

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

NUMERICKÁ ANALÝZA RIEŠENÍ NELINEÁRNYCH
PARCIÁLNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC
VYSKYTUJÚCICH SA VO FINANČNEJ MATEMATIKE
(Diplomová práca)

2014

Bc. Zosia Oravcová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

NUMERICKÁ ANALÝZA RIEŠENÍ NELINEÁRNYCH
PARCIÁLNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍČ
VYSKYTUJÚCICH SA VO FINANČNEJ MATEMATIKE
(Diplomová práca)

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava, 2014

Bc. Zosia Oravcová



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Zosia Oravcová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Numerická analýza riešení nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc vyskytujúcich sa vo finančnej matematike

Cieľ: Cieľom práce bude numerická analýza riešení nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc finančnej matematiky, ktoré vznikajú pri modelovaní nelineárnych efektov pri oceňovaní finančných derivátov, akými sú napríklad transakčné náklady, riziko plynúce z nezaisteného portfólia a pod. Súčasťou práce bude aj návrh numerických schém na riešenie nelineárnych parabolických rovníc.

Vedúci: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Katedra: FMFI.KAMŠ - Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Vedúci katedry: prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
Dátum zadania: 25.01.2013

Dátum schválenia: 04.02.2013
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu
vypracovala samostatne s použitím citovaných
zdrojov.

.....

POĎAKOVANIE

Touto cestou vyslovujem poďakovanie vedúcemu diplomovej práce **prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc.** za trpezlivosť, ochotu pomôcť a odborné vedenie pri vypracovaní mojej práce.

ABSTRAKT

ORAVCOVÁ, Zosia : Numerická analýza riešení nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc vyskytujúcich sa vo finančnej matematike [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra Aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ : prof.RNDr Daniel Ševčovič, Csc., Bratislava 2014, 72 strán

Naša práca sa zaoberá analýzou nelineárnych modelov Black-Scholesovho typu. Blížšie sa v nej zaujíame o dva nelineárne modely, slúžiace pre oceňovanie opcií európskeho typu. Prvý model je model investorových preferencií, kde zahrňame investorovu averziu voči riziku a jeho snahu maximalizovať úžitok v koncovom čase. Druhý model je model skákajúcej volatility, tiež známy pod názvom model neurčitej volatility. Tento model zohľadňuje nelikviditu trhu. Volatilita, vstupujúca do nelineárneho oceňovacieho modelu je narozdiel od tej, ktorá vstupuje do lineárneho Black-Scholesovho modelu, funkcia závislá nie len od ceny podkladového aktíva a času do expirácie, ale aj od samotnej hodnoty ceny opcie, ktorú hľadáme.

Nelinearita v modeli vzniká práve zahrnutím dodatočného predpokladu, vďaka ktorému je oceňovací model bližšie k realite. Nelinearita v modeloch spôsobuje, že nevieme aktuálnu hodnotu ceny opcie určiť pomocou explicitného vzorca, ako pri Black-Scholesovom lineárnom modeli. V práci teda hľadáme hodnotu ceny opcie pomocou numerického výpočtu.

klúčové slová: opcia európskeho typu, Black-Scholesova rovnica, model investorových preferencií, model skákajúcej volatility, Gama rovnica

ABSTRACT

ORAVCOVÁ, Zosia : Numerical analysis of solutions to nonlinear partial differential equations arising in financial mathematics [Master thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; supervisor: prof. RNDr Daniel Ševčovič, Csc., Bratislava 2014, 72 p.

Our work investigate nonlinear Black-Scholes model analysis. In detail, we investigate two nonlinear models, which serves to pricing options of european type. The First model, which we discuss in our work is called model of Investor's preferences. In this model we include investor's risk aversion and his effort to maximize utility in the terminal time. The second model is called jumping volatility model, which is also known as uncertain volatility model. This one takes into account market illiquidity. Volatility, that enters nonlinear pricing model, is function, which depends on value of underlying asset, time, and in opposite to volatility, that enters Black-Scholes model, this volatility also depends on value of option price itself.

Nonlinearity in model is caused, by taking into account additional condition, that makes our pricing model closer to reality. This nonlinearity in models causes, that we don't know how to find the actual value of the option price by explicit formula, like we can calculate for Black-Scholes linear equation. In our thesis we pricing option by numerical calculations.

Key words: option of european type, Black-Scholes equation, model of investor's preferences, model of jumping volatility, Gamma equation

Obsah

Úvod	9
1 Základné poznatky o finančných derivátoch a ich oceňovaní	10
1.1 Stochastický charakter ceny akcie	12
1.2 Payoff a Profit diagram	13
1.3 Black-Scholesov model	15
2 Nelineárne modely	20
2.1 Príklady jednotlivých nelineárnych modelov	20
2.2 Model Investorových preferencií	22
2.2.1 Odvodenie modelu	23
2.2.2 Transformácia modelu investorových preferencií na Gama rovnicu	30
2.3 Model Skákajúcej volatility	32
3 Numerické riešenie	34
3.1 Bod prepojenia a počiatočná podmienka	34
3.2 Numerická schéma	35
3.2.1 Explicitná metóda	39
3.2.2 Implicitná metóda	40
3.2.3 Semiimplicitná metóda	40
3.3 Numerické riešenie modelu investorových preferencií	41
3.3.1 Využitie explicitnej metódy	41
3.3.2 Využitie semiimplicitnej metódy	46
3.4 Numerické riešenie modelu skákajúcej volatility	49
3.4.1 Využitie explicitnej metódy	49
3.4.2 Využitie semiimplicitnej metódy	53
Záver	57
Zoznam použitej literatúry	58
Prílohy	59

Úvod

Trh s finančnými nástrojmi a možnosťou obchodovať s nimi, zaznamenáva v dnešnej dobe rozmach, vďaka čomu sa viac pozornosti zameriava práve na finančné deriváty, ktoré sú predmetom aj nášho záujmu. Cena finančného derivátu závisí od ceny podkladového aktíva, ktorým môže byť akcia, dlhopis, výmenný kurz a iné. Mohli by sme povedať, že využívanie finančných derivátov slúži hlavne k ochrane portfólia pred nečakanými zmenami na trhu. V našej práci nás zaujíma len jeden typ derivátu, asíce opcia európskeho typu, vypísaná na akciu. Takýto derivát vieme pomerne jednoducho oceňiť pomocou teórie, ktorú zaviedli Black a Scholes. Tí, za istých zjednodušujúcich predpokladov, prinášajú lineárny model oceňovania opcií európskeho typu, ktorí vedie na lineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu, tiež známu ako Black-Scholesova rovnica. Ich model je základom pre oceňovanie opcií vypísaných na akciu, a všetky ďalšie modely, ktoré sa snažia priniesť viac reálnych predpokladov do modelu oceňovania, vychádzajú práve z neho. Takéto modely, však vďaka zahrnutiu dodatočných predpokladov, v snahe viac sa priblížiť realite, vedú na nelineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu opcie. Výpočet pomocou takýchto nelineárnych modelov je podstatne zložitejší, no rieši isté nedostatky a obmedzenia lineárneho Black-Scholesovho modelu. Pre takéto nelineárne modely, nevieme vo všeobecnosti vyjadriť explicitné riešenie, a teda na riešenie nelineárneho modelu využívame numerickú schému.

Na začiatok si priblížime problematiku finančných derivátov, a oceňovanie európskych opcií pomocou spomínaného lineárneho Black-Scholesovho modelu. Ďalej uvedieme odvodenie dvoch nelineárnych modelov - model investorových preferencií a model skákajúcej (neurčitej) volatility. Na základe poznatkov z numerických metód a oceňovania finančných derivátov pomocou týchto metód, zostrojíme numerické schémy pre výpočet ceny opcie európskeho typu.

1 Základné poznatky o finančných derivátoch a ich oceňovaní

Pojem *derivát* (derivátový kontrakt) na finančnom trhu predstavuje finančný nástroj, ktorého cena sa odvíja od ceny podkladového aktíva, ktorým môže byť napr. akcia, alebo iný cenný papier, akciový index, komodita, mena, úroková miera atď.

Prvé písomné záznamy o finančných derivátoch sa objavujú už v 17. storočí v Japonsku. Jedná sa o poľnohospodárske kontrakty na nákup ryže.

Ak vedel farmár predpokladať s určitou pravdepodobnosťou, že pri vstupnom kapitále k je schopný do jesene vypestovať objem ryže q a našiel obchodníka, ktorý bol ochotný tento objem na jeseň kúpiť, mohli už na jar uzavrieť dohodu o budúcom obchode. Vďaka dohode mal farmár už na jar prostriedky na nákup osiva a zároveň zaručený dopyt na jeseň. Obchodník mal zafixovanú cenu ryže a nemusel sa obávať, aký bude vývoj jej ceny na trhu.

Fixácia ceny má samozrejme aj svoje nevýhody. Ak bolo napríklad veľa sucha a dopestovalo sa málo ryže, jej cena vzrástla. Ak farmár dopestoval aspoň q , mohlo ho mrziť, že toto množstvo nepredá drahšie. Ak nedopestoval množstvo, postačujúce pre dodržanie kontraktu, musel rozdiel dokúpiť za vyšiu cenu. V oboch prípadoch bol stratový. Na druhej strane obchodník mal zisk z rozdielu nákupnej a trhovej ceny. Ak bolo obdobie úrodné, cena ryže klesla, farmár na tomto obchode zarobil, a kupujúci stratil.

Tento typ finančného derivátu sa nazýva *forward*.

Forward je termínový kontrakt, medzi kupujúcim a predávajúcim, v ktorom sa obe strany zaväzujú kúpiť alebo prediť určité aktívum (akciu, komoditu, atď) vo vopred stanovenom dátume za vopred dohodnutú cenu. S *forwardmi* sa obchoduje na mimoburzovom trhu *OTC* (*over-the-counter*). Z toho vyplýva, že všetky podmienky kontraktu sú výsledkom dohody protistrán. Podobným derivátom je *future*. Rozdiel medzi nimi spočíva v tom, že s *future* sa obchoduje na špeciálnych burzách. Teda burza určuje napr. minimálny objem alebo životnosť kontraktu.

Ďalším finančným derivátom je *swap*. *Swap* je dohoda o periodickej výmene platieb medzi dvoma či viacerými subjektmi v budúcnosti. Mohli by sme ho chápať ako kombináciu dvoch alebo viacerých forwardov, ktoré sú navzájom prepojené. V zásade sa s nimi obchoduje na trhoch *OTC*.

Ako posledný finančný derivát spomenieme *opcie*. Práve tie budú predmetom našej práce. *Opcia* na rozdiel od *forwardu* predstavuje typ kontraktu, pri ktorom má jej vlastník právo, ale nie povinnosť kúpiť resp. prediť dané aktívum vo vopred stanovenom expiračnom čase za vopred určenú expiračnú cenu *strike price*.

Opcia dáva držiteľovi slobodu rozhodnutia pri jej uplatňovaní. Rozlišujeme, či sa jedná o právo na kúpu resp. predaj, potom hovoríme o *call* resp. *put* opcii. Pre lepšiu ilustráciu uvedieme krátky príklad. Predpokladajme, že vlastníme *kúpnu (call) opciu* na nákup akcií Spotify za vopred dohodnutú expiračnú cenu E , ktorú máme právo uplatniť o mesiac. Ak za mesiac cena akcie stúpne, uplatnenie našej opcie nám prinesie zisk rovný rozdielu ceny akcie v expiračnom čase a expiračnej ceny E . Ak nastane táto situácia, hovoríme, že *opcia* je *in the money*, pretože jej uplatnenie nám prinieslo zisk. Na druhej strane, ak cena akcie klesne, neoplatí sa nám opciu uplatniť a teda nám neprináša žiadny zisk, hovoríme, že *opcia* je *out of money*. V prípade, že by po mesiaci bola cena akcie totožná s expiračnou, *opcia* je *at the money*. Vidíme, že právo, nie povinnosť uplatnenia opcie nám prináša istú výhodu, za ktorú je potrebné zaplatiť pri vypisovaní kontraktu. Táto prémie pre vypisovateľa opcie je cena, ktorú za opciu zaplatíme. Existuje niekoľko typov opcií okrem základných Európskych, tiež zvaných *Vanilla options* ako napr. *Americké* či *Exotické opcie*. *Vanilla opcia* je právo kúpiť resp. prediť akciu za vopred dohodnutú expiračnú cenu vo vopred dohodnutom expiračnom čase. *Americké opcie* sa líšia tým, že ich môžeme uplatniť v ľubovoľnom čase do stanoveného dátumu expirácie. Pre väčšinu *Exotických opcií* platí, že nejakým spôsobom zohľadňujú historický vývoj ceny podkladového aktíva, preto sa im hovorí tiež *Path-dependent opcie*. Teda ich cena nezávisí iba od aktuálnej hodnoty podkladového aktíva, ale aj od ďalšej hodnoty získanej z priebehu cien za dané sledované obdobie. *Exotickými path-dependent opciami* sú napr. *Ázijské*, *Bariérové*, *Lookback*, *Ruské opcie* a iné.

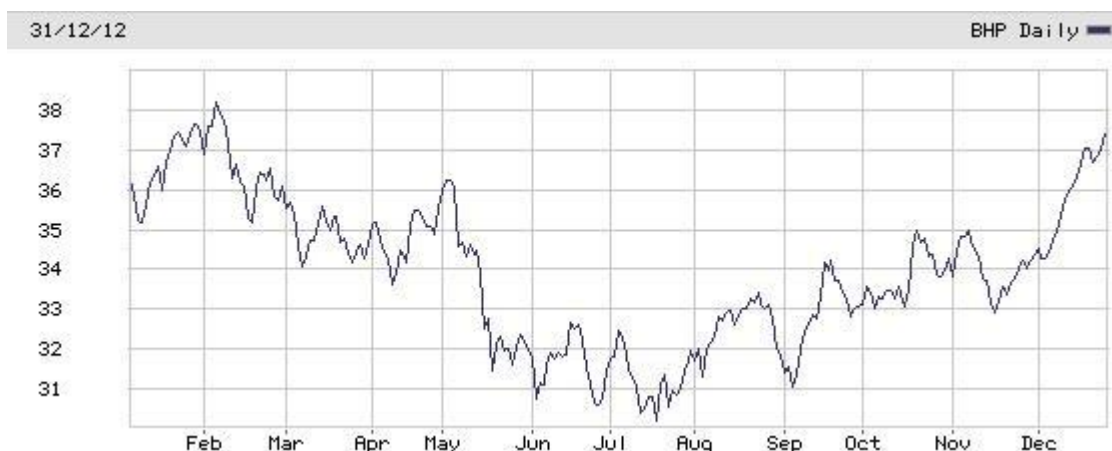
Hodnota *Ázijskej opcie* závisí od aritmetického priemeru ceny aktíva. *Bariérová opcia* je vlastne klasická *Vanilla opcia* s tým rozdielom, že ak niekedy v období trvania opcie dosiahne cena akcie hodnotu B , tak *opcia* stráca svoju platnosť a vypisovateľ je povinný vyplatiť jej držiteľovi vopred dohodnutú odmenu tzv. *rabat*. Bariérová *opcia* môže byť dvoch typov, podľa toho či stráca platnosť v momente, keď cena akcie klesne alebo vzrastie na hodnotu B . Hovoríme o *down-and-out* resp. *up-and-out opcii*. Pre *Lookback opcie* platí, že ich cena závisí aj od maxima resp. minima ceny akcie za dané obdobie.

V našej práci sa budeme zaoberať len základnými *Vanilla opciami*.

1.1 Stochastický charakter ceny akcie

Akcia je druh cenného papiera, ktorého držiteľ má právo podieľať sa na riadení a zisku danej akciovej spoločnosti. Cena akcie sa mení každý deň v závislosti od dopytu a ponuky, od trendu na finančných trhoch, alebo v dôsledku rôznych iných vplyvov. Predpovedať hodnotu ceny akcie teda nie je jednoduché, nakoľko jej hodnota má stochastický charakter.

Rozlišujeme dve ceny akcie. *Ask price* je ponuka na predaj akcie, za túto cenu môžeme akciu na burze kúpiť. *Bid price* je ponuka na kúpu akcie, za túto cenu môžeme akciu na burze prediť. Je zrejmé, že *Ask price* je vždy väčšia ako *Bid price* a za trhovú cenu akcie považujeme rovnovážnu hodnotu medzi nimi. Akcie môžu vyplácať dividendy, teda pravidelný výnos závislý od hospodárenia spoločnosti za uplynulé obdobie.



Obr.1.1: Časový vývoj ceny akcie BHP Billiton

Na obrázku Obr.1.1 môžeme vidieť vývoj ceny akcie austrálskej petrolejovej spoločnosti BHP Billiton za obdobie február až december 2012.

Zdroj obrázka : <http://www.shareswatch.com.au/blog/stockmarket/bhp-billiton-commonwealth-bank-telstra-2012-charts-review/> .

Pri pohľade na cenu akcie z dlhodobého hľadiska hovoríme o *trende*. Pre ceny akcie BHP Billiton môžeme vidieť klesajúci trend od februára približne po júl a naopak rastúci trend od augusta do decembra. Z krátkodobého hľadiska sa pozeráme na *fluktuáciu*

ceny akcie. Je zrejmé, že čím výraznejšie sú zmeny v cene akcie, tým väčší prináša výnos alebo stratu. Naopak pri relatívne stabilnej cene akcie, neočakávame veľké výnosy ani straty, teda môžeme chápať vyšší výnos ako prémii za podstúpené riziko. Za bezpečné aktívum sa považujú dlhopisy. Štátne dlhopisy dokonca za bezrizikové, pretože predpokladáme, že štát neskrachuje. Hoci sme v nedávnej minulosti mohli vidieť, že aj to je možné, aj naďalej budeme za bezrizikovú úrokovú mieru považovať úrok štátnych dlhopisov.

Nakoľko má cena akcie $S(t)$ stochastický charakter budeme ju modelovať stochastickým procesom, konkrétne pomocou *geometrického Brownovho pohybu (GBP)*:

$$S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)} \quad (1.1)$$

kde S_0 je cena akcie v počiatočnom čase, $\mu(S, t)$ je očakávaný výnos akcie (trend), $\sigma(S, t)$ je volatilita akcie, $w(t)$ je *Wienerov náhodný proces*, ktorý má normálne rozdelenie $w(t) \sim N(0, t)$.

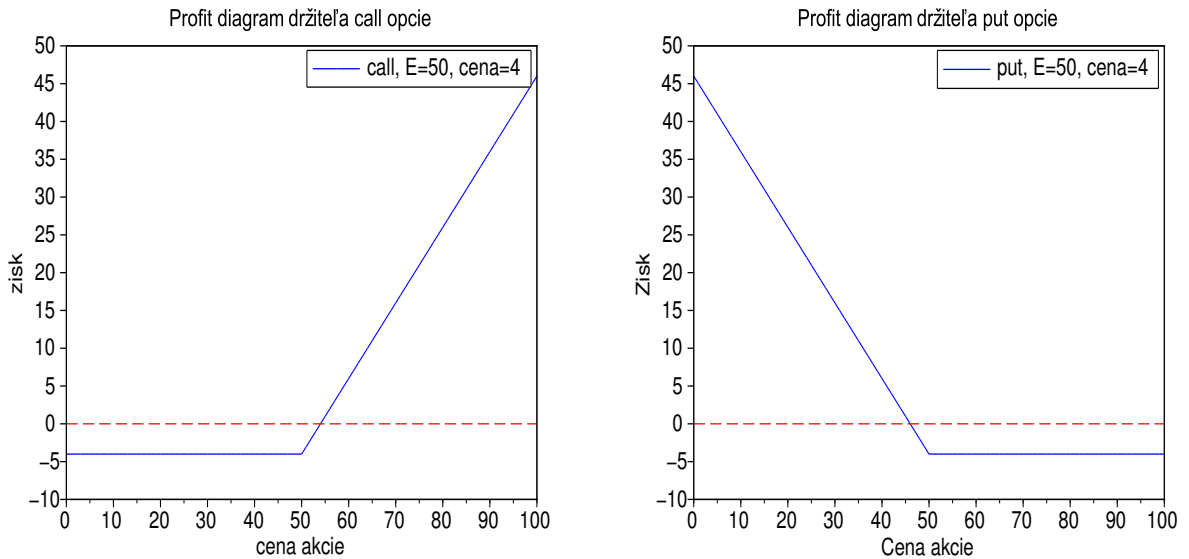
1.2 Payoff a Profit diagram

Z už zmieneného vieme, že držiteľ opcie ju uplatní, len ak mu prinesie toto uplatnenie zisk. Nakoľko uvažujeme *vanilla opcie*, držiteľ opcie ju môže uplatniť len v čase expirácie T . Hodnotu opcie v tomto čase poznáme, je zrejmá.

$$\begin{aligned} V^c(S, T) &= \max \{S - E, 0\} \\ V^p(S, T) &= \max \{E - S, 0\} \end{aligned}$$

Pričom $V^c(S, T)$ budeme označovať hodnotu call opcie a $V^p(S, T)$ hodnotu put opcie v čase T , kde E je expiračná cena a S je cena akcie v čase T .

Payoff diagram držiteľa opcie je cena opcie v expiračnom čase, ktorá sa rovná rozdielu ceny akcie v tomto čase a expiračnej ceny akcie, danej v čase vypisovania opcie. *Profit diagram* držiteľa opcie je teda *Payoff diagram* znížený o cenu opcie, ktorú pri vypisovaní zaplatil. Cena opcie v čase uzavretia kontraktu, sa zvykne označovať ako *opčná prémia*. Na Obr.1.2 máme zobrazený profit diagram držiteľa call/put opcie.



Obr.1.2: *Profit diagram držiteľa opcie*

Poznáme aj rôzne *kombinované stratégie*, ktoré nám prinesú zisk, ak sa naplnia naše očakávania o náraste, poklese, miernej alebo výraznej zmene ceny akcie. Ak napr. očakávame, že cena akcie sa výrazne zmení, ale nevieme ktorým smerom, môžeme použiť stratégiu *Long Straddle* (resp. *Bought Straddle*), ktorá je kombináciou kúpy call a put opcie s rovnakou expiračnou cenou E . Potom payoff je nasledovný :

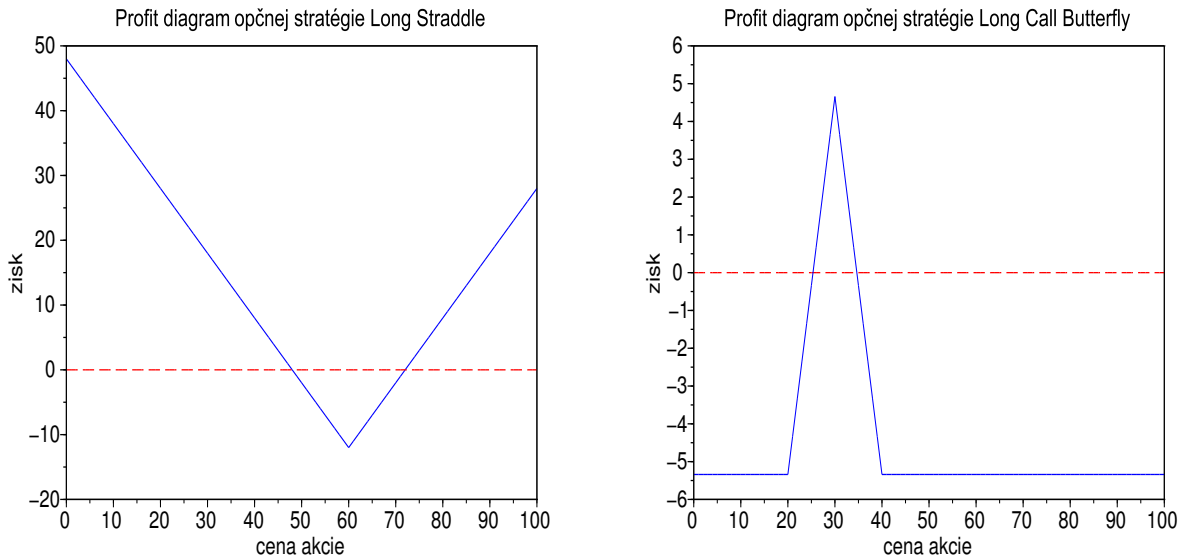
$$V(S, T) = \max(S - E, 0) + \max(E - S, 0)$$

Touto stratégiou si limitujeme stratu v prípade, že je cena v blízkosti expiračnej ceny, inak máme vysokú možnosť zisku (vidno aj z Obr.1.3).

Ak by sme očakávali, že cena akcie sa nebude veľmi hýbať, je pre nás výhodné použiť stratégiu *Long Call Butterfly*. Táto stratégia kombinuje kúpu dvoch call opcií s expiračnými cenami E_1, E_2 a predaj dvoch call opcií s rovnakou expiračnou cenou E_3 , pričom platí $E_1 < E_3 < E_2$. Navyše platí: $E_1 + E_2 = 2E_3$. Payoff vyzerá nasledovne :

$$V(S, T) = \max(S - E_1, 0) - 2\max(S - E_3, 0) + \max(S - E_2, 0)$$

Táto stratégia nám prinesie zisk, ak bude cena akcie v čase expirácie blízko hodnoty E_3 (taktiež vidíme z Obr.1.3). Na Obr.1.3 môžeme vidieť profit diagram oboch stratégií pre konkrétne expiračné ceny : E, E_1, E_2, E_3 , a k nim prislúchajúce ceny opcií pri ich vypisovaní : $v_{call}, v_{put}, v_1, v_2, v_3$.



Obr.1.3: Profit diagram držiteľa opčnej stratégie.

Parametre stratégie Long Straddle : expiračné ceny $E_1 = 20$, $E_2 = 40$, $E_3 = 30$; ceny opcií pri vypisovaní, $v_1 = 8.85$, $v_2 = 0.05$, $v_3 = 1.78$,

Parametre stratégie Long Call Butterfly : expiračná cena $E = 60$, ; ceny opcií pri vypisovaní, $v_{call} = 5$, $v_{put} = 7$

1.3 Black-Scholesov model

Cenu opcie v čase expirácie už poznáme, teraz nám ostáva zistiť jej hodnotu v počiatočnom čase $t = 0$, kedy opciu kupujeme.

Pre tento účel si odvodíme Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu, ktorá nám povie, ako sa mení cena opcie v čase, v závislosti od hodnoty ceny akcie S , na ktorú je opcia vypísaná.

Odvedenie spomínanej rovnice sa dá predviesť dvoma spôsobmi : na základe predpokladov, z ktorých vychádzajú Black a Scholes, alebo na základe tých, z ktorých vychádza Merton. Podrobné odvedenie Black-Scholesovho modelu môžeme nájsť napríklad v [10] alebo [11]. Uvedieme odvedenie podľa Mertona, nakoľko je všeobecnejší a elegantnejší. Už vieme, že cena akcie sa riadi GB, viď rovnica (1.1) v predchádzajúcej podkapitole. Uvedieme si ďalšie predpoklady modelu:

- konštantná bezriziková úroková miera r
- nulové transakčné náklady
- môžeme kupovať a predávať ľubovoľné aj neceločíselné počty akcií, rovnako hotovosti
- žiadne obmedzenia na krátke pozície (*short selling*)
- opcia je európskeho typu

Ďalším dôležitým predpokladom je myšlienka samofinancovanej stratégie, ktorá prináša dve kľúčové podmienky :

podmienka nulových investícií : na základe nulových transakčných nákladov môžeme dynamicky kupovať/predávať jednotlivé zložky portfólia pre udržanie jeho bezrizikovosti a nič nás to nestojí.

podmienka samofinancovanosti portfólia : portfólio neprináša výnos a nevyžaduje dodatočné investovanie, teda nákup niektorej zložky portfólia je kompenzovaný predajom inej.

Práve tieto dve podmienky sú základným rozdielom medzi spomínanými dvoma odvodzeniami. Black a Scholes tieto podmienky nezahrňajú.

Majme portfólio Π zložené z akcií jedného druhu, opcií na tieto akcie a dlhopisov (resp. hotovosti). Označme Q_S počet akcií o hodnote S , Q_V počet opcií o hodnote V a B nech je hotovosť na účte, alebo bezrizikový dlhopis (peniaze úročené bezrizikovou úrokovou mierou r). Ďalej označíme dQ_S zmenu počtu akcií, dQ_V zmenu počtu opcií a δB zmenu hotovosti, spôsobenú kúpou/predajom akcií a opcií. Naše portfólio teda vyzerá :

$$\Pi = SQ_S + VQ_V + B$$

Podmienku nulových investícií pre všetky časy $t \in (0, T)$ vieme matematicky zapísať nasledovne:

$$\Pi = SQ_S + VQ_V + B = 0 \quad (1.2)$$

Z tejto podmienky nám vyplýva, že hodnota portfólia sa v čase nemení a teda platí:

$$d\Pi = d(SQ_S + VQ_V + B) = 0 \quad (1.3)$$

Rovnako pre všetky časy $t \in (0, T)$ vieme matematicky zapísať *podmienku samofinancovanosti portfólia* nasledovne:

$$SdQ_S + VdQ_V + \delta B = 0 \quad (1.4)$$

Nakoľko uvažujeme bezrizikové dlhopisy nevyplácajúce kupóny, platí jednoduchá oceňovacia rovnica $B(t) = B(0)e^{rt}$ a teda rovnica vyjadrujúca zmenu peňažného objemu

dlhopisov: $dB = rBdt + \delta B$

Diferencovaním vzťahu (1.2) a následným dosadením dB dostávame:

$$0 = d(SQ_S + VQ_V + B)$$

$$0 = d(SQ_S + VQ_V) + dB$$

Rozpísaním derivácií dostávame:

$$0 = SdQ_S + VdQ_V + \delta B + Q_SdS + Q_VdV + rBdt$$

Vidíme, že prvé tri členy nám dávajú nulu. Po vyjadrení $rBdt$ zo vzťahu pre zmenu peňažného objemu dlhopisov a následnom dosadení, dostávame:

$$0 = Q_SdS + Q_VdV - r(SQ_S + VQ_V)$$

Rovnicu vydělíme Q_V a označíme $\Delta = -\frac{Q_S}{Q_V}$ následne dostávame

$$dV - rVdt - \Delta(dS - rSdt) = 0 \quad (1.5)$$

Pre pokračovanie v hľadaní dV , rovnako ako pre celú teóriu oceňovania derivátov, je kľúčová nasledovná lema, ktorá nám hovorí, ako nájsť diferenciál náhodnej funkcie.

Lema 1.3 (*Itôova lema*) *Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw,$$

kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t)\frac{\partial f}{\partial x}dw. \quad (1.6)$$

Uvedený vzťah (1.6) sa dá jednoducho dokázať napr. cez Taylorov rozvoj funkcie f . Znenie lemy aj s intuitívnym dôkazom môžeme nájsť napr. v [10]. Na základe uvedenej lemy, vieme odvodiť stochastickú diferenciálnu rovnicu pre cenu akcie, ktorá vyzerá nasledovne:

$$dS = \mu(S, t)Sdt + \sigma(S, t)Sdw \quad (1.7)$$

Podľa *Itôvej lemy* už vieme vyjadriť stochastickú diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu, opcie V :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw$$

Dosadením vzťahov pre diferenciály dV a dS do rovnice (1.6) a po úprave dostávame:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV - \Delta \mu S + \Delta r S \right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dw = 0$$

Predpokladáme, že investor je averzný voči riziku a teda jeho cieľom je riziko neutralizovať. Jediný rizikový člen v rovnici vyššie je stochastický člen dw , Wienerov náhodný proces. Ten vieme jednoducho eliminovať definovaním :

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

A teda po úprave dostávame Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu európskej opcie :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (1.8)$$

Uvedieme ešte v skratke jedno užitočné zovšeobecnenie. Predpokladajme, že akcia vypláca spojitú dividendu s ročnou dividendovou mierou $D \geq 0$. Držaním tejto akcie dostávame za čas dt dividendový podiel $DSdt$. Samotná cena aktíva však vyplatením dividend klesá, čo môžeme sledovať na nasledovnom zníženom trende akcie, a teda stochastická rovnica pre cenu takejto akcie bude : $dS = (\mu - D)Sdt + \sigma Sdw$.

Vyplatením dividendy získame nové finančné prostriedky, čo sa prejaví v rovnici vyjadrujúcej zmenu hodnoty peňažného objemu dlhopisov, ktorá nadobudne nasledovný tvar: $dB = rBdt + \delta B + DSQ_S dt$

Následne zopakovaním rovnakého postupu, ako pri odvodzovaní PDR pre opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy, dostaneme Black-Scholesovu rovnicu pre cenu derivátu..

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (1.9)$$

Môžeme si všimnúť, že ani jedna z rovníc (1.8), (1.9) nám nedáva informáciu o tom, o aký druh opcie (call resp. put) sa jedná, túto informáciu dopĺňajú až terminálové

podmienky (hodnota opcie v čase expirácie T), ktoré sme uviedli v úvode časti 1.2 *Payoff a Profit diagram*. Odvodená Black-Scholesova PDR je lineárna a dá sa pomocou transformácií previesť na *rovniciu vedenia tepla*, ktorú vieme riešiť pomocou *Greenovho vzorca*. Toto riešenie môže čitateľ nájsť napr. v [10]. Nájsť riešenie analyticky vieme práve vďaka tomu, že v predpokladoch modelu zanedbávame transakčné náklady, predpokladáme, že môžeme kupovať aj neceločíselné počty akcií a pod. To všetko veľmi zjednodušuje realitu, vďaka čomu vieme riešenie nájsť pomerne rýchlo. Je samozrejmé, že akýkoľvek model by sme chceli použiť, či navrhnúť, nedokážeme presne opísať realitu, vždy budeme musieť na začiatku určiť predpoklady a teda, medzi našim riešením a trhovou cenou vždy vznikne odchýlka. Naším cieľom je, aby bola čo najmenšia. Práve lineárny model, pre svoje obmedzujúce predpoklady, a teda miestami aj výrazne odchýlky, vyvoláva snahu nájsť vernejšie zobrazenie reality v zahrnutí dodatočných predpokladov, ako napríklad zahrnutie transakčných nákladov.

2 Nelineárne modely

V súčasnosti existuje niekoľko modelov, ktoré zahŕňajú aspoň jeden reálny predpoklad navyše. Práve tento predpoklad nám spôsobí nelinearitu výslednej parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu opcie. Oceňovacia nelineárna PDR si zachová svoj pôvodný tvar z Black-Scholesovho lineárneho modelu. Volatilita podkladového aktíva sa stane funkciou závislou nielen od ceny akcie S a času t , ale aj od samotnej ceny opcie $V(S, t)$. Všeobecne ju môžeme vyjadriť v tvare:

$$\sigma = \sigma(S^2 \partial_S^2 V, S, T - t)$$

2.1 Príklady jednotlivých nelineárnych modelov

Ako sme už spomínali vyššie, nelineárne modely nás zaujímajú, pretože chceme získať reálnejší pohľad na oceňovanie opcií, pomocou zahrnutia dodatočných predpokladov ako napr. netriviálne transakčné náklady, efekt spätnej väzby či riziko z nezaisteného portfólia.

Lelandov model

Lelandov model je jedným z prvých modelov, zahrňujúcich transakčné náklady. Podrobne ho rozoberajú napr. Leland v [9] alebo Avellaneda a Paras v [1]. Leland pridal do Black-Scholesovho modelu transakčné náklady na nákup či predaj akcií, ktorý môžeme vykonávať, a týmto spôsobom naše portfólio prerozdeľovať každých Δt časových jednotiek. Pre časový krok Δt platí, že spĺňa dolné ohraničenie získané pri odvodzovaní modelu. Predpokladáme diskkrétne prerovnávanie portfólia, spojitý by viedol k nekonečným nákladom. Pokiaľ uvažujeme opciu v dlhej pozícii, teda ju vlastníme, volatilita σ je daná:

$$\sigma^2(S^2 \partial_S^2 V, S, T - t) = \hat{\sigma}^2(1 - Le \text{sign}(\partial_S^2 V))$$

Ak opciu dlhujeme, teda je v tzv. krátkej pozícii, volatilita σ vyzerá nasledovne :

$$\sigma^2(S^2 \partial_S^2 V, S, T - t) = \hat{\sigma}^2(1 + Le \text{sign}(\partial_S^2 V))$$

kde $\hat{\sigma}^2 > 0$ je konštantná historická volatilita podkladového aktíva a $Le > 0$ je tzv. *Lelandovo číslo* dané nasledovne : $Le = \sqrt{2\pi}C/(\hat{\sigma}\sqrt{\Delta t})$, kde C reprezentuje konštantné

percentuálne náklady na predaj a kúpu jednej akcie. Platí $C = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S_{ask} + S_{bid}}$. Ak uvažujeme predaj resp. nákup akcie s cenou S musíme počítať s dodatočnými nákladmi vo výške $\frac{C}{2}S$. Čím častejšie portfólio prerozdeľujeme, tým vyššie máme náklady.

RAPM model

Model Riziko zahrňujúcej metodológie (RAPM) odvodil Kratka v [7] a neskôr zovšeobecnil Ševčovič a Jandačka v [6]. Narozdiel od Lelandovho modelu, v RAPM modeli okrem transakčných nákladov zahrňame aj riziko z neprerozdeľovania portfólia. S rastúcim prerozdeľovaním rastú náklady, s klesajúcou frekvenciou prerozdeľovania sa stáva naše portfólio rizikovejším, strata môže byť väčšia. V tomto modeli je našim cieľom nájsť optimálnu dĺžku kroku Δt , pri ktorej budú náklady a riziko z nezaisteného portfólia minimálne. Volatilita má tvar:

$$\sigma^2(S^2 \partial_S^2 V, S, T - t) = \hat{\sigma}^2 \left(1 + \mu(\partial_S^2 V)^{\frac{1}{3}}\right)$$

kde $\hat{\sigma}^2 > 0$ je opäť volatilita, získaná z historických dát vývoja ceny akcie a $\mu = 3(C^2 R / 2\pi)^{\frac{1}{3}}$, kde $C \geq 0$, $R \geq 0$ sú nezáporné konštanty reprezentujúce mieru transakčných nákladov resp. mieru prémie za podstúpené riziko.

Modelovanie Investorových Preferencií

Na základe práce Hodgesa a Neubergera [5], odvodili Barles a Soner v práci [3] model, v ktorom maximalizujeme úžitok z koncového stavu v čase expirácie T , pričom predpokladáme exponenciálnu *funkciu užitočnosti*. Týmto modelom sa budeme zaoberať v ďalších kapitolách. V tomto prípade volatilita vyzerá:

$$\sigma^2(S^2 \partial_S^2 V, S, T - t) = \hat{\sigma}^2 \left(1 + \psi(a^2 e^{r(T-t)} S^2 \partial_S^2)\right) \quad (2.1)$$

kde $\hat{\sigma}^2 > 0$ je historická volatilita a ψ je riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice:

$$d\psi = \frac{\psi(x) + 1}{2\sqrt{x\psi(x) - x}}$$

pričom platí : $\psi(0) = 0$.

Modelovanie Nelikvidity trhu

Model zohľadňujúci nelikviditu trhu odvodil Frey v [4]. Model zahŕňa vplyv dominantného investora a teda tzv. *feedback effect*. Zohľadňuje ovplyvnenie ceny podkladového aktíva, v prípade použitia vybranej obchodnej stratégie dominantným investorom. Ak takýto investor nakúpi veľké množstvo podkladového aktíva, cena tohto aktíva sa určite zmení, čo následne ovplyvní cenu opcie. Takéto veľké množstvo sa ťažšie predáva za trhovú cenu, stráca svoju likvidnosť. Volatilitu vyjadríme ako :

$$\sigma^2(S^2\partial_S^2V, S, T-t) = \hat{\sigma}^2 (1 - \rho\lambda(S)S\partial_S^2V)^{-2},$$

kde $\hat{\sigma}^2 > 0$ je historická volatilita, a $\rho > 0$ je parameter likvidity a $\rho\lambda(S)$ je striktne konvexná funkcia a platí $\rho\lambda(S) \geq 1$.

Modelovanie Neúplnosti trhu

Posledné nelineárne zovšeobecnenie Black-Scholesovej PDR je model zahrňujúci predpoklad neúplnosti trhu tzv. *Model so skákajúcou (neurčitou) volatilitou*. Model odvodili Avellaneda, Levy a Paras v [1]. V ich modeli vyzerá volatilita nasledovne:

$$\sigma(S^2\partial_S^2V, S, T-t) = \begin{cases} \sigma_1, & \text{ak } \partial_S^2V < 0. \\ \sigma_2, & \text{ak } \partial_S^2V > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

kde σ_1 a σ_2 reprezentujú dolnú a hornú apriórnu hranicu inak nešpecifikovanej volatility. V práci sa budeme zaoberať modelom Investorových preferencií a modelom Skákajúcej volatility.

2.2 Model Investorových preferencií

Pri odvodzovaní sa odvolávame na prácu Barlesa a Sonera [3].

Model je odvodený pre trh s transakčnými nákladmi. Myšlienka modelu spočíva v zahrnutí preferencií investora do oceňovacieho modelu. Tieto preferencie sú opísané funkciou užitočnosti a konštantnou investorovou averziou k riziku.

2.2.1 Odvodenie modelu

Uvažujeme oceňovanie európskej *call* opcie s expiračnou cenou E v čase expirácie T . Za podkladové aktívum uvažujeme akciu, nevyplácajúcu dividendy, riadiacu sa *Geometrickým Brownovým pohybom*:

$$dS = \rho S dt + \hat{\sigma} S dw \quad (2.3)$$

kde konštanty ρ a $\hat{\sigma}$ sú trend a volatilita podkladového aktíva a w je štandardný Wienerov proces. Uvažujme dva procesy:

X_t = objem peňazí držaných v čase t

Y_t = počet akcií držaných v čase t

Ako obchodnú stratégiu na intervale $[t, T]$ definujeme dvojicu (L_t, M_t) zľava spojitých a neklesajúcich funkcií, pre ktoré platí $L_t = M_t = 0$. Funkcie L_t a M_t môžeme interpretovať ako kumulatívny prenos meraný počtom akcií.

L_t = počet akcií, ktoré nakúpime v čase t

M_t = počet akcií, ktoré predáme v čase t

Definujeme $\mu \in (0, 1)$ ako mieru transakčných nákladov pri nákupe alebo predaji aktív. Pre cenu S_{ask} , ponuku na predaj, a cenu S_{bid} , ponuku na kúpu, platí:

$$S_{ask} = (1 + \mu)S$$

$$S_{bid} = (1 - \mu)S$$

kde $S = (S_{ask} + S_{bid})/2$ je priemer medzi kúpnu a predajnou cenou akcie.

Pre účely nasledovných rovností označme: $X_p = X(p)$, $Y_p = Y(p)$, $M_\tau = M(\tau)$, $L_\tau = L(\tau)$, $S_\tau = S(\tau)$.

Vďaka μ a počiatočným hodnotám x, y procesov X_t, Y_t môžeme vyjadriť hodnotu portfólia $X(p) = X(p; t, x, y, L(\cdot), M(\cdot))$ a $Y(p) = Y(p; t, x, y, L(\cdot), M(\cdot))$ v čase $p \in [t, T]$ nasledovne:

$$X(p) = x - \int_t^p S(\tau)(1 + \mu)dL(\tau) + \int_t^p S(\tau)(1 - \mu)dM(\tau) \quad (2.4)$$

$$Y(p) = y + L(p) - M(p) \quad (2.5)$$

Pre jednotlivé zmeny dX a dY teda platí:

$$dX = -S(1 + \mu)dL + S(1 - \mu)dM$$

$$dY = dL - dM$$

Budeme uvažovať dva prípady : portfólio *bez* a *s* opčnou príležitosťou. V prípade, že nemá možnosť investovať do opcií, investorov úžitok z koncového stavu je :

$$X_T + Y_T S_T$$

V prípade opčnej príležitosti, predpokladáme, že sme predali N call opcií a teda úžitok v čase $t = T$ je :

$$X_T + Y_T S_T - N(S_T - E)^+$$

Idea ocenenia opcie spočíva v maximalizácii funkcie užitočnosti pochádza od Hodgesa a Neubergera [5]. Uvažujeme funkciu užitočnosti U , ktorá je rastúca, konkávna a pre všetky $r > 0$ spĺňa podmienku *constant absolute risk aversion* :

$$\frac{-U''(r)}{U'(r)} = \gamma$$

kde $\gamma > 0$ je parameter averzie k riziku. Funkciu užitočnosti uvažujeme v nasledovnom exponenciálnom tvare : $U(r) = 1 - e^{-r}$. Predpokladáme, že funkcia užitočnosti konkrétneho investora, zohľadňujúca jeho mieru averzie k riziku U^ε je daná nasledovne:

$$U^\varepsilon = U(\xi/\varepsilon)$$

pre všetky $\xi > 0$ a pre parameter $\varepsilon = \frac{1}{\gamma N}$, pre ktorý platí : $0 < \varepsilon \ll 1$

V prípade, ak neuvažujeme príležitosť investovať do opcií, *hodnotová funkcia* investora $v^f = v^f(x, y, s, t)$ je daná *problémom stochastického dynamického programovania* :

$$v^f(x, y, s, t) = \sup_{L, M} \mathbb{E}(U(X_T + Y_T S_T)) \quad (2.6)$$

Týmto problémom je hľadanie maximálneho úžitku z koncového stavu, cez všetky obchodné stratégie (L_τ, M_τ) , $\tau \in [t, T]$ pri počiatočných podmienkach :

$$X_t = x, Y_t = y, S_t = s$$

V prípade, ak sme predali N európskych call opcií, hodnotová funkcia investora vyzerá nasledovne :

$$v(x, y, s, t) = \sup_{L, M} \mathbb{E}(U(X_T + Y_T S_T - N(S_T - E)^+)) \quad (2.7)$$

kde maximalizujeme očakávaný úžitok z koncového stavu, vzhľadom na všetky obchodné stratégie a počiatočné podmienky, spomenuté vyššie.

Hodges a Neuberger v [5] zaviedli predpoklad, že cena každej opcie je rovná maximálnemu riešeniu $\Lambda = \Lambda(x, y, s, t; \gamma, N)$, vyhovujúcemu nasledovnej algebraickej rovnici:

$$v(x + N\Lambda, y, s, t) = v^f(x, y, s, t) \quad (2.8)$$

Vďaka linearite vzťahov (2.4),(2.5) môžeme odvodiť tzv. *škálovaciu vlastnosť* pre cenu opcie $\Lambda(x, y, s, t; \gamma, N)$:

$$\Lambda(x, y, s, t; \gamma, N) = \Lambda(Nx, Ny, s, t; \gamma N, 1)$$

Táto vlastnosť hovorí, že predaj N opcií s rizikovým faktorom γ nám prinesie rovnakú cenu opcie, ako predaj len jednej s rizikovým faktorom γN .

Predchádzajúci argument škálovania nás navádza uvažovať asymptotickú analýzu, pre γN idúce do nekonečna. Upravíme rovnice (2.6), (2.7) a dostávame :

$$v^f(x, y, s, t) = 1 - \inf_{L, M} \mathbb{E} \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}(X_T + Y_T S_T)} \right)$$

$$v(x, y, s, t) = 1 - \inf_{L, M} \mathbb{E} \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}(X_T + Y_T S_T - (S_T - E)^+)} \right)$$

Pre zjednodušenie analýzy definujeme implicitne pomocné funkcie z^ε a $z^{\varepsilon, f}$

$$v(x, y, s, t) = 1 - \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x + ys - z^\varepsilon(x, y, s, t))} \right) \quad (2.9)$$

$$v^f(x, y, s, t) = 1 - \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}(x + ys - z^{\varepsilon, f}(x, y, s, t))} \right) \quad (2.10)$$

V čase expirácie $t = T$, pre ľubovoľné počiatočné hodnoty x, y, s platí:

$$z^\varepsilon(x, y, s, T) = (s - E)^+ , \quad z^{\varepsilon, f}(x, y, s, T) = 0$$

Teraz môžeme z rovnice (2.8) a rastúcosti funkcie užitočnosti U vidieť, že pre cenu opcie Λ platí:

$$\Lambda(x, y, s, t, \frac{1}{\varepsilon}, 1) = z^\varepsilon(x, y, s, t) - z^{\varepsilon, f}(x, y, s, t) \quad (2.11)$$

Náš ďalším krokom bude určenie hodnotových funkcií v^f a v .

Idea spočíva v prevzatí tzv. *Bellmanovho princípu optimality* na riešenie rovnice *Dynamického Programovania*, na základe ktorého máme :

$$v(x, y, s, t) = \sup_{L, M} \mathbb{E}(v(X_{t+dt}, Y_{t+dt}, S_{t+dt}, t + dt))$$

Pričom maximalizácia očakávanej užitočnosti prebieha cez všetky obchodné stratégie $L_\tau, M_\tau, \tau \in [t, t+dt]$, počiatočné podmienky $X_T = x, Y_T = y, S_T = s$ a dt , pod ktorým rozumieme ľubovoľný časový prírastok. Rovnaká rovnica platí pre hodnotovú funkciu v^f .

Použitím Itôovej lemy na prírastok $dv = v(X_{t+dt}, Y_{t+dt}, S_{t+dt}, t+dt) - v(x, y, s, t)$ na intervale $[t, t+dt]$ dostávame:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \rho s \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\hat{\sigma}^2 s^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dY}{dt} + \hat{\sigma}^2 s \frac{\partial v}{\partial s} dW \right)$$

Nakoľko poznáme rovnice pre zmenu dX a dY uvedené vyššie máme:

$$\frac{dX}{dt} = -s(1+\mu)\dot{L} + s(1-\mu)\dot{M} \quad \frac{dY}{dt} = \dot{L} - \dot{M}$$

kde $\dot{L} = \frac{dL}{dt}$ a $\dot{M} = \frac{dM}{dt}$. Nakoľko pre obchodné stratégie L, M predpokladáme neklesajúcosť, dostávame podmienku pre ich prvé derivácie: $\dot{L}, \dot{M} \geq 0$. Z konštrukcie Itôovho Integrálu (môžeme nájsť v [11],[10]) vieme, že $\mathbb{E} \left(\hat{\sigma} s \frac{\partial v}{\partial s} dW \right) = 0$.

Keďže $\mathbb{E}(v(X_{t+dt}, Y_{t+dt}, S_{t+dt}, t+dt)) = v(x, y, s, t) + E(dv)$ dostávame:

$$0 = \inf_{\dot{L}, \dot{M} \geq 0} \left[-\frac{\partial v}{\partial t} - \rho s \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\hat{\sigma}^2 s^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \left(s(1+\mu) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \dot{L} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - s(1-\mu) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \dot{M} \right]$$

Je jednoduché ukázať, že platí nasledovné:

$$\inf_{\dot{L}, \dot{M} \geq 0} [A + B\dot{L} + C\dot{M}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \min(A, B, C) = 0$$

Ako dôsledok dostávame rovnicu pre hodnotovú funkciu v v nasledovnej forme:

$$\min \left(-\frac{\partial v}{\partial t} - \rho s \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\hat{\sigma}^2 s^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}; s(1+\mu) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial y} - s(1-\mu) \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

Použitím implicitnej rovnice pre pomocnú funkciu $z^\varepsilon(x, y, s, t)$ a berúc do úvahy rastúcosť funkcie užitočnosti U^ε môžeme odvodiť nasledovnú rovnicu dynamického programovania pre funkciu z^ε :

$$\begin{aligned} \max \left(\frac{\partial z^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\hat{\sigma}^2 s^2}{2} \frac{\partial^2 z^\varepsilon}{\partial s^2} - \frac{\hat{\sigma}^2 s^2}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial z^\varepsilon}{\partial s} - y \right)^2 - \rho s \left(\frac{\partial z^\varepsilon}{\partial s} - y \right); \right. \\ \left. -\frac{\partial z^\varepsilon}{\partial y} - \mu s + s(1+\mu) \frac{\partial z^\varepsilon}{\partial x}; \right. \\ \left. f \frac{\partial z^\varepsilon}{\partial y} - \mu s - s(1-\mu) \frac{\partial z^\varepsilon}{\partial x} = 0 \right) \end{aligned}$$

Nakoľko terminálové podmienky v čase $t = T$ pre funkciu z nezávisia od premennej x , ani koeficienty práve uvedenej rovnice od nej nezávisia, ani riešenie z tejto rovnice, nie je od tejto premennej závislé, tak $z = z(y, s, t)$. Dôkaz môžeme nájsť v [3].

Spomínanú rovnicu teda môžeme prepísať nasledovne:

$$\max \left(\frac{\partial z^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\hat{\sigma}^2 s^2}{2} \frac{\partial^2 z^\varepsilon}{\partial s^2} - \frac{\hat{\sigma}^2 s^2}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial z^\varepsilon}{\partial s} - y \right)^2 - \rho s \left(\frac{\partial z^\varepsilon}{\partial s} - y \right); \left| \frac{\partial z^\varepsilon}{\partial y} \right| - \mu s \right) = 0 \quad (2.12)$$

Analogickú rovnicu môžeme odvodiť aj pre $z^{\varepsilon,f}(x, y, s, t)$ a teda $z^{\varepsilon,f}$ je riešením rovnice

$$\max \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\hat{\sigma}^2 s^2}{2} \frac{\partial^2 z^{\varepsilon,f}}{\partial s^2} - \frac{\hat{\sigma}^2 s^2}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial z^{\varepsilon,f}}{\partial s} - y \right)^2 - \rho s \left(\frac{\partial z^{\varepsilon,f}}{\partial s} - y \right); \left| \frac{\partial z^{\varepsilon,f}}{\partial y} \right| - \mu s \right) = 0 \quad (2.13)$$

Pripomeňme si terminálové podmienky pre naše hľadané funkcie $z^\varepsilon, z^{\varepsilon,f}$ pre ľubovoľné počiatočné podmienky y, s :

$$\begin{aligned} z^\varepsilon(y, s, t) &= (s - E)^+ \\ z^{\varepsilon,f}(y, s, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Zavedieme štruktúrally predpoklad o miere transakčných nákladov μ :

$$\mu = a\sqrt{\varepsilon}$$

kde, $a > 0$ je daná konštanta. V ďalšom kroku si uvedieme konvergenčný výsledok asymptotickej analýzy Barlesa a Sonera. Pre nami uvažované funkcie $z^\varepsilon(y, s, t), z^{\varepsilon,f}(y, s, t)$ a $\varepsilon \rightarrow 0^+$ platí:

$$\begin{aligned} z^{\varepsilon,f}(y, s, t) &\rightarrow 0 \\ z^\varepsilon(y, s, t) &\rightarrow V(s, t), \end{aligned} \quad (2.15)$$

kde $V = V(s, t)$ je riešenie nelineárnej Black-Scholesovej rovnice s volatilitou podľa (2.1). V dôsledku tohto tvrdenia, ak $\varepsilon \rightarrow 0^+$, podľa rovnice (2.11) Λ konverguje k riešeniu $V(s, t)$.

Formálne odvodenie limity je vskutku priamočiare a intuitívne. Ako dôsledok terminálovej podmienky $z^{\varepsilon,f}(y, s, T) = 0$, vieme dokázať aplikovaním *princípu parabolického porovnávania* ohraničenie funkcie $z^{\varepsilon,f}(y, s, t)$:

$$\frac{\varepsilon \rho^2}{2\hat{\sigma}^2}(T - t) \leq z^{\varepsilon,f}(y, s, t) \leq z^\varepsilon(y, s, t)$$

$$z^{\varepsilon,f}(y, s, t) \leq \mu s|y| \equiv a\sqrt{\varepsilon}s|y|, \quad z^{\varepsilon}(y, s, t) \leq p + \mu p|y - 1|$$

Z prvej, z vyššie uvedených nerovností, môžeme ľahko vidieť, podľa *Princípu stláčania*, že :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z^{\varepsilon,f}(y, s, t) = 0$$

Pre dôsledný dôkaz odkazujeme čitateľa na [3].

Ako sme spomenuli vyššie, odvodený vzťah (2.14) je výsledkom asymptotickej analýzy, ktorá predpokladá nasledovný asymptotický rozvoj funkcie $z^{\varepsilon}(y, s, t)$ pre $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$z^{\varepsilon}(y, s, t) = V(s, t) + \varepsilon C(r, A) + o(\varepsilon)$$

$$\text{kde} \quad r = \frac{as}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\partial V}{\partial s} - y \right), \quad A = a^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$$

Teraz môžeme vypočítať jednotlivé derivácie funkcie $z^{\varepsilon}(y, s, t)$ vstupujúce do rovnice (2.12), pričom predpokladáme, že funkcia r je 1. rádu:

$$z_t^{\varepsilon} = V_t + O(\sqrt{\varepsilon})$$

$$z_y^{\varepsilon} = C_r r_y = -\sqrt{\varepsilon} a s C_r = -\mu s C_r + O(\sqrt{\varepsilon})$$

$$z_s^{\varepsilon} = V_s + \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{A}{as} \right) C_r + O(\sqrt{\varepsilon})$$

$$z_{ss}^{\varepsilon} = V_{ss} + \frac{d}{ds} (\varepsilon r_s C_r) = V_{ss} + \varepsilon (r_p)^2 C_{rr} = V_{ss} + \left(\frac{A}{as} \right)^2 C_{rr} + O(\sqrt{\varepsilon})$$

Ak teraz dosadíme naše výpočty do (2.12) a zanedbáme členy $O(\sqrt{\varepsilon})$ dostávame rovnicu dynamického programovania

$$\max \left(-V_t - \frac{\hat{\sigma}^2 s^2}{2} V_{ss} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2a^2} (A^2 C_{rr} + [r + AC_r]^2); |C_r| - 1 \right) = 0 \quad (2.16)$$

Podľa ohraňenia pre funkciu z^{ε} platí : $z^{\varepsilon} \leq \mu s|y - 1| + s$, teda pre jej deriváciu platí : $z_y^{\varepsilon} \leq \mu s$. To je ekvivalentné s podmienkou $|C_r| \leq 1$.

Nakoľko (2.16) je splnená pre ľubovoľnú hodnotu y , dôsledkovo aj pre všetky r , musí existovať funkcia $K(A)$ taká, že

$$-V_t - \frac{\hat{\sigma}^2 s^2}{2} V_{ss} = K(A) \quad (2.17)$$

Rovnica (2.16) nadobúda tvar:

$$\max \left(K(A) - \frac{\hat{\sigma}^2}{2a^2} [A^2 C_{rr} + (r + AC_r)^2]; |C_r| - 1 \right) = 0 \quad (2.18)$$

Definujeme funkciu $\Psi = \Psi(A)$ nasledovne:

$$\Psi \equiv \frac{2a^2}{A\sigma^2}K(A) \quad (2.19)$$

Barles a Soner v [3, apendix A] skonštruovali explicitné riešenie funkcie $C(r, A)$ a funkcie $\Psi(A)$ problému (2.18), splňajúce pridané hraničné podmienky, zaručujúce jednoznačnosť riešenia $C(r, A)$:

$$C(0, A) = C_r(0, A), \quad \lim_{|r| \rightarrow \infty} C_r(r, A) = 1$$

pre všetky A . Preskočíme väčšinu detailov konštrukcie funkcie C odvolaním sa na [3 apendix A]. Funkciu $\Psi(A)$ môžeme skonštruovať ako riešenie nelineárnej obyčajnej diferenciálnej rovnice:

$$\frac{d\Psi}{dA}(A) = \frac{\Psi(A) + 1}{2\sqrt{\Psi(A)A - A}}, \quad \Psi(0) = 0 \quad (2.20)$$

Barles a Soner taktiež ukázali, že pre funkciu $\Psi(A)$ platia nasledovné vzťahy:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\Psi(A)}{A} = 1$$

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \Psi(A) = -1$$

Barles a Soner uvádzajú nasledovné riešenie $V(s, t)$ pre prípad nulovej bezrizikovej úrokovej miery $r = 0$:

$$\tilde{V}(\tilde{s}, t) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tilde{z}^\varepsilon(\tilde{y}, \tilde{s}, t) - \tilde{z}^{\varepsilon, f}(\tilde{y}, \tilde{s}, t))$$

kde počiatočné podmienky su dané nasledovne:

$$(\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t), \tilde{S}(t)) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}) \equiv (e^{r(T-t)}x, y, e^{r(T-t)}s)$$

Potom riešenie $V(s, t)$ pre nenulovú bezrizikovú úrokovú mieru $r \neq 0$ je :

$$V(s, t) = e^{-r(T-t)}\tilde{V}(e^{r(T-t)}s, t)$$

Podrobný dôkaz môže čitateľ nájsť v [3 apendix A]. Vychádzajúc z rovnice (2.19), zoberieme do úvahy jednotlivé riešenia pre nulovú a nenulovú úrokovú mieru a definíciu funkcie $A(s, t)$, a dostávame finálnu parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu call opcie, pre všetky počiatočné ceny podkladovej akcie $s > 0$ a všetky časy $t \in [0, T]$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rs\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{s^2}{2}\sigma^2(s^2\partial_s^2V, T-t)\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - rV = 0 \quad (2.21)$$

kde

$$\sigma^2(s^2 \partial_s^2 V, T - t) = \hat{\sigma}^2(1 + \Psi(a^2 e^{r(T-t)} s^2 \partial_s^2 V)) \quad (2.22)$$

a $\hat{\sigma}^2$ je konštantná volatilita podkladovej akcie získaná z historických dát. Pripomeňme, že riešenie $V(s, t)$ spĺňa terminálovú podmienku $V(s, T) = (s - E)$ pre $s > 0$.

2.2.2 Transformácia modelu investorových preferencií na Gama rovniciu

Naším ďalším cieľom bude transformovať odvodenú nelineárnu parabolickú rovnicu (2.21) na kvázilineárnu parabolickú rovnicu, pre ktorú vieme zostrojiť efektívnu numerickú schému pre aproximáciu riešenia $V(S, t)$. Hneď na začiatku zavedieme substitúciu nezávislých premenných:

$$x = \ln(S/E), x \in R, \tau = T - t, \tau \in [0, T].$$

V transformácii modelu využijeme *Gama funkciu* Γ :

$$\Gamma = \partial_s^2 V$$

$$H(x, \tau) = S\Gamma = S\partial_S^2 V$$

$$\beta(H) = \frac{\hat{\sigma}^2}{2} (1 + \Psi(Ea^2 e^{r\tau+x} H)) H$$

Na základe zavedených substitúcií, uvedieme niekoľko derivácií, ktoré nám pomôžu pri transformácii rovnice (2.21) na Gama rovnicu:

$$\partial_x S = \partial_x (Ee^x) = Ee^x = S$$

$$\partial_x V(S, t) = \partial_S V \partial_x S = S \partial_S V$$

$$\partial_x^2 V(S, t) = S \partial_S V + S \partial_x (\partial_S V) = S \partial_S V + \partial_S (\partial_S V) \partial_x S = S \partial_S V + S^2 \partial_S^2 V = S \partial_S V + SH$$

$$\partial_\tau H(x, \tau) = \partial_\tau (S \partial_S^2 V(S, t)) \partial_\tau t = -\partial_\tau (S \partial_S^2 V(S, t))$$

Zderivujeme podľa premennej x rovnicu (2.21).

Derivácie jednotlivých členov:

$$\partial_x (\partial_t V) = \partial_t (\partial_x V) = S \partial_t (\partial_S V)$$

$$\partial_x (r S \partial_S V) = r \partial_x (S \partial_S V) = r \partial_x^2 V = r (S \partial_S V + S^2 \partial_S^2 V)$$

$$\partial_x (S\beta) = \partial_x S \beta + S \partial_x \beta = S \beta + S \partial_x \beta$$

$$\partial_x (rV) = r \partial_x V = r S \partial_S V$$

Rovnicu (2.21) predelíme cenou akcie S , uvažujeme nenulové ceny, dostaneme:

$$\partial_t V_S + r(V_S + S V_{SS}) + \beta + \partial_x \beta - r V_S = 0$$

Túto rovnicu opäť derivujeme podľa premennej x . Jednotlivé členy:

$$\partial_x(\partial_t V_S) = \partial_t(\partial_x V_S) = \partial_t(SV_{SS}) = S\partial_t V_{SS}$$

$$\partial_x(r(V_S + SV_{SS})) = r(\partial_x V_S + \partial_x(SV_{SS})) = r(SV_{SS} + \partial_x H)$$

$$\partial_x(\partial_x \beta) = \partial_x^2 \beta$$

Dostávame transformovanú kvazilineárnu parabolickú rovnicu pre funkciu $H(x, \tau)$:

$$\partial_\tau H(x, \tau) = \partial_x^2 \beta(H(x, \tau)) + \partial_x \beta(H(x, \tau)) + r\partial_x H(x, \tau) \quad (2.23)$$

Túto rovnicu budeme nazývať Γ rovnica. Vieme ju efektívne vyriešiť numerickou schémou. Touto úlohou sa ďalej zaoberáme v tretej kapitole. Po nájdení riešenia $H(x, T)$, nasleduje jeho spätná transformácia na riešenie $V(S, 0)$.

Substitúcia $H(x, \tau) = S\partial_S^2 V(S, t)$ nám poskytuje rovnicu pre druhú deriváciu funkcie $V(S, t)$. Budeme teda dvakrát integrovať funkciu $\partial_S^2 V(S, t)$. Po prvej integrácii dostávame:

$$\begin{aligned} \partial_S V(S, t) &= \int_0^S \frac{1}{S} H(\ln(S/E), T - t) ds + C_1(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\ln(S/E)} H(x, T - t) dx + C_1(t) \end{aligned}$$

Po druhej integrácii:

$$\begin{aligned} V(S, t) &= \int_0^S \left(\int_{-\infty}^{\ln(S/E)} H(x, T - t) dx \right) ds + SC_1(t) + C_2(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\ln(S/E)} \left(\int_{Ee^x}^S H(x, T - t) ds \right) dx + SC_1(t) + C_2(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \max(S - Ee^x, 0) H(x, T - t) dx + SC_1(t) + C_2(t) \end{aligned}$$

Kde $C_1 = \partial_S V(0, t)$, $C_2 = V(0, t)$ sú nezávislé od S a platí : $\partial_S V(0, t) = V(0, t) = 0$

Pre *call opciu* po úprave dostávame:

$$V(S, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \max(S - Ee^x, 0) H(x, T - t) dx \quad (2.24)$$

Analogickým postupom dostávame vzorec pre cenu *put* opcie:

$$V(S, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \max(Ee^x - S, 0) H(x, T - t) dx \quad (2.25)$$

2.3 Model Skákajúcej volatility

Ako sme už spomínali vyššie druhým modelom, ktorým sa budeme v práci zaoberať je model skákajúcej (neurčitej) volatility. Budeme vychádzať z modelu, ktorý pre neúplný trh odvodili Avellaneda, Levy a Paras v [1].

V ich modeli volatilita nie je presne určená, predpokladáme, že nadobúda jednu z hraničných hodnôt : $\hat{\sigma}_{min}$, $\hat{\sigma}_{max}$, kde $\hat{\sigma}_{min} < \hat{\sigma}_{max}$. Tieto hodnoty môžu byť určené napr. ako najnižšia a najvyššia hodnota volatility ceny akcie, určenej z historických údajov, alebo tiež ako najnižšia a najvyššia hodnota implikovanej volatility, určenej pri oceňovaní opcií napr. cez lineárny model. V modeli predpokladáme, že volatilita nadobúda tieto hodnoty v závislosti od znamienka druhej derivácie ceny opcie :

$$\sigma^2(S^2\partial_S^2V, S, \tau) = \begin{cases} \hat{\sigma}_{min}^2, & \text{pre } \partial_S^2V < 0. \\ \hat{\sigma}_{max}^2, & \text{pre } \partial_S^2V > 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Zaujímavý pre nás pri tomto modeli je fakt, že už poznáme model, ktorý vieme prepísať na model skákajúcej volatility. Je to Lelandov model, spomínaný v predchádzajúcej kapitole. Pripomeňme si, ako vyzerá volatilita Lelandovho modelu pre oceňovanie call opcie v krátkej pozícii:

$$\sigma^2(S^2\partial_S^2V, S, \tau) = \hat{\sigma}^2(1 + Le\text{sign}(\partial_S^2V)),$$

kde $Le = \sqrt{2/\pi}C/(\hat{\sigma}\sqrt{\Delta t})$ je Lelandovo číslo. Vieme teda funkciu volatility Lelandovho modelu prepísať do tvaru volatility danú vzťahom (2.26), a teda :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{min}^2 &= \hat{\sigma}^2(1 - Le) \\ \hat{\sigma}_{max}^2 &= \hat{\sigma}^2(1 + Le) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Analogicky ako pri predchádzajúcom modeli, transformujeme pôvodnú nelineárnu Black-Scholesovu rovnicu na kvázilineárnu parabolickú rovnicu pre novú premennú $H(x, \tau) = S\partial_S^2V$:

$$\partial_\tau H(x, \tau) = \partial_x^2\beta(H(x, \tau)) + \partial_x\beta(H(x, \tau)) + r\partial_x H(x, \tau), \quad (2.28)$$

kde $\beta(H(x, \tau))$ je definovaná:

$$\beta(H(x, \tau)) = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_{min}^2}{2} H, & \text{pre } H < 0. \\ \frac{\hat{\sigma}_{max}^2}{2} H, & \text{pre } H > 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Transformovaná rovnica s novou premennou nadobúda pre oba modely rovnaký tvar, a teda po spätnej transformácii na riešenie $V(S, t)$ dostávame vzťah (2.24) pre cenu call opcie a vzťah (2.25) pre cenu put opcie.

Nakoľko sa znamienko druhej derivácie $\partial_S^2 V$ v Lelandovom modeli nemení pre oceňovanie call a put opcie, náš model skákajúcej volatility má zmysel len pre oceňovanie opčných stratégií. Pre call alebo put opciu, dostávame lineárny Black-Scholesov model.

3 Numerické riešenie

Pri oboch modeloch sme nelineárnu oceňovaciu PDR pre cenu opcie previedli na kvázilineárnu Γ rovnicu. Túto rovnicu nevieme vyriešiť analyticky, ale poznáme efektívne numerické metódy pre nájdenie riešenia. Budeme teda hľadať riešenie pre oba modely numerickou schémou. Poznáme viacero možností, ako nájsť pomocou numerického výpočtu hodnotu finančného derivátu, napr. v [10], [11]. V tejto kapitole si rozoberieme niektoré z nich a aplikujeme ich na model investorových preferencií a model skákajúcej volatility.

3.1 Bod prepojenia a počiatočná podmienka

Predtým než budeme uvádzať možnosti riešenia rovnice (2.23), uvedieme pre ňu počiatočnú podmienku, ktorú sme doposiaľ nespomenuli.

Táto podmienka je výsledkom úvahy o tom, čo sa deje v čase blízko expirácie .

Pozrieme sa na prepis Lelandovho modelu na model skákajúcej volatility. Podľa Lelandovej metodológie modelovania transakčných nákladov, prerozdeľujeme naše portfólio každých Δt časových jednotiek, pričom prípustný časový krok Δt spĺňa ohraničenie : $\Delta t > (2/\pi)(C^2/\sigma^2)$, kde $C = (S_{ask} - S_{bid})/(S_{ask} + S_{bid})$. Definovaním $\tau = T - t$, za čas blízko expirácie považujeme $\tau > 0$, kde τ je číslo blízko nule.

Leland vo svojom modeli predpokladá, že frekvencia prerozdeľovania Δt je oveľa menšia ako τ [odkaz na literaturu]. Ak je čas do expirácie väčší ako časový krok prerozdeľovania, $\tau > \Delta t$, môžeme portfólio prerozdeľovať. Ak je však $\tau < \Delta t$ portfólio už prerozdeliť nemôžeme.

Dostávame teda dva časové intervaly : $(0, \tau^*)$, kde portfólio prerozdeľujeme a (τ^*, T) , kde portfólio neprerozdeľujeme. Ostáva určiť hodnotu τ^* . Z dôvodu udržiavania minimálnej rizikovosti nášho portfólia, by sme radi mali možnosť čo najviac prerozdeľovať portfólio, a preto položíme τ^* rovné minimálnej prípustnej frekvencii prerozdeľovania. Do modelu investorových preferencií Barles a Soner taktiež zahŕňajú predpoklad o transakčných nákladoch, avšak nevzniká tu dolné ohraničenie na frekvenciu prerozdeľovania Δt . Hodnotu τ^* preto môžeme pre model investorových preferencií položiť rovnú Δt .

Definícia (*Bod prepojenia*)

Ak pre $\tau^* \in (0, T)$ platí, že $\tau^* = \Delta t$ tak, nazývame τ^* bodom prepojenia a pre $t^* \in (0, T)$, kde $t^* = T - \tau^*$ platí:

ak $t \in (0, t^*)$ riešime transformáciu nelineárnej Black-Scholesovej rovnice, Γ rovnicu definovanú vzťahom (2.23),

ak $t \in (t^*, T)$ riešime lineárnu Black-Scholesovu rovnicu.

Teraz uvedieme počiatočnú podmienku $H(x, 0) = \bar{H}(x)$ pre Γ rovnicu. Budeme ju uvažovať v tvare Diracovej δ funkcie, ktorú môžeme chápať, v zmysle pravdepodobnostných rozdelení, ako limitu funkcie hustoty normálneho rozdelenia so strednou hodnotou 0, pre parameter a blížiaci sa k nule, teda :

$$\begin{aligned}\delta_a(x) &= \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{\frac{-x^2}{a^2}} \\ \delta(x) &= \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x)\end{aligned}$$

Ako sme už spomínali, na intervale $(0, \tau^*)$ riešime lineárnu Black-Scholesovu rovnicu, a teda naša počiatočná podmienka vstupujúca do Γ rovnice vyhovuje riešeniu Black-Scholesovej rovnice v tomto bode. Detail odvodenia riešenia lineárnej Black-Scholesovej rovnice, nájdeného pomocou *Greenovho vzorca* môže čitateľ nájsť napr. v [10]. Diracovu $\delta(x)$ funkciu pre našu počiatočnú podmienku budeme aproximovať, a vyjadríme ju z rovnosti Diracovej $\delta_a(x)$ funkcie a riešenia lineárnej Black-Scholesovej rovnice v bode prepojenia. Dostávame aproximáciu posunutej Diracovej $\delta(x)$ funkcie :

$$\bar{H}(x) = \frac{N'(d)}{\hat{\sigma}\sqrt{\tau^*}},$$

kde $N'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-d^2}{2}}$ a $d = (x + (r - \sigma^2/2)\tau^*)/(\hat{\sigma}\sqrt{\tau^*})$.

Ako okrajové podmienky zvolíme nasledovné:

$$H(+\infty, \tau) = H(-\infty, \tau) = 0$$

3.2 Numerická schéma

V nasledovnej časti si uvedieme niekoľko numerických schém, ktoré by sme na našu úlohu mohli aplikovať. Všetky schémy vychádzajú z myšlienky numerickej metódy konečných diferencií, pomocou ktorej vieme aproximovať jednotlivé parciálne derivácie.

Skôr než začneme aproximovať, potrebujeme náš spojitý priestor transformovať na diskretný. Premennú x uvažujeme vo všeobecnosti z intervalu všetkých reálnych čísel, $x \in (-\infty, +\infty)$. Nakoľko premenná $x = \ln(S/E)$ a uvažujeme len $S > 0$, a rovnako nepredpokladáme, že by cena akcie mohla tak prudko vzrásť, až by presahovala nami stanovenú hornú hranicu, resp. by ju presahovala so zanedbateľne malou pravdepodobnosťou, môžeme pre dostatočne veľké L , pre premennú x uvažovať $x \in (-L, L)$. Ako dostatočne veľké L sa ukazuje už hodnota $L \approx 1, 2$. My budeme v numerických schémach využívať $L = 2$, a teda naša finančná premenná, cena akcie S sa bude pohybovať v intervale $(Ee^{-L}, Ee^L) = (0.135E, 7.389E)$.

Hlavná myšlienka metódy konečných diferencií spočíva vo vytvorení siete mrežových bodov v priestore nezávislých premenných, preto sa tiež zvykne nazývať aj metóda sietí, v našom prípade (x, τ) , kde $x \in (-L, L)$ a $\tau \in (\tau^*, T)$. Zvolíme si diskretizáciu časovej premennej nasledovne, interval (τ^*, T) rozdelíme na m rovnakých dielov, odkiaľ pre časový krok dostávame: $k = (T - \tau^*)/m$, a teda pre diskretizáciu časovej premennej τ_j platí: $\tau = \tau^* + k(j - 1)$, kde $j = 1, 2, \dots, m + 1$.

Pre diskretizáciu priestorovej premennej x zvolíme priestorový krok h , potom $n = L/h$ a $x_i = -L + h(i - 1)$, kde $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$. Vďaka metóde sietí môžeme aproximovať rovnicu (2.23) v každom mrežovom bode a tým hľadať riešenie po jednotlivých časových vrstvách pre celú škálu vstupných argumentov x_i ; $x_i = -L + h(i - 1)$. Nás samozrejme zaujíma posledná časová vrstva, ktorá po spätnej transformácii, určuje našu hľadanú cenu opcie v počiatočnom čase. Aproximáciu nášho hľadaného riešenia Γ rovnice v bode (x_i, τ_j) budeme označovať ako:

$$H_i^j \approx H(x_i, \tau_j).$$

Skôr než prejdeme k aproximácii jednotlivých parciálnych derivácií, spomenieme ešte okrajové podmienky, ktoré aproximujeme nasledovne:

$$H(x_1, \tau_j) = H(x_{2n+1}, \tau_j) = 0 ,$$

pre $j = 1, 2, \dots, m + 1$

Z numerických metód [2] si pripomeňme ako aproximovať parciálnu deriváciu funkcie. Idea spočíva v nahradení derivácie diferenciou. Uvedieme tri možnosti aproximácie

prvej derivácie :

dopredná diferenciacia, chyba rádu $O(h)$:

$$\partial_x f(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} + O(h) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

spätná diferenciacia, chyba rádu $O(h)$:

$$\partial_x f(x_{i+1}) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} + O(h) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

centrálna diferenciacia, chyba rádu $O(h^2)$:

$$\partial_x f(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + O(h^2) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

Je pochopiteľné, že centrálna diferenciacia má menšiu chybu, ako dopredná a spätná, nakoľko hodnotu derivácie v bode x_i počítame cez hodnoty funkcie $f(x)$ v bodoch x_{i-1} a x_{i+1} , a nie pomocou len jedného z nich, ako je to pri ostatných dvoch, teda aproximácia je presnejšia a od skutočnej hodnoty sa líši menej.

Druhú deriváciu môžeme aproximovať nasledovne:

$$\partial_x^2 f(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(x_{i+1} - x_i)^2} + O(h^2) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Aproximácia druhej derivácie nám dáva chybu rádu $O(h^2)$. V našej numerickej schéme by sme radi chybu minimalizovali, a preto budeme používať na aproximáciu prvej derivácie pre priestorovú premennú centrálnu diferenciu, a teda spolu s aproximáciou druhej derivácie priestorovej premennej nepresiahneme chybu $O(h^2)$.

Prvú deriváciu časovej premennej môžeme aproximovať doprednou alebo spätnou diferenciou, obe nám spôsobia chybu $O(\tau)$. Podľa voľby aproximácie dostávame pre doprednú diferenciu explicitnú metódu, pre spätnú diferenciu implicitnú, resp. semi-implicitnú metódu, to závisí od voľby aproximácií pre priestorovú premennú.

Pripomeňme si, že pri explicitnej schéme počítame novú časovú vrstvu jedine z hodnôt predchádzajúcej časovej vrstvy. Druhá základná schéma je implicitná, kde novú časovú vrstvu počítame z prvkov novej časovej vrstvy.

Pozrieme sa teraz na našu funkciu $\beta(H(x_i, \tau_j), x_i, \tau_j)$, ktorej derivácie chceme aproximovať. Pre oba modely poznáme jej vyjadrenie, môžeme si uvážiť, ako jej derivácie čo

najlepšie aproximovať. Pre prehľadnosť zvolíme nasledovné označenie:

$$\begin{aligned}
\beta_i^j &\approx \beta(H(x_i, \tau_j), x_i, \tau_j) \\
(\beta'_H)_i^j &\approx \beta'_H(H(x_i, \tau_j), x_i, \tau_j) \\
(\beta'_x)_i^j &\approx \beta'_x(H(x_i, \tau_j), x_i, \tau_j) \\
\partial_x \beta_i^j &\approx \partial_x \beta(H(x_i, \tau_j), x_i, \tau_j) \\
\partial_x^2 \beta_i^j &\approx \partial_x^2 \beta(H(x_i, \tau_j), x_i, \tau_j) \\
\partial_x \beta(H) &\approx \partial_x \beta \\
\partial_x^2 \beta(H) &\approx \partial_x^2 \beta \\
\beta(H_i) &\approx \beta_i \\
(\beta'_H)_i &\approx \beta'_H(H_i)
\end{aligned}$$

V prípade modelu skákajúcej volatility je funkcia $\beta = \beta(H(x_i, \tau_j))$ označenie definované vyššie, týkajúce sa indexovania, ostáva rovnaké.

Prvá možnosť ako aproximovať $\partial_x \beta$ a $\partial_x^2 \beta$ je nasledovná:

$$\begin{aligned}
\partial_x \beta &\approx \frac{\beta_{i+1} - \beta_{i-1}}{2h} + O(h^2) \\
\partial_x^2 \beta &\approx \frac{\beta_{i+1} - 2\beta_i + \beta_{i-1}}{h^2} + O(h^2)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Druhá možnosť, ktorá sa nám ponúka, je využitie faktu, že pre oba modely predpis funkcie β poznáme a teda vieme si vyjadriť aj jej deriváciu. Potom vieme aproximovať jednotlivé derivácie nasledovne:

$$\begin{aligned}
\partial_x \beta &\approx (\beta'_H)_i \frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2h} + O(h^2) \\
\partial_x^2 \beta &\approx \left((\beta'_H)_{i+1/2} \frac{H_{i+1} - H_i}{h} - (\beta'_H)_{i-1/2} \frac{H_i - H_{i-1}}{h} \right) \frac{1}{h} + O(h^2)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Aproximácia (3.2) využíva aj hodnoty $H_{i-1/2}$ a $H_{i+1/2}$, ktoré sa nachádzajú medzi mrežovými bodmi, a teda budeme ich hodnotu pri výpočte interpolovať pomocou susedných mrežových bodov.

Aproximácia (3.2) by mala znížiť nepresnosti pri výpočte oproti aproximácii (3.1). Je

to spôsobené tým, že do aproximácie (3.2) zahrňame väčší podiel explicitného predpisu funkcie β a menší priestor dávame aproximácii. Pre model investorových preferencií máme $\beta = \beta(H(x, \tau), x, \tau)$ a teda aproximácia využívajúca deriváciu funkcie $\beta(H(x, \tau), x, \tau)$ je v tvare:

$$\begin{aligned}\partial_x \beta &\approx (\beta'_H)_i \left(\frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2h} \right) + (\beta'_x)_i + O(h^2) \\ \partial_x^2 \beta &\approx \frac{1}{h} \left((\beta'_H)_i \left(\frac{H_{i+1} - H_i}{h} \right) - (\beta'_H)_{i-1} \left(\frac{H_i - H_{i-1}}{h} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{h} \left((\beta'_x)_i - (\beta'_x)_{i-1} \right)\end{aligned}\tag{3.3}$$

Teraz, keď sme si určili ako aproximovať jednotlivé derivácie funkcie $\beta = \beta(H(x, \tau))$ resp. $\beta(H(x, \tau), x, \tau)$, môžeme prejsť k voľbe aproximácie derivácie podľa jednotlivých premenných, a teda k tomu, či pre časový resp. priestorový krok zvolíme doprednú alebo spätnú diferenciu, a tým sa dostaneme k explicitnej, implicitnej alebo semiimplicitnej metóde.

3.2.1 Explicitná metóda

Ako sme už spomínali vyššie, explicitnú metódu dostaneme, ak časovú deriváciu nahradíme doprednou diferenciou. Explicitná metóda je jednoduchá na výpočet, poskytuje nám rekurentný vzťah, podľa ktorého počítame dnešnú časovú vrstvu len z hodnôt včerajšej časovej vrstvy. Pre našu Γ rovnicu využitím explicitnej metódy a aproximácie (3.1) dostávame :

$$\begin{aligned}\frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} &= \frac{1}{h^2} (\beta_{i+1}^j - 2\beta_i^j + \beta_{i-1}^j) + \frac{1}{2h} (\beta_{i+1}^j - \beta_{i-1}^j) \\ &\quad + \frac{r}{2h} (H_{i+1}^j - H_{i-1}^j)\end{aligned}\tag{3.4}$$

Získali sme aproximáciu rovnice (2.27) s chybou rádu $O(k + h^2)$. Konvergenciu riešenia nám zaručuje splnenie *Courant-Levy-Fridrichsovej* podmienky stability, ktorá udáva obmedzenie na časový resp. priestorový krok:

$$\frac{k\sigma^2}{h^2} \leq 1$$

Táto metóda je jednoduchá, no tým, že podmieňuje voľbu časového kroku k a priestorového kroku h , môže pri danej hodnote h viesť k voľbe malého časového kroku, ktorým sa dĺžka výpočtu značne znásobí.

3.2.2 Implicitná metóda

Implicitnú metódu dostaneme tak, že všetky členy rovnice dnešnej časovej vrstvy počítame priamo z dnešnej časovej vrstvy. Pre aproximáciu (3.1) dostávame :

$$\begin{aligned} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} &= \frac{1}{h^2} (\beta_{i+1}^{j+1} - 2\beta_i^{j+1} + \beta_{i-1}^{j+1}) + \frac{1}{2h} (\beta_{i+1}^{j+1} - \beta_{i-1}^{j+1}) \\ &+ \frac{r}{2h} (H_{i+1}^{j+1} - H_{i-1}^{j+1}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Výhodou implicitnej metódy v porovnaní s explicitnou je, že pri nej odpadá podmienka stability (CLF), avšak prináša značne komplikovaný postup riešenia, a preto sa ňou v tejto práci nebudeme zaoberať.

3.2.3 Semiimplicitná metóda

Semiimplicitná metóda vznikne tak, že nelineárne členy Γ rovnice zoberieme zo starej (včerajšej) časovej vrstvy, a lineárne členy z novej (dnešnej) časovej vrstvy. To znamená, že členy H_x , H_τ počítame implicitne z dnešnej, j -tej časovej vrstvy a členy β'_H , β'_x počítame explicitne zo včerajšej, $j-1$ časovej vrstvy.

Uvedieme si teraz semiimplicitnú metódu pre všeobecný tvar funkcie $\beta(H(x, \tau), x, \tau)$. Uvažujeme aproximáciu prvej derivácie funkcie $\beta(H) = \beta(H(x, \tau), x, \tau)$ podľa premennej x z aproximácie (3.1), a aproximáciu druhej derivácie $\beta(H) = \beta(H(x, \tau), x, \tau)$ podľa premennej x z aproximácie (3.3). Dostávame aproximáciu Γ rovnice v tvare :

$$\begin{aligned} \frac{H_i^j - H_i^{j-1}}{k} &= (\beta'_H)_i^{j-1} \left(\frac{H_{i+1}^j - H_i^j}{h^2} \right) - (\beta'_H)_{i-1}^{j-1} \left(\frac{H_i^j - H_{i-1}^j}{h^2} \right) \\ &+ \frac{1}{h} ((\beta'_x)_i^{j-1} - (\beta'_x)_{i-1}^{j-1}) \\ &+ \frac{1}{h} (\beta_i^{j-1} - \beta_{i-1}^{j-1}) + \frac{r}{2h} (H_{i+1}^{j-1} - H_{i-1}^{j-1}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Po úprave rovnice (3.6) dostávame nasledovné vzťahy:

$$a_i^j H_{i-1}^j + b_i^j H_i^j + c_i^j H_{i+1}^j = d_i^j$$

$$a_i^j = -\frac{k}{h^2}(\beta'_H)_{i-1}^{j-1} + \frac{kr}{2h}$$

$$c_i^j = -\frac{k}{h^2}(\beta'_H)_i^{j-1} - \frac{kr}{2h}$$

$$b_i^j = 1 - (a_i^j + c_i^j)$$

$$d_i^j = H_i^{j-1} + \frac{k}{h} \left(\beta_i^{j-1} - \beta_{i-1}^{j-1} + (\beta'_x)_i^{j-1} - (\beta'_x)_{i-1}^{j-1} \right) \quad (3.7)$$

Vzťahmi definovanými v (3.7) dostávame úlohu v každej časovej vrstve vyriešiť systém lineárnych rovníc, pre nájdenie hodnôt z novej časovej vrstvy. V maticovom zápise:

$$A^j H^j = d^j$$

Dostávame trojdiagonálny systém, ktorý vieme efektívne riešiť metódou LU rozkladu. Tento postup ďalej opisujeme priamo v aplikácii výpočtu na model investorových preferencií v nasledovnej podkapitole v časti *Využitie semiimplicitnej metódy*.

3.3 Numerické riešenie modelu investorových preferencií

Riešenie rovnice (2.23) budeme hľadať pomocou explicitnej metódy pre aproximácie (3.1) a (3.3), a pomocou semiimplicitnej metódy, podľa vzťahu (3.6).

3.3.1 Využitie explicitnej metódy

Využite aproximácie (3.1)

S využitím aproximácie (3.1) dostávame dosadením do Γ rovnice vzťah (3.4). Pripomeňme si predpis funkcie $\beta(H(x, \tau), x, \tau)$ pre model investorových preferencií:

$$\beta(H(x, \tau), x, \tau) = \frac{\hat{\sigma}^2}{2} (1 + \psi(Ea^2 e^{r\tau+x} H)) H \quad (3.8)$$

Definujeme si pomocné premenné, ktoré sa budú meniť v každom kroku nášho cyklu, prebiehajúceho cez všetky $i = 2 : 2n$ a $j = 1 : m$:

$$a = \frac{\hat{\sigma}^2}{2} (1 + \psi(Ea^2 e^{rjk+(i-1)h} H_{i-1}^j))$$

$$b = \frac{\hat{\sigma}^2}{2} (1 + \psi(Ea^2 e^{rjk+ih} H_i^j))$$

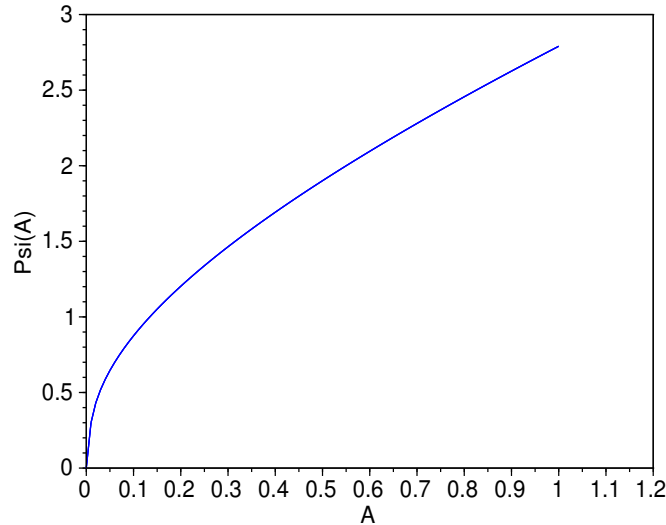
$$c = \frac{\hat{\sigma}^2}{2} (1 + \psi(Ea^2 e^{rjk+(i+1)h} H_{i+1}^j))$$

Pripomeňme si ako máme zadanú funkciu $\psi(A)$ podľa Barlesa a Sonera:

$$\frac{d\psi}{dA} = \frac{\psi(A) + 1}{2\sqrt{A\psi(A)} - A} \quad (3.9)$$

kde $\psi(0) = 0$ a $A = Ea^2 e^{r\tau+x} H(x, \tau)$.

Diferenciálnu rovnicu pre $\psi(A)$ riešime numerickou doprednou Newtonovou metódou, (detail v Prílohe 5), na obrázku môžeme vidieť našu aproximáciu funkcie $\psi(A)$ na intervale $(0, 1)$, ktorý bude pre naše účely postačujúci.



Obr.3.1: Numerické Riešenie $\psi(A)$ ODR rovnice (3.9)

Pre nájdenie hodnôt $\psi(A1)$, kde $A1 \in (0, 1)$ používame funkciu $interp1(A, psi, A1)$, ktorá nájde hodnotu $\psi(A1)$ interpoláciou z dvoch najbližších bodov $A \in (0, 1)$, v ktorých máme hodnotu $\psi(A)$ vypočítanú numericky pomocou Newtonovej doprednej metódy. Pomocné premenné a, b, c používame pre zjednodušenie vyjadrenia hodnoty aproximácie funkcie $\beta(H(x, \tau), x, \tau)$ v sieťových bodoch:

$$\beta_{i-1}^j = aH_{i-1}^j$$

$$\beta_i^j = bH_i^j$$

$$\beta_{i+1}^j = cH_{i+1}^j$$

Dosadením týchto hodnôt do rovnice (3.4) a po úprave, dostávame rekurentný vzťah pre výpočet hodnôt H^{j+1} , z už známych hodnôt H^j :

$$H_i^{j+1} = \left(\frac{ak}{h^2} - \frac{ak}{2h} - \frac{kr}{2h} \right) H_{i-1}^j + \left(1 - \frac{2bk}{h^2} \right) H_i^j + \left(\frac{ck}{h^2} - \frac{ck}{2h} + \frac{kr}{2h} \right) H_{i+1}^j \quad (3.10)$$

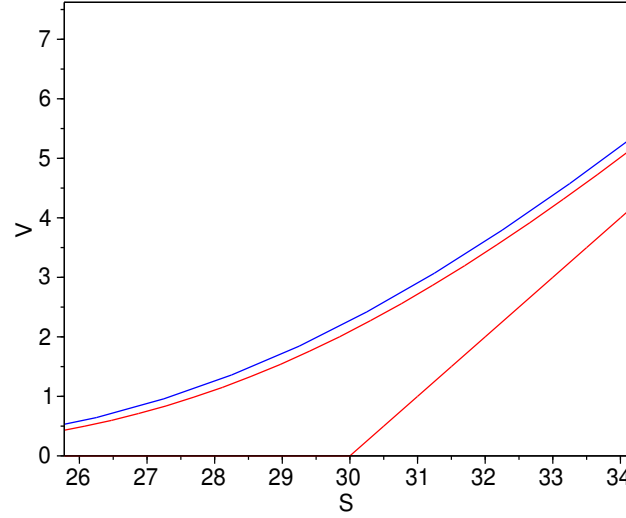
Po naplnení matice $\mathbf{H}(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, s rozmermi $(2n + 1) \times (m + 1)$, do ktorej ukladáme vypočítané jednotlivé časové vrstvy H^j pre $j = 1, 2, \dots, m + 1$, nás bližšie zaujíma posledná časová vrstva $H(x, T)$. Tá vstupuje do výpočtu integrálu definovaného vzťahom (2.24) pre cenu call opcie v počiatočnom čase $t = 0$. Naša úloha je nájsť hodnotu nasledovného integrálu:

$$V(S, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \max(S - Ee^x, 0) H(x, T) dx \quad (3.11)$$

Cenu call opcie definovanú vyťahom (3.11) spočítame numericky pre ľubovoľnú škálu cien $S > 0$. Výpočet spočíva v spočítaní horného a dolného integrálneho súčtu, v deliacich bodoch x_i , pre $i = 1, \dots, 2n + 1$, v ktorých sú nám známe hodnoty $H(i, T)$. Výsledná cena $V(S, 0)$ je priemerom horného a dolného integrálneho súčtu.

Na nasledovnom obrázku Obr.3.2, môžeme vidieť cenu call opcie s parametrami : expiračná cena $E = 30$, $S_{ask} = 36.26$, $S_{bid} = 36.25$, bezriziková úroková miera $r = 0.02$, $\hat{\sigma} = 0.15$ a $\varepsilon = 0.001$ je konštanta zohľadňujúca mieru averzie k riziku jednotlivého investora.

Black-Scholesovu cenu aj payoff môžeme vidieť červenou farbou, cenu vypočítanú pomocou modelu investorových preferencií modrou.



Obr.3.2: Cena $V(S, 0)$ call opcie s parametrami: $E = 30$, $S_{ask} = 36.26$, $S_{bid} = 36.25$, $r = 0.02$, $\hat{\sigma} = 0.15$, podľa modelu investorových preferencií - modrá krivka a podľa lineárnej Black-Scholesovej rovnice - červená krivka

Využite aproximácie (3.3)

Po dosadení aproximácie (3.3) do Γ rovnice dostávame :

$$\begin{aligned} \frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} = & \frac{1}{h} \left((\beta'_H)_i^j \left(\frac{H_{i+1}^j - H_i^j}{h} \right) - (\beta'_H)_{i-1}^j \left(\frac{H_i^j - H_{i-1}^j}{h} \right) + (\beta'_x)_i^j - (\beta'_x)_{i-1}^j \right) \\ & + (\beta'_H)_i^j \left(\frac{H_{i+1}^j - H_{i-1}^j}{2h} \right) + (\beta'_x)_i^j + \frac{r}{2h} (H_{i+1}^j - H_{i-1}^j) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Funkciu $\beta(H(x, \tau), x, \tau)$ vyjadrenú vzťahom (3.8) zderivujeme podľa jednotlivých premenných, upravíme a dostávame vzťahy pre derivácie $\beta'_H(H)$ a $\beta'_x(H)$:

$$\begin{aligned} \beta'_H(H) &= \frac{\hat{\sigma}^2}{2} (1 + \psi(A)) + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} H E a^2 e^{r\tau+x} \psi'(A) \\ \beta'_x(H) &= \frac{\hat{\sigma}^2 H^2}{2} E a^2 e^{r\tau+x} \psi'(A) , \text{ kde } A = E a^2 e^{r\tau+x} H(x, \tau) \end{aligned}$$

V porovnaní s predchádzajúcou explicitnej metódou, v tejto verzii potrebujeme k výpočtu aj hodnoty derivácie funkcie $\psi(A)$.

Deriváciu môžeme počítat dvoma spôsobmi, môžeme ju aproximovať diferenciou, nakoľko máme hodnoty $\psi(A)$ numericky vypočítané, nahrádzať vieme nasledovne :

$$\psi'(A1) = \frac{\psi(A1 + krok) - \psi(A1)}{krok},$$

kde *krok* je nami zvolený krok, a stále platí, že $\psi(A1)$, kde $A1 \in (0, 1)$ počítame interpoláciou pomocou funkcie *interp1*(*A*, *psi*, *A1*).

Druhý spôsob výpočtu využíva explicitný predpis pre deriváciu funkcie $\psi(A)$ definovaný vzťahom (3.9).

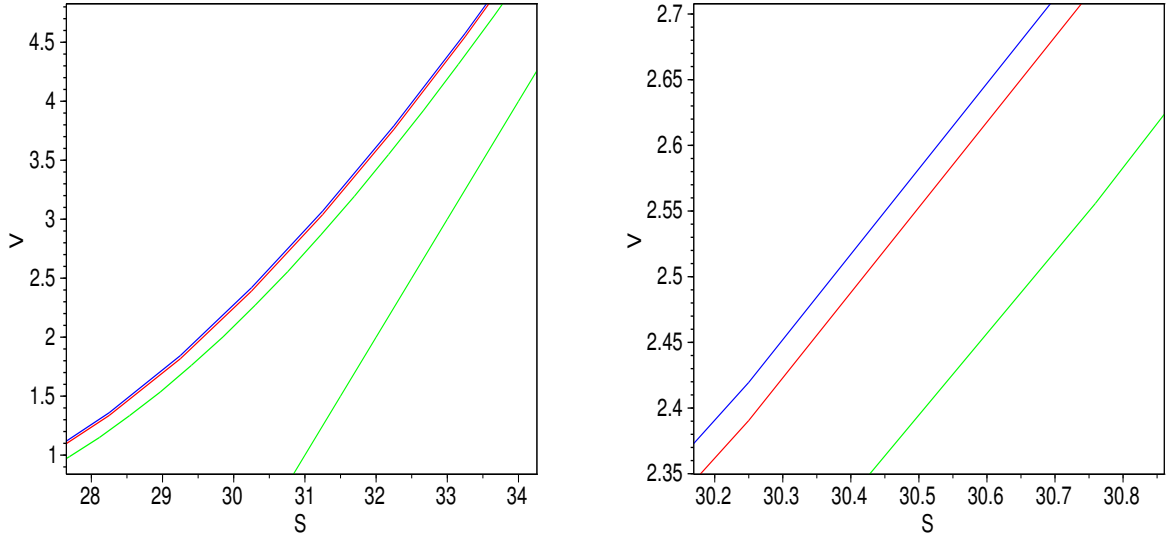
Po úprave vzťahu (3.12) dostávame rekurentný predpis pre výpočet hodnôt H^{j+1} v časovej vrstve $j + 1$ z hodnôt H^j v časovej vrstve j :

$$\begin{aligned} H^{j+1} = & \left(\frac{k}{h^2}(\beta'_H)_{i-1}^j - \frac{k}{2h}(\beta'_H)_i^j - \frac{kr}{2h} \right) H_{i-1}^j \\ & + \left(-\frac{k}{h^2}(\beta'_H)_i^j - \frac{k}{2h}(\beta'_H)_{i-1}^j + 1 \right) H_i^j \\ & + \left(\frac{k}{h^2}(\beta'_H)_i^j + \frac{k}{2h}(\beta'_H)_i^j + \frac{kr}{2h} \right) H_{i+1}^j \\ & + \frac{k}{h}(\beta'_x)_i^j - \frac{k}{h}(\beta'_x)_{i-1}^j + k(\beta'_x)_i^j, \end{aligned}$$

kde derivácie β'_x a β'_H máme definované vyššie.

Analogicky ako v predchádzajúcej časti počítame integrál (3.11) numericky.

Na obrázkoch v Obr.3.3 môžeme vidieť cenu opcie, s parametrami zhodnými s opciou s predchádzajúcej časti, vypočítanú pomocou modelu investorových preferencií s využitím aproximácie (3.1) - červená krivka, s využitím aproximácie (3.3) - modrá krivka a nakoniec vypočítanú numericky pomocou lineárnej Black-Scholesovej rovnice - zelená krivka, na obrázku vidíme aj krivku určujúcu payoff, taktiež zelenou farbou. Na pravom obrázku môžeme vidieť priblížený pohľad.



Obr.3.3: Cena $V(S,0)$ call opcie s parametrami: $E = 30$, $S_{ask} = 36.26$, $S_{bid} = 36.25$, $r = 0.02$, $\hat{\sigma} = 0.15$, vypočítaná podľa modelu investorových preferencií s využitím explicitnej metódy a aproximácie (3.1)- červená krivka, s využitím explicitnej metódy a aproximácie (3.3)- modrá krivka, a podľa lineárnej Black-Scholesovej rovnice - zelená krivka. Napravo obrázku môžeme vidieť priblížený pohľad

3.3.2 Využitie semiimplicitnej metódy

V nasledovnej časti uvedieme riešenie Γ rovnice pre model investorových preferencií pomocou semiimplicitnej schémy. V podkapitole *Numerická schéma časti Semiimplicitná metóda* sme uviedli všeobecnú schému, ktorá platí pre oba nami skúmané modely. Najprv si ju odvodíme pre model investorových preferencií.

Ako sme už spomenuli vyššie, pre výpočet novej časovej vrstvy j zo starej časovej vrstvy $j - 1$, dostávame trojdiagonálny systém :

$$A^j H^j = d^j, \quad (3.13)$$

definovaný vzťahmi (3.7), kde A je štvorcová matica s rozmermi $(2n - 1) \times (2n - 1)$. Pripomeňme, že matica H má rozmery $(2n + 1) \times (2n - 1)$. Odvolávajúc sa na [10],

uvedieme teraz spôsob, ako vyriešiť trojdiagonálny systém, definovaný vzťahmi (3.7), (3.13) pomocou LU rozkladu matice A .

Vyjadríme si maticu A ako súčin dolnej trojuholníkovej matice L a hornej trojuholníkovej matice U , a úlohu (3.13) prepíšeme do tvaru :

$$L^j U^j H^j = d^j \quad (3.14)$$

Maticu A^j si teda vieme vyjadriť v tvare LU rozkladu nasledovne: $A^j = L^j U^j$:

$$\begin{pmatrix} b_2^j & c_2^j & 0 & \dots & 0 \\ a_3^j & b_3^j & c_3^j & \dots & 0 \\ 0 & a_4^j & b_4^j & c_4^j & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{2n}^j & b_{2n}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ l_3^j & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & l_4^j & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & l_{2n}^j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^j & c_2^j & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & u_3^j & c_3^j & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & u_4^j & c_4^j & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & u_{2n}^j \end{pmatrix}$$

Po roznásobení dolnej L^j a hornej U^j matice, dostávame vzťahy pre vyjadrenie prvkov týchto matic, zo známych hodnôt matice A^j :

$$\begin{aligned} u_2^j &= b_2^j \\ u_i^j &= b_i^j - \left(\frac{c_{i-1}^j a_i^j}{u_{i-1}^j} \right), \text{ pre } i = 3, 4, \dots, 2n \\ l_i^j &= \frac{a_i^j}{u_{i-1}^j}, \text{ pre } i = 2, 3, \dots, 2n \end{aligned}$$

pričom musí platiť $u_{i-1}^j \neq 0$ pre $i = 3, 4, \dots, 2n$.

Dá sa ukázať, že ak je matica A diagonálne dominantná, t.j. spĺňa podmienku : $b_i^j > |a_i^j| + |c_i^j|$ pre $i = 2, 3, \dots, 2n$, existuje pre ňu jednoznačný LU rozklad definovaný práve uvedenými vzťahmi .

Pre zaručenie nenulovosti teda môžeme v každom časovom kroku, pre všetky $i = 2, 3, \dots, 2n$, overovať, či je matica A^j diagonálne dominantná, alebo kontrolovať jednotlivé členy u_i^j .

Vieme ako vyzerajú matice L a U , a tak môžeme problém (3.14) na každej časovej vrstve j rozdeliť na dve jednoduché úlohy. Uvedieme postup riešenia pre jednu časovú vrstvu j , pre ľubovoľné $j = 2, 3, \dots, 2n - 1$.

Na každej časovej vrstve teda riešime dve úlohy, ktoré vyzerajú nasledovne:

$$U^j H^j = y^j \quad (3.15)$$

$$L^j y^j = d^j \quad (3.16)$$

V prvej úlohe, hľadáme vektor y^j s dĺžkou $2n - 1$, pre ktorý platí rovnosť (3.16). Z tejto rovnosti dostávame nasledovné vzťahy pre zložky hľadaného vektora y^j :

$$\begin{aligned} y_2^j &= d_2^j \\ l_i^j y_{i-1}^j + y_i^j &= d_i^j \text{ pre } i = 3, 4, \dots, 2n \end{aligned}$$

Vďaka prvému z uvedených vzťahov dostávame rekurentný predpis pre vyjadrenie všetkých ostatných zložiek vektora y^j .

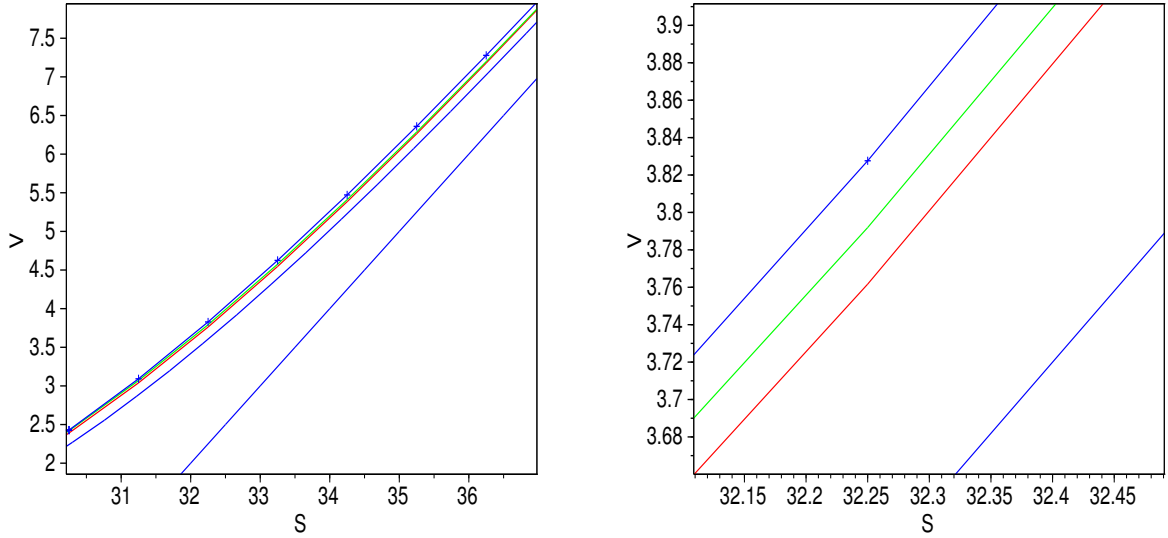
Po nájdení vektora y^j , riešime úlohu (3.15), hľadáme H^j . Po prepise maticového zápisu, dostávame vzťahy pre zložky vektora H^j :

$$\begin{aligned} u_i^j H_i^j + c_i^j H_{i+1}^j &= y_i^j \text{ pre } i = 2, 3, \dots, 2n - 1 \\ u_{2n}^j H_{2n}^j &= y_{2n}^j \end{aligned}$$

Vďaka druhému z uvedených vzťahov vieme, tak ako v predchádzajúcom prípade, vyjadriť všetky ostatné zložky vektora H^j .

Pre model investorových preferencií, do vzťahov definovaných v (3.7), dosadíme funkciu $\beta(H(x, \tau), x, \tau)$ definovanú v (3.8) a jej derivácie : $(\beta'_H)_i^j$, $(\beta'_x)_i^j$, ktoré uvádzame na začiatku odseku *Využitie aproximácie (3.3)* v rámci časti *Využitie explicitnej metódy* podkapitoly *Numerické riešenie modelu investorových preferencií*. Po získaní matice H numericky počítame integrál definovaný v (3.11), analogicky ako pre explicitnú schému, pomocou integrálneho súčtu.

Na obrázkoch Obr.3.4 môžeme vidieť porovnanie cien call opcie, s parametrami: $E = 30$, $S_{ask} = 36.26$, $S_{bid} = 36.25$, $r = 0.02$, $\hat{\sigma} = 0.15$. Cena call opcie vypočítaná pomocou modelu investorových preferencií explicitne, s využitím aproximácie (3.1) je znázornená červenou krivkou, s využitím aproximácie (3.3) je znázornená zelenou krivkou. Krivka znázorňujúca, cenu call opcie, vypočítanú pomocou lineárneho Black-Scholesovho modelu, je na obrázku znázornená modrou farbou. Krivka opisujúca cenu, vypočítanú podľa semiimplicitnej metódy, na obrázku zodpovedá modrej farbe a je označená '++'. Právý obrázok nám ponúka priblížený pohľad.



Obr.3.4: Cena $V(S, 0)$ call opcie s parametrami: $E = 30$, $S_{ask} = 36.26$, $S_{bid} = 36.25$, $r = 0.02$, $\hat{\sigma} = 0.15$, vypočítaná podľa modelu investorových preferencií s využitím explicitnej metódy a aproximácie (3.1)- červená krivka, s využitím explicitnej metódy a aproximácie (3.3)- zelená krivka, podľa lineárnej Black-Scholesovej rovnice - modrá krivka a podľa semiimplicitnej metódy - modrá krivka s označením '+'. Napravo obrázku môžeme vidieť priblížený pohľad.

3.4 Numerické riešenie modelu skákajúcej volatility

V tejto podkapitole si uvedieme numerické riešenia modelu skákajúcej volatility. Numerickú schému skonštruujeme pre explicitnú metódu, pomocou dvoch rôznych aproximácií prvej a druhej derivácie funkcie $\beta(H(x, \tau))$, a pre semiimplicitnú metódu definovanú vzťahmi (3.6) a (3.7).

3.4.1 Využitie explicitnej metódy

Využite aproximácie (3.1)

Využitím aproximácie (3.1) dostávame vzťah (3.4), pomocou ktorého hľadáme jednotlivé časové vrstvy H^j . Pripomeňme si, ako vyzerá predpis funkcie $\beta(H(x, \tau))$ pre model

skákajúcej volatility :

$$\beta(H(x, \tau)) = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_{min}^2}{2} H, & \text{pre } H < 0. \\ \frac{\hat{\sigma}_{max}^2}{2} H, & \text{pre } H > 0., \end{cases} \quad (3.17)$$

kde pre $\hat{\sigma}_{min}^2$ a $\hat{\sigma}_{max}^2$ podľa vzťahu (2.27) platí:

$$\hat{\sigma}_{min}^2 = \hat{\sigma}^2(1 - Le)$$

$$\hat{\sigma}_{max}^2 = \hat{\sigma}^2(1 + Le)$$

Podľa predpisu funkcie $\beta(H(x, \tau))$ vidíme, že sa v každej časovej vrstve j , pre všetky uvažujúce i , budeme pozerat' na znamienko H_i^j a podľa toho určovať hodnotu funkcie $\beta(H(x, \tau))$. Zavedieme si nasledovné pomocné označenie:

$$\beta_{i+1}^j = aH_{i+1}^j$$

$$\beta_i^j = bH_i^j$$

$$\beta_{i-1}^j = cH_{i-1}^j, \text{ kde pre } a, b, c \text{ platí :}$$

$$a = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_{min}^2}{2}, & \text{pre } H_{i+1}^j < 0. \\ \frac{\hat{\sigma}_{max}^2}{2}, & \text{pre } H_{i+1}^j > 0. \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_{min}^2}{2}, & \text{pre } H_i^j < 0. \\ \frac{\hat{\sigma}_{max}^2}{2}, & \text{pre } H_i^j > 0. \end{cases}$$

$$c = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_{min}^2}{2}, & \text{pre } H_{i-1}^j < 0. \\ \frac{\hat{\sigma}_{max}^2}{2}, & \text{pre } H_{i-1}^j > 0. \end{cases}$$

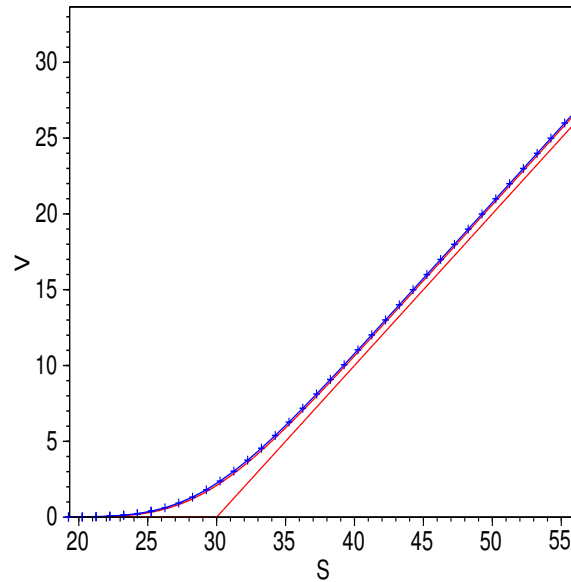
Po dosadení funkcie $\beta(H(x, \tau))$ do vzťahu (3.4) dostávame rekurentný predpis na výpočet hodnôt $j + 1$ časovej vrstvy H^{j+1} z hodnôt j -tej časovej vrstvy H^j :

$$H_i^{j+1} = \left(\frac{ck}{h^2} - \frac{ck}{2h} - \frac{kr}{2h} \right) H_{i-1}^j + \left(1 - \frac{2bk}{h^2} \right) H_i^j + \left(\frac{ak}{h^2} + \frac{ak}{2h} + \frac{kr}{2h} \right) H_{i+1}^j \quad (3.18)$$

Analogicky ako pri všetkých predošlých prípadoch, nasleduje numerický výpočet integrálu (3.11).

Ako sme už spomínali v podkapitole 2.3, model skákajúcej volatility má zmysel ak sa mení znamienko $\partial_S^2 V$, teda ak oceňujeme opčnú stratégiu. Pre explicitnú schému,

využívajúcu aproximáciu (3.1), overíme správnosť modelu skákajúcej volatility pre ocenenie call opcie. Podľa správnosti, by sa cena call opcie podľa modelu skákajúcej volatility mala rovnať cene call opcie, ocenennej pomocou lineárneho Black-Scholesovho modelu. Na obrázku Obr.3.5 môžeme vidieť cenu vypočítanú pomocou modelu skákajúcej volatility, modrá čiara s označením "+", a cenu vypočítanú pomocou lineárneho Black-scholesovho modelu, červená čiara. Na obrázku je taktiež vyznačený payoff danej call opcie, rovnako červenou farbou. Cena je počítaná pre call opciu s parametrami : $E = 30$, $S_{ask} = 36.26$, $S_{bid} = 36.25$, $r = 0.02$, $\hat{\sigma}^2 = 0.15$.



Obr.3.5: *Cena call opcie s parametrami : $E = 30$, $S_{ask} = 36.26$, $S_{bid} = 36.25$, $r = 0.02$, $\hat{\sigma}^2 = 0.15$, vypočítaná pomocou modelu skákajúcej volatility - modrá, pomocou Black - Scholesovho modelu - červená, payoff - červenou farbou.*

Môžeme vidieť, že obe ceny sa tesne prekrývajú, numerická schéma pre náš model by teda mala fungovať dobre.

Využite aproximácie (3.2)

Použitím explicitnej schémy a aproximácie (3.2) pre model skákajúcej volatility, dostávame rovnicu:

$$\frac{H_i^{j+1} - H_i^j}{k} = \frac{1}{h} \left((\beta'_H)^j_{i+1/2} \left(\frac{H_{i+1}^j - H_i^j}{h} \right) - (\beta'_H)^j_{i-1/2} \left(\frac{H_i^j - H_{i-1}^j}{h} \right) \right)$$

$$+(\beta'_H)_i^j \left(\frac{H_{i+1}^j - H_{i-1}^j}{2h} \right) + r \left(\frac{H_{i+1}^j - H_{i-1}^j}{2h} \right), \quad (3.19)$$

kde:

$$(\beta'_H)_i^j = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_{min}^2}{2}, & \text{pre } H_i^j < 0. \\ \frac{\hat{\sigma}_{max}^2}{2}, & \text{pre } H_i^j > 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Opäť sa budeme v každej časovej vrstve j , pre všetky uvažujúce i , pozerat' na znamienko H_j^j , a zavedieme pomocné označenie, podobné ako v predchádzajúcej explicitnej schéme:

$$(\beta'_H)_{i-1/2}^j = a$$

$$(\beta'_H)_i^j = b$$

$$(\beta'_H)_{i+1/2}^j = c, \text{ kde pre } a, b, c \text{ platí :}$$

$$a = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_{min}^2}{2}, & \text{pre } H_{i-1/2}^j < 0. \\ \frac{\hat{\sigma}_{max}^2}{2}, & \text{pre } H_{i-1/2}^j > 0. \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_{min}^2}{2}, & \text{pre } H_i^j < 0. \\ \frac{\hat{\sigma}_{max}^2}{2}, & \text{pre } H_i^j > 0. \end{cases}$$

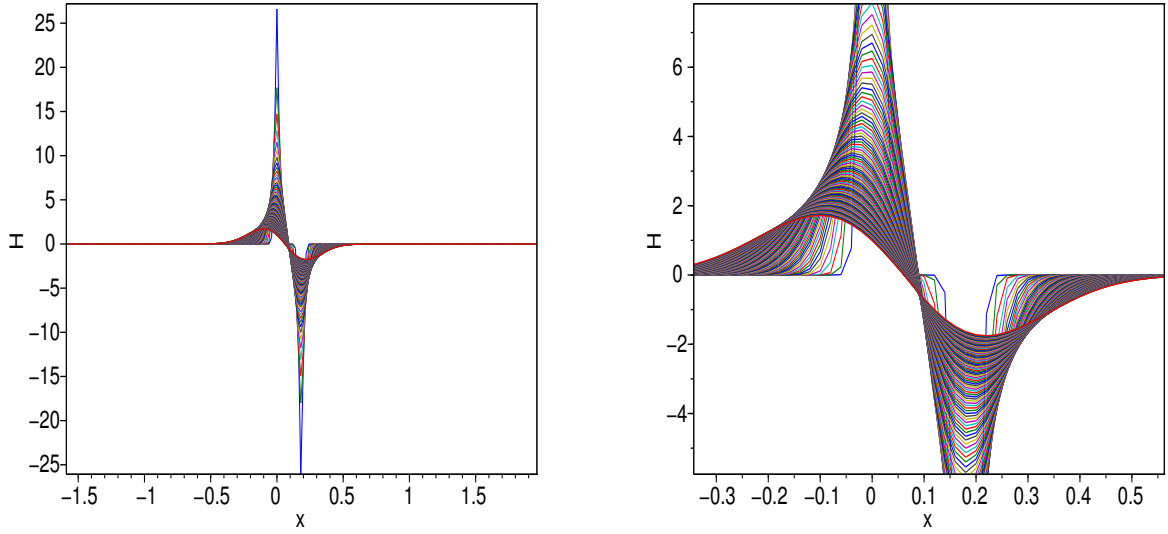
$$c = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_{min}^2}{2}, & \text{pre } H_{i+1/2}^j < 0. \\ \frac{\hat{\sigma}_{max}^2}{2}, & \text{pre } H_{i+1/2}^j > 0. \end{cases}$$

Po dosadení β'_H do rovnice (3.19) dostávame nasledovný rekurentný predpis:

$$H_i^{j+1} = \left(\frac{ak}{h^2} - \frac{bk}{2h} - \frac{rk}{2h} \right) H_{i-1}^j + \left(1 - \frac{ak}{h^2} - \frac{ck}{h^2} \right) H_i^j + \left(\frac{ck}{h^2} + \frac{bk}{2h} - \frac{rk}{2h} \right) H_{i+1}^j \quad (3.21)$$

Ako pri predošlých prípadoch, ďalej pokračujeme numerickým výpočtom integrálu (3.11).

Obe explicitné schémy, odvodené pre model skákajúcej volatility, sa vo výsledkoch líšia len veľmi málo, budeme teda pre ďalšie porovnávanie cien, či výpočty používať explicitnú schému, využívajúcu aproximáciu (3.2). Na obrázkoch v Obr.3.6 môžeme vidieť H^j pre všetky časové vrstvy $j = 1, 2, 3, \dots, m+1$. Teda postupnú iteráciu od počiatočnej podmienky H^1 po koncovú podmienku H^{m+1} pre opčnú stratégiu *bullish spread* s parametrami : $E1 = 25$, $E2 = 30$, $S_{ask} = 36.26$, $S_{bid} = 36.25$, $r = 0.02$, $\hat{\sigma}^2 = 0.15$. Na pravom obrázku vidíme priblíženie.



Obr.3.6: Jednotlivé časové vrstvy H^j pre $j = 1, 2, \dots, m + 1$ pre opčnú stratégiu bullish spread s parametrami : $E1 = 25$, $E2 = 30$, $S_{ask} = 36.26$, $S_{bid} = 36.25$, $r = 0.02$, $\hat{\sigma}^2 = 0.15$. Na pravom obrázku vidíme približený záber.

3.4.2 Využitie semiimplicitnej metódy

Vďaka jednoduchému predpisu funkcie $\beta(H(x, \tau))$ pre model skákajúcej volatility vid' (3.17), sa nám semiimplicitná metóda zjednoduší, resp. prvky definované vzťahom (3.7) nájdeme jednoduchšie a pre tento model budú vyzerat' nasledovne:

$$\begin{aligned}
 a_i^j H_{i-1}^j + b_i^j H_i^j + c_i^j H_{i+1}^j &= d_i^j \\
 a_i^j &= -\frac{k}{h^2} B + \frac{kr}{2h} \\
 c_i^j &= -\frac{k}{h^2} C - \frac{kr}{2h} \\
 b_i^j &= 1 + \frac{k}{h^2} (B + C) \\
 d_i^j &= H_{i-1}^{j-1} + \frac{k}{h} (C H_{i-1}^{j-1} - B H_{i-1}^{j-1}) , \text{ kde :} \\
 B &= \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_{min}^2}{2}, & \text{pre } H_{i-1}^{j-1} < 0. \\ \frac{\hat{\sigma}_{max}^2}{2}, & \text{pre } H_{i-1}^{j-1} > 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$C = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_{min}^2}{2}, & \text{pre } H_i^{j-1} < 0. \\ \frac{\hat{\sigma}_{max}^2}{2}, & \text{pre } H_i^{j-1} > 0. \end{cases}$$

Dá sa ukázať, že odvodenie Γ rovnice bude rovnaké pre opčnú stratégiu bullish spread, ako pre opciu call resp. put. Zmení sa len počiatočná podmienka, ktorá nadobudne podľa [11] nasledovný tvar:

$$\bar{H} = \frac{N'(d_1)}{\hat{\sigma}\sqrt{\tau^*}} - \frac{N'(d_2)}{\hat{\sigma}\sqrt{\tau^*}}$$

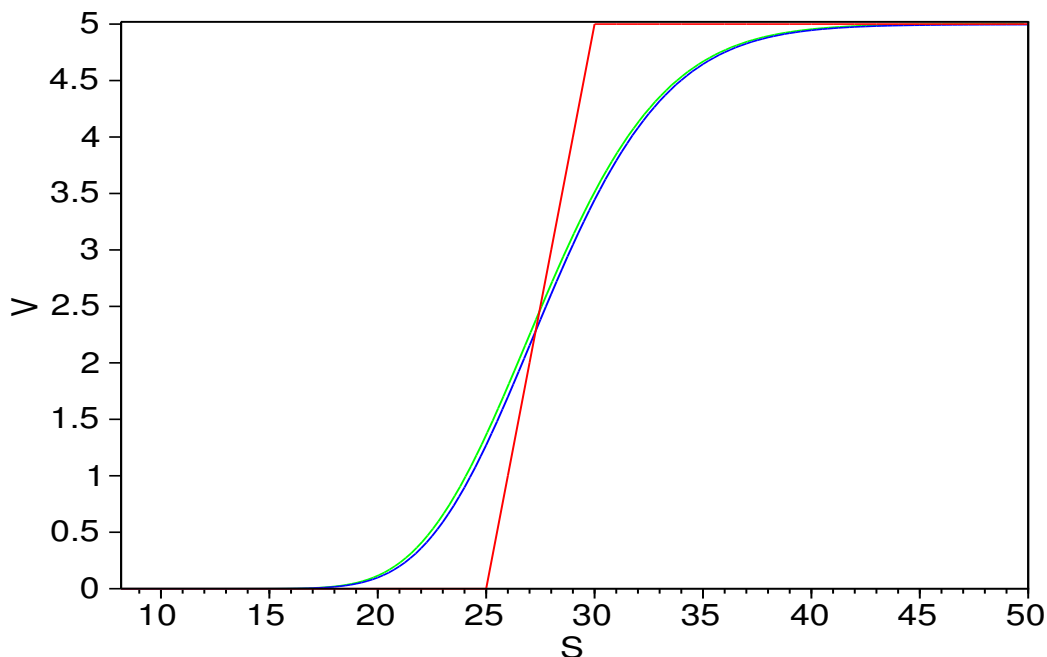
$$N'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}}$$

$$d_1 = (x + (r - \sigma^2/2)\tau^*)/(\hat{\sigma}\sqrt{\tau^*})$$

$$d_2 = (x - \ln(E2/E1) + (r - \sigma^2/2)\tau^*)/(\hat{\sigma}\sqrt{\tau^*})$$

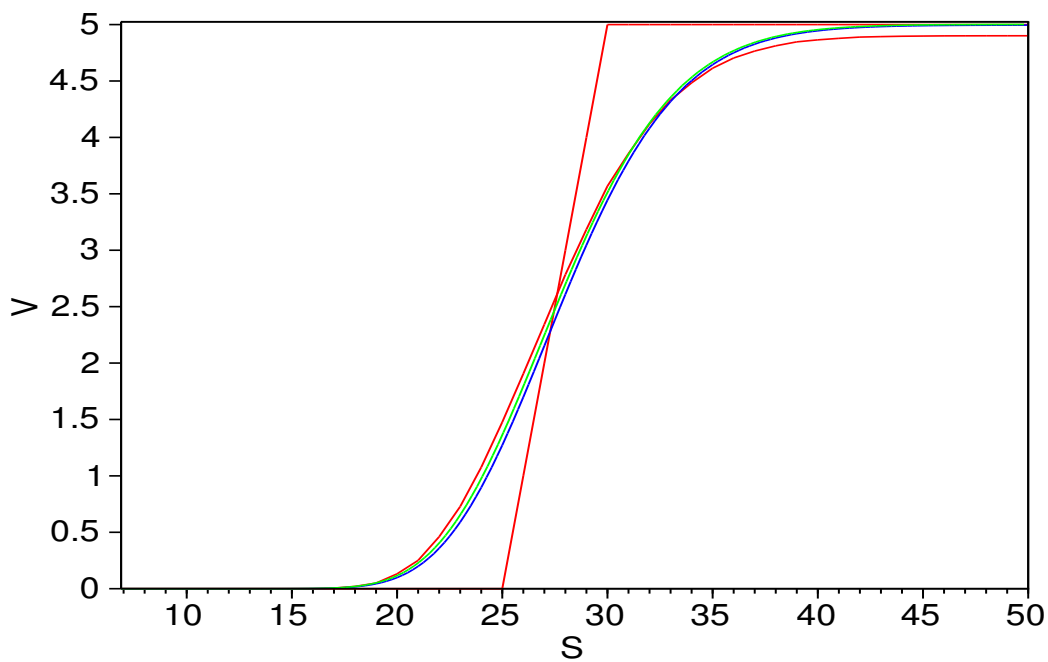
Využitím rovnakého postupu, ako pre model investorových preferencií, pri odvádzaní semiimplicitnej schémy, dostávame poslednú časovú vrstvu matice H^{2n-1} , ktorá vstupuje do výpočtu pre cenu opčnej stratégie, ktorú počítame pomocou (3.12), pričom položíme $E = E1$.

Na obrázku Obr.3.7 môžeme vidieť cenu opčnej stratégie bullish spread. Zelenou farbou je vyznačená krivka, označujúca cenu vypočítanú pomocou explicitnej schémy s využitím aproximácie (3.2). Modrá krivka zobrazuje cenu pomocou semiimplicitnej schémy a nakoniec červená krivka zobrazuje payoff. Parametre bullish spread : $E1 = 25$, $E2 = 30$, $S_{ask} = 36.26$, $S_{bid} = 36.25$, $r = 0.02$, $\hat{\sigma}^2 = 0.15$



Obr.3.7: *Cena opčnej stratégie bullish spread s parametrami : $E1 = 25$, $E2 = 30$, $S_{ask} = 36.26$, $S_{bid} = 36.25$, $r = 0.02$, $\hat{\sigma}^2 = 0.15$. Zelená krivka je cena, vypočítaná explicitnou schémou s využitím aproximácie (3.2) pre model skákajúcej volatility, modrá krivka je cena, vypočítaná pomocou semiimplicitnej schémy pre model skákajúcej volatility a červenou je znázornený payoff.*

Môžeme vidieť, že semiimplicitná a explicitná metóda pre model skákajúcej volatility dáva veľmi podobné výsledky. V nasledovnom obrázku si dokreslíme k porovnaniu semiimplicitnej a explicitnej metódy, ešte cenu opčnej stratégie, vypočítanú pomocou lineárneho Black-Scholesovho modelu.



Obr.3.8: *Cena opčnej stratégie bullish spread s parametrami : $E1 = 25$, $E2 = 30$, $S_{ask} = 36.26$, $S_{bid} = 36.25$, $r = 0.02$, $\hat{\sigma}^2 = 0.15$ podľa Obr.č.3.7 s pridanou červenou krivkou, znázorňujúcou cenu, podľa lineárneho Black-Scholesovho modelu .*

Záver

Cieľom našej práce bola numerická analýza a odvodenie numerických schém pre modely oceňovania opcií európskeho typu, ktoré vznikajú modelovaním nelineárnych efektov, akými sú transakčné náklady, riziko plynúce z nezaisteného portfólia, ktoré vstupujú, okrem iného, do modelovania investorových preferencií a skákajúcej volatility.

V prvej kapitole približujeme čitateľovi problematiku finančných derivátov a oceňovania opcií európskeho typu. Taktiež v tejto kapitole uvádzame riešenie lineárnej Black-Scholesovej rovnice, ktorá je východiskom pre všetky ostatné nelineárne modely oceňovania európskych opcií. V druhej kapitole podrobne rozoberáme odvodenie modelu investorových preferencií a modelu skákajúcej volatility.

Pre oba modely vieme vzniknutú nelineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu transformovať na kvázilineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu, tiež známu ako Gama rovnicu. Pomocou Gama rovnice vieme skonštruovať numerickú schému pre výpočet ceny call resp. put opcie európskeho typu pre model investorových preferencií, a taktiež pre výpočet hodnoty opčnej stratégie pre model skákajúcej volatility.

V tretej kapitole odvádzame numerické schémy pre spomínané modely.

Pri odvádzaní numerickej schémy vieme aproximáciu prvej a druhej derivácie funkcie $\beta(H(x, \tau), x, \tau)$, vystupujúcej v Gama rovnici, nahradiť pomocou vyjadrenia jej parciálnych derivácií, podľa jednotlivých premenných x a H , nakoľko poznáme jej predpis pre oba skúmané modely. Práve vo využití týchto parciálnych derivácií funkcie $\beta(H(x, \tau), x, \tau)$ vo vyjadrení aproximácie prvej a druhej derivácie funkcie $\beta(H(x, \tau), x, \tau)$, vidíme prínos našej diplomovej práce.

Pre aproximáciu prvej a druhej derivácie funkcie $\beta(H(x, \tau), x, \tau)$ teda využívame okrem klasickej diferencie aj aproximáciu využívajúcu parciálne derivácie funkcie $\beta(H(x, \tau), x, \tau)$. Na jednotlivé aproximácie aplikujeme explicitnú a semiimplicitnú metódu. Explicitná metóda je síce jednoduchšia, no narozdiel od semiimplicitnej, nás obmedzuje na voľbu časového a priestorového kroku numerickej schémy, kvôli podmienke CLF, ktorá zaručuje konvergenciu explicitnej metódy. V tejto kapitole taktiež uvádzame výsledky našich numerických schém.

Zoznam použitej literatúry

- [1] AVELANEDA M., LEVY A., PARAS A.: *Pricing and hedging derivate securities in market with uncertain volatilities*, Aplied Mathematical Finance, 1998,
- [2] BABUŠÍKOVÁ J., SLODIČKA H., WEISZ, J. : *Numerické metódy* , dostupné na internete na <http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/babusikova/skripta.pdf>
- [3] BARLES G., SONER H. M.: *Option pricing and transaction cost and a non/linear Black-Scholes equation*, Finance Stochast 2, 369-397, 1998
- [4] FREY, R.: *Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging in model risk*, Risk Publications
- [5] HODGES S.D., NEUBERGER A.: *Optimal replication of contingent claims under transaction costs*, Journal of Finance, 1989
- [6] JANDAČKA M., ŠEVČOVIČ D.: *On the risk adjusted pricing methodotolgy based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile*, Journal of Applied Mathematics, 2005
- [7] KRATKA M.: *No mystery behind the smile*, Journal of Finance, 1985
- [8] KWOK Y. K : *Mathematical models of Financial Derivatives*, Springer Finance, 1998
- [9] LELAND H.E.: *Option pricing and replication with transaction cost*, Journal of Finance, 1985
- [10] ŠEVČOVIČ D., STEHLÍKOVÁ B., MIKULA K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU, Bratislava 2009
- [11] ŠEVČOVIČ D., STEHLÍKOVÁ B., MIKULA K.: *Analytical and numerical methods for pricing financial derivatives*, Nova Science Publishers, 2011

Prílohy

Príloha 1 : Vstupy do modelu skákajúcej volatility, pre obe explicitné schémy

```
//Vstupy do modelu skákajúcej volatility
//_____
function [v]=Leland(c,sigma,delta_t)
    v=c./(sigma*sqrt(delta_t))*sqrt(2/%pi);
endfunction
//_____
//konkrétne vstupy
E= 30;
r=0.02;
Sask=36.26;
Sbid=36.25;
sigma=0.15;
S=(Sask+Sbid)/2;
C=(Sask-Sbid)/S;

//podmienka pre prípustné casy : delta_t > pt
pt = (2/%pi)*(C^2/sigma^2)
//interval prerozdelenia
delta_t = 0.01;

L=2;
T=1;
m=100;
Le=Leland(C,sigma,delta_t);

//s pridanou pociatocnou podmienkou sa zmenší
//časový interval pre tau o tau1,
//kde tau1 je bodom prepojenia
```

```

taul = delta_t;
k=(T-taul)/m;

//podmienka konvergenzie CLF :  $h \geq \sqrt{k * \sigma^2}$ 
sigma * sqrt(k)
h=0.02;
n = round(L/h);

```

Príloha 2 : Plnenie matice H pre explicitnú schému modelu skákajúcej volatility využívajúcu aproximáciu (3.1)

```

// Model skákajúcej volatility , approx.1 , plnenie matice H

//inicializacia
H=zeros(2*n+1,m+1);
x=-L:h:L;
tau=taul:k:T;

//okrajove podmienky
H(1,:)=zeros(1,m+1);
H(2*n+1,:)=zeros(1,m+1);

//pociatocna podmienka => aproximacia dirac delta :
for i = 2:2*n
    x=-L+(i-1)*h;
    d=(x+(r-sigma^2/2)*taul)/(sigma*sqrt(taul));
    H(i,1) =((1/sqrt(2*%pi))*exp(-d^2/2))/(sigma*sqrt(taul));
end

//vkladanie hodnot do matice rieseni H
si1=sqrt((sigma^2)*(1-Le));
si2=sqrt((sigma^2)*(1+Le));
a=0;b=0;ab=0;

```

```

for j=1:m
    for i=2:2*n
        if sign(H(i+1,j)) ==1 then a=(si2 ^2)/2;
        elseif sign(H(i+1,j)) ==-1 then a=(si1 ^2)/2;
        else a=0;
        end

        if sign(H(i ,j)) ==1 then b=(si2 ^2)/2;
        elseif sign(H(i ,j)) ==-1 then b=(si1 ^2)/2;
        else b=0;
        end

        if sign(H(i-1,j)) ==1 then ab=(si2 ^2)/2;
        elseif sign(H(i-1,j)) ==-1 then ab=(si1 ^2)/2;
        else ab=0;
        end

        H(i ,j+1) = ((ab*k)/h^2 - (ab*k)/(2*h) - (r*k)/(2*h))*H(i-1,j)
                    + (1-(2*b*k)/h^2)*H(i ,j) + ((k*a)/h^2 + (k*a)/(2*h)
                    + (k*r)/(2*h))*H(i+1,j);
    end
end
end

```

Príloha 3 : Plnenie matice H pre explicitnú schému modelu skákajúcej volatility využívajúcu aproximáciu (3.2)

```

// Plnenie H, pre model skákajúcej volatility aprox2

//inicializacia
H=zeros(2*n+1,m+1);
x=-L:h:L;

```

```

tau=tau1:k:T;

//okrajove podmienky
H(1,:)=zeros(1,m+1);
H(2*n+1,:)=zeros(1,m+1);

//pociatocna podmienka => aproximacia dirac delta :
for i = 2:2*n
    x=-L+(i-1)*h;
    d=(x+(r-sigma^2/2)*tau1)/(sigma*sqrt(tau1));
    H(i,1) =((1/sqrt(2*%pi))*exp(-d^2/2))/(sigma*sqrt(tau1));
end

//vkladanie hodnot do matice rieseni H
si1=sqrt(sigma^2*(1-Le));
si2=sqrt(sigma^2*(1+Le));
A1=0;A2=0;A3=0;

for j=1:m
    for i=2:2*n
        if sign((H(i-1,j)+H(i,j))/2) ==-1 then A2=si1^2/2;
        else A2=si2^2/2;
        end

        if sign((H(i+1,j)+H(i,j))/2) ==-1 then A1=si1^2/2;
        else A1=si2^2/2;
        end

        if sign(H(i,j)) ==-1 then A3=si1^2/2;
        else A3=si2^2/2;
        end

        H(i,j+1) = (A2*k/h^2 - A3*k/(2*h) - r*k/(2*h))*H(i-1,j)
    end
end

```

```

+ (1-A2*k/h^2-A1*k/h^2)*H(i , j)
+ (A1*k/h^2 + A3*k/(2*h) + k*r/(2*h))*H(i+1,j);

end

end

```

Príloha 4 : Numerický výpočet integrálu

```

//NUMERICKY INTEGRAL

K=100;
krok=K/(2*n);
v= zeros(2*n,1);

for j=2:2*n
s1=0;s2=0;
S1=0+krok*j;

for i = 2:2*n
s1=s1+h*(max(S1-E*exp(-L+(i-1)*h),0)*H(i-1,m+1));
s2=s2+h*(max(S1-E*exp(-L+i*h),0)*H(i ,m+1)) ;
end
v(j,1)=(s1+s2)/2;

end

```

Príloha 5 : Numerický výpočet funkcie ψ

```

//———Výpočet psi pomocou Newtonovovej metódy ——
nn = 100;
hh = 0.01;

A_0 = 0;
psi_0 = 0;

```

```

A = zeros(nn,1);
psi = zeros(nn,1);
A(1,1) = 0.01;
psi(1,1) = 0.3;

for i=2:nn
    A(i,1) = A(i-1,1) + hh;
    psi(i,1) = psi(i-1,1) +
        hh*((psi(i-1,1)+1)/(2*sqrt(psi(i-1,1)*A(i-1,1)) - A(i-1,1)));
end

A=[A_0,A']';
psi=[psi_0,psi']';

//_____

```

Príloha 6 : Vstupy do modelu investorových preferencií, pre obe explicitné schémy

```

/Vstupy do modelu investorových preferencií
E = 30;
r=0.02;
Sask=36.26;
Sbid=36.25;
sigma=0.15;
S=(Sask+Sbid)/2;

mi = (Sask-Sbid)/(Sask+Sbid);
eps = 0.001;
a = mi/sqrt(eps);

delta_t = 0.01; //interval prerozdelenia
L=2;

```



```

T=1;
m=100;

tau1 = delta_t;
k=(T-tau1)/m;

//podmienka konverencie CLF :  $h \geq \sqrt{k \cdot \sigma^2}$ 
sigma * sqrt(k)
h=0.02;
n = round(L/h);

```

Príloha 7 : Plnenie matice H , pre model ivestorových preferencií s využitím aproximácie (3.1)

```

//Plnenie H pre IP aprox. 1

//inicializacia
H=zeros(2*n+1,m+1);
x=-L:h:L;
tau=tau1:k:T;

//okrajove podmienky
H(1,:)=zeros(1,m+1);
H(2*n+1,:)=zeros(1,m+1);

//pociatocna podmienka => aproximacia dirac delta :
for i = 2:2*n
    x=-L+(i-1)*h;
    d=(x+(r-sigma^2/2)*tau1)/(sigma*sqrt(tau1));
    H(i,1) =(exp(-d^2/2))/(sigma*sqrt(tau1)*sqrt(2*%pi));
end

//vkladanie hodnot do matice rieseni H

```

```

A1 = 0;A2 = 0;A3 = 0;
a1=0;a2=0;a3=0;
for j=1:m
    for i=2:2*n
        a1 = E*(a^2)*exp(r*(tau1+(j-1)*k)+(-L+(i-2)*h))*H(i-1,j);
        A1 = (sigma^2/2)*(1+interp1(A,psi,a1)) ;
        a2 = E*a^2*exp(r*(tau1+(j-1)*k)+(-L+(i-1)*h))*H(i,j);
        A2 = (sigma^2/2)*(1+interp1(A,psi,a2)) ;
        a3 = E*a^2*exp(r*(tau1+(j-1)*k)+(-L+i*h))*H(i+1,j);
        A3 = (sigma^2/2)*(1+interp1(A,psi,a3)) ;

        H(i,j+1) = ( A1*k/(h^2)-A1*k/(2*h)-k*r/(2*h))*H(i-1,j)
                    + (1-2*k*A2/h^2)*H(i,j) + (A3*k/h^2 + A3*k/(2*h)
                    + k*r/(2*h))*H(i+1,j);
    end
end
end

```

Príloha 8 : Plnenie matice H , pre model ivestorových preferencií s využitím aproximácie (3.4)

```

//pociatocna podmienka => aproximacia dirac delta :
for i = 2:2*n
    x=-L+(i-1)*h;
    d=(x+(r-sigma^2/2)*tau1)/(sigma*sqrt(tau1));
    H(i,1) =(exp(-d^2/2))/(sigma*sqrt(tau1)*sqrt(2*%pi));
end

//vkladanie hodnot do matice rieseni H

```

```

kk=0.01;
A1 = 0;A2 = 0;
a1=0;b1=0;c1=0;d1=0;
for j=1:m
    for i=2:2*n

        A1 = E*a^2*exp(r*(tau1+(j-1)*k)+(-L+(i-1)*h))*H(i,j);
        A2 = E*a^2*exp(r*(tau1+(j-1)*k)+(-L+(i-2)*h))*H(i-1,j);

        a1 =(k/(2*h)+k/h^2)*( (sigma^2/2)*(1+interp1(A,psi,A1))
            +((sigma^2)/2)*H(i,j)*E*a^2
            *exp(r*(tau1+(j-1)*k)+(-L+(i-1)*h))
            *( (interp1(A,psi,A1+kk)-interp1(A,psi,A1))/kk )
            +(r*k)/(2*h) );

        b1 =(-k/(h^2))*( (sigma^2/2)*(1+interp1(A,psi,A1))
            +(sigma^2/2)*H(i,j)*E*a^2*exp(r*(tau1+(j-1)*k)
            +(-L+(i-1)*h))*( (interp1(A,psi,A1+kk)
            -interp1(A,psi,A1))/kk ))
            +(-k/(h^2))*( (sigma^2/2)*(1+interp1(A,psi,A2))
            +(sigma^2/2)*H(i-1,j)*E*a^2*exp(r*(tau1+(j-1)*k)
            +(-L+(i-2)*h))*( (interp1(A,psi,A2+kk)
            -interp1(A,psi,A2))/kk ))+1 );

        c1 =(k/h^2)*( (sigma^2/2)*(1+interp1(A,psi,A2))
            +(sigma^2/2)*H(i-1,j)*E*a^2*exp(r*(tau1+(j-1)*k)
            +(-L+(i-2)*h))*( (interp1(A,psi,A2+kk)
            -interp1(A,psi,A2))/kk ) )
            -(k/(2*h))*( (sigma^2/2)*(1+interp1(A,psi,A1))
            +(sigma^2/2)*H(i,j)*E*a^2*exp(r*(tau1+(j-1)*k)
            +(-L+(i-1)*h))*( (interp1(A,psi,A1+kk)
            -interp1(A,psi,A1))/kk ))
            -((k*r)/(2*h)) );
    end
end

```

```

d1 =(k+(k/h))*(sigma^2/2)*H(i,j)*E*a^2
      *exp(r*(tau1+(j-1)*k)+(-L+(i-1)*h))
      *((interp1(A,psi,A1+kk)-interp1(A,psi,A1))/kk );

H(i,j+1) = a1*H(i+1,j) + b1*H(i,j) + c1*H(i-1,j) + d1;

end

end

```

Príloha 9 : Vstupy a plnenie matice H pre model ivestorových preferencií pre semiimplicitnú metódu

```

E = 30;
r=0.02;
Sask=36.26;
Sbid=36.25;
sigma=0.15;
S=(Sask+Sbid)/2;

mi = (Sask-Sbid)/(Sask+Sbid);
eps = 0.01;
a = mi/sqrt(eps);

//podmienka pre pripustne casy : delta_t > pt
pt = (2/%pi)*(mi^2/sigma^2)

delta_t = 0.01; //interval prerozdelenia
L=2;
T=1;
n=100;
h=L/n;

```

```

    tau1 = delta_t;
    k=(T-tau1)/(2*n-2);
    //inicjalizacja
    H=zeros(2*n+1,2*n-1);
    x=-L:h:L;
    tau=tau1:k:T;

    //okrajowe podmienky
    H(1,:)=zeros(1,2*n-1);
    H(2*n+1,:)=zeros(1,2*n-1);

    //pociatocna podmienka => aproximacia dirac delta :
    for i = 2:2*n
        x=-L+(i-1)*h;
        d=(x+(r-sigma^2/2)*tau1)/(sigma*sqrt(tau1));
        H(i,1) =((1/sqrt(2*%pi))*exp(-d^2/2))/(sigma*sqrt(tau1));
    end

    kk=0.01;
    aa=zeros(2*n,1);
    b=zeros(2*n,1);
    c=zeros(2*n,1);
    d=zeros(2*n,1);
    l=zeros(2*n,1);
    u=zeros(2*n,1);
    y=zeros(2*n,1);

    ///vkladanie hodnot do matice rieseni H

    for j=2:2*n
        disp('j')

```

```

for i=3:2*n

a1 = E*a^2*exp(r*(tau1+k*(j-1)) + -L+(i-1)*h )*H(i-1,j-1);
a2 = E*a^2*exp(r*(tau1+k*(j-1)) + -L+(i)*h )*H(i ,j-1);

aa(i,1)=(-k/h^2) * ((sigma^2/2)* (1+interp1(A,psi ,a1))
+ (sigma^2/2)*H(i-1,j-1)*a1
*((interp1(A,psi ,a1+kk)-interp1(A,psi ,a1))/kk))
+(k*r)/(2*h);

end

for i=2:2*n-1

a1 = E*a^2*exp(r*(tau1+k*(j-1)) + -L+(i-1)*h )*H(i-1,j-1);
a2 = E*a^2*exp(r*(tau1+k*(j-1)) + -L+(i)*h )*H(i ,j-1);

c(i,1) =(-k/h^2) * ((sigma^2/2)*(1+interp1(A,psi ,a2))
+ (sigma^2/2)*H(i ,j-1)*a2*((interp1(A,psi ,a2+kk)
-interp1(A,psi ,a2))/kk))
- (k*r)/(2*h);

end

for i=2:2*n

a1 = E*a^2*exp(r*(tau1+k*(j-1)) + -L+(i-1)*h )*H(i-1,j-1);
a2 = E*a^2*exp(r*(tau1+k*(j-1)) + -L+(i)*h )*H(i ,j-1);
b1= (sigma^2/2)* (1+interp1(A,psi ,a1))*H(i-1,j-1);
b2= (sigma^2/2)* (1+interp1(A,psi ,a2))*H(i ,j-1);
bx1= (sigma^2/2)* H(i-1,j-1)^2*a1
*((interp1(A,psi ,a1+kk)-interp1(A,psi ,a1))/kk) ;
bx2= (sigma^2/2)* H(i ,j-1)^2*a2
*((interp1(A,psi ,a2+kk)-interp1(A,psi ,a2))/kk) ;
b(i,1)=1-(aa(i,1)+c(i,1));

```

```

d(i,1)= H(i,j-1)+(k/h)*( b2-b1+bx2-bx1 );

end

//-----

for i=3:2*n
    u(2,1) = b(2,1) ;
    u(i,1) = b(i,1) - c(i-1,1)*aa(i,1)/u(i-1,1);
    l(i,1)=aa(i,1)/u(i-1,1);
end

for i=3:2*n
    y(2,1)=d(2,1);
    y(i,1)=d(i,1)-l(i,1)*y(i-1,1) ;

end

for i = 2*n-1:-1:2
    H(2*n,j)=y(2*n,1)/u(2*n,1);
    H(i,j)=(y(i,1)-c(i,1)*H(i+1,j))/u(i,1);
end

end

```

Príloha 10 : Počiatočná podmienka pre stratégiu bullish spread pre model skákajúcej volatility

```

//počiatočná podmienka pre bullish spread
for i = 2:2*n
    x=-L+(i-1)*h;
    d1=(x+(r-sigma^2/2)*tau1)/(sigma*sqrt(tau1));

```

```

    d2=(x-log (E2/E1)+(r-sigma ^2/2)*tau1)/(sigma*sqrt (tau1));
    H(i,1)  =((1/sqrt (2*%pi))*exp(-d1 ^2/2))/(sigma*sqrt (tau1))
            -((1/sqrt (2*%pi))*exp(-d2 ^2/2))/(sigma*sqrt (tau1));
end

```