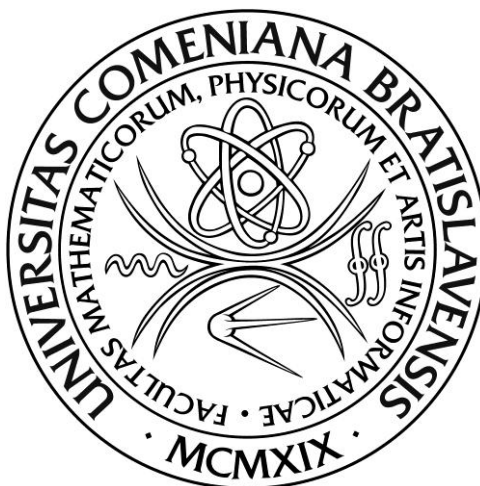


UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Analytické aproximácie pri modelovaní cien opcií

Diplomová práca

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Analytické aproximácie pri modelovaní cien opcií

Diplomová práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Školiteľ: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2014

Bc. Tomáš Karovič



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Tomáš Karovič
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Analytické aproximácie pri modelovaní cien opcií
Cieľ: Cieľom práce je analyzovať aproximácie cien opcií podobnou metodológiou, aká bola použitá pri cenách dlhopisov v modeloch okamžitej úrokovej miery napr. v prácach [Halgašová, 2011], [Zíková, 2011].

Vedúci: RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 25.01.2012

Dátum schválenia: 26.01.2012 prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne vyhlasujem, že som diplomovú prácu s názvom *Analytické aproximácie pri modelovaní cien opcií* vypracoval samostatne pod vedením školiteľa a s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 22.4.2014

.....

Pod'akovanie

Touto cestou by som sa chcel poďakovať vedúcej diplomovej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za odbornú pomoc, trpezlivosť a ochotu, cenné rady a pripomienky, poskytnuté materiály, ktoré mi veľmi pomohli pri vypracovaní tejto práce.

KAROVIC, Tomáš: Analytické aproximácie pri modelovaní cien opcií [Diplomová práca].

Univerzita Komenského v Bratislave, Mlynská dolina, 84248 Bratislava, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Vedúci práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava, 2014. /45 s./

Abstrakt

Volatilita ceny akcie sledujúca Constant Elasticity of Variance (CEV) proces má vlastnosť kolísať v čase na rozdiel od Black-Scholesovho modelu, kde je jedným z predpokladov konštantná volatilita. V našej práci sa zaoberáme oceňovaním opcií CEV modelom a ceny, ktoré takto získame, budeme konfrontovať s hodnotami nadobudnutými Black-Scholesovou formulou. Výhoda Black-Scholesovho modelu spočíva v jednoduchosti výpočtu. Vzorec pre oceňovanie opcií podľa CEV modelu obsahuje komplikované chí-kvadrát rozdelenie a dva neznáme parametre, ktoré je potrebné získať odhadom. Hodnoty opcií podľa CEV modelu možno získať aproximáciou chí-kvadrát rozdelenia. Parametre CEV modelu odhadujeme najskôr z historických cien akcií, kde využívame aproximáciu výnosov akcie riadiacej sa stochastickou diferenciálnou rovnicu CEV procesu. Odhad parametrov realizujeme aj fitovaním trhových cien opcií.

Kľúčové slová: Black-Scholesov model, Constant Elasticity of Variance (CEV) model, analytická aproximácia, cena opcie, odhad parametrov

KAROVÍČ, Tomáš: Analytical approximations in option pricing models [Master's thesis].

Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics,
Department of Applied Mathematics and Statistics.

Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava, 2014. /45 s./

Abstract

Volatility of stock price following the Constant Elasticity of Variance (CEV) process has time-varying characteristic unlike the Black-Scholes model where a fixed volatility is assumed. In this thesis we study the CEV option pricing model and we compare option prices computed by the CEV model with values calculated by the Black-Scholes formula. An advantage of the Black-Scholes model is a computational simplicity. The CEV option pricing formula includes complicated chi-squared distribution and two unknown parameters that need to be estimated. The CEV option values can be derived by approximation of chi-squared distribution. First, the CEV parameters are estimated from historical stock prices, where we use approximation of stock return following the stochastic differential equation of the CEV process. Then, parameters are estimated by fitting of market option prices.

Key words: Black-Scholes model, Constant Elasticity of Variance (CEV) model, analytical approximation, option price, estimation of parameters

Obsah

Úvod.....	8
Základné pojmy	9
1.1 História opčných derivátov.....	9
1.2 Opcie.....	10
Stochastický kalkulus a Black-Scholesov model	12
2.1 Stochastický proces a Brownov pohyb.....	12
2.2 Itóova lema	14
2.3 Black-Scholesov model	15
2.3.1 Aproximácie Black-Scholesovej rovnice.....	16
Constant elasticity of variance (CEV) model	18
3.1 CEV model - zovšeobecnenie Black-Scholesovho modelu	18
3.2 Pravdepodobnostné rozdelenie ceny akcie	20
3.2.1 Eulerova diskretizácia.....	20
3.2.2 Hustota rozdelenia ceny akcie v CEV modeli	21
3.3 Oceňovanie opcií.....	23
3.3.1 Coxov vzorec pre výpočet call opcie v CEV modeli.....	23
3.3.2 Vzorec pre európsku call opciu v CEV modeli podľa Schrodera.....	24
3.3.3 Aproximácia pre kumulatívnu distribučnú funkciu chí-kvadrát rozdelenia	28
Odhad parametrov CEV modelu	30
4.1 Odhad parametra β - Beckersovou metódou.....	30
4.2 Odhad parametrov - metóda maximálnej vierohodnosti	33
4.2.1 Aproximácia hustoty výnosov	33
4.2.2 Funkcia vierohodnosti a jej maximalizácia v softvéri R.....	34
4.2.3 Porovnanie trhových cien akcií s CEV modelom.....	35
4.3 Odhad parametrov CEV modelu založený na fitovaní cien opcií	38
Záver	43
Literatúra.....	44

Úvod

Matematické modely oceňovania derivátov získavajú počas ostatných rokov na popularite. Je to kvôli skutočnosti, že vývoj cien aktív sa vyznačuje komplikovaným, nepravidelným správaním. Pre rozličné subjekty na finančných trhoch (obchodníci, investori, brokeri) je dôležité predpovedať túto zložitú dynamiku aspoň z pravdepodobnostného hľadiska. Vo svete obchodu s aktívami opcie predstavujú obľúbený finančný nástroj. Opcia je právo, nie však povinnosť na kúpu alebo predaj aktíva v budúcom čase za vopred dohodnutú cenu. Už teda samotné právo na kúpu sa stáva hodnotou, pretože nás zvýhodňuje pred tým, kto týmto právom nedisponuje. Toto právo musí byť zaplatené na začiatku vypisovania kontraktu a cena opcie by mala byť stanovená tak, aby neznevýhodňovala kupujúceho pred predávajúcim a opačne. Aj napriek rozšírenosti opcií a ich dlhoročnej tradícií obchodníci neboli schopní adekvátne oceniť opčné deriváty. Za významný historický míľnik z hľadiska rozmachu opčných kontraktov možno považovať rok 1973, kedy Black, Scholes a Merton prezentujú exaktné vzorce, ktoré dokážu solídne ohodnotiť opcie. Veľká výhoda týchto modelov oproti modelom odvodeným neskôr spočíva v ich jednoduchosti.

Naša práca sa zameriava na alternatívu k Black-Scholesovmu modelu - Constant Elasticity of Variance (CEV) model. Prácu sme rozdelili na štyri kapitoly. V prvej kapitole sa v skratke oboznámime s históriou opčných kontraktov a predstavíme najznámejšie druhy opcií, ktoré sú obchodované na svetových burzách. Kvôli opisu vývoja ceny akcie sú nútení matematici narábať s určitými predpokladmi. Na modelovanie náhodného vývoja ceny akcie sa používa stochastická diferenciálna rovnica s driftom, čo je očakávaný výnos a s volatilitou, ktorá je fluktuačnou zložkou rovnice. Fundamenty teórie stochastických procesov pre potreby ďalšej práce zhŕňame v druhej kapitole. V tretej časti prezentujeme teoretické východiská CEV modelu. Pozrieme sa ako sa rieši stochastická diferenciálna rovnica pre cenu akcie sledujúca CEV proces diskretizačnou metódou, ďalej ukážeme pravdepodobnostné rozdelenie tejto ceny a uvedieme rôzne formuly výpočtu call opcie na akciu riadiacu sa CEV procesom. Štvrtá kapitola sa zameriava na odhad parametrov CEV modelu, ktoré sú potrebné na výpočet ceny opcie. Uvedieme dve metódy, ako možno získať odhad parametrov z historických cien akcií a metódu, ktorá odhaduje parametre na základe poznania budúcich reálnych trhových cien opcií. Bude nás zaujímať, či CEV model oceňovania opcií poskytuje lepší obraz budúcej ceny opcií ako Black-Scholesov model a zhodnotíme výhody, resp. nevýhody počítania opcií touto metódou.

Kapitola 1

Základné pojmy

V tejto časti nazrieme do histórie opčných kontraktov. Uvidíme, že finančné deriváty typu opcia majú tradíciu už niekoľko storočí pred našim letopočtom. Ďalej vysvetlíme, čo znamená vo finančnej matematike pojem opcia a uvedieme najznámejšie opcie, s ktorými sa obchoduje vo svete.

1.1 História opčných derivátov

Opčné deriváty sa prvýkrát objavujú už v starovekom Grécku a Číne pred asi 2500 rokmi. Práve zo starovekého Grécka je známy príbeh o Thalesovi z Milétu, spomenutý napr. v [15], ktorému sa ľudia posmievali kvôli chudobe. Sú presvedčení, že filozofia, ktorej sa Thales venoval, nemá úžitok v praktickom živote. Thales sa im snaží dokázať opak, preto sa uprostred zimy rozhodne lacno nakúpiť právo prvého lisovania olív od majiteľov lisov exkluzívne po skončení zberu. Pretože úroda bola v tom roku hojná a každý chcel čo najskôr lisovať, Thalesovi sa podarí svoje práva s veľkým ziskom predať. Thales je tak považovaný za jedného z prvých obchodníkov s opciami a ich autora.

Z obdobia stredoveku a novoveku je obchodovanie s opciami známe z Florencie a z Benátskej republiky [26]. Opcie sa takisto obchodovali aj v Holandsku v 17. storočí, kde sa napr. predávali opcie na tulipány, ako uvádza zdroj [24]. Podľa článku [25] až potom, čo vznikla newyorská burza v 90. rokoch 18. storočia sa klasické call, put opcie na akcie objavili aj v USA.

No hoci boli opcie veľmi obľúbené, nedokázal ich nikto solídne ohodnotiť. Prvé teoretické poznatky zabezpečujúce oceňovanie opcií vznikli v 70. rokoch 20. storočia. Obrovský vzostup opčných derivátov badať v roku 1973 vďaka práci [2] od ekonóma M. S. Scholesa a teoretického fyzika F. Blacka. Do roku 1973 sa s rôznymi druhmi opcií obchodovalo iba na trhu OTC (over-the-counter). Dôležitým podnetom pre rozmach opcií predstavuje 26. apríl 1973, kedy sa začalo obchodovať s opčnými kontraktmi na Chicago

Board Options Exchange (CBOE). Počas prvého dňa sa na tejto burze predalo 911 opcií. Najprv sa obchodovalo s call opciami na 16 rôznych akcií a s tromi rôznymi splatnosťami. Od tej doby trh s opčnými derivátmi neustále rastie. V súčasnosti počet predaných opcií presahuje priemerne 10 miliónov každý deň.

1.2 Opcie

Opcia je derivátový kontrakt, pri ktorom má držiteľ možnosť uplatnenia si nároku na určité podkladové aktívum, napr. akciu. Opcia predstavuje právo, ale nie povinnosť. Bližšie sa čitateľ o opčných kontraktoch môže dozvedieť napr. v [19], [10].

Call opcia na podkladové aktívum dáva držiteľovi právo kúpiť aktívum za vopred dohodnutú expiračnú cenu - strike price - vo vopred stanovenom budúcom čase. Pre európsku call opciu je tento čas daný fixne, v deň maturity. Americká opcia dovoľuje držiteľovi kúpiť aktívum za expiračnú cenu v akomkoľvek čase do dátumu maturity. Payoff funkcia vyzerá nasledovne $V^{call}(S, T) = \max(S_T - K, 0)$, kde K označuje expiračnú cenu a S_T je súčasná cena podkladového aktíva.

Put opcia funguje opačne ako call opcia, držiteľ má právo predat' podkladové aktívum za expiračnú cenu. Payoff funkcia pre put opciu $V^{put}(S, T) = \max(K - S_T, 0)$.

Binárna opcia alebo tiež digitálna opcia vypláca majiteľovi jednotkovú čiastku v čase maturity, ak sa súčasná cena podkladového aktíva nachádza vo vopred určenom intervale hodnôt. Payoff funkcia binárnej opcie $V^{bin}(S, T) = 1_{\{S_T \in [E_1, E_2]\}}$, kde funkcia $1_{\{A\}}$ priradí V^{bin} hodnotu 1 za predpokladu, že nastala udalosť A , inak 0.

Opcie, ktoré sme doposiaľ diskutovali, boli jednoduché v tom, že payoff funkcia uvažuje ako parameter len súčasnú cenu aktíva. Túto triedu opcií nazývame aj slabo dráhovo závislé. Trieda lookback opcií, ktoré sú dráhovo závislé a namiesto jednoduchej funkcie, payoff sú funkciami spotovej ceny trajektórie. Teoreticky tieto kontrakty vyžadujú spojitú sledovanie trajektórií, čo však v praxi nie je možné. Prakticky sa teda používa diskrétnu sledovanie.

Bariérové opcie môžu byť klasický call alebo put. Ak cena aktíva dosiahne alebo prekročí vopred stanovenú hranicu B do času maturity, tak opcia stráca platnosť a držiteľ dostane vopred dohodnutý rabat $R(t) > 0$, inak 0. Bariérové opcie rozlišujeme *down-and-out*

- dosiahne sa hranica zhora a *up-and-out* dosiahne sa hranica zdola. Formálne pre *down-and-out* $V(S, T) = 1_{\{\inf_{t \in [0, T]} S_t > B\}}$, teda ak spotová cena trajektórie zostane nad dohodnutou hranicou B počas celého časového intervalu, opcia vypláca 1. Často má bariérová funkcia exponenciálny tvar $B(t) = bEe^{-\alpha(T-t)}$ pre $b \in [0, 1]$ a $\alpha > 0$ a funkcia rabatu je daná ako $R(t) = E(1 - e^{-\beta(T-t)})$ pre $\beta > 0$.

Jednými z najbežnejších ***lookback opcií*** sú tzv. maximum-to-date call opcie, ktoré sú podobné európskej call opcii, ale namiesto spotovej ceny podkladového aktíva, expiračná cena je porovnávaná s maximom ceny aktíva až do času uplatnenia. Maximum-to-date call opcie majú payoff funkciu v tvare $V(S, T) = \max\left(\sup_{t \in [0, T]} S_t - K, 0\right)$

Pri ***aritmetických ázijských opciach*** sa využíva pri oceňovaní úroveň strednej hodnoty ich súčasnej ceny. Aritmetická ázijská call opcia používa aritmetický priemer $\hat{x}(t) = \frac{1}{t-a} \int_a^t x(s)ds$ a má nasledovnú payoff funkciu $V(S, T) = \max\left(\frac{1}{T-a} \int_a^T S(s)ds - K, 0\right)$, kde a označuje časový bod, od ktorého berieme priemer.

Kapitola 2

Stochastický kalkulus a Black-Scholesov model

Cieľom tejto kapitoly je definovať základné pojmy stochastického kalkulu, v ktorých spočíva rozhodujúci význam pri modelovaní cien akcií. Uvedieme len základné definície bez dôkazov a odvodení. Ďalej predstavíme Black-Scholesov model oceňovania call, put opcií a ukážeme, ako vieme aproximovať cenu opcie podľa tohto modelu jednoduchými aproximáciami distribučnej funkcie normalizovaného normálneho rozdelenia.

2.1 Stochastický proces a Brownov pohyb

Stochastický proces X je podľa [21] všeobecný výraz pre súbor náhodných premenných $\{X(t, \omega)\}$ závislých od času t a definovaných na rovnakom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Čas môže byť diskretný, (napr. $t = 0, 1, 2, \dots$) alebo spojitý (napr. $t \geq 0$). Pre pevný čas t sú hodnoty stochastického procesu opísané náhodnou premennou, ktorú označujeme X_t alebo $X(t)$. Pre pevne danú hodnotu $\omega \in \Omega$, náhodná premenná $X(t)$ je jediná realizácia (trajektória) procesu. Každá trajektória je funkciou času t .

Vlastnosti náhodnej premennej $X(t)$ v pevnom čase t sú opísané pravdepodobnostným rozdelením $X(t)$, ktoré je charakterizované distribučnou funkciou, t. j. pravdepodobnosťami $P(X(t) \leq x)$ pre $x \in \mathbb{R}$. Stochastický proces je potom opísaný pravdepodobnosťou

$$P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n)$$

pre $n \geq 1$ a ľubovoľný výber $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ s $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Definícia 2.1.1. (Wienerov proces) [19] *Wienerov proces (označenie W_t alebo W) je stochastický proces so spojitým časom $t \geq 0$ s nasledovnými vlastnosťami:*

- $W_0 = 0$ (s pravdepodobnosťou 1)

- $W_t \sim N(0, t)$ pre všetky $t \geq 0$. To znamená, že pre každé t náhodná premenná W_t má normálne rozdelenie so strednou hodnotou $E(W_t) = 0$ a disperziou $Var(W_t) = E(W_t^2) = t$.
- Všetky prírastky $\Delta W_t := W_{t+\Delta t} - W_t$ na neprekrývajúcich sa časových intervaloch sú nezávislé.
- W_t závisí spojito od t .

Často (napr. podľa [22]) sa namiesto druhej vlastnosti tejto definície uvádza podmienka pre prírastky. Pre $0 \leq s < t$ má platiť $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$. Tieto dve definície sú ekvivalentné. Ak v podmienke pre prírastky zoberieme $s = 0$, dostaneme $W_t \sim N(0, t)$. Naopak pri platnosti definície podľa [19] pre $W_t - W_s$ platí:

$$E(W_t - W_s) = E(W_t) - E(W_s) = 0 - 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} t = Var(W_t) &= Var((W_t - W_s) + (W_s - W_0)) = Var(W_t - W_s) + Var(W_s - W_0) = \\ &= Var(W_t - W_s) + Var(W_s) = Var(W_t - W_s) + s, \end{aligned}$$

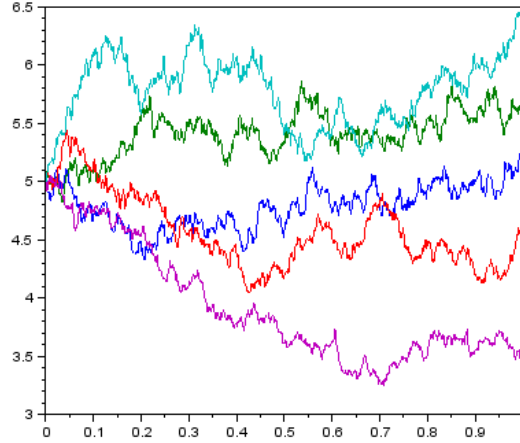
kde sme využili nezávislosť prírastkov.

Odvodenie Black-Scholesovej rovnice pre oceňovanie derivátov predpokladá, že budúca cena akcie má lognormálne rozdelenie. Táto podmienka je splnená, ak akcia sleduje geometrický Brownov pohyb.

Definícia 2.1.2. Geometrický Brownov pohyb je náhodný proces, ktorý je riešením nasledovnej stochastickej diferenciálnej rovnice [18]:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (t > 0),$$

kde μ a σ sú konštantné a je daná hodnota S_0 procesu v čase $t = 0$.



Obr.2.1.: 5 realizácií geometrického Brownovho pohybu pre cenu akcie $S_0 = 5, \mu = 0.1$ a $\sigma = 0.2$.

2.2 Itóova lema

Itóova lema je najzákladnejší nástroj pre stochastické procesy. Odpovedá na otázku, či je možné odvodiť riešenie stochastických diferenciálnych rovníc. Itóova lema predstavuje stochastický náprotivok k reťazovému pravidlu pre deterministické funkcie $X(t)$ a $Y(t) := g(X(t), t)$, ktoré vyzerá nasledovne:

$$\frac{d}{dt}g(X(t), t) = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial g}{\partial t},$$

a možno napísať

$$dX = a(X(t), t)dt \Rightarrow dg = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + a \frac{\partial g}{\partial x} \right) dt.$$

V našej práci uvádzame jednorozmernú verziu Itóovej lemy, viacrozmernú verziu obsahuje napr. [22].

Lema 2.2.1. *Predpokladajme stochastický proces $X(t)$ taký, že $dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t)$ a nech $g(x, t)$ je $C^{2,1}$ - hladká funkcia (t.j. existujú spojité $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \frac{\partial g}{\partial t}$). Potom $Y(t) := g(X(t), t)$ sa riadi Itóovým procesom s rovnakým Wienerovým procesom $W(t)$:*

$$dY(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mu(X(t), t) \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(X(t), t) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(X(t), t) \frac{\partial g}{\partial x} dW(t)$$

kde derivácie g ako aj koeficienty funkcií μ a σ vo všeobecnosti závisia od argumentov $(X(t), t)$.

2.3 Black-Scholesov model

Black-Scholesov model bol publikovaný Blackom a Scholesom v článku "*The pricing and corporate liabilities*" v roku 1973. Priniesol veľkú zmenu na finančnom trhu. Ďalším významným medzníkom z hľadiska oceňovania opčných derivátov bol Mertonov model [16]. Black-Scholesov model pracuje s nasledovnými predpokladmi [2]:

- cena akcie S_t sa riadi stochastickým procesom $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, s konštantným driftom μ a volatilitou σ ;
- neuvažujeme transakčné náklady;
- nie je možnosť bezrizikového obchodovania (arbitráže);
- uvažujeme európsky typ opcie;
- bezriziková úroková miera je konštantná a rovnaká pre všetky maturity;
- je možné spojitý obchodovať;
- rozdelenie cien aktív je lognormálne;
- akcia nevypláca dividendy.

Aby sme ocenili opciu na akciu nevyplácajúcu dividendu, potrebujeme poznať súčasnú hodnotu akcie S , expiračnú cenu K , bezrizikovú úrokovú mieru r , volatilitu akcie σ a čas zostávajúci do maturity $T - t$. Na trhu je jednoduché získať všetky vstupné premenné až na volatilitu. Vychádzajúc z Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice [19], [22]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (2.1)$$

a koncovej podmienky $C_{call}(S, T) = \max(S - K, 0)$, $C_{put}(S, T) = \max(K - S, 0)$ dostávame [1], [2] cenu európskej call, resp. put opcie na akciu bez dividendy:

$$C_{ec}(t, S_t, K, T, \sigma, r) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (2.2)$$

$$C_{ep}(t, S_t, K, T, \sigma, r) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1),$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S_t) - \ln(K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

pričom $\Phi(d)$ je distribučná funkcia normalizovaného normálneho rozdelenia, ktorú možno počítať takto:

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \int_0^d \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ d - \frac{d^3}{6} + \frac{d^5}{40} - \dots + \dots \right\}$$

Hoci Black-Scholesova rovnica je stále rozšírená na trhu, ukazuje sa, že predpoklad fixnej volatility nie je vyhovujúci pre súčasné trhy. V ďalších podkapitolách predstavíme model, ktorý nie je založený na predpoklade fixnej volatility.

2.3.1 Aproximácie Black-Scholesovej rovnice

Pri oceňovaní derivátov v zložitejších modeloch vznikajú vzorce obsahujúce komplikovanejšie funkcie, ako je distribučná funkcia $\Phi(d)$ v prípade Black-Scholesovho modelu. V mnohých iných modeloch vôbec nie je k dispozícii riešenie v explicitnom tvare. Distribučná funkcia $\Phi(d)$ predstavuje jediný problém pri výpočte ceny vanilla opcie podľa Black-Scholesovho modelu. Existuje viacero postupov ako prakticky počítať $\Phi(d)$. Pozrieme sa na tri jednoduché aproximácie $\Phi(d)$. Študované v článkoch [3], [17], [23].

V prvej aproximácii podľa článku [23] ignorujeme v rovnici všetky členy počnúc d^7 . Aproximácia vyzerá takto:

$$A_1(d) = \frac{1}{2} + \frac{d}{\sqrt{2\pi}} \cong \frac{1}{2} + 0,4(d - d^3 + d^5).$$

Výhodou tejto aproximácie je jej jednoduchosť. Aproximácia je relatívne presná pre hodnoty $d \in [0,1]$, ale jej nevýhoda je, že pre väčšie hodnoty d začína veľmi rýchlo divergovať, zatiaľ čo $\lim_{d \rightarrow \infty} \Phi(d) = 1$.

Druhá aproximácia je založená na logistickom rozdelení:

$$F(d) = \frac{1}{1 + e^{-kd}} \quad k > 0.$$

V práci [3] sa autori zaoberajú vplyvom konštanty k na presnosť aproximácie. Z práce vyplýva, že hodnota k do veľkej miery ovplyvňuje špicatosť a inflexné body rozdielu

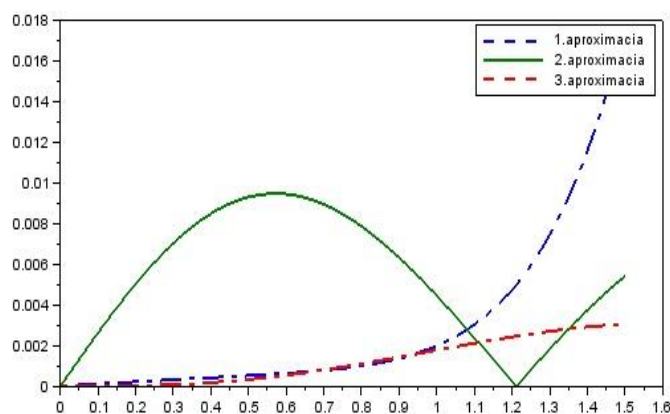
skutočnej a aproximovanej hodnoty. Pre konštantu k autori stanovili hodnotu -1,702. Druhá aproximácia $\Phi(d)$ vyzerá nasledovne:

$$A_2(d) = \frac{1}{1 + e^{-1,702d}}$$

Tretia aproximácia je uvedená v článku [17]. Jedná sa o rozdelenie navrhnuté matematikom maďarského pôvodu Pólyom pre aproximovanie $\Phi(d)$:

$$A_3(d) = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 - e^{-2d^2/\pi}} \right] \quad d \geq 0.$$

Pólyho aproximácia je veľmi presná pre veľký rozsah možných hodnôt d , najväčší absolútny rozdiel skutočnej a aproximovanej hodnoty pre túto aproximáciu je 0,003 dosiahnutý pre $d = 1,6$.



Obr. 2.2 Absolútna hodnota rozdielu skutočnej a aproximovanej hodnoty $|\Phi(d) - A_i(d)|$ pre $i = 1, 2, 3$ a $d \in [0, 1.5]$.

Kapitola 3

Constant elasticity of variance (CEV) model

V tejto kapitole sa budeme venovať CEV modelu. Najskôr uvedieme možnosti ako približne riešiť stochastickú diferenciálnu rovnicu pre vývoj ceny akcie v CEV modeli pomocou Eulerovej metódy. Ďalej ukážeme postup odvodenia hustoty pravdepodobnosti pre túto cenu. Na záver sa čitateľovi pokúsime priblížiť postup odvodenia explicitného vzorca pre riešenie ceny call opcie v CEV modeli.

3.1 CEV model - zovšeobecnenie Black-Scholesovho modelu

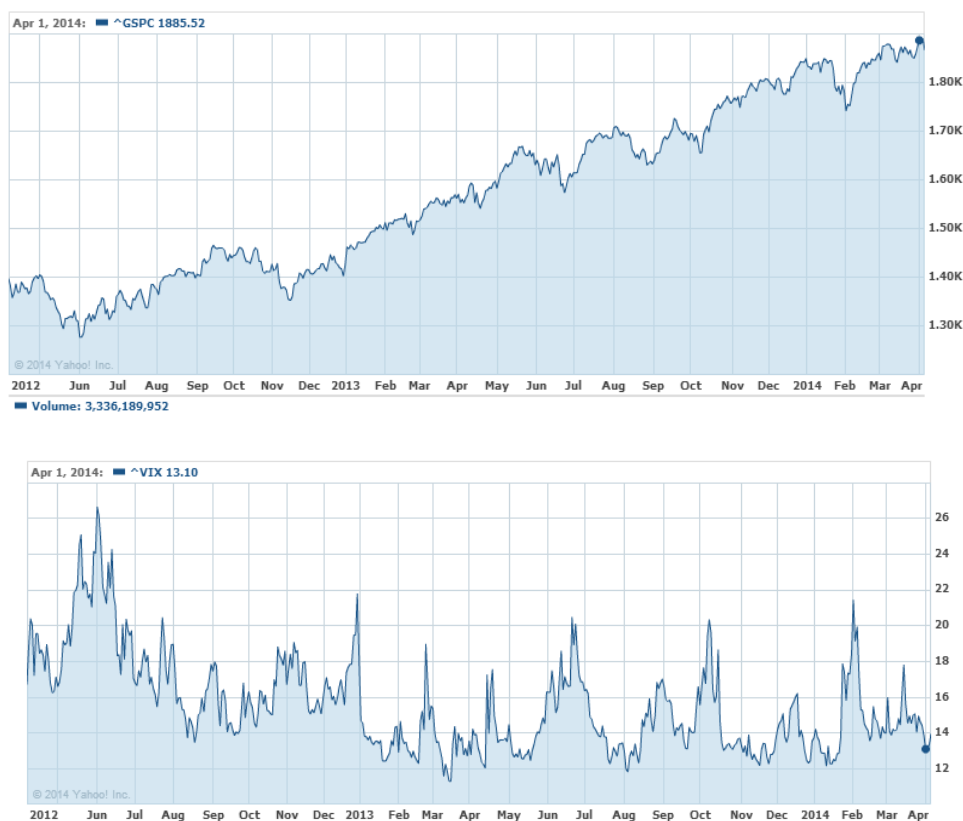
Mnoho empirických poznatkov poukazuje na, že pravdepodobnostné rozdelenie výnosov akcie je ďaleko od normálneho rozdelenia, čo motivovalo niektorých matematikov k formulovaniu modelov pre dynamiku ceny aktíva, kde volatilita nie je konštantná. Bolo navrhnutých veľa alternatív odlišných od Black-Scholesovho modelu. Možno spomenúť napríklad [9] Hestonov model (1993), kde je volatilita stanovená ako doplnková premenná opísaná stochastickou diferenciálnou rovnicou. Tieto modely zvyčajne dávajú veľmi presnú hodnotu ceny derivátu, no zároveň možnosť analytického vyjadrenia ceny opcie je do značnej miery komplikovaná prítomnosťou doplnkovej rovnice. Stochastické diferenciálne rovnice pre Hestonov model opisujúce vývoj ceny akcie a jej volatilitu vyzerajú nasledovne:

$$\begin{aligned}dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{\sigma_t} S_t dW_t^{(1)} \\dV_t &= \kappa(\theta - \sigma_t)dt + \eta\sqrt{\sigma_t}dW_t^{(2)}\end{aligned}$$

Stredná cesta medzi lognormálnym modelom a modelmi so stochastickou volatilitou je Constant Elasticity of Variance (CEV) model, kde je volatilita špecifikovaná ako funkcia ceny akcie. Tento model sa prvýkrát objavuje v prácach [5] a [6] a je ďalej prezentovaný a zlepšovaný v [14]. Významnej pozornosti sa mu dostáva vďaka tomu, že dokáže vyjadriť závislosť volatility od ceny akcie; obzvlášť je schopný zachytiť jav nazývaný pákový efekt, podľa ktorého sú ceny akcií a ich volatilita v inverznom vzťahu. Podľa niektorých štúdií CEV model ponúka presný opis ceny opcie. Napríklad [14] ukazujú, že CEV model prekonáva lognormálny model v opise akcie a ceny opcie na akciu na Chicago Board of Trade Options Exchange. Niektoré štúdie, napr. [4], dokonca tvrdia, že CEV model je lepší ako lognormálny model v oceňovaní S&P 500 Index opcií.

Na druhej strane nájdeme aj práce, v ktorých bol CEV model objektom kritiky. Napríklad, podľa analýzy [7] Chicago Board of Trade Options Exchange vykonanou Emanuelom a Macbethom (1982) CEV model prekonáva lognormálny model pri prognózovaní ceny len v časových intervaloch menších než jeden mesiac. Analýza S&P 500 [12] tvrdí, že použitie CEV model sa osvedčuje len pokrízových rokoch.

CEV model charakterizuje proces vývoja ceny akcie tak, že môže produkovať inverzný vzťah medzi cenou akcie a jej volatilitou. Lognormálny proces použitý v Black-Scholesov modeli patrí do tejto triedy modelov. CEV model predpokladá, že vzťah medzi cenou akcie S a jej volatilitou σ je daný deterministicky $\sigma(S, t) = \delta S^{(\beta-2)/2}$, teda $dS = \mu S dt + \sigma(S, t) S dW = \mu S dt + \delta S^\beta dW$. Volatilita výnosov akcie v CEV modeli má teda vlastnosť kolísať v čase, ale len vzhľadom na súčasnú cenu akcie, nie na žiadnu inú náhodnú premennú. Bližšie sa čitateľ o CEV modeli môže dozvedieť v článkoch [1], [13], [18], [20], ktoré slúžili ako podklad k tejto kapitole.



Obr.3.1: Tvz. "pákový efekt", ktorý je príčinou inverzného vzťahu medzi S&P 500 opčným indexom a volatilitou (zobrazujeme index VIX - Chicago Board Options Exchange Market Volatility Index) pozorovaný v ostatných dvoch rokoch. CEV model bol navrhnutý tak, aby v špeciálnom prípade dokázal zachytiť tento fenomén.

Definícia 3.1 *Cena akcie, ktorá sa riadi podľa CEV modelu, je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice:*

$$dS_t = \mu S_t dt + \delta S_t^{\frac{\beta}{2}} dW_t \quad t > 0, \quad (3.1)$$

Kde μ, δ, β sú konštantné s počiatočnou podmienkou pre wienerov proces $W_0 = 0$.

CEV difúzny model má dva navzájom prepojené parametre volatility - koeficient volatility δ a CEV exponent β , o ktorom predpokladáme, že je vzhľadom na čas invariantný. Ak $\beta = 2$, CEV model sa riadi geometrickým Brownovým pohybom, má teda lognormálne rozdelenie výnosov. Ak platí, že $\beta < 2$ cena akcie a jej volatilita sú v inverznom vzťahu, to znamená, že s rastúcou volatilitou klesá cena akcie. Pre $\beta > 2$ s rastúcou volatilitou rastie aj cena akcie.

3.2 Pravdepodobnostné rozdelenie ceny akcie

3.2.1 Eulerova diskretizácia

Jednou z možností, ako získať realizáciu stochastickej diferenciálnej rovnice pre CEV model, je diskretizácia. To znamená, že budeme generovať hodnoty v diskrétnych bodoch a tieto body pospájame. Veľmi známou metódou aproximácie riešenia SDR je Eulerova diskretizácia [13], [18]. Aproximácia vývoja ceny akcie v CEV modeli v spojitom čase je nasledovná:

$$S_{t_i} - S_{t_{i-1}} \approx \mu S_{t_{i-1}}(t_i - t_{i-1}) + \delta S_{t_{i-1}}^{\frac{\beta}{2}}(w_{t_i} - w_{t_{i-1}}), \quad (3.2)$$

pričom interval $[0, T]$ je rozdelený na n podintervalov:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_{n-1} < t_n = T,$$

ktoré nemusia byť nutne rovnakej dĺžky. Z vlastností Brownovho pohybu potom pre prírastky v tvare $w_{t_i} - w_{t_{i-1}}$ z (3.2) platí:

$$w_{t_i} - w_{t_{i-1}} \sim N(0, t_i - t_{i-1}).$$

Z toho dostávame nasledovné vyjadrenie pomocou normalizovaného normálneho rozdelenia:

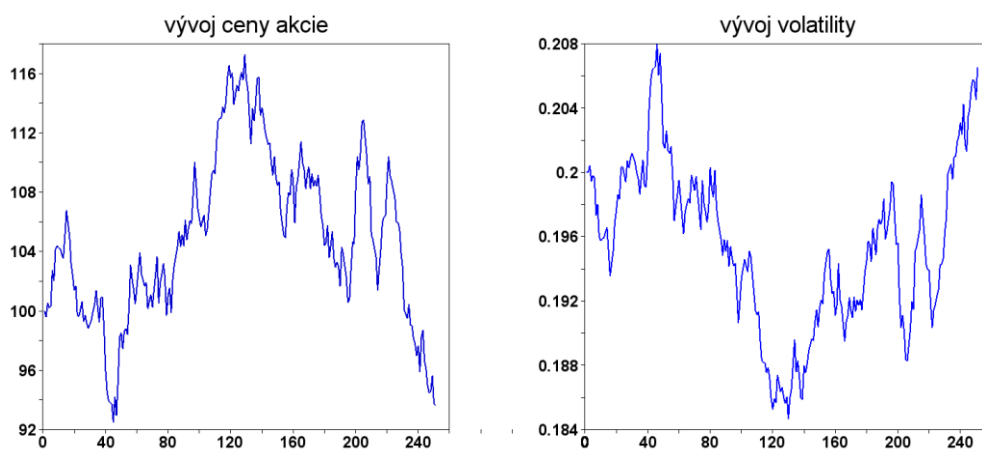
$$w_{t_i} - w_{t_{i-1}} = \sqrt{t_i - t_{i-1}} W_i,$$

kde W_i sú nezávislé náhodné premenné z $N(0,1)$ a vzťah (3.2) medzi cenou akcie v čase t_i a cenou akcie v čase t_{i-1} možno napísať:

$$S_{t_i} \approx S_{t_{i-1}} + \mu S_{t_{i-1}} \Delta_i + \delta S_{t_{i-1}}^{\frac{\beta}{2}} \sqrt{\Delta_i} W_i \quad (3.3)$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$, kde $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ pre $t_i > t_{i-1}$. Poznamenajme, že Eulerova metóda diskretizuje spojitý proces a teda aproximácia bude najlepšia v prípade, keď rozdiel $t_i - t_{i-1}$ je veľmi malý pre všetky i . Tieto aspekty majú 2 dôsledky:

- Eulerova metóda získava na presnosti so znižujúcou sa dĺžkou prírastkov Δ_i , čo vieme docieľať, ak za počet podintervalov n položíme dostatočne veľké číslo;
- pre veľké číslo n je potrebné veľký počet prírastkov, z ktorých sa skladajú jednotlivé $\{S_{t_i}\}$, a tým metóda stráca na rýchlosti.



Obr.3.2: Obrázok vľavo realizácia vývoja ceny akcie sledujúca CEV proces, kde $S_0 = 100, \mu = 0.02, T = 1, \sigma_0 = 0.2, \beta = 1$. Obrázok vpravo - meniac sa volatility ceny akcie s počiatočnou hodnotou $\sigma_0 = 0.2$.

3.2.2 Hustota rozdelenia ceny akcie v CEV modeli

V predchádzajúcej časti sme uviedli Eulerovu diskretizáciu, ktorá sa dá použiť pre ľubovoľný proces. Pre CEV proces je možné odvodiť aj presné pravdepodobnostné rozdelenie. Funkcia hustoty $f_{S_T|S_t}(s, \tau)$ bude vyjadrovať vlastnosti ceny aktíva S_T v budúcom čase T , za predpokladu, že je funkciou S_t a časového intervalu τ , medzi časmi T a t , ale taktiež závisí od CEV parametrov μ, δ a β . V nasledujúcom texte uvedieme základné body odvodenia hustoty, pričom budeme sledovať postup z [18].

Zavedením transformácie $Y = Y(S, t) = S^{2-\beta}$ pre všetky $\beta \neq 2$ a použitím Itóovej lemy získame okamžitú strednú hodnotu a disperziu pre proces Y . Z Itóovej lemy pre proces Y vyplýva:

$$\frac{\partial Y}{\partial S} = (2 - \beta)S^{1-\beta}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = (2 - \beta)(1 - \beta)S^{-\beta},$$

dostávame:

$$dY = \left[\mu(2 - \beta)Y + \frac{1}{2}\sigma^2(\beta - 1)(\beta - 2) \right] dt + \sigma^2(2 - \beta)^2 Y dW.$$

Hustota f procesu Y vyhovuje Kolmogorovej doprednej rovnici:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} [\sigma^2(2 - \beta)YP] - \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[\mu(2 - \beta)Y + \frac{1}{2}\sigma^2(\beta - 1)(\beta - 2) \right] P \right\}$$

potom $f(S_T|S_t, T > t) = f(Y_T|y_t, T > t)|J|$, kde $J = (2 - \beta)S^{1-\beta}$.

Lema 3.1 (Feller [8]). *Trieda parabolických parciálnych diferenciálnych rovníc v tvare:*

$$u_t = (axu)_{xx} - ((bx + c)u)_x,$$

kde $u = u(t, x)$ a $a > 0, b, c$ sú konštanty, má explicitný tvar riešenia v tvare:

$$f_{Y_T|Y_t}(y, \tau) = \frac{b}{a(e^{bt} - 1)} \exp \left\{ \frac{-b(y + Y_t e^{bt})}{a(e^{bt} - 1)} \right\} \left(\frac{y e^{-bt}}{Y_t} \right)^{\frac{(c-a)}{2a}} I_{1-\frac{c}{a}} \left(\frac{2b(e^{-bt} y Y_t)^{1/2}}{a(1 - e^{-bt})} \right)$$

pričom $I_\nu(x)$ je modifikovaná Besselova funkcia prvého druhu, definovaná rovnicou (3.5).

Z Fellerovej lemy pre $a = \frac{1}{2}\sigma^2(2 - \beta)^2$, $b = \mu(2 - \beta)$, $c = \frac{1}{2}\sigma^2(\beta - 1)(\beta - 2)$, $x = 1/T$, $x_0 = 1/t$ $t = \tau = (T - t)$ máme vzorec pre hustotu rozdelenia S_T danej za podmienky S_t v CEV modeli :

$$f_{S_T|S_t}(s, \tau) = (2 - \beta)k^{\frac{1}{(2-\beta)}}(x^*z^{*1-2\beta})^{\frac{1}{(4-2\beta)}}e^{-x^*-z^*}I_{\frac{1}{(2-\beta)}}(2(x^*z^*)^{1/2}), \quad (3.4)$$

kde

$$z^* = k^*s^{(2-\beta)}, \quad x^* = k^*S_t^{(2-\beta)}e^{\mu(2-\beta)\tau}, \quad k^* = \frac{2\mu}{\delta^2(2-\beta)(e^{r(2-\beta)\tau}-1)}$$

a $I_\nu(x)$ je modifikovaná Besselova funkcia prvého druhu, ktorá vyzerá nasledovne:

$$I_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \quad (3.5)$$

Hustota rozdelenia budúcej ceny akcie S_T (3.4) je špeciálnym prípadom chí-kvadrát rozdelenia. Ako uvidíme ďalej, bude slúžiť na odvodenie formule pre cenu opcie.

3.3 Oceňovanie opcií

Predpoklady pri oceňovaní opcií podľa CEV modelú sú:

- okamžitá úroková miera je známa a konštantná;
- cena akcie je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice (3.1), ktorá predpokladá, že:
 - parametre δ a β sú konštantné a známe;
 - akcia nevypláca dividendy počas celého trvania opcie;
- nepredpokladáme transakčné náklady, rozličné dane, akcie;
- opcie sú pri obchodovaní ľubovoľne deliteľné.

Jediným rozdielom medzi predpokladmi v CEV modeli a v Black-Scholesovi je teda rovnica, ktorou sa modeluje cena aktíva v čase. Všetky ostatné predpoklady sú rovnaké.

Parciálna diferenciálna rovnica pre proces sledujúci SDR (3.1) pochádza z Black-Scholesovho odvodenia položením $\sigma(S_t, t) = \delta S_t^{-1+\beta/2}$:

$$\frac{1}{2} \delta^2 S^\beta \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} - rC = 0 \quad (3.6)$$

a pre koncovú podmienku call opcie $C(S, T) = \max(S_T - K, 0)$. V ďalších výpočtoch budeme pre zjednodušenie zápisu označovať ako C_T .

3.3.1 Coxov vzorec pre výpočet call opcie v CEV modeli

V roku 1975 Cox odvodil riešenie pre PDR (3.6) v [5]:

$$C_t = S_t e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x} x^n G(n+1+1/(2-\beta), k^* K^{2-\beta})}{\Gamma(n+1)} - K e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x} x^{n+1/(2-\beta)} G(n+1, k^* K^{2-\beta})}{\Gamma(n+1+1/(2-\beta))}$$

kde $G(m, v) = (\Gamma(m))^{-1} \int_v^{\infty} e^{-u} u^{m-1} du$ je štandardná komplementárna distribučná funkcia gama rozdelenia. Táto formula kvôli prítomnosti súčtu nekonečného radu je oproti Black-Scholesovmu vzorcu oveľa komplikovanejšia.

3.3.2 Vzorec pre európsku call opciu v CEV modeli podľa Schrodera

Schroderovi sa podarilo nájsť súvis medzi Coxovým vzorcom a necentrálnym chí-kvadrát rozdelením. Nasledovná definícia podľa [18] a veta uvádza základné charakteristiky tohto rozdelenia.

Definícia 3.2 Nech $X_1, \dots, X_v$ sú náhodné premenné z $N(0,1)$ a $\delta_1, \dots, \delta_v$ sú konštanty, potom

$$Y = \sum_{i=1}^v (X_i + \delta_i)^2$$

je necentrálne chí-kvadrát rozdelenie s v stupňami voľnosti a parametrom necentrality $\lambda = \sum_{j=1}^v \delta_j^2$, ktoré budeme označovať $\chi_v'^2(\lambda)$. Ak $\delta_j = 0$ pre všetky j , potom Y je distribučná funkcia centrálného chí-kvadrát rozdelenia s v stupňami voľnosti a označením χ_v^2 .

Tvrdenie 3.1 Pre kumulatívnu distribučnú funkciu rozdelenia $\chi_v'^2(\lambda)$ platí vzorec:

$$F(x; v, \lambda) = P(\chi_v'^2(\lambda) \leq x) = e^{-\lambda/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^j}{j! 2^{v/2} \Gamma(v/2 + j)} \int_0^x y^{v/2+j-1} e^{-y/2} dy, \quad x > 0.$$

Komplementárna distribučná funkcia rozdelenia $\chi_v'^2(\lambda)$ je: $Q(x; v, \lambda) = 1 - F(x; v, \lambda)$.

Takto sa definuje chí-kvadrát rozdelenie pre neceločíselné hodnoty stupňov voľnosti, preto už nie je nutné, aby v bolo celočíselné.

Tvrdenie 3.2 Hustota rozdelenia pravdepodobnosti necentrálneho chí-kvadrát rozdelenia s parametrom necentrality λ a stupňami voľnosti v je:

$$p_{\chi_v'^2(\lambda)}(x) = \frac{1}{2} (x/\lambda)^{(v-2)/4} I_{(v-2)/2}(\sqrt{\lambda x}) e^{-(\lambda+x)/2} = P(x; v, \lambda).$$

Odvodenie ceny opcie používa rizikovo neutrálnu metódu. Pripomeňme, že hodnota európskej call opcie v čase t je:

$$C_t = e^{-r\tau} E_t^{\mathbb{Q}}(C_T^* | S_t) = e^{-r\tau} E_t^{\mathbb{Q}}(\max(0, S_T^* - K) | S_t)$$

kde diskontovanie uskutočňuje bezriziková úroková miera r a $E^{\mathbb{Q}}$ je operátor strednej hodnoty v rizikovo neutrálnom svete, v ktorom podkladové aktívum sa vyvíja podľa CEV modelu $dS_t^* = rS_t^* dt + \sigma S_t^{*\beta/2} d\xi_t^*$ vzhľadom na počiatočnú podmienku $S_t^* = S_t$. V roku 1989

Schroder dokázal spojenie medzi Coxovým vzorcom a necentrálnym chí-kvadrát rozdelením spôsobom, ktorý uvádzame nižšie a sleduje postup z [11]:

$$\begin{aligned} C_T &= E(\max(0, S_T - K)) = e^{-r\tau} \int_K^\infty f_{S_T|S_t}(s, \tau)(S_T - K) dS_T = \\ &= e^{-r\tau} \int_K^\infty S_T f_{S_T|S_t}(s, \tau) dS_T - e^{-r\tau} K \int_K^\infty f_{S_T|S_t}(s, \tau) dS_T = C_1 - C_2, \end{aligned}$$

kde sme označili $C_1 = e^{-r\tau} \int_K^\infty S_T f_{S_T|S_t}(s, \tau) dS_T$, $C_2 = e^{-r\tau} K \int_K^\infty f_{S_T|S_t}(s, \tau) dS_T$ a $\tau = T - t$.

Zmenou premennej $w = k^* S_T^{(2-\beta)}$ dostávame:

$$dS_T = (2 - \beta)^{-1} (k^*)^{-1/(2-\beta)} w^{(\beta-1)/(2-\beta)} dw.$$

Ďalej nech $y = k^* K^{(2-\beta)}$. Pre C_1, C_2 potom platí nasledovné:

$$\begin{aligned} C_1 &= e^{-r\tau} \int_y^\infty e^{-x-w} (x/w)^{1/(4-2\beta)} (w/k^*)^{1/(2-\beta)} I_{\frac{1}{(2-\beta)}}(2(xw)^{1/2}) dw \\ &= e^{-r\tau} (w/k^*)^{1/(2-\beta)} \int_y^\infty e^{-x-w} (x/w)^{1/(4-2\beta)} I_{\frac{1}{(2-\beta)}}(2(xw)^{1/2}) dw \\ &= e^{-r\tau} S_t e^{r\tau} \int_y^\infty e^{-x-w} (x/w)^{1/(4-2\beta)} I_{\frac{1}{(2-\beta)}}(2(xw)^{1/2}) dw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= K e^{-r\tau} \int_y^\infty x^{1/(4-2\beta)} (w)^{\frac{(1-2\beta+2\beta-2)}{4-2\beta}} e^{-x-w} I_{\frac{1}{(2-\beta)}}(2(xw)^{1/2}) dw \\ &= K e^{-r\tau} \int_y^\infty e^{-x-w} (x/w)^{(1)/(4-\beta)} I_{\frac{1}{(2-\beta)}}(2(xw)^{1/2}) dw \end{aligned}$$

Nech $Q(x; v, \lambda) = \int_x^\infty p_{\chi'^2_v(\lambda)}(y) dy$ a ďalej nech $w' = 2w$ a $x' = 2x$.

Z toho pre C_1 dostávame:

$$\begin{aligned} C_1 &= S_t \int_y^\infty e^{-(x+w)/2} \left(\frac{w}{x}\right)^{1/(4-2\beta)} I_{\frac{1}{(2-\beta)}}(2(xw)^{1/2}) dw \\ &= S_t \int_{2y}^\infty e^{-(x'+w')/2} \left(\frac{w'}{x'}\right)^{1/(4-2\beta)} I_{\frac{1}{(2-\beta)}}(2(x'w')^{1/2}) \frac{1}{2} dw' \\ &= S_t Q(2y; v, x') = S_t Q\left(2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x\right). \end{aligned}$$

Podobne dostávame vyjadrenie pre C_2 :

$$\begin{aligned}
C_2 &= Ke^{-r\tau} \int_y^\infty e^{-x-w} \left(\frac{x}{w}\right)^{(1)/(4-\beta)} I_{\frac{1}{(2-\beta)}}(2(xw)^{1/2}) dw \\
&= Ke^{-r\tau} \int_{2y}^\infty e^{-(x'+w')/2} \left(\frac{x'}{w'}\right)^{(1)/(4-\beta)} I_{\frac{1}{(2-\beta)}}(2(x'w')^{1/2}) \frac{1}{2} dw' \\
&= Q\left(2y; 2 - \frac{2}{2-\beta}, 2x\right)
\end{aligned}$$

Teda pre cenu európskej call opcie v CEV modeli platí:

$$C_T = S_t Q\left(2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x\right) - Ke^{-r\tau} Q\left(2y; 2 - \frac{2}{2-\beta}, 2x\right).$$

Všimnime si, že výraz $2 - 2/(2 - \beta)$ môže nadobúdať hodnoty menšie ako nula pre $\beta < 2$, čo môže zapríčiniť, že výpočet $Q(\cdot)$ nebude zrealizovateľný kvôli záporným hodnotám stupňov voľnosti. Teda je potrebné ďalej upravovať vzorec. Schroder v [20] ukázal, že distribučná funkcia chí-kvadrát rozdelenia sa dá vyjadriť cez gamma funkcie:

$$Q(2z; 2v, 2k) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} g(n+v, z) \sum_{k=1}^{\infty} g(i, k)$$

Toto tvrdenie možno využiť pri výpočte:

$$\int_y^\infty P(2z; 2v, 2k) dk = 1 - Q(2z; 2(v-1), 2y),$$

čo prináša pre C_2 tvar:

$$\begin{aligned}
C_2 &= Ke^{-r\tau} \int_y^\infty P\left(2x; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2w\right) dw \\
&= Ke^{-r\tau} Q\left(2y; 2 - \frac{2}{2-\beta}, 2x\right) = Ke^{-r\tau} \left(1 - Q\left(2x; \frac{2}{2-\beta}, 2y\right)\right).
\end{aligned}$$

Tak dostávame výsledný vzorec pre $\beta < 2$:

$$C = S_t Q\left(2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x\right) - Ke^{-r\tau} \left(1 - Q\left(2x; \frac{2}{2-\beta}, 2y\right)\right), \quad (3.8)$$

kde $Q(z; v, k)$ je komplementárna distribučná funkcia necentrálneho chí-kvadrát rozdelenia v z , v značí stupne voľnosti a k je parameter necentrality a

$$y = kK^{(2-\beta)},$$

$$x = kS^{(2-\beta)}e^{r(2-\beta)\tau},$$

$$k = \frac{2r}{\delta^2(2 - \beta)(e^{r(2-\beta)\tau} - 1)}.$$

Ak $\beta > 2$, vzorec odvodený v [7] vyzerá takto:

$$C = S_t Q\left(2x; \frac{2}{2-\beta}, 2y\right) - Ke^{-r\tau} \left(1 - Q\left(2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x\right)\right). \quad (3.9)$$

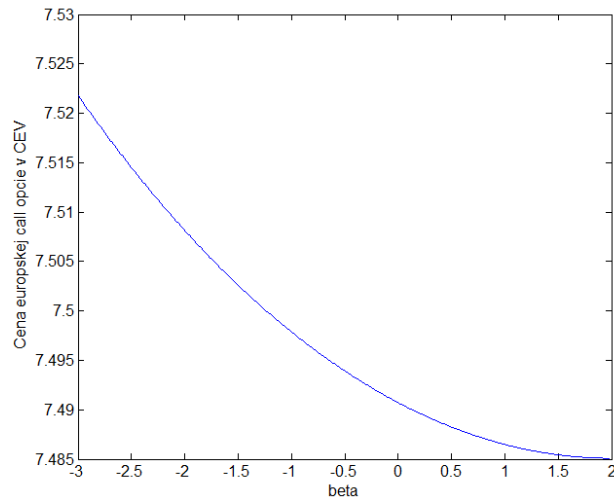
Pri počítaní ceny európskej call opcie na akciu, ktorá sa riadi procesom (3.1), teda uvažujeme šesť faktorov, ktoré vstupujú do vzorca pre jej výpočet: cena akcie, expiračná cena, expiračný čas, bezriziková úroková miera a CEV parametre β a δ .

- Expiračná cena K sa pre väčšinu aktívnych kontraktov pohybuje v rozmedzí 80%~120% ceny podkladového aktíva.
- Čas do expirácie τ je rôzny.
- Pri výbere rizikovo neutrálnej úrokovej miery r sme uvažovali v diplomovej práci krátkodobú mieru vládnych dlhopisov 0,0325% podľa (<http://www.bloomberg.com/markets/rates-bonds/government-bonds/us/>)
- Volatilitu možno pozorovať niektorými ukazovateľmi, napríklad VIX je populárna miera implikovanej volatility pre S&P 500 index opcie. Za ostatných 5 rokov kolísala medzi 10%-45%. Index je počítaný ako stý násobok druhej odmocniny očakávanej 30-dennej variancie pre S&P 500 mieru výnosu. Variancia je ročná a VIX sa vyjadruje v percentuálnych bodoch:

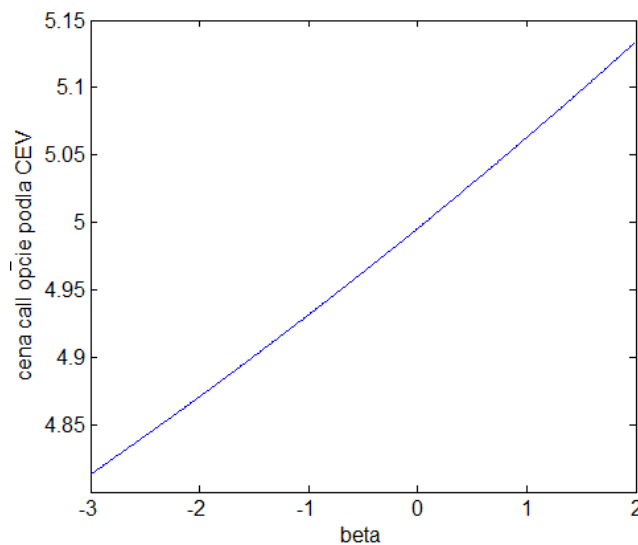
$$VIX = 100\sqrt{Var}$$

- V našej práci budeme parametre β a δ určujúce volatilitu odhadovať z dát cien akcií a opcií

Formula pre európsku call opciu v CEV modeli je komplikovanejšia ako v Black-Scholesovom modeli, pretože obsahuje kumulatívnu distribučnú funkciu necentrálneho chí-kvadrát rozdelenia $Q(z; v, k)$. Na jej výpočet sme používali príkaz `pchisq(q, df, ncp)` vo voľne dostupnom programe R, kde q je kvantil, df sú stupne voľnosti, ktoré môžu nadobúdať aj neceločíselné hodnoty a ncp je parameter necentrality.



Obr. 3.3: Obrázok ilustruje citlivosť ceny európskej call opcie počítanej CEV formulou na zmenu parametru beta. Prípad at-the-money opcie $S_0 = 100, K = 100, r = 0.0325, \tau = 1, \sigma_0 = 0.2$ a $\beta \in (-3, 2)$. Vidíme, že už malá zmena parametra beta môže spôsobiť pomerne veľké rozdiely čo do ceny opcie.



Obr. 3.4: Obrázok ilustruje citlivosť ceny európskej call opcie počítanej CEV formulou na zmenu parametru beta. Prípad out-of-the-money call opcie pre $S_0 = 100, K = 105, r = 0.0325, \tau = 1, \sigma_0 = 0.2$ a $\beta \in (-3, 2)$. Pre out-of-the-money call opcie má Black-Scholesov model tendenciu nadhodnocovať call opcie oproti CEV modelu.

3.3.3 Aproximácia pre kumulatívnu distribučnú funkciu chí-kvadrát rozdelenia

Veľmi presná aproximácia na výpočet počítanie necentrálneho chí-kvadrát rozdelenia $Q(z; v, k)$ je uvedená v článku od Schrodera [20]. Táto aproximácia dáva veľmi presné hodnoty pre široký rozsah parametrov a možno ju využiť pri výpočte vzorca (3.9):

$$\begin{aligned}
Q(z; v, k) &= Pr\left(\chi'^2 > z\right) = Pr\left(\frac{\chi'^2}{v+k} > \frac{z}{v+k}\right) = Pr\left(\left(\frac{\chi'^2}{v+k}\right)^h > \left(\frac{z}{v+k}\right)^h\right) = \\
&\cong \Phi\left(\frac{1 - hp[1 - h + 0.5(2 - h)mp] - \left(\frac{z}{v+k}\right)^h}{h\sqrt{2p(1 + mp)}}\right), \quad (3.10)
\end{aligned}$$

kde

$$h = 1 - (2/3)(v+k)(v+3k)(v+2k)^{-2},$$

$$p = (v+2k)/(v+k)^2,$$

$$m = (h-1)(1-3h)$$

a $\Phi(\cdot)$ je distribučná funkcia normalizovaného normálneho rozdelenia.

Kapitola 4

Odhad parametrov CEV modelu

Praktická implementácia Black-Scholesovho vzorca vyžaduje urobiť odhad jedného parametra - σ . Jednou z možností, ako získať tento parameter, predstavuje odhad na základe empirických poznatkov dát uvedený napr. v [22] a odhad σ sa v tomto prípade nazýva historická volatilita akcií. Ako sa ďalej uvádza v knihe [22], teoretické ceny opcií počítaných Black-Scholesovým modelom, v ktorom vystupoval odhad parametra σ získaný z minulých cien akcií, nezachytávajú dostatočne reálne trhové ceny opcií. Čo autorov knihy vedie k zavedeniu pojmu Black-Scholesova implikovaná volatilita, ktorá je získavaná z budúcich reálnych trhových cien a javí sa ako spoľahlivejší prediktor reálnej ceny opcie.

Na to aby sme mohli počítať ceny opcií v CEV modeli potrebujeme odhadnúť dva parametre β a δ . Intenzitu inverzného vzťahu medzi úrovňou ceny akcie a jej volatilitou charakterizuje parameter β . Na odhad hodnoty β použijeme reálne ceny akcií. Pre dáta, v ktorých sa odhad parametra β signifikantne odlišuje od hodnoty 2, čo zodpovedá Black-Scholesovmu modelu, budeme predpokladať, že sa cena akcie riadi procesom pre CEV model a budeme to brať ako oprávnenie použiť CEV modelu pre výpočet ceny opcie. Pre tieto dáta vypočítame ceny opcií v CEV modeli a budeme ich porovnávať s hodnotami, ktoré dostaneme výpočtom podľa Black-Scholesa.

4.1 Odhad parametra β - Beckersovou metódou

V článku [1] sa Beckers zaoberá myšlienkou využitia vzťahu medzi varianciou okamžitej miery výnosov a cenou akcie na odhad parametra β . Z rovnice (3.1) pre výnosy vyplýva:

$$Var\left(\frac{dS_t}{S_t} \middle| S_t\right) = \delta^2 S_t^{\beta-2} dt. \quad (4.1)$$

S dennými dátami, môžeme označiť $dt = 1$, prepíšeme vzťah (3.10) na tvar:

$$\ln\left(std\left(\frac{dS_t}{S_t} \middle| S_t\right)\right) = \ln\delta + \frac{\beta-2}{2} \ln S_t, \quad (4.2)$$

kde $std(.)$ označuje štandardnú odchýlku. Regresia (4.2) pre odhad parametra β je podľa článku [1] efektívna a prináša odhady pre oba parametre β ako aj pre δ . Pre praktické použitie

táto regresia však vyžaduje vylepšenie, keďže závislá premenná nie je pozorovateľná. Využívajúc fakt, že pre denné dáta je $\frac{\Delta S_t}{S_t}$ veľmi blízko k nule:

$$R_t = \ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) = \ln\left(1 + \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}\right) \approx \frac{\Delta S_t}{S_t},$$

pričom posledná aproximácia vyplýva z $\ln(1+x) \approx x$ pre $x \approx 0$. Predpokladáme, že $X = \ln(S_{t+1}/S_t)$ je pre výnosy približne normálne, a teda ako sa uvádza v [1] stredná hodnota X je úmerná jej štandardnej odchýlke. Použitím vzťahu pre X namiesto štandardnej odchýlky výnosov, odhadneme parameter β z regresie:

$$\ln\left|\ln\frac{S_{t+1}}{S_t}\right| = \gamma_0 + \gamma_1 \ln S_t + \epsilon_t, \quad (4.3)$$

kde $\hat{\beta} = 2\hat{\gamma}_1 + 2$ je odhad pre β . Hypotéza $\beta = 2$ (t.j. Black-Scholesov model) teda zodpovedá hypotéze $\gamma_1 = 0$.

Pomocou regresie (4.3) sme odhadovali parameter β z denných cien z obdobia 15.2.2012-16.2.2014 pre 25 akcií. V tabuľke sú uvedené len tie, pre ktoré hodnota parametra β vyšla menšia ako 2. Farebne vyznačené znamenajú, že príslušná p - hodnota pre koeficient $\hat{\gamma}_1$ z regresie bola vyhodnená ako signifikantná, na základe čoho sme zamietame hypotézu $\beta = 2$ o použití Black-Scholesovho modelu. Teda pre farebne vyznačené CEV difúzny model by mohol opísať správanie sa akcie lepšie než lognormálny. Podobne ako v článku [1] nám vyšli malé hodnoty R^2 štatistiky, nie je to teda výlučne vlastnosť nami použitých dát. Z tabuľky vidno, že podľa regresie (4.3) možno CEV model pre počítanie opcií využiť pre 6 aktív, čo je z percentuálneho hľadiska zásadne menej než vyšlo Beckersovi v 1980 (úspešnosť autora regresie bola v 37 zo 47 vyšiel odhad bety signifikantne menší ako dva).

Spoločnosť	odhad beta	$H_0: \gamma_1 = 0$	
		t-štatistika	p-hodnota
Maersk	1,3978	-0,534	0,593
Apple	1,4736	-0,711	0,477
Phillip	0,2306	-0,729	0,467
Google	1,156	-1,577	0,115
Loews	1,3478	-0,391	0,696
Renault	1,1962	-1,769	0,07751
Ford	1,7324	-0,511	0,609
Amazon	1,7682	-0,451	0,65219
Samsung	-0,9402	-1,805	0,0716

HP	0,5194	-3,429	0,000657
VW	0,3458	-2,976	0,00306
GM	0,8592	-2,685	0,007502
UNG	0,4336	-2,552	0,011
Sony	1,3144	-0,729	0,0317
BNP	-0,9362	-5,775	0,00044

Tab. 4.1: Tabuľka získaných odhadov beta z regresie (4.3) a pre tieto odhady príslušných t - štatistík a p - hodnôt. Červenou farbou vyznačené firmy, kde nám p - hodnota vyšla menšia ako 5%, na základe ktorej sme zamietli hypotézu H_0 o použití Black-Scholesovho modelu.

Pre ilustráciu našich úvah pri výpočte uvádzame dva výstupy z regresie. Prvý výstup (ľavý obrázok 4.1) je pre akciu firmy Amazon, kde vyšiel koeficient modelu $\hat{\beta} < 2$, ale nezamietli sme Black-Scholesov model. Na základe tohto výstupu máme v rovnici (4.3) odhad $\hat{\gamma}_1 = -0,1159$, z čoho dostávame odhad $\hat{\beta} = 2\hat{\gamma}_1 + 2 = 1,7682$. Hypotézu o Black-Scholesovom modeli testujeme pomocou t-testu signifikancie koeficientu γ_1 . Pripomeňme, že nesignifikantný koeficient γ_1 (t.j. nezamietnutá hypotéza $\gamma_1 = 0$) zodpovedá nezamietnutiu hypotézy $\beta = 2$, t.j. nezamietnutiu Black-Scholesovho modelu. V našom prípade má t - štatistika hodnotu -0,451 a príslušná p - hodnota 0,65219. To znamená, že parameter γ_1 je nesignifikantný a nezamietame hypotézu o jednoduchšom použití Black-Scholesovho modelu.

```

Call:
lm(formula = lava ~ prava)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-5.2241 -0.5804  0.2327  0.7876  2.8610

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -4.1719     1.4355  -2.906  0.00382 **
prava        -0.1159     0.2570  -0.451  0.65219
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.16 on 499 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.0004074, Adjusted R-squared: -0.001596

Call:
lm(formula = lava ~ prava)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.5614 -0.5342  0.1947  0.7584  2.0095

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -1.7203     1.0230  -1.682  0.09326 .
prava        -0.8271     0.2779  -2.976  0.00306 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.089 on 499 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.01744, Adjusted R-squared: 0.01547
F-statistic: 8.859 on 1 and 499 DF, p-value: 0.003059

```

Obr.4.1: Hodnoty príslušných štatistík získaných z regresie pre akcie firmy Amazon (vľavo) a VW (vpravo).

Druhý výstup (pravý obrázok 4.1) je pre akciu firmy VW, kde vyšiel odhad koeficientu $\hat{\beta}$ menší ako 2 a zamietli sme Black-Scholesov model. Na základe tohto výstupu máme v rovnici (4.3) odhad pre $\hat{\gamma}_1 = -0,8271$, z čoho dostávame odhad $\hat{\beta} = 0,3458$ a z hypotézy o Black-Scholesovom modeli testovanej pomocou t-testu signifikancie dostávame odhad koeficientu γ_1 . Signifikantný koeficient γ_1 (t.j. zamietnutá hypotéza $\gamma_1 = 0$) zodpovedá zamietnutiu hypotézy $\beta = 2$, t.j. zamietnutiu Black-Scholesovho modelu. V našom prípade má t - štatistika hodnotu -2,976 a príslušná p - hodnota 0,00306. To znamená, že parameter

γ_1 je signifikantný a hypotézu o vhodnosti jednoduchšieho Black-Scholesovho modelu zamietame.

4.2 Odhad parametrov - metóda maximálnej vierohodnosti

Na odhad parametrov CEV modelu nevyužijeme funkciu hustoty (3.4) rozdelenia S_T , ale túto hustotu aproximujeme odhadom funkcie hustoty výnosov z rovnice (3.1), analogicky ako sme postupovali pri Eulerovej diskretizácii. Preto nám táto metóda poskytne odhad parametrov, ktorý bude približný. Takýto postup bol použitý napr. v prácach [13], [18].

4.2.1 Aproximácia hustoty výnosov

Riešenie môžeme aproximovať Eulerovou metódou. Najskôr použitím Itóovej lemy dostávame pre $Y_t = \ln S_t$ stochastickú diferenciálnu rovnicu:

$$dY_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \delta^2 S_t^{\beta-2} \right) dt + \delta S_t^{\frac{\beta-2}{2}} d\xi_t.$$

Použitím Eulerovej aproximácie dostávame:

$$R_{t_{i+1}} = \ln S_{t_{i+1}} - \ln S_{t_i} = \left(\mu - \frac{1}{2} \delta^2 S_{t_i}^{\beta-2} \right) \Delta_i + \delta S_{t_i}^{\frac{\beta-2}{2}} \sqrt{\Delta_i} Z_{t_{i+1}},$$

kde $Z_i \sim N(0,1)$ sú nezávislé. To nám dáva odhad hustoty výnosov $R_{t_{i+1}}$ za podmienky S_{t_i} a pre parametre CEV procesu $\theta = \delta, \beta, \mu$ a časový prírastok Δt v tvare:

$$p(R_{t_{i+1}} | S_{t_i}; \theta, \Delta t) \sim N \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \delta^2 S_{t_i}^{\beta-2} \right) \Delta_i, \delta^2 S_{t_i}^{\beta-2} \Delta_i \right).$$

Z odhadnutej funkcie hustoty možno získať odhad pre parametre procesu. Metóda maximálnej vierohodnosti je jednou z možností ako získať parametre CEV modelu pre konkrétny výpočet ceny opcie. Maximalizáciu je niekedy možné urobiť analyticky, ale často je potrebné, aby bola uskutočnená numericky. Za odhad parametrov $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ sa volia odhady $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$, ktoré pri daných x_i maximalizujú funkciu $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k | x_i)$. Okrem maximalizácie funkcie vierohodnosti dát, metóda maximálnej vierohodnosti má ďalšie vlastnosti [13]:

- je asymptotická nevychýlenosť a asymptotická efektívnosť odhadov
- asymptotická normalita odhadov

- štandardné chyby majú známe rozdelenie
- invariantnosť: odhad $g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ je rovný $g(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k)$, kde $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$ sú odhady $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$

4.2.2 Funkcia vierohodnosti a jej maximalizácia v softvéri R

Funkcia vierohodnosti odhadnutej funkcie hustoty výnosov pre N pozorovaní vyzerá:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N p(R_{t_{i+1}} | S_{t_i}; \theta, \Delta t).$$

Pre výpočet jej hodnoty je zaužívané pracovať so zlogaritmovanou funkciou vierohodnosti:

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^N \ln p(R_{t_{i+1}} | S_{t_i}; \theta, \Delta t).$$

Vierohodnostná funkcia našej funkcie hustoty s predpokladom pre denné dáta $\Delta_i = \Delta t = \frac{1}{250}$ pre všetky i vyzerá:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2 S_{t_i}^{\beta-2} \Delta t}} \exp \left\{ -\frac{\left(R_{t_i} - \left(\mu - \frac{1}{2} \delta^2 S_{t_i}^{\beta-2} \right) \Delta t \right)^2}{2\delta^2 S_{t_i}^{\beta-2} \Delta t} \right\}.$$

Z ktorej jednoducho odvodíme zlogaritmovanú funkciu vierohodnosti CEV procesu:

$$\ln L(\theta) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\delta^2 \Delta t) - \frac{\beta-2}{2} \sum_{i=1}^N \ln S_{t_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\left(R_{t_i} - \left(\mu - \frac{1}{2} \delta^2 S_{t_i}^{\beta-2} \right) \Delta t \right)^2}{2\delta^2 S_{t_i}^{\beta-2} \Delta t}. \quad (4.4)$$

Odhad pre parametre $\hat{\mu}, \hat{\delta}, \hat{\beta}$ získame maximalizovaním funkcie (3.13) výberom μ, δ a β .

$$\hat{\theta} \equiv \hat{\mu}, \hat{\delta}, \hat{\beta} = \arg \max_{\theta} \ln L(\theta)$$

Pretože logaritmus je monotónne rastúca funkcia, maximalizácia zlogaritmovanej funkcie vierohodnosti (4.4) taktiež maximalizuje funkciu vierohodnosti. Analyticky maximalizovať túto funkciu nedokážeme samostatne pre každý parameter. V tomto prípade použijeme numerickú optimalizačnú funkciu `optim(c(mu_0, delta_0, beta_0), cev.likelihood, data = nase_data)$par`, ktorú nám ponúka program R. Vektor $c(\mu_0, \delta_0, \beta_0)$ je vektor počiatkových hodnôt parametrov, `cev.likelihood` je naša funkcia vierohodnosti a `data = nase_data` sú

denné historické dáta získané zo stránky

<http://finance.yahoo.com/q/hp?s=SNE+Historical+Prices>. Výber práve týchto dát - pre akciu "SONY"- odôvodňujeme tým, že odhad parametra beta z (4.1) vyšiel menší ako 2 a podľa p-hodnoty bol vyhodnotený ako signifikantne rôzny od 2. Taktiež táto akcia ponúkala možnosť kúpy dostatočnej škály opcií, čo ostatné akcie neumožňovali.

Výsledky odhadu metódou maximálnej vierohodnosti pre akciu Sony

V programe R sme vypočítali metódou maximálnej vierohodnosti odhady parametrov pre akciu. Hodnoty odhadov: $\hat{\beta} = 1,842$, $\hat{\delta} = 0,465$, $\hat{\mu} = 0,0088$. Následne sme pomocou vzorca CEV modelu ako aj pomocou aproximácie kumulatívnej distribučnej funkcie chí - kvadrát rozdelenia (3.10) vypočítali hodnoty opcií so súčasnou cenou akcie $S=17,36$ z 1.3.2014, postupne pre $\tau=95/252$, $\tau =137/252$ a $\tau =220/252$ a porovnali so skutočnými hodnotami. Z tabuliek vidieť, že aproximácia chí-kvadrát rozdelenia dáva v porovnaní s explicitnými hodnotami pri týchto hodnotách parametrov veľmi presné čísla.

4.2.3 Porovnanie trhových cien akcií s CEV modelom

Relatívna percentuálna chyba je počítaná ako:

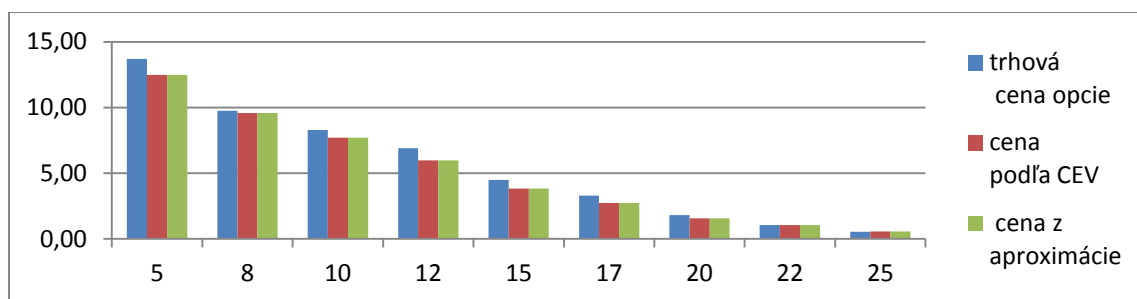
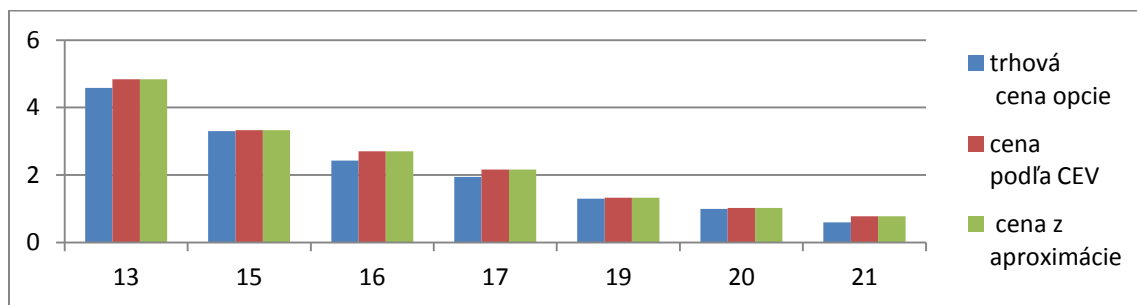
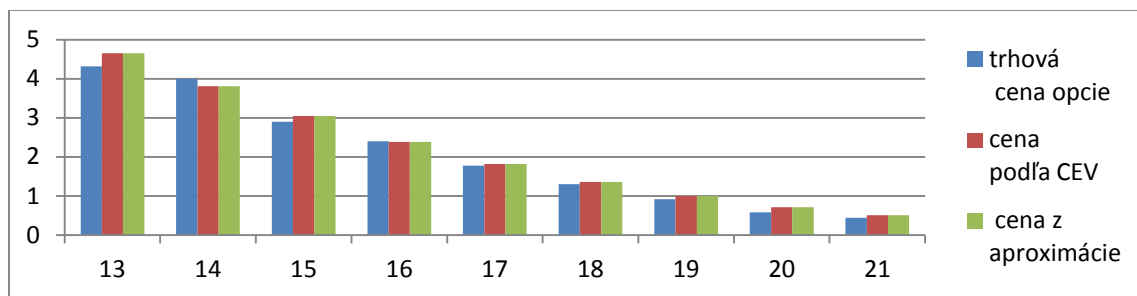
$$chyba = \frac{|experimentálna\ cena - reálna\ trhov\á\ cena|}{reálna\ trhov\á\ cena} 100\% \quad (4.5)$$

Z tabuľky vidíme, že relatívna chyba je v prípade použitia presného vzorca a aproximácie veľmi podobná. Graficky sú tieto rozdiely zobrazené na obrázku 4.2 .

dátum expirácie	expiračná cena	trhov\á cena opcie	cena podľa CEV	cena z aproximácie	relatívna chyba CEV	relatívna chyba apro.
19.7.2014	13	4,32	4,6532033	4,653207	7,713039%	7,713125%
	14	4	3,8098096	3,8098072	4,754760%	4,754820%
	15	2,9	3,0484414	3,048437	5,118669%	5,118517%
	16	2,4	2,3833316	2,3833228	0,694517%	0,694883%
	17	1,78	1,8213319	1,8213201	2,322017%	2,321354%
	18	1,3	1,3616196	1,3616073	4,739969%	4,739023%
	19	0,92	0,9969772	0,9969665	8,367087%	8,365924%
	20	0,58	0,7159147	0,7159072	23,433569%	23,432276%
	21	0,44	0,5049042	0,5049005	14,750955%	14,750114%
18.10.2014	13	4,58	4,8376118	4,8376148	5,624712%	5,624777%
	15	3,3	3,334174	3,3341642	1,035576%	1,035279%
	16	2,43	2,7064972	2,7064814	11,378486%	11,377835%
	17	1,95	2,1660523	2,1660327	11,079605%	11,078600%

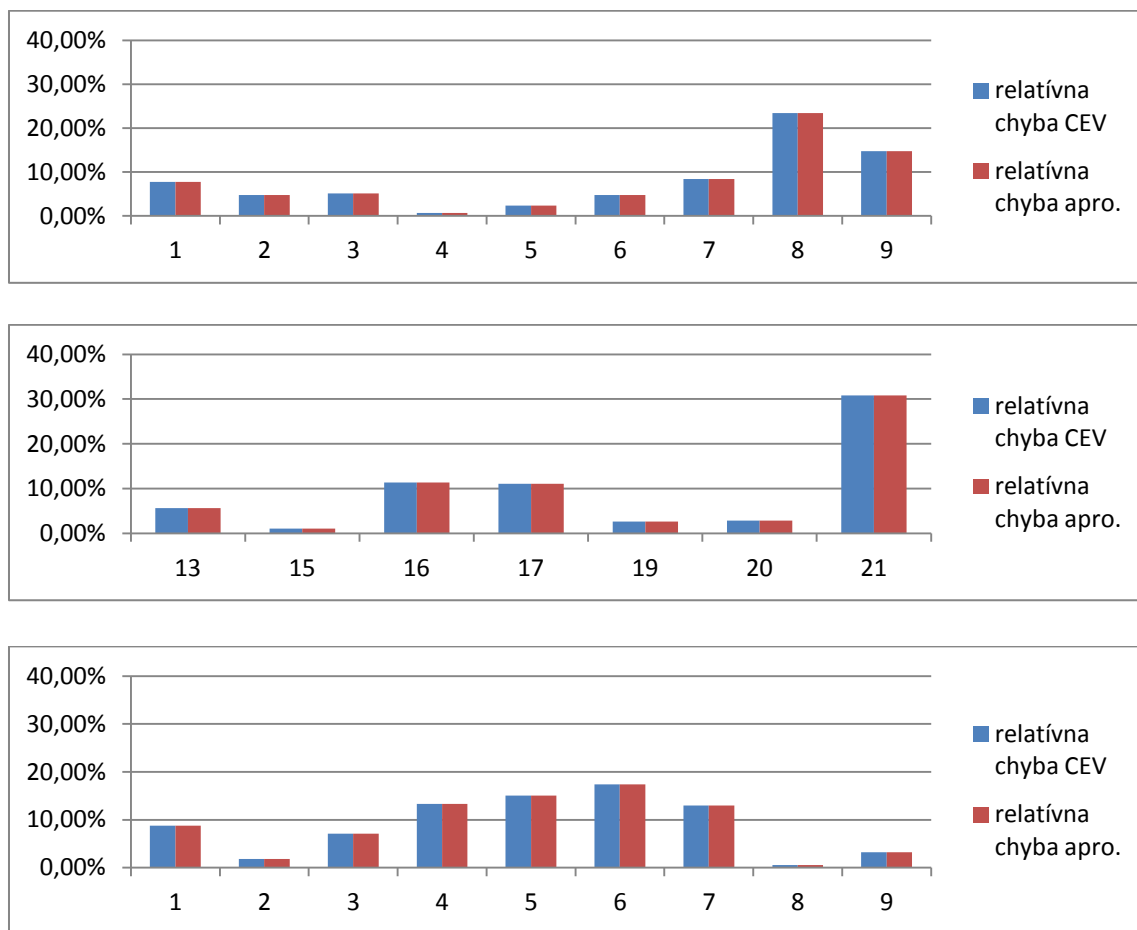
	19	1,3	1,3340872	1,334068	2,622092%	2,620615%
	20	1	1,0286074	1,0285918	2,860740%	2,859180%
	21	0,6	0,7847674	0,7847566	30,794567%	30,792767%
17.1.2015	5	13,69	12,4894171	12,4894176	8,769780%	8,769776%
	8	9,76	9,5829817	9,582991	1,813712%	1,813617%
	10	8,30	7,7107688	7,7107834	7,099171%	7,098995%
	12	6,90	5,9809859	5,9809927	13,319045%	13,318946%
	15	4,50	3,8222292	3,8222065	15,061573%	15,062078%
	17	3,30	2,7265318	2,726495	17,377824%	17,378939%
	20	1,80	1,566429	1,566394	12,976167%	12,978111%
	22	1,05	1,0556189	1,0555964	0,535133%	0,532990%
	25	0,55	0,5677728	0,5677725	3,231418%	3,231364%

Tab. 4.2: Tabuľka zobrazuje reálne hodnoty opcií na akciu firmy SONY s časmi expirácie 19.7.2014, 18.10.2014 a 17.1.2015 a ceny opcií počítaných CEV modelom a jeho aproximácie chí-kvadrát rozdelenia počítané pre parametre modelu, ktoré sme získali z metódy maximálnej vierohodnosti. 6. a 7. stĺpec tabuľky ilustruje relatívnu chybu spomenutých metód počítanú rovnicou (4.5).



Obr.4.2: **Horný graf** porovnáva trhovú cenu opcie s dátumom expirácie **19.7.2014** pre jednotlivé expiračné ceny s hodnotami získanými z presného riešenia CEV modelu a s aproximovanými hodnotami počítanými pre parametre modelu, ktoré sme získali z metódy maximálnej vierohodnosti. **Stredný graf** ilustruje porovnanie

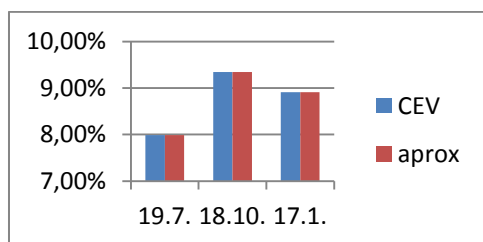
reálnych a experimentálnych cien pre čas expirácie **18.10.2014**, analogicky platí pre **dolný obrázok**, kde je čas expirácie **17.1.2015**.



Obr.4.3: Grafy porovnávajúce relatívne chyby experimentálnej ceny a trhovej ceny počítané rovnicou (4.5) pre CEV model a jeho aproximáciu. **Horný obrázok** s dátumom expirácie **19.7.2014**. **Stredný graf** pre čas expirácie **18.10.2014** a **dolný obrázok** so splatnosťou **17.1.2015**. Priemerné relatívne chyby pre jednotlivé splatnosti sú zahrnuté v tabuľke 4.3 a grafe na obrázku 4.4.

dát. expirácie	CEV	aproximácia
19.7.2014	7,988287%	7,987782%
18.10.2014	9,342254%	9,341293%
17.1.2015	8,909314%	8,909424%

Tab. 4.3: Priemerné relatívne chyby jednotlivých metód výpočtu pre dané časy expirácie.



Obr.4.4: Obrázok graficky ilustruje priemerné relatívne chyby metód pre jednotlivé expiračné časy.

4.3 Odhad parametrov CEV modelu založený na fitovaní cien opcí

Pomerne veľké rozdiely medzi trhovými cenami a cenami získanými z modelu sa dajú vysvetliť postupom odhadovania parametrov: odhadovali sme ich z historických cien akcií. Tieto odhady sme použili na výpočet opcí. Pre docielenie lepšieho fitovania dát cien opcí v tejto kapitole odhadneme CEV parametre minimalizáciou súčtu štvorcov rozdielu reálnej trhovej ceny opcie a ceny podľa CEV modelu. Minimalizovaná funkcia $V: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ má nasledovný predpis:

$$V(\beta, \delta) = \sum_{i=1}^n (C_{real}(t_i) - CEV(S_{real}(t_i), \tau, K, r; \delta, \beta))^2,$$

kde n je počet výberových opčných cien, $C_i(t_i)$ je reálna trhovú cenu opcie v čase t . $CEV(\cdot)$ je cena európskej call opcie podľa vzorca (3.8). Táto formula má 6 vstupných hodnôt, $S_{real}(t_i)$ je reálna cena akcie pozorovaná v čase t . τ je čas do expirácie, K - expiračná cena, r - bezriziková úroková miera. Do funkcie vstupujú 2 parametrami β a δ , ktoré budeme odhadovať nelineárnou metódou najmenších štvorcov. To znamená, že $(\hat{\beta}, \hat{\delta}) = \arg \min_{\beta, \delta} V(\beta, \delta)$. Ten istý prístup sme zvolili aj pre odhad parametrov z aproximácie, $CEV_{approx}(\cdot)$ označuje cenu európskej call opcie počítanú tak, že sme namiesto presného vyjadrenia necentrálneho chí-kvadrát rozdelenia použili jeho aproximáciu (3.10), t.j. pre odhad z $(\hat{\beta}, \hat{\delta}) = \arg \min_{\beta, \delta} \tilde{V}(\beta, \delta)$:

$$\tilde{V}(\beta, \delta) = \sum_{i=1}^n (C_{real}(t_i) - CEV_{approx}(S_{real}(t_i), \tau, K, r; \delta, \beta))^2$$

dátum expirácie	CEV parametre odhad		aprox. parametre odhad	
	sigma	beta	sigma	beta
19.7.2014	0,3522	1,4315	0,3446	1,8636
18.10.2014	0,3065	1,9	0,3633	1,7099
17.1.2015	0,4369	-1,3213	0,4298	-2,5563

Tab. 4.4: Tabuľka zahŕňa odhadnuté parametre pre jednotlivé expiračné časy metódou fitovania.

Odhad parametrov Black-Scholesovho modelu

V prípade odhadovania parametrov z časového radu cien akcií sme hypotézu o Black-Scholesovom modeli testovali ako štatistickú hypotézu v regresnom modeli. Teraz, keď fitujeme ceny opcí, analogickú účelovú funkciu definujeme pre Black-Scholesov model a

porovnáme odhadnuté ceny z Black-Scholesovho modelu a CEV modelu s trhovými. Ako sme poznamenali na výpočet ceny opcie podľa Black-Scholesa potrebujeme odhadnúť jeden parameter - σ , tzv. implikovanú volatilitu. Odhad parametra σ sme hľadali pomocou vzorca uvedeného v [22]. Volatilita stochastického procesu sa týmto spôsobom určuje minimalizáciou súčtu kvadrátov odchýliek reálnych cien opcií a teoreticky získaných cien opcií, tak ako sme to robili v prípade CEV modelu v predchádzajúcej časti. Táto myšlienka nás privádza k úlohe minimalizovať funkciu $U: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definovanú predpisom:

$$U(\sigma) = \sum_{i=1}^n |C_{real}(t_i) - C(S_{real}(t_i), t_i; \sigma)|^2,$$

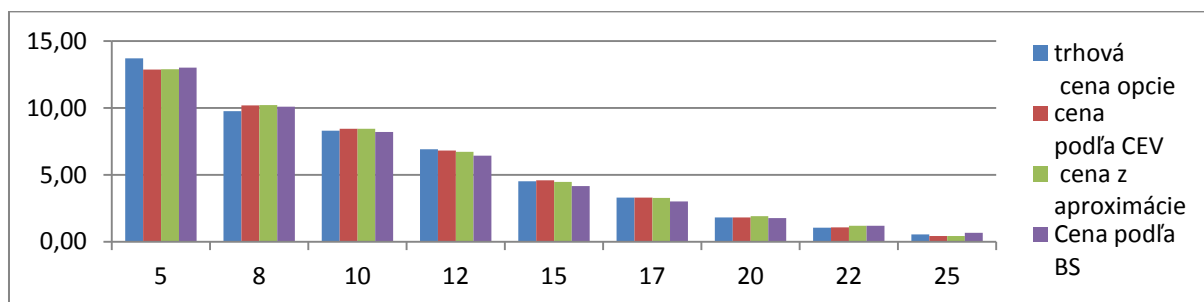
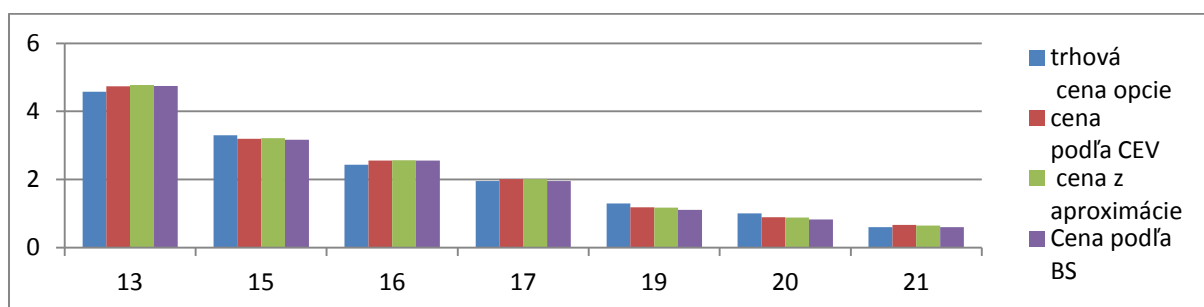
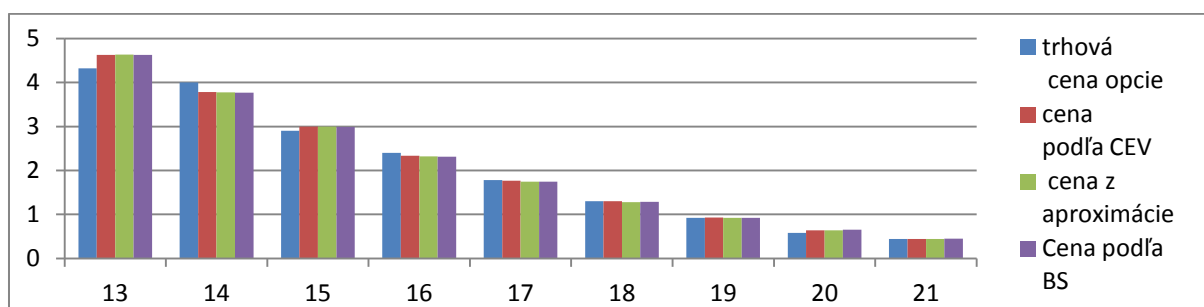
kde $C(S, t; \sigma)$ je cena európskej call opcie podľa vzorca (2.2), $S_{real}(t)$ je reálna trhovú cenu akcie v čase t a $C_{real}(t)$ je reálna trhovú cenu opcie v čase t . Parameter σ zodpovedá volatilitu stochastického procesu ceny akcie. Argument minima tejto funkcie môžeme potom považovať za odhad implikovanej volatility získaný na základe časového radu cien opcií a akcií, t.j.

$$\sigma_{impl} = \arg \min_{\sigma > 0} U(\sigma).$$

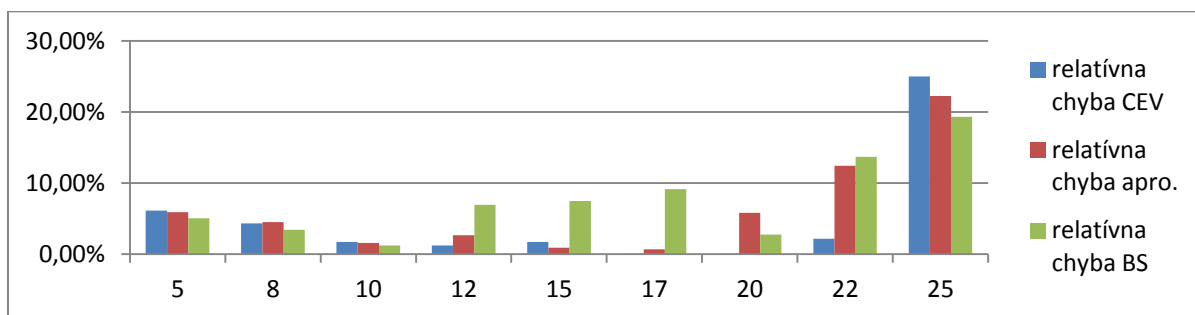
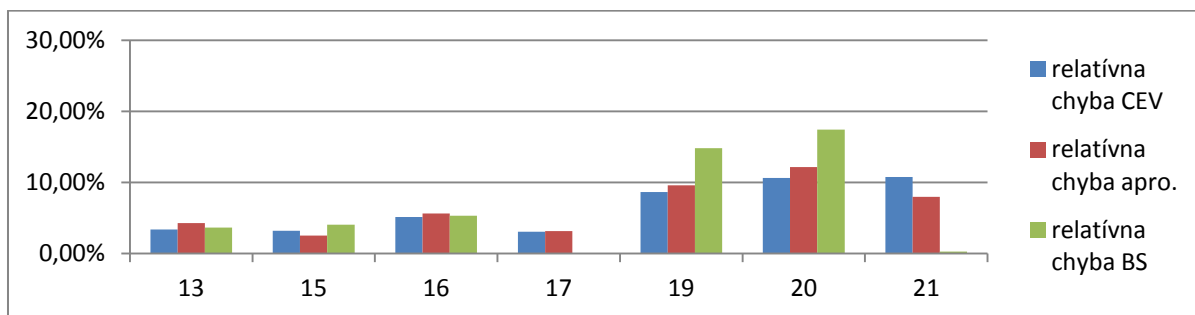
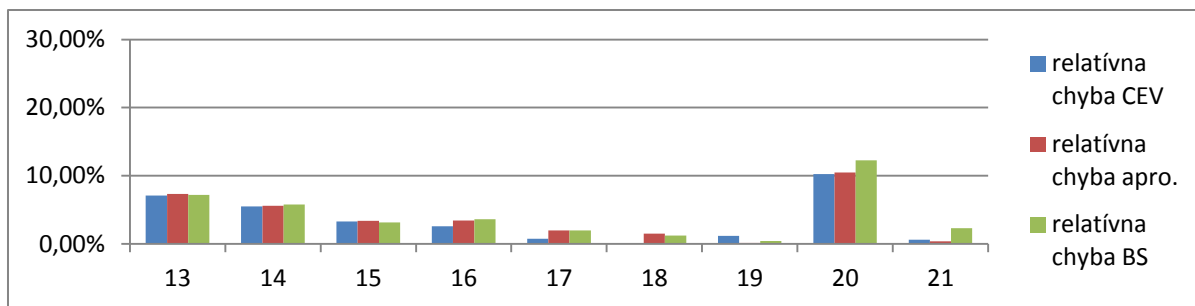
dátum expirácie	expiračná cena	trhová cena opcie	cena podľa CEV	cena z aproximácie	Cena podľa BS	relatívna chyba CEV	relatívna chyba apro.	relatívna chyba BS
19.7.2014	13	4,32	4,627121588	4,636335736	4,629912927	7,109296%	7,322586%	7,173910%
	14	4	3,7808218	3,776700468	3,769269736	5,479455%	5,582488%	5,768257%
	15	2,9	2,995812113	2,998076009	2,991364347	3,303866%	3,381931%	3,150495%
	16	2,4	2,33772368	2,317708914	2,313548143	2,594847%	3,428795%	3,602161%
	17	1,78	1,7664243	1,744944553	1,744620034	0,762680%	1,969407%	1,987639%
	18	1,3	1,2994293	1,280251561	1,284146308	0,043900%	1,519111%	1,219515%
	19	0,92	0,9309497	0,9213673	0,9240023	1,190185%	0,148620%	0,435033%
	20	0,58	0,639378083	0,64081058	0,651074138	10,237600%	10,484583%	12,254162%
	21	0,44	0,4426897	0,438458355	0,450073427	0,611295%	0,350374%	2,289415%
18.10.2014	13	4,58	4,734191195	4,776516547	4,747937918	3,366620%	4,290754%	3,666767%
	15	3,3	3,194132743	3,216361554	3,16605672	3,208099%	2,534498%	4,058887%
	16	2,43	2,555197967	2,566501985	2,558734388	5,152180%	5,617366%	5,297711%
	17	1,95	2,010048174	2,011552914	1,95001401	3,079394%	3,156560%	0,000718%
	19	1,3	1,187469956	1,175546051	1,10720627	8,656157%	9,573381%	14,830287%
	20	1	0,893799965	0,878539597	0,825703958	10,620004%	12,146040%	17,429604%
	21	0,6	0,664474946	0,647795184	0,601780853	10,745824%	7,965864%	0,296809%
17.1.2015	5	13,69	12,8486222	12,8839554	13,00100559	6,145930%	5,887835%	5,032830%
	8	9,76	10,1832777	10,2011598	10,09321404	4,336862%	4,520080%	3,414078%
	10	8,30	8,4408229	8,4299383	8,198905377	1,696661%	1,565522%	1,218008%

	12	6,90	6,8161033	6,7157623	6,422261142	1,215894%	2,670112%	6,923752%
	15	4,50	4,5781522	4,458655	4,16342747	1,736716%	0,918778%	7,479390%
	17	3,30	3,2987112	3,2780998	2,998558969	0,039055%	0,663642%	9,134577%
	20	1,80	1,8001564	1,904946	1,75008526	0,008689%	5,830333%	2,773041%
	22	1,05	1,0727488	1,18061	1,193819488	2,166552%	12,439048%	13,697094%
	25	0,55	0,412627	0,4275752	0,656160646	24,976909%	22,259055%	19,301936%

Tab. 4.5: Tabuľka zobrazuje reálne hodnoty opcií na akciu firmy SONY so splatnosťami 19.7.2014, 18.10.2014 a 17.1.2015 a ceny opcií počítaných CEV modelom, jeho aproximáciou chí-kvadrátu rozdelenia a opcie počítané Black-Scholesovým modelom, kde parametre jednotlivých modelov boli získané fitovaním reálnych cien opcií. Posledné 3 stĺpce tabuľky ilustrujú relatívne chyby spomenutých metód počítané rovnicou (4.5).



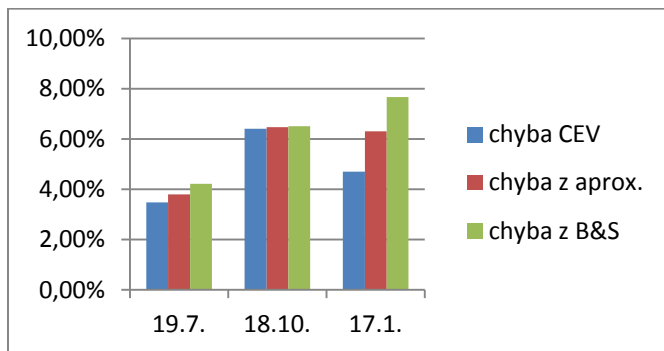
Obr.4.5: **Horný graf** porovnáva trhovú cenu opcie so splatnosťou **19.7.2014** pre jednotlivé expiračné ceny s hodnotami získanými z presného riešenia CEV modelu, aproximovaného CEV modelu a Black-Scholesovho modelu, kde parametre jednotlivých modelov boli získané fitovaním reálnych cien opcií. **Stredný graf** ilustruje porovnanie reálnych a experimentálnych cien pre čas expirácie **18.10.2014**, analogicky platí pre **dolný obrázok**, kde je čas expirácie **17.1.2015**.



Obr.4.6: Grafy porovnávajúce relatívne chyby experimentálnej ceny a trhovej ceny počítané rovnicou (4.5) pre CEV model, aproximáciu CEV modelu a Black-Scholesov model. **Horný obrázok** s dátumom expirácie **19.7.2014**. **Stredný graf** pre čas expirácie **18.10.2014** a **dolný obrázok** so splatnosťou **17.1.2015**.

splatnosť	chyba CEV	chyba z aprox.	chyba z B&S
19.7.2014	3,481458%	3,798655%	4,208954%
18.10.2014	6,404040%	6,469209%	6,511541%
17.1.2015	4,702585%	6,306045%	7,663856%

Tab. 4.6: Priemerné relatívne chyby jednotlivých metód výpočtu pre dané časy expirácie.



Obr.4.7: Obrázok graficky ilustruje priemerné relatívne chyby metód pre jednotlivé expiračné časy.

CEV model závisí od šiestich parametrov S_t, τ, K, r, δ a β , pričom prvé štyri vstupné faktory sme získali z trhových hodnôt. Parametre modelujúce CEV model δ a β nie sú známe, treba ich odhadnúť. Odhad parametrov z historických cien akcií neprinášal uspokojivé výsledky, pretože i v krátkodobom časovom horizonte (v našom prípade možno považovať 95 dní do expirácie) bola priemerná relatívna chyba odhadu ceny opcie počítanej CEV modelom takmer 8%. Zároveň sme sa mohli presvedčiť, že aproximovanie kumulatívnej distribučnej funkcie necetrálneho chí-kvadrát rozdelenia, ktoré vystupuje vo vzorci CEV modelu, dáva veľmi presné hodnoty v porovnaní s explicitným riešením.

Odhad CEV parametrov δ a β prostredníctvom fitovania budúcich reálnych cien opcií nám poskytuje z pohľadu porovnania reálnej a experimentálnej ceny lepší obraz o reálnej hodnote opcie. Treba ale podotknúť, že čas expirácie zohrával významnú úlohu pri prognóze cien opcií CEV modelom ako aj Black-Scholesovým modelom. V našom prípade pre expiračný doby 95 dní a 137 dní dosahovala priemerná chyba týchto metód porovnateľné čísla a CEV model ponúkol výrazne lepšie ceny opcií ako Black-Scholesov model len pre expiračný čas 220 dní.

Záver

V tejto diplomovej práci sme sa venovali CEV modelu, ako jednej z možností oceňovania opcií inak než Black-Scholesovým modelom, ktorý sa riadi geometrickým Brownovým pohybom. Vo vzorci pre oceňovanie opcií v CEV modeli je zahrnutá distribučná funkcia necentrálneho chí - kvadrát rozdelenia a na to, aby sme mohli počítat' ceny opcií v CEV modeli, potrebujeme urobiť odhad dvoch neznámych parametrov δ a β . Použitie Black-Scholesovej formuly sa z tohto pohľadu zdá byť jednoduchšie.

Prvé 2 kapitoly práce sú venované pojmu opcia a teoretickým východiskám potrebným na ďalšie narábanie so stochastickými procesmi. Druhá časť práce je zameraná na samotný CEV model, lepšie pochopenie pravdepodobnostných vlastností akcie sledujúcej tento proces a venovali sme sa aj problematike odhadu parametrov procesu. Výsledky dosiahnuté odhadom parametrov z časového radu ceny akcie, ktorá bola špeciálnym prípadom CEV procesu, sa ukázali ako nedostačujúce pre opis reálnej ceny opcie, a preto sme sa rozhodli odhadovať parametre fitovaním budúcich cien opcií, čo prinieslo lepšie výsledky. Z hľadiska porovnania priemernej chyby pre jednotlivé expiračné časy, ale CEV model zreteľne prekonal Black-Scholesov model len v oceňovaní opcií, ktoré mali najdlhší expiračný čas.

Literatúra

- [1] Beckers S. (1980): The Constant Elasticity of Variance Model and Its Implications For Option Pricing, *The Journal of Finance*, 661-73.
- [2] Black, F. and Scholes, M. (1973): The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 637-59.
- [3] Bowling R., Khasawneh T., Kaewkuekool S., Cho R. (2009): A logistic approximation to the cumulative normal distribution, *Journal of Industrial Engineering and Management* 2009-2(1), 114-27.
- [4] Chen, Z., Daigler, R. T. and Dupoyet, B. (2011): A simplified pricing model for volatility futures, *Journal of Futures Markets*, 31, 307-39.
- [5] Cox, J. C. (1975): Notes on option pricing I: constant elasticity of variance diffusion, Unpublished Paper.
- [6] Cox, J. C. and Ross, S. A. (1976): The valuation of options for alternative stochastic processes, *Journal of Financial Economics*, 3, 145-66.
- [7] Emanuel, D. C. and MacBeth, J. D. (1982) Further results on the constant elasticity of variance call option pricing model, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, 553-54.
- [8] Feller W. (1951): Two singular diffusion problem, *The Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 54, pp. 173-82.
- [9] Heston, S. L. (1993): A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options, *The Review of Financial Studies* 6(2), 327-43.
- [10] Hull, J. C. (2002) *Options, Futures and Other Derivatives*, 5th ed., Prentice Hall 2002.
- [11] Hsu Y. L., Lin T. and Lee C. F. (2008): Constant elasticity of variance (CEV) option pricing model: Integration and detailed derivation, *Mathematics and Computers in Simulation*, 79, 60-71.
- [12] Jackwerth, J. C. and Rubinstein, M. (2001): Recovering stochastic processes from option prices, Working Paper.
- [13] Krongkajonsook N. (2004), *Evaluating the CEV and Garch Option Pricing Models*, A thesis: <http://fin.bus.ku.ac.th/Doc/Thesis.pdf>.
- [14] MacBeth, J. D. and Merville, L. (1980): Tests of the Black–Scholes and Cox Call option valuation models, *Journal of Finance*, 35, 285-301.
- [15] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V. (2005) : Kapitoly z finančnej matematiky,

EPOS, Bratislava.

- [16] Merton, R.C. (1973): The theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-83.
- [17] Pianca P.(2005): Simple formulas to option pricing and hedging in the Black–Scholes model: <http://www.unive.it/media/allegato/DIP/Economia/Rendiconti-ex-matematica-app/rendiconti-2005/Pianca.pdf>.
- [18] Randal J. (1998): The Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model, Master of Science in Statistics and Operations Research, A thesis, Victoria University of Wellington: http://www.victoria.ac.nz/staff/john_randal/Papers/mscthesis.pdf.
- [19] Seydel R. (2006): Tools for Computational Finance. Springer.
- [20] Shroder M. (1989), Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula, American Finance Association.
- [21] Steven E. Shreve (2004), Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer.
- [22] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K. (2009): Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Nakladateľstvo STU.
- [23] Zogheib B. and Hlynka M. Approximations of the Standard Normal Distribution: <http://web2.uwindsor.ca/math/hlynka/zogheibhlynka.pdf>.
- [24] http://en.wikipedia.org/wiki/Tulip_mania
- [25] http://en.wikipedia.org/wiki/New_York_Stock_Exchange
- [26] http://en.wikipedia.org/wiki/Stock_market