

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



NIG ROZDELENIA A ICH VYUŽITIE V
STOCHASTICKOM DYNAMICKOM PROGRAMOVANÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

NIG ROZDELENIA A ICH VYUŽITIE V
STOCHASTICKOM DYNAMICKOM PROGRAMOVANÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Študijný odbor: 1114 Aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci práce: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Stanislava Kvandová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: NIG rozdelenia a ich využitie v stochastickom dynamickom programovaní

Cieľ: Cieľom práce bude analýza parametrickej triedy NIG rozdelení náhodných premenných a ich využitie v stochastickom dynamickom programovaní. Budeme analyzovať aj citlivosť optimálnej odozvy vzhľadom na parametre týchto rozdelení akými sú šikmosť a kurtóza rozdelenia. Využitie výsledkov pri kvalitatívnom a kvantitatívnom vyhodnocovaní optimálneho zloženia portfólia akcií.

Vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 25.01.2013

Dátum schválenia: 04.02.2013
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že som predloženú diplomovú prácu spracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry a zdrojov.

.....
Bc. Stanislava Kvandová

Pod'akovanie

Na tomto mieste by som sa rada pod'akovala svojmu vedúcemu diplomovej práce prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za starostlivé vedenie, odborné rady a cenné pripomienky, ktoré mi pomohli pri vypracovaní tejto práce. Súčasne ďakujem aj svojej rodine za podporu počas celého štúdia.

Abstrakt

KVANDOVÁ, Stanislava: NIG rozdelenia a ich využitie v stochastickom dynamickom programovaní [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; vedúci práce: Daniel Ševčovič, prof. RNDr., CSc., Bratislava, 2014, 61 s.

Táto diplomová práca sa zaoberá analýzou parametrickej triedy NIG rozdelení náhodných premenných a ich využitím v stochastickom dynamickom programovaní. Budeme analyzovať aj citlivosť optimálnej odozvy vzhľadom na parametre týchto rozdelení akými sú šikmosť a kurtóza rozdelenia. Výsledky využijeme pri kvalitatívnom a kvantitatívnom vyhodnocovaní optimálneho zloženia portfólia akcií.

Kľúčové slová: NIG rozdelenie, šikmosť, špicatosť, stochastické dynamické programovanie

Abstract

KVANDOVÁ, Stanislava: NIG distributions and their use in stochastic dynamic programming [Diploma Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics, Supervisor: Daniel Ševčovič, prof. RNDr., CSc., Bratislava, 2014, 61 p.

This Diploma Thesis deals with analysis of NIG distributions of random variables and their use in stochastic dynamic programming. We will analyse the sensibility of optimal response to parameters of these distributions like skewness and kurtosis of distribution. We use results in quantitative and qualitative evaluation of composition of portfolio assets.

Key words: NIG distribution, skewness, kurtosis, stochastic dynamic programming

Obsah

Zoznam obrázkov	10
Zoznam tabuliek	12
Úvod	13
1 Investičný model	15
1.1 Všeobecný investičný model	15
1.1.1 Funkcia užitočnosti	16
1.2 Formulácia problému investora	18
2 Penzijný systém	20
2.1 Aplikácia investičného modelu v dôchodkovom systéme	21
3 Ciele práce	25
4 Výsledky optimalizácie pre normálne rozdelenie	26
4.1 Normálne rozdelenie	26
4.2 Postup a numerické metódy	27
4.3 Parametre	29
4.4 Výsledky pre normálne rozdelenie výnosov	31
5 Rozdelenia s ťažkými chvostmi	35
5.1 Všeobecné hyperbolické rozdelenie	35
5.2 Normalizované inverzné Gaussovské rozdelenie	37
5.2.1 Význam parametrov NIG rozdelenia	38
5.2.2 Spojitosť medzi NIG a normálnym rozdelením	39
5.2.3 Limity NIG rozdelenia	41
5.3 Reálne dáta	42
6 Výsledky optimalizácie pre NIG rozdelenie	46
6.1 Parametre	48
6.2 Výsledky pre NIG rozdelenie výnosov	49

6.2.1	Odhad parametrov NIG rozdelenia	49
6.2.2	Porovnanie výsledkov pre normálne a NIG rozdelenie	50
6.2.3	Vplyv šikmosti a špicatosti na výsledky optimalizácie	52
	Záver	59
	Zoznam použitej literatúry	60

Zoznam obrázkov

1	Optimálna voľba θ pre úlohu bez obmedzení (vľavo) a s obmedzeniami (vpravo) s koeficientom averzie k riziku $\alpha = 5$	31
2	Optimálna voľba θ pre úlohu bez obmedzení (vľavo) a s obmedzeniami (vpravo) s koeficientom averzie k riziku $\alpha = 9$	32
3	Optimálna voľba θ pre úlohu bez obmedzení (vľavo) a s obmedzeniami (vpravo) s koeficientom averzie k riziku $\alpha = 13$	32
4	Vývin stavovej premennej d_t pre úlohu bez obmedzení (vľavo) a s obmedzeniami (vpravo) pre rôzne úrovne averzie k riziku $\alpha \in \{5, 7, 9, 11, 13\}$	34
5	Závislosť očakávanej hodnoty stavovej premennej na konci sporenia $E(d_T)$ a jej štandardnej odchýlky $Std(d_T)$ od koeficientu averzie k riziku pre úlohu bez obmedzení (vľavo) a s obmedzeniami (vpravo)	34
6	Hustoty pre rôzne hodnoty parametrov α a β	38
7	Hustoty pre rôzne hodnoty parametrov μ a δ	39
8	Q-Q plot výnosov S&P indexu	43
9	Rozdelenie reálnych dát a jeho fit pomocou funkcie hustoty normálneho a NIG rozdelenia	44
10	Vzťah medzi θ n odhadnutými parametrami rozdelenia $\alpha, \beta, \mu, \delta$	50
11	Odhady parametrov α_θ a β_θ pre rôznu úroveň rezervy v podmienke $K > 3 + \frac{5}{3}S^2$	50
12	Optimálna voľba θ pre úlohu bez obmedzení pri predpoklade normálneho rozdelenia (vľavo) a NIG rozdelenia (vpravo) s koeficientom averzie k riziku $\alpha = 9$	51
13	Optimálna voľba θ pre úlohu bez s obmedzeniami pri predpoklade normálneho rozdelenia (vľavo) a NIG rozdelenia (vpravo) s koeficientom averzie k riziku $\alpha = 9$	52
14	Funkcia hustoty pre rôzne hodnoty šikmosti S pri parametroch $M = 0, 1028, V = 0, 169^2$ a $K = 5$ (vľavo) a funkcia hustoty pre rôzne hodnoty špicatosti K pri parametroch $M = 0, 1028, V = 0, 169^2$ a $S = 0$ (vpravo).	52

15	Vývin strednej hodnoty stavovej premennej d_t a štandardnej odchýlky v čase v závislosti od zvolenej hodnoty S pre $K = 7$	54
16	Vývin strednej hodnoty stavovej premennej d_t a štandardnej odchýlky v čase v závislosti od zvolenej hodnoty K pre $S = 0$	54
17	Vývin priemernej optimálnej voľby θ pre rôzne hodnoty špicatosti pri nízkej ($\alpha = 5$) a vysokej ($\alpha = 10$) averzii k riziku.	55
18	Vývin priemernej optimálnej voľby θ pre rôzne hodnoty šikmosti pri nízkej ($\alpha = 5$) a vysokej ($\alpha = 10$) averzii k riziku.	55
19	Vývin priemernej optimálnej voľby θ pre normálne rozdelenie vs. NIG rozdelenie pri nízkej ($\alpha = 5$) a vysokej ($\alpha = 10$) averzii k riziku.	57
20	Histogram naakumulovaného majetku na konci investície pre predpoklad normálneho rozdelenia akcií a pre NIG rozdelenie. Šikmost' a kurtóza boli zvolené -1 a 7 a úroveň averzie k riziku bola v oboch prípadoch $\alpha = 10$	58

Zoznam tabuliek

1	Predikcia rastu miezd na Slovensku	30
2	Konvergencia NIG rozdelenia k požadovanému normálnemu rozdeleniu $N(0, 05; 0, 01)$	41
3	Výberové momenty dát pre S&P a VIX index	42
4	Výberové momenty a odhady parametrov pre ročné výnosy S&P indexu	44
5	Voľba parametrov pre NIG rozdelenie odpovedajúce normálnemu roz- deleniu s $\varepsilon = 0, 01$	51
6	Vplyv šikmosti a špicatosti na výsledky optimalizácie	56
7	Hodnoty momenty d_T pri predpoklade normálneho rozdelenia akcií a NIG rozdelenia	57

Úvod

V oblasti investovania je už dlho snahou nájsť čo najlepší spôsob či metódu, ktorá by investorovi pomohla optimalizovať svoje rozhodnutia. Každý investor chce zo svojej investície získať čo najviac, pričom chce podstúpiť čo najmenšie riziko. A to najmä v poslednej dobe, kedy sa investovanie na finančných trhoch stalo ešte rizikovejším.

Zvýšená volatilita nie je typická už len pre akcie, ale riziko sa zvýšilo už aj pri investíciách donedávna považovaných za bezrizikové a to pri investovaní do štátnych dlhopisov.

Pri skúmaní reálnych dát sa ukazuje, že v skutočnosti veľa finančných aktív nadobúda extrémne hodnoty, čiže ich rozdelenie má ťažké chvosty. Okrem toho pozorujeme v dátach aj šikmosť. Predpoklad normality výnosov aktív kvôli ťažkým chvostom ale aj nenulovej šikmosti rozdelenia je tak treba prehodnotiť. Mnoho prác teda začalo študovať rozdelenia s ťažkými chvostmi a ich využitie pri optimalizácii skladby portfólia.

V tejto práci sa pozrieme na aplikáciu problému investora v dôchodkovom sporení podobne ako v niekoľkých prácach S. Kilianovej, I. Melicherčíka, D. Ševčoviča, T. Jakubíka, Z. Macovej a D. Graczovej [9], [12], [8], [11], [7]. Pracovať pritom budeme okrem predpokladu normálneho rozdelenia výnosov aj s predpokladom rozdelenia s ťažkými chvostmi. Spomedzi triedy týchto rozdelení budeme konkrétne používať NIG rozdelenie (Normal Inverse Gaussian distribution).

V úvode práce najprv uvedieme investičný model, z ktorého budeme vychádzať. V ďalšej časti popíšeme penzijný systém na Slovensku a aplikujeme investičný model v dôchodkovom systéme. Následne stručne popíšeme ciele tejto práce. Vo štvrtej kapitole odprezentujeme výsledky optimalizácie pričom použijeme predpoklad normality výnosov. Detailne popíšeme nielen výsledky, ale aj použitý postup.

V ďalšej časti si predstavíme rozdelenia s ťažkými chvostmi, pričom sa sústredíme hlavne na vlastnosti NIG rozdelenia, ktoré budeme ďalej pri optimalizácii používať. Vysvetlíme význam parametrov NIG rozdelenia a ukážeme, ako sa dajú odhadnúť pomocou prvých štyroch momentov rozdelenia - strednej hodnoty, variancie, šikmosti a špicatosti. Nakoniec si ukážeme motiváciu pre použitie tohto rozdelenia, no poukážeme aj na problémy, s ktorými musíme pri práci s ním rátať.

Posledná kapitola tejto práce sa bude venovať výsledkom optimalizácie pri predpoklade NIG rozdelenia výnosov. V prvom rade popíšeme použitý postup a jeho zmeny oproti optimalizácii pre normálne výnosy. Ako skúšku správnosti porovnáme výsledky pre normálne rozdelenie a NIG rozdelenie navolené tak, aby odpovedalo normálnemu rozdeleniu. Následne sa pozrieme na výsledky pre NIG rozdelenie so šikmosťou a špicatosťou neodpovedajúcimi normálnemu rozdeleniu. Zanalyzujeme ich vplyv na optimálnu skladbu portfólia.

1 Investičný model

V tejto kapitole predstavíme problém investora, s ktorým budeme ďalej v práci pracovať. Vychádzať pri tom budeme z modelu, ktorý vo svojej práci predstavili Ferguson a Gilstein [5].

1.1 Všeobecný investičný model

Predpokladajme všeobecný investičný model uvedený v [5]. Investor investuje po dobu T rokov. V každom z rokov $t = 1, \dots, T$ si môže vybrať z $j = 1, \dots, J$ investičných možností. Každá investičná možnosť sa vyznačuje rôznou výnosnosťou a rizikom.

Ďalej predpokladáme, že investor má v každom čase $t = 0, 1, \dots, T - 1$ informácie o histórii trhu a týchto investičných možností, označme tieto informácie I_t .

Investor na začiatku investície vlastní kapitál C_0 a C_t označuje výšku kapitálu na začiatku t -teho časového obdobia.

Rozhodnutie investora v čase t je reprezentované J -rozmerným vektorom

$b_t = (b_1^t, b_2^t, \dots, b_J^t)$, kde b_j^t vyjadruje množstvo investorovho kapitálu investovaného do j -tej investičnej možnosti v čase t . Vektor b_t musí v každom čase spĺňať podmienky:

$$b_j^t \geq 0 \quad \text{pre } j = 1, \dots, J \quad (1)$$

$$\text{a } t = 0, 1, \dots, T - 1$$

$$\sum_{j=1}^J b_j^t \leq C_t \quad \text{pre } t = 0, 1, \dots, T - 1. \quad (2)$$

Nie sú teda povolené záporné pozície (1) a investor nemôže investovať viac kapitálu, ako vlastní (2).

Nech ďalej r_t^b označuje výnos peňažných prostriedkov uložených v banke za časové obdobie $\langle t, t + 1 \rangle$ a r_t^j výnos j -tej investičnej možnosti v čase $\langle t, t + 1 \rangle$. Výnos r_t^b je v čase t už známy, ale výnos r_t^j je náhodnou premennou a je známy až na konci časového obdobia $\langle t, t + 1 \rangle$. Informácia I_t tak obsahuje históriu r_τ^b pre časy $\tau \leq t$ a históriu výnosov r_τ^j pre všetky investičné možnosti $j = 1, \dots, J$ v časoch $\tau < t$.

Predpokladáme, že kapitál neinvestovaný ani do jednej z investičných možností $j = 1, \dots, J$ sa ukladá do banky, kde sa zhodnocuje výnosom r_t^b . Výnos

neinvestovaného kapitálu vieme vyjadriť ako

$$r_t^b(C_t - \sum_{j=1}^J b_t^j).$$

Výnos z investície do stratégie b_t za časové obdobie $(t, t + 1)$ sa vypočíta ako

$$\sum_{j=1}^J b_t^j r_t^j.$$

Hodnota investorovho kapitálu sa tak bude vyvíjať podľa rovnice:

$$C_{t+1} = (1 + r_t^b)(C_t - \sum_{j=1}^J b_t^j) + \sum_{j=1}^J b_t^j(1 + r_t^j). \quad (3)$$

Na konci časového obdobia $(t - 1, t)$ investor obdrží novú informáciu I_t a rozhodne sa pre nasledujúcu stratégiu b_t . Táto stratégia je funkciou začiatočného kapitálu C_0 a informačných množín I_0, \dots, I_t . b_t implicitne závisí aj od postupnosti výšky investorovho kapitálu C_0, \dots, C_t .

Investorove preferencie sú reprezentované funkciou užitočnosti U , ktorá je funkciou kapitálu. Investor investuje svoj kapitál na finančnom trhu, pričom výnos z neho je náhodný, preto voľba stratégie j závisí aj od investorovej averzie k riziku. Investorova averzia k riziku sa so zvyšujúcim kapitálom znižuje. Preto môžeme formulovať úlohu ako maximalizáciu očakávanej užitočnosti kapitálu v čase T pre danú úroveň investorovej averzie k riziku:

$$\max \mathbb{E}(U_\alpha(C_T) | I_0),$$

kde α označuje koeficient averzie k riziku.

1.1.1 Funkcia užitočnosti

Funkcia užitočnosti je dobrým meradlom hodnoty kapitálu. Aby funkcia užitočnosti vedela zmysluplne porovnávať investičné možnosti, musí spĺňať základné vlastnosti.

Od funkcie užitočnosti vyžadujeme:

- rastúcosť ($U'(x) > 0$) - vyplýva prirodzene z toho, že investor má väčší úžitok z väčšieho majetku.
- konkávnosť ($U''(x) < 0$) - vyplýva z predpokladu rizikovo averzného investora.

Ak má investor možnosť investovať do portfólia, ktoré mu prinesie istý kapitál

vo výške k alebo do portfólia so strednou hodnotou získaného kapitálu k , potom užitočnosť portfólia s istým kapitálom k je vyššia a investor si vyberie práve túto možnosť.

Najčastejšie sa používajúce typy funkcie užitočnosti sú:

- *exponenciálna* $U(x) = -e^{-bx}$, pre $b > 0$
- *logaritmická* $U(x) = \ln(x)$
- *mocninová* $U(x) = bx^b$, pre $b \leq 1, b \neq 0$
- *kvadratická* $U(x) = x - bx^2$, pre $b < 0$

Každá funkcia užitočnosti má určité výhody i nevýhody. Napr. logaritmická funkcia užitočnosti pre nulový majetok nadobúda hodnotu $-\infty$ a kvadratická funkcia užitočnosti je rastúca len pre $x < \frac{1}{2b}$.

Averziu investora k riziku môžeme popísať aj číselne a to cez Arrow-Prattov absolútny koeficient averzie k riziku:

$$a_A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}.$$

Platí, že väčší Arrow-Prattov koeficient odpovedá vyššej averzii k riziku.

Okrem toho poznáme aj relatívny koeficient averzie k riziku

$$a_R(x) = -x \frac{U''(x)}{U'(x)},$$

ktorý meria absolútnu averziu k riziku v pomere k majetku.

V spojitosti s Arrow-Prattovým absolútnym koeficientom a relatívnym koeficientom averzie k riziku sa spájajú dve najčastejšie sa používajúce skupiny funkcií užitočnosti:

- CARA funkcie užitočnosti (Constant absolute risk aversion): majú konštantný koeficient $a_A(x)$.
- CRRA funkcie užitočnosti (Constant relative risk aversion): majú konštantný koeficient $a_R(x)$.

1.2 Formulácia problému investora

Predpokladáme investora, ktorý svoj kapitál investuje v časoch $t = 1, 2, \dots, T - 1$ a má možnosť investovať do investičných možností $j = 1, \dots, J$. Tieto investičné možnosti sa od seba odlišujú pomerom medzi menej a viac rizikovým aktívom. Rizikovejšie aktívum má vyššiu volatilitu ale aj vyšší výnos, naopak menej rizikové aktívum sa vyznačuje nižšou volatilitou a aj nižším výnosom. Volatilita a výnos jednotlivých investičnej možnosti bude závisieť od volatilit a výnosov týchto aktív a korelácie medzi nimi.

Vývin investorovho kapitálu bude závisieť od vybratej investície a môžeme ho vyjadriť nasledovne:

$$\begin{aligned} C_{t+1} &= F_t(C_t, j, r_t^j), & t = 1, 2, \dots, T - 1 \\ C_0 &> 0, \end{aligned} \tag{4}$$

kde funkcia zmeny kapitálu $F_t(C_t, j, r_t^j)$ je funkciou kapitálu v predchádzajúcom čase, zvolenej investície j a r_t^j - výnosu tejto investície v období $(t, t + 1)$.

Investor sa v každom časovom kroku na základe informácií I_t rozhoduje, do ktorej investičnej možnosti investuje. Sleduje pri tom cieľ - maximalizáciu očakávanej užitočnosti svojho majetku na konci investície v čase T . Ako sme spomínali I_t pozostáva z informácií o historickom vývine výnosov r_t^j pre každú investičnú možnosť j do času t .

Investorovu optimalizáciu rozhodnutia môžeme formulovať ako stochastický dynamický problém:

$$\begin{aligned} \max_j \mathbb{E}(U(C_T)) \\ C_{t+1} &= F_t(C_t, j, r_t^j), & t = 1, 2, \dots, T - 1 \\ C_0 &> 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Podľa teórie podmienených očakávaní môžeme považovať postupnosť informácií I_t za postupnosť nezmenšujúcich sa σ -algebrií. To nám umožňuje použitie veľového pravidla pre podmienené očakávania na problém (5). Toto pravidlo uvádzame v nasledujúcej vete, pričom čerpáme zo 4. kapitoly knihy I. Melicherčíka [14].

Veta 1.1. (Vežové pravidlo pre podmienené očakávania) Nech X je náhodná premenná v pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ taká, že jej stredná hodnota $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Nech \mathcal{G}, \mathcal{H} sú σ -algebry také, že $\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Potom platí:

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}).$$

Použitím predchádzajúcej vety dostávame

$$\mathbb{E}(U(C_T)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(U(C_T)|I_t)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(U(C_T)|C_t)),$$

kde $\mathbb{E}(\mathbb{E}(U(C_T)|C_t))$ je maximálna. Označme hodnotovú funkciu (investorovu okamžitú užitočnosť) $V_t(C) = \max_{j \in J} \mathbb{E}(U(C_T)|C_t = C)$. Aplikovaním vety (1.1) na hodnotovú funkciu dostávame Bellmanovu rovnicu:

$$\begin{aligned} V_t(C) &= \max_{j \in J} \mathbb{E}(V_{t+1}(F_t(C, j, r))) = \max_{j \in J} \mathbb{E}(V_{t+1}(F_t(C, j(C, t), r_t^j))) \\ V_T(C) &= U(C). \end{aligned} \tag{6}$$

Riešenie rovnice (6) je optimálnou voľbou investičnej možnosti j v každom čase v závislosti od náhodnej premennej C_t - aktuálnej hodnoty kapitálu investora v čase t . Nech poznáme pravdepodobnostné rozdelenie výnosov r_t^j v rovnici (6), charakterizované funkciou hustoty f_t^j . Potom sa rovnica (6) môže ďalej prepísať do tvaru:

$$\begin{aligned} V_t(C) &= \max_{j \in J} \mathbb{E}(V_{t+1}(F_t(C, j, r))) = \max_{j \in J} \int_{\mathbb{R}} V_{t+1}(F_t(C, j, r)) f_t^j(r) dr \\ V_T(C) &= U(C). \end{aligned} \tag{7}$$

Vlastnosti optimálneho riešenia rovnice (7) za splnenia určitých podmienok si priblížime v nasledujúcej vete.

Veta 1.2. Nech $U(x)$ je rastúca, striktné konkávna, C^2 hladká funkcia pre $x > 0$. Potom pre každý čas $t = 1, \dots, T$ platí:

- funkcia $V_t(x)$ je rastúca a striktné konkávna v premennej x .
- existuje práve jeden argument $\hat{j}_t(x)$, ktorý maximalizuje úlohu (7).
- funkcie $V_t(x)$ a $\hat{j}_t(x)$ sú spojité a C^∞ hladké v premennej $x > 0$ na ľubovoľnom ohraničenom intervale $0, x_{max}$ okrem najviac konečného počtu izolovaných bodov.

2 Penzijný systém

V dôsledku starnutia populácie sa financovanie dôchodkov stáva stále náročnejším. Zmena demografickej štruktúry vedie k neudržateľnosti PAYG (Pay as you go) systému - priebežného dôchodkového systému, ktorý je založený na priebežnom prerozdelení financií od pracujúcich k dôchodcom. Vo väčšine krajín sa totiž stále zvyšuje pomer starších ľudí (vo vekovej skupine nad 65) a mladých (od 15-64). Napr. v Nemecku sa odhaduje, že sa tento pomer zvýši z úrovne 24% v roku 2002 na 49% v roku 2050.

Z tohto dôvodu pristúpilo aj Slovensko k zmene dôchodkového systému. Od januára 2005 je tak slovenský dôchodkový systém tvorený tromi piliermi.

Prvý pilier je povinný a je založený na PAYG systéme. Odvody do prvého piliera, ktoré sa momentálne pohybujú na úrovni 8% z príjmu zamestnanca, sú odvádzané do sociálnej poisťovne.

Druhý pilier je tiež povinný a odvody sú v rovnakej výške ako tie do prvého piliera. Na rozdiel od prvého piliera však ide o investovanie na súkromných dôchodkových účtoch v dôchodkových správcovských spoločnostiach (DSS).

Posledný tretí pilier je dobrovoľný a je nastavený ako doplnkové penzijné sporenie. Tu ide už o menšie čiastky ako je to pri prvých dvoch pilieroch. Keďže je dobrovoľný, štát sa ho snaží podporovať a to cez daňové úľavy. Pri sporení v tomto pilieri si zamestnanec vyberie výšku mesačného príspevku, ktorý je potom odvádzaný z jeho čistého príjmu. Zamestnávateľ mu (ale len do určitej výšky) prispieva rovnakou sumou.

V tejto práci budeme pracovať len s druhým pilierom dôchodkového systému. Každá správcovská spoločnosť ponúkajúca sporenie v tomto pilieri musí ponúkať sporeiteľom tri typy fondov, do ktorých môžu investovať. Každý z týchto fondov má inú rizikovosť a ziskovosť.

- *rastový penzijný fond* - najrizikovejší z fondov, no zároveň má najväčší očakávaný výnos
- *vyvážený penzijný fond* - ponúka zaujímavý úrok pri rozumnej úrovni rizika
- *konzervatívny fond* - fond s najnižším očakávaným výnosom a s najnižším

rizikom

Sporitelia si vyberajú jeden z týchto fondov, do ktorého sa potom investujú všetky ich peniaze v druhom pilieri. Svoju voľbu môžu však časom meniť.

V rastovom fonde môže byť podiel akcií na portfóliu až 80%. Preto je rastový fond považovaný za najviac riskantný. V dlhodobom horizonte však má potenciál najvyššieho výnosu. Keďže variancia hodnoty portfólia v tomto fonde je kvôli akciám veľká, je povolené investovať sporiteľom do tohto fondu len vtedy, ak im do dôchodku zostáva viac ako 15 rokov. Toto je zakotvené priamo v zákone.

Vo vyváženom penzijnom fonde je povolený podiel akcií maximálne 50%. Zvyšok musí byť investovaný do dlhopisov a peňažných trhových nástrojov. V porovnaní s rastovým fondom sa tak považuje za menej riskantný, a preto v ňom môže investovať sporiteľ až do 7 rokov pred dôchodkom.

Konzervatívny penzijný fond pozostáva už iba z dlhopisov a peňažných investícií, pričom všetky aktíva musia byť zahedžované proti menovému riziku. V dlhodobom horizonte sa od tohto fondu očakávajú najnižšie výnosy.

Nech θ_t označuje podiel akcií v portfóliu sporiteľa a $(1 - \theta_t)$ je podiel dlhopisov v čase t . Nech T označuje počet rokov, ktoré sporiteľovi zostávajú do dôchodku na začiatku sporenia. Potom spomínané legislatívne obmedzenia jednotlivých fondov môžeme vyjadriť vzťahmi:

$$\begin{aligned} \theta_t &\leq 0,8 && \text{pre } t = 1, \dots, T - 15 \\ \theta_t &\leq 0,5 && \text{pre } t = T - 16, \dots, T - 7 \\ \theta_t &= 0 && \text{pre } t = T - 6, \dots, T - 1 \end{aligned} \tag{8}$$

2.1 Aplikácia investičného modelu v dôchodkovom systéme

Investor, o ktorom sme rozprávali v prvej kapitole, je vlastne v našom prípade sporiteľ, ktorý si sporí na dôchodok v druhom pilieri dôchodkového sporenia.

Namiesto investovania určitého počiatočného kapitálu na začiatku investičného obdobia sporiteľ prispieva na dôchodok pravidelne, vždy rovnakú čiastku zo svojho platu. Sporí si po dobu T rokov, kde T je počet rokov, ktoré sporiteľovi zostávajú do dôchodku na začiatku sporenia.

Cieľom sporiteľa je maximalizovať očakávané úspory na konci sporenia, pričom si môže voľiť z viacerých investičných možností. Sporiteľ si sporí peniaze v dôchodcovej správcovskej spoločnosti, v rámci ktorej si môže vybrať jeden z fondov. Každý fond sa vyznačuje inou volatilitou a výnosnosťou. Sporiteľ si môže tento fond v čase meniť, my budeme predpokladať možnosť zmeny fondu raz ročne. Rovnako, raz ročne, sú vykonávané aj príspevky sporiteľa na svoj účet. Sporiteľ si môže v danom čase vybrať len jeden fond, v ktorom chce sporiť a zároveň jeho výber musí spĺňať obmedzenia, o ktorých sme rozprávali v úvode tejto kapitoly (8). Sporiteľ maximalizuje očakávanú užitočnosť nasporeného majetku v čase T pri danej úrovni jeho averzie k riziku. Predpokladajme, že sporiteľove preferencie sú charakterizované CRRA funkciou užitočnosti U :

$$U_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\left(\frac{x}{12} \right)^{(1-\alpha)} - 1 \right). \quad (9)$$

U_α je funkciou sporiteľovho majetku a $\alpha > 0$ vyjadruje jeho relatívnu averziu k riziku. Zvyšujúci sa parameter α znamená, že sporiteľ vyhľadáva menej rizikové fondy. Nech d_t označuje náhodnú premennú, ktorá predstavuje nasporenú sumu v čase t a U_α , definovaná v (9) je funkcia užitočnosti sporiteľa s relatívnu averziou k riziku α . Predpokladáme, že sporiteľ sa môže v každom časovom kroku $t \in \{1, \dots, T-1\}$ rozhodnúť pre jeden z fondov $j \in \{1, \dots, J\}$, do ktorého budú investované jeho úspory v druhom pilieri za cieľom maximalizácie očakávanej užitočnosti v čase T . Problém môžeme formulovať nasledovne:

$$\max_{j \in \mathcal{J}} \mathbb{E}(U(d_T)) \quad (10)$$

za podmienok

$$\alpha = \bar{\alpha}$$

$$d_t \in \mathcal{D}$$

$$j \in \mathcal{J}$$

kde \mathcal{J} popisuje množinu prípustných investičných možností, určenú vládnymi obmedzeniami (8), \mathcal{D} označuje obmedzenia na d_t a $\bar{\alpha}$ je sporiteľova relatívna averzia k riziku.

Pozrime sa teraz bližšie na vývin kapitálu sporiteľa. Sporiteľ prispieva na dôchodok raz ročne τ -časť svojho ročného platu w_t a nasporené peniaze má investované v čase t

vo fonde j , pričom voľba fondu spĺňa podmienky (8). Nech s_t označuje nasporený kapitál v čase t . Potom sa vývin kapitálu správa nasledovne:

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= s_t(1 + r_t^j) + w_{t+1}\tau, & t = 1, \dots, T - 1 \\ s_1 &= w_1\tau, \end{aligned} \tag{11}$$

kde r_t^j označuje výnos j -teho fondu za časové obdobie $\langle t, t + 1 \rangle$.

Plat sporiteľa časom rastie a to podľa vzťahu:

$$w_{t+1} = (1 + \rho_t)w_t,$$

kde ρ_t predstavuje rast mzdy v čase t . Budeme predpokladať, že rast miezd je známy a vieme ho odhadnúť pomocou ekonometrického modelu.

Vzhľadom na to, že sporiteľa nebude pri odchode na dôchodok zaujímať celková nasporená suma, ale skôr pomer nasporenej sumy a jeho mzdy v čase T , je lepšie zaviesť novú stavovú premennú $d_t = \frac{s_t}{w_t}$. Hodnota stavovej premennej v čase T (d_T) vyjadruje počet rokov, počas ktorých má sporiteľ vďaka sporeniu v druhom pilieri k dispozícii rovnaký príjem, ako to bolo v čase jeho odchodu na dôchodok.

Použitím novej stavovej premennej $d_t = \frac{s_t}{w_t}$ sa vzťah (11) zmení nasledovne:

$$\begin{aligned} d_{t+1} &= F_t(d_t, j, r_t^j) = d_t e^{r - \rho_t} + \tau, & t = 1, \dots, T - 1 \\ d_1 &= \tau, \end{aligned} \tag{12}$$

kde r_t^j označuje výnos j -teho fondu za časové obdobie $\langle t, t + 1 \rangle$ a ρ_t je rast mzdy v čase t .

V prípade aplikácie investičného modelu v dôchodkovom systéme sa mení aj informačná množina I_t . Na rozdiel od informačnej množiny, ktorú sme popísali pre všeobecný prípad investora v (1.2), už neobsahuje len históriu výnosov jednotlivých investičných možností r_t^j , ale aj informácie o raste miezd do času t .

Vzhľadom na novú stavovú premennú, je potrebné upraviť aj Bellmanovu rovnicu (6).

Pre prípad sporiteľa, ktorý maximalizuje očakávanú užitočnosť pomeru nasporenej sumy a mzdy

$$\max_{j \in J} \mathbb{E}(U(d_T)),$$

dostávame Bellmanovu rovnicu v tvare:

$$\begin{aligned}
 V_t(d) &= \max_{j \in J} \mathbb{E}(V_{t+1}(F_t(d, j, r))) \\
 &= \max_{j \in J} \mathbb{E}(V_{t+1}(F_t(d, j(d, t), r_t^j))) \\
 &= \max_{j \in J} \mathbb{E}(V_{t+1}(d_t e^{r_t^j - \rho_t})) \\
 V_T(d) &= U(d).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Riešenie (13) predstavuje pre sporiteľa optimálnu voľbu fondu j v každom čase t v závislosti od hodnoty náhodnej premennej d_t v danom čase.

V poslednej časti tejto kapitoly ešte upresníme množinu investičných možností.

Doteraz sme hovorili o výbere investičnej možnosti ako o výbere fondu. Každý fond je tvorený časťou akcií a časťou dlhopisov. Preto môžeme investičnú možnosť definovať aj ako portfólio, ktoré je tvorené z θ -časti akciami a $(1 - \theta)$ -časti dlhopismi, kde $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$. Množina prípustných investičných možností, označme ju Θ , pritom musí spĺňať legislatívne obmedzenia (8).

Celý problém sporiteľa tak môžeme prepísať nasledovne:

$$\max_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}(U(d_T)) \tag{14}$$

za podmienok

$$\begin{aligned}
 d_{t+1} &= F(d_t, \theta, r_t^\theta) \\
 &= d_t e^{r_t^\theta - \rho_t} + \tau, \quad t = 1, \dots, T - 1
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$d_1 = \tau \tag{16}$$

3 Ciele práce

Cieľom tejto diplomovej práce je riešiť úlohu, ktorú sme si predstavili v časti (2.1). Riešiť ju budeme pre predpoklad rôznych rozdelení výnosov investičných možností $f^j(r)$.

Doteraz najčastejšie používaným typom rozdelenia výnosov bola trieda normálnych rozdelení. Ako sme však načrtli v úvode, reálne dáta vykazujú ťažké chvosty a nenulovú šikmosť. Tieto tvrdenia sa pokúsime aj osobne potvrdiť.

Následne sa pozrieme na rozdelenia s ťažkými chvostmi a sústredíme sa pritom na NIG rozdelenie. Naším cieľom bude porovnať výsledky pre normálne rozdelenie a NIG rozdelenie. Vzhľadom na to, že pri NIG rozdelení vieme navyše od normálneho rozdelenia navoliť vhodne aj tretí a štvrtý moment rozdelenia - šikmosť a kurtózu, zaujímať nás bude senzitivita optimálneho riešenia vzhľadom na ne. Výpočty vykonáme nielen pre rôznu voľbu šikmosti a špicatosti, ale aj pre rôznu úroveň averzie k riziku.

Keďže túto úlohu nebudeme riešiť analyticky, ale budeme hľadať jej numerické riešenie, bude potrebné si vhodne pripraviť program. Ten sa bude pre predpoklad normálneho rozdelenia a NIG rozdelenia v niektorých detailoch líšiť.

4 Výsledky optimalizácie pre normálne rozdelenie

V tejto časti detailne popíšeme nielen výsledky optimalizácie, ale aj použitý postup a numerické metódy. Vychádzať pritom budeme z prác [9] a [7].

Vráťme sa k Bellmanovej rovnici:

$$V_t(C) = \max_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}(V_{t+1}(F_t(C, \theta, r))) = \max_{\theta \in \Theta} \int_{\mathbb{R}} V_{t+1}(F_t(C, \theta, r)) f^\theta(r) dr$$

$$V_T(C) = U(C). \quad (17)$$

V nej sme použili predpoklad, že poznáme rozdelenie výnosov jednotlivých investičných možností, charakterizované funkciou hustoty $f^\theta(r)$. Ako sme hovorili v závere predchádzajúcej kapitoly, θ tu vyjadruje proporciu akcií v portfóliu, pričom zvyšok $(1 - \theta)$ časti portfólia tvoria dlhopisy.

V mnohých modeloch sa pri práci s výnosmi aktív predpokladá, že sú normálne rozdelené. V tejto kapitole sa pozrieme na výsledok optimalizácie pri tomto predpoklade.

S aplikáciou investičného modelu v dôchodkovom systéme, pričom bol použitý predpoklad normality výnosov, sa vo veľkej miere zaoberajú aj I. Melicherčík a D. Ševčovič [8],[9],[11],[12].

4.1 Normálne rozdelenie

Normálne rozdelenie, známe aj ako Gaussovo rozdelenie, je charakteristické svojim zvonovým tvarom. Jeho presný tvar je určený dvoma parametrami - strednou hodnotou μ a varianciou σ^2 .

Hustota normálneho rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$ má tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Okrem prvých dvoch momentov (strednej hodnoty a variancie) nás budú v tejto práci zaujímať aj šikmosť a kurtóza rozdelenia.

Šikmosť (skewness) náhodnej premennej X je definovaná ako:

$$S_X = \frac{E[(X - \mu)^3]}{(E[(X - \mu)^2])^{\frac{3}{2}}},$$

kde μ je stredná hodnota rozdelenia.

Kurtóza (kurtosis) náhodnej premennej X je definovaná ako:

$$K_X = \frac{E[(X - \mu)^4]}{(E[(X - \mu)^2])^2},$$

kde μ je opäť stredná hodnota rozdelenia.

V prípade normálneho rozdelenia pre ľubovoľné parametre rozdelenia μ a σ^2 je koeficient šikmosti rovný nule a koeficient kurtózy rovný hodnote 3.

Pri práci s normálnym rozdelením budeme využívať niektoré vlastnosti, ktoré si priblížime v nasledujúcom tvrdení.

Tvrdenie 4.1. *Normálne rozdelenie má nasledovné vlastnosti:*

- *Konvolúcia:* Ak $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ s koreláciou ρ , potom ich súčet $Y = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)$.
- *Štandardizácia:* Ak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potom premenná $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ má štandardizované normálne rozdelenie $N(0, 1)$.

Pri predpoklade normality rozdelenia výnosov akcií a dlhopisov, z ktorých sa skladá portfólio fondu, a s použitím prvej vlastnosti z tvrdenia (4.1) vieme vyjadriť strednú hodnotu a štandardnú odchýlku jednotlivej investičnej možnosti.

Nech investičná možnosť $\theta \in \Theta$ odpovedá portfóliu skladajúcemu sa z θ časti akcií s rozdelením $N(r_s, \sigma_s^2)$ a $(1 - \theta)$ časti dlhopisov s rozdelením $N(r_b, \sigma_b^2)$, medzi ktorými je korelácia ρ . Potom stredná hodnota výnosu tejto investičnej možnosti je:

$$\mu_\theta = \theta r_s + (1 - \theta) r_b \quad (18)$$

a jeho štandardná odchýlka je:

$$\sigma_\theta = \sqrt{\theta^2 \sigma_s^2 + (1 - \theta)^2 \sigma_b^2 + 2\theta(1 - \theta)\rho\sigma_s\sigma_b}. \quad (19)$$

4.2 Postup a numerické metódy

V tejto časti popíšeme postup využitý pri výpočtoch a aj použité numerické metódy.

Vychádzať pri tom budeme z prác [9] a [12].

Naším cieľom je použitím numerických metód riešiť úlohu stochastického dynamického programovania, ktorú sme si predstavili v (2.1). Riešenie tejto úlohy spĺňa Bellmanovu rovnicu (17).

Algoritmus výpočtu bude spočívať v postupnom počítaní hodnôt V_t , pričom budeme postupovať spätne od poslednej časovej vrstvy $t = T$ až po čas $t = 1$. Hodnotu funkcie V budeme počítat' v m diskretných bodoch d_i . Body d_i budú bodmi delenia intervalu $\langle d_{min}, d_{max} \rangle$ na $m - 1$ rovnako dlhých podintervalov, teda

$$d_i = d_{min} + i \frac{d_{max} - d_{min}}{m - 1}, \quad i = 0, \dots, m - 1. \quad (20)$$

Na časovej vrstve T je hodnota funkcie V rovná užitočnosti v danom bode $V_T(d) = U(d)$. Na všetkých ostatných časových vrstvách je pre každé d_i potrebné vypočítat' $\max_{\theta \in \Theta} \int_{\mathbb{R}} V_{t+1}(d_{t+1}) f^\theta(r) dr$. Interval $\Theta = \langle 0, 1 \rangle$ nahradíme rovnomerným delením intervalu $\{\theta_k = \frac{k}{n_\theta}, k = 0, \dots, n_\theta\}$ a pre každé θ vypočítame

$$\int_{\mathbb{R}} V_{t+1}(d_{t+1}) f^\theta(r) dr.$$

f^θ je funkcia hustoty normálneho rozdelenia s parametrami μ_θ a σ_θ^2 , ktoré sa vypočítajú zo vzťahov (18) a (19).

Pozrime sa teraz na výpočet samotného integrálu

$$\int_{\mathbb{R}} V_{t+1}(d_{t+1}) f^\theta(r) dr = \int_{\mathbb{R}} V_{t+1}(d_t e^{r-\rho t} + \tau) f^\theta(r) dr. \quad (21)$$

Pri jeho výpočte sa stretávame s problémom veľkej variancie hodnôt funkcie V_t . V_t nadobúda nielen veľké hodnoty, ale aj rádovo malé, čo vedie k numerickým nepresnostiam. Preto je pri výpočte integrálu (21) výhodné zaviesť škálovanie, aké sa v podobných prípadoch často používa. Nech funkcia $H_t(d)$ je ohraničená kladná funkcia pre $t = 1, \dots, T$. V závislosti od času t nech je daná vzťahmi:

$$H_T = \frac{1}{\sqrt{1 + V_T^2}} \quad (22)$$

$$H_t = \frac{1}{\sqrt{1 + V_{t+1}^2}} \quad \text{pre } t = T - 1, \dots, 1 \quad (23)$$

Funkciu $V_t(d)$ budeme škálovať funkciou $H_t(d)$ a dostaneme tak novú funkciu $W_t(d) = H_t(d)V_t(d)$. Namiesto problému

$$V_t(d_t) = \max_{\theta \in \Theta} \int_{\mathbb{R}} V_{t+1}(d_{t+1}) f^\theta(r) dr \quad (24)$$

tak budeme riešiť problém

$$W_t(d_t) = \max_{\theta \in \Theta} \int_{\mathbb{R}} W_{t+1}(d_{t+1}) \frac{H_t(d_t)}{H_{t+1}(d_{t+1})} f^\theta(r) dr. \quad (25)$$

Na výpočet integrálu použijeme Simpsonove pravidlo, pričom interval \mathbb{R} obmedzíme na interval $\langle r_\theta - 3\sigma_\theta, r_\theta + 3\sigma_\theta \rangle$, v ktorom sa s pravdepodobnosťou 99,7% nachádzajú výnosy θ -tej investičnej možnosti. Počet ekvidištančných bodov zvolíme 11, teda

$$r_i = r_\theta - 3\sigma_\theta + i \frac{6\sigma_\theta}{10}, \quad i = 0, \dots, 10$$

Hodnota integrálu aproximovaná Simpsonovým pravidlom sa vypočíta:

$$\sum_{i=1}^{11} W_{t+1}(d_{t+1}) \frac{H_t(d_t)}{H_{t+1}(d_{t+1})} f^\theta(r_i). \quad (26)$$

Tu nám vystupuje hodnota stavovej premennej $d_{t+1} = d_t e^{r_\theta - \rho t} + \tau$. Keďže hodnoty funkcií W_t, H_t poznáme len v diskrétnych bodoch d_i (20), potrebujeme hodnoty v ostatných bodoch vhodne aproximovať. My sme pre tento účel použili jednoduchú lineárnu interpoláciu:

$$W_{t+1}(d) = W_{t+1}(d_j) + \frac{W_{t+1}(d_{j+1}) - W_{t+1}(d_j)}{d_{j+1} - d_j} (d - d_j), \quad (27)$$

$$H_{t+1}(d) = H_{t+1}(d_j) + \frac{H_{t+1}(d_{j+1}) - H_{t+1}(d_j)}{d_{j+1} - d_j} (d - d_j), \quad (28)$$

kde d leží v intervale $\langle d_j, d_{j+1} \rangle$ pre nejaké j .

Taktiež je potrebné vhodne si zvoliť okrajové podmienky pre d_{t+1} , ktoré nepadnú do intervalu $\langle d_{min}, d_{max} \rangle$. Naše okrajové podmienky vyzerajú nasledovne:

$$W_{t+1}(d) = W_{t+1}(d_{min}), \text{ pre } d < d_{min} \quad (29)$$

$$W_{t+1}(d) = W_{t+1}(d_{max}), \text{ pre } d > d_{max} \quad (30)$$

$$H_{t+1}(d) = H_{t+1}(d_{min}), \text{ pre } d < d_{min} \quad (31)$$

$$H_{t+1}(d) = H_{t+1}(d_{max}), \text{ pre } d > d_{max} \quad (32)$$

4.3 Parametre

Predpokladáme sporiteľa v druhom pilieri dôchodkového sporenia, ktorému do dôchodku zostáva 40 rokov ($T = 40$). Ako to vyplýva zo slovenského dôchodkového

systemu, prispieva mesačne 9% svojho platu. Bez straty na všeobecnosti, budeme predpokladať pravidelný ročný príspevok 9% z jeho ročného platu. Ďalej predpokladajme, že dôchodcovská správcovska spoločnosť tohto sporiteľa investuje len do dvoch aktív. Jedným sú akcie reprezentované indexom S&P500 a druhým sú 10-ročné vládne dlhopisy Spojených štátov amerických. Index S&P500 má priemerný výnos $\mu_s = 10,28\%$ a štandardnú odchýlku $\sigma_s = 16,90\%$. Naopak dlhopisy sa vyznačujú nižším priemerným výnosom $\mu_b = 5,16\%$ ale aj nižšou štandardnou odchýlkou $\sigma_b = 0,82\%$. Medzi týmito aktívami je aj korelácia, ktorú sme odhadli na úrovni $\rho_{s,b} = -0,1151$. Hodnoty sme použili rovnaké ako v práci [9].

Delenie $\Theta = \langle 0; 1 \rangle$ sme zvolili $\{\theta_i \in \langle 0; 1 \rangle \mid i = 1, \dots, 101\}$. Stredná hodnota výnosu a jeho štandardná odchýlka pre investičnú možnosť θ_i sa vypočítajú pomocou vzťahov (18), (19).

Na rast mzdy na Slovensku ρ_t sme použili výsledky práce [10] od autorov V. Kvetan, M. Mlýnek, V. Páleník a V. Radvanský. Časovú štruktúru rastu mzdy uvádzame v nasledujúcej tabuľke:

Tabuľka 1: Predikcia rastu miezd na Slovensku

Obdobie	Rast mzdy ρ [%]
2006-2008	7,0
2009-2014	7,5
2015-2021	6,5
2022-2024	6,0
2025-2050	5,0

Čo sa týka stavovej premennej d interval $\langle d_{min}; d_{max} \rangle$ sme zvolili $\langle 0,0891; 20 \rangle$ a počet bodov d_i v tomto intervale sme zvolili 500.

Strednú hodnotu stavovej premennej, ktorú budeme v priebehu sporenia - v časoch $t = 1, \dots, T$ sledovať $\mathbb{E}(d_t)$ získame ako priemer z 10000 simulácií vývinu výnosov, pri použití optimálnej investičnej možnosti θ_t v každom z časov $t = 1, \dots, T - 1$. Podobne, pomocou týchto simulácií, získame aj štandardnú odchýlku $Std(d_t)$.

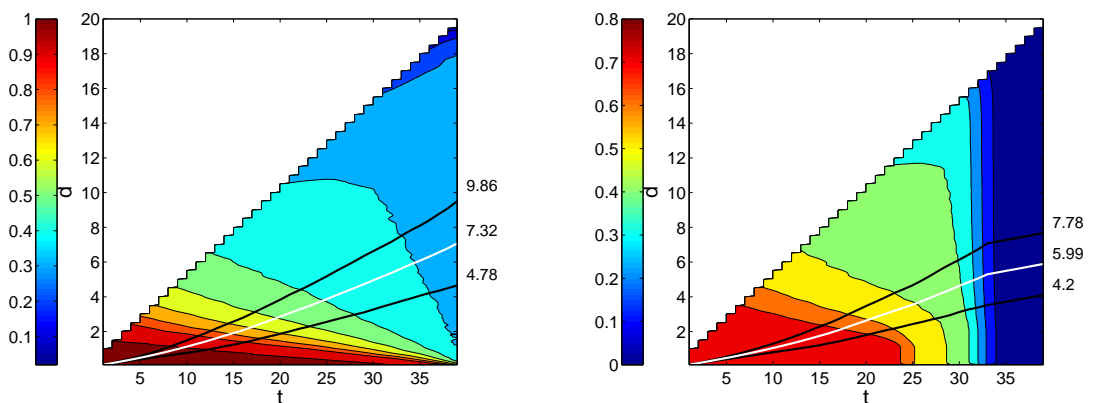
4.4 Výsledky pre normálne rozdelenie výnosov

V nasledujúcej časti popíšeme výsledky optimalizácie pri predpoklade normálneho rozdelenia výnosov. Problém sme riešili pre rôznu úroveň averzie k riziku, konkrétne pre hodnoty α od 5 do 13. Najprv sme sa pozreli na voľbu θ_t pre úlohu bez obmedzení, a potom aj pre úlohu s obmedzeniami. Ako ukazovateľ efektívnosti sme brali vývin strednej hodnoty stavovej premennej $\mathbb{E}(d_t)$ v kombinácii s jeho štandardnou odchýlkou $Std(d_t)$.

Na nasledujúcich obrázkoch (1),(2),(3) sú zobrazené optimálne voľby θ_t v závislosti od času t a hodnoty stavovej premennej d . Namiesto oblasti $\{[t, d] : t \in \langle 1, T - 1 \rangle, d \in \langle d_{min}; d_{max} \rangle\}$ nám bude stačiť poznať optimálnu voľbu θ_t na oblasti $\{[t, d] : t \in \langle 1, T - 1 \rangle, d < \frac{t}{2}\}$, pretože stavová premenná d_t sa na začiatku investície k hodnotám blízkym d_{max} reálne nedostane a až s narastajúcim časom sa nám rozširuje relevantný interval možných hodnôt d_t .

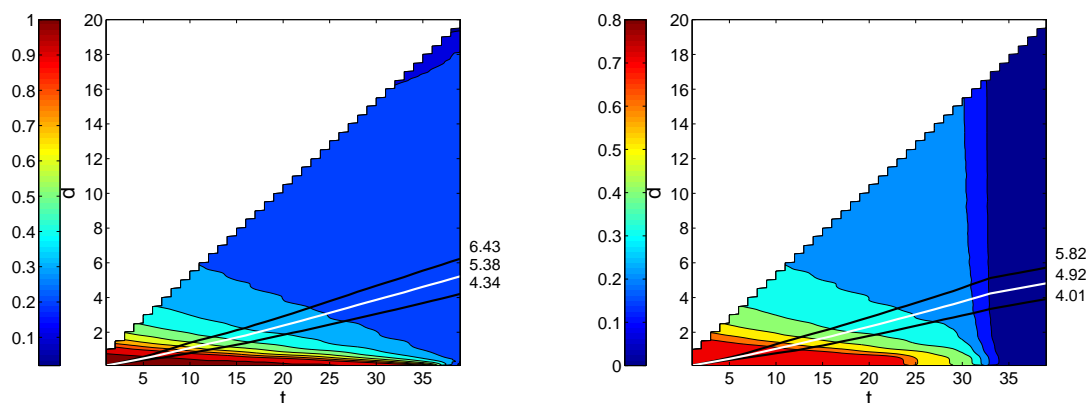
Na každom z grafov je zobrazený aj vývin strednej hodnoty stavovej premennej $\mathbb{E}(d_t)$ (bielou) a aj $\mathbb{E}(d_t) \pm Std(d_t)$ (čiernou).

Na jednotlivých obrázkoch sú zobrazené postupne dvojice výsledkov pre riešenie úlohy bez obmedzení (vľavo) a s obmedzeniami (vpravo). Na obrázku (1) bol použitý koeficient averzie k riziku $\alpha = 5$, na obrázku (2) $\alpha = 9$ a na obrázku (3) $\alpha = 13$.

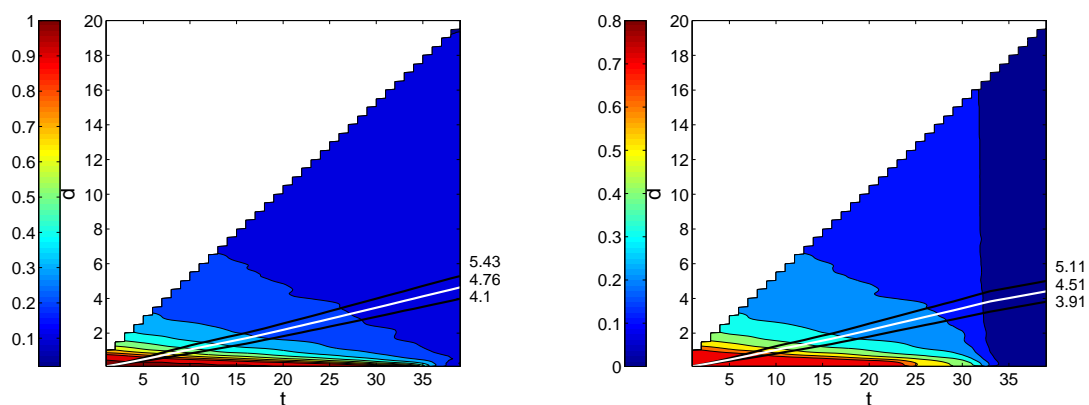


Obr. 1: Optimálna voľba θ pre úlohu bez obmedzení (vľavo) a s obmedzeniami (vpravo) s koeficientom averzie k riziku $\alpha = 5$

Na každom z týchto grafov pozorujeme spoločné črty optimálnych riešení. Na začiatku sporenia si na dôchodok je pre sporiteľa výhodné investovať do



Obr. 2: Optimálna voľba θ pre úlohu bez obmedzení (vľavo) a s obmedzeniami (vpravo) s koeficientom averzie k riziku $\alpha = 9$



Obr. 3: Optimálna voľba θ pre úlohu bez obmedzení (vľavo) a s obmedzeniami (vpravo) s koeficientom averzie k riziku $\alpha = 13$

riskantnejších investičných možností, teda väčšiu proporciu investície dať do akcií. Táto proporcia sa znižuje časom alebo so zvyšujúcou sa hodnotou stavovej premennej. Vidíme však, že vplyv času je nižší ako vplyv výšky premennej d . Tento výsledok je očakávaný, pretože sporiteľovi hovorí, že sa mu oplatí riskovať v prípade, že čas do dôchodku sa mu kráti, ale jeho nasporená suma nie je vysoká. Rizikovejšou pozíciou totiž môže stratiť menej akoby to bolo pri vyššej úrovni stavovej premennej d . Naopak sporiteľovi, ktorý má už v malom čase t dostatočne vysokú nasporenú sumu, sa neoplatí riskovať, pretože môže aj viac stratiť.

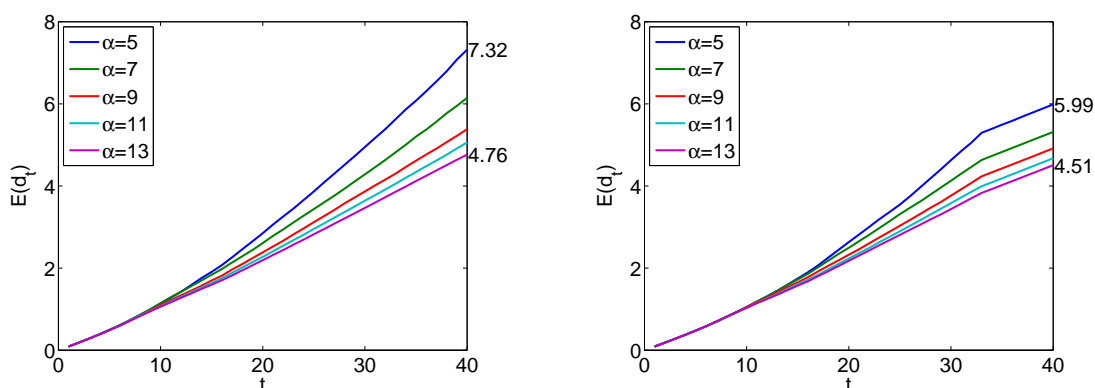
Teraz sa pozrime na rozdiely v optimálnom riešení úlohy v prípade, že berieme do

úvahy legislatívne obmedzenia a v prípade bez obmedzení. V prípade úlohy s obmedzeniami priamo z legislatívnych obmedzení vyplýva, že prípustné riešenia a teda aj to naše optimálne sa pohybuje najvyššie na úrovni 0,8 pre ľubovoľný čas t . Najväčšie rozdiely v riešeniach týchto úloh sú v posledných 7 rokoch sporenia a v prípade nižších hodnôt stavovej premennej v neskorších rokoch (menej ako 15 rokov do dôchodku). Kým optimálne riešenie úlohy bez obmedzení tu sporiteľovi radí riskovať, v riešení úlohy s obmedzeniami to už nie je možné kvôli legislatívnych obmedzeniam. Toto má vplyv hlavne na celkovo nižšiu očakávanú hodnotu $\mathbb{E}(d_T)$ a obmedzenie v posledných 7 rokoch pred dôchodkom má za následok pomalší rast $\mathbb{E}(d_t)$, čo je na grafe viditeľné ako zlom krivky v čase $t = 33$. Okrem zlomu krivky je viditeľné aj to že šírka intervalu $\langle \mathbb{E}(d_t) - Std(d_t), \mathbb{E}(d_t) + Std(d_t) \rangle$ sa v tomto čase začína rozširovať pomalšie, čo je spôsobené veľkým skokom od relatívne rizikových investičných možností k investičnej možnosti predstavujúcej investíciu už len do dlhopisov.

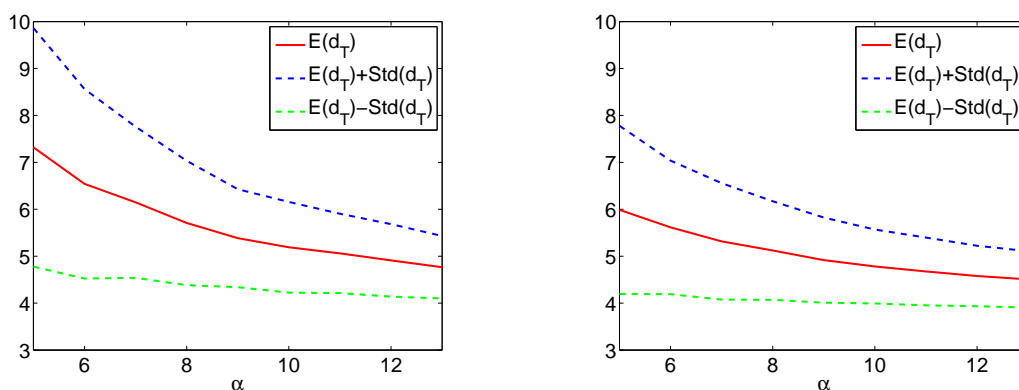
Nakoniec sa pozrime na rozdiely medzi výsledkami pre rôzne úrovne sporiteľovej averzie k riziku. Vidíme, že tak ako sme očakávali, vyššia averzia k riziku spôsobuje skorší prechod od rizikových pozícií k tým s nižším rizikom. To má za následok nižšiu očakávanú hodnotu d_T ale aj užší interval $\langle \mathbb{E}(d_t) - Std(d_t), \mathbb{E}(d_t) + Std(d_t) \rangle$.

Taktiež vidíme, že legislatívne obmedzenia majú najväčší vplyv na výsledky pri najmenej averzii k riziku ($\alpha = 5$), kde sa riešenie pre úlohu s obmedzeniami a pre úlohu bez nich výrazne líši. Pri vysokej averzii k riziku ($\alpha = 13$) je už rozdiel v optimálnom riešení oveľa menší, rozdiel je vidieť už len v posledných 7 rokoch sporenia.

Výsledky podľa našich očakávaní dostávame, aj keď sa pozrieme na vývin stavovej premennej d_t pre rôzne úrovne averzie k riziku (obr. 4). Či je to už pre úlohu bez obmedzení (vľavo) alebo s obmedzeniami (vpravo), vidíme, že čím vyššia je averzia k riziku, tým nižšia je očakávaná hodnota d_t . Rozdiel medzi očakávaniami pre jednotlivé úrovne rizika sa časom logicky zväčšuje. Vidíme taktiež, že pri úlohe s obmedzeniami na váhy aktív sú rozdiely menšie a aj to, že 7 rokov pred ukončením sporenia nastáva viditeľný zlom, pretože legislatívne obmedzenia už nedovoľujú investíciu do akcií a výnosy tak klesajú. Zlom je tým viditeľnejší, čím nižšiu averziu k riziku má sporiteľ.



Obr. 4: Vývin stavovej premennej d_t pre úlohu bez obmedzení (vľavo) a s obmedzeniami (vpravo) pre rôzne úrovne averzie k riziku $\alpha \in \{5, 7, 9, 11, 13\}$



Obr. 5: Závislosť očakávanej hodnoty stavovej premennej na konci sporenia $E(d_T)$ a jej štandardnej odchýlky $Std(d_T)$ od koeficientu averzie k riziku pre úlohu bez obmedzení (vľavo) a s obmedzeniami (vpravo)

Nakoniec sa detailne pozrime na očakávania v čase odchodu sporiteľa na dôchodok, čiže na konci sporenia (obr. 5). Opäť je tu vidieť negatívny vzťah medzi strednou hodnotou stavovej premennej $E(d_T)$ a koeficientom averzie k riziku α . Rovnako, negatívne vplyva koeficient averzie k riziku α aj na štandardnú odchýlku $Std(d_T)$. Toto je spôsobené tým, že pri nižšej averzii k riziku je optimálna voľba θ vyššia a tak sporiteľ investuje do investičnej možnosti síce s vyšším priemerných výnosom, ale aj vyššou varianciou, rizikovosťou. Rovnaké vzťahy platia aj pre úlohu s obmedzeniami na váhy aktív (graf vpravo), no môžeme vidieť, že kvôli legislatívnym obmedzeniam je vplyv averzie nižší.

5 Rozdelenia s ťažkými chvostmi

Tak ako sme v úvode načrtli, je otázne, či výnosy majú normálne rozdelenie. Na empirické dáta sa viac hodia rozdelenia s ťažšími chvostmi. Toto ukázali v svojej práci [1] Andersen, Bollerslev, Diebold a Ebens. Pozreli sa najmä na denné DJIA (Dow Jones Industrial Average) výnosy a zistili, že väčšina akcií má nielen ťažké chvosty, ale je aj zošikmená doprava.

Na pochopenie samotného pojmu „ťažké chvosty“ uvádzame aj matematickú definíciu.

Definícia 5.1. *Hovoríme, že rozdelenie náhodnej premennej X s funkciou hustoty $f_X(x)$ má:*

- *ťažký ľavý chvost, ak platí $f_X(x) \sim |x|^{-(1+\alpha)}$, kde $x \rightarrow -\infty$ a $0 < \alpha < 2$*
- *ťažký pravý chvost, ak platí $f_X(x) \sim x^{-(1+\alpha)}$, kde $x \rightarrow +\infty$ a $0 < \alpha < 2$*
- *ťažké chvosty, ak má ťažký ľavý aj pravý chvost.*

Potom platí, že $Pr[X > x] \sim |x|^{-\alpha}$, kde $x \rightarrow \pm\infty$.

Príkladmi takýchto rozdelení s ťažkými chvostmi sú napríklad Studentovo t-rozdelenie, všeobecné hyperbolické rozdelenie, šikmé Studentovo t-rozdelenie...

V nasledujúcej časti si niektoré z nich bližšie predstavíme.

5.1 Všeobecné hyperbolické rozdelenie

Všeobecné hyperbolické rozdelenie (VHR) bolo predstavené v práci Bandorff-Nielsena v roku 1977 [2]. Trieda VH rozdelení predstavuje mnoho zaujímavých rozdelení vrátane normalizovaného inverzného Gaussovského rozdelenia, hyperbolického rozdelenia, normálneho rozdelenia či šikmého t-rozdelenia.

Aby sme mohli uviesť definíciu VH rozdelenia, uvedieme najprv definíciu modifikovanej Besselovej funkcie tretieho druhu.

Definícia 5.2. *Modifikovaná Besselova funkcia tretieho druhu s parametrom λ je funkcia*

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\lambda-1} e^{-\frac{x}{2}(y+y^{-1})} dy, \quad x > 0.$$

Definícia 5.3. Náhodná premenná X má všeobecné hyperbolické rozdelenie, $X \sim GH(\lambda, \alpha, \beta, \mu, \delta)$ práve vtedy, ak jej funkcia hustoty má tvar

$$f_{GH}(x|\lambda, \alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^\lambda}{\sqrt{2\pi}K_\lambda(\delta\gamma)} e^{\beta(x-\mu)} \left(\frac{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}{\alpha}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} K_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right),$$

kde $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, K_λ je modifikovaná Besselova funkcia tretieho druhu a $x \in \mathbb{R}$.

Pre parametre rozdelenia platia nasledovné obmedzenia:

$$\begin{aligned} \mu, \alpha &\in \mathbb{R}, \\ \delta &\geq 0, |\beta| < \alpha \quad \text{ak } \lambda > 0, \\ \delta &> 0, |\beta| < \alpha \quad \text{ak } \lambda = 0, \\ \delta &> 0, |\beta| \leq \alpha \quad \text{ak } \lambda < 0. \end{aligned}$$

Chvosty všeobecného hyperbolického rozdelenia sa považujú za polotážké a pre $x \rightarrow \pm\infty$ majú približne rozdelenie $f_{GH}(x|\lambda, \alpha, \beta, \mu, \delta) \sim |x|^{\lambda-1} e^{(\mp\alpha+\beta)x}$.

Spomedzi špeciálnych a limitných prípadov VH rozdelenia sú známejšie napr. všeobecné inverzné Gaussovské rozdelenie, hyperbolické rozdelenie či normalizované inverzné Gaussovské rozdelenie. Hyperbolické rozdelenie je špeciálnym prípadom VH rozdelenia pre $\lambda = 1$. Podobne normalizované inverzné Gaussovské rozdelenie je VH rozdelenie s parametrom $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Definícia 5.4. Náhodná premenná X má všeobecné inverzné Gaussovské rozdelenie (General inverse Gaussian distribution), $X \sim GIG(\lambda, \chi, \psi)$ práve vtedy, ak jej funkcia hustoty má tvar

$$f_{GIG}(x|\lambda, \chi, \psi) = \left(\frac{\psi}{\chi}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{2K_\lambda(\sqrt{\chi\psi})} x^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{\chi+\psi x}{2}\right),$$

kde K_λ je modifikovaná Besselova funkcia tretieho druhu a $x > 0$. Pre parametre rozdelenia platia nasledovné obmedzenia:

$$\begin{aligned} \lambda &\in \mathbb{R} \quad \text{ak } \chi > 0, \psi > 0 \\ \lambda &> 0, \psi > 0 \quad \text{ak } \chi = 0 \\ \lambda &< 0, \chi > 0 \quad \text{ak } \psi = 0. \end{aligned}$$

5.2 Normalizované inverzné Gaussovské rozdelenie

Normalizované inverzné Gaussovské rozdelenie (NIG rozdelenie) je špeciálnym prípadom všeobecného hyperbolického rozdelenia. Má štyri parametre α, β, μ a δ , ktoré určujú tvar funkcie hustoty.

Definícia 5.5. *Náhodná premenná X má normalizované inverzné Gaussovské rozdelenie $NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$, ak má jej funkcia hustoty tvar:*

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right) \frac{K_1\left(\alpha\delta\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}},$$

kde K_1 označuje modifikovanú Besselovu funkciu tretieho druhu a obmedzenia na parametre sú $\alpha > 0, \delta > 0, \mu \in \mathbb{R}, 0 \leq |\beta| \leq \alpha$.

Napriek tomu, že funkcia hustoty vyzerá dosť komplikovane, momentová vytvárajúca funkcia tohto rozdelenia má jednoduchý tvar:

$$M_x(t) = \exp\left(t\mu + \delta\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + t)^2}\right)\right). \quad (33)$$

Pomocou tejto funkcie vieme vypočítať prvé štyri momenty - strednú hodnotu, varianciu, šikmosť a kurtózu. Tie môžeme pomocou parametrov rozdelenia vyjadriť nasledovnými vzťahmi:

$$M(X) = \mu + \delta \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \quad (34)$$

$$V(X) = \delta \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^{3/2}} \quad (35)$$

$$S(X) = 3 \frac{\beta}{\alpha \sqrt{\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}} \quad (36)$$

$$K(X) = 3 + 3 \frac{1 + 4\frac{\beta^2}{\alpha^2}}{\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}. \quad (37)$$

Podobne pomocou vzťahov (34) - (37) sa dajú spätne vyjadriť hodnoty parametrov rozdelenia, ak poznáme jeho prvé štyri momenty. Tieto vzťahy uvádzame v nasledujúcej vete, uvedenej aj v práci [4] od autorov A. Ericsson, E. Ghysels a F. Wang.

Veta 5.6. *Nech náhodná premenná X je $NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ rozdelená a nech jej stredná hodnota, variancia, šikmosť a kurtóza sú označené M, V, S, K . Potom vzťahy parametrov a momentov sú:*

$$\alpha = 3 \frac{\sqrt{\rho}}{(\rho - 1)|S|\sqrt{V}} \quad (38)$$

$$\beta = 3 \frac{1}{(\rho - 1)S\sqrt{V}} \quad (39)$$

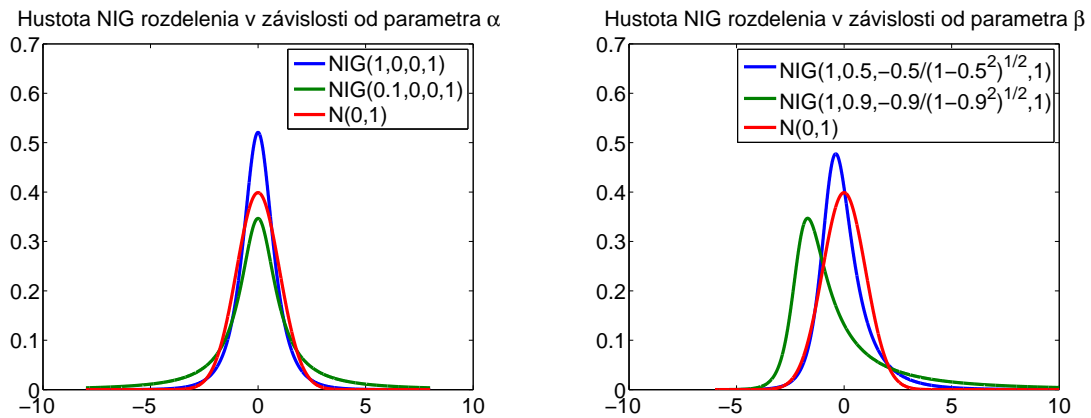
$$\mu = M - 3 \frac{\sqrt{V}}{\rho S} \quad (40)$$

$$\delta = 3 \frac{\sqrt{V}\sqrt{\rho - 1}}{\rho|S|}, \quad (41)$$

kde $\rho = 3(K - 3)S^{-2} - 4 > 1$.

5.2.1 Význam parametrov NIG rozdelenia

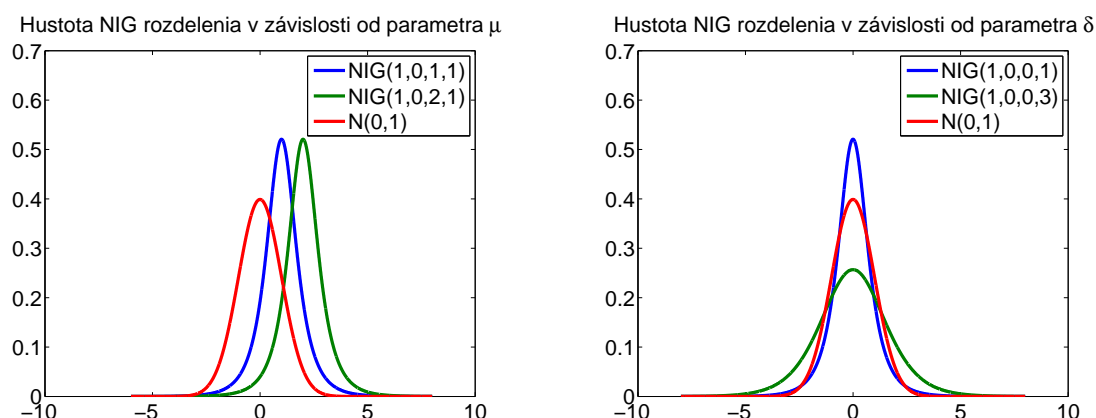
Kým prvé dva parametre α a β určujú tvar funkcie, μ a δ sú škálovacie parametre. Na nasledujúcich obrázkoch (6), (7) sú znázornené závislosti funkcie hustoty od parametrov rozdelenia α, β, μ a δ .



Obr. 6: Hustoty pre rôzne hodnoty parametrov α a β

α ovplyvňuje špicatosť rozdelenia. Čím je väčšia, tým sa pravdepodobnosť viac sústreďuje okolo strednej hodnoty.

β určuje šikmosť rozdelenia. Ak je $\beta = 0$, potom je rozdelenie symetrické. Ak je β záporná, rozdelenie je zošikmené doprava - má ťažší ľavý chvost a naopak, ak je kladná, rozdelenie je zošikmené doľava - má ťažší pravý chvost.



Obr. 7: Hustoty pre rôzne hodnoty parametrov μ a δ

Závislosť hustoty od parametra μ je jednoduchá - zmenou μ o konštantu k sa len celá funkcia hustoty posunie a to o rovnakú konštantu. μ však vo všeobecnosti nie je stredná hodnota rozdelenia, μ sa rovná strednej hodnote len ak $\beta = 0$.

Ako sme spomínali, posledný parameter δ je škálovacím parametrom a určuje disperziu rozdelenia.

5.2.2 Spojitosť medzi NIG a normálnym rozdelením

Na rozdiel od normálneho (Gaussovského) rozdelenia má NIG rozdelenie viac parametrov, čo mu umožňuje viac voľnosti a tým lepšie možnosti pri popisovaní dát týmto rozdelením. Na reálne dáta sa totiž vo väčšine prípadov hodí viac NIG rozdelenie s nenulovou šikmostou a kurtózou rôznou od hodnoty 3, ktoré by odpovedali normálnemu rozdeleniu.

Pred uvedením si rozdielov je dôležité pochopiť aj podobnosť týchto rozdelení. Pri vhodnom navolení parametrov NIG rozdelenia vieme dostať rozdelenie, ktoré sa približuje Gaussovskému rozdeleniu.

Majme premennú X , ktorá je normálne rozdelená s parametrami $\tilde{\mu}$ a $\tilde{\sigma}^2$. Pomocou vzťahov (34) - (37) odvodíme hodnoty parametrov $NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$, ktoré by čo najlepšie odpovedali normálnemu rozdeleniu $N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$.

Keďže normálnemu rozdeleniu odpovedajú nulová šikmosť a kurtóza o hodnote 3, tak

vzťahy (34) - (37) budú v našom prípade nasledovné:

$$M(X) = \mu + \delta \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} = \tilde{\mu} \quad (42)$$

$$V(X) = \delta \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^{3/2}} = \tilde{\sigma}^2 \quad (43)$$

$$S(X) = 3 \frac{\beta}{\alpha \sqrt{\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}} = 0 \quad (44)$$

$$K(X) = 3 + 3 \frac{1 + 4 \frac{\beta^2}{\alpha^2}}{\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} = 3. \quad (45)$$

Vidíme, že hodnotu šikmosti 0 dosiahneme len nastavením parametra $\beta = 0$. Hodnotu kurtózy 3 však vieme dosiahnuť iba v limitnom prípade, pretože pri podmienkach na parametre NIG rozdelenia ($\alpha > 0, \delta > 0, \mu \in \mathbb{R}, 0 \leq |\beta| \leq \alpha$) vidíme, že $K > 3$.

Po dosadení parametra $\beta = 0$ a po zmene požadovanej kurtózy na hodnotu $3 + \varepsilon$, kde ε je nekonečne malé, sa nám vzťahy zmenia nasledovne:

$$M(X) = \mu = \tilde{\mu} \quad (46)$$

$$V(X) = \frac{\delta}{\alpha} = \tilde{\sigma}^2 \quad (47)$$

$$S(X) = 0 \quad (48)$$

$$K(X) = 3 + \frac{3}{\delta \alpha} = 3 + \varepsilon. \quad (49)$$

Potom je už jednoduchým dopočítaním možné vyjadriť vzťah medzi parametrami NIG a normálneho rozdelenia:

$$N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2) \sim NIG\left(\frac{1}{\tilde{\sigma}} \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}, 0, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma} \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}\right) \text{ pre } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

V tabuľke (2) sa bližšie pozrieme na konvergenciu NIG rozdelenia. Snažíme sa nájsť čo najpodobnejšie NIG rozdelenie k normálnemu rozdeleniu $N(0, 05; 0, 01)$. Sledujeme pri tom, ako sa vyvíjajú parametre NIG rozdelenia, prvé štyri momenty a veľkosť rozdielu medzi funkciami hustôt jednotlivých rozdelení.

Môžeme sledovať, že znižovaním ε skutočne dostávame rozdelenie, ktoré konverguje k normálnemu. Vidíme však aj to, že v praxi nemôžeme ε znížiť na ľubovoľnú hodnotu, pretože pri veľmi nízkych hodnotách (ako je to tu pre 0,001), je už problém s numerickým výpočtom hodnôt funkcie hustoty f_{NIG} .

Tabuľka 2: Konvergencia NIG rozdelenia k požadovanému normálnemu rozdeleniu $N(0, 05; 0, 01)$

ε	α	β	μ	δ	M	V	S	K	$\max(f_N(x) - f_{NIG}(x))$
1	17,3205	0	0,05	0,1732	0,05	0,01	0	4	0,4574
0,5	24,4949	0	0,05	0,2449	0,05	0,01	0	3,5	0,2379
0,1	54,7723	0	0,05	0,5477	0,05	0,01	0	3,1	0,0494
0,01	173,2051	0	0,05	1,7321	0,05	0,01	0	3,01	0,005
0,001	547,7226	0	0,05	5,4772	0,05	0,01	0	3,001	NaN

5.2.3 Limity NIG rozdelenia

Aj napriek zdanlivej podobnosti NIG rozdelenia a normálneho rozdelenia, je práca s NIG rozdelením značne zložitejšia. Problém nastáva najmä pri sčítovaní dvoch NIG rozdelených náhodných premenných. Vlastnosti NIG rozdelenia si bližšie popíšeme v nasledujúcom tvrdení.

Tvrdenie 5.7. *Trieda NIG rozdelení má nasledovné vlastnosti:*

1. *Škálovacia vlastnosť: Ak $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$, potom premenná $Y = cX \sim NIG(\frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c}, c\mu, c\delta)$.*
2. *Konvolúcia: Ak $X_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1, \delta_1)$ a $X_2 \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_2, \delta_2)$ sú nezávislé, potom ich súčet $Y = X_1 + X_2 \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1 + \mu_2, \delta_1 + \delta_2)$.*
3. *Štandardizácia: Ak $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$, potom premenná $Y = \frac{X-\mu}{\delta}$ má štandardizované NIG rozdelenie $NIG(\alpha\delta, \beta\delta, 0, 1)$.*

Vidíme teda, že pri práci s portfóliom pozostávajúcim z aktív, ktorých výnosy sú NIG rozdelené, nemôžeme automaticky predpokladať, že aj výnosy portfólia budú z NIG rozdelenia, ako je to pri Gaussovskom rozdelení. V tomto prípade sa môžeme aspoň pokúsiť aproximovať rozdelenie výnosov portfólia NIG rozdelením a parametre odhadnúť pomocou prvých štyroch výberových momentov dát cez vzťahy (38) - (41). Ďalšou problematickou časťou práce s NIG rozdelením, je praktické generovanie realizácií dvoch náhodných premenných s konkrétnou nenulovou koreláciou. Zvoliť postup generovania tak, aby nám sedelo všetkých 9 parametrov (4 parametre pre dve

NIG rozdelenia a ich korelácia), je oveľa zložitejšie ako pri normálnom rozdelení. Pre normálne rozdelenie je potrebné, aby sedelo len 5 parametrov. Pri generovaní normálnych náhodných premenných sa tento problém rieši s využitím Choleského rozkladu požadovanej kovariančnej matice generovaných náhodných premenných. Pre NIG rozdelenie budeme v tejto práci ďalej pracovať s predpokladom, že korelácia výnosov S&P indexu a dlhopisov je nulová. Tak sa náš problém zmení na jednoduchý problém generovania realizácií náhodnej premennej zo známeho rozdelenia.

5.3 Reálne dáta

V tejto časti sa budeme venovať motivácii k použitiu NIG rozdelenia. Pozrieme sa na reálne dáta a na to, ako dobre vieme ich rozdelenie popísať normálnym a NIG rozdelením.

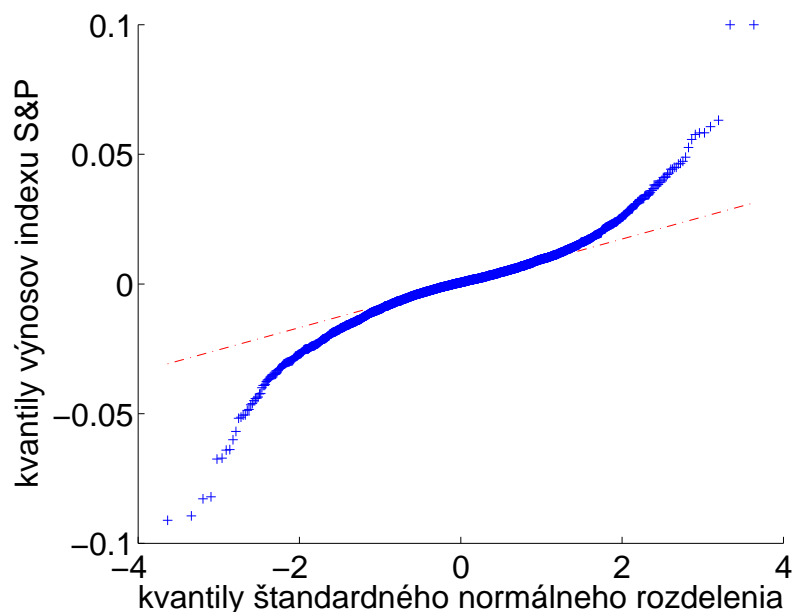
Skúmaním reálnych dát sa zaoberal napríklad aj Omer Onalan [15], ktorý sa zamerl najmä na dáta dvoch indexov S&P500 a VIX. Ukázal, že denné spojité výnosy ani jedného z indexov nemajú normálne rozdelenie, pretože šikmosť a kurtóza nadobúdajú hodnoty netypické pre normálne rozdelenie. Konkrétne zistené hodnoty sú uvedené v tabuľke (3). Následne pomocou týchto momentov odhadol parametre NIG rozdelenia. Hustota tohto NIG rozdelenia bola veľmi podobná empirickej hustote a popisovala správanie výnosov na chvostoch oveľa lepšie ako hustota normálneho rozdelenia.

Tabuľka 3: Výberové momenty dát pre S&P a VIX index

index	stredná hodnota	štand. odchýlka	šikmosť	kurtóza
S&P500	-0,00013	0,0142	-0,1213	11,89
VIX	0,00019	0,061	0,5744	7,53

Zoberme si reálne dáta pre S&P index za obdobie 3.1.2000 až 26.3.2014. Denné spojité výnosy sa pohybujú v priemere na úrovni $6,723 \cdot 10^{-5}$ a štandardná odchýlka má hodnotu 0,0126. Podobne ako v práci [15] aj my zisťujeme, že v dátach je nenulová šikmosť, v našom prípade na úrovni -0,2205, a aj vysoká kurtóza 10,2985, čo naznačuje, že výnosy nie sú normálne rozdelené.

To, že naše dáta majú skutočne ťažšie chvosty, ako je to u normálneho rozdelenia, je vidieť na obrázku (8). Na tomto obrázku je zobrazený Q-Q plot, ktorý vykresľuje



Obr. 8: Q-Q plot výnosov S&P indexu

vzťah medzi kvantilmi našich dát a kvantilmi normálneho rozdelenia. Ak by naše dáta boli normálne rozdelené, body by ležali na priamke, ktorá je tu zobrazená červenou prerušovanou čiarou.

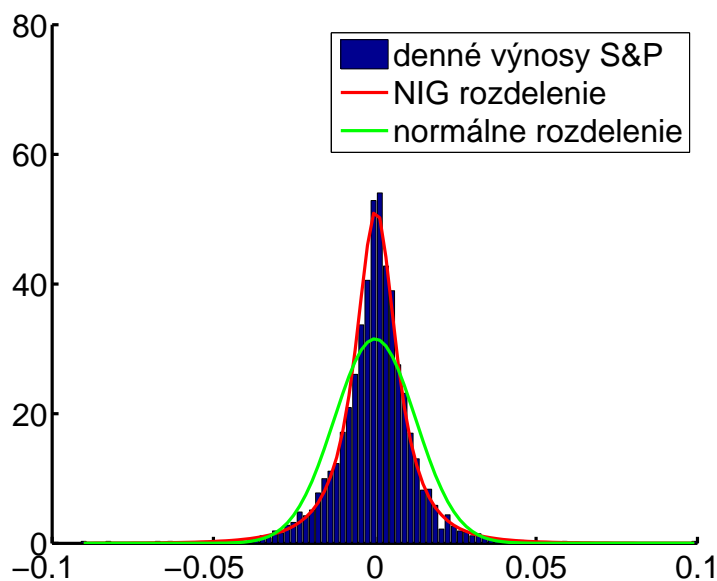
Na obrázku (9) je zobrazené rozdelenie reálnych dát, ktoré sme sa snažili popísať normálnym aj NIG rozdelením. Parametre jednotlivých rozdelení sme odhadli u normálneho rozdelenia cez prvé dva a u NIG rozdelenia cez prvé štyri momenty. Na tomto obrázku je veľmi dobre vidieť, že kurtóza (špicatosť) rozdelenia vôbec neodpovedá normálnemu rozdeleniu, ale lepšie popisuje dáta NIG rozdelenie.

Samotná šikmosť tu nie je až taká výrazná, ale pri bližšom skúmaní je vidieť, že rozdelenie nie je symetrické, ale je mierne zošikmené doprava.

Pri odhade parametrov rozdelenia hrá dôležitú rolu dĺžka historického obdobia, ktorú si zvolíme. Pre rôzne dĺžky zvoleného obdobia totiž dostávame rôzne odhady. Zoberme si historické dáta ročných výnosov za obdobie 1.3.2000 až 31.3.2014. Pozrieme sa, ako sa pre rôznu dĺžku zvoleného obdobia budú meniť výberové momenty.

V tabuľke (4) sú zobrazené výberové momenty a aj odhady parametrov NIG rozdelenia pri použití historických dát za posledných 4,7,10 a 13 rokov.

Vidíme, že všetky momenty sú na výber braného časového okna citlivé. Hodnota



Obr. 9: Rozdelenie reálnych dát a jeho fit pomocou funkcie hustoty normálneho a NIG rozdelenia

šikmosti sa pohybuje od kladných hodnôt (0,3596) až po výrazne záporné (-1,5775). Kurtóza sa drží nad úrovňou 3, typickou pre normálne rozdelenie, pohybuje sa medzi hodnotami 4 a 8. Rovnako citlivé na výber časového obdobia sú aj stredná hodnota a variancia. Zaujímavé je napr. obdobie za posledných 7 rokov, ktoré začína v marci

Tabuľka 4: Výberové momenty a odhady parametrov pre ročné výnosy S&P indexu

počet rokov	4	7	10	13
M	0,1202	0,0401	0,0506	0,0348
V	0,0025	0,0902	0,0604	0,0609
S	0,3596	-1,3088	-1,5775	-1,1054
K	4,1746	5,9606	7,7668	5,0391
α	36,3339	44,8593	13,7012	1841,2585
β	7,53	-41,20	-10,37	-1835,77
μ	0,10	0,62	0,32	0,70
δ	0,08	0,25	0,23	0,05

2008 a pokrýva hlavne krízové obdobie. To sa prejavuje značne nižším priemerným výnosom (hlavne oproti 4-ročnému obdobiu) a taktiež oveľa vyššou variáciou. Keďže vplyv strednej hodnoty a variancie výnosov na optimálnu voľbu časti θ je jasný, sústredíme sa najmä na to, ako budú na výsledky vplývať hodnoty ostatných dvoch momentov šikmosti S a špicatosti K . Pre danú strednú hodnotu a varianciu sa pozrieme na rôzne kombinácie S a K spĺňajúce podmienku $K > 3 + \frac{5}{3}S^2$. Táto podmienka musí byť splnená, aby sme vedeli odhadnúť parametre NIG rozdelenia zo vzťahov (38)-(41).

6 Výsledky optimalizácie pre NIG rozdelenie

V tejto časti popíšeme výsledky optimalizácie a použitý postup pri predpoklade, že výnosy akcií a dlhopisov majú NIG rozdelenie. Tieto výsledky porovnáme s výsledkami získanými pri predpoklade normality výnosov. Okrem toho preskúmame vplyv šikmosti a špicatosti na výsledky optimalizácie.

Použitý postup je z väčšej časti zhodný s postupom, ktorý sme použili v časti (4.2). Hodnoty funkcie V_t v časoch $T, \dots, 1$ budeme opäť počítat v m diskrétnych bodoch d_i . Body d_i budú bodmi delenia intervalu $\langle d_{min}; d_{max} \rangle$ na $m - 1$ rovnako dlhých podintervalov, teda

$$d_i = d_{min} + i \frac{d_{max} - d_{min}}{m - 1}, \quad i = 0, \dots, m - 1. \quad (50)$$

Delenie intervalu $\Theta = \langle 0, 1 \rangle$ bude $\{\theta_k = \frac{k}{n_\theta}, k = 0, \dots, n_\theta\}$.

Opäť je potrebné pre každé θ vypočítat $\int_{\mathbb{R}} V_{t+1}(d_{t+1}) f^\theta(r) dr$, kde f^θ je funkcia hustoty výnosov investičnej možnosti pozostávajúcej z θ časti akcií a $(1 - \theta)$ časti dlhopisov.

Ako sme už hovorili v časti (5.2.3), nemôžeme automaticky predpokladať, že tieto výnosy budú NIG rozdelené. My však budeme pracovať s predpokladom, že sa tieto výnosy dajú NIG rozdelením dobre aproximovať. Parametre NIG rozdelenia $\alpha_\theta, \beta_\theta, \mu_\theta, \delta_\theta$ vypočítame zo vzťahov (38) - (41).

Pri výpočte samotného integrálu

$$\int_{\mathbb{R}} V_{t+1}(d_{t+1}) f^\theta(r) dr$$

sa opäť stretávame s problémom veľkej variancie hodnôt funkcie V_t . Preto zavedieme rovnaké škálovanie ako v predchádzajúcom prípade. Funkciu $V_t(d)$ budeme škálovať ohraňenou kladnou funkciou $H_t(d)$ definovanou ako:

$$H_T = \frac{1}{\sqrt{1 + V_T^2}} \quad (51)$$

$$H_t = \frac{1}{\sqrt{1 + V_{t+1}^2}} \quad \text{pre } t = T - 1, \dots, 1 \quad (52)$$

a dostaneme tak novú funkciu $W_t(d) = H_t(d)V_t(d)$.

Problém

$$V_t(d_t) = \max_{\theta \in \Theta} \int_{\mathbb{R}} V_{t+1}(d_{t+1}) f^\theta(r) dr$$

sa zmení nasledovne:

$$W_t(d_t) = \max_{\theta \in \Theta} \int_{\mathbb{R}} W_{t+1}(d_{t+1}) \frac{H_t(d_t)}{H_{t+1}(d_{t+1})} f^\theta(r) dr,$$

kde f^θ je funkcia hustoty NIG rozdelenia s parametrami $\alpha_\theta, \beta_\theta, \mu_\theta, \delta_\theta$.

Pri numerickom výpočte integrálu potrebujeme opäť obmedziť integračnú oblasť \mathbb{R} , na ohraničený interval, ktorý s čo najväčšou pravdepodobnosťou pokryje výnosy danej investičnej možnosti. Keďže však teraz budeme pracovať s rozdelením, ktoré má ťažšie chvosty ako normálne rozdelenie, bude treba brať do úvahy širší interval ako interval $\langle r_\theta - 3\sigma_\theta; r_\theta + 3\sigma_\theta \rangle$, kde r_θ predstavuje priemerný výnos a σ_θ predstavuje štandardnú odchýlku pre investíciu θ .

Pri voľbe intervalu v tvare $\langle r_\theta - k\sigma_\theta; r_\theta + k\sigma_\theta \rangle$ pre $k > 0$, si treba uvedomiť, že vo všeobecnosti pre ľubovoľné parametre NIG rozdelenia neplatí, že plocha pod zvyškom ľavého chvosta $(-\infty; r_\theta - k\sigma_\theta)$ a pravého chvosta $(r_\theta + k\sigma_\theta; \infty)$ je rovnaká. Aby rozdiel týchto plôch nebol príliš veľký, rozhodli sme sa pre použitie dosť širokého intervalu s parametrom $k = 15$, čiže $\langle r_\theta - 15\sigma_\theta; r_\theta + 15\sigma_\theta \rangle$.

Na výpočet samotného integrálu použijeme tento krát Legendre-Gaussovú kvadratúru, s počtom ekvidištancných bodov $n = 50$. Legendre-Gaussova kvadratúra aproximuje integrál nasledovne:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

kde x_i sú korene Legendrovho polynómu $P_n(x)$ a váhy w_i vypočítame ako:

$$w_i = \frac{A_n}{A_{n-1}} \frac{\gamma_{n-1}}{P_{n-1}(x_i)P'_n(x_i)},$$

pričom

$$A_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \quad \text{a} \quad \gamma_n = \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Integračnú oblasť $\langle -1, 1 \rangle$ rozšírime na ľubovoľný interval $\langle a, b \rangle$ jednoduchou transformáciou:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right) dx \simeq \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right).$$

Čo sa týka problému s aproximovaním hodnôt funkcií W_t, H_t v bodoch rôznych od bodov delenia premennej d (50), budeme ho riešiť rovnako ako v predchádzajúcom prípade, čiže lineárnou interpoláciou, a v bodoch mimo intervalu $\langle d_{min}; d_{max} \rangle$ budeme aproximovať hodnotami v krajných bodoch, viď vzťahy (27),(28),(29)-(32).

6.1 Parametre

Parametre použité v tejto časti sa z veľkej časti zhodujú s parametrami z časti (4.3). Opäť predpokladáme sporiteľa v druhom pilieri dôchodkového sporenia, ktorému do dôchodku zostáva 40 rokov. Sporiteľ si prispieva raz ročne 9% zo svojho ročného platu.

Dôchodcovská správcovská spoločnosť, rovnako ako v predchádzajúcom prípade, investuje len do dvoch aktív. Jedným sú akcie reprezentované indexom S&P500 a druhým sú 10-ročné vládne dlhopisy Spojených štátov amerických. Index S&P500 má priemerný výnos 10,28% a štandardnú odchýlku 16,9%. Dlhopisy majú priemerný výnos 5,16% a štandardnú odchýlku 0,82%. Koreláciu medzi týmito aktívami sme odhadli na úrovni $\rho_{s,b} = -0,1151$. Ako sme hovorili v časti (5.2.3), ďalej budeme pracovať s predpokladom, že korelácia medzi týmito aktívami je nulová.

Na rozdiel od časti (4.3) však budeme predpokladať, že výnosy sú NIG rozdelené. Preto nás nezaujímajú len stredná hodnota a štandardná odchýlka, ale aj šikmosť a kurtóza. Pre S&P index vykonáme výpočty pre rôzne hodnoty šikmosti a kurtózy z množiny

$$\{[S, K] : S \in \langle -1, 5; 1, 5 \rangle, K \in \langle 4; 11 \rangle, K > 3 + \frac{5}{3}S^2\}.$$

Keďže pre výnosy dlhopisov v dátach nepozorujeme zvýšenú kurtózu ani výraznejšiu šikmosť, ako je to pri NIG rozdelení, budeme počítat s NIG rozdelením odpovedajúcim normálnemu rozdeleniu. Pri voľbe parametrov sa riadime postupom popísaným v podkapitole (5.2.2), konkrétne použijeme hodnoty pre šikmosť $S = 0$ a pre špicatosť $K = 3,01$.

Delenie $\Theta = \langle 0; 1 \rangle$ zostáva rovnaké $\{\theta_i \in \langle 0; 1 \rangle \mid i = 1, \dots, 101\}$. Použité hodnoty rastu mzdy na Slovensku sú uvedené v tabuľke (1). Interval pre stavovú premennú d zostáva tiež rovnaký $\langle d_{min}; d_{max} \rangle = \langle 0,0891; 20 \rangle$ a rovnaký zostáva aj počet bodov d_i v tomto intervale $m = 500$.

Strednú hodnotu stavovej premennej, ktorú budeme v priebehu sporenia - v časoch $t = 1, \dots, T$ sledovať $\mathbb{E}(d_t)$ získame ako priemer z 10000 simulácií vývinu výnosov, pri použití optimálnej investičnej možnosti θ_t v každom z časov $t = 1, \dots, T - 1$. Podobne, pomocou týchto simulácií, získame aj štandardnú odchýlku $Std(d_t)$.

6.2 Výsledky pre NIG rozdelenie výnosov

V nasledujúcej časti popíšeme výsledky optimalizácie pri predpoklade NIG rozdelenia výnosov a to pre rôzne úrovne averzie k riziku, pre rôzne kombinácie šikmosti a špicatosti a pre úlohu s obmedzeniami na optimálnu voľbu θ aj bez nich.

6.2.1 Odhad parametrov NIG rozdelenia

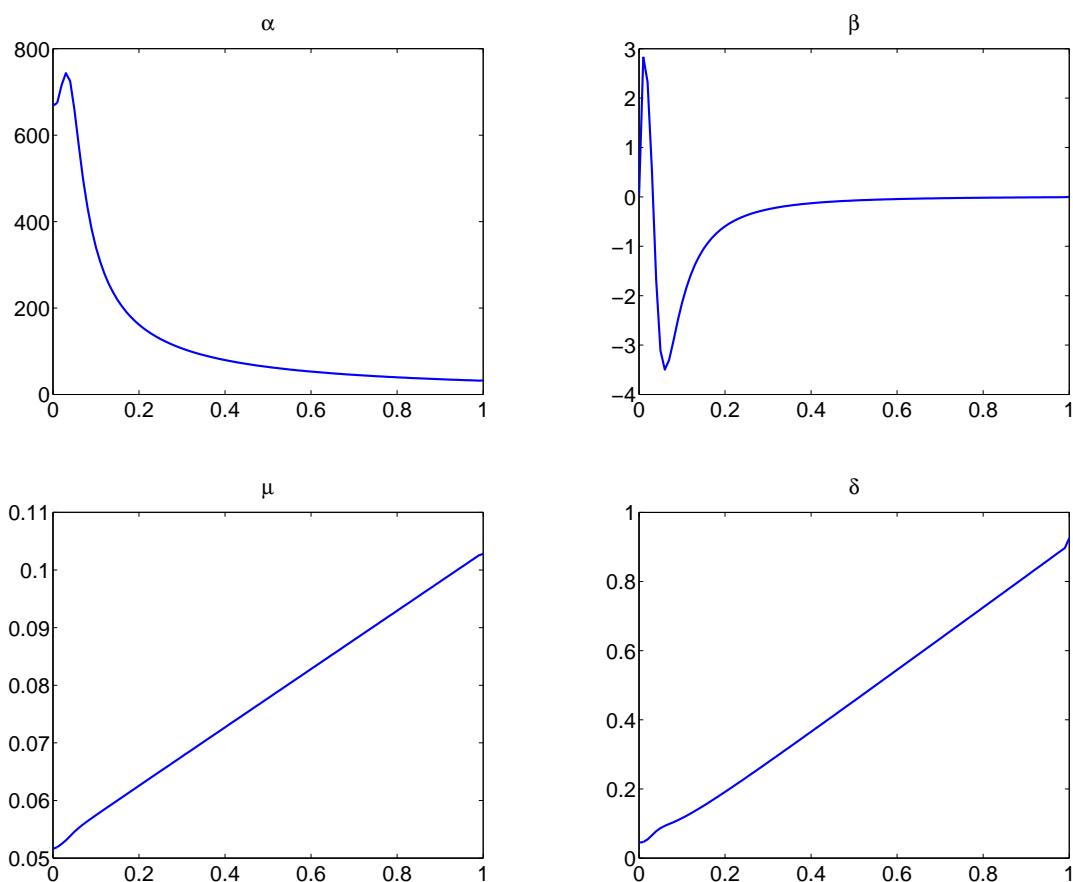
Predtým, ako sa pozrieme na konkrétne výsledky, pozrime sa na dôležitú časť výpočtu a to na odhad parametrov NIG rozdelenia. Ako sme vraveli v časti (5.2.3), výnos portfólia pozostávajúceho z θ časti akcií a z $(1 - \theta)$ časti dlhopisov, ktorých výnosy sú NIG rozdelené, nie je tiež NIG rozdelený. My však budeme predpokladať, že sa dá NIG rozdelením dobre aproximovať. Odhad parametrov rozdelenia $\alpha_\theta, \beta_\theta, \mu_\theta, \delta_\theta$ pre jednotlivé θ získame zo vzťahov (38) - (41).

Z grafov na obrázku (10) vidíme, že kým pre parametre μ a δ je závislosť od θ lineárna, pri parametroch α a β to už neplatí. Okrem toho by sme intuitívne čakali, že tieto odhady budú monotónne, čo pre parametre α a β neplatí.

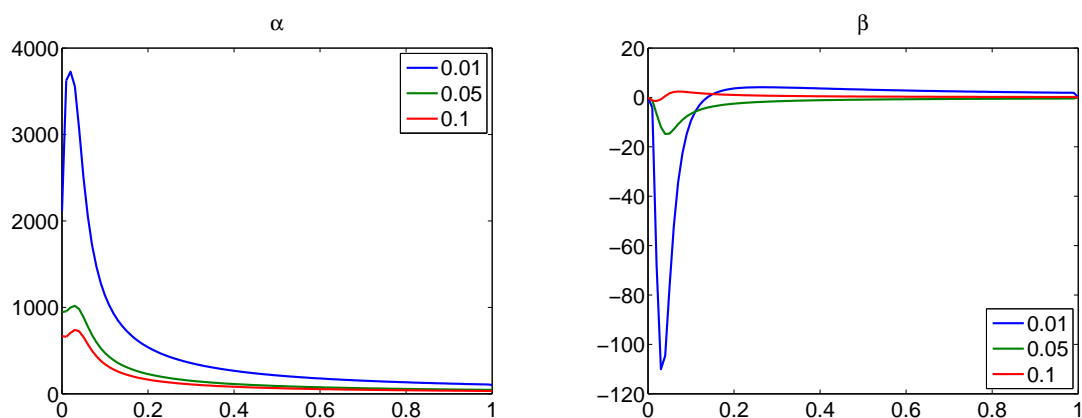
Pri aproximácii rozdelenia zisťujeme, že odhad parametrov $\alpha, \beta, \mu, \delta$ je ovplyvnený podmienkou na momenty $K > 3 + \frac{5}{3}S^2$ a to konkrétne jej rezervou $K - 3 - \frac{5}{3}S^2$. Pri odhade parametrov na obr. (10) sme pracovali s navolenými parametrami tak, že rezerva tejto podmienky bola na úrovni 0,1 ($K=3,1$ a $S=0$).

Táto rezerva vplýva na všetky parametre no najviac na parametre α a β . Závislosť odhadov $\alpha_\theta, \beta_\theta$ od θ pri rôznych úrovniach rezervy v podmienke je zobrazená na obrázku (11).

Je teda možné, že v prípade navolenia parametrov rozdelenia výnosov dlhopisov a akciového indexu tak, že ich momenty šikmosti a kurtóza budú spĺňať podmienku $K > 3 + \frac{5}{3}S^2$ s malou rezervou, budeme dostávať menej presné odhady $\alpha_\theta, \beta_\theta, \mu_\theta, \delta_\theta$ a teda aj menej presné výsledky optimalizácie.



Obr. 10: Vzťah medzi θ a odhadnutými parametrami rozdelenia $\alpha, \beta, \mu, \delta$.



Obr. 11: Odhady parametrov α_θ a β_θ pre rôznu úroveň rezervy v podmienke $K > 3 + \frac{5}{3}S^2$.

6.2.2 Porovnanie výsledkov pre normálne a NIG rozdelenie

Nízku hodnotu rozdielu $K - 3 - \frac{5}{3}S^2$ dostávame napr. aj vtedy, ak volíme parametre NIG rozdelenia tak, aby odpovedalo normálnemu rozdeleniu. Pri použití parametrov

odvodených v podkapitole (5.2.2) dostávame rezervu

$$K - 3 - \frac{5}{3}S^2 = 3 + \varepsilon - 3 - \frac{5}{3}0^2 = \varepsilon.$$

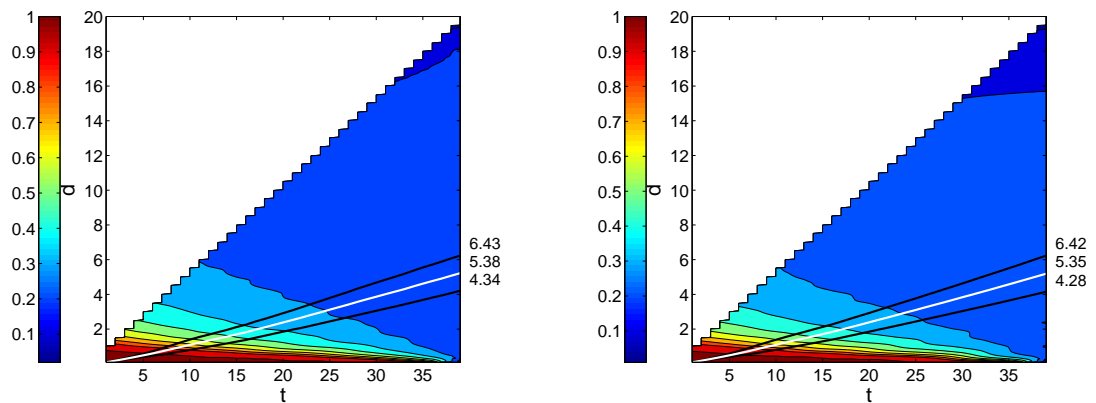
Pozrime sa na konkrétne výsledky optimalizácie v prípade, že rezervu ε zvolíme 0,01.

Prehľad použitých parametrov sa nachádza v tabuľke (5). Výsledky následne porovnáme s výsledkami získanými v kapitole (4).

Tabuľka 5: Voľba parametrov pre NIG rozdelenie odpovedajúce normálnemu rozdeleniu s $\varepsilon = 0,01$

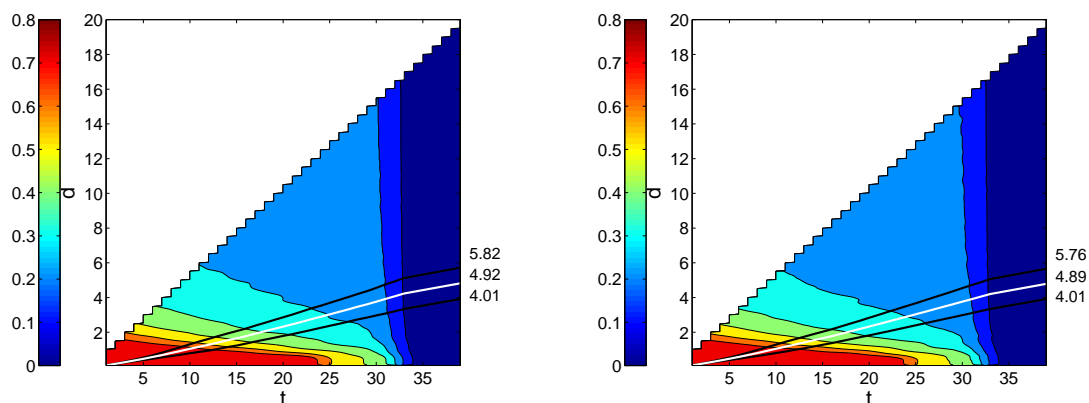
	M	V	S	K	α	β	μ	δ
S&P500	0,1028	0,1690	0	3,01	102,5	0	0,1028	2,9272
dlhopisy	0,0516	0,0082	0	3,01	2112,3	0	0,0516	0,1420

Porovnanie riešení optimalizácie pre úlohu bez obmedzení aj s obmedzeniami pri predpoklade normálneho rozdelenia a NIG rozdelenia je zobrazené na obrázkoch (12) a (13).



Obr. 12: Optimálna voľba θ pre úlohu bez obmedzení pri predpoklade normálneho rozdelenia (vľavo) a NIG rozdelenia (vpravo) s koeficientom averzie k riziku $\alpha = 9$.

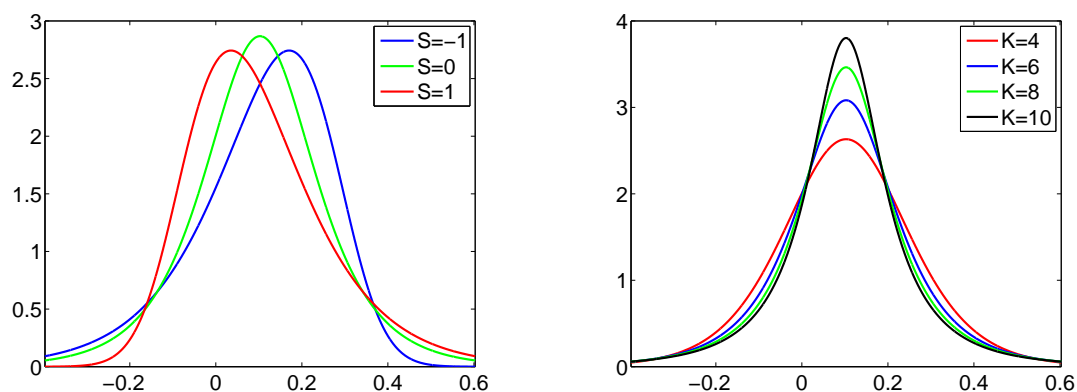
Vidíme, že riešenia sú aj napriek nepresnostiam v odhade parametrov takmer zhodné. Rozdiely v optimálnej časti θ i v očakávanej hodnote stavovej premennej $\mathbb{E}(d_t)$ sú len minimálne.



Obr. 13: Optimálna voľba θ pre úlohu bez s obmedzeniami pri predpoklade normálneho rozdelenia (vľavo) a NIG rozdelenia (vpravo) s koeficientom averzie k riziku $\alpha = 9$.

6.2.3 Vplyv šikmosti a špicatosti na výsledky optimalizácie

Ukázali sme, že pre normálne rozdelenie a NIG rozdelenie so špicatostou a šikmostou odpovedajúcou normálnemu rozdeleniu, dostávame zhodné riešenia. V nasledujúcej časti sa naopak zameriame na prípady, keď šikmosť a kurtóza nemajú "normálne" hodnoty. Okrem analýzy vplyvu averzie k riziku na výsledky sa pozrieme na to, ako na $\mathbb{E}(d_t)$ a $Std(d_t)$ vplývajú hodnoty šikmosti a špicatosti.



Obr. 14: Funkcia hustoty pre rôzne hodnoty šikmosti S pri parametroch $M = 0, 1028, V = 0, 169^2$ a $K = 5$ (vľavo) a funkcia hustoty pre rôzne hodnoty špicatosti K pri parametroch $M = 0, 1028, V = 0, 169^2$ a $S = 0$ (vpravo).

Na obrázku (14) je zobrazená funkcia hustoty výnosov indexu S&P500 pri rôznej voľbe šikmosti a kurtózy. Vidíme, že pri zápornej šikmosti, je riziko veľmi nízkych

výnosov oveľa vyššie ako pri kladnej šikmosti. Pravdepodobnosť výnosov o niečo vyšších ako priemer je však tiež vyššia. Je otázne, ktorý z týchto aspektov teda zaváži viac a či máme očakávať, že vplyv šikmosti na optimálnu voľbu časti θ bude kladný alebo naopak záporný. Výsledok môže samozrejme závisieť aj od averzie investora k riziku. Pre investora s vysokou averziou k riziku by malo skôr platiť, že čím nižšia (zápornejšia) bude šikmosť rozdelenia, tým nižšia bude optimálna časť θ .

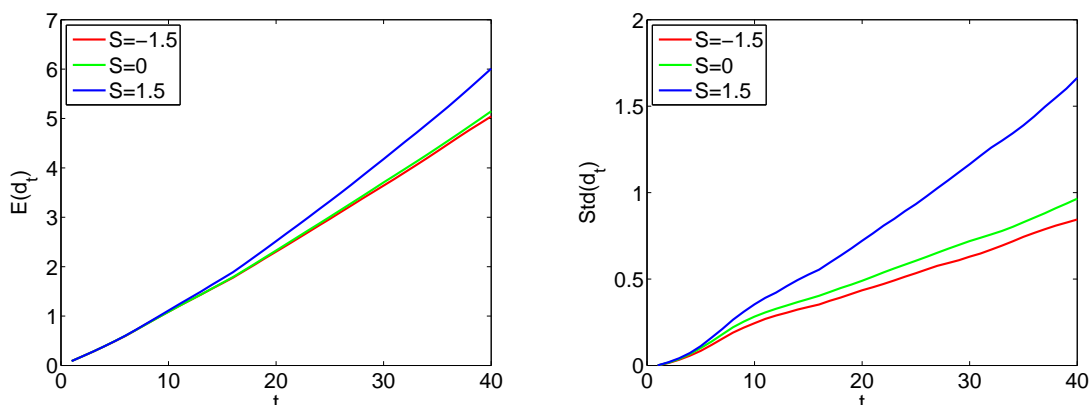
Čo sa týka špicatosti, platí, že čím vyššia je špicatosť, tým vyššia je pravdepodobnosť výnosov blízkyh strednej hodnote. Zároveň sa však zvyšuje aj pravdepodobnosť extrémnych hodnôt na oboch chvostoch rozdelenia. Keďže stredná hodnota výnosu akciového indexu je oveľa vyššia ako stredná hodnota výnosov dlhopisov, predpokladáme, že mierne zvýšené riziko na ľavom chvoste rozdelenia až tak nezaváži a bude platiť, že čím väčšia bude špicatosť rozdelenia, tým bude optimálna voľba θ vyššia. Tak ako v prípade šikmosti bude určite záležať aj na investorovej averzii k riziku. Či sa naše hypotézy potvrdia, zistíme pri ďalšej analýze výsledkov optimalizácie.

Pre zvolenú hodnotu averzie k riziku, v tomto prípade to bude $\alpha = 10$, vykonáme výpočty pre rôzne kombinácie šikmosti a špicatosti výnosov S&P indexu z množiny: $\{[S, K] : S \in \langle -1, 5; 1, 5 \rangle, K \in \langle 4; 11 \rangle, K > 3 + \frac{5}{3}S^2\}$. Následne sa pozrieme na očakávané hodnoty stavovej premennej d_t a jej štandardnej odchýlky v čase.

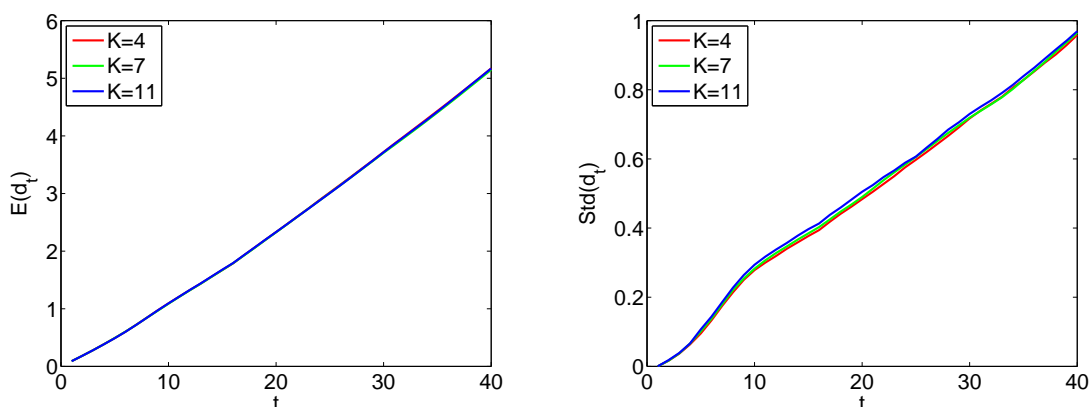
Hodnoty získané pri použití hodnôt šikmosti $S \in \{-1, 5; 0; 1, 5\}$ a špicatosti $K = 7$ sú zobrazené na obrázku (15). Hodnoty získané pri použití hodnôt špicatosti $K \in \{4; 7; 11\}$ a šikmosti $S = 0$ sú zobrazené na obrázku (16).

Vidíme, že vplyv šikmosti na očakávanú hodnotu d_t aj na jej štandardnú odchýlku je kladný. Platí, že vyššia hodnota šikmosti vedie k vyššej optimálnej voľbe θ . Väčšie percento úspor investované do akciového indexu, čiže zvýšené riziko sa potom odzrkadlí vo zvýšenej strednej hodnote ale aj štandardnej odchýlke.

Čo sa týka vplyvu špicatosti na optimálnu voľbu θ a z nej vyplývajúcu strednú hodnotu a štandardnú odchýlku, situácia už nie je taká jasná. Na prvý pohľad sa nám môže zdať, že jej vplyv na strednú hodnotu je len minimálny alebo dokonca nulový. Vplyv špicatosti je o trochu viac viditeľný pri štandardnej odchýlke. Tu sa zdá, že vyššia hodnota špicatosti vedie k vyššej štandardnej odchýlke.



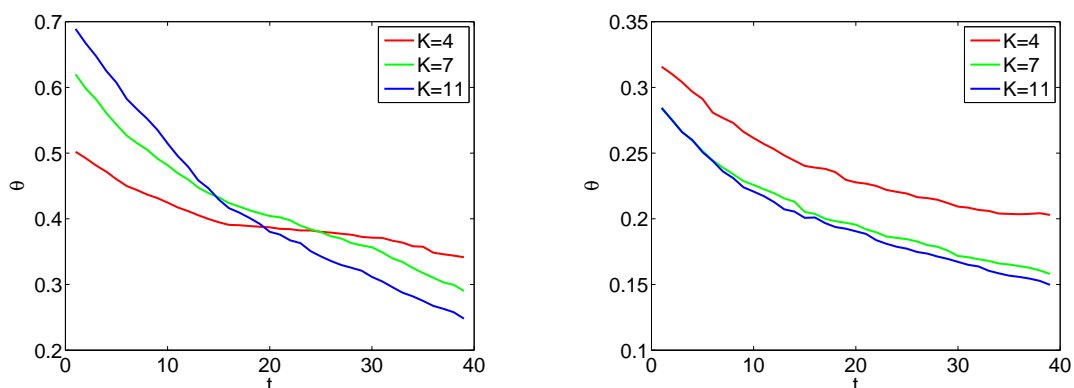
Obr. 15: Vývin strednej hodnoty stavovej premennej d_t a štandardnej odchýlky v čase v závislosti od zvolenej hodnoty S pre $K = 7$.



Obr. 16: Vývin strednej hodnoty stavovej premennej d_t a štandardnej odchýlky v čase v závislosti od zvolenej hodnoty K pre $S = 0$.

Keďže tieto výsledky nie sú veľmi jasné, uvedieme ešte iný pohľad, ktorý môže tieto vplyvy objasniť. Pozrieme sa na to, ako vplyvajú šikmosť a špicatosť na priemernú optimálnu voľbu θ v čase. Okrem toho, keďže je tiež otáznе, či sa pre rozdielne úrovne averzie k riziku nemenia charaktery riešení vo vzťahu k týmto momentom, uvedieme výsledky výpočtov pre nízku aj vysokú averziu k riziku.

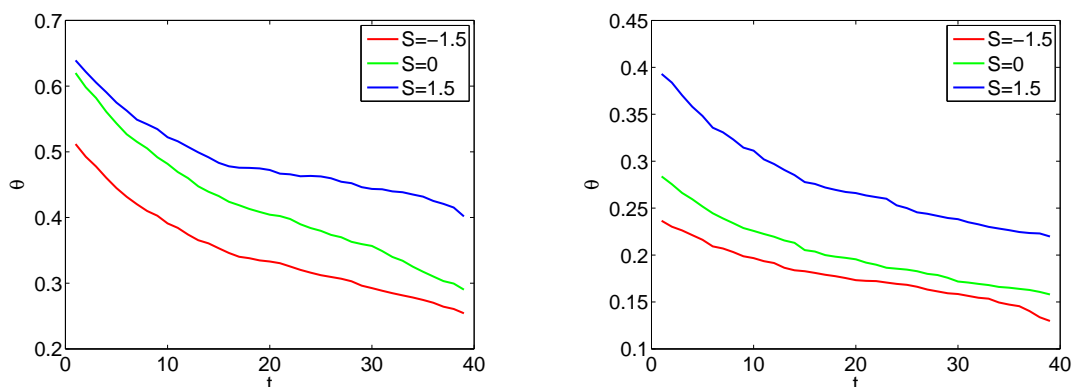
Na obrázku (17) je zobrazená optimálna voľba θ pre rôzne hodnoty špicatosti. Graf vľavo môžeme chápať ako optimálnu voľbu θ troch investorov s rovnakou averziou k riziku ($\alpha = 5$), pričom však každý z nich má na výber investície pozostávajúce z dlhopisov a aktíva s rôznou špicatosťou. Rovnako graf vpravo odpovedá trom



Obr. 17: Vývin priemernej optimálnej voľby θ pre rôzne hodnoty špicatosti pri nízkej ($\alpha = 5$) a vysokej ($\alpha = 10$) averzii k riziku.

investorom s rovnakou averziou k riziku, v tomto prípade $\alpha = 10$.

Vidíme, že na vzťah medzi špicatnosťou a optimálnou voľbou θ skutočne vplýva aj úroveň zvolenej averzie k riziku. Pre investora s vysokou averziou k riziku platí, že ak sa rozhoduje medzi dlhopismi a aktívom s vyššou špicatnosťou rozdelenia, má v optimálnom prípade nižšiu voľbu θ ako keby sa rozhodoval medzi dlhopismi a aktívom s nižšou špicatnosťou. Pri nízkej averzii k riziku sa tento vzťah mení. Vysoká špicatnosť aktíva vedie na začiatku sporenia k jeho vyšším pozíciám, no na konci naopak k nižším oproti investorovi, ktorý má k dispozícii aktívum s nižšou špicatnosťou. Vyššia špicatnosť rozdelenia aktíva teda vedie k rýchlejšiemu poklesu jeho proporcie v portfóliu.



Obr. 18: Vývin priemernej optimálnej voľby θ pre rôzne hodnoty šikmosti pri nízkej ($\alpha = 5$) a vysokej ($\alpha = 10$) averzii k riziku.

Z obrázku (18) vidíme, že na vzťah medzi šikmosťou a optimálnou voľbou θ úroveň zvolenej averzie k riziku nevplyva. Pri vysokej averzii i nízkej averzii k riziku platí, že ak sa investor rozhoduje medzi dlhopismi a aktívom s vyššou šikmosťou, optimálna voľba θ je vyššia, ako by to bolo v prípade rozhodovania sa medzi dlhopismi a aktívom s nižšou šikmosťou.

Prehľad zistených vzťahov medzi šikmosťou, špicatosťou a výsledkami optimalizácie je zobrazený v nasledujúcej tabuľke (6):

Tabuľka 6: Vplyv šikmosti a špicatosti na výsledky optimalizácie

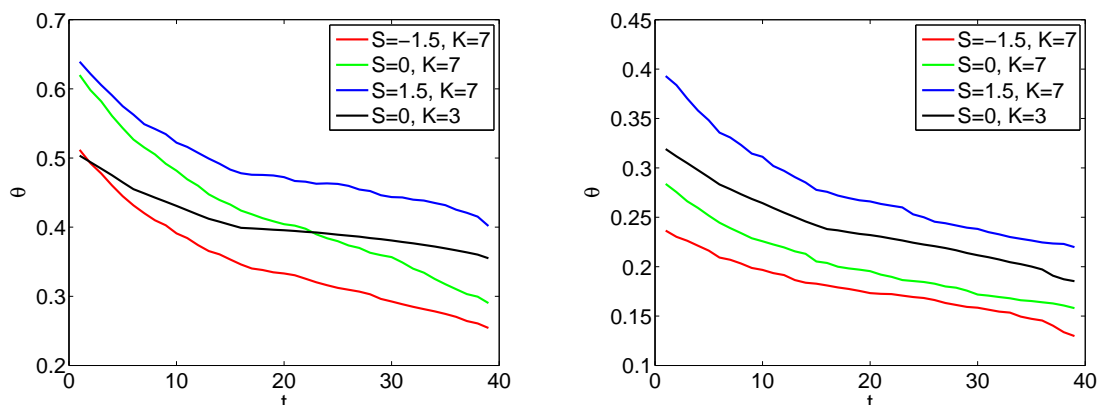
	$E(d_t)$	$Std(d_t)$	θ
$S \uparrow$	\uparrow	\uparrow	\uparrow
$K \uparrow$ + nízka averzia k riziku	približne rovnaká	približne rovnaká	\uparrow na začiatku sporenia \downarrow na konci
$K \uparrow$ + vysoká averzia k riziku	približne rovnaká	približne rovnaká	\downarrow

Aké sú vzťahy medzi optimálnymi riešeniami v závislosti od šikmosti a špicatosti už vieme. Teraz sa zameriame na rozdiely v riešeníach pre optimalizáciu s predpokladom normality výnosov a s predpokladom NIG rozdelenia výnosov. Vzhľadom na obmedzenie $K > 3 + \frac{5}{3}S^2$ porovnáme riešenie pre normálne rozdelenie s tromi prípadmi, ktoré môžu nastať:

- NIG rozdelenie má nulovú šikmosť a vyššiu kurtózu ako 3
- NIG rozdelenie má zápornú šikmosť a vyššiu kurtózu ako 3
- NIG rozdelenie má kladnú šikmosť a vyššiu kurtózu ako 3

Priemerná optimálnu pozícia akcií θ v čase pre jednotlivé prípady pre nízku averziu k riziku (vľavo) a pre vysokú averziu k riziku (vpravo) je zobrazená na obrázku (19).

Vidíme, že pre nízku aj vysokú averziu k riziku platí, že oproti normálnemu rozdeleniu má NIG rozdelenie s kladnou šikmosťou vyššie optimálne pozície akcií θ a naopak NIG rozdelenie so zápornou šikmosťou nižšie. Pri porovnávaní normálneho rozdelenia a NIG rozdelenia s nulovou šikmosťou a vyššou kurtózou záleží od rizikovej



Obr. 19: Vývin priemernej optimálnej voľby θ pre normálne rozdelenie vs. NIG rozdelenie pri nízkej ($\alpha = 5$) a vysokej ($\alpha = 10$) averzii k riziku.

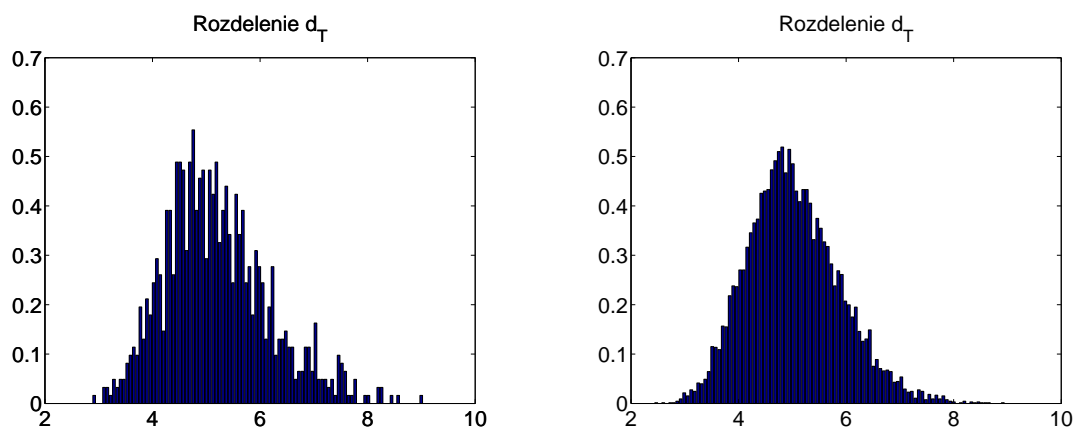
averzie investora. Pri vysokej averzii k riziku vyššia kurtóza vedie k nižším optimálnym váham. Pri nízkej averzii k riziku vyššia kurtóza vedie na začiatku sporenia k vyšším váham oproti normálnemu rozdeleniu a ku koncu sporenia klesnú optimálne váhy pod úroveň optimálnych váh pre normálne rozdelenie.

Nakoniec sa pozrime na rozdelenie stavovej premennej d_T v čase odchodu na dôchodok. Na obrázku (20) sú zobrazené histogramy pri predpoklade normálneho rozdelenia akcií (vľavo) a NIG rozdelenia (vpravo). V oboch prípadoch dostávame rozdelenie, ktoré je pozitívne zošikmené. Konkrétne nadobúdajú momenty týchto premenných hodnoty uvedené v tabuľke (7).

Tabuľka 7: Hodnoty momenty d_T pri predpoklade normálneho rozdelenia akcií a NIG rozdelenia

	Normálne rozd.	NIG rozd.
M	5,1904	5,0252
V	0,9350	0,7347
S	0,6307	0,4369
K	3,4279	3,2813

Na prvý pohľad je jasné, že toto rozdelenie nie je Gaussovské, keďže je značne zošikmené doľava. V tomto prípade však nie je ani NIG rozdelené. Dôvodom je jeho príliš nízka kurtóza, čo v kombinácii s vysokou šikmostou spôsobuje, že nie je splnená



Obr. 20: Histogram naakumulovaného majetku na konci investície pre predpoklad normálneho rozdelenia akcií a pre NIG rozdelenie. Šikmosť a kurtóza boli zvolené -1 a 7 a úroveň averzie k riziku bola v oboch prípadoch $\alpha = 10$.

podmienka na momenty $K > 3 + \frac{5}{3}S^2$.

Záver

V našej práci sme pracovali s investičným modelom, ktorý sme aplikovali v oblasti dôchodkového sporenia. Pre našu úlohu stochastického dynamického programovania sme hľadali optimálne zloženie portfólia pozostávajúceho z časti dlhopisov a časti akcií.

Kľúčovú rolu v našom modeli hral výber vhodného rozdelenia výnosov. Keďže pri skúmaní reálnych dát sa ukazuje, že výnosy majú ťažké chvosty a prítomná je aj šikmosť, pozreli sme sa na riešenia pri predpoklade normality výnosov aj pri predpoklade rozdelenia s ťažkými chvostmi. Konkrétne sme pracovali s normálnym a NIG rozdelením.

Pri práci s normálnym rozdelením sme sa sústredili najmä na vplyv úrovne averzie investora k riziku na optimálnu voľbu pozície akcií v portfóliu. Podľa našich očakávaní sa ukázalo, že pre vyššiu averziu investora k riziku boli optimálne váhy pre akcie nižšie, čo vplývalo aj na nižšiu očakávanú hodnotu naakumulovaného kapitálu na konci sporenia. Okrem nízkej očakávanej hodnoty to však viedlo aj k nižšej štandardnej odchýlke.

Tak ako sa uvádza v práci [15], aj my sme pri analýze reálnych dát zistili, že dáta vykazujú vlastnosti netypické pre normálne rozdelenie. Zistili sme v dátach nenulovú šikmosť a aj vysokú kurtózu. Preto sme sa v práci následne venovali rozdeleniam s ťažkými chvostmi, pričom sme sa sústredili na NIG rozdelenie.

V poslednej časti sme sa zamerali na výsledky optimalizácie pre toto rozdelenie. Pre porovnanie sme sa pozreli na výsledky pre NIG rozdelenie so šikmosťou a špicatosťou odpovedajúcimi normálnemu rozdeleniu. Následne sme sa sústredili na prípady, kedy šikmosť a kurtóza nadobúdali iné hodnoty a zanalyzovali ich vplyv na optimálnu skladbu portfólia. Zistili sme, že dôležitejšiu úlohu pri voľbe optimálnej skladby portfólia hrá šikmosť. Vplyv kurtózy je oveľa menší a mení sa v závislosti od investorovej averzie k riziku.

Ciele, ktoré sme si stanovili v kapitole (3), sme tak splnili.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Andersen, T., G., Bollerslev, T., Diebold, F., X., Ebens, H.: *The distribution of Stock Return Volatility*, Journal of Financial Economics 61 (2001), 43-76
- [2] Bandorff-Nielsen, O.: *Exponentially Decreasing Distributions for the Logarithm of Particle Size*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences 353 (1977), 401-419
- [3] Bhandari, S., R.: *Options on Portfolios with Higher-order Moments*, Finance Research Letters 6 (2009), 122-129
- [4] Eriksson, A., Ghysels, E., Wang, F. : *The Normal Inverse Gaussian Distribution and the Pricing of Derivatives*, The Journal of Derivatives 16 (2009), 23-37
- [5] Ferguson, T., S., Gilstein C., Z. : *A General Investment Model*, Finance a uver - UCLA and Bell Communications (1985)
- [6] Folks, J., L., Chhikara, R., S. : *The Inverse Gaussian Distribution and its Statistical Application*, Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), (1978), 263-289
- [7] Graczová, D.: *Dynamic Stochastic Accumulation Model with Application to Risk Management in Portfolio*, Dissertation Thesis Project, FMFI UK, Bratislava, 2012
- [8] Jakubík, T., Melicherčík, I., Ševčovič, D.: *Sensitivity analysis for a dynamic stochastic accumulation model for optimal pension savings management*, Ekonomický časopis 8 (2009), 756-771
- [9] Kilianová, S., Melicherčík, I., Ševčovič, D.: *Dynamic Accumulation Model for the Second Pillar of the Slovak Pension System*, Finance a uver - Czech Journal of Economics and Finance 56 (2006), 506-521
- [10] Kvetan, V., Mlýnek, M., Páleník, V., Radvanský, V.: *Starnutie, zdravotný stav a determinanty výdavkov na zdravie v podmienkach Slovenska*, working paper, Ekonomický Ústav SAV, Bratislava 2007

- [11] Macová, Z., Ševčovič, D.: *Weakly nonlinear analysis of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation arising from pension savings management*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling 7 (2010), 619-638
- [12] Melicherčík, I., Ševčovič, D.: *Dynamic Accumulation Model for the Second Pillar of the Slovak Pension System*, Yugoslav Journal of Operations Research 20 (2010), 1-24
- [13] Melicherčík, I., Ševčovič, D.: *Dynamic model of pension savings management with stochastic interest rates and stock returns*, Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance Perna, C., Sibillo, M. (Eds.) 1st Edition., Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, ISBN 978-88-470-2341-3, 2012
- [14] Melicherčík, I., Olšárová, L., Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava, 2005
- [15] Onalan, O.: *Financial Risk Manangement with Normal Inverse Gaussian Distributions*, International Research Journal of Finance and Economics 38 (2010), 104-115