./ us2(zap))/2 ; % pre ktore chi sa ktore u stava zapornym
      chizo3 = max(pod(pod>0)) ;  % najvacsie kladne chi, pre ktore sa nejake u stava zapornym
  end
  if isempty(chizo3) % ak je najvacsie chi, pre ktore sa nejake u stava zapornym zaporne,
    chizo3 = -inf ;  % chizo3 dame co najmensie, aby prehralo v kazdom z neskorsich porovnani
```

```
  end
  if ( (chizo2 <= chizo1) && (chizo3 <= chizo1) && ( chizo1 == -inf )) % teraz porovname vypocitane chizo
    chizo = chizo1 ; % zoberieme najvacsie alebo -inf v poslednej vetve
  elseif ( (chizo3 <= chizo2) && (chizo1 <= chizo2))
    chizo = chizo2 ;
  else
    chizo = chizo3 ;
  end
  if ( chizo == -inf ) % ak sa ziadne u nestane zapornym pre nezaporne chi
    prec = [] ;
  else % nejake u sa stane zapornym pre nezaporne chi
    rast = ( us1 + (2*chizo)*us2 > eps17 ) ; % urcime, ktore nerovnosti v chizo opustaju aktivne podobne
    opustia = (((chizo^2)*us2 + chizo*us1 + uc < eps1) & (nul | ((zap | klad) & rast))) ; % ako urcujeme
    prec = find(opustia) ; % naraz na neaktivne ohranicenia
  end
end
% teraz urcime smer a konstantnu zlozku lokalne ekvivalentnej ulohy na viazany extrem
if isempty(P) % G je prazdne <==> nie je ziadna rovnost a ziadna nerovnost nie je aktivna
  if (hladasa || ((~kp) && hladanie)) % prva faza Altetnativ A a druha faza Alternativy A pre ulohu LP
    s = volc ;
    c = vols ;
  elseif (hladanie && kp) % druha faza Alternativy A pre ulohu KP
    s = vols ;
    c = volc ;
  elseif ((~hladanie) && kp) % Alternativa B pre ulohu KP
    s = sparse(nup,1) ; % smer = nulovy vektor
    c = vol ; % konstantna zlozka = volne optimum
  else % Alternativa B pre ulohu LP
    s1 = volc ;
    c = vols ;
    s2 = sparse(n,1) ; % = nulovy vektor
  end
  prec = [] ; % ktore ohranicenie prestane byt aktivne
else % G nie je prazdne <==> bud je nejaka rovnost alebo je aktivna nejaka nerovnost
  if (hladanie || kp) % Vsetko okrem Alternativy B pre LP. Lagrangeove multiplikatory maju dve zlozky -
    if isempty(K) % konstantnu a 1 smer.
      lmvu = [vu ; sparse(m,2)] ;
      prec = [] ;
    else
      lmvu = [vu(1:r,:) ; sparse([K ; K],[ones(length(K),1) ; 2*ones(length(K),1)],[us ; uc],m,2)] ;
    end
  else % Alternativa B pre ulohu LP. Lagrangeove multiplikatory maju tri zlozky - konstantnu a 2 smery.
    if isempty(K)
      lmvu = [vu ; sparse(m,3)] ;
      prec = [] ;
    else
      lmvu = [vu(1:r,:) ; sparse([K ; K ; K],[ones(length(K),1) ; 2*ones(length(K),1) ; 3*ones(length(K),1)],[us1 ; us2 ; uc],m,3)] ;
    end
  end
  pom = SGcele*lmvu ;
  if (hladasa || ((~kp) && hladanie)) % prva faza Altetnativ A a druha faza Alternativy A pre ulohu LP
    s = volc - (pom(:,2)) ;
    c = vols - (pom(:,1)) ;
  elseif (hladanie && kp) % druha faza Alternativy A pre ulohu KP
    s = vols - (pom(:,1)) ;
    c = volc - (pom(:,2)) ;
  elseif ((~hladanie) && kp)  % Alternativa B pre ulohu KP
    s = - (pom(:,1)) ;
    c = vol - (pom(:,2)) ;
  else % Alternativa B pre ulohu LP
    s1 = volc - (pom(:,3)) ; % teta = c + s1/chi + s2*chi
    s2 = - (pom(:,2)) ;
    c = vols - (pom(:,1)) ;
  end
```

```
end
% teraz urcime chizn
if (kp || hladanie) % vsetko okrem Alternativy B pre ulohu LP
  if ((~kp) || hladanie) % Alternativy A
    As = Aup*s ;
    bminAc = b - Aup*c ;
    if (hladasa || (~kp)) % prva faza Alternativ A a druha faza Alternativy A pre ulohu LP
      priblizujuce = find(( As > eps4 ) & ( bminAc > eps4 )) ;
      if (( max(abs(s)) < eps3 ) || isempty(priblizujuce))
        chizn = inf ;
      else
        naraz = As./bminAc ;
        chizn = max(naraz(priblizujuce)) ;
      end
    else % druha faza Alternativy A pre ulohu KP
      priblizujuce = find(( As < -eps4 ) & ( bminAc < -eps4 )) ;
      if (( max(abs(s)) < eps3 ) || isempty(priblizujuce))
        chizn = inf ;
      else
        naraz = bminAc./As ;
        chizn = max(naraz(priblizujuce)) ;
      end
    end
  else % Alternativa B pre ulohu KP
    bcminAc = bc - A*c ;
    Asminbs = A*s - bs ;
    priblizujuce = find(( Asminbs < -eps4 ) & ( bcminAc < -eps4 )) ;
    if isempty(priblizujuce)
      chizn = inf ;
    else
      naraz = bcminAc./Asminbs ;
      chizn = max(naraz(priblizujuce)) ;
    end
  end
else % Alternativa B pre ulohu LP
% Po zlozkach riesime rovnice c + s1/chi + s2*chi = 0. Upravime na s2*chi^2 + c*chi + s1 = 0 a riesime podobnym sposobom
% ako pre urcenie bodu chizo.
  bcminAc = bc - A*c ;
  minAs1 = - (A*s1) ;
  bsminAs2 = bs - A*s2 ;
  klad = ( bsminAs2 > eps16 ) ; % rovnice s kladnym kvadratickym clenom
  zap = ( bsminAs2 < -eps16 ) ; % rovnice so zapornym kvadratickym clenom
  nul = ((~klad) & (~zap)) ; % rovnice s nulovym kvadratickym clenom
  rast = ( bcminAc + (2*chi1)*bsminAs2 > 0 ) ; % tieto kvadraticke rovnice v chi1 s klesajucim chi klesaju
  databliz1 = 0;
```

```
  end
  chizn3 = -inf ;
  if any(zap)  % urcime chizn rovnic so zapornym kvadratickym clenom
    naraz = - ((bcminAc(zap)-sqrt(disk(zap))) ./ bsminAs2(zap))/2 ;
    chizn3 = max(naraz(naraz>0)) ;
  end
  if isempty(chizn3) % ak sa ziadna z tychto rovnic nestane nulou,
    chizn3 = -inf ; % dame chizn3 co najmescie, aby prehralo vsetky neskorsie porovnania
  end
  if ( (chizn2 <= chizn1) && (chizn3 <= chizn1)) % porovname vypocitane chizn a urcime najvacsie alebo -inf
    chizn = chizn1 ;
  elseif ( (chizn1 <= chizn2) && (chizn3 <= chizn2))
    chizn = chizn2 ;
  else
    chizn = chizn3 ;
  end
end
% urcime, ci bude skor naraz alebo opustenie
chi2 = chi1 ; % informacie o stave tejto iteracie do dalsej iteracie
if ((isempty(prec)) && (~isfinite(chizn))) % nebude naraz ani opustenie
  koniec = true ;
  narazenie = false ;
elseif ((isempty(prec)) && (isfinite(chizn))) % bude naraz a nebude opustenie
  narazenie = true ;
  chi1 = chizn ;
elseif ((~isempty(prec)) && (~isfinite(chizn))) % nebude naraz a bude opustenie
  narazenie = false ;
  chi1 = chizo ;
else % bude naraz aj opustenie
  if (chizn < chizo) % opustenie bude skor ako naraz
    narazenie = false ;
    chi1 = chizo ;
  else % naraz bude skor ako opustenie
    narazenie = true ;
    chi1 = chizn ;
  end
end

if ( chi1 < eps15 ) % pre velmi male hodnoty chi sa moze vyskytnut numericka nestabilita veduca k chybe
  koniec = true ;
  narazenie = false ;
end

% urcime, ci je koniec alebo udaje do dalsej iteracie
if koniec
  if hladasa % prva faza Altervativ A
    if ( s(1) > eps12 ) % prva zlozka optima sa stane inf
     % disp('neohranicene pri hladani pripustneho riesenia') ;
      teta1 = c + s*(10 - c(1)/s(1)) ; % zoberieme bod s nulovou prvou zlozkou + korekcia o 10 vyrobi
    else                                  % bod s kladnou prvou zlozkou
      teta1 = c ; % mozme zobrat sucasny bod, lebo prva zlozka sa nezvacsuje
    end
  else % vsetko okrem prvej fazy Altervativy A
    if kp % druha faza Altervativy A pre ulohu KP a Altervativa B pre ulohu KP
      teta1 = c ;
    else % druha faza Altervativy A pre ulohu LP a Altervativa B pre ulohu LP
      if hladanie % druha faza Altervativy A pre ulohu LP
        nulove = ( abs(s) < eps7 ) ; % urcenie ci sa optimum meni
      else % Altervativa B pre ulohu LP
        nulove = ( abs(s1) < eps7 ) ; % urcenie ci sa optimum meni
      end
      if (~any(nulove)) % tu sa optimum meni
        disp('neohranicene') ;
        po = zeros(nup,1) ;
```

```
        po(nulove) = (c(nulove)) ;
        if hladanie % druha faza Altervativy A pre ulohu LP
          s(nulove) = 0 ;
          po(~nulove) = sign(s(~nulove))*inf ;
        else % Altervativa B pre ulohu LP
          s1(nulove) = 0 ;
          po(~nulove) = sign(s1(~nulove))*inf ;
        end
        teta1 = po ; % jedno z neohranicenych optimalnych rieseni s aspon 1 nekonecnou zlozkou
      else  % tu sa optimum nemeni
        teta1 = c ;
      end
    end
  end
elseif narazenie
  if (chi1 >= chi2)
    if hladasa
      disp('chyba pri hladani pripustneho riesenia') ; % to sa nema stat
    else
      disp('chyba') ; % to sa nema stat
    end
    break
  end
  teta2 = teta1 ; % informacie o stave tejto iteracie do dalsej iteracie
  if (hladasa || ((~kp) && hladanie)) % prva faza Alternativ A alebo druha faza Alternativy A pre ulohu LP
    teta1 = c + s/chi1 ;
    K = find(bminAc - As/chi1 <= eps1) ;
  elseif ((~hladasa) && kp) % druha faza Alternativy A pre ulohu KP alebo Alternativa B pre ulohu KP
    teta1 = c + s*chi1 ;
    if hladanie % druha faza Alternativy A pre ulohu KP
      K = find(bminAc - As*chi1 <= eps1) ;
    else % Alternativa B pre ulohu KP
      K = find(bcminAc - Asminbs*chi1 <= eps1) ;
    end
  else % Alternativa B pre ulohu LP
    teta1 = c + s1/chi1 + s2*chi1 ;
    K = find(bcminAc + minAs1/chi1 + bsminAs2*chi1 <= eps1) ;
  end
  if hladasa
    koniec = ( teta1(1) >= eps14 ) ; % toto je nahrada za absenciu explicitneho ohranicenia $\widetilde{\mu}^T\widetilde{\theta} \geq -eps$ pre ulohu (225)
  end
else
  if (chi1 >= chi2)
    if hladasa
      disp('chyba pri hladani pripustneho riesenia') ; % to sa nema stat
    else
      disp('chyba') ; % to sa nema stat
    end
    break
  end
  teta2 = teta1 ; % informacie o stave tejto iteracie do dalsej iteracie
  if (hladasa || ((~kp) && hladanie)) % prva faza Alternativ A alebo druha faza Alternativy A pre ulohu LP
    teta1 = c + s/chi1 ;
  elseif ((~hladasa) && kp) % druha faza Alternativy A pre ulohu KP alebo Alternativa B pre ulohu KP
    teta1 = c + s*chi1 ;
  else % Alternativa B pre ulohu LP
    teta1 = c + s1/chi1 + s2*chi1 ;
  end
  K(prec) = [] ;
  if hladasa
    koniec = ( teta1(1) >= eps14 ) ; % toto je nahrada za absenciu explicitneho ohranicenia $\widetilde{\mu}^T\widetilde{\theta} \geq -eps$ pre ulohu (225)
  end
end
end % koniec cyklu pre klesajuce chi
```